UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

Caracterização de Domínios de Sistemas Elásticos

Autor: Wellington Luiz Bogarim de Faria

Orientador: Prof. Dr. Aloisio José Freiria Neves

28 de Fevereiro de 2002

Caracterização de Domínios de Sistemas Elásticos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Wellington Luiz Bogarim de Faria** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 28 de Fevereiro de 2002.

Prof. Dr. **Aloisio José Freiria Neves**.
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aloisio José Freiria Neves (Orient.).

Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos.

Prof. Dr. José Gaspar Ruas Filho.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Faria, Wellington Luiz Bogarim de

F225c Caracterização de domínios de sistemas elásticos / Wellington Luiz Bogarim de Faria -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Aloísio José Freiria Neves

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais. 2. Semigrupos. 3. Operadores lineares. I. Freiria Neves, Aloísio José. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 28 de fevereiro de 2002 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). ALOÍSIO JOSÉ FREIRIA NEVES

Prof (a). Dr (a). JOSÉ GASPAR RUAS FILHO

Prof (a). Dr (a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS

Agradecimentos

Aos meus pais e meus irmãos que sempre me deram todo tipo de apoio e incentivo durante a realização deste trabalho.

Ao Aloisio, meu orientador, por sempre ter sido muito crítico com meu trabalho, o que me permitiu evoluir muito e adquirir a experiência necessária para avançar em meus estudos.

Aos colegas Benaia e Lourenço que me hospedaram em sua casa tornando o término deste trabalho bem menos sacrificioso.

Aos colegas Mércio e Roberto pela amizade sincera e o incentivo constante que sempre me deram.

A Cidinha e a Tãnia da Secretaria por terem torcido pelo meu sucesso, se mostrando não só excelentes profissionais mas também pessoas com qualidades que as tornam especiais.

Muitas pessoas constantemente me deram palavras de incentivo durante a realização deste trabalho, especialmente colegas da pós-graduação do IMECC e familiares. A todos deixo aqui meus sinceros agradecimentos.

Sumário

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a influência do atrito nas equações da onda. Os exemplos clássicos neste contexto são a equação da onda com atrito viscoso

$$u_{tt} - \Delta u + \rho u_t = 0,$$

e a equação da onda com atrito forte

$$u_{tt} - \Delta u - \rho \Delta u_t = 0.$$

Nosso interesse está em estudar problemas onde o atrito varia entre estes dois casos. Mais especificamente, consideraremos

$$u_{tt} - \Delta u + \rho(-\Delta)^{\alpha} u_t = 0,$$

onde o parâmetro α satisfaz $0 \leq \alpha \leq 1$. Este problema gera semigrupo analítico para $1/2 \leq \alpha \leq 1$. Restringiremos nosso trabalho para este intervalo do parâmetro α.

Abstract

The aim of this work is to study the influence of the damping in wave equation with viscous damping

$$u_{tt} - \Delta u + \rho u_t = 0$$

and the strongly damped wave equation

$$u_{tt} - \Delta u - \rho \Delta u_t = 0.$$

We are interested in stunding problems where the damping vary in between these two cases. More specifically, we will consider

$$u_{tt} - \Delta u + \rho(-\Delta)^{\alpha} u_t = 0$$

where the parameter α satisfies $0 \leq \alpha \leq 1$. These problems generate analitic semigroups for $1/2 \leq \alpha \leq 1$. We will restrict our work to this range of the parameter α.

Introdução

A primeira motivação que deu origem a esse trabalho surgiu comparando a influência do atrito na equação da onda com atrito viscoso

$$u_{tt} - \Delta u + \rho u_t = 0 \tag{1}$$

e na equação da onda com atrito forte

$$u_{tt} - \Delta u - \rho \Delta u_t = 0, \tag{2}$$

que são equivalentes aos sistemas

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & -\rho I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \tag{3}$$

e

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & \rho\Delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

respectivamente. Pode-se analisar as soluções dessas equações estudando a geração de semigrupo dos operadores

$$\mathcal{A}_I = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & -\rho I \end{pmatrix} \ e \ \mathcal{A}_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & \rho\Delta \end{pmatrix}. \tag{5}$$

A questão principal é saber o domínio no qual esses operadores geram semigrupos. No caso do operador $\mathcal{A}_I$ essa tarefa não é difícil pois o domínio aparece naturalmente, ou seja, as condições para se calcular a imagem de um elemento por $\mathcal{A}_I$ compõem o domínio em que $\mathcal{A}_I$ gera semigrupo. No entanto isso não ocorre com $\mathcal{A}_\Delta$, exigindo uma análise mais cuidadosa. A solução que aparece para o operador $\mathcal{A}_\Delta$ motiva a obtenção de resultados mais gerais. Nosso interesse está em problemas com atrito variando entre os casos (1) e (2). Mais precisamente, problemas do tipo

$$u_{tt} - \Delta u + \rho(-\Delta)^\alpha u_t = 0, \tag{6}$$

onde o parâmetro α satisfaz $1/2 \leq \alpha \leq 1$. Em nosso trabalho estudamos problemas como (6) em um contexto ainda mais geral considerando sistemas elásticos do tipo

$$\ddot{x} + \rho A^\alpha \dot{x} + Ax = 0, \tag{7}$$

com $\rho > 0$, $1/2 \leq \alpha \leq 1$ e A sendo um operador auto-adjunto, estritamente positivo [1] e com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso em um espaço de Hilbert H.

A equação (7) é um caso particular de um problema que já foi amplamente estudado. Nos referimos a sistemas elásticos do tipo

$$\ddot{x} + B\dot{x} + Ax = 0, \tag{8}$$

ou, equivalentemente

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & -B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \tag{9}$$

estudados sobre o espaço de Hilbert $E = \mathcal{D}(A^{1/2}) \times H$. Em (8) o operador A é o mesmo definido em (7) e B possui as mesmas propriedades de A e satisfaz

$$\rho_1 < A^\alpha x, x > \leq < Bx, x > \leq \rho_2 < A^\alpha x, x > \quad x \in \mathcal{D}(A^\alpha), \quad \rho_1 > 0,\ \rho_2 > 0, \tag{10}$$

com $0 \leq \alpha \leq 1$. Os primeiros estudos sobre a equação (8) surgiram em um trabalho de G. Chen e D.L. Russel [2] publicado em 1982, onde ambos conjecturam que o operador

$$\mathcal{A}_B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & -B \end{pmatrix} \tag{11}$$

em (9), no caso $\alpha = 1/2$, gera um semigrupo analítico sobre E. Um trabalho publicado em 1987 de S.Chen e R. Triggiani [3] prova a conjectura e em 1989/1990 trabalhos dos

[1] Ou seja, temos que A satisfaz

$$< Ax, x > \geq K\|x\|^2$$

para algum $K > 0$

mesmos autores ([4] e [5]) estendem o resultado provando que $\mathcal{A}_B$ gera um semigrupo fortemente contínuo e de contrações sobre E para $0 \leq \alpha \leq 1$. Além disso, se $1/2 \leq \alpha \leq 1$, o semigrupo é analítico sobre E . Nosso problema em (7) se restringe ao caso $B = \rho A^\alpha$ com $1/2 \leq \alpha \leq 1$, onde temos que o operador

$$\mathcal{A}_{\rho\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & -\rho A^\alpha \end{pmatrix}, \tag{12}$$

obtido substituindo B por $-\rho A^\alpha$ em (11), possui propriedades especiais e gera um semigrupo analítico e de contrações como acabamos de citar. Nosso principal objetivo é estender os resultados obtidos para esse caso específico caracterizando, quanto a geração de semigrupo, o domínio de potências fracionárias do tipo $(-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^\theta$, $0 \leq \theta \leq 1$, $1/2 \leq \alpha \leq 1$, conforme o trabalho de S.Chen e R.Trigianni em [6].

Com o propósito descrito acima em mente seguimos o seguinte roteiro:

No capítulo 1 apresentamos noções sobre alguns assuntos que serão úteis para o desenvolvimento do trabalho. A maioria dos resultados que utilizamos estão colocados nesse capítulo diminuindo assim a necessidade do leitor procurar as referências. Uma introdução a teoria de semigrupos de operadores lineares com alguns resultados fundamentais como o teorema de Hille-Yosida e Lumer Phillips, é dada na seção 1.1. Como trabalhamos constantemente com potências fracionárias de operadores, introduzimos o assunto na seção 1.2. Na seção 1.3 é feita uma exposição detalhada sobre representação espectral de operadores auto-adjuntos e não limitados, um assunto fortemente utilizado para demonstrar nosso principal resultado. Na seção 1.4 damos uma breve exposição sobre espaços de interpolação, que será útil somente no último capítulo, onde são feitas algumas aplicações.

No capítulo 2 iniciamos estudando as três equações da onda clássicas, que são exemplos típicos de sistemas do tipo (7). O estudo desses exemplos nos motiva então a definir um domínio para operador $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$, que é mantido em todo o trabalho. Nas seções seguintes formalizamos o problema geral e estudamos algumas propriedades espectrais do operador $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$. Mostramos que $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ possui resolvente compacto para $1/2 \leq \alpha < 1$ e uma análise sobre seus auto-valores nos mostra ainda que os mesmos estão contidos em uma região que é conveniente para podermos definir as potências $(-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{\theta}$, $0 \leq \theta \leq 1$, e verificar que $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ realmente gera semigrupo analítico. Um estudo sobre os auto-vetores de $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ nos mostra ainda que $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ pode ser escrito como soma de dois operadores normais, com exceção em dois casos excepcionais onde aparece uma soma adicional de componentes. Essa última propriedade é útil para nós somente no último capítulo para se provar uma aplicação de nossos resultados.

O terceiro capítulo é, sem dúvida, o mais importante (e mais trabalhoso), pois nele verificamos que $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ realmente gera semigrupo analítico e demonstramos o teorema que caracteriza os domínios das potências fracionárias de $-\mathcal{A}_{\rho\alpha}$. Sua demonstração compreende praticamente todo esse capítulo.

No último capítulo colocamos duas aplicações do teorema demonstrado no capítulo 3. A primeira, sobre geração de semigrupo com perturbação não auto-adjunta e a segunda sobre a regularidade de um problema não homogêneo.

Capítulo 1

Conceitos Introdutórios

Nesse capítulo introduziremos noções de alguns assuntos necessários para desenvolvimento de nosso trabalho. A maioria dos resultados apresentados não serão demonstrados e poderão ser verificados consultando as respectivas referências citadas.

1.1 Semigrupos de operadores lineares

Para uma verificação dos resultados apresentados nessa seção consulte [9] .

Por toda esta seção X será considerado sempre um espaço de Banach.

Definição 1.1 *Dizemos que uma família* $\{T(t),\ 0 \leq t < \infty\}$, *de operadores lineares limitados em* X *é chamada de semigrupo fortemente contínuo se*

(i) $T(0)=I$

(ii) $T(s+t)=T(t)T(s)$ *para quaisquer* $t, s \geq 0$

(iii) $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x$ *para cada* $x \in X$

Nesse caso dizemos $T(t)$ *é um semigrupo de classe* C_0 *ou simplesmente um* C_0-*semigrupo. Ainda mais se*

$$\lim_{t\to 0^+} ||T(t) - I|| = 0,$$

dizemos que $T(t)$ *é uniformemente contínuo.*

Definição 1.2 *Seja* $\{T(t) : 0 \leq t < \infty\}$ *um* $C_0 -$ *semigrupo. Definimos o seu gerador* *infinitesimal como sendo o operador linear definido por*

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \tag{1.1}$$

onde seu domínio $\mathcal{D}(A)$ é o conjunto dos elementos x's para os quais o limite em (1.1) existe.

Definição 1.3 *Dizemos que uma família $\{T(t) : -\infty < t < \infty\}$ de operadores lineares limitados em X é um $C_0 -$ grupo se*

(i) $T(0) = I$

(ii) $T(s+t) = T(s)T(t), \qquad -\infty < t, s < \infty$

(iii) $\lim_{t \to 0} T(t)x = x$ *para todo* $x \in X$

O gerador infinitesimal de um $C_0 -$ grupo $T(t)$ é definido por

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t},$$

para o conjunto $\mathcal{D}(A)$ dos elementos de X, para os quais o limite acima existe.

Observação 1 *Se $T(t)$ é um $C_0 -$ grupo, temos que $T(t)$ para $t \geq 0$ e $T(-t)$ para $t \leq 0$ são $C_0 -$ semigrupos com geradores infinitesimais A e $-A$ respectivamente. Por outro lado se A e $-A$ são geradores infinitesimais de $C_0 -$ semigrupos $T^+(t)$ e $T^-(t)$ respectivamente, então A é o gerador infinitesimal de um $C_0 -$ grupo $T(t)$ dado por*

$$T(t) = \begin{cases} T^+(t) & \text{para} \quad t \geq 0 \\ T^-(-t) & \text{para} \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Proposição 1.1 *Seja $\{T(t) : 0 \leq t < \infty\}$ um C_0-semigrupo. Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$||T(t)|| \leq Me^{\omega t}.$$

Definição 1.4 *Se $\omega = 0$ no teorema anterior dizemos que $\{T(t) : 0 \leq t \leq \infty\}$ é uniformemente limitado. Além disso, se $M = 1$, ele é chamado um $C_0 -$ semigrupo de contrações.*

Teorema 1.5 *Seja T(t) um C_0- semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então:*

1) Para todo $x \in X$, $T(.)x : I\!R^+ \mapsto X$ é contínuo

2) Se $x_0 \in D(A)$, então $T(t)x_0 \in \mathcal{D}(A)$ e

$$\frac{d}{dt}T(t)x_0 = AT(t)x_0 = T(t)Ax_0.$$

Em particular $u(t) = T(t)u_0$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ x(0) &= x_0 \in \mathcal{D}(A) \end{cases}.$$

Definição 1.6 *Seja A um operador linear sobre X. Definimos como o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A todos os números complexos λ para os quais o operador $(\lambda I - A)$ possui inversa limitada e com domínio denso em X. Um número $\lambda \in \rho(A)$ é chamado de valor regular de A e a família de operadores $\{\ R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1},\ \lambda \in \rho(A)\ \}$ é chamada o resolvente de A. Definiremos o espectro de A, designando por $\sigma(A)$, como o complementar de $\rho(A)$ em $\mathbb{C}$. Sobre o espectro de A temos a seguinte classificação:*

i) Se $\lambda I - A$ admite inversa densamente definida em X , porém não limitada, dizemos que λ pertence ao espectro contínuo de A.

ii) Se λ admite inversa limitada em X, mas não densamente definida em X então λ pertence ao espectro residual de A.

iii) Se não existe a inversa de $(\lambda I - A)$, então dizemos que λ pertence ao espectro pontual de A.

Observe que o espectro pontual constitui todos os auto-valores de A.

Proposição 1.2 *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo T(t), então A possui domínio denso em X e é um operador linear fechado.*

Teorema 1.7 *(Hille-Yosida): Um operador linear A sobre X é o gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo de contrações T(t) se, e somente se,*

i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$

ii) O conjunto resolvente $\rho(A)$ contém $I\!R^+$ e para todo $\lambda > 0$

$$||R(\lambda : A)|| \leq 1/\lambda$$

onde $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

Teorema 1.8 *Seja A um operador com domínio denso em X e satisfazendo as seguintes condições:*

(i) Para algum $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, $\rho(A) \supset \sum_\sigma = \{\lambda : |arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\}$

(ii) Existe uma constante M tal que

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad para \quad \lambda \in \Sigma_\sigma, \quad \lambda \neq 0.$$

Então A é o gerador infinitesimal de um C_0- *semigrupo* $T(t)$ *satisfazendo* $\|T(t)\| \leq C$ *para alguma constante* $C > 0$.

Definição 1.9 *Seja* $\Delta = \{z : \varphi_1 < argz < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$ *e para cada* $z \in \Delta$, *seja* $T(z)$ *um operador linear limitado. A família* $\{T(z),\ z \in \Delta\}$, *é chamada um semigrupo analítico em* Δ *se satisfaz as seguintes condições:*

(i) $z \rightarrow T(z)$ *é analítico em* Δ

(ii) $T(0) = I$ *e* $\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \Delta}} T(z)x = x$ *para todo* $x \in X$

(iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ *para* $z_1, z_2 \in \Delta$

Um semigrupo T(t) será chamado analítico se ele for analítico em algum setor Δ contendo o eixo real não negativo.

Teorema 1.10 *Seja* $T(t)$ *um* C_0- *semigrupo uniformemente limitado. Seja A o gerador infinitesimal de* $T(t)$ *e consideremos* $0 \in \rho(A)$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $T(t)$ *pode ser estendido para um semi-grupo analítico no setor* $\Delta_\delta = \{z : |argz| < \delta\}$ *e* $\|T(t)\|$ *é uniformemente limitado em qualquer subsetor* $\overline{\Delta}_{\delta'}$, $\delta' < \delta$, *de* Δ_δ.

ii) Existe uma constante $C > 0$ *tal que para todo* $\sigma > 0$ *e* $\tau \neq 0$ *temos que*

$$\|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

iii) Existe $0 < \delta < \pi/2$ *e* $M > 0$ *tal que*

$$\rho(A) \supset \Sigma = \{\lambda; |arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\}$$

e

$$||R(\lambda : A)|| \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad para \quad \lambda \in \Sigma \quad e \quad \lambda \neq 0$$

iv) $T(t)$ é diferenciável para $t > 0$ e existe uma constante C tal que

$$||AT(t)|| \leq \frac{C}{t} \quad para \quad t > 0.$$

Teorema 1.11 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. Seja B um operador linear satisfazendo $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$ e*

$$||Bx|| \leq a||Ax|| + b||x|| \quad para \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

Existe um número δ tal que se $0 \leq a \leq \delta$ então $A + B$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.

