UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cláudio Mucelin

DEMONSTRAÇÕES BIJETIVAS EM PARTIÇÕES

Campinas

2011

DEMONSTRAÇÕES BIJETIVAS EM PARTIÇÕES

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Cláudio Mucelin e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de março de 2011.

Andréia Cristina Ribeiro

Profa. Dra. Andréia Cristina Ribeiro

Orientadora

Banca Examinadora:

1. Profa. Dra. Andréia Cristina Ribeiro
2. Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
3. Profa. Dra. Tatiana Bertoldi Carlos

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Mucelin, Cláudio

M88b Demonstrações bijetivas em partições/Cláudio Mucelin-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.

Orientador : Andréia Cristina Ribeiro

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Teoria dos números. 2.Partições (Matemática). 3.Números inteiros. 4.Euler, Teorema de. 5.Funções geradoras. 6.Identidades combinatórias. I. Ribeiro, Andréia Cristina. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Bijectives demonstrations in partitions

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1.Number theory. 2.Partities (Mathematics). 3. Integer numbers. 4.Euler's theorem. 5.Generating functions. 6.Combinatorial identities.

Área de concentração: Teoria dos Números

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Profa. Dra. Andréia Cristina Ribeiro (UFMS)
Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (UFRGS)
Profa. Dra.Tatiana Bertoldi Carlos (UFMS)

Data da defesa: 17/02/2011

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 17 de fevereiro de 2011 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Andréia C. Ribeiro

Prof. (a). Dr (a). ANDRÉIA CRISTINA RIBEIRO

Eduardo Brietzke

Prof. (a). Dr (a). EDUARDO HENRIQUE DE MATTOS BRIETZKE

Tatiana Bertoldi Carlos

Prof. (a). Dr (a). TATIANA BERTOLDI CARLOS

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade a mim concedida de poder estudar na Unicamp, pela companhia em momentos difíceis e de grande provação, e pela força e discernimento nas horas das decisões importantes em minha vida.

Agradeço a minha esposa, Giseli, por todo carinho e apoio recebidos em todos os momentos da vida. Sempre companheira e incentivadora. Algumas vezes se sacrificando, mas sempre me apoiando durante esta fase.

Agradeço ao meu filho, Pedro, pela compreensão em todos os momentos em que estive distante e a minha família, por todo incentivo e carinho a mim demonstrados durante este período.

À Prof. Dra. Andréia Cristina Ribeiro (orientadora) pelo acompanhamento e orientação, e ao Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (co-orientador) a quem aprecio muito e que tem sido para mim grande exemplo na área de Análise Combinatória e Teoria de Números.

A todos os meus amigos e companheiros de Mestrado, principalmente à Márcia, à Ester e ao Beto. Obrigado pela companhia, apoio, compreensão, incentivo e amizade de vocês.

Aos meus colegas de trabalho (professores, coordenadores e diretoria), por todas as vezes em que faltei e sempre recebi o apoio de vocês.

Aos meus “amigos-família” por todas as vezes que entenderam a minha ausência. Vocês são especiais e importantes em minha vida.

Resumo

Este trabalho apresenta alguns resultados sobre partições de números inteiros e a importância deles na história da Matemática e da Teoria dos Números. Encontrar demonstrações bijetivas em partições não é nada fácil. Mas, depois de encontradas, tornam-se uma maneira agradável e fácil de entender e provar algumas Identidades de Partições. Este trabalho pretende ser didático e de fácil entendimento para futuras pesquisas de estudantes que se interessem pelo assunto. Ele traz definições básicas e importantes sobre partições, os Gráficos de Ferrers, demonstrações de resultados interessantes como a Bijeção de Bressoud e o Teorema Pentagonal de Euler. Destaca também a importância das funções geradoras e alguns resultados devidos a Sylvester, Dyson, Fine, Schur e Rogers-Ramanujan.

Palavras Chaves: Teoria dos Números, Partição de Inteiros, Gráfico de Ferrers, Teorema de Euler, Funções Geradoras, Demonstrações Bijetivas e Identidades de Rogers-Ramanujan.

Abstract

This work presents some results about partitions of integers numbers and their importance in the history of Mathematics and in the Theory of the Numbers. To find bijective demonstrations in partitions it is not easy. But, after finding them, to understand and to prove some Identities of Partitions becomes agreeable and easy. This work intends to be didatic and of easy understanding for future researches made by students interested in this subject. It contains basic and important definitions about partitions, the Ferrers' Graphics, demonstrations of interesting results as the Bressond's Bijection and the Euler's Pentagonal Theorem. It also details the importance of the generating functions and some results due to Sylvester, Dyson, Fine, Schur and Rogers-Ramanujan.

Key-words: Theory of Numbers, Partition of Integers Numbers, Ferrers' Graphics, Euler's Theorem, Generated Functions, Bijective Demonstrations and Rogers-Ramanujan's Identities.

Sumário

Introdução

O objetivo desse trabalho é estudar algumas demonstrações bijetivas de algumas identidades de partições. Evidentemente nem todas as identidades de partições serão contempladas, devido à grande quantidade de resultados existentes atualmente. Não é fácil encontrarmos uma bijeção ou um processo que prove determinada identidade. Na medida do possível, farei um estudo bem detalhado de alguns resultados que marcaram a história da Teoria das Partições. O presente trabalho está dividido em quatro capítulos, da seguinte forma:

No Capítulo 1 apresentamos uma breve introdução histórica, segundo [5].

No Capítulo 2 são abordadas algumas definições sobre partições, os Gráficos de Ferrers e alguns resultados importantes como a Bijeção de Bressoud e o Teorema do Número Pentagonal de Euler.

No Capítulo 3 apresentamos um pouco sobre funções geradoras, importante ferramenta na maioria das identidades de partição. Embora não muito utilizada nesse trabalho, merece destaque, pois é uma maneira brilhante de se estudar o tema.

Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos alguns resultados mais elaborados devidos a Sylvester, Dyson, Fine, Schur e Rogers-Ramanujan. Nem todos eles serão provados, mas destacados devido a sua importância.

É importante destacar que as demonstrações sempre virão acompanhadas de exemplos no intuito de facilitar a compreensão dos resultados.

Espero que este trabalho possa ser útil para estudantes que se interessem pelo assunto e usado como material auxiliar em disciplinas onde Teoria das Partições faça parte da ementa.

Capítulo 1

Uma breve introdução histórica

A Teoria das Partições é um tema rico, com muitos resultados clássicos e importantes que influenciaram o desenvolvimento da Combinatória no século 20. É também uma coleção de várias terminologias, notações e técnicas, com um número de resultados redescobertos em muitas ocasiões, e algumas bijeções fundamentais que ainda continuam obscuras. Este trabalho é uma tentativa de apresentar o tema de uma forma coerente e clara.

Nosso objetivo é dar provas diretas (bijeções) de identidades de partições, e ocasionalmente algumas aplicações. Para começar, nós traduzimos as identidades em igualdades entre os números de dois tipos de partições. Na maioria dos casos, nós representamos estas partições graficamente, através do gráfico de Ferrers (ou diagrama Young), e então usamos várias ferramentas combinatórias para transformar uma das classes de partições em outra. Embora esta abordagem pareça ser simples, é surpreendente ver que alguns resultados de identidades de partições muito importantes sejam difíceis de serem provados por outros meios. Veremos que descobrir as provas bijetivas representa um grande desafio de engenhosidade, mas uma vez encontradas, em geral, não são difíceis de serem entendidas.

Historicamente, a maioria das identidades de partições foram primeiramente provadas analiticamente, e somente mais tarde, combinatorialmente. O tema deste trabalho é muito entrelaçado com outros temas de identidades de partições, e é difícil dar uma apresentação histórica adequada de um sem o outro. Todavia, nós não podemos nos abster de fazer um breve histórico geral dos 120 anos de esforços na busca de encontrar provas bijetivas de identidades de partições. Enfatizamos a parte combinatória da história e deixamos de lado o significado e história da identidade de partição.

A Teoria das Partições é um tema que começou com o Tratado de Euler, onde foi introduzido partições de inteiros como nós conhecemos. Voltando em 1748, Euler provou uma variedade de identidades de partições, dentre as quais o Teorema Pentagonal e o Teorema de Euler: "*O número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares*". Nos 250 anos seguintes um grande número de identidades de partições foram provadas, incluindo aquelas com os nomes de Gauss, Cauchy, Jacobi, Weirstrass, Sylvester, Heine, Lebesgue, Schur, MacMahon e Ramanujan.

Como área de pesquisa, a Teoria das Partições teve envolvimento com outras áreas, talvez devido à sua natureza multidisciplinar. Ela se originou como uma parte da Análise, mas rapidamente se tornou parte da Teoria dos Números, quando numerosas aplicações emergiram. Livros mais antigos, tradicionalmente tinham pelo menos uma seção dedicada à Teoria das Partições. Mais tarde, a Teoria das Partições foi considerada como parte da Análise Combinatória, um tema que se desenvolveu, nos dias modernos, em Matemática Discreta e Combinatória. Mais recentemente o tema ganhou seu próprio valor.

Sylvester foi o pioneiro no método de provar identidades de partições "construtivamente". Para ser justo, o trabalho é uma longa pesquisa de resultados do próprio Sylvester, alunos e colaboradores. O método foi bem aceito depois que a Involução de Franklin foi publicada. Franklin era aluno de Sylvester na Johns Hopkins University e escreveu algumas seções de um dos livros de Sylvester. Quase que imediatamente um inesperado benefício de ter provas combinatórias foi descoberto por Cauchy. Ele notou que a Involução preservava uma certa propriedade nas partições, e isso provaria a maior parte dos resultados de partições. Com duas notáveis exceções de Schur e MacMahon, poucas pessoas trabalharam neste campo até meados de 1960.

Por volta de 1965 a "era dourada" começou. Em menos de 20 anos, muitas pessoas provaram um grande número de identidades de partições por métodos combinatórios, dando impressão que se deve esperar uma prova construtiva da maioria, se não todas, identidades de partições. Este foi o período que George Andrews entrou em cena e desempenhou um papel importante nestes desenvolvimentos. Em seus dois fundamentais trabalhos, ele construiu, em ambos, uma base de técnicas padrões pelas quais as partições bijetivas são obtidas. Depois dos anos 70, parecia que a Teoria da Unificação estava à vista. Dependendo do ponto de vista, o nascimento do Princípio da Involução ora confirmava ou destruía essas esperanças. A “era dourada” acabou.

Em essência, Garsia e Milne mostraram que se pode “mecanicamente” construir bijeções fora das bijeções e involuções existentes. Estas bijeções tornaram-se indiretas e bastante complicadas. Eles introduziram o Princípio da Involução, dando uma tão esperada prova bijetiva da identidade de Rogers-Ramanujan pela combinação das já conhecidas Involução de Vahlens, Bijeção de Sylvester e Involução de Schur. Esta abordagem foi estendida em subseqüentes publicações para dar provas bijetivas de outras identidades de partições.

Outro caminho que está aguardando a exploração é nossa atual falta de entendimento de onde as bijeções naturais vieram. É concebível que alguns resultados de partições simplesmente não têm prova combinatória direta. No momento, não temos o conhecimento de nenhum resultado negativo nesta direção. Até mesmo encontrar um trabalho formal para tais resultados é um importante desafio.

Para ser mais específico, é bom lembrar que depois de tantos anos de estudo, para a Identidade de Rogers-Ramanujan ainda falta uma prova bijetiva direta, apesar de ter essencialmente um status no mundo da Teoria das Partições.

Concluiremos este breve discurso do passado, presente e futuro da Teoria das Partições Construtivas com uma observação otimista. Nós acreditamos que há um grande desafio de trabalho ainda para ser feito antes de atingirmos um melhor conhecimento da natureza combinatória das identidades de partições.

