

---

**Universidade Estadual de Campinas**  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação  
Científica

---

Dissertação de Mestrado



*A Função Hipergeométrica e o Pêndulo  
Simples*

**Ester Cristina Fontes de Aquino Rosa**

**Orientador: Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira**

Fevereiro de 2011  
Campinas - Estado de São Paulo

---

# *A Função Hipergeométrica e o Pêndulo Simples*

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Ester Cristina Fontes de Aquino Rosa** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 01 de Fevereiro de 2011.

---

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira  
Orientador



Banca Examinadora:  
Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira  
Prof. Dr. Jayme Vaz Júnior  
Prof. Dr. Denilson Gomes

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **Unicamp**, como requisito parcial para obtenção do Título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Rosa, Ester Cristina Fontes de Aquino

R71f A função hipergeométrica e o pêndulo simples/Ester Cristina Fontes de Aquino Rosa-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.

Orientador : Edmundo Capelas de Oliveira

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Pêndulo. 2.Frobenius, Teorema de. 3.Funções hipergeométricas. 4.Hamilton-Jacobi, Equações. 5.Equações diferenciais. I. Oliveira, Edmundo Capelas de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: The hypergeometric function and the simple pendulum

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Pendulum. 2. Frobenius's theorem. 3. Functions, hypergeometric. 4. Hamilton-Jacobi, Equations. 5. Differential equations.

Área de concentração: Física - Matemática

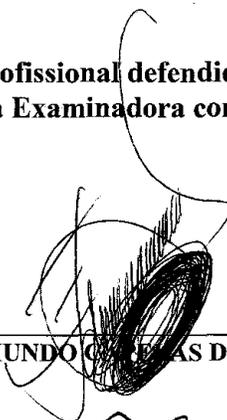
Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira (IMECC-UNICAMP)  
Prof. Dr. Jayme Vaz Júnior (IMECC - UNICAMP)  
Prof. Dr. Denilson Gomes (CCNE - UFSM)

Data da defesa: 01/02/2011

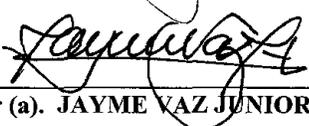
Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 01 de fevereiro de 2011  
e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

Prof. (a). Dr (a). EDMUNDO CORDEIRO DE OLIVEIRA



---

Prof. (a). Dr (a). JAYME VAZ JUNIOR



---

Prof. (a). Dr (a). DENILSON GOMES

*Ao meu marido Marcus Vinicius*

*Estou sentindo uma clareza tão grande que me anula como pessoa atual e comum: é uma lucidez vazia, como explicar? Assim como um cálculo matemático perfeito do qual, no entanto, não se precise.*

CLARICE LISPECTOR.

---

# Agradecimentos

---

Agradeço a Deus, que me fortaleceu nas adversidades, guiou minhas escolhas e aplainou os meus caminhos.

Agradeço a minha família que, mesmo resignada pela minha constante ausência, encontrou meios de manifestar carinho e incentivo.

Agradeço, em especial, ao meu marido, Marcus Vinicius, que, estando comigo nos momentos mais difíceis, acreditou em minha capacidade e me apoiou, sem hesitar.

Agradeço ao meu orientador Edmundo, que, no decorrer desse trabalho, foi sempre presente e atencioso.

Agradeço aos professores Edson, Joni, Plínio, Sandra, Vera e à coordenadora Sueli Costa, entre outros, pela iniciativa e envolvimento nesse projeto inovador de Mestrado Profissional, que a tantos surgiu como uma oportunidade de realização de seus sonhos, salvando muitos professores da estagnação.

Agradeço também aos tutores Adriano, Aguinaldo e João Paulo.

Agradeço aos funcionários do IMECC, gentis e prestativos.

Agradeço aos meus amigos, Beto, Cláudio e Márcia, com os quais tive a oportunidade de compartilhar boa parte dessa trajetória, convivência essa que suavizou as agruras desse caminho.

Agradeço, também, ao Fábio por sua solicitude em me ajudar.

---

# Resumo

---

Este trabalho tem por objetivo modelar e resolver, matematicamente, um problema físico conhecido como pêndulo simples. Discutimos, como caso particular, as chamadas oscilações de pequena amplitude, isto é, uma aproximação que nos leva a mostrar que o período de oscilação é proporcional à raiz quadrada do quociente entre o comprimento do pêndulo e a aceleração da gravidade.

Como vários outros problemas oriundos da Física, o pêndulo simples é representado através de equações diferenciais parciais. Assim, na busca de sua solução, aplicamos a metodologia de separação de variáveis que nos leva a um conjunto de equações ordinárias passíveis de simples integração.

Escolhendo um sistema de coordenadas adequado, é conveniente usar o método de Hamilton-Jacobi, discutindo, antes, o problema do oscilador harmônico, apresentando, em seguida, o problema do pêndulo simples e impondo condições a fim de mostrar que as equações diferenciais associadas a esses dois sistemas são iguais, ou seja, suas soluções são equivalentes.

Para tanto, estudamos o método de separação de variáveis associado às equações diferenciais parciais, lineares e de segunda ordem, com coeficientes constantes e três variáveis independentes, bem como a respectiva classificação quanto ao tipo. Posteriormente, estudamos as equações hipergeométricas, cujas soluções, as funções hipergeométricas, podem ser encontradas pelo método de Frobenius.

Apresentamos o método de Hamilton-Jacobi, já mencionado, para o enfrentamento do problema apresentado. Fizemos no capítulo final um apêndice sobre a função gama por sua presente importância no trato de funções hipergeométricas, em especial a integral elíptica completa de primeiro tipo que compõe a solução exata do período do pêndulo simples.

---

# Abstract

---

This work aims to present and solve, mathematically, the physics problem that is called simple pendulum. We reasoned, as an specific case, the so called low amplitude oscillation, that is, a convenient approximation that make us show that the period of oscillation is proportional to the quotient square root between the pendulum length and the gravity acceleration.

Like several other problems arising from the physics, we are going to broach it through partial differential equations. Thus, in the search of its solution, we made use of the variable separation methodology that leads us to a body of ordinary equations susceptible of simple integration.

Choosing an appropriate coordinate system, it is convenient to use the method Hamilton-Jacobi, arguing, first, the problem of the harmonic oscillator, with, then the problem of sf simple pendulum and imposing conditions to show that the differential equations associated with these two systems are equal, that is, their solutions are equivalent.

With the purpose of reaching the objectives, we studied the variable separation method associated with partial differential equations, linear and of second order, with constant coefficient and three independent variables, as well as the respective classification about the type. Afterwards, we studied the hypergeometrical equations whose solutions, the hypergeometrical functions, are found by the Frobenius method.

Introducing the Hamilton-Jacobi method, already mentioned, for addressing the problem presented. We made an appendix in the final chapter on the gamma function by its present importance in dealing with hypergeometric functions, in particular the elliptic integral of first kind consists of the exact period of sf simple pendulum.

---

# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Equações Diferenciais Parciais</b>	<b>4</b>
1.1 Notação e definições . . . . .	5
1.1.1 Equação diferencial parcial de segunda ordem . . . . .	5
1.2 Classificação . . . . .	8
1.2.1 Equação do tipo hiperbólico . . . . .	8
1.2.2 Equação do tipo parabólico . . . . .	10
1.2.3 Equação do tipo elíptico . . . . .	10
1.2.4 Exemplo . . . . .	10
1.3 Método de separação de variáveis . . . . .	11
1.3.1 Condições de contorno . . . . .	11
1.3.2 Funções ortogonais e série de Fourier . . . . .	12
1.3.3 A equação de Sturm-Liouville . . . . .	14
1.3.4 Princípio da superposição . . . . .	15
1.3.5 Separação de variáveis . . . . .	15
<b>2 Funções Hipergeométricas</b>	<b>20</b>
2.1 Método de Frobenius . . . . .	21
2.2 Equação hipergeométrica . . . . .	27
2.3 Funções de Legendre . . . . .	30
2.4 Equação hipergeométrica confluyente . . . . .	33
2.5 Funções de Bessel . . . . .	34
<b>3 Osciladores Harmônicos</b>	<b>36</b>
3.1 Movimento harmônico simples . . . . .	36
3.2 Equação de Lagrange . . . . .	40
3.2.1 Princípio de Hamilton . . . . .	41
3.2.2 Função de Lagrange . . . . .	44
3.3 Equações de Hamilton . . . . .	48

3.3.1	Teoria de Hamilton . . . . .	48
3.3.2	Hamilton-Jacobi . . . . .	51
<b>4</b>	<b>O Pêndulo Simples</b>	<b>57</b>
4.1	Um pouco de história . . . . .	57
4.2	Christiaan Huygens e o pêndulo isócrono . . . . .	58
4.3	Aplicação das equações de Hamilton-Jacobi . . . . .	65
4.4	Representação por função hipergeométrica . . . . .	68

---

# Introdução

---

Durante os últimos dois séculos, diversos métodos foram desenvolvidos para a resolução das equações diferenciais parciais, sendo o método da separação de variáveis o mais antigo, usado na segunda metade do século XVIII na investigação sobre ondas e vibrações; posteriormente ele passou por refinamentos e generalizações [22]. O que caracteriza o método de separação de variáveis é a possibilidade de transformar uma equação diferencial parcial em um conjunto de equações diferenciais ordinárias, restringindo nosso estudo original ao estudo de equações diferenciais ordinárias. Entre essas últimas estão as equações com três pontos singulares regulares. O protótipo desse tipo de equação é a chamada equação hipergeométrica, ou equação diferencial de Gauss, cuja solução recebe o nome de função hipergeométrica, ou ainda função de Gauss. Essas funções hipergeométricas pertencem à classe de funções ditas especiais [3]. Dentre as funções especiais mais importantes, temos a função de Legendre e a função de Bessel, cujas equações são geradas, algumas vezes, pela separação da equação de Helmholtz em coordenadas polares esféricas [12] e aparecem em muitos problemas físicos. Nos problemas tridimensionais, a separação de variáveis aplicada à equação de Laplace  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$  leva à equação de Bessel em coordenadas cilíndricas e à equação de Legendre em coordenadas esféricas, circunstância tal que potencializa a relevância do estudo dessas equações e das funções geradas por elas. As funções de Bessel formam uma área da Análise Matemática muito rica, com muitas representações, propriedades e inter-relações muito úteis. Existe uma variedade de funções, até mesmo as elementares (racionais, trigonométricas, logarítmicas, exponenciais, etc...), que pode ser representada por uma função hipergeométrica. Um exemplo visto nesse trabalho é a integral elíptica completa de primeira espécie que aparece na resolução da equação não-linear do pêndulo simples.

Iniciamos o primeiro capítulo explorando conceitos e definições básicas de equações diferenciais parciais de segunda ordem e estudamos a classificação das mesmas quanto ao tipo bem como as suas reduções às suas respectivas

formas canônicas. Depois disso, trabalhamos com o método de separação de variáveis, ou método de Fourier, para resolver as equações diferenciais parciais de segunda ordem. Levando em consideração as condições de contorno e as condições iniciais do problema, o qual envolve uma equação diferencial parcial com  $m$  variáveis independentes, por esse método essa equação é conduzida a um conjunto de  $m$  equações diferenciais ordinárias, cujas resoluções são mais simples. Um modelo exemplar de equações diferenciais parciais básicas associadas a fenômenos físicos é a equação da condução do calor, cuja investigação proporciona muita informação sobre as equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem. Por isso, contemplamos, nesse capítulo, o estudo do problema de difusão de calor numa placa retangular representado por uma equação com três variáveis independentes, uma delas temporal.

No capítulo dois estudamos as funções hipergeométricas como soluções das equações hipergeométricas geradas pelo método de Frobenius aplicado na equação diferencial ordinária com três pontos singulares regulares a saber, zero, um e infinito. Estudamos, como caso particular de função hipergeométrica, a função de Legendre. Em seguida, usando um conveniente processo de limite, o qual gera a confluência de duas singularidades da equação hipergeométrica, introduzimos a equação hipergeométrica confluyente cujas soluções são as funções hipergeométricas confluentes. Como exemplo, apresentamos a função de Bessel.

Já no terceiro capítulo, começamos com a revisão de conceitos e fórmulas envolvidas nos osciladores harmônicos; em seguida, estudamos as teorias lagrangiana e hamiltoniana, reformulações permanentes e concomitantes com a teoria newtoniana [10], as quais propiciam uma representação simplificada de vários problemas dinâmicos. Exemplificamos a representação do movimento do pêndulo simples sob a ótica dessas teorias, obtendo, em ambos os casos, uma mesma equação na qual, imposta uma condição de aproximação, consolidamos a semelhança do pêndulo com o oscilador harmônico. Para encerrar o capítulo, estudamos a teoria de Hamilton-Jacobi usando sua técnica para discutir o movimento de um oscilador harmônico unidimensional e do sistema massa-mola.