Definição 1.12 *Seja X^* o dual de X. Definimos a transformação J de X no conjunto das partes 2^{X^*} de X^* por*

$$J : X \to J(X) = \{x^* \in X^* :< x^*, x >= ||x||^2 = ||x^*||^2\}$$

O teorema de Hahn-Banach garante que $J(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$. Escolhendo $j(x) \in J(X)$ para todo $x \in X$ obtemos uma aplicação

$$j : X \to X^*,$$

que é chamada "aplicação dualidade".

Definição 1.13 *Um operador linear A é dissipativo (com respeito a aplicação dualidade j) se*

$$Re(Ax, j(x)) \leq 0 \quad para \quad todo \quad x \in \mathcal{D}(A),$$

e acretivo se -A é dissipativo.

Teorema 1.14 *(Lumer-Phillips). Seja A um operador linear com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso em X. Então* *(i) Se A é dissipativo com respeito a alguma aplicação dualidade j e existe $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem de $\lambda_0 I - A$ é X, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 – semigrupo de contrações em X.*

(ii) Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 – semigrupo de contrações sobre X, então A é dissipativo (com respeito a j) e a imagem de $\lambda I - A$ é igual a X para todo $\lambda > 0$.

Corolário 1.15 *Seja A um operador linear com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso num espaço de Hilbert H. Se existe $\lambda_0 > \omega \geq 0$ tal que a imagem de $\lambda_0 - A$ é H e*

$$Re < Ax, x > \leq \omega \|x\|^2 \quad para \quad todo \quad x \in \mathcal{D}(A),$$

então A é o gerador infinitesimal de um C_0 – semigrupo $T(t)$ satisfazendo

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t}.$$

Observação 2 *Em particular, observe que se $Re < Ax, x >= 0$ para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, e existe $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem de $\lambda_0 \pm A$ é H, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 – grupo $T(t)$ de contrações.*

1.2 Potência fracionária de operadores

Consulte [9]pg 69 para verificar os resultados apresentados nessa seção.

Definição 1.16 *Seja A um operador linear fechado com domínio denso em X tal que*

$$\rho(A) \supset \Sigma^+ = \{\lambda : 0 < \omega < |arg\lambda| \leq \pi\} \cup V,$$

onde V é uma vizinhança de zero e

$$\|\lambda R(\lambda : A)\| \leq M \qquad para \quad \lambda \in \Sigma^+.$$

Para $\alpha > 0$ definimos

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_C z^{-\alpha}(A - zI)^{-1} dz, \tag{1.2}$$

onde o caminho C percorre no conjunto resolvente de A evitando o eixo real negativo e a origem.

Observe na definição 1.16 que se $M = 1$ e $\omega = \frac{\pi}{2}$ então -A é o gerador infinitesimal de um $C_0 - semigrupo$ e se $\omega < \frac{\pi}{2}$ então, pelo teorema 1.10, temos que -A é gerador de um semigrupo analítico.

Daqui em diante nessa seção, a menos que mencionemos o contrário, A estará sendo considerado um operador satisfazendo as hipóteses da definição 1.16.

Proposição 1.3 *Se $0 < \alpha < 1$ então*

$$A^{-\alpha} = \frac{sen\pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty t^{-\alpha}(tI + A)^{-1}dt.$$

Proposição 1.4 *Seja A um operador linear satisfazendo as hipóteses da definição1.16 com $\alpha > 0$ e $\omega < \frac{\pi}{2}$. Ou seja, -A gera um semigrupo analítico T(t). Temos então que*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1}T(t)dt, \tag{1.3}$$

onde

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx.$$

Observe que a integral em (1.3) converge na topologia do operador uniforme [1] para todo $\alpha > 0$.

Proposição 1.5 *Para $\alpha, \beta \geq 0$ temos que*

$$A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha}A^{-\beta}.$$

Proposição 1.6 *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$||A^{-\alpha}|| \leq C \quad para \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Proposição 1.7 *Para todo $x \in X$ temos que*

$$\lim_{\alpha \to 0} A^{-\alpha}x = x.$$

Proposição 1.8 *O operador $A^{-\alpha}$ em (1.3) é injetor.*

[1] Ou seja, converge no espaço das funções contínuas de X em X

Definição 1.17 *Seja A um operador linear como na definição1.16 com $\omega < \pi/2$. Definimos:*

$$\begin{cases} A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1} & se \quad \alpha > 0 \\ A^\alpha = I & se \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

Teorema 1.18 *Consideremos A^α como na definição anterior. Então,*

(a) A^α é um operador linear fechado e $\mathcal{D}(A^\alpha) = Im(A^{-\alpha})$.

(b) se $\alpha \geq \beta > 0$ então $\mathcal{D}(A^\alpha) \subset \mathcal{D}(A^\beta)$.

(c) $\overline{\mathcal{D}(A^\alpha)} = X$ para todo $\alpha \geq 0$.

(d) Se α, β são dois números reais então $A^{\alpha+\beta}x = A^\alpha A^\beta x$ para todo $x \in D(A^\gamma)$ onde $\gamma = max(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$.

Teorema 1.19 *Seja $-A$ o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $T(t)$. Se $0 \in \rho(A)$, então*

a) $T(t) : X \to \mathcal{D}(A^\alpha)$ para quaisquer $t > 0$ e $\alpha \geq 0$.

b) Para qualquer $x \in \mathcal{D}(A^\alpha)$ temos $T(t)A^\alpha x = A^\alpha T(t)x$.

c) Para qualquer $t > 0$ o operador $A^\alpha T(t)$ é limitado e

$$||A^\alpha T(t)|| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{\delta t}.$$

d) Seja $0 < \alpha \leq 1$ e $x \in \mathcal{D}(A^\alpha)$, então

$$||T(t)x - x|| \leq C_\alpha t^\alpha ||A^\alpha x||.$$

Teorema 1.20 *Seja B um operador linear fechado satisfazendo $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A^\alpha)$, com $0 < \alpha \leq 1$. Então*

$$||Bx|| \leq C||A^\alpha x||, \quad para \quad qualquer \ x \in \mathcal{D}(A^\alpha) \tag{1.4}$$

e existe uma constante C_1 tal que para qualquer $\rho > 0$ e $x \in \mathcal{D}(A)$ temos

$$||Bx|| \leq C_1(\rho^\alpha ||x|| + \rho^{\alpha-1}||Ax||). \tag{1.5}$$

1.3 Representação espectral de operadores auto-adjuntos e não limitados

Todos os resultados dessa seção seguem de [7]. Daqui em diante, nesta seção, H sempre será considerado um espaço de Hilbert munido de um produto interno $(,)$, e para quaisquer operadores envolvidos no texto, a menos de uma especificação, já estará subentendido que são definidos com domínio nesse espaço. Dados A e B dois operadores, a notação $A \leq B$ estará significando que

$$(Ax, x) \leq (Bx, x), \quad \forall x \in H.$$

1.3.1 A função espectral:

Se E_1 e E_2 são duas projeções ortogonais sobre subespaços H_1, H_2 de H, respectivamente. Observe que E_1 e E_2 satisfazem a desigualdade $E_1 \leq E_2$ se e somente se $H_1 \subset H_2$. Nesse caso o operador $E_3 = E_2 - E_1$ é a projeção ortogonal sobre o subespaço H_3 que é o complemento ortogonal de H_1 em H_2. Essas observações serão importantes para compreender os conceitos que apresentaremos a seguir.

Definição 1.21 *Uma função-operador E_λ de parâmetros reais λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ [2] é chamada uma função espectral se possui as seguintes propriedades:*

i) Os valores E_λ desta função são projeções ortogonais.

ii) $E_{\lambda_1} \leq E_{\lambda_2}$ se $\lambda_1 < \lambda_2$.

iii) Para cada $x \in H$ as seguintes relações são válidas:

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \|E_\lambda x\| = 0 \;\; e \;\; \lim_{\lambda \to \infty} \|E_\lambda x - x\| = 0.$$

iv) Para cada $x \in H$ a função $E_\lambda x$ é contínua á direita, isto é

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \|E_{\lambda+\epsilon} x - E_\lambda x\| = 0.$$

[2] Nesse caso estamos nos referindo a função que associa cada número real λ a um operador E_λ

Para cada $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ denotaremos H_λ o subespaço de H sobre o qual o operador E_λ projeta. Sem muita dificuldade pode-se verificar que $H_{\lambda_1} \subset H_{\lambda_2}$ para $\lambda_1 < \lambda_2$ e a intersecção de todos os H_λ consiste somente do elemento zero.

Seja E_λ uma função espectral e $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2]$. Como já foi observado o operador $E_\Delta = E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}$ é uma projeção ortogonal sobre algum subespaço H_Δ. Suponhamos que o eixo real é dividido em intervalos $\Delta_1 = (-\infty, \lambda_1]$, $\Delta_2 = (\lambda_1, \lambda_2]$,...., $\Delta_n = (\lambda_{n-1}, \infty]$. Então os subespaços H_{Δ_1}, H_{Δ_2}, ..., são ortogonais entre si e a soma deles coincide com todo o espaço H, ou seja,

$$H = H_{\Delta_1} \oplus H_{\Delta_2} \oplus .... \oplus H_{\Delta_n}.$$

De forma correspondente temos a seguinte fórmula

$$I = E_{\Delta_1} + E_{\Delta_2} + ... + E_{\Delta_n},$$

que é uma decomposição da identidade. Observe que $E_{\Delta_j} E_{\Delta_i} = 0$ para $i \neq j$.

1.3.2 Integração com respeito a funções espectrais

Seja E_λ uma função espectral e, como anteriormente, consideremos $E_\Delta = E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}$ onde $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2]$. A integral

$$J_{ab}x = \int_a^b f(\lambda) dE_\lambda x \tag{1.6}$$

de uma função contínua $f(\lambda)$ é definida como o limite das somas de Riemann

$$Sx = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) E_{\Delta_i} x, \tag{1.7}$$

onde $\xi_0 = a$ e

$$E_{\Delta_0} = \lim_{\epsilon \to 0^+} (E_a - E_{a-\epsilon}),$$

e ξ_i são pontos arbitrários nos subintervalos $\Delta_i = (\lambda_{i-1}, \lambda_1]$ nos quais o intervalo $[a, b]$ foi dividido. Passando o limite na relação óbvia

$$||Sx||^2 = \sum_{i=0}^{n} |f(\xi_\lambda)|^2.(E_{\Delta_i} x, x),$$

obtemos a fórmula

$$\left\|\int_a^b f(\lambda)dE_\lambda x\right\|^2 = \int_a^b |f(\lambda)|^2.d(E_\lambda x, x). \tag{1.8}$$

Definimos a integral sobre toda a reta real usando a fórmula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)dE_\lambda x = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(\lambda)dE_\lambda x. \tag{1.9}$$

Para a convergência da integral em (1.9) é necessário que, com a, $a_1 \to -\infty$ e b, $b_1 \to \infty$, as normas das integrais

$$\int_{a_1}^{a} f(\lambda)dE_\lambda x, \quad e \quad \int_b^{b_1} f(\lambda)dE_\lambda x$$

sejam convergentes para zero, isto é, que as integrais

$$\int_{a_1}^{a} |f(\lambda)|^2 d(E_\lambda x, x) \quad e \quad \int_b^{b_1} |f(\lambda)|^2 d(E_\lambda x, x) \tag{1.10}$$

convergem para zero. Em outras palavras a integral (1.9) é bem definida se e somente se a seguinte condição é satisfeita:

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)dE_\lambda x\right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d(E_\lambda x, x) < \infty. \tag{1.11}$$

Observe que se $f(\lambda) \equiv 1$, temos as relações

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE_\lambda x = x, \quad \int_{-\infty}^{\infty} d(E_\lambda x, x) = \|x\|^2. \tag{1.12}$$

A fórmula

$$Bx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)dE_\lambda x \tag{1.13}$$

define um operador linear. Se a função $f(\lambda)$ em (1.13) é limitada, então devido a (1.11) e (1.12), o operador B é definido para todo $x \in H$ e

$$\|Bx\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d(E_\lambda x, x) \leq \sup_\lambda |f(\lambda)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d(E_\lambda x, x) = \sup_\lambda |f(\lambda)|^2 \|x\|^2,$$

isto é,

$$\|B\| \leq \sup_\lambda |f(\lambda)|. \tag{1.14}$$

Se por outro lado, a função $|f(\lambda)|$ é limitada inferiormente por um número positivo, então a seguinte relação é válida:

$$\|Bx\|^2 \geq \inf_\lambda |f(\lambda)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d(E_\lambda x, x) = \inf_\lambda |f(\lambda)|^2 \|x\|^2.$$

1.3.3 O Teorema fundamental sobre representação espectral de operadores auto-adjuntos e não limitados

Teorema 1.22 *Para cada operador auto-adjunto A, existe uma, e somente uma, função espectral E_λ com as seguintes propriedades*

i) $x \in \mathcal{D}(A)$ *se e somente se*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d(E_\lambda x, x) < \infty. \tag{1.15}$$

ii) Vale a relação

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda x \tag{1.16}$$

e

$$||Ax||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d(E_\lambda x, x). \tag{1.17}$$

A representação (1.16) implica que o produto escalar (Ax, y) de $x \in \mathcal{D}(A)$ por qualquer $y \in H$ pode ser escrito na forma

$$(Ax, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E_\lambda x, y). \tag{1.18}$$

Relembrando a seção anterior, dizemos que λ é um valor regular de um operador A se existe o operador contínuo $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, densamente definido sobre todo o espaço H. Segundo [7] p.211 é possível mostrar que a regularidade de um número real λ é equivalente a existência de um intervalo $(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$ sobre o qual a função espectral E_λ é constante (então, em particular, segue que o espectro é um conjunto fechado). Portanto a fórmula fundamental de representação integral para operadores A pode ser escrita na forma

$$A = \int_E \lambda E_\lambda, \tag{1.19}$$

onde E é um conjunto arbitrário contendo o espectro.

Dizemos que um operador A é semi-limitado se

$$(Ax, x) \geq m(x, x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(A), \tag{1.20}$$

para alguma constante real m. Uma verificação imediata nos revela que o espectro de tais operadores está contido no intervalo $[m, \infty)$. Portanto sua representação espectral assume a forma

$$A = \int_m^\infty \lambda dE_\lambda. \tag{1.21}$$

Em particular, o operador A é chamado positivo definido se $m > 0$, e estritamente positivo se $(Ax, x) \geq 0$.

1.3.4 Funções de operadores auto-adjuntos

Sejam $f_1(\lambda)$ e $f_2(\lambda)$ funções contínuas sobre o intervalo $[a, b]$. Consideremos os operadores contínuos A_1 e A_2 definidos pelas fórmulas

$$A_1 = \int_a^b f_1(\lambda) dE_\lambda, \ \ e \ \ A_2 = \int_a^b f_2(\lambda) dE_\lambda,$$

onde E_λ é uma função espectral. Então

$$A_1 A_2 = \int_a^b f_1(\lambda) f_2(\lambda) dE_\lambda. \tag{1.22}$$

De fato, os operadores A_1 e A_2 podem ser aproximados com qualquer precisão desejada por somas do tipo

$$S_1 = \sum_{i=0}^n f_1(\xi_i) E_{\Delta_i}, \quad S_2 = \sum_{i=0}^n f_2(\xi_i) E_{\Delta_i},$$

respectivamente, onde Δ_i são subintervalos nos quais [a,b] foi dividido. Desta forma o operador $S_1 S_2$ se aproximará do operador $A_1 A_2$. Além disso, por propriedades de funções espectrais temos que

$$S_1 S_2 = \sum_{i=0}^n f_1(\xi_i) f_2(\xi_i)) E_{\Delta_i},$$

portanto segue a fórmula em (1.22).

Em particular se A é auto-adjunto e limitado então

$$A^n = \int_{-||A||}^{||A||} \lambda^n dE_\lambda. \tag{1.23}$$

Esta equação implica que para qualquer polinômio do operador A, vale a seguinte representação:

$$c_nA^n + c_{n-1}A^{n-1} + ... + c_0I = \int_{-||A||}^{||A||} (c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + c_0)dE_\lambda. \tag{1.24}$$

Se a série de Taylor de uma função analítica $f(\lambda)$, dada por

$$f(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + ...,$$

converge em um disco de raio igual a $||A||$, então a série

$$c_0I + c_1A + c_2A^2 + ...$$

converge em norma. A soma desta série é também um operador linear que definimos como $f(A)$. Passando o limite em (1.24) obtemos a fórmula

$$f(A) = \int_{-||A||}^{||A||} f(\lambda)dE_\lambda. \tag{1.25}$$

Para uma função analítica $f(\lambda)$ o operador $f(A)$ é definido pela fórmula (1.25).

Analisemos agora o caso de operadores não limitados. Não é difícil mostrar que, se

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda, \tag{1.26}$$

então vale a fórmula

$$A^n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n dE_\lambda. \tag{1.27}$$

Pelo teorema da representação espectral, temos que o domínio do operador A^n consiste de todos os elementos $x \in H$ tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^{2n} d(E_\lambda x, x) < \infty.$$

Então segue que o domínio $\mathcal{D}(A^n)$ de A^n diminui quando n cresce.