Capítulo 2

Conceitos e resultados básicos sobre partições

Uma partição de um inteiro positivo n é uma representação de n como soma de inteiros positivos $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ ...,\ \lambda_r$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n,$$

onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r$. *Os termos* λ_i *são chamados de partes da partição. Denotamos por* $p(n)$ *o número de partições de n.*

Por exemplo, $p(4) = 5$, pois existem cinco partições do número quatro. Observe:

$$4$$

$$3 + 1$$

$$2 + 2$$

$$2 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 + 1$$

Neste trabalho estaremos interessados no número de partições que satisfazem uma determinada condição. Usaremos a notação $p(n/[\text{condição}])$ para representar o número de partições de n satisfazendo determinada condição.

2.1 Alguns resultados de Euler

2.1.1 Teorema – *Seja n um número inteiro positivo. O número de partições de n em partes ímpares é igual ao número de partições de n em partes distintas, ou seja,* $p\left(n/\text{partes ímpares}\right) = p\left(n/\text{partes distintas}\right)$.

Vamos apresentar algumas ideias de como provar esta identidade, que é conhecida como Identidade de Euler.

A ideia é encontrar um modo geral de contar as partições, produzindo uma expressão explícita para cada lado da identidade, e verificar que a expressão é a mesma. Porém, isto nem sempre é possível e também não é necessário.

Se quisermos verificar que o número de objetos de um tipo *X* é igual ao número de objetos de um tipo *Y*, então não precisamos efetivamente encontrar os números - é suficiente fazer pares e mostrar que cada objeto do tipo *X* faz par com um objeto do tipo *Y* e vice-versa. Tal correspondência um a um entre dois conjuntos distintos é chamada de bijeção.

Dessa forma, para provar a identidade acima, precisamos achar uma bijeção entre as partições. Mas isto nem sempre é fácil e também não é evidente que exista uma bijeção entre os dois conjuntos de partições.

Como uma partição inteira de n é só uma coleção de partes cuja soma é n, então uma bijeção entre partições deve ser descrita em termos de operações nas partes. Uma simples operação é dividir uma parte par ao meio. O inverso dessa operação é adicionar duas partes iguais em uma parte duas vezes maior, que será par.

Demonstração:

A bijeção que estamos procurando deve ter a propriedade de que quando temos uma coleção de partes ímpares, a bijeção retorna uma coleção de partes distintas com a mesma soma. E o inverso também deve acontecer.

Começando com uma partição em partes ímpares e procurando a bijeção com partições em partes distintas, temos que se as partes são distintas, não pode existir duas cópias da mesma parte. Portanto, se a saída da bijeção contém duas cópias de uma parte, devemos adicionar as duas partes em uma parte com o dobro do tamanho. Podemos repetir esse procedimento até que todas as partes sejam diferentes, uma vez que o número de partes decresce a cada operação.

Agora, começando com uma partição em partes distintas e procurando uma bijeção com partições em partes ímpares, podemos fazer o processo inverso. O inverso de adicionar duas partes iguais é a divisão de uma parte par ao meio. Repetindo este processo obtemos uma coleção de partes ímpares, uma vez que o tamanho de algumas partes decresce a cada operação. □

Exemplo: Seja $n = 13$.

Começando com uma partição de $n = 13$ em partes ímpares, e usando o processo de adicionar partes iguais, chegamos a uma partição de n em partes distintas.

$$3+3+3+1+1+1+1 \to (3+3)+3+(1+1)+(1+1)$$

$$\to 6+3+2+2$$

$$\to 6+3+(2+2)$$

$$\to 6+3+4$$

Agora começando com uma partição de $n = 13$ em partes distintas e usando o processo de dividir, o resultado será uma partição de n em partes ímpares.

$$6+3+4 \to (3+3)+3+(2+2)$$

$$\to 3+3+3+2+2$$

$$\to 3+3+3+(1+1)+(1+1)$$

$$\to 3+3+3+1+1+1+1$$

Pode parecer que existe uma arbitrariedade na ordem que escolhemos para fazer as divisões das partes. Contudo, é claro que dividir uma parte não interfere na divisão de outras partes, de modo que a ordem em que as partes são divididas não afeta o resultado. O mesmo vale para o processo inverso, de adicionar as partes.

Outras identidades podem ser provadas usando este processo de dividir/adicionar.

2.1.2 Teorema – *Seja n um número inteiro positivo. O número de partições de n em partes pares é igual ao número de partições de n onde cada parte aparece um número par de vezes, ou seja,* $p\left(n / \text{partes pares}\right) = p\left(n / \text{cada parte aparece um número par de vezes}\right)$.

Demonstração:

Partindo de uma partição de n em partes pares, dividimos cada parte por 2 e obtemos assim uma partição de n em que cada parte aparece um número par de vezes. Reciprocamente, partindo de uma partição de n em que cada parte aparece um número par de vezes, adicionando duas a duas, obtemos uma partição de n em partes pares. □

Exemplo: Seja $n = 6$.

Vejamos todas as partições do número $n = 6$.

$$6$$

$$5+1$$

$$4+2$$

$$4+1+1$$

$$3+3$$

$$3+2+1$$

$$3+1+1+1$$

$$2+2+2$$

$$2+2+1+1$$

$$2+1+1+1+1$$

$$1+1+1+1+1+1$$

As partições de $n=6$ em partes pares são: 6, $4+2$ e $2+2+2$.

As partições de $n=6$ em que cada parte aparece um número par de vezes são: $3+3$, $2+2+1+1$ e $1+1+1+1+1+1$.

Temos:

$$6 \to 3+3$$

$$4+2 \to 2+2+1+1$$

$$2+2+2 \to 1+1+1+1+1+1$$

A técnica de dividir/adicionar para provar a identidade de Euler é muito útil. Vamos usá-la para operar em outros conjuntos de partições, digamos *A* e *B*, contanto que o processo de divisão leve todas as partições de *A* em partições de *B* e o processo de adição leve todas as partições de *B* em *A*.

2.1.3 Teorema – *Seja n um número inteiro positivo. O número de partições de n em partes iguais a 1 (um) é igual ao número de partições de n cujas partes são potências distintas de 2, ou seja,* $p\left(n/\text{partes iguais a }1\right)=p\left(n/\text{partes são potências distintas de }2\right)$.

Demonstração:

Seja *A* o conjunto de partições de n em partes iguais a 1 (um). O número de partições de *A* é $p\left(n/\text{partes } \in \{1\}\right)=1$ já que a única partição de n satisfazendo a condição é $\underbrace{1+1+...+1}_{n\text{ vezes}}$. O processo de adição irá adicionar pares de um em dois, depois pares de dois em quatro, depois pares de quatro em oito, e assim por diante até todos os pares serem distintos.

Consequentemente, o conjunto correspondente *B* deve ser o conjunto de partições de n em partes distintas 1, 2, 4, 8, ... (potências de dois). Agora devemos verificar que o processo de divisão levará toda partição de B em partições de A. Qualquer potência de dois (digamos 2^k) é dividida em um par de potências de dois ($2^k = 2.2^{k-1} = 2^{k-1} + 2^{k-1}$). Já que a única potência de dois que é ímpar é $2^0 = 1$, o processo continuará até que todas as partes restantes sejam 1's (uns).

E como o lado esquerdo da expressão tem o valor um, provamos que todo inteiro positivo tem uma única partição em potências distintas de dois. Isto é chamado de representação binária de inteiros. □

Exemplo:

$$1 = 1.2^0 = (1)_2$$

$$2 = 1.2^1 + 0.2^0 = (10)_2$$

$$3 = 1.2^1 + 1.2^0 = (11)_2$$

$$4 = 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 = (100)_2$$

$$5 = 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = (101)_2$$

$$6 = 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 = (110)_2$$

em que $(b_k b_{k-1} ... b_0)_2$ é o número escrito com dígitos binários.

Usamos o processo dividir/adicionar em diferentes casos. Primeiro para demonstrar a Identidade de Euler e, em seguida, para provar a unicidade da representação binária.

Podemos generalizar o resultado:

$$p(n / \text{partes} \in \{1\}) = p(n / \text{partes distintas} \in \{1, 2, 4, 8, ...\})$$

Para isso, basta multiplicarmos por uma constante c.

Por exemplo: $c = 3$

$$p(n / \text{partes} \in \{3\}) = p(n / \text{partes distintas} \in \{3, 6, 12, 24, ...\})$$

Chamaremos tais pares de **conjuntos de Pares de Euler**, por exemplo:

$$N=\{1\} \text{ e } M=\{1,2,4,8,...\} \text{ é um par de Euler;}$$

$$N=\{3\} \text{ e } M=\{3,6,12,24,...\} \text{ é um par de Euler.}$$

Observação: E se o conjunto N não for unitário? Por exemplo, se $n=12$ e $N=\{3,6\}$. Começando com uma coleção de partes de tamanhos que pertencem ao conjunto N, temos que pares de partes iguais são adicionados e readicionados até todas as partes serem distintas. Mas veja o que ocorre nestes casos:

$$3+3+3+3=6+6=12$$

$$6+6=12.$$

E isto não é uma bijeção, pois existem duas partições do número 12 em que as partes pertencem ao conjunto $N=\{3,6\}$ que levam em uma mesma partição do conjunto $M=\{3,6,12\}$. Este problema ocorre se, e somente se, existem dois elementos em N tais que um deles é uma potência de dois vezes o outro.

O Teorema seguinte é uma generalização do Teorema 2.1.3.

2.1.4 Teorema – $p(n/\text{partes} \in N)=p(n/\text{partes distintas} \in M)$ *para* $n\geq 1$, *em que* N *é qualquer conjunto de inteiros tal que nenhum dos elementos é uma potência de dois vezes outro elemento de* N, *e* M *é o conjunto contendo todos os elementos de* N *e seus múltiplos de potências de dois.*

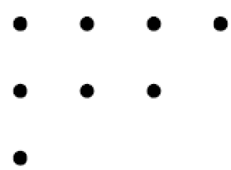
2.2 Gráficos de Ferrers

2.2.1 Definição – *Os gráficos de Ferrers ou quadros de Ferrers (este último também conhecido como diagrama de Young) são dois modos similares de representar uma partição graficamente. As partes da partição são mostradas como linhas de pontos ou quadrados, respectivamente, sempre alinhados à esquerda.*

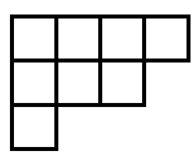
Exemplo: Uma partição de $n = 8$ é dada a seguir:

$$4 + 3 + 1$$

Usando o gráfico de Ferrers, temos:



Usando o quadro de Ferrers, temos:



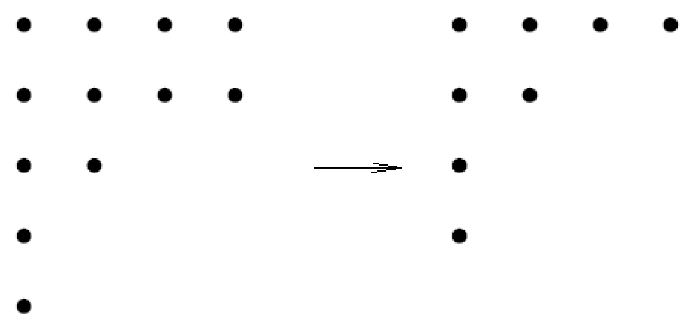
Nesta seção, iremos trabalhar com várias transformações nos gráficos de Ferrers. Se tais transformações são inversíveis, então ela é uma bijeção e pode ser usada para provar algumas identidades.

2.2.2 Teorema – *Sejam n e r dois números inteiros e positivos. O número de partições de n onde a maior parte é r é igual ao número de partições de n – r onde todas as partes são menores do que ou iguais a r, ou seja,* $p(n / \text{a maior parte é } r) = \; = p(n - r / \text{todas as partes } \leq r)$.