No capítulo quatro, fazemos uma abordagem histórica sobre a importância do pêndulo na precisão do tempo, sem deixar de destacar, obviamente, o matemático, Christiaan Huygens e sua busca pelo pêndulo isócrono. Considerando uma partícula abandonada de uma certa altura numa superfície cicloidal, calculamos seu período de oscilação e constatamos, com isso, que ele independe da altura inicial da partícula [23]; Huygens adaptou essa idéia

para o pêndulo forçando-o a percorrer uma trajetória cicloidal. Finalizamos esse capítulo realizando a meta principal desse trabalho que é aplicar a teoria de Hamilton-Jacobi com o objetivo de obter a representação exata do período do pêndulo simples através de uma função hipergeométrica.

Na parte final desse estudo, temos a conclusão de todo o trabalho e, em seguida, um apêndice sobre a função gama.

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

---

---

Resolver uma equação diferencial parcial geralmente requer mais trabalho, ou seja, é mais difícil que a resolução das equações diferenciais ordinárias e, a não ser para certos tipos especiais de equações diferenciais lineares, nenhum método geral de resolução é viável. Esse capítulo propõe a resolução de tipos particulares de equações lineares, sendo essas recorrentes em uma grande variedade de importantes aplicações em muitos ramos da Física, da Química e da Engenharia. É notório que a descrição matemática dos fenômenos da natureza ou de eventos e processos físicos é realizada através de funções de duas ou três variáveis espaciais  $x$ ,  $y$  e  $z$  e uma variável tipo tempo  $t$ . Vem daí a importância de nos concentrarmos em tais equações.

Neste capítulo introduzimos o conceito de equação diferencial parcial linear e de segunda ordem, bem como sua classificação quanto ao tipo [2]. Apresentamos o método de separação de variáveis através de uma equação com duas variáveis independentes [5], de modo a reduzir, como extensão da metodologia, uma equação diferencial parcial, linear, de segunda ordem e com três variáveis independentes, num conjunto de três equações diferenciais ordinárias<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Isto pode ser estendido para o caso de uma equação com  $n$  variáveis independentes.

## 1.1 Notação e definições

A fim de simplificar a notação, neste trabalho utilizamos  $t, x, y$  e  $z \in \mathbb{R}$  para denotar as variáveis independentes, enquanto que  $u$  e  $v$  denotam as variáveis dependentes. Uma equação diferencial é dita **parcial** quando apresenta pelo menos uma derivada parcial e sua **ordem** é determinada pela mais alta ordem da diferencial parcial que nela contenha. Dizemos que uma equação diferencial parcial é **linear** se suas derivadas parciais ocorrem somente no primeiro grau e se não existirem produtos da variável dependente e suas derivadas parciais, caso contrário, dizemos que a equação é **não linear**.

### 1.1.1 Equação diferencial parcial de segunda ordem

A forma mais geral de uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem com duas variáveis independentes é:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F u = G \quad (1.1)$$

onde os coeficientes  $A, \dots, G$  são funções das variáveis  $x$  e  $y$  e  $u = u(x, y)$ . Consideremos os coeficientes da equação e  $u(x, y)$  funções  $\mathbb{C}^2$ , além disso,  $A, B$  e  $C$  não simultaneamente nulos. Essa equação é também dita linear porque todos os coeficientes dependem somente das variáveis independentes  $x$  e  $y$  e é chamada de segunda ordem porque esta é a mais alta ordem da diferencial parcial [2].

Enfim, quando  $G = 0$ , dizemos que essa equação é **homogênea**, caso contrário, **não homogênea**.

Vamos mostrar, inicialmente, que, numa equação diferencial parcial com duas variáveis independentes, existe a possibilidade de se encontrar uma transformação de coordenadas que conserva sua forma, desde que o jacobiano da transformação seja diferente de zero. Considere a transformação das seguintes coordenadas:

$$\xi = \xi(x, y) \quad \text{e} \quad \eta = \eta(x, y).$$

Utilizando a regra da cadeia, podemos escrever para as primeiras derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (1.3)$$

bem como para as segundas derivadas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

ou ainda na forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

E, de maneira análoga, obtemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x \partial y}.$$

Substituindo as expressões para as derivadas na Eq.(1.1), temos:

$$\begin{aligned} & A \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right] \\ & + B \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x \partial y} \right] \\ & + C \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right] \\ & + D \left[ \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] + E \left[ \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] + F u = G. \end{aligned}$$

Rearranjando os termos, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
& \left[ A \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\
& + \left[ 2A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + 2C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \\
& + \left[ A \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\
& + \left[ A \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \xi}{\partial x} + E \frac{\partial \xi}{\partial y} \right] \frac{\partial u}{\partial \xi} \\
& + \left[ A \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + D \frac{\partial \eta}{\partial x} + E \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \frac{\partial u}{\partial \eta} + F u = G.
\end{aligned}$$

Usando essa transformação na Eq.(1.1), obtemos:

$$A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + F_1 u = G_1 \quad (1.4)$$

onde introduzimos a notação:

$$\begin{aligned}
A_1 &= A \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \\
B_1 &= 2A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + 2C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\
C_1 &= A \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2, \\
D_1 &= A \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \xi}{\partial x} + E \frac{\partial \xi}{\partial y}, \\
E_1 &= A \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + D \frac{\partial \eta}{\partial x} + E \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\
F_1 &= F, \\
G_1 &= G.
\end{aligned}$$

Enfim, com um pouco de álgebra, podemos verificar que

$$B^2 - 4AC = (B_1^2 - 4A_1C_1) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2$$

e, portanto, a transformação não singular não muda o tipo da equação.

Outra observação importante, principalmente para a próxima seção, é que a classificação dessa equação depende somente dos seus coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$  onde  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ . Logo, obtemos as seguintes formas para a Eq. (1.1) e a Eq.(1.4), respectivamente

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = H \left( x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = H_1 \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

onde as funções  $H$  e  $H_1$  não contêm as derivadas de ordem dois.

## 1.2 Classificação

Como os coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$  não são simultaneamente nulos, com uma mudança conveniente das variáveis  $\xi$  e  $\eta$ , podemos transformar a equação diferencial parcial linear de segunda ordem, em sua forma original, na denominada *forma canônica* [5], podendo ser do tipo parabólico, hiperbólico ou elíptico, como pode ser visto a seguir. De maneira análoga às quádras da geometria analítica, a classificação da Eq.(1.1) depende do discriminante  $\Delta = B^2 - 4AC$ ; essa equação será do tipo parabólico, hiperbólico ou elíptico se  $\Delta$  for nulo, positivo ou negativo, respectivamente.

### 1.2.1 Equação do tipo hiperbólico

Se  $B^2 - 4AC > 0$ , a equação é do tipo hiperbólico e pode ser escrita na chamada *primeira forma canônica da equação hiperbólica* dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi_1 \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (1.5)$$

onde definimos  $\Phi_1 = H_1/B_1$  com  $B_1 \neq 0$ .

Para tal transformação devemos ter  $A_1 = C_1 = 0$ . Se trabalharmos com  $A_1 = 0$ , podemos obter:

$$A \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (1.6)$$

Considerando uma curva  $\xi(x, y) = \text{cte}$ , temos:

$$d\xi = 0$$

de onde segue-se

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy = 0$$

ou ainda, na forma

$$\frac{\partial \xi / \partial x}{\partial \xi / \partial y} = - \frac{dy}{dx}.$$

Dividindo a Eq.(1.6) por  $\left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2$  e considerando a igualdade acima, temos

$$A \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - B \left( \frac{dy}{dx} \right) + C = 0$$

que é uma equação algébrica com raízes reais e distintas dadas por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}.$$

Essas equações são chamadas **equações características**. Obtemos, assim, duas soluções que são as duas famílias de **curvas características**.

Com uma segunda mudança de variáveis independentes

$$\alpha = \xi + \eta \quad \text{e} \quad \beta = \xi - \eta,$$

podemos escrever, neste caso, a chamada *segunda forma canônica* dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \bar{\Phi}_1 \left( \alpha, \beta, \frac{\partial u}{\partial \beta}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right). \quad (1.7)$$

### 1.2.2 Equação do tipo parabólico

Se  $B^2 - 4AC = 0$ , essa equação é do tipo parabólico e pode ser escrita na *forma canônica*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \Phi_2 \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (1.8)$$

com  $\Phi_2 = H_1/A_1$  e  $A_1 \neq 0$ , bem como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi_3 \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (1.9)$$

com  $\Phi_3 = H_1/C_1$  e  $C_1 \neq 0$ .

Analogamente à anterior, temos a respectiva **equação característica**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A}.$$

### 1.2.3 Equação do tipo elíptico

Se  $B^2 - 4AC < 0$ , a equação é do tipo elíptico e pode ser escrita na *forma canônica*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi_4 \left( \alpha, \beta, \frac{\partial u}{\partial \beta}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \quad (1.10)$$

onde introduzimos as coordenadas reais  $\alpha$  e  $\beta$  tais que

$$\alpha = (\xi + \eta)/2 \quad \text{e} \quad \beta = (\xi - \eta)/2i.$$

### 1.2.4 Exemplo

Tendo em vista que ocorrem três tipos na classificação, podemos exemplificar com uma equação interessante, a saber,

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = u(x, y).$$

Como  $\Delta = 4(x^2 - y^2)$ , essa equação é do tipo hiperbólico, parabólico ou elíptico se  $x^2 - y^2$  for, respectivamente, positivo, nulo ou negativo. Assim, no segundo caso, temos como solução as bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares e, nos outros dois casos, as regiões delimitadas por essas bissetrizes.

Podemos estender a nomenclatura hiperbólico, parabólico ou elíptico para as equações com  $n$  variáveis independentes [24]. Enfim, este tipo de equação que pode mudar de tipo, dependendo do domínio, é conhecido como *equação do tipo misto* [2].

## 1.3 Método de separação de variáveis

Antes de apresentarmos o método de separação de variáveis [1], vamos introduzir as condições de contorno, as séries de Fourier<sup>2</sup> e o chamado problema (ou sistema) de Sturm-Liouville<sup>3</sup>, tópicos esses que constituem pano de fundo para o método que será desenvolvido.

### 1.3.1 Condições de contorno

Sendo uma equação definida numa região  $\mathfrak{R}$  do espaço, sua **solução** será uma função que possui todas as derivadas parciais da equação em questão, num certo domínio  $I$ , onde  $I \supset \mathfrak{R}$ . Além disso, essa função, bem como suas derivadas satisfazem a equação no domínio  $\mathfrak{R}$ .

Modelando, por exemplo, um problema físico com uma equação diferencial parcial, interessamo-nos por uma solução particular, única e estável no grupo das soluções gerais que satisfazem tal equação. Para tanto, nos utilizamos das chamadas condições de contorno, advindas da geometria da fronteira do domínio, bem como das condições iniciais oriundas do próprio problema.

São três os tipos principais de condições de contorno, usuais em problemas da física, a saber,

- i) *Condições de Dirichlet* (1805-1859), em que determinada função  $u$  é especificada em cada ponto de uma fronteira da região,

$$u(x, y)|_{x=x_0} = a$$

dado  $a$ .

---

<sup>2</sup>Joseph Fourier (1768-1830) foi um estudioso da propagação do calor e escreveu um dos grandes clássicos da matemática: a *Théorie Analytique de la Chaleur* (Teoria analítica do Calor).

<sup>3</sup>Sturm-Liouville, nome dado em homenagem aos matemáticos Jacques-Charles François Sturm (1803-1855) e Joseph Liouville (1809-1882).

- ii) *Condições de Neumann* (1903-1957), em que é dado o valor da derivada da função na fronteira, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x, y)|_{x=x_0} = b$$

com  $b$  dado.

- iii) *Condições de Cauchy*<sup>4</sup>, em que são fornecidos os valores de  $u$ , em, por exemplo,  $x = x_0$ , e da derivada parcial, nesse caso em relação a  $x$ .

### 1.3.2 Funções ortogonais e série de Fourier

O matemático Fourier mostrou que uma função pode ser expressa por uma série trigonométrica, a chamada **série de Fourier**. Apesar de não ser absoluta como propunha, essa série representa uma extensa classe de funções e é muito utilizada no estudo de problemas advindos da acústica, ótica, eletrodinâmica, termodinâmica, dentre outras áreas.

Diz-se que um conjunto de funções  $\tau_n(x)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  é ortogonal em relação a uma função peso  $\omega(x)$  em um intervalo  $(a, b)$  se

$$\int_a^b \omega(x)\tau_n(x)\tau_m(x)dx = 0 \quad \text{para } m \neq n.$$

Se  $\omega(x) = 1$  em  $(a, b)$ , dizemos que o conjunto  $\tau_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  é ortogonal neste intervalo.