Funções contínuas de operadores auto-adjuntos e não limitados são definidos por uma fórmula análoga a (1.25), ou seja

$$f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)dE_\lambda. \tag{1.28}$$

Proposição 1.9 *Seja $\sigma(A)$ o espectro de um operador auto-adjunto e não limitado A. Suponhamos que*

$$\sup_{\sigma(A)} |f(\lambda)| = m < \infty.$$

Então o operador $f(A)$ é limitado e

$$\|f(A)\| = m. \tag{1.29}$$

Prova: A desigualdade $\|f(A)\| \leq m$ resulta observando que

$$\|f(A)x\| = \|\int_{\sigma(A)} f(\lambda) dE_\lambda x\| \leq m\|x\|.$$

Para mostrar a desigualdade contrária, consideremos $\lambda_0 \in \sigma(A)$ e seja $x \in H_\Delta$(definido no início da seção), onde $\Delta = (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$. Então

$$\|f(A)x\|^2 = \int_{\lambda_0-\epsilon}^{\lambda_0+\epsilon} |f(\lambda)|^2 d(E_\lambda x, x) \geq \inf_{\Delta} |f(\lambda)|^2 \|x\|^2.$$

Portanto,

$$\|f(A)\| \geq \inf_{\lambda_0-\epsilon\leq\lambda\leq\lambda_0+\epsilon} |f(\lambda)|.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ obtemos a desigualdade $\|f(A)\| \geq |f(\lambda_0)|$, e então $\|f(A)\| \geq m$. ■

1.3.5 Comutatividade entre operadores auto-adjuntos

Consideremos duas funções de um mesmo operador auto-adjunto A dadas por

$$A_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) dE_\lambda, \quad A_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\lambda) dE_\lambda.$$

Em geral os operadores A_1A_2 e A_2A_1 possuem domínios distintos. Segundo [7]p.216 pode-se mostrar que sobre o domínio comum dos operadores A_1A_2 A_2A_1 seus valores são os mesmos e coincidirá com os valores do operador definido pela integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(\lambda) dE_\lambda. \tag{1.30}$$

Nesse sentido dizemos que os operadores A_1 e A_2 comutam e definimos

$$A_1A_2 = A_2A_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(\lambda) dE_\lambda \tag{1.31}$$

com o domínio natural.

A recíproca também é válida . Suponha que dois operadores auto-adjuntos A_1 e A_2 comutam no sentido que

$$A_1 A_2 x = A_2 A_1 x$$

para todo x , para os quais ambos os lados da relação estão definidos. Pode-se mostrar que nesse caso os operadores A_1 e A_2 são funções de um mesmo operador auto-adjunto.

1.4 Espaços de interpolação

Consideremos X e Y dois espaços de Hilbert onde $X \subset Y$, X é denso em Y com a inclusão $i : X \hookrightarrow Y$ sendo contínua. Sejam $<,>_X$ e $<,>_Y$ os produtos internos em X e Y, respectivamente. A seguir mostraremos que X pode ser definido como o domínio de um operador Λ que é auto-adjunto, estritamente positivo [3] e não limitado em Y.

Consideremos então $\mathcal{D}(S)$ como o conjunto dos elementos $u \in X$ tais que a aplicação

$$v \longrightarrow < u, v >_X, \quad v \in X$$

é contínua na topologia de Y. Assim para cada elemento $u \in \mathcal{D}(S)$ existe $Su \in Y$ tal que

$$< u, v >_X = < Su, v >_Y . \tag{1.32}$$

Definimos dessa maneira um operador $S : \mathcal{D}(S) \subset X \to Y$. Observe que S é auto-adjunto e estritamente positivo pois, tomando $u, v \in \mathcal{D}(S)$, temos que

$$< Su, v >_Y = < u, v >_X = < v, u >_X = < Sv, u >_Y = < u, Sv >_Y \tag{1.33}$$

e

$$< Su, u >_Y = < u, u >_X = \|u\|_X^2 \geq \mu \|u\|_Y^2, \tag{1.34}$$

[3]Aqui estamos considerando que um operador A é estritamente positivo se satisfaz

$$< Ax, x > \geq K\|x\|^2, \; x \in \mathcal{D}(A)$$

para alguma constante $K > 0$.

para alguma constante $\mu > 0$.

Considere o espaço de Hilbert $X \times Y$ com produto interno

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{X \times Y} = < x_1, x_2 >_X + < y_1, y_2 >_Y .$$

Observe que (1.32) é equivalente a $< (u, Su), (v, -v) >_{X \times Y} = 0$. Portanto tomando $M = \{(v, -v) : v \in X\} \subset X \times Y$,temos que o complemento ortogonal de M,

$$M^{\perp} = \{(u, \bar{u}) \in X \times Y : \langle (u, \bar{u}), (v, -v) \rangle_{X \times Y} = 0\},$$

é o fecho do gráfico de S, isto é $\overline{Graf(S)} = M^{\perp}$.

Proposição 1.10 *O domínio $\mathcal{D}(S)$ do operador S, definido acima, é denso em X e o operador $(I + S) : \mathcal{D}(S) \subset X \to Y$ é sobrejetor.*

Prova: Se $\mathcal{D}(S)$ não é denso em X, existe $u_0 \in X$, $u_0 \neq 0$ tal que $< u_0, u >= 0$ para todo $u \in \overline{\mathcal{D}(S)}$. Então

$$\langle (u_0, 0), (u, \bar{u}) \rangle = 0$$

para todo $(u, \bar{u}) \in \overline{Graf(S)} = M^{\perp}$. Logo $(u_0, 0) \in (M^{\perp})^{\perp} = M$, o que implica $u_0 = 0$, que é uma contradição. Assim $\overline{\mathcal{D}(S)} = X$

Observe também que, dado $y \in Y$, como $M \oplus M^{\perp} = X \times Y$ existem $(v, -v) \in M$ e $(u, Su) \in M^{\perp}$ tais que

$$(0, y) = (v, -v) + (u, Su).$$

então $-v = u$ e $-v + Su = y$, ou seja $(I + S)u = y$. Portanto $(I + S)$ é sobrejetor. ∎

Proposição 1.11 *S é um operador fechado.*

Prova: Seja $\{x_n\}_{n=1}$ uma sequência em $\mathcal{D}(S)$ tal que $x_n \to x_0$ e $Sx_n \to y_0$ quando $n \to \infty$. Temos que $(I + S)x_n = x_n + Sx_n \to x_0 + y_0$ com $n \to \infty$.Observe que por (1.34) segue que $(I + S)$ é inversível. Então, como $x_n = (I + S)^{-1}(I + S)x_n$ temos, fazendo $n \to \infty$ que $x_0 = (I + S)^{-1}(x_0 + y_0)$, ou seja, $x_0 \in \mathcal{D}(S)$ e $(I + S)x_0 = x_0 + y_0$, o que implica $Sx_0 = y_0$. ∎

Observação 3 *Como S é um operador auto-adjunto e estritamente positivo segue que seu espectro está contido no conjunto dos números reais positivos e portanto seu conjunto resolvente $\rho(S)$ contém o setor*

$$\Sigma^+ = \{\lambda : \ 0 < \omega < |arg\lambda| \leq \pi, \ \ 0 < \omega \leq \frac{\pi}{2}\} \cup V, \tag{1.35}$$

onde V é uma vizinhança do zero. Além disso temos que V satisfaz

$$\|(\lambda I - S)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|}, \qquad \lambda \in \Sigma^+, \tag{1.36}$$

para alguma constante $C > 0$.

De fato, por (1.34) temos que

$$< Bx, x > \leq 0,$$

onde $B = \mu_0 I - S$. Assim, para $x \in \mathcal{D}(S)$ e $\|x\| = 1$ segue que

$$|\lambda| sen\omega \leq dist(\lambda, \mathcal{R}_+) \leq |\lambda + < Bx, x > | = | < (\lambda I + B)x, x > | \leq$$
$$\leq \|(\lambda I + B)x\| \|x\| = \|(\lambda I + B)x\|,$$

portanto

$$\|(\lambda I + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| sen\omega} = \frac{M}{|\lambda|} \ \ (M = \frac{1}{sen\omega}), \tag{1.37}$$

ou seja,

$$\|[(\lambda - \mu_0)I - S]^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \qquad \lambda \in \Sigma^+. \tag{1.38}$$

Substituindo $\tilde{\lambda} = \lambda - \mu_0$ em (1.38) obtemos

$$\|(\tilde{\lambda} I - S)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\tilde{\lambda} + \mu_0|} \leq \frac{const}{|\tilde{\lambda}|} \tag{1.39}$$

como queríamos.

Portanto segundo considerações da seção 1.2 temos que existem potências fracionárias S^α de S, para $0 \leq \alpha \leq 1$. Relembrando as questões discutidas na seção 1.3 sobre representação espectral de operadores auto-adjuntos, verificamos facilmente que as potências de S também são auto-adjuntas e estritamente positivas.

Proposição 1.12 *O domínio $\mathcal{D}(S^{1/2})$ do operador $S^{1/2}$ é X.*

Prova: Seja $u \in X$ e $u_n \in \mathcal{D}(S)$ com $u_n \to u$ em X. Então

$$\|S^{1/2}u_n\|_Y =< S^{1/2}u_n, S^{1/2}u_n >_Y =< Su_n, u_n >_Y =< u_n, u_n >_X = \|u_n\|_X^2 \leq C, \quad (1.40)$$

para todo n.Como em espaços reflexivos, conjuntos limitados são fracamente compactos (veja, por exemplo, Brézis [1] p.46) segue de (1.40) que $S^{1/2}u_n$ converge fracamente para algum $y \in Y$, e como $S^{1/2}$ é fechado temos que $u \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ e $S^{1/2}u = y$, portanto $X \subset \mathcal{D}(S^{1/2})$. Para mostrar a inclusão contrária, observemos primeiramente que para todo $y \in X$

$$(I + \frac{1}{n}S)^{-1}y \to y, \quad (1.41)$$

com $n \to \infty$, pois

$$\|(n+S)^{-1}\| \leq \frac{1}{n} \Longrightarrow \|(I + \frac{1}{n}S)^{-1}\| \leq 1 \quad (1.42)$$

para todo n . Logo para $n \to \infty$ e $y \in \mathcal{D}(S)$ segue que

$$\|(I + \frac{1}{n})^{-1} - y\| = \frac{1}{n}\|(I + \frac{1}{n}S)^{-1}Sy\| \leq \frac{1}{n}\|Sy\| \to 0. \quad (1.43)$$

Como $\mathcal{D}(S)$ é denso em X segue o resultado.

Se $u \in \mathcal{D}(S^{1/2})$, considere $u_n = (I + \frac{1}{n}S)^{-1}u$, então $u_n \in \mathcal{D}(S)$, $u_n \to u$ quando $n \to \infty$, e

$$S^{1/2}u_n = (I + \frac{1}{n}S)^{-1}S^{1/2}u \to S^{1/2} \quad (1.44)$$

Como $\|u_n - u_m\| = \|S^{1/2}u_n - S^{1/2}u_m\|_Y$ temos que $(u_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em X, portanto $u \in X$, o que implica $\mathcal{D}(S^{1/2}) \subset X$. ■

Considerando o operador S estudado acima definimos

$$\Lambda = S^{1/2}. \quad (1.45)$$

Temos que Λ é auto-adjunto, estritamente positivo e com domínio igual a X.

Observação 4 *Considere Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ suave. Obtemos exemplos típicos dos operadores definidos acima escolhendo $Y = L^2(\Omega)$ e $X = H_0^1(\Omega)$. Nes-*

se caso temos que $S = -\Delta$ (O operador Laplaciano) com $\mathcal{D}(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $\mathcal{D}((-\Delta)^{1/2}) = H_0^1(\Omega)$. [4]

Definição 1.23 *Considerando o operador Λ em (1.45), definimos :*

$$[X, Y]_\theta = \mathcal{D}(\Lambda^{1-\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 1, \tag{1.47}$$

onde $\mathcal{D}(\Lambda^{1-\theta})$ é o dominio de $\Lambda^{1-\theta}$ e a norma sobre $[X, Y]_\theta$ é igual a norma do gráfico de $\Lambda^{1-\theta}$, isto é

$$\|u\|_{[X,Y]^\theta} = (\|u\|_y^2 + \|\Lambda^{1-\theta}u)\|_Y^2)^{1/2}.$$

Observe que

$$[X, Y]_0 = X,$$

$$[X, Y]_1 = Y$$

e X é denso em $[X, Y]_\theta$, $0 \leq \theta \leq 1$.

Considerando X e Y os espaços de Hilbert definidos no inicio desta seção, sejam a e b dois números reais com $a < b$. Para um inteiro $m \geq 1$ definimos

$$W(a, b) = \{u | u \in L^2(a, b, X), \frac{d^m u}{dt^m} = u^{(m)} \in L^2(a, b, Y)\}. \tag{1.48}$$

Seja E um espaço de Hilbert. A notação $C(a, b, E)$ que usaremos a seguir se refere ao espaço das funções contínuas de $[a, b]$ em E.

Teorema 1.24 *Considerando as notações definidas acima , para $\in W(a, b)$ temos que*

$$u^{(j)} \in C(a, b, [X, Y]_{(j+1/2)/m}) \quad 0 \leq j \leq m - 1 \tag{1.49}$$

com $u \to u^{(j)}$ é uma função linear e contínua de $W(a, b)$ em $C(a, b, [X, Y]_{(j+1/2)/m})$.

Para uma prova deste teorema veja [8]

---

[4] Aqui estamos considerando a norma em $H_0^1(\Omega)$ definida como

$$\|u\| = (\int_\Omega \|\nabla u\|^2 dx)^{1/2}, \quad u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.46}$$

Capítulo 2

Formulação do Problema e Estudos Preliminares

2.1 Os exemplos clássicos

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ suave. Para ilustrarmos o nosso problema, discutiremos as três equações da onda clássicas na variável $u(x,t)$ em $(0,\infty)\times\Omega$ que são descritas como

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \tag{2.1}$$

$$u_{tt} + u_t - \Delta u = 0 \tag{2.2}$$

e

$$u_{tt} - \Delta u_t - \Delta u = 0 \tag{2.3}$$

com condições de fronteira de Dirichlet $u \equiv 0$ sobre $(0,\infty)\times\partial\Omega$. As equações (2.2) e (2.3) são conhecidas como equação da onda com atrito e atrito forte, respectivamente. Observe que o operador Laplaciano,

$$\Delta : \; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), \tag{2.4}$$

é auto-adjunto com domínio $\mathcal{D}(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ denso em $L^2(\Omega)$, além disso, pela desigualdade de Poincaré (veja por exemplo, [1] p.174), temos que

$$< -\Delta u, u >_{L^2} = \|\nabla u\|^2 \geq C\|u\|_{L^2}^2, \quad u \in \mathcal{D}(-\Delta), \tag{2.5}$$

para alguma constante $C > 0$. Sob as hipóteses consideradas também podemos definir o operador

$$(-\Delta)^{1/2} : H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \tag{2.6}$$

com domínio $\mathcal{D}((-\Delta)^{1/2}) = H_0^1(\Omega)$, que é a raiz quadrada positiva de $-\Delta$ e corresponde á soma das derivadas primeira.

Escrevendo $u = z_1$ e $\dot{u} = z_2$ em (2.1), (2.2) e (2.3) obtemos, respectivamente, os sistemas equivalentes

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & \Delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

definidos sobre o espaço de Hilbert $E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) = \mathcal{D}((-\Delta)^{1/2}) \times L^2(\Omega)$, cujo produto interno é dado por

$$\langle (z_1, z_2), (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \rangle_E = \int_\Omega (\nabla z_1 \nabla \tilde{z}_1 + z_2 \tilde{z}_2) dx. \tag{2.10}$$

A análise das soluções das equações em (2.1), (2.2) e (2.3) pode ser feita estudando a geração de semigrupo dos operadores

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_I = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & -I \end{pmatrix} \ e \ \mathcal{A}_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & \Delta \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

respectivamente. A questão é saber em quais domínios esses operadores geram semigrupos. É exatamente esse problema que pretendemos resolver.

Consideremos então o operador $\mathcal{A}_0$ em (2.11) com domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) = \mathcal{D}(-\Delta) \times \mathcal{D}((-\Delta)^{1/2})$. Mostraremos que $\mathcal{A}_0$ gera um $C_0 - grupo$ de operadores lineares com esse domínio. Observemos inicialmente que o operador $(\lambda I - \mathcal{A}_0)$ é sobrejetor se $Re\lambda \neq 0$. De fato, dado $(f_1, f_2) \in E$, considere

$$(\lambda I - \mathcal{A}_0)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

ou, equivalentemente

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda z_1 - z_2 & = & f_1 \\ \lambda z_2 - \Delta z_1 & = & f_2 \end{array} \right. . \tag{2.13}$$

Tirando z_2 na primeira equação de (2.13) e substituindo na segunda obtemos

$$(\lambda^2 - \Delta) z_1 = \lambda f_1 + f_2,$$

que possui solução $z_1 \in \mathcal{D}(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ se $Re\lambda \neq 0$, pois o espectro do operador Δ só possui números reais negativos. Assim

$$z_2 = \lambda z_1 - f_1 \in H_0^1(\Omega),$$

e então $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$, como queríamos. Como $\mathcal{A}_0$ satisfaz

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{A}_0 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle_E &= \left\langle \begin{pmatrix} z_2 \\ \Delta z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle_E = \int_\Omega (\nabla z_2 \nabla z_1 + \Delta z_1 z_2) dx \\ &= \int_\Omega \nabla z_2 \nabla z_1 dx + \nabla z_1 z_2|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \nabla z_1 \nabla z_2 dx = 0, \end{aligned}$$

temos, conforme observação 2, que $\mathcal{A}_0$ é gerador infinitesimal de um C_0- grupo de contrações.

Observação 1 : Consideremos a mudança $z_1 = (-\Delta)^{-1/2} w_1$ e $z_2 = w_2$ onde $(z_1, z_2) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$. Então a correspondência realizada por $\mathcal{A}_0$ em (2.7) (ou seja, $z_1 \rightarrow z_2$ e $z_2 \rightarrow \Delta z_1$) define o operador

$$\mathcal{L}_0 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-\Delta)^{1/2} \\ (-(-\Delta)^{1/2}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\Delta)^{1/2}) w_2 \\ (-(-\Delta)^{1/2}) w_1 \end{pmatrix}$$

com domínio $\mathcal{D}(\mathcal{L}_0) = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) = \mathcal{D}((-\Delta)^{1/2}) \times \mathcal{D}((-\Delta^{1/2}))$ que gera um C_0*−grupo* de operadores sobre $E' = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, cujo produto interno é dado por

$$\langle (w_1, w_2), (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \rangle_{E'} = \int_\Omega (w_1 \tilde{w}_1 + w_2 \tilde{w}_2) dx. \tag{2.14}$$

Considerando o operador $\mathcal{A}_I$ em (2.11) com o mesmo domínio de $\mathcal{A}_0$, temos também que o operador $(\lambda I - \mathcal{A}_I)$ é sobrejetor se $Re\lambda \neq 0$ (veja a prova com $\mathcal{A}_0$). E como

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{A}_I \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle_E &= \left\langle \begin{pmatrix} z_2 \\ \Delta z_1 - z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle_E = \int_\Omega (\nabla z_2 \nabla z_1 + (\Delta z_1 - z_2) z_2) dx \\ &= \int_\Omega (\nabla z_2 \nabla z_1 + (\Delta z_1 z_2 - z_2 z_2) dx \\ &= \int_\Omega (\nabla z_2 \nabla z_1 + \Delta z_1 z_2) dx - \|z_2\|^2_{L_2(\Omega)} = -\|z_2\|^2_{L_2(\Omega)} < 0, \end{aligned}$$

segue pelo corolário (1.15) que $\mathcal{A}_I$ gera um $C_0 -$ *semigrupo* de operadores sobre E.