Demonstração:

Se removermos a primeira linha do gráfico de Ferrers, obteremos um novo gráfico de Ferrers. Suponha que r é o tamanho da linha removida. Então todas as linhas do novo gráfico de Ferrers terão comprimento menor ou igual a r. Inversamente, para qualquer gráfico de Ferrers, podemos acrescentar uma linha de comprimento r no topo e obter um novo gráfico de Ferrers. Portanto a correspondência está provada. □

Veja a figura abaixo:

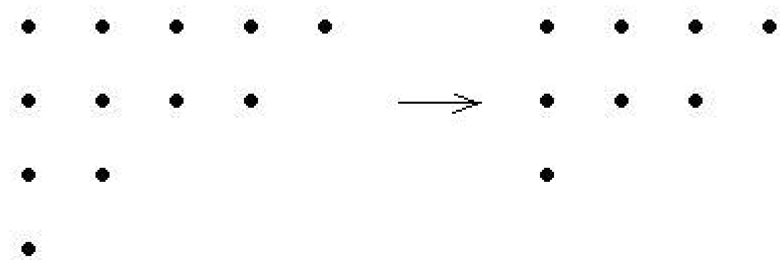


2.2.3 Teorema – *Sejam n e m dois números inteiros positivos. O número de partições de n em m partes é igual ao número de partições de n – m em, no máximo, m partes, ou seja,* $p\left(n / m \text{ partes}\right) = p\left(n - m / \text{no máximo em } m \text{ partes}\right)$.

Demonstração:

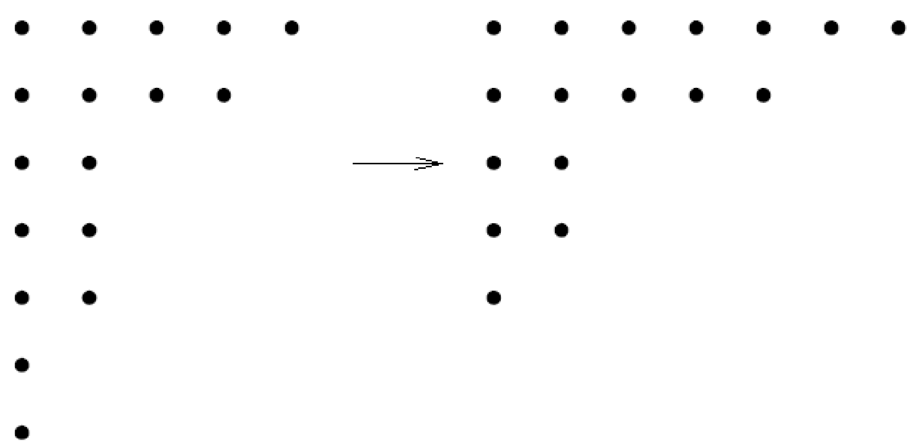
Se removermos a primeira coluna ao invés da primeira linha, obteremos um novo gráfico de Ferrers no qual nenhuma coluna é maior que a coluna removida. Mas o comprimento da coluna removida é igual ao número de linhas, isto é, o número de partes da partição. □

Veja a figura abaixo:



2.2.4 Definição – *Dada uma partição qualquer, podemos obter uma nova partição trocando as linhas com as colunas, ou seja, o que é linha se transforma em coluna e o que é coluna se transforma em linha. Esta operação é chamada conjugação e a partição resultante dessa operação é chamada de partição conjugada.*

Exemplo: Seja $n = 17$.



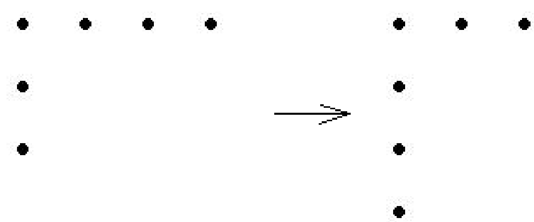
2.2.5 Teorema – *Sejam n e m dois números inteiros e positivos. O número de partições de n em m partes é igual ao número de partições de n onde a maior parte é igual a m, ou seja,* $p(n / m \text{ partes}) = p(n / \text{a maior parte é } m)$.

Demonstração:

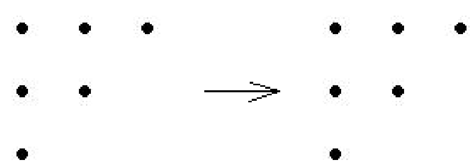
As linhas do primeiro gráfico se tornam as colunas do segundo gráfico através da conjugação e vice-versa. Assim, dada uma partição de n em m partes, ao fazer a conjugação, a partição resultante será uma partição de n em que a maior parte é m. Inversamente, dada uma partição de n cuja maior parte é m, ao fazer a conjugação, teremos uma partição de n em m partes. Portanto, a identidade é verdadeira. □

Exemplo:

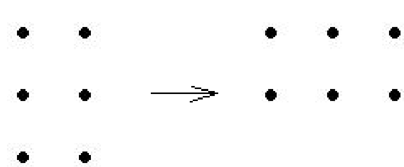
As partições de 6 em exatamente 3 partes são: $4+1+1$, $3+2+1$ e $2+2+2$. As partições de 6 em que a maior parte é 3 são: $3+1+1+1$, $3+2+1$ e $3+3$. Podemos fazer as seguintes correspondências:



$4+1+1$ $\qquad$ $3+1+1+1$



$3+2+1$ $\qquad$ $3+2+1$



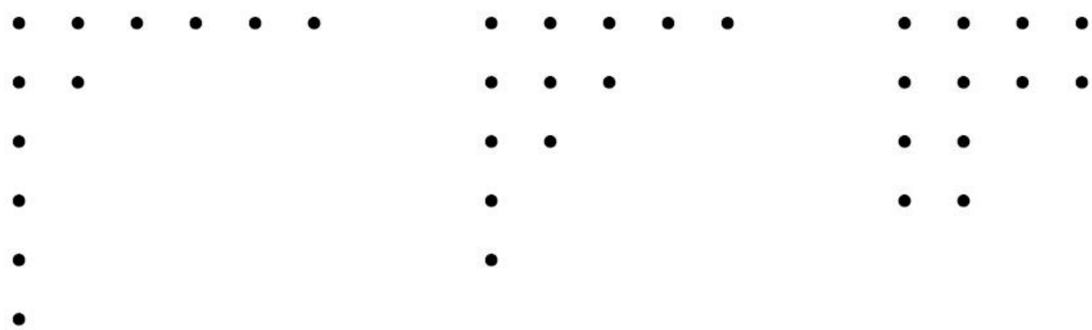
$2+2+2$ $\qquad$ $3+3$

De maneira análoga pode-se demonstrar a seguinte proposição:

2.2.6 Proposição – *Sejam n e m dois números inteiros e positivos. O número de partições de n em, no máximo, m partes é igual ao número de partições de n onde cada parte é menor do que ou igual a m, ou seja,* $p\left(n/\text{no máximo em } m \text{ partes}\right)=p\left(n/\text{cada parte é } \leq m\right)$.

2.2.7 Definição - *Uma partição é chamada de autoconjugada se a sua representação gráfica é igual à representação gráfica da partição conjugada.*

Exemplo: As partições autoconjugadas de 12 são:

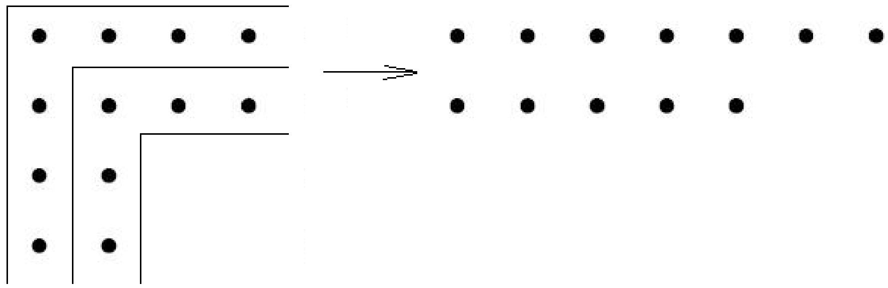


$6+2+1+1+1+1$ $\qquad$ $5+3+2+1+1$ $\qquad$ $4+4+2+2$

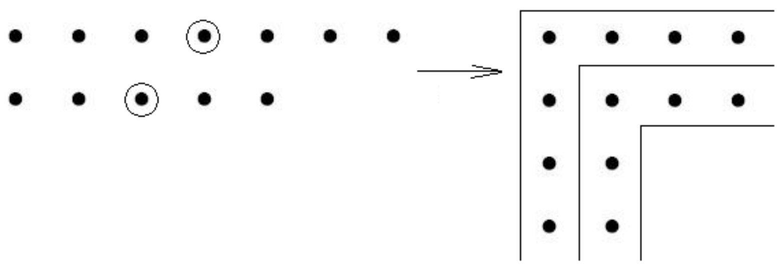
2.2.8 Teorema – *Seja n um número inteiro positivo. O número de partições de n autoconjugadas é igual ao número de partições de n em partes ímpares e distintas, ou seja,* $p\left(n/\text{autoconjugadas}\right)=p\left(n/\text{partes ímpares distintas}\right)$.

Demonstração:

Partindo de uma partição de n autoconjugada, tomamos a primeira linha junto com a primeira coluna e fazemos uma nova linha com todos esses pontos. Já que partições autoconjugadas são simétricas em relação à diagonal principal, sempre adicionaremos uma linha com uma coluna de mesmo tamanho: uma vez que elas têm um ponto em comum, o resultado é uma linha duas vezes o tamanho da linha original menos um e, portanto ímpar. Então tomamos o que sobrou da segunda linha e coluna e fazemos uma nova linha.



Inversamente, começando de uma partição de n em partes ímpares distintas, pegamos o ponto do meio e dobramos a linha em forma de "L" nesse ponto. Colocamos esse "L" da forma como mostra a figura abaixo. Dessa forma, esses "L"s se encaixam um dentro do outro, formando um gráfico de Ferrers autoconjugado. Logo, esta bijeção prova a identidade.



□

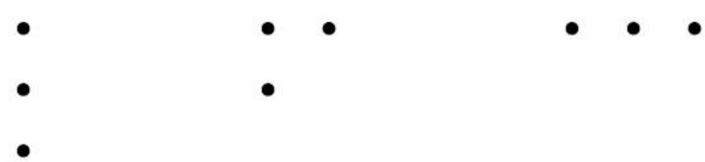
2.3 Limite Superior para $p(n)$

Depois de calcular a função $p(n)$ para diversos valores de n foi observado que esta função é monótona e crescente. Nesta seção, veremos que esta conjectura é verdadeira e, além disso, que a função $p(n)$ pode ser majorada usando os números de Fibonacci.

Primeiro provaremos que $p(n) > p(n-1)$ para todo $n > 2$.

Como um exemplo, compare as partições de três com as partições de quatro:

$n = 3$



$n = 4$

Para cada partição de $n-1$, obtemos uma partição de n adicionando um único ponto em uma nova linha no final do gráfico de Ferrers. Inversamente, cada partição de n com um único ponto na última linha origina uma partição de $n-1$ depois que removemos tal ponto.

Portanto, $p(n-1) = p(n \,/\, \text{o número "1" é parte})$ e consequentemente, $p(n) = p(n-1) + p(n \,/\, \text{o número "1" não é parte})$ para todo $n > 2$.

Logo, $p(n) > p(n-1)$ para todo $n > 2$ e concluímos que $p(n)$ é uma função estritamente crescente.

Agora, para mostrarmos que esta função possui um limite superior, precisaremos dos números de Fibonacci. Eles foram estudados pelo matemático italiano Leonardo de Pisa, apelidado “Fibonacci" – filho de Bonaccio.