Suponha que uma função  $f$ , definida no intervalo  $(-l, l)$ ,  $l > 0$ , possa ser desenvolvida na série trigonométrica:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right) \quad (1.11)$$

---

<sup>4</sup>Cauchy nasceu em Paris, em 1789 e morreu em 1857. São numerosos os termos em matemática que possuem seu nome. Ele inventou o método das características, importante na análise das equações diferenciais parciais. Entre suas obras, estão *Cours d'analyse* de 1821 e os 4 volumes *Exercices d'analyse et de physique mathématique* (Exercícios de Análise e de Física Matemática, 1840-47). Foi o primeiro a fazer um estudo cuidadoso das condições para convergência de série infinita; também deu uma definição rigorosa de uma integral independente do processo de diferenciação e desenvolveu a teoria matemática da elasticidade.

onde o conjunto  $\Lambda = \{1, \cos \frac{n\pi}{l}x, \sin \frac{n\pi}{l}x\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  é ortogonal. Integrando formalmente ambos os membros da equação acima, temos:

$$\int_{-l}^l f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-l}^l dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-l}^l \cos \frac{n\pi}{l}x dx + b_n \int_{-l}^l \sin \frac{n\pi}{l}x dx \right).$$

Pela ortogonalidade do conjunto  $\Lambda$ , obtemos:

$$\int_{-l}^l f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-l}^l dx = la_0$$

de onde segue-se

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x)dx.$$

Multiplicando a Eq.(1.11) por  $\cos \frac{m\pi}{l}x$  e  $\sin \frac{m\pi}{l}x$ , respectivamente, e integrando, obtemos:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx.$$

A paridade da função permite simplificação. Se a função  $f$  for par no intervalo  $(-l, l)$ , ela deverá ser expandida em uma *série de cossenos*:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l}x$$

onde  $a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x)dx$  e  $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x dx$ .

Por outro lado, se a função  $f$  for ímpar no intervalo  $(-l, l)$ , ela deverá ser expandida em uma *série de senos*:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l}x$$

com  $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx$ .

### 1.3.3 A equação de Sturm-Liouville

Ao resolver uma equação diferencial parcial de segunda ordem pelo **método de separação de variáveis**, como será visto mais adiante, é frequente emergir equações diferenciais ordinárias do tipo:

$$\frac{d}{dx} \left[ p \frac{d\varphi(x)}{dx} \right] + (q + \lambda r)\varphi(x) = 0$$

onde  $p$ ,  $q$  e  $r$  são funções da variável independente  $x$ ,  $\lambda$  é um parâmetro e  $\varphi(x)$  é a variável dependente. Essa equação recebe o nome de **equação de Sturm-Liouville**.

Impondo as condições de contorno

$$\begin{cases} \alpha_1\varphi(a) + \alpha_2\varphi'(a) = 0 \\ \beta_1\varphi(b) + \beta_2\varphi'(b) = 0 \end{cases}$$

com  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ , não simultaneamente nulas, temos o sistema (ou problema) de Sturm-Liouville, que é dito *regular* no intervalo  $[a, b]$  se as funções  $p$  e  $r$  são estritamente positivas nesse intervalo.

Consideremos o operador diferencial linear:

$$L \equiv \frac{d}{dx} \left[ p \frac{d}{dx} \right] + q(x).$$

A equação de Sturm-Liouville pode ser escrita como:

$$L\varphi(x) + \lambda r(x)\varphi(x) \equiv 0.$$

Esse sistema trará soluções da equação diferencial ordinária de segunda ordem original, que serão as autofunções ortogonais correspondentes aos autovalores  $\lambda$ . É importante mencionar, então, algumas propriedades dos mesmos, dadas em forma de teoremas [2].

**Teorema 1.3.1.** *Todos os autovalores de um sistema de Sturm-Liouville regular são reais.*

**Teorema 1.3.2.** *Todo sistema de Sturm-Liouville regular gerará uma sequência infinita de autovalores reais  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$  os quais correspondem univocamente às autofunções, a menos de uma constante. Essas funções formam um sistema ortogonal completo em relação à função peso  $r(x)$ . Ainda mais, quando  $n \rightarrow \infty$ , então  $\lambda_n \rightarrow \infty$ .*

### 1.3. Método de separação de variáveis

**Teorema 1.3.3.** *Qualquer função  $f$  suave por pedaços em  $[a, b]$ , que satisfaça as condições de contorno do sistema regular de Sturm-Liouville, pode ser expandida numa série absoluta e uniformemente convergente [13]*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$$

onde os coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{\int_a^b r(x) f(x) u_n(x) dx}{\int_a^b r(x) u_n^2(x) dx}$$

com  $n = 1, 2, 3, \dots$

#### 1.3.4 Princípio da superposição

Sejam  $u_1, \dots, u_n$ , funções que constituem soluções de uma equação diferencial linear ordinária homogênea, então a combinação linear dessas funções

$$u = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \quad \text{com} \quad c_i = \text{constante}$$

também satisfaz a equação. Isso decorre do fato de serem lineares os operadores diferenciais sobre o conjunto das funções [2].

#### 1.3.5 Separação de variáveis

Ressaltamos que, combinando o método de separação de variáveis com a superposição de soluções bem como utilizando as condições de contorno impostas, construímos o chamado **método de Fourier** para resolução da equação a derivadas parciais linear e homogênea.

A fim de introduzirmos explicitamente o método de separação de variáveis [1], vamos discutir o problema associado à propagação de calor (distribuição de temperaturas) numa placa retangular. Este problema é descrito pela chamada equação de difusão (ou do calor) bidimensional (duas variáveis associadas às duas coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$ ):

$$k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

para  $u = u(x, y, t)$  e  $t > 0$ ,  $0 < x < b$  e  $0 < y < c$ .

### 1.3. Método de separação de variáveis

Para resolver a equação diferencial parcial de segunda ordem com três variáveis independentes, propomos a solução na forma  $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ . Introduzimos  $u = u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \equiv XYT$  na equação do calor e, utilizando a notação com linha, temos:

$$k(X''YT + XY''T) = XYT'.$$

Dividindo a equação anterior pelo produto  $kXYT$ , obtemos:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{T'}{kT}$$

ou ainda na forma

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \frac{T'}{kT}.$$

Como o membro da esquerda é independente de  $y$  e  $t$  e o membro da direita é independente de  $x$ , então cada membro deve ser igual a uma constante que é a chamada *constante de separação*. Portanto, igualamos ambos os membros à constante<sup>5</sup>  $-\lambda^2$ :

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \frac{T'}{kT} = -\lambda^2$$

de onde seguem-se as equações:

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \tag{1.12}$$

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{T'}{kT} + \lambda^2.$$

Com raciocínio análogo, introduzimos uma outra *constante de separação*  $-\mu^2$  na equação anterior de modo a obter:

$$\frac{Y''}{Y} = -\mu^2 \quad \text{e} \quad \frac{T'}{kT} + \lambda^2 = -\mu^2$$

ou ainda:

$$Y'' + \mu^2 Y = 0 \quad \text{e} \quad T' + k(\lambda^2 + \mu^2)T = 0. \tag{1.13}$$

Isto é, reduzimos a equação diferencial parcial em um conjunto de três equações diferenciais ordinárias, uma para cada variável independente.

---

<sup>5</sup>A constante, neste caso, foi escrita com um sinal de menos e um quadrado unicamente por conveniência de não carregarmos uma raiz quadrada bem como não termos que explicitar o respectivo problema de Sturm-Liouville.

### 1.3. Método de separação de variáveis

Passemos agora a resolver as equações diferenciais ordinárias a fim de determinar, através das condições de contorno a serem impostas, as constantes de separação.

As soluções gerais das equações diferenciais ordinárias são:

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x \quad (1.14)$$

$$Y(y) = c_3 \cos \mu y + c_4 \operatorname{sen} \mu y \quad (1.15)$$

$$T(t) = c_5 e^{-k(\lambda^2 + \mu^2)t} \quad (1.16)$$

onde  $c_1, c_2, c_3, c_4$  e  $c_5$  são constantes de integração.

A fim de efetuarmos os cálculos, impomos as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0, y, t) = 0 = u(b, y, t) \\ u(x, 0, t) = 0 = u(x, c, t) \end{cases}$$

de onde segue-se

$$\begin{cases} X(0) = X(b) = 0 \\ Y(0) = Y(c) = 0; \end{cases}$$

bem como a condição inicial

$$u(x, y, 0) = f(x, y).$$

Aplicando as condições de contorno na Eq.(1.14), temos:

$$c_1 = 0$$

bem como, para  $c_2 \neq 0$ ,

$$c_2 \operatorname{sen} \lambda b = 0 \Rightarrow \lambda b = m\pi \Rightarrow \lambda = \frac{m\pi}{b} \quad \text{com } m = 1, 2, \dots$$

Neste caso,  $\{\operatorname{sen} \frac{m\pi}{b}x\}$  é o conjunto ortogonal completo de autofunções com autovalores

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{b}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Analogamente, aplicando as condições de contorno na Eq.(1.15), obtemos:

$$c_3 = 0$$

### 1.3. Método de separação de variáveis

bem como, para  $c_4 \neq 0$ ,

$$c_4 \operatorname{sen} \mu x = 0 \Rightarrow \mu = \frac{n\pi}{c} \quad \text{com } n = 1, 2, \dots$$

Voltando no produto  $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ , obtemos:

$$u_{mn}(x, y, t) = A_{mn} e^{-k[(\frac{m\pi}{b})^2 + (\frac{n\pi}{c})^2]t} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y$$

onde  $A_{mn}$  é uma constante a ser determinada.

Utilizando o princípio da superposição, temos:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-k[(\frac{m\pi}{b})^2 + (\frac{n\pi}{c})^2]t} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y. \quad (1.17)$$

Impondo a condição inicial  $u(x, y, 0) = f(x, y)$ , podemos escrever

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y.$$

A expressão anterior é uma série de Fourier dupla. Para determinarmos os coeficientes  $A_{mn}$ , em analogia à série de Fourier, multiplicamos o duplo somatório pelo produto  $\operatorname{sen} (m\pi x/b) \operatorname{sen} (n\pi y/c)$  e integramos no retângulo  $0 \leq x \leq b$ ,  $0 \leq y \leq c$ . Temos<sup>6</sup>:

$$\int_0^c \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y \, dx \, dy = A_{mn} \int_0^c \int_0^b \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi}{b} x \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{c} y \, dx \, dy.$$

Calculando as integrais, obtemos:

$$\int_0^c \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y \, dx \, dy = \frac{bc}{4} A_{mn},$$

---

<sup>6</sup>Na verdade, devemos multiplicar por  $\operatorname{sen} (p\pi x/b) \operatorname{sen} (q\pi y/c)$  e usar a ortogonalidade, onde segue-se que somente  $p = m$  e  $q = n$  é que contribuem na integração de onde podemos, desde o início, omitir os somatórios.

### 1.3. Método de separação de variáveis

de onde segue-se para os coeficientes

$$A_{mn} = \frac{4}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b}x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c}y \, dx dy.$$

Em resumo, fornecida a condição inicial  $f(x, y)$ , determinamos os coeficientes  $A_{mn}$  e a solução do problema é dada por Eq.(1.17). Estudos mostram que esta solução existe e é única.

---

# FUNÇÕES HIPERGEOMÉTRICAS

---

Dentre as várias classes de funções ditas especiais, estão as funções hipergeométricas, conhecidas também como funções de Gauss<sup>1</sup>. Essas funções aparecem em nosso estudo como solução das equações hipergeométricas, cujo modelo é usado para representar as equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem com três pontos singulares regulares.

No presente capítulo, vamos estudar a equação hipergeométrica e suas soluções, a fim de, posteriormente, nos concentrarmos no caso particular da equação de movimento do pêndulo simples dada por

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta + \frac{g}{l}\text{sen}\theta = 0,$$

cuja solução exata nos leva ao período de oscilação do pêndulo simples, dado em termos de uma função hipergeométrica.

Essa última equação, apesar de se constituir numa equação diferencial ordinária de segunda ordem **não-linear**, descreve, de forma precisa, o movimento pendular. A aproximação  $\text{sen}\theta \approx \theta$ , validada para  $\theta$  pequeno, conduz a uma equação diferencial de segunda ordem linear, facilmente integrável e que fornece, por exemplo, como solução  $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t + (\alpha/\omega) \text{sen} \omega t$ , onde define-se  $\omega = \sqrt{g/l}$  e se impõem as condições iniciais  $\theta(0) = \theta_0$  e  $\theta'(0) = \alpha$  (ver [3]).