Observação 2: A observação 1 continua sendo válida para o operador $\mathcal{A}_I$. Nesse caso obtemos o operador

$$\mathcal{L}_I : \mathcal{D}((-\Delta)^{1/2}) \times \mathcal{D}((-\Delta)^{1/2}) \subset E' \to E',$$

dado por

$$\mathcal{L}_I = \begin{pmatrix} 0 & (-\Delta)^{1/2} \\ -(-\Delta)^{1/2} & -I \end{pmatrix},$$

que gera um $C_0 -$ *semigrupo* de operadores sobre E' .

Observe que o domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A}_I) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ dos operadores $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}_I$ aparecem naturalmente pois, como

$$\mathcal{A}_0 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \Delta z_1 \end{pmatrix} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \tag{2.15}$$

devemos ter z_2 pertencendo a $H_0^1(\Omega)$ e z_1 a $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e o mesmo ocorre com $\mathcal{A}_I$ .No entanto esse procedimento não funciona com o operador $\mathcal{A}_\Delta$ pois temos que

$$\mathcal{A}_\Delta \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \Delta z_1 + \Delta z_2 \end{pmatrix} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

e então deveríamos pedir que z_1 e z_2 pertencessem a $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Com essa formulação teríamos dificuldades pois, para determinarmos o resolvente de $\mathcal{A}_\Delta$ temos que resolver a equação

$$(\lambda I - \mathcal{A}_\Delta) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

o que implica $\lambda z_1 - z_2 = f$, com $f \in H_0^1(\Omega)$, e portanto z_1 e z_2 não podem estar em $H^2(\Omega)$. A necessidade de definirmos um domínio conveniente para o operador $\mathcal{A}_\Delta$ foi a primeira e principal motivação para a elaboração deste trabalho. Nesse caso a solução aparece escrevendo-o na forma

$$\mathcal{A}_\Delta \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \Delta(z_1 + z_2) \end{pmatrix},$$

e definindo o domínio

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_\Delta) = \{(z_1, z_2) \in \mathcal{D}(-\Delta)^{1/2}) \times \mathcal{D}(-\Delta)^{1/2} : z_1 + z_2 \in \mathcal{D}(-\Delta)\}. \tag{2.17}$$

Temos então que A_Δ gera um C_0- *semigrupo* de operadores lineares sobre E. De fato, dado $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$, considere

$$(I-\mathcal{A}_\Delta)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Temos então que

$$\begin{cases} z_1 - z_2 & = f \\ z_2 - \Delta(z_1+z_2) & = g \end{cases}. \tag{2.18}$$

Multiplicando a segunda equação de (2.18) por 2 e somando-a com a primeira obtemos

$$(z_1+z_2) - 2\Delta(z_1+z_2) = f+2g. \tag{2.19}$$

Fazendo $z_1+z_2 = w$ em (2.19) segue que

$$w - 2\Delta w = f+2g \tag{2.20}$$

ou seja

$$(\frac{1}{2}I - \Delta)w = \frac{f+2g}{2},$$

que possui solução $w \in \mathcal{D}(\Delta)$ pois o espectro de Δ só possui números reais negativos. Portanto, como $w \in \mathcal{D}(\Delta)$ e $f \in \mathcal{D}((-\Delta)^{1/2})$, escrevendo

$$z_1 = \frac{w+f}{2} \quad e \quad z_2 = \frac{w-f}{2}$$

temos que $z_1, z_2 \in \mathcal{D}((-\Delta)^{1/2}), z_1+z_2 \in \mathcal{D}(\Delta)$ e satisfazem (2.18). Mostramos então que $(\lambda I - \mathcal{A}_\Delta)$ é sobrejetor. E mais ainda, temos que

$$\begin{aligned} <\mathcal{A}_\Delta z, z>_E &= <\begin{pmatrix} z_2 \\ \Delta(z_1+z_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}>_E = \int_\Omega \nabla z_2 \nabla z_1 + \Delta(z_1+z_2) z_2 dx \\ &= \int_\Omega \nabla z_2 \nabla z_1 dx + \nabla(z_1+z_2) z_2|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \nabla(z_1+z_2)\nabla z_2 dx \\ &= \int_\Omega \nabla z_2 \nabla z_1 dx + \nabla(z_1+z_2) z_2|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \nabla z_1 \nabla z_2 dx - \int_\Omega \nabla z_2 \nabla z_2 dx \\ &= -\|\nabla z_2\|^2_{L^2} < 0. \end{aligned}$$

Portanto, novamente pelo corolário 1.15, segue o resultado desejado.

Observação 3: Novamente considerando as mudanças discutidas na observação 1, mas para o operador $\mathcal{A}_\Delta$, obtemos dessa vez o operador $\mathcal{L}_\Delta : \mathcal{D}((-\Delta)^{1/2}) \times \mathcal{D}(-\Delta) \subset E' \to E'$, dado por

$$\mathcal{L}_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & (-\Delta)^{1/2} \\ -(-\Delta)^{1/2} & \Delta \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

O operador em (2.21) também gera um $C_0 -$ *semigrupo* de operadores lineares, mas a verificação é mais difícil. Um comentário sobre esse caso em um contexto mais geral pode ser visto em [2] .

2.2 Generalização do problema

Seja H um espaço de Hilbert munido de um produto interno $<,>$ e A um operador auto-adjunto sobre H com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso em H e estritamente positivo, isto é

$$< Ax, x >\geq \mu_0 ||x||^2, \quad x \in \mathcal{D}(A) \tag{2.22}$$

para algum $\mu_0 > 0$. Suponhamos também que A possui resolvente compacto. Sob estas hipóteses temos que A possui potências fracionárias A^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, definidas sobre o domínio $\mathcal{D}(A^\alpha) \subset H$ (veja a observação 3 da seção 1.4).

Para o operador A definido acima consideremos o sistema linear homogêneo

$$\ddot{x} + \rho A^\alpha \dot{x} + Ax = 0, \quad x \in H \tag{2.23}$$

com $1/2 \leq \alpha \leq 1$ e $\rho > 0$. Fazendo $x = z_1$ e $\dot{x} = z_2$ em (2.23), obtemos o sistema de primeira ordem

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \mathcal{A}_{\rho\alpha}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

onde

$$\mathcal{A}_{\rho\alpha}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & -\rho A^\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

Estamos considerando o sistema (2.24) sobre o espaço de Hilbert $E = \mathcal{D}(A^{1/2}) \times H$, cujo produto interno é dado por

$$< (z_1, z_2), (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) >_E = < A^{1/2} z_1, A^{1/2} \tilde{z}_1 >_H + < z_2, \tilde{z}_2 >_H . \tag{2.26}$$

Em nosso trabalho nos concentraremos no estudo do operador $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ em (2.25). Algumas de suas propriedades, que serão discutidas mais adiante, nos permitirão definir potências fracionárias do tipo $(-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{\theta}$, $0 \leq \theta \leq 1$. Nosso principal objetivo será caracterizar os domínios dessas potências quanto a geração de semigrupo. Estudaremos o operador $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ sobre um certo domínio (que definiremos logo a seguir e que foi obtido generalizando o caso $\mathcal{A}_{\Delta}$ estudado na seção 2.1) no qual desenvolveremos todo o trabalho.

2.3 Propriedades espectrais do operador $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$

Daqui em diante vamos considerar o operador $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ em (2.25) entendido como

$$\mathcal{A}_{\rho\alpha}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ -A^{\alpha}(A^{1-\alpha}z_1 + \rho z_2) \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

e com domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha}) = \{(z_1, z_2) \in E \; ; \; z_2 \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \;\; e \;\; A^{1-\alpha}z_1 + \rho z_2 \in \mathcal{D}(A^{\alpha})\}$.

2.3.1 Análise do resolvente de $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$

Determinaremos explicitamente o resolvente de $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$, mas antes precisaremos de um resultado preliminar.

Lema 2.1 *Consideremos o operador A definido na seção 2.2 e $V = \lambda^2 I + \rho\lambda A^{\alpha} + A$, com $\rho > 0$, $1/2 \leq \alpha \leq 1$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então, se $Re\lambda > 0$ temos que V é inversível e AV^{-1} é um operador linear limitado.*

Prova: Seja μ_0 a constante definida em (2.22). Observe que a função $f : [\mu_0, \infty) \to \mathbb{C}$ definida por $f(\mu) = \lambda^2 + \rho\lambda\mu^{\alpha} + \mu$ assume somente valores não nulos se $Re\lambda > 0$, pois se $f(\theta) = 0$ para algum $\theta \in [\mu_0, \infty)$, então segue que

$$\lambda = \left(-\frac{\rho}{2} \pm \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \theta^{1-2\alpha}}\right)\theta^{\alpha}, \tag{2.28}$$

ou seja, $Re\lambda < 0$. Como a função $g : [\mu_0, \infty) \to \mathbb{C}$ definida por $g(\mu) = \frac{1}{f(\mu)}$ é analítica para $Re\lambda > 0$, temos que V^{-1} pode ser definido como

$$V^{-1} = \int_{\mu_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 + \rho\lambda\mu^{\alpha} + \mu} dE_{\mu}, \tag{2.29}$$

onde E_μ é uma família espectral associada ao operador A, segundo considerações da seção 1.3. Análogamente temos que

$$AV^{-1} = \int_{\mu_0}^{\infty} \frac{\mu}{\lambda^2 + \rho\lambda\mu^\alpha + \mu} dE_\mu. \tag{2.30}$$

Como as integrais em (2.29) e (2.30) convergem na topologia do operador uniforme, segue que V^{-1} e AV^{-1} são operadores lineares limitados. ∎

Observe que os operadores A e V definidos no lema 2.1 comutam sob o ponto de vista discutido em 1.3.5. Usaremos esse fato livremente abaixo. Para o cálculo do resolvente de $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ consideremos $(f, g) \in E$ e $(z_1, z_2) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha})$ tais que

$$(\lambda I - \mathcal{A}_{\rho\alpha}) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

ou equivalentemente,

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} \lambda z_1 & - & z_2 & = & f \\ \lambda z_2 & + & A^\alpha(A^{1-\alpha} z_1 + \rho z_2) & = & g. \end{array} \right. \tag{2.32}$$

Tirando z_2 na primeira equação em (2.32) e substituindo na segunda, obtemos

$$A^\alpha(A^{1-\alpha} z_1 + \rho(\lambda z_1 - f)) = g - \lambda(\lambda z_1 - f) = g - \lambda^2 z_1 + \lambda f. \tag{2.33}$$

Aplicando $A^{-\alpha}$ em (2.33) e reordenando os termos resulta

$$\lambda^2 A^{-\alpha} z_1 + \rho\lambda z_1 + A^{1-\alpha} z_1 = \rho f + \lambda A^{-\alpha} f + A^{-\alpha} g. \tag{2.34}$$

Logo, aplicando A^α em (2.34), segue que

$$\lambda^2 z_1 + \rho\lambda A^\alpha z_1 + A z_1 = \rho A^\alpha f + \lambda f + g, \tag{2.35}$$

ou então

$$V(z_1) = \frac{1}{\lambda}(V - A)f + g, \tag{2.36}$$

onde

$$V = \lambda^2 I + \rho\lambda A^\alpha + A. \tag{2.37}$$

Pelo lema (2.1) temos que V em (2.37) é inversível, logo segue de (2.36) que

$$z_1 = \frac{1}{\lambda}(V - A)V^{-1} f + V^{-1} g. \tag{2.38}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} z_2 &= \lambda z_1 - f = (V-A)V^{-1}f + \lambda V^{-1}g - f = f - AV^{-1}f + \lambda V^{-1}g - f \\ &= -AV^{-1}f + \lambda V^{-1}g. \end{aligned}$$

Concluímos então que

$$R(\lambda, \mathcal{A}_{\rho\alpha}) = \begin{pmatrix} \frac{I-AV^{-1}}{\lambda} & V^{-1} \\ -AV^{-1} & \lambda V^{-1} \end{pmatrix}, \quad Re\lambda > 0. \tag{2.39}$$

Observe que

$$\frac{I - AV^{-1}}{\lambda} = V^{-1}(\lambda I + \rho A^{\alpha}). \tag{2.40}$$

A relação em (2.40) será usada futuramente.

Proposição 2.1 *O operador $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$, definido em (2.27), tem resolvente compacto para* $1/2 \leq \alpha < 1$.

Prova: Seja $(f,g) \in E$ satisfazendo $||(f,g)||_E^2 = ||A^{1/2}f||^2 + ||g||^2 \leq K$, para algum $K > 0$. Então se

$$R(\lambda, \mathcal{A}_{\rho\alpha}) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \tag{2.41}$$

temos que $z_2 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ e de (2.39) segue que

$$\begin{aligned} ||A^{1/2}z_2|| &= ||-AV^{-1}A^{1/2}f + \lambda A^{1/2}V^{-1}g|| \\ &\leq ||AV^{-1}||.||A^{1/2}f|| + |\lambda|||A^{-1/2}||.||AV^{-1}||.||g|| \\ &\leq ||AV^{-1}||\sqrt{K} + |\lambda|||A^{-1/2}||.||AV^{-1}||\sqrt{K}. \end{aligned}$$

Logo $||z_2||_{\mathcal{D}(A^{1/2})} = ||A^{1/2}z_2|| \leq C_1$, onde C_1 depende de K. Temos também que $(A^{1-\alpha}z_1 + \rho z_2) \in \mathcal{D}(A^{\alpha}) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$, pois $1/2 \leq \alpha < 1$. Assim $A^{1-\alpha}z_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, e portanto $z_1 \in \mathcal{D}(A^{3/2-\alpha})$. Aplicando $A^{-\alpha}$ e substituindo $\lambda z_1 - f$ por z_2 em (2.33) obtemos

$$A^{1-\alpha}z_1 + \rho z_2 + A^{-\alpha}(\lambda^2 z_1) = A^{-\alpha}g + A^{-\alpha}(\lambda f). \tag{2.42}$$

Assim

$$\begin{aligned} ||A^{3/2-\alpha}z_1|| &= ||A^{1/2}(A^{1-\alpha}z_1)|| \\ &= ||-\rho A^{1/2}z_2 - \lambda^2 A^{-(\alpha-1/2)}z_1 + A^{-(\alpha-1/2)}g + \lambda A^{-(\alpha-1/2)}f|| \\ &\leq \rho C_1 + |\lambda|^2||A^{-(\alpha-1/2)}z_1|| + ||A^{-(\alpha-1/2)}g|| + |\lambda|||A^{-(\alpha-1/2)}f|| \leq C_2, \end{aligned}$$

onde C_2 é um a constante que depende de K. Mostramos então que a imagem por $R(\lambda, \mathcal{A}_{\rho\alpha})$ de conjuntos limitados é limitada em $\mathcal{D}(A^{3/2-\alpha}) \times \mathcal{D}(A^{1/2})$. Como a inclusão $i : \mathcal{D}(A^{3/2-\alpha}) \times \mathcal{D}(A^{1/2}) \hookrightarrow \mathcal{D}(A^{1/2}) \times H$ é compacta segue a compacidade do resolvente, como queríamos. ■

2.3.2 Análise do espectro de $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$

Observemos inicialmente que como o operador A, definido na seção (2.2), tem resolvente compacto então H possui uma base ortonormal formada por auto-vetores $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de A associados a auto-valores $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$ Os auto-valores de $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ (que possui resolvente compacto para $1/2 \leq \alpha < 1$) podem ser determinados resolvendo-se a equação:

$$\mathcal{A}_{\rho\alpha}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

De (2.43) segue que

$$(-Az_1) = \lambda^2 z_1 + \rho\lambda A^{\alpha} z_1. \tag{2.44}$$

Como $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ é um base ortonormal de H, segue de (2.44) que

$$\begin{aligned} -A\sum_{n=1}^{\infty} < z_1, e_n > e_n = \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} < z_1, e_n > e_n + \rho\lambda A^{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} < z_1, e_n > e_n \Longleftrightarrow \\ \sum_{n=1}^{\infty}(-\mu_n) < z_1, e_n > e_n = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda^2 + \rho\lambda\mu_n^{\alpha}) < z_1, e_n > e_n. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Portanto os auto-valores $\lambda_n^{\pm}$ de $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ são soluções da equação quadrática

$$\lambda^2 + \rho\lambda\mu_n^{\alpha} + \mu_n = 0.$$

Assim $\lambda_n^+ + \lambda_n^- = -\rho\mu_n^{\alpha}$, $\lambda_n^+\lambda_n^- = \mu_n$ e

$$\lambda_n^{+,-} = \left(-\frac{\rho}{2} \pm \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \mu_n^{1-2\alpha}} \right) \mu_n^{\alpha}. \tag{2.46}$$

Após um cálculo simples concluímos que

$$\left| \frac{Im\lambda_n^{\pm}}{Re\lambda_n^{\pm}} \right| \leq Const. \tag{2.47}$$

para todo n.