2.3.1 Definição – *Os números de Fibonacci* F_0, F_1, F_2, *..., são definidos recursivamente por*

$$\begin{cases} F_1 = 1 \text{ e } F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n > 2. \end{cases}$$

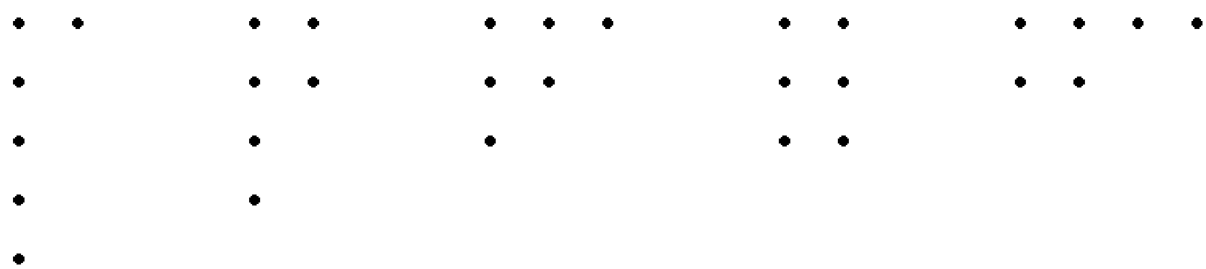
Partindo da equação $p(n) = p(n-1) + p(n / \text{o número "1" não é parte})$ para todo $n > 2$, vamos fazer uma comparação com a recorrência para os números de Fibonacci e verificar como $p(n / \text{o número "1" não é parte})$ se compara com $p(n-2)$.

Primeiro observamos que $p(n-2) = p(n / \text{o "2" é parte pelo menos uma vez})$, já que o processo inserir/remover uma parte “2” é uma bijeção entre as partições em questão, pelo mesmo raciocínio usado para verificar a identidade anterior.

Depois notamos que podemos transformar qualquer partição com nenhuma parte de tamanho “1” em uma única partição da qual o “2” é parte pelo menos uma vez, cortando a menor parte (que é pelo menos 2) em uma parte de tamanho “2” e “0” (zero) ou mais partes de tamanho “1”.

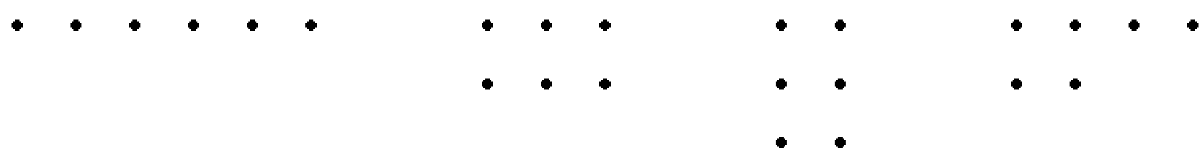
Por exemplo, para $n = 6$, a primeira bijeção, que é a inserção de uma parte de tamanho “2” em uma partição de $(n-2)$ passa de:

para, respectivamente:



Unir todas partes de tamanho “1” e uma de tamanho “2” em uma nova parte menor é possível para todas as partições, exceto para o segundo gráfico, pois ao unir todas as partes de tamanho “1” com uma de tamanho “2” no segundo gráfico, teremos a última linha maior que a primeira, o que não resulta uma partição.

Isto nos dará as quatro partições de 6 com nenhuma parte de tamanho “1”:



O argumento anterior mostra que:

$p(n-2) = p(n\,/\,\text{o número "1" não é parte}) + p(n-2\,/\,\text{a menor parte de tamanho diferente de}$

$\text{1 é menor que } (2+\text{o número de partes de tamanho 1}))$.

Note que o último termo é sempre não-negativo. Portanto, combinado com a equação $p(n) = p(n-1) + p(n\,/\,\text{o número "1" não é parte})$ para todo $n > 2$, implica em uma desigualdade parecida com a de Fibonacci:

$$p(n) \leq p(n-1) + p(n-2) \text{ para } n > 2.$$

2.3.2 Teorema – *Para todo* $n \geq 0$, *a função partição* $p(n)$ *é menor do que ou igual ao* $(n+1)-\textit{ésimo}$ *número de Fibonacci, dado por* F_{n+1}.

Demonstração:

Temos que $p(0) = F_1 = p(1) = F_2 = 1$. Portanto, a proposição vale para $n = 0$ e $n = 1$.

Suponha que a proposição seja verdadeira para todo $n < k$, para algum $k \geq 2$ e mostremos que ela vale para $n = k$. Assim:

$p(k) \leq p(k-1) + p(k-2)$, pela desigualdade anterior

$\leq F_k + F_{k-1}$, pela hipótese de indução

$= F_{k+1}$, pela definição de F_k.

Portanto, $p(n) \leq F_{n+1}$ para todo $n \geq 0$. □

2.4 A bijeção de Bressoud

Uma forma de descrever que os números em um conjunto são distintos é dizer que a diferença entre cada dois números é pelo menos um. Dizemos que as partes são super-distintas se a diferença entre cada duas partes é pelo menos dois. Já que cada partição em partes super-distintas é também uma partição em partes distintas, existe uma quantidade maior de exemplos do primeiro tipo.

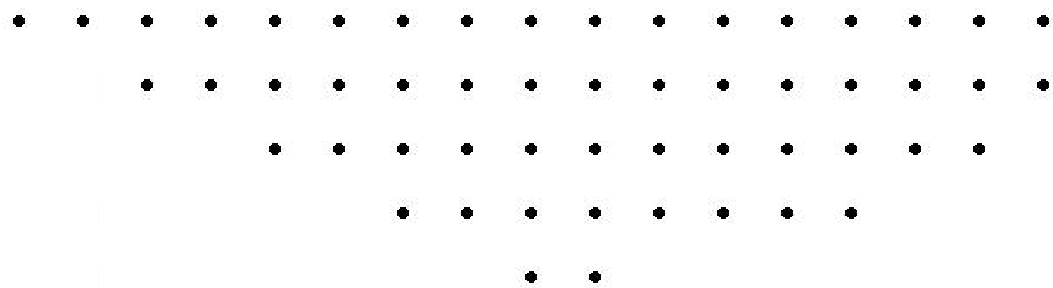
Vamos mostrar agora uma prova bijetiva de uma identidade sobre partes distintas e super-distintas.

2.4.1 Teorema – *Seja n um número inteiro positivo. O número de partições de n em partes super-distintas é igual ao número de partições de n em partes distintas onde cada parte par é maior que duas vezes o número de partes ímpares, ou seja,* $p\left(n / \text{partes super-distintas}\right) = p\left(n / \text{partes distintas onde cada parte par é maior que } 2.\left(\text{o número de partes ímpares}\right)\right.$.

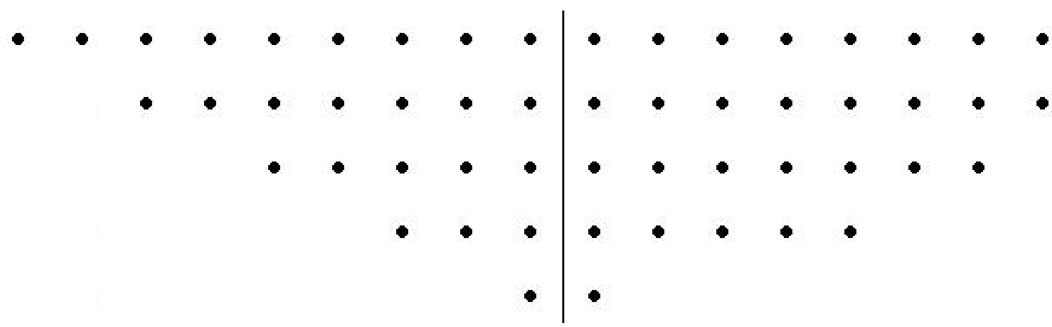
Demonstração:

A prova bijetiva de Bressoud é a seguinte: tome o gráfico de Ferrers de uma partição em partes super-distintas e ajuste a margem esquerda em uma escada de dois pontos extra por linha. Isto é possível, pois as partes são super-distintas. Desenhe uma barra vertical de tal modo que a última linha tenha um ponto à esquerda desta linha, a próxima linha acima tenha três pontos, e assim por diante.

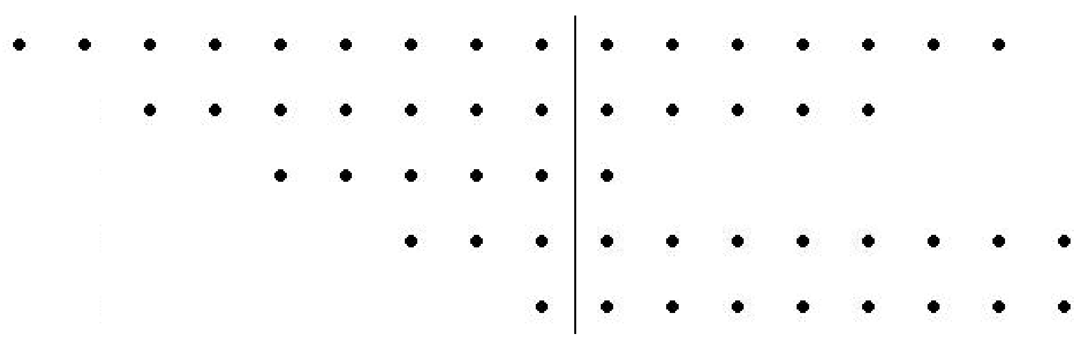
Exemplo: Tomando a partição $17+15+12+8+2$, fazendo o seu gráfico de Ferrers e deslocando dois pontos em cada linha, temos:



Agora colocamos a barra vertical no gráfico, de modo que à esquerda da barra, as linhas do gráfico sejam de tamanho 1, 3, 5, ..., o que pode ser feito devido à maneira como o gráfico foi deslocado.



À direita da linha, obtemos um novo gráfico de Ferrers. Então, reordenamos as linhas à direita da barra vertical, começando com as linhas ímpares, em ordem decrescente seguidas das linhas pares, também em ordem decrescente.



Agora, lendo as novas linhas como as partes de uma partição transformada, nós temos neste exemplo $16+12+6+11+9$ e reordenando do modo usual, $16+12+11+9+6$. Segue da construção que todas as partes são distintas e que a menor parte par é maior que duas vezes o número de partes ímpares. De fato, as partes ímpares aparecerão como linhas no final do gráfico.

Suponha que sejam k partes ímpares. Então a menor parte par terá, pela construção do gráfico, $2k+1$ pontos à esquerda da barra e pelo menos 1 à direita da barra. Portanto cada parte par é maior que duas vezes o número de partes ímpares.

Este processo é inversível e, portanto nos dá uma bijeção entre as duas classes de partições propostas. $\square$

2.5 O Teorema do Número Pentagonal de Euler

Euler foi um dos mais produtivos matemáticos da história. Portanto, não é de se surpreender que existe mais de uma identidade com o seu nome.

2.5.1 Definição – *Denotaremos por* $p^e(n)$ *o número de partições de* n *em um número par de partes distintas e por* $p^o(n)$ *o número de partições de* n *em um número ímpar de partes distintas.*

Exemplo:

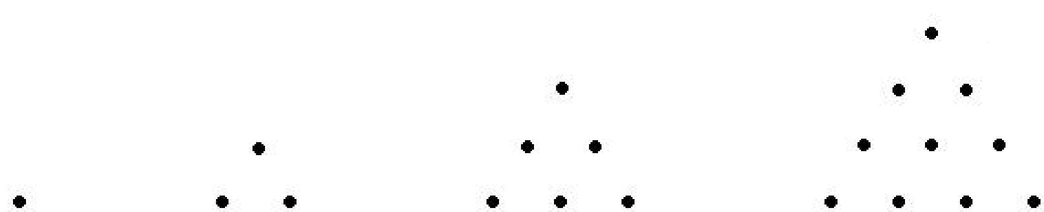
$p^e(7)=3$, pois as partições de 7 em um número par de partes distintas são: $6+1$, $5+2$ e $4+3$.

$p^o(7)=2$, pois as partições de 7 em um número ímpar de partes distintas são: 7 e $4+2+1$.