Neste estudo, partindo de uma equação diferencial ordinária, linear, de se-

---

<sup>1</sup>Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

gunda ordem e homogênea, introduzimos a chamada *equação de Riemann-Papperitz*<sup>2</sup> contendo *três pontos singulares regulares*: zero, um e infinito [18]. Assim, obtemos a equação hipergeométrica e, com isso, a partir do método de Frobenius<sup>3</sup>, obtemos as chamadas **funções hipergeométricas**. Como casos particulares dessas funções, consideramos as funções de Legendre<sup>4</sup>. Em seguida, estudamos as **funções hipergeométricas confluentes**, ou **funções de Kummer** (1810-1893), como soluções das equações hipergeométricas confluentes nas quais se estabelece a exigência de um adequado limite e obtém-se a confluência de dois pontos singulares da equação [3]. Como caso particular, estudamos as funções de Bessel<sup>5</sup>.

## 2.1 Método de Frobenius

Nesta seção, aplicando o método de Frobenius, vamos analisar todos os possíveis casos, envolvendo três parâmetros, que aparecem na equação hipergeométrica.

Começamos esse assunto apresentando e discutindo pontos importantes de uma equação diferencial ordinária, homogênea, linear e de segunda ordem,

$$P \frac{d^2}{dx^2} u(x) + Q \frac{d}{dx} u(x) + R u(x) = 0 \quad (2.1)$$

onde consideramos  $P = P(x)$ ,  $Q = Q(x)$  e  $R = R(x)$ , polinômios que não têm fatores comuns. Assim, para os pontos  $x \neq x_0$ , em que  $P(x_0) = 0$ , podemos dividir a equação acima por  $P(x)$ , obtendo:

---

<sup>2</sup>Johannes Erwin Papperitz (1857-1938).

<sup>3</sup>Fernand Georg Frobenius (1848-1917) foi estudante e, depois, professor na Universidade de Berlim. Mostrou como construir as soluções em série no entorno de pontos singulares regulares, em 1874. O seu trabalho mais importante, porém, foi na álgebra, onde apareceu como um dos precursores do desenvolvimento da teoria dos grupos.

<sup>4</sup>Adrien-Marie Legendre (1752-1833), autor de *Éléments de Géométrie*, obra de sucesso, com proposta pedagógica onde reordenou e simplificou as proposições de Euclides (360 a.C.- 295 a.C.). No entanto, seu maior trabalho está nos campos das funções elípticas e teoria dos números. As funções de Legendre aparecem pela primeira vez em 1784, na investigação sobre a atração de esferóides.

<sup>5</sup>Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), matemático e astrônomo alemão; entre seus feitos, sistematizou as funções de Bessel (descobertas por Bernoulli) em sua investigação sobre as perturbações planetárias, em 1824. Ficou famoso por ter feito a primeira determinação precisa (1838) da distância da terra a uma estrela.

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + p(x)\frac{d}{dx}u(x) + q(x)u(x) = 0 \quad (2.2)$$

onde  $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$  e  $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ .

Os pontos onde  $P(x)$  não se anula são chamados *pontos ordinários* da equação e, como  $P(x)$  é uma função contínua, então também esta função não se anula na vizinhança desses pontos. Assim,  $p(x)$  e  $q(x)$  são analíticas nessa vizinhança e podem ser expandidas em série de Taylor<sup>6</sup> [3]. Já o ponto  $x_0$  é chamado *ponto singular* se as funções  $p(x_0)$  e  $q(x_0)$  deixarem de ser analíticas e, ainda mais, se  $x_0$  é pólo simples de  $p(x)$  e pólo de ordem menor ou igual a dois de  $q(x)$ , então  $x_0$  é dito *ponto singular regular*. Caso contrário, é chamado de *ponto singular irregular* [4]. Note que estamos discutindo a equação definida em variável real, mas vale ressaltar que os resultados posteriormente obtidos no trato dessa equação também são válidos se a mesma for definida em  $\mathbb{C}$  [12]. Em se tratando da solução geral da Eq.(2.2), é provado que, em seus pontos singulares, os quais estão contidos no plano complexo,  $p(x)$  e  $q(x)$  possuem seus pólos, evidenciando aí uma relação entre as propriedades dessas funções e das soluções da equação.

Assim, tomemos uma equação diferencial ordinária homogênea com três pontos singulares regulares,  $x = x_1$ ,  $x = x_2$  e  $x = x_3$ , isso será possível se, e somente se,  $p(x)$  tem pólo simples e  $q(x)$  tem pólo menor ou igual a dois nesses pontos. Ainda condicionamos que o ponto no infinito seja um ponto ordinário dessa equação [2]. Para tanto, realizamos a mudança de variável  $x = 1/\xi$  onde

$$\frac{du}{dx} = -\xi^2 \frac{du}{d\xi},$$

e

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \xi^4 \frac{d^2u}{d\xi^2} + 2\xi^3 \frac{du}{d\xi}.$$

Substituindo essas últimas expressões na Eq.(2.2), temos:

$$\xi^4 \frac{d^2u}{d\xi^2} + (2\xi^3 - \xi^2 p(1/\xi)) \frac{du}{d\xi} + q(1/\xi) u = 0.$$

---

<sup>6</sup>Brook Taylor (1685–1731).

Logo, a equação diferencial toma a forma

$$\frac{d^2}{d\xi^2}u(\xi) + \bar{p}\frac{d}{d\xi}u(\xi) + \bar{q}u(\xi) = 0, \quad (2.3)$$

onde definimos

$$\bar{p}(\xi) = \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi^2}p(1/\xi) \quad (2.4)$$

e

$$\bar{q}(\xi) = \frac{1}{\xi^4}q(1/\xi). \quad (2.5)$$

Concluimos, com essa operação, que o infinito será um ponto ordinário se, e somente se,  $\bar{p}$  e  $\bar{q}$  forem analíticas em  $\xi = 0$ . Como  $p(x)$  possui pólo simples e  $q(x)$  pólo menor ou igual a dois nesses pontos, temos:

$$p(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} + D \quad (2.6)$$

e

$$q(x) = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} \left( \frac{E}{x-x_1} + \frac{F}{x-x_2} + \frac{G}{x-x_3} \right). \quad (2.7)$$

Substituindo a Eq.(2.6) na Eq.(2.4), obtemos:

$$\bar{p} = \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi^2} \left( \frac{A\xi}{1-\xi x_1} + \frac{B\xi}{1-\xi x_2} + \frac{C\xi}{1-\xi x_3} + D \right)$$

que resulta em

$$\bar{p} = \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi} \left( \frac{A}{1-\xi x_1} + \frac{B}{1-\xi x_2} + \frac{C}{1-\xi x_3} + \frac{D}{\xi} \right).$$

Substituindo a Eq.(2.7) na Eq.(2.5), temos:

$$\bar{q} = \frac{1}{\xi^4} \left[ \frac{\xi^3}{(1-\xi x_1)(1-\xi x_2)(1-\xi x_3)} \left( \frac{E\xi}{1-\xi x_1} + \frac{F\xi}{1-\xi x_2} + \frac{G\xi}{1-\xi x_3} \right) \right],$$

ou ainda, na forma

$$\bar{q} = \frac{1}{(1 - \xi x_1)(1 - \xi x_2)(1 - \xi x_3)} \left( \frac{E}{1 - \xi x_1} + \frac{F}{1 - \xi x_2} + \frac{G}{1 - \xi x_3} \right).$$

Analisando as duas últimas equações, concluímos que, diferente de  $\bar{q}$ , precisamos impor as condições  $D = 0$  e  $A + B + C = 2$  para termos  $\bar{p}$  analítica em  $\xi = 0$ . Essas conclusões definem  $p$  e  $q$ . Vamos, ainda, formatar as funções  $p$  e  $q$  do seguinte modo:

$$p(x) = \frac{F_i}{(x - x_i)} \quad \text{e} \quad q(x) = \frac{G_i}{(x - x_i)^2}.$$

Assim, podemos escrever:

$$F_i(x) = p(x)(x - x_i)$$

e, com isso, resulta

$$\begin{aligned} F_1(x_1) &= A \\ F_2(x_2) &= B \\ F_3(x_3) &= C \end{aligned}$$

Ou seja, essas funções são analíticas em  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , respectivamente. E com a segunda função temos:

$$G_i(x) = q(x)(x - x_i)^2,$$

onde obtemos:

$$\begin{aligned} G_1(x_1) &= \frac{E}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\ G_2(x_2) &= \frac{F}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \\ G_3(x_3) &= \frac{G}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}. \end{aligned}$$

Temos, assim, mais uma vez, funções analíticas em  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , respectivamente. Pela analiticidade de ambas as funções  $F_i$  e  $G_i$  em seus pontos  $x_i$ , podemos expandi-las em séries de Taylor em torno desses pontos, como segue:

$$F_i(x) = F_i(x_i) + F'_i(x_i)(x - x_i) + \frac{F''_i(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \dots \quad (2.8)$$

e

$$G_i(x) = G_i(x_i) + G'_i(x_i)(x - x_i) + \frac{G''_i(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \dots \quad (2.9)$$

A seguir, vamos aplicar o método de Frobenius a fim de encontrar as soluções da equação diferencial na forma de séries de Taylor em torno das singularidades  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ . Para tanto, supõem-se três soluções da forma

$$u_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_i)^{n+s}, \quad (2.10)$$

para  $i = 1, 2, 3$ .Assim, calculando as derivadas  $u'_i$  e  $u''_i$ , obtemos:

$$u'_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + s) (x - x_i)^{n+s-1}, \quad (2.11)$$

e

$$u''_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + s)(n + s - 1) (x - x_i)^{n+s-2}. \quad (2.12)$$

Substituindo as Eqs.(2.11), (2.12), (2.8) e (2.9) na Eq.(2.2) temos:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + s)(n + s - 1) (x - x_i)^{n+s-2} + \\ & \frac{F_i(x_i) + F'_i(x_i)(x - x_i) + \frac{F''_i(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \dots}{(x - x_i)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + s) (x - x_i)^{n+s-1} \\ & + \frac{G_i(x_i) + G'_i(x_i)(x - x_i) + \frac{G''_i(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \dots}{(x - x_i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_i)^{n+s} = 0. \end{aligned}$$

Para  $i = 1$ , temos a somatória acima estendida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & a_0 [s(s - 1) + F_1(x_1)s + G_1(x_1)] (x - x_1)^{s-2} + \\ & a_1 [(1 + s)s + F_1(x_1)(1 + s) + G_1(x_1)] (x - x_1)^{s-1} + \\ & a_0 [F'_1(x_1)s + G'_1(x_1)] (x - x_1)^{s-1} + \dots = 0 \end{aligned}$$

Como  $a_0 \neq 0$  e o coeficiente de  $(x - x_1)^{s-2}$  é nulo, obtemos a primeira equação

algébrica, chamada equação indicial:

$$s(s-1) + sF_1(x_1) + G_1(x_1) = 0,$$

ou ainda, na forma

$$s^2 + (F_1(x_1) - 1)s + G_1(x_1) = 0.$$

Considerando  $\alpha$  e  $\alpha'$  raízes dessa equação temos

$$\alpha + \alpha' = -(F_1(x_1) - 1) = 1 - A \Rightarrow A = 1 - \alpha - \alpha' \quad (2.13)$$

e

$$\begin{aligned} \alpha\alpha' = G_1(x_1) &= \frac{E}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \Rightarrow \\ E &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\alpha\alpha'. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Procedendo do mesmo modo para  $x = x_2$  e  $x = x_3$ , temos:

$$s^2 + (F_2(x_2) - 1)s + G_2(x_2) = 0$$

e

$$s^2 + (F_3(x_3) - 1)s + G_3(x_3) = 0.$$

Considerando  $\beta$  e  $\beta'$  raízes da equação indicial em torno de  $x_2$  tem-se

$$\beta + \beta' = 1 - B \Rightarrow B = 1 - \beta - \beta' \quad (2.15)$$

e

$$\beta\beta' = G_2(x_2) = \frac{F}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \Rightarrow F = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\beta\beta'. \quad (2.16)$$

Finalmente, procedendo de maneira análoga com  $\gamma$  e  $\gamma'$ , raízes da equação indicial para  $x_3$ , obtemos:

$$\gamma + \gamma' = 1 - C \Rightarrow C = 1 - \gamma - \gamma' \quad (2.17)$$

e

$$\gamma\gamma' = G_3(x_3) = \frac{G}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \Rightarrow G = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\gamma\gamma'. \quad (2.18)$$

Substituindo esses resultados na Eq.(2.2), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2u}{dx^2} + \left( \frac{1 - \alpha - \alpha'}{x - x_1} + \frac{1 - \beta - \beta'}{x - x_2} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{x - x_3} \right) \frac{du}{dx} + \\ & \left[ \frac{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\alpha\alpha'}{x - x_1} + \frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\beta\beta'}{x - x_2} + \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\gamma\gamma'}{x - x_3} \right] \times \\ & \times \frac{u}{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)} = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Esta equação é a chamada *equação de Riemann*<sup>7</sup>. Impôs-se, anteriormente, que o ponto  $x = \infty$  é ponto ordinário da equação diferencial dada e que, portanto,  $A + B + C = 2$ , o que leva à restrição  $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$  para as seis raízes das equações indiciais.