Observe que para $1/2 < \alpha < 1$, ou $\alpha = 1/2$ e $\rho \geq 2$, então $\lambda_n^{+,-}$ são todos negativos para n suficientemente grande e $\lambda_n \downarrow -\infty$ monótonamente. Para $\alpha = 1/2$ e $0 < \rho < 2$, $\lambda_n^{+,-}$ assume a forma complexa

$$\lambda_n^{+,-} = (-\frac{\rho}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}})\mu_n^{1/2} = \mu_n^{1/2} e^{\pm i\Psi}, \quad \frac{\pi}{2} < \Psi < \pi.$$

No caso $\alpha = 1$ temos que $\lambda_n^- \downarrow -\infty$ e $\lambda_n^+ \uparrow -\frac{1}{\rho}$, monótonamente.

Essa análise nos mostra que o espectro de $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ é somente pontual para $\alpha < 1$ e contém o ponto $\lambda = -\frac{1}{\rho}$, para $\alpha = 1$, em seu espectro contínuo. Portanto temos que $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ possui resolvente compacto somente para $1/2 \leq \alpha < 1$. Observe também que em todos os casos , $\lambda_n^{+,-}$ assumem valores rais negativos ou complexos com parte real negativa. Logo segue de (2.47) que os auto-valores de $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ estão contidos no setor

$$\Sigma = \{\lambda : |arg\lambda| \geq \frac{\pi}{2} + \theta_0, \quad 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}\}. \tag{2.48}$$

2.3.3 Propriedades dos auto-vetores de $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$

Sejam $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ os auto-valores de A e $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ seus respectivos auto-vetores sujeitos a normalização

$$(\mu_n + |\lambda_n^+|^2)||e_n||^2 = 1, \tag{2.49}$$

onde λ_n^+ são os auto-valores de $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ definidos em (2.46). Então os auto-vetores normalizados de $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ são dados por

$$\Phi_n^+ = \begin{pmatrix} e_n \\ \lambda_n^+ e_n \end{pmatrix} \quad e \quad \Phi_n^- = K_n \begin{pmatrix} e_n \\ \lambda_n^- e_n \end{pmatrix}, \tag{2.50}$$

onde $K_n^2 = \frac{\mu_n + |\lambda_n^+|^2}{\mu_n + |\lambda_n^-|^2}$. Como

$$\begin{aligned} < \Phi_m^\pm, \Phi_n^\pm > &= < A^{1/2}e_m, A^{1/2}e_n > + K_n < \lambda_m^\pm e_m, \lambda_n^\pm e_n > \\ &= \mu_m^{1/2}\mu_n^{1/2} < e_m, e_n > + K_n \lambda_m^\pm \overline{\lambda_n^\pm} < e_m, e_n > \\ &= 0, \end{aligned} \tag{2.51}$$

temos que $\{\Phi_n^+\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\Phi_n^-\}_{n=1}^{\infty}$ são famílias ortonormais de auto-vetores sobre E. No entanto observe que

$$< \Phi_m^+, \Phi_n^- >= \begin{cases} 0 & n \neq m \\ K_n(\mu_n + \lambda_n^+ \lambda_n^-)\|e_n\|_H^2 & n = m \ ; \ \lambda_n^+ \neq \lambda_n^- \\ 1 & n = m \ ; \ \lambda_n^+ = \lambda_n^-, \end{cases}$$

ou seja , a família $\{\Phi_n^{\pm}\}_{n=1}^{\infty}$ não é ortogonal.

Nas proposições que seguirão nesse capítulo as hipóteses consideradas serão referentes a (2.46), onde temos os auto-valores $\{\lambda_n^{\pm}\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$, e $\{\Phi^{\pm}\}_{n=1}^{\infty}$ são seus respectivos auto-vetores definidos em (2.50).

Proposição 2.2 *Seja* $\frac{\rho^2}{4} \neq \mu_n^{1-2\alpha}$ *para todo n (ou seja* $\lambda_n^+ \neq \lambda_n^-$ *para todo n). Então*

$$\overline{Span}\{\Phi_n^{\pm}\}_{n=1}^{\infty} = E. \tag{2.52}$$

Prova: Seja $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in E$. Devemos determinar constantes $M_1, M_2, ...J_1, J_2, ...$ tais que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} e_1 \\ \lambda_1^+ e_1 \end{pmatrix} + M_2 \begin{pmatrix} e_2 \\ \lambda_2^+ e_2 \end{pmatrix} + ... + J_1 K_1 \begin{pmatrix} e_1 \\ \lambda_1^- e_1 \end{pmatrix} + J_2 K_2 \begin{pmatrix} e_2 \\ \lambda_2^- e_2 \end{pmatrix} + ... \tag{2.53}$$

ou, equivalentemente

$$\begin{cases} x = (M_1 + J_1 K_1)e_1 + (M_2 + J_2 K_2)e_2 + ... \\ y = (M_1 \lambda_1^+ + J_1 K_1 \lambda_1^-)e_1 + (M_2 \lambda_2^+ + J_2 K_2 \lambda_2^-)e_2 + ... \end{cases} \tag{2.54}$$

Como, para cada n,

$$det \begin{vmatrix} 1 & K_n \\ \lambda_n^+ & K_n \lambda_n^- \end{vmatrix} = K_n(\lambda_n^- - \lambda_n^+) \neq 0,$$

e $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base de H, existem únicos M_n e J_n satisfazendo (2.53) e a proposição (2.2) está provada. ■

Proposição 2.3 *Seja* $\alpha \neq 1/2$ *e suponhamos que* ρ *satisfaz*

$$\frac{\rho^2}{4} = \mu_{n^*}^{1-2\alpha} \tag{2.55}$$

para algum inteiro positivo n^* *(observe que* n^* *é único). Logo temos que*

$$\lambda_{n^*}^+ = \lambda_{n^*}^- = -\frac{\rho}{2}\mu_{n^*}^{\alpha}. \tag{2.56}$$

Defina o vetor Ψ_{n^*} por

$$\Psi_{n^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_{n^*} \end{pmatrix}. \tag{2.57}$$

Então

a) $\mathcal{A}_{\rho\alpha}\Psi^-_{n^*} = \lambda^+_{n^*}\Psi^-_{n^*} + \Phi^+_{n^*}$ *e* $(\mathcal{A}_{\rho\alpha} - \lambda^+_{n^*}I)^2\Psi^-_{n^*} = 0$ *(ou seja,* $\Psi^-_{n^*}$ *é um auto-vetor generalizado de* $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ *correspondente ao auto-valor* $\lambda^+_{n^*}$ *)*

b) $\overline{Span}\{\Phi^{+,-}_n, \Psi^-_{n^*}\} = E.$

Prova:

a) Como $\lambda^+_{n*} = -\frac{\rho}{2}\mu^\alpha_{n*}$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\rho\alpha}\Psi^-_{n^*} &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & \rho A^\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e_{n^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{n^*} \\ -\rho A^\alpha e_{n^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{n*} \\ -\rho\mu^\alpha_{n*}e_{n*} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e_{n^*} \\ -2\lambda^+_{n*}e_{n^*} \end{pmatrix} = \lambda^+_{n^*}\Psi^-_{n^*} + \Phi^+_{n^*}.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Usando (2.58) obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_{\rho\alpha} - \lambda^+_{n^*}I)^2\Psi^-_{n^*} &= \mathcal{A}^2_{\rho\alpha}\Psi^-_{n^*} - 2\lambda^+_{n^*}\mathcal{A}_{\rho\alpha}\Psi^-_{n^*} + \lambda^{+\,2}_{n^*}\Psi^-_{n^*} \\
&= \mathcal{A}_{\rho\alpha}(\lambda^+_{n^*}\Psi^-_{n^*} + \Phi^+_{n^*}) - 2\lambda^+_{n^*}\mathcal{A}_{\rho\alpha}\Psi^-_{n^*} + \lambda^+_{n^*}(\mathcal{A}_{\rho\alpha}\Psi^-_{n^*} - \Phi^+_{n^*}) \\
&= \lambda^+_{n^*}\mathcal{A}_{\rho\alpha}\Psi^-_{n^*} + \lambda^+_{n^*}\Phi^+_{n^*} - 2\lambda^+_{n^*}\mathcal{A}_{\rho\alpha}\Psi^-_{n^*} + \lambda^+_{n^*}\mathcal{A}_{\rho\alpha}\Psi^-_{n^*} - \lambda^+_{n^*}\Phi^+_{n^*} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

b)Análogo á prova da proposição (2.2). ■

Corolário 2.2 *Seja $\alpha = 1/2$ e $\rho = 2$ (portanto $\lambda^+_n = \lambda^-_n = -\frac{\mu_n^{1/2}}{2}$ para todo n).Consideremos o vetor Ψ^-_n como em (2.57) para todo n. Portanto (2.58) vale para todo n. Então*

$$\overline{Span}\{\Phi^+_n, \Psi^-_n\}^\infty_{n=1} = E. \tag{2.60}$$

Observe que

$$< \Phi^+_m, \Psi^-_n >_E = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \lambda^+_n\|e_n\|^2_H \neq 0 & n = m. \end{cases} \tag{2.61}$$

Proposição 2.4 *Considerando as mesmas hipóteses da proposição (2.2),definimos*

$$E^+ = \overline{Span}\{\Phi^+_n\}^\infty_{n=1} \ \ e \ \ E^- = \overline{Span}\{\Phi^-_n\}^\infty_{n=1}. \tag{2.62}$$

Então

$$E = E^+ \oplus E^-, \tag{2.63}$$

onde $\oplus$ significa a soma direta de E^+ e E^-.

Prova: Seja $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E$. Devemos encontrar constantes $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ tais que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Phi_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \Phi_n^-, \tag{2.64}$$

ou seja

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \gamma_n k_n) e_n \tag{2.65}$$

e

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \lambda_n^+ + \gamma_n k_n \lambda_n^-) e_n. \tag{2.66}$$

Como $\{(\sqrt{\mu_n + |\lambda_n^+|^2}) e_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal de H, temos que x e y podem ser escritos como:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n + |\lambda_n^+|^2) < x, e_n > e_n \tag{2.67}$$

e

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n + |\lambda_n^+|^2) < y, e_n > e_n, \tag{2.68}$$

respectivamente. Portanto tomando, para cada n, α_n e γ_n como soluções do sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcllcl} \alpha_n & + & \gamma_n K_n & = & (\mu_n + |\lambda_n^+|^2) < x, e_n > \\ \alpha_n \lambda_n^+ & + & \gamma_n K_n \lambda_n^- & = & (\mu_n + |\lambda_n^+|^2) < y, e_n >, \end{array} \right. \tag{2.69}$$

temos que a relação (2.64) está satisfeita. Provamos então que

$$E = E^+ + E^-. \tag{2.70}$$

Resta mostrar que $E^+ \cap E^- = \{0\}$. Dado $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E^+ \cap E^-$, temos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Phi_n^+ \ \ e \ \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \Phi_n^-, \tag{2.71}$$

onde $\alpha_n =< \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \Phi_n^+ >$ e $\omega_n =< \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \Phi_n^- >$. De (2.71) obtemos

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n K_n e_n \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \omega_n K_n) e_n = 0 \tag{2.72}$$

e

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n^+ e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n K_n \lambda_n^- e_n \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \lambda_n^+ - \omega_n K_n \lambda_n^-) e_n = 0. \tag{2.73}$$

Como o conjunto $\{e_n\}$ é ortogonal , então para todo n , segue de (2.72) e (2.73) o sistema

$$\left\{ \begin{array}{llll} \alpha_n & - & \omega_n K_n & = 0 \\ \alpha_n \lambda_n^+ & - & \omega_n K_n \lambda_n^- & = 0, \end{array} \right. \tag{2.74}$$

que possui solução $\alpha_n = \omega_n = 0$. Então, para todo n, temos que

$$< \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \Phi_n^+ >=< \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \Phi_n^- >= 0. \tag{2.75}$$

Como as famílias $\{\Phi_n^+\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\Phi_n^-\}_{n=1}^{\infty}$ são bases ortonormais de E^+ e E^-, respectivamente, concluímos que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ e portanto $E^+ \cap E^- = \{0\}$. ■

Proposição 2.5 *seja $\alpha \neq 1/2$ e suponhamos que (2.55) vale . Definindo*

$$E_{n^*}^+ = \overline{Span}\{\Phi_n^+\}_{n=1, n\neq n^*}^{\infty}, \tag{2.76}$$

$$E_{n^*}^- = \overline{Span}\{\Phi_n^-\}_{n=1, n\neq n^*}^{\infty} \quad e \quad E_{n^*} = Span\{\Phi_{n^*}^+, \Psi_{n^*}^-\}. \tag{2.77}$$

Então

$$E = E_{n^*}^+ \oplus E_{n^*}^- \oplus E_{n^*}, \tag{2.78}$$

onde

$$E_{n^*}^+ \cap E_{n^*}^- = E_{n^*}^+ \cap E_{n^*} = E_{n^*}^- \cap E_{n^*} = \{0\}. \tag{2.79}$$

Proposição 2.6 *Seja $\alpha = 1/2$ e $\rho = 2$ (ou seja, $\lambda_n^+ = \lambda_n^-$ para todo n) . Consideremos E^+ como em (2.62) e*

$$E_{\Psi}^- = \overline{Span}\{\Psi_n^-\}_{n=1}^{\infty}. \tag{2.80}$$

Então

$$E = E^+ \oplus E_{\Psi}^-. \tag{2.81}$$

Prova: *Os argumentos para se provar as proposições (2.5) e (2.6) são análogos aos desenvolvidos na proposição (2.4).*

Teorema 2.3 *Consideremos o operador* $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ *definido em (2.27) e* $\{\lambda_n^{\pm}\}_{n=1}^{\infty}$ *seus autovalores em (2.46). Então*

a) Se $\frac{\rho^2}{4} \neq \mu_n^{1-2\alpha}$ *(o que implica* $\lambda_n^+ \neq \lambda_n^-$ *para todo n) temos que* $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ *pode ser escrito como soma de dois operadores normais .*

b) Quando $\alpha \neq \frac{1}{2}$ *e* $\frac{\rho^2}{4} = \mu_{n^*}^{1-2\alpha}$ *para algum inteiro* n^* *(portanto* $\lambda_{n^*}^+ = \lambda_{n^*}^-$*), então* $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ *é escrito como soma de dois operadores normais mais uma componente dimensionalmente finita.*

c) No caso $\alpha = \frac{1}{2}$ *e* $\rho = 1$, *(ou seja* $\lambda_n^+ = \lambda_n^-$ *para todo n), então* $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ *é igual a soma de um operador normal mais uma componente dimensionalmente infinita.*

Prova: a) Sejam E^+ e E^- definidos em (2.62). Dado $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha})$, segue da proposição (2.4) que existem $x^+ \in E^+$ e $x^- \in E^-$ tais que

$$x = x^+ + x^-. \tag{2.82}$$

Por outro lado temos que $\{\Phi_n^+\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\Phi_n^-\}_{n=1}^{\infty}$ são bases ortonormais de E^+ e E^-, respectivamente. Portanto temos que x^+ e x^- podem ser escritos como

$$x^+ = \sum_{n=1}^{\infty} < x^+, \Phi_n^+ > \Phi_n^+ \ \ e \ \ x^- = \sum_{n=1}^{\infty} < x^-, \Phi_n^- > \Phi_n^-. \tag{2.83}$$

Segue então de (2.82) e (2.83) que

$$\mathcal{A}_{\rho\alpha} x = \mathcal{A}_{\rho\alpha}^+ x^+ + \mathcal{A}_{\rho\alpha}^- x^-, \tag{2.84}$$

onde

$$\mathcal{A}_{\rho\alpha}^+ x^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^+ < x^+, \Phi_n^+ > \Phi_n^+ \ \ e \ \ \mathcal{A}_{\rho\alpha}^- x^- = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^- < x^-, \Phi_n^- > \Phi_n^-. \tag{2.85}$$

Como

$$\|\mathcal{A}_{\rho\alpha}^{\pm} x^{\pm}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n^{\pm}|^2 | < x, \Phi_n^{\pm} > |^2 = \|\mathcal{A}_{\rho\alpha}^{*\pm} x^{\pm}\|^2, \tag{2.86}$$

onde $\mathcal{A}_{\rho\alpha}^{*\pm}$ é o adjunto de $\mathcal{A}_{\rho\alpha}^{\pm}$, segue que $\mathcal{A}_{\rho\alpha}^{\pm}$ é um operador normal.

b) Sejam E_{n*}^+, E_{n*}^- e E_{n*} definidos em (2.76) e (2.77). Dado $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha})$, temos pela proposição (2.5) que existem $x^+ \in E_{n*}^+$, $x^- \in E_{n*}^-$ e $x_\Psi \in \Psi_{n*}^-$ tais que

$$x = x^+ + x^- + x_\Psi. \tag{2.87}$$

Nesse caso temos que $x_\Psi = \alpha\Phi^+_{n*} + \beta\Psi^-_{n*}$, com α, $\beta \in \mathbb{R}$. Usando argumentos análogos aos usados no item anterior obtemos então que

$$\mathcal{A}_{\rho\alpha}x = \mathcal{A}^+_{\rho\alpha}x^+ + \mathcal{A}^-_{\rho\alpha}x^- + \mathcal{A}_{\rho\alpha}(\alpha\Phi^+_{n*} + \beta\Psi^-_{n*}), \tag{2.88}$$

onde

$$\mathcal{A}^\pm_{\rho\alpha}x^\pm = \sum_{\substack{n=1\\ n\neq n^*}}^{\infty} \lambda^\pm_n < x^\pm, \Phi^\pm_n > \Phi^\pm_n. \tag{2.89}$$

Como $\mathcal{A}_{\rho\alpha}\Psi^-_{n*} = \lambda^+_{n*}\Psi^-_{n*} + \Phi^+_{n*}$, segue de (2.88) que

$$\mathcal{A}_{\rho\alpha}x = \mathcal{A}^+_{\rho\alpha}x^+ + \mathcal{A}^-_{\rho\alpha}x^- + (\alpha\lambda^+_{n*} + \beta)\Phi^+_{n*} + \beta\lambda^+_{n*}\Psi^-_{n^*}. \tag{2.90}$$

c) Nesse caso considerando E^+ e E_Ψ definidos em (2.62) e (2.80), respectivamente, e usando proposição (2.6), obtemos, procedendo de maneira análoga aos casos anteriores, que

$$\mathcal{A}_{\rho\alpha}x = \mathcal{A}^+_{\rho\alpha}x^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\mathcal{A}_{\rho\alpha}\Psi^-_n = \mathcal{A}^+_{\rho\alpha}x^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\lambda^+_n\Psi^-_n + \Phi^+_n), \tag{2.91}$$

onde

$$\alpha_n = \frac{< x_\Psi, \Psi^-_n. > \Psi^-_n}{\|\Psi^-_n\|^2}. \tag{2.92}$$

∎

Capítulo 3

Caracterização de Domínios

Nesse capítulo desenvolveremos nosso principal objetivo, que é caracterizar domínios de potências fracionárias do operador $-\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ definido em (2.27). Logo em seguida veremos que essas potências realmente podem ser definidas, mas antes resolveremos o caso particular mais importante de nosso problema e que é essencial para o prosseguimento do trabalho.