2.5.2 Teorema (Teorema do Número Pentagonal de Euler)

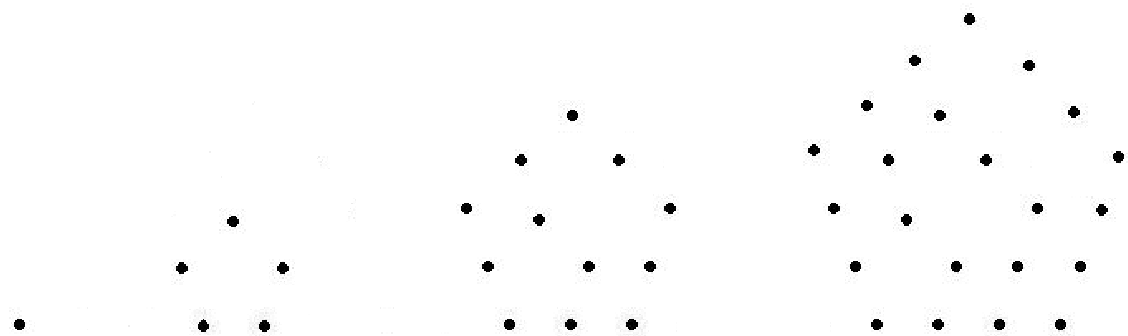
$$p^e(n)-p^o(n)=\begin{cases}(-1)^j, \text{ se } n=\dfrac{j(3j\pm 1)}{2} \text{ para algum inteiro } j\geq 0\\ 0, \text{ caso contrário}\end{cases}.$$

O nome do teorema é um bom ponto de partida para começar nossa discussão. Os números triangulares são 1, 3, 6, 10, ..., referente ao número de pontos no interior do triângulo.

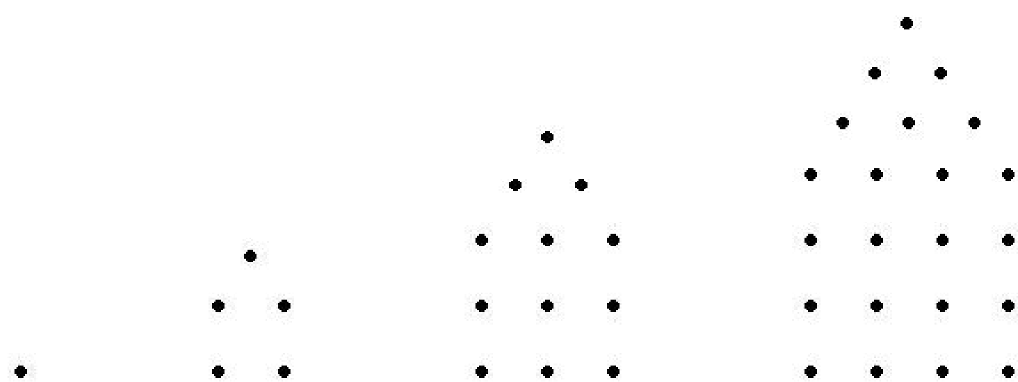


Sabemos que o $j-ésimo$ número triangular é dado por $\dfrac{j(j+1)}{2}$.

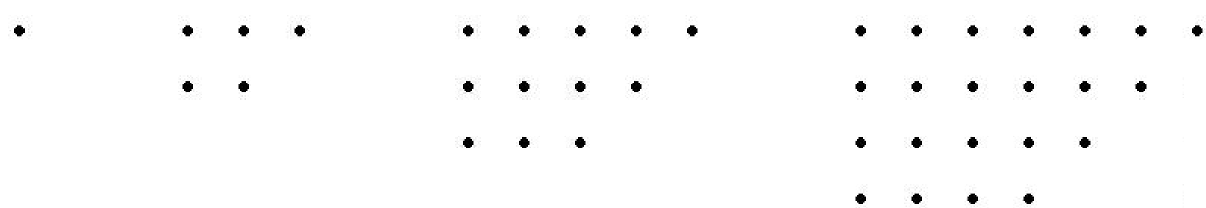
Da mesma forma, os números pentagonais são 1, 5, 12, 22, ..., referente ao número de pontos no interior do pentágono.



Vamos representá-los da seguinte forma:



Dessa forma, o $j-ésimo$ pentágono consiste do $j-ésimo$ triângulo no topo de um retângulo de base j e altura $j-1$. Portanto, o $j-ésimo$ número pentagonal é $\frac{j(j+1)}{2}+j(j-1)=\frac{j(3j-1)}{2}$. Agora vamos girar os pentágonos no sentido horário e ajustar os pontos do triângulo nas linhas, de forma a obter gráficos de Ferrers. Temos:

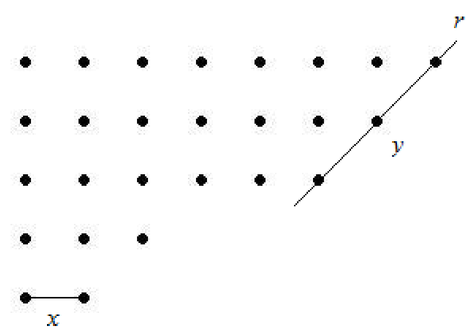


Observamos que estes são gráficos de Ferrers de determinadas partições em partes distintas: 1, $3+2$, $5+4+3$, $7+6+5+4$, etc. Estas partições particulares vão aparecer como casos especiais na seguinte prova do teorema do número pentagonal de Euler, dada por Franklin em 1881.

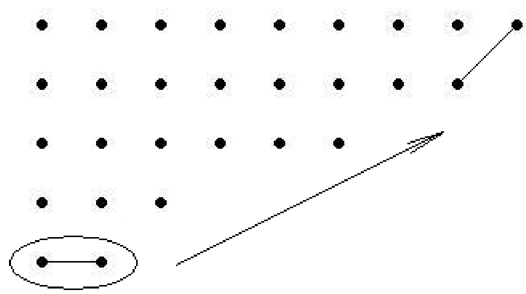
Demonstração:

A ideia é a de construir uma correspondência 1 – 1 entre as partições de n em um número par de partes distintas e as partições de n em um número ímpar de partes distintas.

Utilizamos a representação gráfica para estas partições em que todas as partes são distintas. Nesta representação as partes estão em ordem decrescente. Vamos chamar de x a menor parte desta partição e de y, o número de pontos sobre a linha r mostrada na figura a seguir.

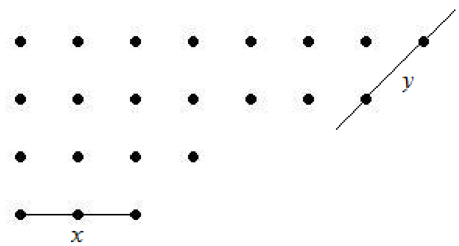


Caso $x \leq y$, como na figura acima, podemos remover os "x" pontos da menor parte e colocá-los ao lado dos primeiros "x" pontos da linha r, como mostra a figura abaixo.

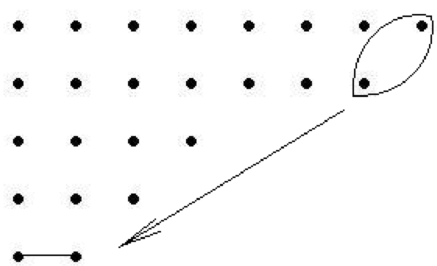


Com esta mudança temos agora uma nova partição de n (observe que temos ainda diferentes partes e elas estão dispostas em ordem decrescente) com diferente paridade, isto é, se o total de partes era par, agora é ímpar, e se era ímpar, agora é par. Chamamos a atenção do leitor para o fato de que se o número x fosse igual a y a mudança acima ainda teria sido possível.

Examinemos, agora, um caso em que $x > y$. Vejamos um exemplo gráfico como o mostrado na próxima figura.

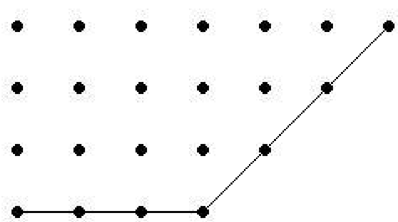


Num caso como este podemos tomar os y pontos da linha r e colocá-los abaixo dos x pontos obtendo uma nova partição com diferente paridade. Nesta nova partição continuamos com partes distintas e colocadas em ordem decrescente como podemos ver na figura a seguir.

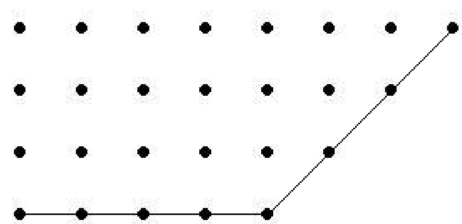


É claro que quando uma das duas transformações descritas acima puder ser executada teremos uma correspondência $1-1$ entre elementos enumerados por $p^e(n)$ e $p^o(n)$.

Na realidade estas duas transformações não podem ser sempre executadas. Existem exatamente dois casos, ilustrados nas figuras abaixo, em que a linha r passa através do último ponto da menor parte. Isto ocorre quando $x = y$ ou $x = y+1$.



$x = y$

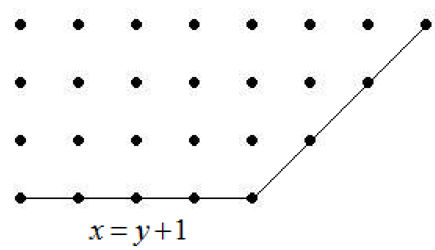


$x = y+1$

É fácil ver que nas figuras acima não podemos executar nenhuma das duas transformações descritas. Lembre-se que executada uma destas transformações devemos ter "diferentes partes" e dispostas em "ordem decrescente". Nas figuras acima, temos:

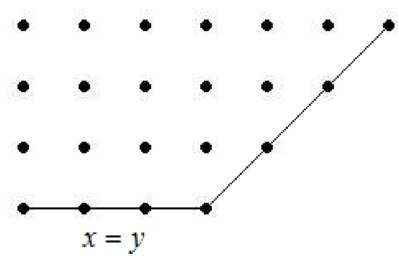
$$n = x + (x+1) + (x+2) + \ldots + (x + (y-1)) = \frac{y.(2x+y-1)}{2}$$

Logo, caso tenhamos uma situação semelhante à da figura abaixo, isto é, caso $x = y+1$, teremos $n = \dfrac{y(3y+1)}{2}$.



Neste caso, se y, o número de partes, for par, teremos $p^e(n) - p^o(n) = 1$, e se y for ímpar, teremos $p^e(n) - p^o(n) = -1$. Isto é, teremos exatamente uma partição com um número par (ímpar) de partes excedendo aquelas com um número ímpar (par) de partes.

No caso da figura abaixo, sendo $x = y$, teremos $n = \dfrac{y(3y-1)}{2}$.



A mesma análise feita acima será válida, ou seja, $p^e(n) - p^o(n) = (-1)^y$, o que conclui a demonstração. □

Capítulo 3

Funções geradoras

Neste capítulo apresentamos uma das principais ferramentas para a solução de problemas de contagem, especialmente problemas que envolvem a seleção de objetos nos quais a repetição é permitida.