## 2.2 Equação hipergeométrica

A equação de Riemann tem solução  $u(x)$  com *nove* parâmetros diferentes: os três pontos singulares  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  com seus respectivos pares de raízes  $\{\alpha, \alpha'\}$ ,  $\{\beta, \beta'\}$  e  $\{\gamma, \gamma'\}$  ligados pela restrição  $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$ . Com uma mudança de variável dependente, podemos reduzir estes parâmetros a somente *três* parâmetros independentes. Essa transformação é da forma

$$u(x) = (x - x_1)^{-r}(x - x_2)^{-s}(x - x_3)^{-t}v(x)$$

onde  $r + s + t = 0$ . Com essa mudança, tem-se a alteração das raízes das equações indiciais nos três pontos singulares. Assim

$$v(x) = (x - x_1)^r(x - x_2)^s(x - x_3)^t u(x).$$

Ou seja, a solução  $v(x)$  nos mesmos pontos singulares  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  tem, agora, como raízes das equações indiciais  $\{\alpha + r, \alpha' + r\}$ ,  $\{\beta + s, \beta' + s\}$  e  $\{\gamma + t, \gamma' + t\}$ , respectivamente. Além disso, estabelecemos a mudança da variável independente

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{A}x + \tilde{B}}{\tilde{C}x + \tilde{D}}$$

---

<sup>7</sup>Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

onde  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  e  $\tilde{D}$  são constantes a serem determinadas. O propósito dessa mudança é deslocar as três singularidades  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  para os pontos padrões  $\tilde{x}_1 = 0$ ,  $\tilde{x}_2 = \infty$  e  $\tilde{x}_3 = 1$ . Escolhendo  $r = -\alpha$ ,  $s = \alpha + \gamma$  e  $t = -\gamma$ , a solução  $v(\tilde{x})$  nesses novos pontos terá pares de raízes indiciais dadas por  $\{0, \alpha' - \alpha\}$ ,  $\{\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta' + \gamma\}$  e  $\{0, \gamma' - \gamma\}$ , respectivamente. Temos:

$$u(x) = \left( \frac{x - x_1}{x - x_2} \right)^\alpha \left( \frac{x - x_3}{x - x_2} \right)^\gamma v(\tilde{x}).$$

Ainda mais, introduzindo os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  definidos por

$$a = \alpha + \beta + \gamma$$

$$b = \alpha + \beta' + \gamma$$

$$c = 1 + \alpha - \alpha'$$

e, lembrando que  $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$ , obtém-se a seguinte substituição das raízes indiciais de  $v(\tilde{x})$ :

$$\{0, \alpha' - \alpha\} \rightarrow \{0, 1 - c\}$$

$$\{\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta' + \gamma\} \rightarrow \{a, b\}$$

$$\{0, \gamma' - \gamma\} \rightarrow \{0, c - a - b\}$$

Assim, a Eq.(2.19) toma a forma

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 v}{d\tilde{x}^2} + \left[ \frac{c}{\tilde{x} - 0} + \lim_{\tilde{x}_2 \rightarrow \infty} \frac{1 - a - b}{\tilde{x} - \tilde{x}_2} + \frac{1 - c + a + b}{\tilde{x} - 1} \right] \frac{dv}{d\tilde{x}} + \\ & + \lim_{\tilde{x}_2 \rightarrow \infty} \left[ \frac{(0 - \tilde{x}_2)(0 - 1)0}{(\tilde{x} - 0)^2(\tilde{x} - \tilde{x}_2)(\tilde{x} - 1)} \right] v + \lim_{\tilde{x}_2 \rightarrow \infty} \left[ \frac{(\tilde{x}_2 - 0)(\tilde{x}_2 - 1)ab}{(\tilde{x} - 0)(\tilde{x} - \tilde{x}_2)^2(\tilde{x} - 1)} \right] v + \\ & + \lim_{\tilde{x}_2 \rightarrow \infty} \left[ \frac{(1 - 0)(1 - \tilde{x}_2)0}{(\tilde{x} - 0)(\tilde{x} - \tilde{x}_2)(\tilde{x} - 1)^2} \right] v = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

que resulta em

$$\frac{d^2v}{d\tilde{x}^2} + \left[ \frac{c}{\tilde{x}} + \frac{1-c+a+b}{\tilde{x}-1} \right] \frac{dv}{d\tilde{x}} + \left[ \frac{ab}{\tilde{x}(\tilde{x}-1)} \right] v = 0.$$

Ou ainda, na forma

$$\tilde{x}(1-\tilde{x}) \frac{d^2v}{d\tilde{x}^2} + [c - (a+b+1)\tilde{x}] \frac{dv}{d\tilde{x}} - abv = 0. \quad (2.21)$$

Mostramos, portanto, que uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, com três pontos singulares, pode ser conduzida a uma equação diferencial da forma

$$x(1-x) \frac{d^2u}{dx^2} + [c - (a+b+1)x] \frac{du}{dx} - abu = 0, \quad (2.22)$$

dita *equação hipergeométrica*, cuja solução denotamos por

$$u(x) = {}_2F_1(a, b; c; x). \quad (2.23)$$

Procurando uma solução na forma de série de potências em torno da origem ( $x = 0$ ), dada por

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} \quad (2.24)$$

e, sabendo que ela é, nesse ponto, analítica com raízes indiciais  $s = 0$  e  $s = 1 - c$ , obtém-se o seguinte [3]:

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(n+1)} x^n. \quad (2.25)$$

Usamos a definição da função gama, denotada por  $\Gamma$  (ver Apêndice), também conhecida como função de Euler (1707-1783) de segunda espécie [16]:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{e} \quad \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)} = n(n+1)(n+2) \cdots (n+k-1).$$

Para chegar a este resultado, substituímos a série dada pela Eq.(2.24) na Eq.(2.22) e consideramos  $a_0 = 1$ . Se a raiz  $1 - c$  não é inteira [17], obtém-se uma segunda solução linearmente independente da equação hipergeométrica dada por

$$u_2(x) = x^{1-c} {}_2F_1(b - c + 1, a - c + 1; 2 - c; x). \quad (2.26)$$

Observe que, se considerarmos  $a = 1$  e  $b = c$  na solução (2.25) obtemos o seguinte resultado:

$${}_2F_1(1, b; b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

que nada mais é que a conhecida série geométrica. Em razão disso, a série  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  é dita *série hipergeométrica*.

## 2.3 Funções de Legendre

Nesta seção, vamos apresentar um caso particular da função hipergeométrica, as chamadas funções de Legendre [17].

A equação diferencial para as funções de Legendre associadas é dada por

$$(1 - x^2) \frac{d^2u}{dx^2} - 2x \frac{du}{dx} + \left[ v(v + 1) - \frac{\mu^2}{1 - x^2} \right] u = 0, \quad (2.27)$$

com  $\mu, v \in \mathbb{R}$  e  $u = u(x)$ .

Aqui, estamos interessados na clássica equação de Legendre, obtida a partir da Eq.(2.27) para  $\mu = 0$ .

Vamos obter a equação de Legendre a partir da mudança de variável independente  $x = \frac{1-t}{2}$ , introduzida na Eq.(2.22). Logo,

$$(1 - t^2) \frac{d^2u}{dt^2} + [a + b + 1 - 2c - (a + b + 1)t] \frac{du}{dt} - abu = 0.$$

Na Eq.(2.22) tínhamos  $0 < x < 1$ , já nessa última equação, como consequência da mudança de variável, obtemos  $-1 < t < 1$ .

Considerando  $a = -l$ ,  $b = l + 1$  e  $c = 1$ , temos:

$$(1 - t^2) \frac{d^2 u}{dt^2} - 2t \frac{du}{dt} + l(l + 1)u = 0, \quad (2.28)$$

que é exatamente a Eq.(2.27) com  $\mu = 0$  e  $\nu = l$  (com  $l$  inteiro não negativo), cuja solução é dada por

$$u(t) = AP_n(t) + BQ_n(t),$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes arbitrárias e  $P_l(t)$  e  $Q_l(t)$  são os clássicos polinômios de Legendre e as funções de Legendre de segunda espécie, respectivamente.

Chegamos a essa solução do seguinte modo: primeiro expandindo em série a solução em torno de  $t = 0$  (sem perda de generalidade)

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i.$$

Depois, substituímos essa série na Eq.(2.28) obtendo a relação de recorrência:

$$c_{i+2} = \frac{(i + n + 1)(i - n)}{(i + 1)(i + 2)} c_i.$$

Logo,

$$u = c_0 \left[ 1 - n(n + 1) \frac{t^2}{2!} + n(n + 1)(n + 2) \frac{t^4}{4!} - \dots + \dots \right] + c_1 \left[ t - (n - 1)(n + 2) \frac{t^3}{3!} + (n - 1)(n + 2)(n - 3)(n + 4) \frac{t^5}{5!} - \dots + \dots \right].$$

O desenvolvimento desses polinômios leva à solução

$${}_2F_1 \left( -n, n + 1; 1; \frac{1 - t}{2} \right) = P_n(t) = \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^r \frac{(2n - 2r)!}{2^n (n - r)! r!} \frac{t^{n-2r}}{(n - 2r)!},$$

onde  $[n/2]$  é definido como o maior inteiro menor ou igual a  $n/2$ , enquanto  ${}_2F_1(-n, n+1; 1; \frac{1-t}{2})$  é a função hipergeométrica.

Os polinômios de Legendre podem também ser obtidos pela expressão

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \left( \frac{d}{dt} \right)^n (t^2 - 1)^n$$

conhecida como **fórmula de Rodrigues** (1794-1851). Impondo a condição  $P_l(1) = 1$ , para todo  $l$ , obtemos para os primeiros polinômios:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1, \\ P_1(t) &= t, \\ P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \\ P_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t). \end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de Rodrigues e integração por partes, obtemos a relação de ortogonalidade para os polinômios de Legendre [13]

$$\int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Dada a equação de Legendre representada pela forma da Eq.(2.28), sua segunda solução linearmente independente, denotada por  $Q_n(t)$ , é chamada *função de Legendre de segunda espécie* e é dada por

$$Q_n(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t - \eta)^{-1} P_n(\eta) d\eta$$

onde os primeiros são:

$$\begin{aligned} Q_0(t) &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{t+1}{t-1} \right), \\ Q_1(t) &= \frac{t}{2} \ln \left( \frac{t+1}{t-1} \right) - 1, \\ Q_2(t) &= \frac{1}{4} (3t^2 - 1) \ln \left( \frac{t+1}{t-1} \right) - \frac{3}{2}t, \\ Q_3(t) &= \frac{1}{4} (5t^3 - 3t) \ln \left( \frac{t+1}{t-1} \right) - \frac{5}{2}t^2 + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Enfim, considerando a Eq.(2.27) que é a equação diferencial de Legendre associada, podemos concluir que suas soluções, na forma  $u(x) = (1-t^2)^{m/2} f(t)$ , são obtidas por diferenciação a partir de  $P_n(t)$  e  $Q_n(t)$  e dadas por

$$\begin{aligned} P_n^m(t) &= (1-t^2)^{m/2} (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} P_n(t) \\ Q_n^m(t) &= (1-t^2)^{m/2} (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} Q_n(t) \end{aligned}$$

ditas *funções de Legendre associadas de primeira e segunda espécie*, respectivamente [19].

## 2.4 Equação hipergeométrica confluyente

Considerando a equação hipergeométrica dada por Eq.(2.22), impomos a substituição de variável  $x = \frac{t}{b}$  e tomamos o limite  $b \rightarrow \infty$ , obtendo com isso:

$$t \frac{d^2 u}{dt^2} + (c-t) \frac{du}{dt} - au = 0, \quad u = u(t). \quad (2.29)$$

Assim, a equação que antes tinha três pontos singulares passa a ter somente dois: em 0, tem-se uma singularidade regular e, em  $\infty$ , uma singularidade irregular cuja confluência foi gerada pelo limite tomado na equação. Deste modo, a Eq.(2.29) recebe o nome de *equação hipergeométrica confluyente*, também conhecida pelo nome de *equação de Kummer*, sendo uma solução dada

por

$$u_1(x) = {}_1F_1(a; c; x) = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{t}{b}\right) \equiv {}_1F_1(a; c; x),$$

onde  ${}_1F_1(a; c; x)$  é chamada *função hipergeométrica confluyente* ou *função de Kummer*, podendo ser obtida numa representação em série do tipo Frobenius

$${}_1F_1(a; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) x^n}{\Gamma(c+n) n!}.$$

Para  $c \neq 0, -1, -2, \dots$  temos a segunda solução linearmente independente da E.(2.29) dada por

$$u_2(x) = x^{1-c} {}_1F_1(1+a-c; 2-c; x).$$

## 2.5 Funções de Bessel

Nesta seção, mais uma vez, vamos apresentar um caso particular das funções hipergeométricas confluentes, as clássicas funções de Bessel.