Teorema 3.1 *O operador $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$, $1/2 \leq \alpha \leq 1$, definido em (2.27) é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de contrações sobre E.*

Prova: Observemos inicialmente que o domínio,

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha}) = \{(z_1, z_2) \in E \ ; \ z_2 \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \ \ e \ \ A^{1-\alpha}z_1 + \rho z_2 \in \mathcal{D}(A^\alpha)\},$$

do operador $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ é denso em E. De fato, dado $(z_1, z_2) \in \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A^\alpha)$, temos que $A^{1-\alpha}z_1 = A^{-\alpha}(Az_1) \in \mathcal{D}(A^\alpha)$, o que implica que $A^{1-\alpha}z_1 + \rho z_2 \in \mathcal{D}(A^\alpha)$ e portanto $\mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A^\alpha) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha})$. Isso mostra a densidade de $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha})$ em E, já que A^α tem domínio denso em H, para todo $\alpha \geq 0$ (teorema 1.18 item c). Por (2.48) temos que o conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A}_{\rho\alpha})$, de $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$, contém o setor

$$\Sigma_\delta = \{\lambda : |arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta, \ \ 0 < \delta < \frac{\pi}{2}\} \cup \{0\}. \tag{3.1}$$

Além disso segue de [4] que

$$||R(\lambda, \mathcal{A}_{\rho\alpha})|| \leq \frac{C_{\rho\alpha}}{|\lambda|}, \qquad \lambda \in \Sigma_\delta, \tag{3.2}$$

onde $\|R(\lambda, \mathcal{A}_{\rho\alpha})\|$ é o resolvente de $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ e $C_{\rho\alpha}$ é uma constante real positiva que depende de ρ e α. Portanto, pelo teorema 1.8, temos que $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ gera um C_0-*semigrupo* $S(t) = e^{\mathcal{A}_{\rho\alpha}t}$ satisfazendo

$$\|S(t)\| \leq C, \tag{3.3}$$

para alguma constante $C > 0$. E pelo teorema 1.10 concluímos mais ainda, que $e^{\mathcal{A}_{\rho\alpha}t}$ é analítico sobre E. ■

Agora estamos prontos para trabalhar o caso geral. Observe que do teorema 3.1 e da proposição 1.2 segue que $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ é um operador fechado densamente definido sobre E. Portanto devido as propriedades em (3.1) e (3.2) de $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ podemos definir potências fracionárias do tipo $(-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^\theta$, $0 \leq \theta \leq 1$, segundo considerações da seção 1.2 do capítulo 1. Nossa caracterização será feita em termos de domínios de potências fracionárias do operador A (definido no capítulo 2). Antes precisaremos de alguns resultados preliminares. Inicialmente relembremos que, como A é auto-adjunto e estritamente positivo segue que A pode ser escrito como

$$A = \int_{\mu_0}^{\infty} \mu dE_\mu, \quad \mu_0 > 0. \tag{3.4}$$

onde E_μ é uma função espectral conforme definição na seção 1.3. E mais ainda, para qualquer função analítica $\psi(t)$ definida sobre o intervalo $[\mu_0, +\infty)$ temos que $\psi(A)$ é um operador linear definido pela fórmula

$$\psi(A) = \int_{\mu_0}^{\infty} \psi(\mu) dE_\mu, \ \mu_0 > 0. \tag{3.5}$$

No restante deste capítulo o operador A será sempre o mesmo considerado acima.

Lema 3.2 *Consideremos $g_1(\mu)$ e $g_2(\mu)$ duas funções definidas por*

$$g_1(\mu) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{1-\theta} d\lambda}{\lambda^2 + \lambda\rho\mu^\alpha + \mu}, \quad g_2(\mu) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{-\theta} d\lambda}{\lambda^2 + \lambda\rho\mu^\alpha + \mu}, \quad \mu \geq \mu_0, \tag{3.6}$$

com $0 < \theta < 1$, $1/2 \leq \alpha \leq 1$ e μ_0 é definido em (3.4). Então os operadores

$$T_1 = A^{\alpha\theta} g_1(A) \ \ e \ \ T_2 = A^{\theta+\alpha-\theta\alpha} g_2(A) \tag{3.7}$$

são isomorfismos sobre H. Além disso, T_1 e T_2 são operadores auto-adjuntos, estritamente positivos e comutam com qualquer função analítica de A .

Prova: Para mostrar que T_1 e T_2 são isomorfismos basta verificar que ambos são estritamente positivos e portanto o zero não pertence ao espectro desses operadores. Provaremos então que para cada $0<\theta<1$ existem constantes $c_{1\theta}$, $C_{1\theta}$, $c_{2\theta}$ e $C_{2\theta}$ tais que

$$0<c_{1\theta}\leq \mu^{\alpha\theta}g_1(\mu)\leq C_{1\theta}<\infty, \tag{3.8}$$

e

$$0<c_{2\theta}\leq \mu^{\theta+\alpha-\theta\alpha}g_2(\mu)\leq C_{2\theta}<\infty, \tag{3.9}$$

para todo $\mu\geq\mu_0$. Para provar (3.8), temos de (3.6) que $g_1(\mu)$ é dado por

$$g_1(\mu)=\int_0^\infty \frac{\lambda^{1-\theta}d\lambda}{\lambda^2+\lambda\rho\mu^\alpha+\mu}. \tag{3.10}$$

Escrevendo $\lambda=\sigma\sqrt{\mu}$ em (3.10) obtemos

$$\begin{aligned} g_1(\mu) &= \int_0^\infty \frac{\lambda^{1-\theta}d\lambda}{\lambda^2+\lambda\rho\mu^\alpha+\mu}=\int_0^\infty \frac{\mu}{\mu}.\frac{\lambda^{1-\theta}d\lambda}{\lambda^2+\lambda\rho\mu^\alpha+\mu}=\int_0^\infty \frac{\mu}{\mu}.\frac{(\sigma\mu^{1/2})^{1-\theta}\sqrt{\mu}d\sigma}{\sigma^2\mu+\sigma\sqrt{\mu}\rho\mu^\alpha+\mu}\\ &= \int_0^\infty \frac{\mu^{\frac{4-\theta}{2}}\sigma^{1-\theta}d\sigma}{\mu^2(\sigma^2+\sigma\rho\mu^{\alpha-1/2}+1)}=\mu^{\frac{-\theta}{2}}\int_0^\infty\frac{\sigma^{1-\theta}d\sigma}{(\sigma^2+\sigma\rho\mu^{\alpha-1/2}+1)}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \mu^{\theta/2}g_1(\mu) &= \int_0^\infty \frac{\sigma^{1-\theta}d\sigma}{(\sigma^2+\sigma\rho\mu^{\alpha-1/2}+1)}\\ &= \int_0^{\mu^{\alpha-1/2}} \frac{\sigma^{1-\theta}d\sigma}{\sigma^2+\sigma\rho\mu^{\alpha-1/2}+1}+\int_{\mu^{\alpha-1/2}}^\infty \frac{\sigma^{1-\theta}d\sigma}{\sigma+\sigma\rho\mu^{\alpha-1/2}+1}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Consideremos primeiramente $0<\mu_0\leq\mu\leq 1$. Em (3.11), majorando a soma de integrais e substituindo σ por $\mu^{\alpha-1/2}$ no denominador, obtemos

$$\begin{aligned} \mu^{\theta/2}g_1(\mu) &\geq \int_0^{\mu^{\alpha-1/2}} \frac{\sigma^{1-\theta}d\sigma}{\sigma^2+\sigma\rho\mu^{\alpha-1/2}+1}\geq\int_0^{\mu^{\alpha-1/2}}\frac{\sigma^{1-\theta}d\sigma}{\mu^{2(\alpha-1/2)}+\rho\mu^{2(\alpha-1/2)}+1}\\ &= \int_0^{\mu^{\alpha-1/2}}\frac{\sigma^{1-\theta}d\sigma}{\mu^{2(\alpha-1/2)}(1+\rho)+1}=\frac{1}{\mu^{2(\alpha-1/2)}(1+\rho)+1}\int_0^{\mu^{\alpha-1/2}}\sigma^{1-\theta}d\sigma\\ &= \frac{1}{\mu^{2(\alpha-1/2)}(1+\rho)+1}\frac{\mu^{(\alpha-1/2)(2-\theta)}}{2-\theta}\geq\frac{\mu_0^{2\alpha-1}\mu^{-(\alpha-1/2)\theta}}{(\mu^{2(\alpha-1/2)}(1+\rho)+1)(2-\theta)}\\ &\geq \frac{\mu_0^{2\alpha-1}\mu^{-(\alpha-1/2)\theta}}{(2+\rho)(2-\theta)}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde para a última desigualdade majoramos $\mu^{\alpha-1/2}$ por 1 no denominador. Segue de (3.12) que

$$\mu^{(\alpha-1/2)\theta}\mu^{\theta/2}g_1(\mu) \geq \frac{\mu_0^{2\alpha-1}}{(2+\rho)(2-\theta)}, \qquad 0<\mu_0\leq\mu\leq 1. \tag{3.13}$$

ou seja

$$\mu^{\alpha\theta}g_1(\mu) \geq \frac{\mu_0^{2\alpha-1}}{(2+\rho)(2-\theta)} \qquad 0<\mu_0\leq\mu\leq 1, \tag{3.14}$$

Suponhamos agora que $\mu \geq 1$. Novamente, em (3.11), majorando a soma de integrais, substituindo $\mu^{\alpha-1/2}$ por σ e 1 por σ^2 no denominador, obtemos

$$\begin{aligned}\mu^{\theta/2}g_1(\mu) &\geq \int_{\mu^{\alpha-1/2}}^{\infty}\frac{\sigma^{1-\theta}d\sigma}{\sigma^2+\sigma\rho\mu^{\alpha-1/2}+1} \geq \int_{\mu^{\alpha-1/2}}^{\infty}\frac{\sigma^{1-\theta}d\sigma}{\sigma^2+\rho\sigma^2+1} \geq \int_0^{\infty}\frac{\sigma^{-1-\theta}d\sigma}{\rho+2}\\ &= \frac{1}{(2+\rho)}\frac{1}{\mu^{(\alpha-1/2)\theta}},\end{aligned} \tag{3.15}$$

para $\mu \geq 1$. Portanto temos que

$$\mu^{(\alpha-1/2)\theta}\mu^{\theta/2}g_1(\mu) \geq \frac{1}{2+\rho}, \qquad \forall\mu\geq 1 \tag{3.16}$$

ou seja

$$\mu^{\alpha\theta}g_1(\mu) \geq \frac{1}{2+\rho}, \qquad \forall\mu\geq 1. \tag{3.17}$$

Logo por (3.17) e (3.14) temos

$$\mu^{\alpha\theta}g_1(\mu) \geq min\left\{\frac{1}{2+\rho},\frac{\mu_0^{2\alpha-1}}{(2+\rho)(2-\theta)}\right\} = c_{1\theta}, \qquad 0<\mu_0<\mu\leq 1,$$

e o limite inferior em (3.8) está provado. Para mostrar o limite superior em (3.8), consideremos novamente a expressão em (3.11) e tomemos $0<\epsilon<\theta$. Observe que

$$\int_{\mu^{\alpha-1/2}}^{\infty}\frac{\sigma^{1-\theta}d\sigma}{\sigma^2+\sigma\rho\mu^{\alpha-1/2}+1} \leq \int_{\mu^{\alpha-1/2}}^{\infty}\frac{\sigma^{1-\theta}d\sigma}{\sigma^2} = \int_{\mu^{\alpha-1/2}}^{\infty}\frac{\sigma^{1-\theta}d\sigma}{\sigma^{2-\theta+\epsilon}\sigma^{\theta-\epsilon}}. \tag{3.18}$$

Substituindo $\sigma^{\theta-\epsilon}$ por $(\mu^{\alpha-1/2})^{(\theta-\epsilon)}$ em (3.18) obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mu^{\alpha-1/2}}^{\infty}\frac{\sigma^{1-\theta}d\sigma}{\sigma^{2-\theta+\epsilon}\sigma^{\theta-\epsilon}} &\leq \frac{1}{\mu^{(\alpha-1/2)(\theta-\epsilon)}}\int_{\mu^{\alpha-1/2}}^{\infty}\frac{\sigma^{1-\theta}d\sigma}{\sigma^{2-\theta+\epsilon}} = \frac{1}{\mu^{(\alpha-1/2)(\theta-\epsilon)}}\times\int_{\mu^{\alpha-1/2}}^{\infty}\sigma^{-1-\epsilon}d\sigma\\ &= \frac{1}{\mu^{(\alpha-1/2)(\theta-\epsilon)}}\frac{1}{\epsilon\mu^{\epsilon(\alpha-1/2)}} = \frac{1}{\epsilon\mu^{(\alpha-1/2)\theta}}, \quad \forall\mu\geq\mu_0>0.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Por outro lado temos que

$$\int_0^{\mu^{\alpha-1/2}} \frac{\sigma^{1-\theta}d\sigma}{\sigma^2+\sigma\rho\mu^{\alpha-1/2}+1} \leq \int_0^{\mu^{\alpha-1/2}} \frac{\sigma^{1-\theta}d\sigma}{\sigma\rho\mu^{\alpha-1/2}} = \frac{1}{\rho\mu^{\alpha-1/2}}\int_0^{\mu^{\alpha-1/2}} \sigma^{-\theta}d\sigma$$

$$= \frac{1}{\rho(1-\theta)}\frac{1}{\mu^{(\alpha-1/2)\theta}}, \quad \forall\mu \geq \mu_0 > 0. \tag{3.20}$$

Portanto, por (3.18), (3.19) e (3.20), segue que

$$\mu^{\theta/2}g_1(\mu) \leq \frac{1}{\epsilon\mu^{(\alpha-1/2)\theta}} + \frac{1}{\rho(1-\theta)}\frac{1}{\mu^{(\alpha-1/2)\theta}},$$

ou seja

$$\mu^{\alpha\theta}g_1(\mu) = \mu^{(\alpha-1/2)\theta}\mu^{\theta/2}g_1(\mu) \leq \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\rho(1-\theta)} = C_{1\theta} \quad \forall\mu \geq \mu_0 > 0, \tag{3.21}$$

como queríamos.

Provaremos agora (3.9). De (3.6) sabemos que $g_2(\mu)$ é dada por

$$g_2(\mu) = \int_0^\infty \frac{\lambda^{-\theta}d\lambda}{\lambda^2+\lambda\rho\mu^\alpha+\mu}. \tag{3.22}$$

Introduzindo a mudança de variável $\xi = \lambda\mu^{\alpha-1}$ em (3.22) obtemos

$$g_2(\mu) = \int_0^\infty \frac{\xi^{-\theta}\mu^{(1-\alpha)(1-\theta)}d\xi}{\xi^2\mu^{2(1-\alpha)}+\xi\rho\mu+\mu} = \int_0^\infty \frac{\mu}{\mu}\frac{\mu^{-\alpha+\theta(\alpha-1)}\xi^{-\theta}d\xi}{\xi^2\mu^{1-2\alpha}+\rho\xi+1}.$$

Portanto,

$$\mu^{\alpha+\theta(1-\alpha)}g_2(\mu) = \int_0^\infty \frac{\xi^{-\theta}d\xi}{\mu^{1-2\alpha}\xi^2+\rho\xi+1}. \tag{3.23}$$

Como $\alpha \geq 1/2$, então $\mu_0^{1-2\alpha} \geq \mu^{1-2\alpha}$, logo

$$0 < c_{2\theta} = \int_0^\infty \frac{\xi^{-\theta}d\xi}{\mu_0^{1-2\alpha}\xi^2+\rho\xi+1} \leq \int_0^\infty \frac{\xi^{-\theta}d\xi}{\mu^{1-2\alpha}\xi^2+\rho\xi+1} \leq \int_0^\infty \frac{\xi^{-\theta}d\xi}{\rho\xi+1} = C_{2\theta} < \infty \tag{3.24}$$

Portanto, por (3.23) e (3.24), (3.9) é verificado. As demais propriedades dos operadores T_1 e T_2 seguem direto dos resultados apresentados na seção 1.3 do capítulo 1 . ■

Corolário 3.3 *Consideremos os operadores T_1 e T_2 definidos em (3.7). Então os operadores T_3 e T_4 dados por*

$$T_3 = A^{\theta(1-2\alpha)}T_1 + \rho T_2 \tag{3.25}$$

e

$$T_4 = T_1T_3 + A^{(1-2\alpha)(1-\theta)}T_2^2 \tag{3.26}$$

possuem as mesmas propriedades dos operadores T_1 e T_2 .