Consideremos o seguinte problema: Encontrar o número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, onde as variáveis x_1 e x_2 pertencem ao conjunto $\{2,3,4\}$, e a variável x_3 pertence ao conjunto $\{5,6,7\}$. Definimos três polinômios, um para cada variável x_i, da seguinte forma:

$$p_1 = x^2 + x^3 + x^4,\ p_2 = x^2 + x^3 + x^4 \text{ e } p_3 = x^5 + x^6 + x^7.$$

Observe que os expoentes de x em p_i são os elementos do conjunto ao qual x_i pertence. Como estamos procurando números cuja soma seja 12 e que estejam, cada um, num conjunto cujos elementos são os expoentes dos polinômios acima, vamos considerar o produto $p(x)$ destes três polinômios:

$$p(x) = p_1.p_2.p_3 = \left(x^2 + x^3 + x^4\right).\left(x^2 + x^3 + x^4\right).\left(x^5 + x^6 + x^7\right).$$

Mostramos, a seguir, que a resposta ao nosso problema será o coeficiente de x^{12} na expansão do referido produto. Como este produto é igual a:

$$\left(x^2 + x^3 + x^4\right)^2.\left(x^5 + x^6 + x^7\right) = x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + 6x^{13} + 3x^{14} + x^{15}$$

a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ possui 7 soluções inteiras com as restrições dadas. Um termo como $x^3x^2x^7$ nos fornece a solução $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 7$. O terno $x^4x^3x^5$ nos fornece a solução

$x_1 = 4$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 5$. O que verificamos aqui é que cada solução deste problema corresponde a exatamente uma maneira de se obter x^{12} na expansão dos produtos dos polinômios em questão. Observamos que o polinômio $x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + 6x^{13} + 3x^{14} + x^{15}$ nos fornece também a resposta para outros problemas. Como o coeficiente de x^{14} é igual a 3, existem, com as restrições dadas, somente 3 soluções para a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 14$. Na realidade, pelas razões apresentadas acima, o polinômio $x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + 6x^{13} + 3x^{14} + x^{15}$ gera o número de soluções para todas as equações $x_1 + x_2 + x_3 = m$, para $m \in \{9,10,11,12,13,14,15\}$, com as restrições impostas às variáveis x_i's.

3.1 Definição

A função geradora ordinária para a sequência a_k*,* $k = 0,1,2,3,...$ *é definida como sendo a função* $G(x)$ *que possui* a_k *como coeficiente de* x^k *quando expressa em termos de potências de* x*, isto é,*

$$G(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.x^k.$$

Exemplo:

A função $G(x) = (1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n$ é a função geradora da sequência $a_k = \binom{n}{k}$, $k = 0,1,2,3,...$.

A função $G(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$ é a função geradora da sequência $a_k = 1$, $k = 0,1,2,3,...$.

3.2 Algumas funções geradoras

3.2.1 Exemplo – Função geradora para as partições de n em partes ímpares distintas.

Se tomarmos o produto

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\dots(1+x^{2k+1})\dots=1+x+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+2x^8+2x^9+2x^{10}+2x^{11}+\dots$$

é fácil ver que o coeficiente de x^6 é igual a 1, que é o total de maneiras de se escrever 6 como soma de ímpares distintos. A potência x^6 aparece como o produto de $x.x^5$. Observamos também que o coeficiente de x^{11} é igual a 2, pois o número 11 só pode ser escrito como soma de ímpares distintos nas formas 11 e $7+3+1$.

Vemos que

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2k+1})=\sum_{n=0}^{\infty}d_i(n).x^n$$

onde $d_i(n)$ é o número de partições de n em partes ímpares distintas, isto é, que

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2k+1})$$

é a função geradora para $d_i(n)$.

3.2.2 Exemplo – Função geradora para as partições de n em partes distintas.

Se tomarmos o produto

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^n)\dots=1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+\dots$$

teremos a função geradora para as partições de n em partes distintas. Observe, por exemplo, que o coeficiente de x^7 é igual a 5, pois existem 5 partições de 7 em partes distintas: 7, $6+1$, $5+2$, $4+3$ e $4+2+1$.

Dessa forma

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+x^k\right)$$

é a função geradora para as partições de n em partes distintas.

3.2.3 Teorema – *A função geradora para o número de partições de* n, *denotado por* $p(n)$, *é dada por*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n).x^n = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}.$$

Demonstração:

Temos

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+x^6+\ldots$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{1-x^m} = 1+x^m+x^{2m}+x^{3m}+\ldots$$

Portanto,

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k} = \left(1+x+x^2+x^3+\ldots\right).\left(1+x^2+x^4+x^6+\ldots\right)\ldots,$$

donde concluímos que as contribuições para os coeficientes de x^n vêm de um termo x^{a_1} da primeira série, de x^{2a_2} da segunda série, de x^{3a_3} da terceira série, ..., e de x^{ma_m} da $m-$ésima série, onde $a_i \geq 0$, para todo i. Sendo o produto destes termos igual a x^n, temos que $a_1+2a_2+3a_3+\ldots+ma_m = n$.

Cada a_i deve ser visto como o número de i's que aparecem na partição de n, isto é, podemos expressar n como

$$n = (1+1+...+1)+(2+2+...+2)+...+(m+m+...+m)$$

onde temos a_1 1's no primeiro parênteses, a_2 2's no segundo, a_3 3's no terceiro e a_m m's no $m-$ésimo. Visto desta forma, cada partição de n irá contribuir com uma unidade para o coeficiente de x^n nesta expansão. □

Exemplo: Suponha que, em cada uma das quatro primeiras séries, tenhamos tomado, respectivamente, as seguintes potências de x: x^4, x^6, x^6 e x^{12}. Interpretando essas potências como:

$$x^4 = x^{1+1+1+1}$$

$$x^6 = x^{2+2+2}$$

$$x^6 = x^{3+3}$$

$$x^{12} = x^{4+4+4}$$

e, visto que $x^4.x^6.x^6.x^{12} = x^{28}$, temos a seguinte partição de 28:

$$4+4+4+3+3+2+2+2+1+1+1+1.$$

Observe que o x^6 na segunda série representa três 2's e o x^6 na terceira série representa dois 3's.

Encerramos a seção com uma tabela das principais funções geradoras.

FUNÇÃO GERADORA	PARA A PARTIÇÃO DAS PARTIÇÕES DE n EM PARTES QUE SÃO
$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+x^{2k+1}\right)$	Ímpares distintas
$\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k+1}}$	Ímpares
$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+x^{k}\right)$	Distintas
$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+x^{2k}\right)$	Pares distintas
$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k}}$	Pares
$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{k^2}}$	Quadrados
$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+x^{k^2}\right)$	Quadrados distintos

3.3 Função geradora exponencial

3.3.1 Definição – *A série de potências*

$$a_0 + a_1.\frac{x}{1!} + a_2.\frac{x^2}{2!} + a_3.\frac{x^3}{3!} + ... + a_r.\frac{x^r}{r!} + ...$$

é a função geradora exponencial da sequência a_r, $r = 1, 2, 3, ...$.

Observação: Em Análise Combinatória utilizamos função geradora exponencial quando a ordem dos objetos retirados deve ser considerada. Quando a ordem é irrelevante, utilizamos a função geradora ordinária.

Exemplos:

A função $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^r}{r!} + ...$ é a função geradora exponencial da sequência $a_r = 1$, $r = 0, 1, 2, 3, ...$.

A função

$$e^{2x} = 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + ... + \frac{(2x)^r}{r!} + ... = 1 + 2x + 2^2.\frac{x^2}{2!} + 2^3.\frac{x^3}{3!} + ... + 2^r.\frac{x^r}{r!} + ...$$

é a função geradora exponencial da sequência $a_r = 2^r$, $r = 0, 1, 2, 3, ...$.

Capítulo 4

Outros resultados sobre partições

Apresentamos aqui uma série de resultados, alguns deles serão deixados sem demonstração.

4.1 A Identidade de Euler e generalizações

4.1.1 Teorema (Euler) – *O número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares.*

A demonstração desse teorema está no Capítulo 2, Teorema 2.2.1.

4.1.2 Teorema (Glaisher) – *O número de partições de n em partes não-divisíveis por d é igual ao número de partições de n da forma* $n = n_1 + n_2 + ... + n_s$, *onde* $n_i \geq n_{i+1}$ *e* $n_i \geq n_{i+d-1} + 1$, *ou seja, as partições de n em que cada parte aparece menos do que d vezes.*

Observemos que para $d = 2$, o Teorema 4.1.2 recai no Teorema 4.1.1 (Euler), pois é dado da seguinte forma: *O número de partições de* n *em partes não-divisíveis por 2 é igual ao número de partições de* n *da forma* $n = n_1 + n_2 + ... + n_s$, *onde* $n_i \geq n_{i+1}$ *e* $n_i \geq n_{i+1} + 1$. Ou seja, esta última desigualdade exige que as partes sejam distintas em pelo menos uma unidade.

O Teorema de Sylvester a seguir é um refinamento do Teorema de Euler.

4.1.3 Teorema (Sylvester) – *O número de partições de n em partes ímpares, onde exatamente k partes distintas aparecem é igual ao número de partições de n em partes distintas, onde exatamente k sequências de inteiros consecutivos aparecem.*

Antes da demonstração, apresentaremos um exemplo para melhor compreensão do Teorema 4.1.3.

Exemplo:

Quando $n = 15$ e $k = 3$, as partições de n em partes ímpares, onde exatamente k partes distintas aparecem são:

$$11+3+1$$

$$9+5+1$$

$$9+3+1+1+1$$

$$7+5+3$$

$$7+5+1+1+1$$

$$7+3+1+1+1+1+1$$

$$7+3+3+1+1$$

$$5+5+3+1+1$$

$$5+3+3+3+1$$

$$5+3+3+1+1+1+1$$

$$5+3+1+1+1+1+1+1+1$$

Observe que é permitida a repetição das partes.

E as partições de 15 em partes distintas, onde aparecem exatamente 3 sequências de inteiros consecutivos são:

$$(11)+(3)+(1)$$

$$(10)+(4)+(1)$$

$$(9)+(5)+(1)$$

$$(9)+(4)+(2)$$

$$(8)+(6)+(1)$$

$$(8)+(5)+(2)$$

$$(8)+(4)+(2+1)$$

$$(7)+(5)+(3)$$

$$(7)+(5)+(2+1)$$

$$(7)+(4+3)+(1)$$

$$(6+5)+(3)+(1)$$

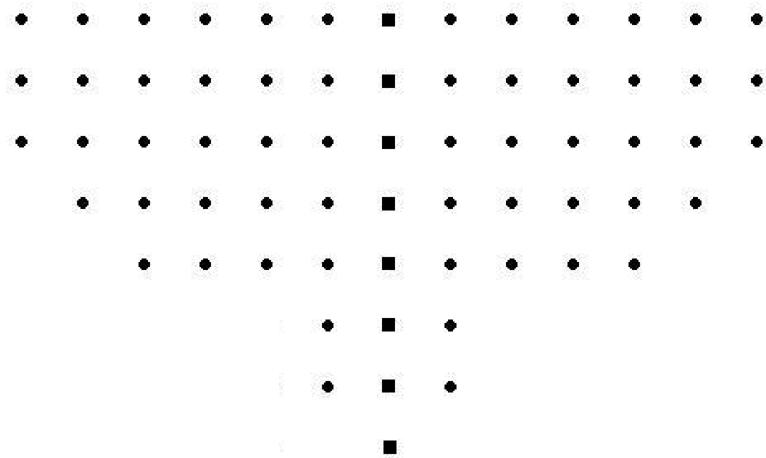
Observe que cada sequência colocada entre parênteses pode ter somente um termo.

Demonstração:

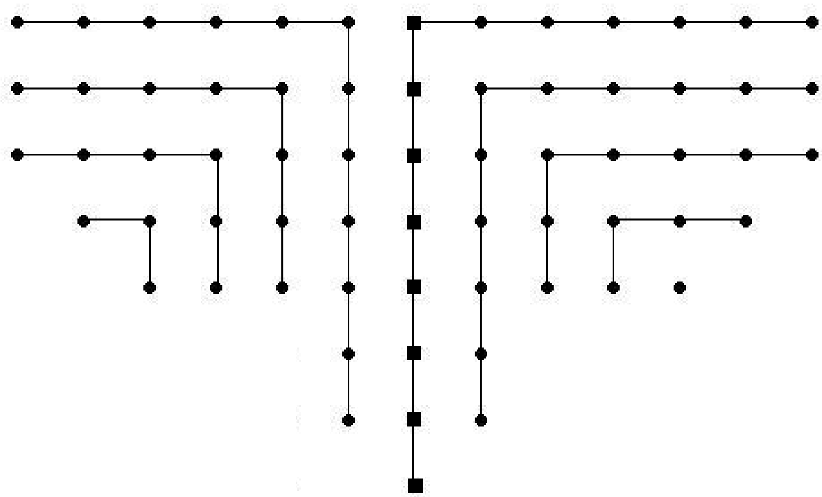
Provaremos este resultado utilizando uma variação do gráfico de Ferrers para partições em partes ímpares. Vamos centralizar os pontos ao invés de alinhá-los à esquerda, como de costume. Isto pode ser feito sem problema algum, pois temos um número ímpar de pontos. Dessa forma, sempre haverá um ponto central.