A usual equação de Bessel é dada por:

$$x^2 \frac{d^2 \omega}{dx^2} + x \frac{d\omega}{dx} + (x^2 - v^2) \omega = 0, \quad \omega = \omega(x)$$

cuja solução em série do tipo Frobenius é dada por

$$J_v(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{v+2m}}{m! \Gamma(v+m+1)}.$$

As funções de Bessel constituem caso particular das funções hipergeométricas confluentes dadas por

$${}_1F_1\left(v + \frac{1}{2}; 2v + 1; -2ix\right) = \Gamma(1+v) e^{ix} \left(\frac{x}{2}\right)^{-v} J_v(x).$$

Asseguramos, entre outras, as seguintes relações de recorrência para as funções de Bessel

$$J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x) = \frac{2v}{x} J_v(x),$$
$$J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x) = 2J'_v(x).$$

Como não envolve a derivada, a primeira relação é conhecida pelo nome de *relação de recorrência pura*.

Enfim, apresentamos a chamada *função geratriz* para as funções de Bessel

$$\exp \left[ \frac{x}{2} \left( \eta - \frac{\alpha^2}{\eta} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\eta}{\alpha} \right)^n J_n(\alpha x)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro [19].

---

# OSCILADORES HARMÔNICOS

---

Desenvolver um modelo matemático que se ajuste a um fenômeno físico é determinante quando se deseja fazer previsões a respeito desse fenômeno; entre os inúmeros casos bem sucedidos está o oscilador harmônico. No mundo real, muitos são os exemplos de oscilações: aquelas geradas nas cordas de um violino, em um pistão, em uma mola, no relógio de pêndulo, num balanço de criança, nas partículas de ar que geram um som, nos campos elétricos e magnéticos cuja propagação produzem a luz, dentre outros.

Atentos a esses movimentos oscilatórios, o visionário Galileu<sup>1</sup> empenhou-se em utilizá-los a fim de conseguir uma medição muito requerida em sua época: o tempo. Ele verificou, experimentalmente, que o intervalo entre as oscilações de um pêndulo era o mesmo, independente da amplitude do movimento, mas não do comprimento da haste do pêndulo, conforme vamos estudar com detalhes mais adiante.

## 3.1 Movimento harmônico simples

Oscilação é um movimento que reproduz periodicamente sua trajetória apresentando sentido regularmente invertido e, portanto, ocupando alternadamente a mesma posição com mesma velocidade e aceleração. Os exemplos ilustrativos mais explorados no estudo de oscilações são os pêndulos, corpos suspensos por molas e o circuito elétrico.

---

<sup>1</sup>Galileu Galilei (1564-1643).

### 3.1. Movimento harmônico simples

As funções trigonométricas periódicas, seno e cosseno, apresentam-se como recurso matemático para a expressão dessas oscilações, quando essas são pequenas; por isso, tais movimentos são chamados movimentos harmônicos simples (MHS).

Vejam como isso acontece:

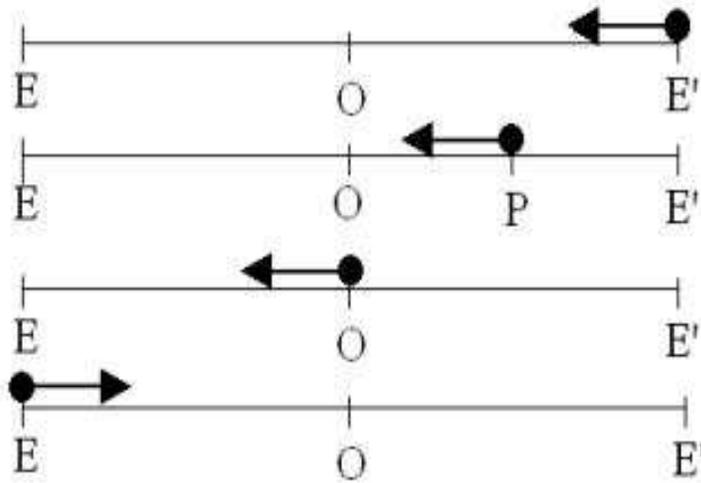


Figura 3.1: Movimento harmônico simples.

Na Figura 3.1, o segmento de reta  $EE'$  representa a trajetória de uma partícula em MHS. Consideremos  $O$ , ponto médio de  $EE'$  e origem de um eixo  $x$ , a posição de equilíbrio do movimento.

Nesse movimento, desprezando a força de amortecimento, chamamos a distância da partícula à origem de *elongação*, os pontos  $E$  e  $E'$ , de *pontos de inversão*. Neles, a elongação é máxima caracterizando a *amplitude* do movimento.

Os sentidos são mostrados pelas setas da Figura 3.1. O tempo necessário para essa partícula passar novamente pelo mesmo ponto da trajetória, ou seja, completar uma oscilação, é chamado de período e denotado por  $T$ . A inversa do período (denotada por  $f$ ) é a frequência, ou seja,  $f = \frac{1}{T}$  que informa o número de vezes que a partícula passa por um mesmo ponto da trajetória em uma unidade de tempo, geralmente o segundo.

### 3.1. Movimento harmônico simples

Fazendo dessa trajetória o diâmetro de uma circunferência de raio igual à amplitude do movimento, conforme vemos na Figura 3.2, podemos agora visualizar uma determinada posição P da partícula como a projeção de um ponto C da circunferência no seu diâmetro.

Assim, o movimento circular uniforme (MCU) ao longo da circunferência

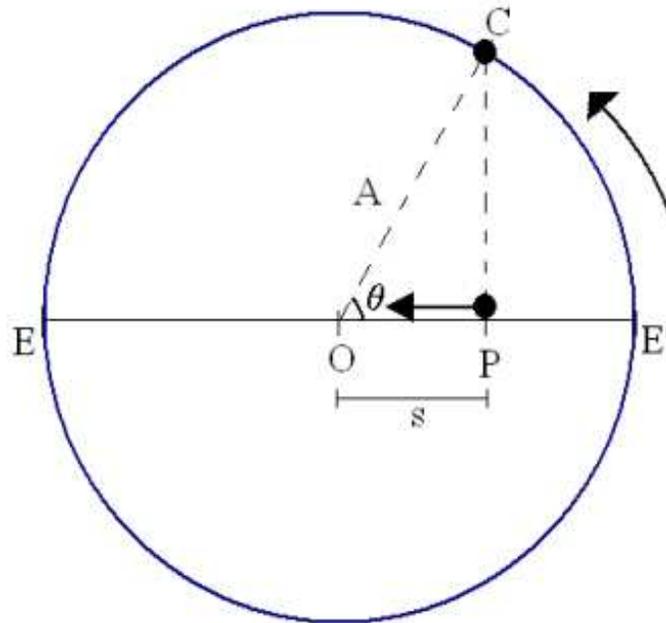


Figura 3.2: Movimento circular uniforme.

gera o MHS de P no diâmetro da mesma.

Consideramos as nomenclaturas:  $s :=$  elongação (medida de OP);  $A :=$  amplitude (medida de OE) e  $\theta :=$  ângulo  $C\hat{O}P$ .

Temos a equação da elongação dada por

$$s = A \cos \theta. \quad (3.1)$$

Sabendo que a velocidade angular  $\omega$  de C é

$$\omega = \frac{\theta}{t} \quad (3.2)$$

### 3.1. Movimento harmônico simples

onde  $t$  é o tempo que  $C$  leva para percorrer o ângulo  $\theta$ , de outra forma

$$\theta = \omega t. \quad (3.3)$$

Substituindo este resultado na Eq.(3.1), temos:

$$s = A \cos(\omega t). \quad (3.4)$$

O ângulo  $\varphi$  do início do movimento, isto é, em  $t = 0$ , é denominado *ângulo de fase*. Assim, a equação anterior se torna

$$s = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.5)$$

Essa é uma expressão para a equação de deslocamento de uma partícula em *movimento harmônico simples*.

Em se tratando de velocidade, podemos concluir, com o modelo acima, que, sendo  $v_l$  a velocidade linear de  $C$ , ela é da forma:

$$v_l = \frac{2\pi A}{T}. \quad (3.6)$$

Como a velocidade angular é periódica, temos:

$$\omega t + 2\pi = \omega(t + T) \quad (3.7)$$

de onde segue-se

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (3.8)$$

Da última equação e da Eq.(3.6) obtemos:

$$v_l = \omega A \quad (3.9)$$

Sendo  $\dot{s} = v$  a velocidade linear de  $P$ , ou seja,  $\frac{ds}{dt} = v(t)$ , ela será dada por

$$\dot{s} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.10)$$

A velocidade  $\dot{s}$  é a componente horizontal de  $v_l$ . Assim, a taxa de variação dessa velocidade, ou seja, a aceleração, será dada por

$$\ddot{s} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.11)$$

Logo, utilizando a Eq.(3.5), podemos escrever:

$$a(t) = -\omega^2 s \quad (3.12)$$

onde  $a(t) = \ddot{s} = \frac{d^2 s}{dt^2}$ .

Assim, obtemos a equação diferencial equivalente:

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0 \quad \text{com} \quad s = s(t). \quad (3.13)$$

Essa última equação diferencial de segunda ordem caracteriza um MHS.

## 3.2 Equação de Lagrange

A busca de um método geral e sucinto que descrevesse os sistemas mecânicos levou **Lagrange**<sup>2</sup> a desenvolver uma formulação alternativa que, posteriormente, inspirou **Hamilton**<sup>3</sup> em seu trabalho.

Dentre as obras de Lagrange está a monumental *Mécanique Analytique* (1788), que Hamilton descreveu como um "poema científico" e que contém as equações gerais de movimento de um sistema dinâmico, conhecidas hoje como *equações de Lagrange*. A mecânica lagrangiana é constituída de um sistema arbitrário de coordenadas generalizadas, permitindo escolhas apropriadas para diferentes configurações de sistemas de partículas. Além disso, dispensa variáveis redundantes, ou seja, aquelas envolvidas em forças que não geram trabalho. Com essas vantagens sobre a mecânica newtoniana, a lagrangiana constitui ferramenta importante da teoria da relatividade.

---

<sup>2</sup>Joseph Louis Lagrange (1736-1813) estudou em Turim e foi professor de matemática da academia militar local. Quando Euler deixou Berlim, Frederico, o Grande, escreveu a Lagrange dizendo que "o maior dos reis da Europa" desejava ter em sua corte "o maior matemático da Europa" e Lagrange aceitou o convite e ocupou o lugar de Euler por vinte anos. Alguns anos depois de deixar Berlim, aceitou uma cátedra na recém-criada Escola Normal e, posteriormente, Escola Politécnica de Paris, cidade onde ele se revoltou muito com as atrocidades do regime de terror que se seguiu à Revolução Francesa.

<sup>3</sup>William Rowan Hamilton nasceu em Dublin em 1805 e foi um garoto prodígio. Com quinze anos começou a se interessar pela matemática e, com vinte e dois, ainda aluno de graduação, foi indicado astrônomo real da Irlanda, diretor do Observatório de Dunsink e professor de astronomia da universidade, prognosticou a refração cônica em cristais biaxiais (comprovado posteriormente pelos físicos experimentais). Hamilton deu origem à álgebra dos quatérnios e publicou *Treatise on Quaternions* mas faleceu em 1865, na mesma cidade em que nasceu, antes de publicar uma obra ampliada desse último trabalho.

Como vimos na seção anterior, a mecânica newtoniana faz uso da força e da aceleração vetorial para descrever o espaço de configuração do sistema, a lagrangiana, por sua vez, lida com as funções escalares  $T$  e  $V$  que são energia cinética e a energia potencial, respectivamente.

Interessados em estudar as equações de movimento dos sistemas mecânicos, em particular dos osciladores harmônicos, vamos, primeiramente entender as equações de Lagrange sob a ótica do princípio de Hamilton e como ela se aplica a esses fenômenos físicos. Prosseguindo em nossos estudos, apresentamos as equações de Hamilton-Jacobi<sup>4</sup> exemplificando sua aplicação no problema do pêndulo simples.