Teorema 3.4 *Consideremos o operador $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ definido em (2.27). Temos que*

(i) Se $0 \leq \theta \leq 1/2$, então

$$\mathcal{D}((-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{\theta}) = \mathcal{D}(A^{1/2+\theta(1-\alpha)}) \times \mathcal{D}(A^{\alpha\theta}). \tag{3.27}$$

(ii) Se $1/2 \leq \theta \leq 1$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{D}((-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{\theta}) = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E \ : \ x \in \mathcal{D}(A^{1/2+\theta(1-\alpha)}); \\ y \in \mathcal{D}(A^{\alpha-1/2+\theta(1-\alpha)}), A^{1-\alpha}x + \rho y \in \mathcal{D}(A^{\alpha\theta})\}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Prova: Observe que o caso $\theta = 1$ já foi resolvido pelo teorema (3.1), enquanto que o caso $\theta = 0$ é óbvio. Portanto demonstraremos o teorema 3.4 para $0 < \theta < 1$. A prova será dividida em três lemas.

Lema 3.5 *Se $0 < \theta \leq 1/2$, então*

$$\mathcal{D}((-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{\theta}) \subset \mathcal{D}(A^{1/2+\theta(1-\alpha)}) \times \mathcal{D}(A^{\alpha\theta}), \tag{3.29}$$

e se $\frac{1}{2} \leq \theta < 1$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{D}((-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{\theta}) \subset \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \in \mathcal{D}(A^{1/2+\theta(1-\alpha)});\ y \in \mathcal{D}(A^{\alpha-1/2+\theta(1-\alpha)}) \ ; \\ A^{1-\alpha}x + \rho y \in \mathcal{D}(A^{\alpha\theta})\}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Prova: Temos pela proposição 1.3 temos que $(x, y) \in \mathcal{D}((-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{\theta})$ se e somente se

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{-\theta} w = \frac{sen\ \pi\theta}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{-\theta}(\lambda I - \mathcal{A}_{\rho\alpha})^{-1} w d\lambda, \tag{3.31}$$

para algum $w = (w_1, w_2) \in E \equiv \mathcal{D}(A^{1/2}) \times H$. Logo, substituindo em (3.31) a expressão (2.39) do resolvente , usando (2.40) , obtemos

$$x = \frac{sen\pi\theta}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{-\theta}[(\lambda I + \rho A^{\alpha})V^{-1}w_1 + V^{-1}(\lambda)w_2] d\lambda.$$

e

$$y = \frac{sen\pi\theta}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\theta}[-AV^{-1}(\lambda)w_1 + \lambda V^{-1}w_2]d\lambda.$$

Com a substituição

$$z_1 = \frac{sen\ \pi\theta}{\pi}A^{1/2}w_1 \in H \ \ e \qquad z_2 = \frac{sen\ \pi\theta}{\pi}w_2 \in H, \tag{3.32}$$

resulta

$$x = \int_0^\infty \lambda^{-\theta}[(\lambda I + \rho A^\alpha)V^{-1}A^{-1/2}(\lambda)z_1 + V^{-1}(\lambda)z_2]d\lambda \tag{3.33}$$

e

$$y = \int_0^\infty \lambda^{-\theta}[-V^{-1}(\lambda)A^{1/2}z_1 + \lambda V^{-1}(\lambda)z_2]d\lambda, \tag{3.34}$$

para algum $(z_1, z_2) \in H \times H$. Portanto usando a representação espectral de A (veja (3.4) e (3.5)) obtemos de (3.33) e (3.34) que

$$x = \int_0^\infty\int_{\mu_0}^\infty \frac{\lambda^{-\theta}(\lambda+\rho\mu^\alpha)\mu^{-1/2}}{\lambda^2+\lambda\rho\mu^\alpha+\mu}dE_\mu z_1 d\lambda + \int_0^\infty\int_{\mu_0}^\infty \frac{\lambda^{-\theta}dE_\mu z_2 d_\lambda}{\lambda^2+\lambda\rho\mu^\alpha+\mu}, \tag{3.35}$$

e

$$y = -\int_0^\infty\int_{\mu_0}^\infty \frac{\lambda^{-\theta}\mu^{1/2}dE_\mu z_1 d\lambda}{\lambda^2+\lambda\rho\mu^\alpha+\mu\ .} + \int_0^\infty\int_{\mu_0}^\infty \frac{\lambda^{1-\theta}dE_\mu z_2 d_\lambda}{\lambda^2+\lambda\rho\mu^\alpha+\mu}. \tag{3.36}$$

Pelo toerema de Fubini's, podemos trocar a ordem de integração em (3.35) e (3.36), obtendo

$$\begin{aligned} x &= \int_{\mu_0}^\infty\int_0^\infty \left(\mu^{-1/2}\frac{\lambda^{1-\theta}}{\lambda^2+\rho\lambda\mu^\alpha+\mu} + \rho\mu^{\alpha-1/2}\frac{\lambda^{-\theta}}{\lambda^2+\lambda\rho\mu^\alpha+\mu}\right)d_\lambda dE_\mu z_1 \\ &\quad + \int_{\mu_0}^\infty\int_0^\infty \frac{\lambda^{-\theta}}{\lambda^2+\lambda\rho\mu^\alpha+\mu}d_\lambda dE_\mu z_2, \end{aligned}$$

e

$$y = -\int_{\mu_0}^\infty\int_0^\infty \frac{\lambda^{-\theta}\mu^{1/2}}{\lambda^2+\lambda\rho\mu^\alpha+\mu}d\lambda dE_\mu z_1 + \int_{\mu_0}^\infty\int_0^\infty \frac{\lambda^{1-\theta}}{\lambda^2+\lambda\rho\mu^\alpha+\mu}d_\lambda dE_\mu z_2.$$

Relembrando as expressões de $g_1(\mu)$ e $g_2(\mu)$ em (3.6), obtemos

$$x = \int_{\mu_0}^\infty \mu^{-1/2}g_1(\mu) + \rho\mu^{\alpha-1/2}g_2(\mu)dE_\mu z_1 + \int_{\mu_0}^\infty g_2(\mu)dE_\mu z_2 \tag{3.37}$$

e

$$y = -\int_{\mu_0}^\infty \mu^{1/2}g_2(\mu)dE_\mu z_1 + \int_{\mu_0}^\infty g_1(\mu)dE_\mu z_2. \tag{3.38}$$

ou

$$x = A^{-1/2}g_1(A)z_1 + \rho A^{\alpha-1/2}g_2(A)z_1 + g_2(A)z_2 \tag{3.39}$$

e

$$y = -A^{1/2}g_2(A)z_1 + g_1(A)z_2. \tag{3.40}$$

Pelo lema (3.2) temos que

$$g_1(A) = A^{-\alpha\theta}T_1 \ \ e \ \ g_2(A) = A^{\alpha\theta-\alpha-\theta}T_2. \tag{3.41}$$

Substituindo (3.41) em (3.39) e (3.40) obtemos

$$x = A^{-1/2-\alpha\theta}T_1 z_1 + \rho A^{-1/2+\alpha\theta-\theta}T_2 z_1 + A^{\alpha\theta-\alpha-\theta}T_2 z_2 \tag{3.42}$$

e

$$y = -A^{1/2-\theta-\alpha+\alpha\theta}T_2 z_1 + A^{-\alpha\theta}T_1 z_2, \tag{3.43}$$

ou, de outra forma

$$x = A^{-1/2+\theta(\alpha-1)}T_3 z_1 + A^{-\alpha+\theta(\alpha-1)}T_2 z_2 \tag{3.44}$$

e

$$y = -A^{1/2-\alpha+\theta(\alpha-1)}T_2 z_1 + A^{-\alpha\theta}T_1 z_2, \tag{3.45}$$

onde T_3 é definido em (3.25). Observe que o expoente de A em (3.42), (3.44) e (3.45) são negativos pois $1/2 \leq \alpha \leq 1$ e $0 < \theta < 1$, portanto estas expressões estão bem definidas.

Para qualquer $(z_1, z_2) \in H \times H$, temos que

$$A^{-1/2+\theta(\alpha-1)}T_3 z_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2+\theta(1-\alpha)}), \quad A^{-\alpha+\theta(\alpha-1)}T_2 z_2 \in \mathcal{D}(A^{\alpha+\theta(1-\alpha)}), \tag{3.46}$$

e como $1/2 + \theta(1-\alpha) = \alpha + \theta(1-\alpha) + 1/2 - \alpha \leq \alpha + \theta(1-\alpha)$ (pois $1/2 - \alpha \leq 0$), segue por (3.44) e (3.46) que

$$x \in \mathcal{D}(A^{1/2+\theta(1-\alpha)}). \tag{3.47}$$

Além disso, para qualquer $(z_1, z_2) \in H \times H$, também temos que

$$A^{1/2-\alpha+\theta(\alpha-1)}T_2 z_1 \in \mathcal{D}(A^{\alpha-1/2+\theta(1-\alpha)}), \quad A^{-\alpha\theta}T_1 z_2 \in \mathcal{D}(A^{\alpha\theta}). \tag{3.48}$$

E para $\alpha \geq \frac{1}{2}$, como assumimos, segue que

$$[\alpha - \frac{1}{2} + \theta(1-\alpha)] - \alpha\theta = (\alpha - \frac{1}{2})(1-2\theta) \geq 0 \quad se \;\; 0 < \theta \leq \frac{1}{2}, \tag{3.49}$$

e

$$[\alpha - \frac{1}{2} + \theta(1-\alpha)] - \alpha\theta = (\alpha - \frac{1}{2})(1-2\theta) \leq 0 \quad se \;\; \frac{1}{2} \leq \theta < 1. \tag{3.50}$$

ou seja

$$[\alpha - \frac{1}{2} + \theta(1-\alpha)] \geq \alpha\theta \quad se \;\; 0 < \theta \leq \frac{1}{2} \tag{3.51}$$

e

$$[\alpha - \frac{1}{2} + \theta(1-\alpha)] \leq \alpha\theta \quad se \;\; \frac{1}{2} \leq \theta < 1. \tag{3.52}$$

Desta forma, por (3.48), (3.52) e (3.45), temos

$$y \in \mathcal{D}(A^{\alpha\theta}), \quad se \;\; 0 < \theta \leq \frac{1}{2}, \tag{3.53}$$

e

$$y \in \mathcal{D}(A^{\alpha - \frac{1}{2} + \theta(1-\alpha)}), \quad se \;\; \frac{1}{2} \leq \theta < 1. \tag{3.54}$$

Finalmente, aplicando $\rho A^{\alpha-1}$ em (3.43) e somando com (3.42) obtemos

$$\begin{aligned} x + \rho A^{\alpha-1} y &= A^{-1/2-\alpha\theta} T_1 z_1 \quad (\in \mathcal{D}(A^{1/2+\alpha\theta})) \\ &\quad + A^{-\theta-\alpha+\alpha\theta} T_2 z_2 \quad (\in \mathcal{D}(A^{\theta+\alpha-\alpha\theta})) \\ &\quad + \rho A^{\alpha-1-\alpha\theta} T_1 z_2 \quad (\in \mathcal{D}(A^{1-\alpha+\alpha\theta})), \end{aligned} \tag{3.55}$$

e como $1/2 + \alpha\theta \geq 1 - \alpha + \alpha\theta$ e $\theta + \alpha - \alpha\theta \geq 1 - \alpha + \alpha\theta$, para $1/2 \leq \alpha$ *e* $\theta < 1$, obtemos de (3.55) que

$$x + \rho A^{\alpha-1} y \in \mathcal{D}(A^{1-\alpha+\alpha\theta}) \quad ou \quad A^{1-\alpha} x + \rho y \in \mathcal{D}(A^{\alpha\theta}). \tag{3.56}$$

Portanto (3.47), (3.53), (3.54) e (3.56) nos dão o resultado desejado e o lema (3.5) está provado. ∎

Lema 3.6 *Seja* $0 < \theta \leq 1/2$. *Então*

$$\mathcal{D}(A^{1/2+\theta(1-\alpha)}) \times \mathcal{D}(A^{\alpha\theta}) \subset \mathcal{D}((-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{\theta}). \tag{3.57}$$

Prova: Determinaremos z_1 e z_2, definidos em (3.44) e (3.45), de maneira explicita para $0 < \theta \leq 1/2$, usando somente as propriedades (3.47) e (3.53), que são nossas hipóteses presentes. Aplicando $A^{1/2+\theta(1-\alpha)}T_1$ em (3.44) e $A^{1/2+\alpha(\theta-1)}T_2$ em (3.45) (ambos sendo operadores bem definidos para $1/2 < \alpha$)e subtraindo a segunda identidade da primeira obtemos

$$A^{1/2+\theta-\alpha\theta}T_1x - A^{1/2-\alpha+\theta\alpha}T_2y = T_3T_1z_1 + A^{(1-2\alpha)(1-\theta)}T_2^2z_1 = T_4z_1, \tag{3.58}$$

onde T_4 é definido em (3.26). De (3.58) obtemos

$$z_1 = T_4^{-1}A^{1/2+\theta-\theta\alpha}T_1x - T_4^{-1}A^{1/2-\alpha+\theta\alpha}T_2y. \tag{3.59}$$

substituindo (3.59) em (3.45), após ao último ter sido aplicado $A^{\alpha\theta}$, resulta

$$z_2 = A^{(2\alpha-1)(\theta-1/2)}A^{1/2+\theta-\alpha\theta}T_2T_4^{-1}x + T_1^{-1} \times (I - A^{(2\alpha-1)(\theta-1/2)+1/2-\alpha}T_4^{-1}T_2^2)A^{\alpha\theta}y.$$

Observe que z_1 e z_2 estão bem definidos pois para x e y satisfazendo (3.47) e (3.53), pois $((2\alpha-1)(\theta-1/2) < 0$ e $1/2-\alpha < 0$. Portanto para

$$w_1 = \frac{\pi}{sen\theta\pi}A^{-1/2}z_1 \ e \ w_2 = \frac{\pi}{sen\theta\pi}z_2, \tag{3.60}$$

(ver (3.32)) temos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{D}(-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{-\theta}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \tag{3.61}$$

e então $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{\theta}$. ■

Lema 3.7 *Seja* $1/2 \leq \theta < 1$. *Então*

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E : x \in \mathcal{D}(A^{1/2+\theta(1-\alpha)}, y \in \mathcal{D}(A^{\alpha-1/2+\theta-\theta\alpha}); A^{1-\alpha}x + \rho y \in \mathcal{D}(A^{\alpha\theta})\right\}$$
$$\subset \mathcal{D}((-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{\theta}) \tag{3.62}$$

Prova: Novamente como no lema anterior, determinaremos explicitamente z_1 e z_2 ,definidos em (3.44) e (3.45), mas agora usando somente as propriedades (3.47), (3.54) e (3.56) para $1/2 \leq \theta < 1$.

Aplicando $A^{1/2+\theta-\theta\alpha}T_2$ em (3.44), $A^{\alpha-1/2-\theta(1-\alpha)}T_3$ em (3.45) e somando as identidades obtemos

$$A^{1/2+\theta-\theta\alpha}T_2x + A^{\alpha-1/2+\theta(1-\alpha)}T_3y = A^{1/2-\alpha}T_2^2z_2 + A^{(\alpha-1/2)(1-2\theta)}T_1T_3z_2. \tag{3.63}$$

Substituindo T_3, definido em (3.25), no lado esquerdo de (3.63) obtemos

$$\begin{aligned} &A^{\alpha-1/2-\theta\alpha+\theta}T_2(A^{(1-\alpha)}x + \rho y) + A^{\alpha-1/2+2\theta-3\alpha\theta}T_1y \\ &= A^{1/2-\alpha}T_2^2z_2 + A^{(\alpha-1/2)(1-2\theta)}T_1T_3z_2, \end{aligned} \tag{3.64}$$

ou

$$A^{(\alpha-1/2)(1-2\theta)}A^{\alpha\theta}T_2(A^{1-\alpha}x + \rho y) + A^{(\alpha-1/2)(1-2\theta)}A^{\theta(1-\alpha)}T_1y = A^{(\alpha-1/2)(1-2\theta)}T_4z_2. \tag{3.65}$$

onde T_4 é o operador definido em (3.26). Observe que todas as expressões em (3.65) estão bem definidas sob as hipóteses presentes pois $(\alpha - 1/2)(1-2\theta) < 0$ e como $\alpha - 1/2 \geq 0$ temos $\alpha - 1/2 + \alpha - \alpha\theta = (\alpha - 1/2) + \theta(1-\alpha) \geq \theta(1-\alpha)$, o que implica $y \in \mathcal{D}(A^{\theta(1-\alpha)})$, por (3.54).Desta forma, de (3.65) resulta

$$z_2 = T_4^{-1}A^{\alpha\theta}T_2(A^{1-\alpha}x + \rho y) + T_4^{-1}A^{\theta(1-\alpha)}T_1y. \tag{3.66}$$

Substituindo (3.66) em (3.44), após ao último ter sido aplicado $A^{1/2+\theta-\theta\alpha}$, obtemos

$$\begin{aligned} z_1 &= T_3^{-1}A^{1/2+\theta-\theta\alpha}x - T_3^{-1}A^{1/2-\alpha}T_2T_4^{-1}[A^{\theta\alpha}T_2(A^{1-\alpha} + \rho y)] \\ &\quad -T_3^{-1}A^{1/2-\alpha}T_2T_4^{-1}A^{\theta(1-\alpha)}T_1y. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Observe que todos os termos em (3.66), (3.68) estão bem definidos para para x e y satisfazendo (3.47), (3.54) e (3.56). Portanto tomando (w_1, w_2) como em (3.60) segue o resultado desejado. ■

Capítulo 4

Aplicações

Por todo este capítulo assumiremos que A é o mesmo operador definido no capítulo 2.

4.0.4 Geração de semigrupo com perturbação não auto-adjunta

Teorema 4.1 *Seja $B = \rho A^{\alpha} + B_1$, onde $\rho > 0$, $1/2 \leq \alpha \leq 1$, e B_1 é um operador fechado. Além disso, suponhamos que existe $\alpha_1 \leq 1/2$ tal que $\mathcal{D}(A^{\alpha_1}) \subset \mathcal{D}(B_1)$, onde $\alpha_1 < 1/2$ se $\alpha < 1$ e $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ se $\alpha = 1$. Então, o operador*

$$\mathcal{A}_B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & -B \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) = \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(B) \tag{4.1}$$

gera um semigrupo analítico sobre $E = \mathcal{D}(A^{1/2}) \times H$.