Por exemplo: $n = 66$ e $k = 5$.

$$13 + 13 + 13 + 11 + 9 + 3 + 3 + 1$$



Agora, nós podemos formar uma nova distribuição seguindo o esquema apresentado a seguir:



$$(14) + (12 + 11) + (8 + 7 + 6) + (4 + 3) + (1)$$

Parece ser uma surpresa que a nova partição seja uma com partes distintas e com exatamente 5 sequências de inteiros consecutivos. Com um pouco de reflexão, nós vamos verificar que isto sempre acontece.

Para melhor compreensão do que apresentaremos a seguir, vamos considerar que 14 é o primeiro ângulo reto, 12 é o segundo ângulo reto, 11 é o terceiro ângulo reto, e assim sucessivamente. O gráfico original é simétrico em relação aos pontos centrais. Nós podemos observar que cada novo ângulo reto de pontos (começando no centro) no segundo diagrama deve, se o novo ramo estiver à esquerda, ter no máximo, o mesmo número de pontos verticalmente e, horizontalmente, no máximo um ponto a menos que seu antecessor. Por outro lado, se o novo ramo estiver à direita, ele deve ter no máximo, um ponto a menos verticalmente e, horizontalmente no máximo, a mesma quantidade de pontos que seu antecessor. Além disso, a única maneira de ser exatamente um a menos que seu antecessor é se ele começar verticalmente a partir da mesma linha e acabar em uma linha com o mesmo número de pontos que o seu antecessor acabou. Em outras palavras, enquanto os ângulos retos forem criados a partir da mesma linha original de uma parte ímpar no início e linhas de mesmo comprimento no fim, a seqüência continua.

Assim, no exemplo acima, 14 surge iniciando na linha com um ponto e termina na linha dos treze primeiros pontos. A parte seguinte começa em uma linha com três pontos; assim automaticamente temos uma nova seqüência começando com 12. A terceira parte começa na mesma linha com três pontos e termina com uma linha de treze pontos, porém a segunda. Essa análise revela que 8, 7 e 6 surgem cada um, iniciando na linha com 9 pontos e terminando numa das linhas com 13 pontos. O 4 e 3 surgem a partir da linha com nove pontos até a linha de onze pontos, daí, uma nova seqüência. Finalmente o 1 inicia e termina numa linha com nove pontos. □

4.1.4 Definição – *O rank de Dyson de uma partição é definida como a maior parte da partição menos o número de partes.*

Exemplo: A classificação da partição de 13 dada por $4+3+2+2+1+1$ é igual a $4-6=-2$.

4.1.5 Teorema (Fine) – *O número de partições de n em partes distintas com classificação igual a $2r$ ou $2r+1$ é igual ao número de partições de n em partes ímpares cuja maior parte é $2r+1$*

.

Demonstração:

Seja λ uma partição em partes distintas e com classificação igual a $2r$ ou $2r+1$. Elimine a maior parte de λ e adicione 1 a cada uma das partes restantes se a classificação original era $2r$. Se a classificação original era $2r+1$, então elimine a maior parte de λ, adicione 1 a cada uma das partes restantes e insira 1 como uma nova parte. Observe que em cada caso, o número a ser particionado ficou reduzido de $2r+1$. Além disso, a nova partição resultante tem classificação $\leq 2r+1$.

Agora repita esse processo até a partição ficar completamente vazia. Como resultado, você terá produzido uma sequência não-crescente de números ímpares, cada um $\leq 2r+1$, que é uma partição de n como desejado.

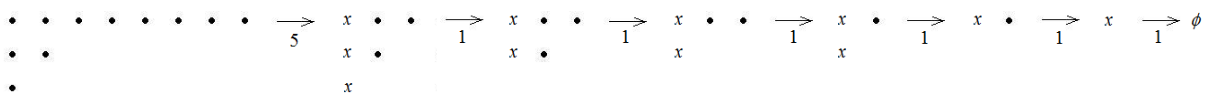
A volta se dá de maneira semelhante, o que garante ser uma bijeção. □

Exemplo: Considere $n=11$. Podemos agrupar as partições de n em partes distintas e ímpares em dois subconjuntos como segue:

r	*Partes distintas*	*Partes ímpares*
0	$5+3+2+1$	$1+1+...+1$
1	$6+4+1,\ 6+3+2,\ 5+4+2$	$3+3+3+1+1,\ 3+3+1+...+1,\ 3+1+...+1$
2	$8+2+1,\ 7+4,\ 7+3+1,\ 6+5$	$5+5+1,\ 5+3+3,\ 5+3+1+1+1,\ 5+1+...+1$
3	$9+2,\ 8+3$	$7+3+1,\ 7+1+1+1$
4	$10+1$	$9+1+1$
5	11	11

Seja $r=2$. Logo $2r=4$ e $2r+1=5$. Há quatro partições para esse valor de r e as transformações são as seguintes: (x significa um “1” adicionado à parte)

✓ $8+2+1$ é do tipo: $8-3=5$.

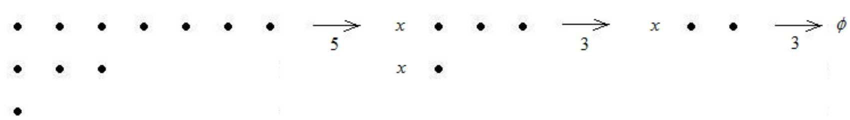


$$8+2+1 \to 5+1+1+1+1+1+1$$

✓ $7+4$ é do tipo: $7-2=5$.

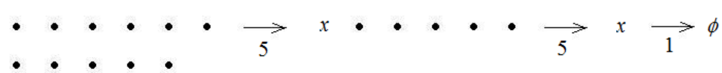
$$7+4 \to 5+3+1+1+1$$

✓ $7+3+1$ é do tipo: $7-3=4$.



$$7+3+1 \to 5+3+3$$

✓ $6+5$ é do tipo: $6-2=4$.



$$6+5 \to 5+5+1.$$

4.2 A Identidade de Schur e generalizações

4.2.1 Teorema (Schur) – *O número de partições de n em partes que são congruentes a* $\pm 1 \pmod{6}$ *é igual ao número de partições de n em partes que diferem em pelo menos 3 e nas quais não aparecem múltiplos consecutivos de 3.*

Demonstração:

A fim de provar este teorema, Schur observou que:

$$p\left(n/\text{partes } \equiv \pm 1 \pmod{6}\right) = p\left(n/\text{partes distintas e } \equiv \pm 1 \pmod{3}\right)$$

para os conjuntos $\{1,5,7,11,...\}$ e $\{1,2,4,5,7,8,10,11,...\}$, que constituem um par de Euler.

Começamos com uma partição P em partes distintas e congruentes a $\pm 1 \pmod{3}$ e a transformamos em uma nova partição P_1 através da adição de duas partes que diferem de no máximo 2, começando pelas partes menores.

Exemplo:

	P	P_1
	$11+10+8+5+2+1$	$11+(10+8)+5+(2+1)$
NOVA REPRESENTAÇÃO	11 10 8 5 2 1	11 $10+8$ 5 $2+1$

A união dessas duas partes sempre será um múltiplo de 3, e números múltiplos de 3 consecutivos não vão aparecer.

Nosso próximo passo é subtrair múltiplos consecutivos de 3 das partes de P_1, começando subtraindo 0 da parte de baixo, 3 da 2ª parte de baixo para cima e assim por diante. Observe:

P_1	SUBTRAI	P_2
11 $10+8$ 5 $2+1$	9 6 3 0	2 12 2 3

Sendo P_2 a nova partição obtida depois desta operação, rearranjamos esta em ordem decrescente, obtendo uma nova partição P_3. A seguir, adicionamos os números indicados, obtendo P_4:

P_3	ADICIONA	P_4
12 3 2 2	9 6 3 0	21 9 5 2

Esta última partição é uma partição de n em partes que diferem em pelo menos 3 e nas quais não aparecem múltiplos consecutivos de 3. O processo descrito acima é inversível, o que nos garante existir uma bijeção. E isto prova o Teorema de Schur. □

A seguir, listamos outros resultados decorrentes dos estudos de Schur e que não serão demonstrados neste trabalho. Estes resultados podem ser encontrados em [7].

4.2.2 Teorema (Göllnitz-Gordon) – *O número de partições de n em partes que diferem em pelo menos 2 e nas quais não aparecem dois pares consecutivos é igual ao número de partições de n em partes que são congruentes a 1, 4 ou 7 módulo 8.*

4.2.3 Teorema (Göllnitz-Gordon) – *O número de partições de n em partes que diferem em pelo menos 2, nas quais não aparecem dois pares consecutivos e com cada parte sendo pelo menos igual a 3 é igual ao número de partições de n em partes que são congruentes a 3, 4 ou 5 módulo 8.*

4.2.4 Teorema (Andrews) – *Seja* $p_r(n)$ *o número de partições de* n *em partes que são pares e não congruentes a* $4r-2(\mathrm{mod}\,4r)$ *ou ímpares e congruentes a* $2r-1$ *ou* $4r-1(\mathrm{mod}\,4r)$*, onde* $r \geq 2$. *Seja* $q_r(n)$ *o número de partições de n da forma* $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s$*, onde* $n_i \geq n_{i-1}$ *e, se* n_i *é impar,* $n_i - n_{i+1} \geq 2r-1$ *para* $1 \leq i \leq s$*, onde definimos* $n_{s+1} = 0$. *Então,* $p_r(n) = q_r(n)$.

4.2.5 Teorema (Moore) – *Seja* $p_1(n)$ *o número de partições de n em partes que são ou divisíveis por 4 ou ímpares. Seja* $q_1(n)$ *o número de partições de n da forma* $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s$*, onde* $n_i \geq n_{i+1}$ *e, se* n_i *é impar,* $n_i - n_{i+1} \geq 1$ *para* $1 \leq i \leq s$. *Então,* $p_1(n) = q_1(n)$.

4.2.6 Teorema (Andrews) – *Seja* $p_2(n)$ *o número de partições de n em partes que são congruentes a* $0,2,3,4,7(\mathrm{mod}\,8)$. *Seja* $q_2(n)$ *o número de partições de n da forma* $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s$*, onde* $n_i \geq n_{i+1}$*,* $n_s \geq 2$*, e, se* n_i *é impar,* $n_i - n_{i+1} \geq 3$. *Então,* $p_2(n) = q_2(n)$.

4.3 As Identidades de Rogers-Ramanujan

4.3.1 Teorema (Primeira Identidade de Rogers-Ramanujan) - *O número de partições de* n *em partes super-distintas é igual ao número de partições de* n *em partes da forma* $5m+1$ *ou* $5m+4$, *cuja função geradora é*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1-q^{5n-1}\right).\left(1-q^{5n-4}\right)}.$$

Nesta seção vamos investigar um pouco a Primeira Identidade de Rogers-Ramanujan.

Primeiro construiremos uma tabela com todas as partições em partes super-distintas para $n = 1, 2, \ldots, 11$.

n	partições de n em partes super-distintas	Total
1	1	1
2	2	1
3	3	1
4	4, $3+1$	2
5	5, $4+1$	2
6	6, $5+1$, $4+2$	3
7	7, $6+1$, $5+2$	3
8	8, $7+1$, $6+2$, $5+3$	4
9	9, $8+1$, $7+2$, $6+3$, $5+3+1$	5
10	10, $9+1$, $8+2$, $7+3$, $6+4$, $6+3+1$	6
11	11, $10+1$, $9+2$, $8+3$, $7+4$, $7+3+1$, $6+4+1$	7

A partir da tabela acima, nós vamos procurar um conjunto N tal que $p\left(n / \text{partes} \in N\right)=p\left(n / \text{partes super-distintas}\right)$, da mesma forma que construímos os pares de Euler no Capítulo 2.