### 3.2.1 Princípio de Hamilton

Se considerarmos sistemas inerciais, onde as forças são conservativas, conseguimos sob a ótica do princípio de d'Alembert<sup>5</sup>, que considera a "força efetiva invertida" [11], deduzir as equações de Lagrange. No entanto, apresentamos uma formulação mais geral da lei do movimento dos sistemas mecânicos dada pelo **princípio de Hamilton, ou princípio da ação mínima**.

Considerando um sistema de partículas, podemos descrever suas posições e suas mudanças com o tempo (velocidade), fazendo uso, por exemplo, do sistema cartesiano que caracteriza o *espaço de configuração do sistema*. No entanto, muitas vezes, o uso das coordenadas dos eixos cartesianos na descrição do sistema gera equações de movimento complexas de se resolver. Em alguns fenômenos, é mais conveniente usar as coordenadas polares, em outros, as esféricas e assim por diante, dependendo da geometria associada ao

---

<sup>4</sup>Jacobi nasceu em Potsdam em 1804. Estudou na Universidade de Berlim, onde se doutorou em 1825. Dois anos mais tarde era indicado professor extraordinário em Königsber; mais dois anos e era guindado à condição de professor permanente. Em 1842, com uma pensão do governo da Prússia, renuncia à sua cadeira em Königsber e transfere-se para Berlim, onde viveu até sua morte prematura em 1851.

<sup>5</sup>Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) foi um matemático e físico francês que desenvolveu as primeiras fases do Cálculo, formalizou a nova ciência da mecânica e foi o editor de ciência da *Enciclopedia de Diderot*. Em 1741 foi admitido pela Academia de Ciência de Paris onde trabalhou pelo resto de sua vida. Ele foi um dos primeiros a entender a importância de funções e o conceito de limites para o cálculo, e também abriu caminho para o uso de equações diferenciais na Física. Ajudou também a solucionar a controvérsia em física sobre a conservação de energia cinética melhorando a definição de Newton de força no seu *Traite de dynamique*, que articula o princípio de d'Alembert de mecânica. Ele também estudou hidrodinâmica, a mecânica de corpos rígidos, e o problema de três-corpos em astronomia.

problema [1]. Queremos, agora, respeitar a diversidade de configurações e tratá-las sem restringir a escolha conveniente de variáveis e, ainda, pensar no número de variáveis que determinam a posição da partícula. Para tanto, é imprescindível supor que esse número não necessariamente se iguale à dimensão do espaço, ou seja, dado um espaço de dimensão  $s$ , a partícula pode ou não pertencer a uma hipersuperfície de dimensão  $n$  desse espaço. Assim, temos  $n$  variáveis independentes, denotadas por  $q_1, q_2, \dots, q_n$  que definem univocamente a posição das partículas, nomeadas *coordenadas generalizadas*. Por conseguinte, descrever um sistema mecânico, é determinar as posições das partículas em dois momentos: num instante presente  $t = t_1$  e no seguinte  $t = t_2$ , necessitando para isso da posição inicial do sistema, dada pelas coordenadas generalizadas, e da velocidade do mesmo, sendo esta determinada pelas derivadas dessas coordenadas que chamamos de *velocidades generalizadas*.

Pelo princípio de Hamilton, um determinado sistema caracteriza-se por uma função

$$L(q, \dot{q}, t)$$

onde  $q$  é a  $n$ -upla  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  associada à posição da partícula e  $\dot{q}$  se refere à  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ , lista que determina as velocidades. Suponhamos que, entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ , o sistema move-se de tal modo que a integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (3.14)$$

resulte em um valor menor possível [10]. Esse é o *princípio de Hamilton*, inspirado no princípio da ação mínima de Maupertuis (1698-1759), que afirma que "a quantidade de ação necessária para que qualquer mudança seja feita pela natureza é sempre a menor possível". A função  $L$  é dita *função de Lagrange* e a integral acima chamamos de *ação reduzida* ou, simplesmente, *ação*. Suponhamos, para efeitos práticos, um sistema com um só grau de liberdade, em que  $q = q(t)$  é a função que minimiza  $S$ . Sendo assim, tomando a função  $\bar{q}$  dada por

$$\bar{q}(t) = q(t) + \delta q(t)$$

onde  $\delta q(t)$ , chamada *variação da função*, é uma pequena função em todo o intervalo de tempo de  $t = t_1$  até  $t = t_2$  e que se anula nesses pontos, isto é,  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ . Obviamente,  $S$  cresce quando substituimos  $q(t)$  por  $\bar{q}(t)$ .

Assim, a variação de  $S$  é dada por

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt.$$

Desenvolvendo em série essa diferença, sob a integral, sabemos que os termos de primeira ordem se anulam (condição de mínimo de  $S$ ), segundo as potências de  $\delta q$  e  $\delta \dot{q}$ . Assim, o *princípio da ação mínima* pode ser escrito na forma:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0.$$

Fazendo a variação, temos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0.$$

Efetuada a integração por partes na segunda parcela obtemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0.$$

Para que essa integral seja nula, devemos ter o integrando nulo assim:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0.$$

Essas equações geradas são conhecidas como *equações de Lagrange*, as quais são equações diferenciais de segunda ordem em relação à  $q(t)$  e, ao relacionar posição, velocidade e aceleração de um sistema mecânico de partículas, constituem as chamadas **equações de movimento**. Generalizando, se houver vários graus de liberdade, teremos  $n$  equações diferenciais com o mesmo formato que a anterior, dadas por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \text{com} \quad k = 1, 2, \dots$$

Dadas as condições iniciais de um sistema físico, podemos determiná-lo completamente, ou seja, encontrar as funções  $q_k$ . O movimento pode ser representado geometricamente por uma curva no espaço de configuração com coordenadas  $q_k$ .

### 3.2.2 Função de Lagrange

A função  $L(q, \dot{q}, t)$  é conhecida como *função de Lagrange*. Um sistema mecânico inercial, ou seja, aquele onde o tempo é uniforme e o espaço é isotrópico, é dito fechado se há interação entre suas partículas, podendo esta interação ser através de barras, fios, dobradiças, etc. Quando nessas ligações (vínculos) não existir resistência (atrito, por exemplo), a função de Lagrange, ao descrever tal sistema, é livre das variáveis que só aparecem por estarem envolvidas em tais pontos de contato. Isso ocorre porque as mesmas só interferem na configuração geométrica do sistema. Com isso, a teoria lagrangiana constitui-se numa modelagem econômica de problemas físicos concretos, como será exemplificado mais adiante.

Assim, considerando uma partícula de massa  $m$  com posição  $r$  e velocidade  $v$ , a função de Lagrange é constituída por duas partes: uma dependente do módulo da velocidade da partícula, a qual constitui a energia cinética do sistema, e outra dependente somente da posição da mesma. Deste modo, a função de Lagrange é dada por

$$L(r, v, t) = T(v) - V(r) \quad (3.15)$$

onde  $T(v) = \frac{mv^2}{2}$ .

Usando as equações de Lagrange, temos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial r}.$$

Utilizando a lagrangiana da Eq.(3.15), obtemos:

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial V}{\partial r},$$

ou ainda, na forma,

$$F = - \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Esta é uma equação de movimento newtoniana. Assim, constatamos que as equações de Lagrange não se constituem numa outra vertente da teoria física mecânica, mas numa forma alternativa de expressar suas leis e obter equações de movimento.

Desta forma, voltando às coordenadas generalizadas, a função de Lagrange é dada por

$$L(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - V(q)$$

onde  $T(\dot{q}) = m\dot{q}^2/2$ .

É oportuno constatar, aqui, um resultado interessante que, primeiro, exemplifica tal definição e, em seção posterior, aplica-se à lei da conservação de energia.

Considerando a definição acima e derivando em relação a  $\dot{q}$ , obtemos:

$$\sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}.$$

Pelo teorema de Euler [11] temos:

$$\sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T.$$

Logo, temos a seguinte relação entre a função de Lagrange e a energia cinética:

$$\sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 2T. \quad (3.16)$$

### O pêndulo simples e a lagrangiana

A exemplo de uma das aplicações da teoria de Lagrange, vamos formular a equação de movimento do pêndulo simples [7].

O pêndulo simples é um sistema constituído de uma partícula de massa  $m$  presa a uma das extremidades de uma haste de comprimento fixo  $l$  e massa desprezível; essa haste tem outra extremidade fixa, conforme Figura 3.3.

Na configuração newtoniana, haveria necessidade de um vetor de posição  $r$  com duas coordenadas  $r_x$  e  $r_y$ , entretanto, o ângulo  $\theta$  que a haste do pêndulo faz com a vertical define perfeitamente a posição do mesmo, uma vez que o comprimento  $l$  é suposto constante. Assim, a trajetória da partícula é dada por

$$s = l\theta,$$

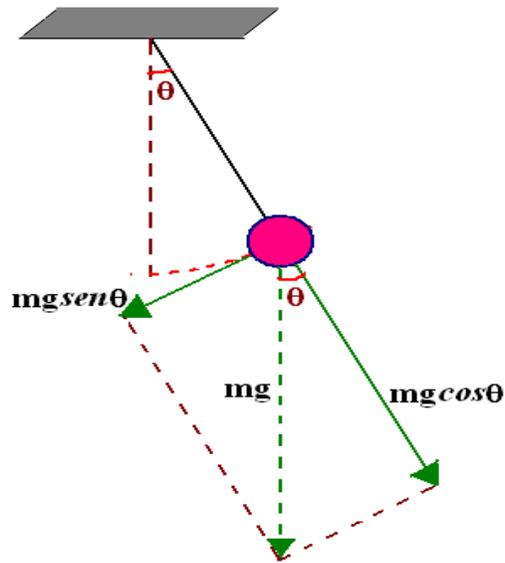


Figura 3.3: Pêndulo simples.

de onde obtemos para a velocidade linear da partícula

$$v = l\dot{\theta}.$$

Com isso temos a energia cinética do sistema dada por

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2},$$

enquanto que a energia potencial é

$$V = - \int_{\theta_s}^{\theta} F(\theta)d\theta = - \int_{\theta_s}^{\theta} (mg\text{sen}\theta)ld\theta = - \int_{\theta_s}^{\theta} mgl\text{sen}\theta d\theta.$$

Considerando  $\theta_s = \pi/2$ , obtemos:

$$V = -mgl \cos \theta.$$

Um gráfico da energia potencial é mostrado na Figura 3.4.

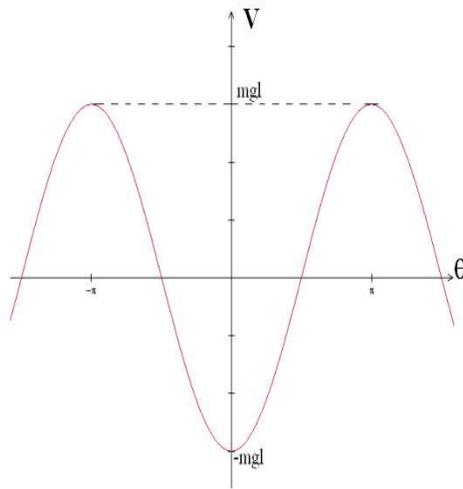


Figura 3.4: Energia potencial para um pêndulo simples.

Inseridas as fórmulas da energia cinética e potencial na função de Lagrange, temos:

$$L = T - V = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl \cos \theta.$$

Usando a equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) - \frac{dL}{d\theta} = 0$$

para a lagrangiana, dada acima, obtemos:

$$\frac{d}{dt} (ml^2\dot{\theta}) + mgl \sin \theta = 0,$$

o que resulta em

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (3.17)$$

Note-se que, para  $\theta$  muito pequeno, temos  $\sin \theta \approx \theta$  e, com isso, o pêndulo passa a se constituir num oscilador harmônico com frequência dada por  $\omega = \sqrt{g/l}$ . Provamos isso com mais elegância e rigor no próximo capítulo.

## 3.3 Equações de Hamilton

### 3.3.1 Teoria de Hamilton

Transitando da formulação lagrangiana para a hamiltoniana, ganhamos um método geral de expressar as equações dos sistemas mecânicos. Nele obtemos, agora,  $2n$  equações diferenciais de primeira ordem para  $2n$  variáveis independentes para expressar as equações de movimento. O procedimento envolvido em tal transformação constitui a teoria de Hamilton-Jacobi, que será tratada neste tópico. Usamos para tanto a transformação de Legendre e o teorema de Euler das funções homogêneas [11].

No lugar das velocidades generalizadas  $\dot{q}_k$ , usamos coordenadas  $p_k$ , as quais definimos do seguinte modo:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{com } k = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

onde  $p_k$  recebe o nome de *momento canônico conjugado a  $q_k$* . As variáveis  $q$  e  $p$  são chamadas *variáveis canônicas*, representadas pela  $2n$ -upla  $(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$  e o espaço onde estão definidas é chamado *espaço de fase*.