Prova: Observe que $\mathcal{A}_B$ pode ser reescrito como

$$\mathcal{A}_B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & -\rho A^{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -B_1 \end{pmatrix} = \mathcal{A}_{\rho\alpha} + \mathcal{L}, \tag{4.2}$$

onde $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \mathcal{D}(A^{1/2}) \times \mathcal{D}(B_1)$. Observe que $\mathcal{L}$ e fechado, pois para $w = (x, y) \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ temos $\mathcal{L}w = (0, -B_1 y)$ e B_1 é fechado. Como $\alpha_1 < 1/2$ se $\alpha < 1$ e $\alpha_1 = 1/2$ se $\alpha = 1$, podemos determinar $\theta \in (1/2, 1)$ de forma que $(1-\theta)(1-\alpha)$ seja suficientemente pequeno, obtendo

$$\frac{1}{2} - (1-\theta)(1-\alpha) = \alpha - \frac{1}{2} + \theta(1-\alpha) \geq \alpha_1. \tag{4.3}$$

Portanto segue de (4.3) e da hipótese $\mathcal{D}(A^{\alpha_1}) \subset \mathcal{D}(B_1)$, que

$$\mathcal{D}(A^{\alpha - 1/2 + \theta(1-\alpha)}) \subset \mathcal{D}(A^{\alpha_1}) \subset \mathcal{D}(B_1) \tag{4.4}$$

E como $\mathcal{D}(A^{1/2+\theta(1-\alpha)}) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$, segue do teorema 3.4 que

$$\mathcal{D}((-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{\theta}) \subset D(\mathcal{L}). \tag{4.5}$$

Portanto, pelo teorema 1.20, temos que

$$||\mathcal{L}w||_E \leq C[||t^{\theta-1}||\mathcal{A}_{\rho\alpha}w||_E + t^{\theta}||w||_E], \quad w \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha}),$$

para todo $t > 0$, onde C é uma constante que independe de t. Observe que podemos tomar t suficientemente grande de forma que $Ct^{\theta-1}$ e Ct^{θ} estejam próximos de zero, e como o semigrupo de contração gerado por $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ também é analítico sobre E, podemos usar o teorema 1.11 e concluir que $\mathcal{A}_B$ gera um semigrupo analítico $e^{\mathcal{A}_B t}$ de operadores lineares sobre E para todo $t > 0$. ∎

4.0.5 Regularidade de um problema não-homogêneo

Consideremos o problema não homogêneo

$$\ddot{x} + \rho A^{\alpha}\dot{x} + Ax = f, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1 \tag{4.6}$$

com $\rho > 0$, $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ e $f \in L^2(0, T; H)$. Com a substituição $z_1 = x$ e $z_2 = \dot{x}$ o problema (4.6) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \mathcal{A}_{\rho\alpha}z(t) + g(t), \\ z(0) &= z_0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

onde

$$z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \; z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \; \mathcal{A}_{\rho\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & -\rho A^{\alpha} \end{pmatrix} \;\; e \;\; g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Observe que se S_g é solução de (4.7) a função definida por $h(s) = S(t-s)S_g(s)$, onde S(t) é o semigrupo gerado por $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$, é diferenciável para $0 < s < t$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{dh}{ds} &= -\mathcal{A}_{\rho\alpha}S(t-s)S_g(s) + S(t-s)S_g'(s) = -\mathcal{A}_{\rho\alpha}S(t-s)S_g(s) \\ &\quad + S(t-s)\mathcal{A}_{\rho\alpha}S_g(s) + S(t-s)g(s) = S(t-s)g(s). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Como $f \in L^2(0,T;H)$ então $S(t-s)g(s)$ é integrável, portanto integrando (4.8) de 0 a t resulta

$$(\mathcal{S}_g)(t) = \int_0^t S(t-\tau)g(\tau)d\tau + S(t)z_0. \tag{4.9}$$

Teorema 4.2 *(i) Consideremos o problema não homogêneo definido em (4.6). Então temos que*

$$\mathcal{S}_g \in L^2(0,T;\mathcal{D}(A^{3/2-\alpha}) \times \mathcal{D}(A^{1/2})) \cap C([0,t];\mathcal{D}(A^{1-\alpha/2}) \times \mathcal{D}(A^{\alpha/2})). \tag{4.10}$$

(ii) Seja $z_0 = (x_0, x_1) \in \mathcal{D}((-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^s)$, s é um número real, onde se $s > 0$ temos que $\mathcal{D}((-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{-s}) = [\mathcal{D}((-\mathcal{A}^*_{\rho\alpha}))^s]'$, o espaço dual de $\mathcal{D}((-\mathcal{A}^*_{\rho\alpha})^s)$ com a respectiva E-topologia. Então

$$S(t)z_0 \in L^2(0,T;\mathcal{D}((-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{s+1/2}) \cap C([0,T];\mathcal{D}((-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^s). \tag{4.11}$$

A seguir faremos um esboço da prova do teorema (4.2) nos preocupando apenas em enfatizar a importância do teorema 3.4 . Evitaremos trabalhar com alguns pontos mais trabalhosos que, quando possível, serão referenciados.

Prova do Teorema 4.2:

a) Provaremos primeiro a L_2-regularidade em (4.10). Sejam

$$x(t) = \int_0^t S(t-s)g(s)ds \tag{4.12}$$

e

$$y(t) = S(t)z_0. \tag{4.13}$$

Aplicando $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ em (4.12) obtemos

$$\mathcal{A}_{\rho\alpha}x(t) = \mathcal{A}_{\rho\alpha}\int_0^T S(t-s)g(s)ds = \int_0^T \mathcal{A}_{\rho\alpha}S(t-s)g(s)ds. \tag{4.14}$$

Estendendo a função g(t) igual a zero para valores negativos e maiores do que T, podemos escrever $\mathcal{A}_{\rho\alpha}x(t)$ em (4.14) como

$$\mathcal{A}_{\rho\alpha}x(t) = \int_{-\infty}^t \mathcal{A}_{\rho\alpha}S(t-s)g(s)ds = \mathcal{A}_{\rho\alpha}(S * g)(t), \tag{4.15}$$

onde * significa o produto de convolução de S e g. Aplicando a transformada de Laplace em (4.15) e usando o teorema da convolução, obtemos

$$\mathcal{L}\{\mathcal{A}_{\rho\alpha}x(t)\} = \mathcal{A}_{\rho\alpha}\mathcal{L}\{S\}(\lambda)\mathcal{L}\{g\}(\lambda) = \mathcal{A}_{\rho\alpha}R(\lambda, \mathcal{A}_{\rho\alpha})\mathcal{L}\{g\}(\lambda), \tag{4.16}$$

onde $R(\lambda, \mathcal{A}_{\rho\alpha})$ é o resolvente de $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ com $\lambda = \gamma + \omega i$, $\gamma > 0$. Devido a analiticidade de $S(t)$, temos pelo teorema 1.10 que existe $M > 0$ tal que

$$\|R(\lambda, \mathcal{A}_{\rho\alpha})\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \gamma > 0. \tag{4.17}$$

na norma do operador . E da indentidade

$$(\lambda I - \mathcal{A}_{\rho\alpha})R(\lambda, \mathcal{A}_{\rho\alpha}) = I,$$

resulta

$$\mathcal{A}_{\rho\alpha}R(\lambda, \mathcal{A}_{\rho\alpha}) = \lambda R(\lambda, \mathcal{A}_{\rho\alpha}) - I,$$

portanto

$$\|AR(\lambda, \mathcal{A}_{\rho\alpha})\| \leq M + 1, \quad \gamma > 0 \tag{4.18}$$

Por (4.16) e (4.18) segue então que

$$\|(\mathcal{L}\{\mathcal{A}_{\rho\alpha}x(t)\}(\lambda)\| \leq (M+1)\|\mathcal{L}\{g\}(\lambda)\|_H, \quad \gamma > 0 \tag{4.19}$$

usando (4.19) e a identidade de Parseval obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma t}\|\mathcal{A}_{\rho\alpha}x(t)\|_E^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathcal{L}\{\mathcal{A}_{\rho\alpha}(t)x(t)\}(\gamma + i\omega)\|_E^2 d\omega \\ &\leq (M+1)\int_{-\infty}^{\infty} \|\mathcal{L}\{g\}(\gamma + i\omega)\|_E^2 d\omega \\ &= (M+1)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma t}\|g(t)\|_E^2 dt. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Como $g(t) = 0$ para $t < 0$ e $t > T$ segue de (4.20) que

$$\|\mathcal{A}_{\rho\alpha}x(t)\|_{L^2(0,T,E)} \leq 2\|g\|^2_{L^2(0,T,E)}.$$

E como $\|x(t)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha})} = \|\mathcal{A}_{\rho\alpha}x(t)\|$ concluímos que $x(t) \in L_2(0, T; \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha})$. Como $S(t)$ é um semigrupo analítico e de contração temos direto que $y(t) \in L_2(0, T; \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha})$. Mostramos então que $S_g(t) = x(t) + y(t) \in L_2(0,T;\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha})$. Mas pelo teorema (3.4) temos que $\mathcal{D}(A_{\rho\alpha}) \subset \mathcal{D}(A^{3/2-\alpha})) \times \mathcal{D}(A^{1/2})$, portanto a L_2 regularidade em (4.10) está provada. Quanto a C-regularidade em (4.10), como $\mathcal{S}_g \in L_2(0,T;\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha}))$ e $\frac{d}{dt}(S_g) = \mathcal{A}_{\rho\alpha}S_g + g(t) \in L_2(0,T;E)$, temos pelo teorema 1.24 com $j=0$ e $m=1$ que

$$S_g \in C([0,T];[\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha}),E]_{\theta=1/2}), \tag{4.21}$$

onde $[\ ,\ ]_\theta$ é o espaço de interpolação definido na seção 1.4 do capítulo 1. Por [6]p.289 temos que

$$[\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha}),E]_\theta = \mathcal{D}(-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{1-\theta}, \quad 0<\theta<1. \tag{4.22}$$

Portanto usando (4.21) e (4.22)(com $\theta = 1/2$) segue que $S_g \in C([0,T];\mathcal{D}(-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{1/2})$. Como, pelo teorema (3.4), temos $\mathcal{D}(-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{1/2}) = \mathcal{D}(A^{1-\alpha/2}) \times \mathcal{D}(A^{\alpha/2})$, segue a C-regularidade em (4.10).

(ii) Como S(t) é um semigrupo analítico sobre E, segue pelo teorema 1.19 a C-regularidade em (4.11). Quanto a L_2-regularidade em (4.11) observemos inicialmente que, como

$$\|x(t)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha})} = \|\mathcal{A}_{\rho\alpha}x(t)\|_E, \tag{4.23}$$

então

$$\|S(t)x\|_{L^2[0T,\mathcal{D}(-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{s+1/2}]} = \int_0^T \|(-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{s+1/2}S(t)x\|_E^2 dt. \tag{4.24}$$

Pelo teorema (2.3) temos que $\mathcal{A}_{\rho\alpha}$ pode ser escrito como soma de dois operadores normais (explicitamente definidos), com exceção em dois casos excepcionais onde aparece uma soma adicional de componentes. No caso geral onde $\rho^2 \neq \mu_n^{1-2\alpha}$, para todo n segue que

$$\mathcal{A}_{\rho\alpha} = \mathcal{A}_\rho^+ x^+ + \mathcal{A}_\rho^- x^- = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^+ < x^+, \Phi_n^+ > \Phi_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^- < x^-, \Phi_n^- > \Phi_n^-, \tag{4.25}$$

para todo $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha})$. Logo $(-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{s+1/2}S(t)z_0$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}(-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{s+1/2}S(t)z_0 &= \sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda_n^+)^{s+1/2}e^{(\lambda_n^+)t} < z_0^+, \Phi_n^+ > \Phi_n^+ \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda_n^-)^{s+1/2}e^{(\lambda_n^-)t} < z_0^-, \Phi_n^- > \Phi_n^-, \end{aligned} \tag{4.26}$$

onde $z = z_0^+ + z_0^-$, $z_0^\pm \in E^\pm$, $E^\pm = \overline{Span}\{\Phi^\pm\}$. Assim de (4.24) e (4.26) segue que

$$
\begin{aligned}
\|S(t)z_0\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{D}(-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{s+1/2})} &= \int_0^T \|(-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{s+1/2})S(t)z_0\|^2_E dt.\\
&\leq \int_0^T \|\sum_{n=1}^\infty (-\lambda_n^+)^{s+1/2} e^{(\lambda_n^+)t} < z_0^+, \Phi_n^+ > \Phi_n^+\|^2 dt + \\
&\quad + \int_0^T \|\sum_{n=1}^\infty (-\lambda_n^-)^{s+1/2} e^{(\lambda_n^-)t} < z_0^-, \Phi_n^- > \Phi_n^-\|^2 dt\\
&= \int_0^T \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n^+|^{2s+1} e^{2Re\lambda_n^+ t}| < z_0^+, \Phi_n^+ > |^2 dt\\
&\quad + \int_0^T \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n^-|^{2s+1} e^{2Re\lambda_n^- t}| < z_0^-, \Phi_n^- > |^2 dt\\
&= \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n^+|^{2s+1}| < z_0^+, \Phi_n^+ > |^2 \frac{1}{2Re\lambda_n^+}(e^{2Re\lambda_n^+ T} - 1)\\
&\quad + \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n^-|^{2s+1}| < z_0^-, \Phi_n^- > |^2 \frac{1}{2Re\lambda_n^-}(e^{2Re\lambda_n^- T} - 1)\\
&\leq C_1 \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n^+|^{2s}| < z_0^+, \Phi_n^+ > |^2 + C_2 \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n^-|^{2s}| < z_0^-, \Phi_n^- > |^2\\
&= C_1\|z_0^+\|^2_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha})} + C_2\|z_0^-\|^2_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha})}, \quad C_1, C_2 > 0.
\end{aligned}
$$

Portanto $S(t)z_0 \in L^2(0,T;\mathcal{D}((-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{s+1/2})$. No caso $\alpha \neq 1/2$ e $\rho = \mu_{n*}^{1-2\alpha}$ o cálculo não se difere do realizado acima, já que a componente adicional envolvida tem dimensão finita. O último caso, $\alpha = 1/2$ e $\rho = 1$, envolve questões mais complexas e não faremos aqui.

Exemplo 4.3 *Seja Ω um domínio aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$, suave. Consideremos o sistema elástico*

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
w_{tt} + \Delta^2 w - \rho\Delta w_t = f & em & (0,T] \times \Omega = Q\\
w|_{t=0} = w_0 \; ; \; w_t|_{t=0} = w_1 & em & \Omega\\
w|_{\sum} \equiv 0 & em & (0,T] \times \partial\Omega = \sum\\
\Delta w|_{\sum} \equiv 0 & em & \sum.
\end{array}
\right.
\tag{4.27}
$$

Comparando os problemas (4.27) e (4.6) com $\alpha = 1/2$, temos que $H = L^2(\Omega)$; $Au = \Delta^2 u$, $\mathcal{D}(A) = \{u \in H^4(\Omega), u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0\}$. Então $A^{1/2}u = -\Delta u$, $u \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Além disso temos

$$
\mathcal{D}(A^{1/4}) = H_0^1(\Omega) \;\; e \;\; \mathcal{D}(A^{3/4}) = V = \{u \in H^3(\Omega) \; : \; u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{4.28}
$$

Portanto, pelo teorema (4.2) com $\alpha = 1/2$, obtemos a seguinte regularidade:

$$[w(t), w_t(t)] = (\mathcal{S}g)(t) \in L_2(0,T; H^4(\Omega) \times H^2(\Omega)) \cap C([0,T], V \times H_0^1(\Omega)). \tag{4.29}$$

Por outro lado como, para $\alpha = 1/2$, $(w_0, w_1) \in \mathcal{D}(-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{1/2} = \mathcal{D}(A^{3/4}) \times \mathcal{D}(A^{1/4}) = V \times H_0^1(\Omega)$, segue pelo item ii) do teorema (4.2) (com $s = 1/2$) que

$$\begin{aligned} S(t)z_0 \;\in\;& L_2(0,T; \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\rho\alpha}) \cap C([0,T]; \mathcal{D}((-\mathcal{A}_{\rho\alpha})^{1/2}) \\ &= L_2(0,T; H^4(\Omega) \times H^2(\Omega)) \cap C([0,T]; V \times H_0^1(\Omega)), \end{aligned}$$

que é a mesma regularidade em (4.29).

Referências Bibliográficas

[1] Brezis, H., *Análisis Funcional*, Alianza Editorial, S.A, Madrid, 1984.

[2] Chen, S. e Russel, D.L., *A mathematical model for linear elastic systems with structural damping*, Quart.Appl.Math., Jan.(1982), 433-454.

[3] Chen, S. e Triggiane, R., *Proof of two conjectures of G. Chen and D.L. Russell on structural damping for elastic systems*, Lecture Notes in Mathematics,**1354** (1897), 234-256.

[4] Chen, S. e Triggiane, R., *Proof of extension of two conjectures on structural damping for elastic systems*, Pacific J. Math. **136**, $N_0 1$ (1989), 15-55.

[5] Chen, S. e Triggiane, R., *Gevrey Class Semigroups Arising From Elastic Systems With Gentle Dissipation: The Case* $0 < \alpha < 1/2$, Proceedings Of the American Mathematical Society., **110**, $N_0 2$, October (1990), 401-415.

[6] Chen, S. e Triggiane, R., *Characterizations of Fracional Powers of Certain Operators Arinsing in Elastic Systems, and Aplications*, Journal of Differential Equations, **88** (1990), 279-293.

[7] Krasnoselskii, M.A., *Integral Operators in spaces of the summable functions*, Noordhoff International Publishing - Leyden, 1976.

[8] Lions, J.L, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I*, Springer- Verlag, New York, 1970.

[9] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1983.