Inicialmente vamos considerar que $N=\phi$. Olhando os dados da tabela acima, podemos concluir que:

1. Há uma única partição de 1 em partes que são super-distintas. Observe que, desta forma, o lado esquerdo da igualdade $p\left(n / \text{partes} \in N\right)=p\left(n / \text{partes super-distintas}\right)$ também deve ser igual a 1. Para isso, é necessário que o número 1 pertença a N. Agora $N=\{1\}$.
2. Da mesma forma, há uma única partição de 2 em partes que são super-distintas. O lado esquerdo da igualdade $p\left(n / \text{partes} \in N\right)=p\left(n / \text{partes super-distintas}\right)$ também deve ser igual a 1. Como $N=\{1\}$, temos uma: $(1+1)$. Então o número 2 não pode pertencer a N, pois neste caso teríamos o lado esquerdo da igualdade igual a 2: $(1+1,2)$.

Procedendo da mesma forma, temos:

3. Há uma única partição de 3 em partes que são super-distintas. O lado esquerdo da igualdade $p\left(n / \text{partes} \in N\right)=p\left(n / \text{partes super-distintas}\right)$ também deve ser igual a 1. Como $N=\{1\}$, temos uma: $(1+1+1)$. Então o número 3 não pode pertencer a N, pois neste caso teríamos o lado esquerdo da igualdade igual a 2: $(1+1+1,3)$.
4. Há duas partições de 4 em partes que são super-distintas. O lado esquerdo da igualdade $p\left(n / \text{partes} \in N\right)=p\left(n / \text{partes super-distintas}\right)$ também deve ser igual a 2. Como $N=\{1\}$, temos somente uma: $(1+1+1+1)$. Precisamos de mais uma partição de 4 em partes $\in N$. Para isso, é necessário que o número 4 pertença a N. Agora $N=\{1,4\}$.
5. Há duas partições de 5 em partes que são super-distintas. O lado esquerdo da igualdade $p\left(n / \text{partes} \in N\right)=p\left(n / \text{partes super-distintas}\right)$ também deve ser igual a 2.

Como $N=\{1,4\}$, já temos as duas: $(1+1+1+1+1, 4+1)$. Então o número 5 não pode pertencer a N, pois neste caso teríamos o lado esquerdo da igualdade igual a 3: $(1+1+1+1+1, 4+1, 5)$.

6. Há três partições de 6 em partes que são super-distintas. O lado esquerdo da igualdade $p(n/\text{partes}\in N)=p(n/\text{partes super-distintas})$ também deve ser igual a 3. Como $N=\{1,4\}$, já temos duas: $(1+1+1+1+1+1, 4+1+1)$. Precisamos de mais uma partição de 6 em partes $\in N$. Para isso, é necessário que o número 6 pertença a N. Agora $N=\{1,4,6\}$.
7. Há três partições de 7 em partes que são super-distintas. O lado esquerdo da igualdade $p(n/\text{partes}\in N)=p(n/\text{partes super-distintas})$ também deve ser igual a 3. Como $N=\{1,4,6\}$, já temos as três: $(1+1+1+1+1+1+1,\ 4+1+1+1,\ 6+1)$. Então o número 7 não pode pertencer a N, pois neste caso teríamos o lado esquerdo da igualdade igual a 4: $(1+1+1+1+1+1+1,\ 4+1+1+1,\ 6+1, 7)$.
8. Há quatro partições de 8 em partes que são super-distintas. O lado esquerdo da igualdade $p(n/\text{partes}\in N)=p(n/\text{partes super-distintas})$ também deve ser igual a 4. Como $N=\{1,4,6\}$, já temos as quatro: $(1+1+1+1+1+1+1+1,\ 4+1+1+1+1,\ 6+1+1,\ 4+4)$. Então o número 8 não pode pertencer a N, pois neste caso teríamos o lado esquerdo da igualdade igual a 5: $(1+1+1+1+1+1+1+1,\ 4+1+1+1+1,\ 6+1+1,\ 4+4, 8)$.
9. Há cinco partições de 9 em partes que são super-distintas. O lado esquerdo da igualdade $p(n/\text{partes}\in N)=p(n/\text{partes super-distintas})$ também deve ser igual a 5. Como $N=\{1,4,6\}$, temos apenas quatro: $(1+1+1+1+1+1+1+1+1,\ 4+1+1+1+1+1,\ 6+1+1+1,\ 4+4+1)$. Precisamos de mais uma partição de 9 em partes $\in N$. Para isso, é necessário que o número 9 pertença a N. Agora $N=\{1,4,6,9\}$.

Assim, a sequência de números encontrada começa com 1, 4, 6, 9. Se continuarmos com o mesmo argumento, podemos verificar que a sequência continua em 11, 14, 16, 19, 21, 24, ...

Sempre podemos obter os dois próximos números adicionando 5 nos dois últimos da sequência. Este conjunto de números pode ser descrito como o conjunto dos inteiros positivos que, quando divididos por 5, deixam resto igual 1 ou 4. Podemos escrever:

$$p\left(n\,/\,\text{partes} \equiv 1 \text{ ou } 4\left(\text{mod}\,5\right)\right) = p\left(n\,/\,\text{partes super distintas}\right)$$

E esta é a Primeira Identidade de Rogers-Ramanujan.

É claro que o argumento acima não prova a identidade para todo *n*, ele apenas verifica que ela é verdadeira para alguns valores de *n*. A menos que uma prova rigorosa seja dada, há sempre a possibilidade de que a identidade falhe para algum valor de *n*.

Vimos provas bijetivas para muitas identidades. Uma bijeção entre dois conjuntos de partições automaticamente gera uma identidade de partição, mas o contrário está longe de ser verdade. Dada uma identidade de partição, não existe um procedimento padrão para construir uma bijeção. As bijeções apresentadas neste trabalho são de vários tipos: adição/divisão, conjugação, mover uma diagonal no gráfico de Ferrers, reorganizar o gráfico de Ferrers em duas colunas, etc.

Para se ter uma ideia da dificuldade em encontrar uma prova bijetiva para a Primeira Identidade de Rogers-Ramanujan, que sabemos ser verdadeira, vamos analisar a seguinte tabela.

n	partes $\in \{1,4,6,9,11,...\}$	partições de *n* em partes super-distintas
1	1^1	1
2	1^2	2
3	1^3	3
4	$1^4,\ 4^1$	$4,\ 3+1$
5	$1^5,\ 4^1 1^1$	$5,\ 4+1$
6	$1^6,\ 4^1 1^2,\ 6^1$	$6,\ 5+1,\ 4+2$
7	$1^7,\ 4^1 1^3,\ 6^1 1^1$	$7,\ 6+1,\ 5+2$
8	$1^8,\ 4^1 1^4,\ 6^1 1^2,\ 4^2$	$8,\ 7+1,\ 6+2,\ 5+3$

9	1^9, $4^1 1^5$, $6^1 1^3$, $4^2 1^1$, 9^1	9, $8+1$, $7+2$, $6+3$, $5+3+1$
10	1^{10}, $4^1 1^6$, $6^1 1^4$, $4^2 1^2$, $9^1 1^1$, $6^1 4^1$	10, $9+1$, $8+2$, $7+3$, $6+4$, $6+3+1$

A representação 1^6 significa $1+1+1+1+1+1$, a representação $4^1 1^2$ significa $4+1+1$ e a representação 6^1 significa 6.

Para produzir uma nova linha nesta tabela, podemos pegar cada partição da última linha e adicionar uma parte de tamanho "1" em cada partição do lado esquerdo e adicionar "1" à maior parte de cada partição do lado direito. Então, incluímos novas partições do lado esquerdo que usam somente números que pertencem ao conjunto $\{4,6,9,11,...\}$, e do lado direito partições onde a diferença entre as duas maiores partes é exatamente dois.

Deste modo, temos que as partições da esquerda usam somente partes $\in \{1,4,6,9,11,...\}$, enquanto que as partições da direita são super-distintas.

Agora temos uma ideia de como cuidar das partes de tamanho "1" ao transformar partições do lado esquerdo - todos eles serão fundidos e adicionados a maior parte do que obtemos ao transformar o resto das partes em uma partição em partes super-distintas, onde a diferença entre as duas maiores partes é exatamente dois.

Daí precisamos ver como transformar o resto das partes. Observe a tabela:

$$\begin{aligned} 4 &\mapsto 3+1 \\ 6 &\mapsto 4+2 \\ 9 &\mapsto 5+3+1 \\ 4^2 &\mapsto 5+3 \\ 6^1 4^1 &\mapsto 6+4 \end{aligned}$$

Claramente, as partes de tamanho 4 não podem ser transformados em blocos $(3+1)$, pois então 4^2 teria sido modificado para $(6+2)$. Em vez disso, parece que o segundo 4 em 4^2 e o 4 em $6^1 4^1$ foram modificados para um bloco do tipo $(2+2)$. Nós introduzimos uma regra específica para um único 4, todos os outros serão escritos como blocos $(2+2)$. Nós podemos agora estender a tabela mais algumas carreiras e inferir quais regras devem reger a transformação das partes.

Contudo, mais e mais regras deverão ser criadas e não há um procedimento padrão para encontrar quais são essas regras. E isto é matematicamente inviável. A prova deve ser dada através de outro caminho, que não é objeto de estudo desse trabalho.

4.3.2 Teorema (Segunda Identidade de Rogers-Ramanujan) - *O número de partições de* n *em partes super-distintas onde cada parte é maior ou igual a 2 é igual ao número de partições de* n *em partes da forma* $5m+2$ *ou* $5m+3$, *cuja função geradora é*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-q^{5n-2}\right).\left(1-q^{5n-3}\right)}.$$

As demonstrações analíticas das Identidades de Rogers-Ramanujan podem ser encontradas em [6], visto que não são objetos de estudo deste trabalho.

Conclusão

Neste trabalho pude observar de perto fascinantes técnicas para demonstrar alguns resultados de partições. É claro que a demonstração analítica e rigorosa também é necessária, além de ter sua própria beleza. No entanto, as demonstrações aqui apresentadas têm o intuito de ser de fácil compreensão, tornando aceitável e agradável alguns resultados sobre identidades de partições. Com o desenvolver do trabalho, meu interesse e curiosidade pelo assunto só aumentavam. E espero que seja assim com outras pessoas que também têm interesse pelo assunto.

Algumas das técnicas são relativamente simples, e é isso que a torna uma ferramenta de grande admiração. Como verificado, encontrar bijeções entre dois conjuntos não é uma tarefa simples. Em alguns casos a demonstração analítica pode ser mais rápida e de fácil entendimento. Outras técnicas exigem um pouco mais de paciência, intimidade e habilidade com o assunto proposto.

Além disso, os resultados aqui apresentados mostraram a importância de grandes matemáticos no desenvolvimento do assunto, com destaque para Euler.

Referências Bibliográficas

[1] ANDREWS, G. E., ERIKSSON, K. ***Integer Partitions***, Cambridge University Press, 2004.

[2] ANDREWS, G. E. ***The Theory of Partitions***, Cambridge University Press, 1976.

[3] SANTOS, J. P. ***O. Introdução à Teoria dos Números - Coleção Matemática Universitária (Vol. 8)***, SBM, Rio de Janeiro, 1998.

[4] SANTOS, J. P. O., MELLO, M. P., MURARI, I. T. C. ***Introdução à Análise Combinatória***, Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2007.

[5] PAK, I. ***Partition Bijections, a Survey***, Ramanujan Journal, Vol. 12 (2006), 5 – 75.

[6] RIBEIRO, A. C. ***Aspectos Combinatórios de Identidades do Tipo Rogers-Ramanujan***, Campinas, 2006.

[7] H. L. Alder, ***Partition Identities – From Euler to the present***, American Mathematical Monthly, Vol. 76 (1969), 733 – 746.