A função de Hamilton, definida a partir da função de Lagrange, é dada pela seguinte expressão:

$$H(q, p, t) = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - L(q, \dot{q}, t), \quad (3.19)$$

que representa a energia total de um sistema conservativo, como será visto na próxima seção. Estando somente em função de  $q$  e  $p$ , o diferencial da mesma é dado por

$$dH = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (3.20)$$

Usando a definição (3.19), o mesmo diferencial pode ser expressado por

$$dH = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k dp_k + \sum_{k=1}^n p_k dq_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} dq_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (3.21)$$

Utilizando a definição (3.18), obtemos:

$$dH = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k dp_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (3.22)$$

A equação de Lagrange fornece

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad (3.23)$$

o que permite escrever a Eq.(3.22) na forma

$$dH = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k dp_k - \sum_{k=1}^n \dot{p}_k dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (3.24)$$

Comparando essa última equação com a Eq.(3.20), obtemos:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \text{e} \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad (3.25)$$

que são as conhecidas *equações de Hamilton* ou *equações canônicas de Hamilton*, as quais englobam as  $2n$  equações diferenciais de primeira ordem, que são equivalentes às equações de Lagrange de segunda ordem.

Pela definição (3.19), obtemos, ainda, a seguinte equação adicional:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.26)$$

Assim, podemos concluir que, quando a dependência do tempo não é explícita, temos:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

de onde segue-se que a hamiltoniana é uma constante de movimento, o que mostra que a conservação de energia está associada à translação temporal.

## Energia

Um resultado interessante e pertinente no nosso trabalho, demonstrado a seguir, é que, para os fenômenos físicos que nos interessam, aqueles onde as

forças são conservativas, a hamiltoniana representa a energia total do sistema. Comparando a relação Eq.(3.16) e a definição (3.19), temos:

$$H = 2T - L = 2T - (T - V),$$

de onde segue-se

$$H = T + V = E.$$

### O pêndulo simples e a hamiltoniana

Usando o momento generalizado que é da forma

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta},$$

a energia cinética pode ser escrita da seguinte maneira:

$$T = \frac{1}{2} \frac{p^2}{ml^2}.$$

Como o sistema é conservativo, a hamiltoniana é:

$$H = T + V = \frac{1}{2} \frac{p^2}{ml^2} - mgl \cos \theta. \quad (3.27)$$

Aplicando as *equações de Hamilton*, temos:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta \quad (3.28)$$

e

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ml^2}. \quad (3.29)$$

$$(3.30)$$

A última equação equivale à

$$p = ml^2 \dot{\theta}. \quad (3.31)$$

Derivando a equação anterior, obtemos:

$$\dot{p} = ml^2 \ddot{\theta}. \quad (3.32)$$

Igualando a última equação à Eq.(3.28), obtemos:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

### 3.3.2 Hamilton-Jacobi

Considerando um sistema mecânico descrito pelas variáveis canônicas  $(q, p)$  e pela hamiltoniana  $H(q, p, t)$ , a fim de tornar as equações de movimento triviais, efetuamos uma transformação de variáveis, ou seja, trocamos o par  $(q, p)$  por um outro par  $(Q, P)$  que preserva as equações de Hamilton, ou seja,

$$\begin{aligned}\dot{Q}_k &= \frac{\partial K}{\partial P_k} \\ \dot{P}_k &= -\frac{\partial K}{\partial Q_k}\end{aligned}\tag{3.33}$$

onde  $K = K(Q, P, t)$  é uma nova hamiltoniana. Esse tipo de mudança é chamada de *transformação canônica* [6].

Primeiro, aplicamos a função de Hamilton e impomos o princípio variacional:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) \right] dt = 0\tag{3.34}$$

e

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{k=1}^n P_k \dot{Q}_k - K(Q, P, t) \right] dt = 0.\tag{3.35}$$

Usamos essas integrais bem como o artifício em considerar que ambos os integrandos só diferem pela derivada total em relação ao tempo de uma função  $F$ , onde:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF(q, t)}{dt} dt = 0.$$

Para o nosso propósito, consideramos a função  $F$  como uma função do tipo  $F = F_2(q, P, t)$  e, na Eq.(3.35), fazemos a troca  $P \rightarrow Q$  e  $Q \rightarrow -P$ , mudança essa que não altera as equações de Hamilton.

Assim, manipulando só os integrandos, obtemos:

$$\sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) = \sum_{k=1}^n -Q_k \dot{P}_k - K(Q, P, t) + \frac{dF_2(q, P, t)}{dt} \quad (3.36)$$

uma vez que  $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = \delta p_k(t_1) = \delta p_k(t_2) = 0$  para as novas coordenadas.

A expressão anterior pode ser colocada na forma

$$\begin{aligned} K(Q, P, t) + \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n Q_k \dot{P}_k = \\ H(q, p, t) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \dot{P}_k + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.37)$$

e, com isso, obtemos as equações:

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \quad (3.38)$$

$$Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \quad (3.39)$$

e

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (3.40)$$

A função  $F_2(q, P, t)$  é dita *função geratriz* e constitui uma de quatro maneiras de se encontrar a *transformação canônica*. As demais podem ser encontradas na referência [6]. Firmados no propósito inicial de tornar as equações de movimento mais simples de serem abordadas, buscamos uma transformação canônica dependente do tempo, gerada pela função do tipo  $F_2(q, P, t)$  e que anule a nova hamiltoniana, isto é:

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0.$$

O estudo desse tipo de transformação canônica constitui a teoria de Hamilton-Jacobi. A função geratriz  $F_2$  será denotada por  $S$  e nomeada *função principal de Hamilton*. Nesse contexto, temos as *equações de Hamilton-Jacobi* que são da forma:

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (3.41)$$

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad (3.42)$$

$$Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}. \quad (3.43)$$

Considerando as fórmulas acima, temos:

$$H = H \left( q_1, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t \right). \quad (3.44)$$

Assim, a Eq.(3.41) é uma equação diferencial parcial de primeira ordem nas  $n + 1$  variáveis, logo uma solução geral envolve  $n + 1$  constantes arbitrárias. Note que a variável dependente  $S$  não aparece na Eq.(3.41), apenas suas derivadas parciais por respeito a  $q$  e  $t$ . Se  $S$  é alguma solução da equação diferencial, então  $S + \alpha$ , onde  $\alpha$  é uma constante, também é uma solução, pois a constante aditiva não altera as derivadas parciais. Uma das  $n + 1$  constantes de integração é uma constante aditiva a  $S$  que não altera a Eq.(3.33). Portanto, a completa solução da Eq.(3.41) pode ser escrita na forma  $S(q_1, \dots, q_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n, t)$  onde nenhuma das  $n$  constantes é somente aditiva.

### Exemplo 1: oscilador harmônico

Será usada a técnica de Hamilton-Jacobi para discutirmos a equação de movimento associado ao problema de um oscilador harmônico unidimensional. Como já vimos, a hamiltoniana desse oscilador representa sua energia total, ou seja, é a soma da energia cinética com a energia potencial. Assim, a hamiltoniana, nesse caso, é dada por:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2},$$

onde  $m$  é a massa e  $\omega$  é a frequência.

Pela *equação de Hamilton-Jacobi*, temos:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}. \quad (3.45)$$

E, portanto, a equação hamiltoniana fica:

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{m\omega^2 q^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Essa equação é separável na forma

$$S = W(q) - \alpha t, \quad (3.46)$$

onde  $W$  satisfaz a equação

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = \alpha.$$

Consequentemente,

$$W = \int \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2} dq,$$

de onde segue-se

$$S(q, \alpha, t) = \int \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2} dq - \alpha t.$$

A fim de resolver a equação de movimento, consideramos:

$$Q = \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = m \int \frac{dq}{\sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2}} - t,$$

de onde segue-se

$$\beta = \frac{1}{\omega} \text{sen}^{-1} \left( \sqrt{\frac{m\omega^2}{2\alpha}} q \right) - t.$$

Fazendo  $\theta = \omega\beta$ , temos a solução:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \text{sen}(\omega t + \theta), \quad (3.47)$$

que é a solução do problema do oscilador harmônico.

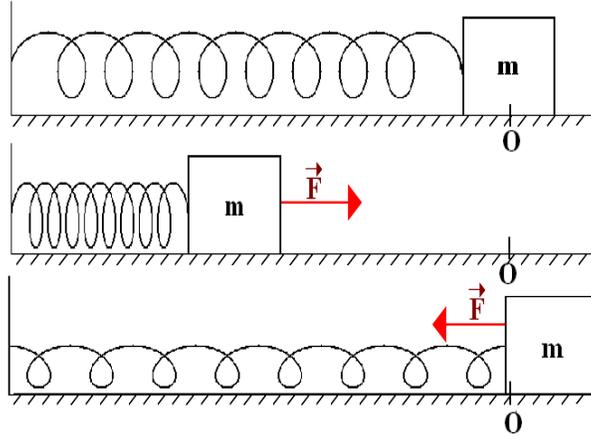


Figura 3.5: Sistema massa-mola.

**Exemplo 2: sistema massa-mola**

Considere o sistema mecânico composto por uma massa  $m$  presa a uma mola com constante elástica  $k$  e que realiza oscilações livres, ou seja, aquelas em que não atuam forças externas e nem de amortecimentos. Essa massa oscilará em torno de uma posição de equilíbrio  $O$ , conforme Figura 3.5.

Nesse sistema, existirá uma única força atuante, restauradora e, portanto, de sentido contrário ao do deslocamento [8]. Essa força é diretamente proporcional ao módulo do deslocamento e é gerada pela constante elástica  $k$  da mola

$$F = -kx. \quad (3.48)$$

Assim, sendo a energia potencial do sistema dada por  $V = -\int F dx$ , ela será

$$V = \frac{kx^2}{2}.$$

Por outro lado, a energia cinética é

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

de onde segue-se para o momento

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}.$$

Temos a energia total, ou seja, a hamiltoniana, dada por

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}.$$

Uma vez que o sistema é conservativo, temos, por Eq.(3.45) e Eq.(3.46), o seguinte [15]:

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \frac{\partial S}{\partial q} = p$$

que resulta:

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{kx^2}{2} = \alpha.$$

E, por consequência, temos:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{2m(\alpha - kx^2/2)}$$

ou:

$$W = m\omega \int_{x_0}^x \sqrt{a^2 - \xi^2} d\xi$$

na qual  $a = \sqrt{2\alpha/m\omega^2}$  e  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

Assim, usando novamente as equações de Hamilton, temos:

$$-\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -t + \frac{\partial W}{\partial a} \frac{da}{d\alpha} = -t + \frac{1}{\omega} \left( \cos^{-1} \frac{x_0}{a} - \cos^{-1} \frac{x}{a} \right)$$

ou ainda:

$$x = a \cos[\omega(t - t_0) - \phi],$$

que é a solução de um MHS com  $t_0 = \beta$  e  $\cos \phi = \frac{x_0}{a}$ .

---

# O PÊNULO SIMPLES

---

## 4.1 Um pouco de história

A busca do homem pela medição do tempo é muito antiga. O primeiro relógio que o homem criou foi um relógio de Sol, em torno de 3500 a.C.. Ao longo dos anos foram criados outros relógios, de água, de areia, dentre outros. Durante muito tempo esses instrumentos cronológicos mais rudimentares, apesar de imprecisos, atenderam às necessidades da humanidade para marcação do dia e da noite. No entanto, na época das grandes embarcações, em meados do século XVI, um grande desafio atormentou os europeus: a determinação da longitude. Na época, eles conseguiam determinar a latitude através dos conhecimentos astronômicos extremamente desenvolvidos até então, mas perceberam, com sofreguidão, que esses conhecimentos não serviam para o cálculo da longitude.

Assim, tinham dificuldades de se situar em alto mar e por isso a maior parte das grandes embarcações ficavam limitadas à costa territorial. Por esse motivo os governos inglês, holandês e espanhol, entre outros, começaram a oferecer prêmios para quem resolvesse o problema da determinação da longitude. Como o cálculo da longitude está vinculado à precisão do tempo, esta era a grande obsessão da época.

Pode-se dizer que o marco inicial da venturosa busca de precisão do tempo se deu na Catedral de Pisa, quando o italiano Galileu Galilei, ainda estudante de medicina, assistia a um serviço. Nessa noite ele se distraiu observando que uma das lâmpadas de um grande lustre de bronze estava para fora do

## 4.2. Christiaan Huygens e o pêndulo isócrono

lustre e, solta, oscilava; essa oscilação acontecia com amplitude que decrescia gradualmente, porém no mesmo período de tempo, o que Galileu constatou usando as batidas de seu pulso, como já fazia habitualmente para marcar o tempo. Entusiasmado com tal descoberta, fez experimentos posteriores que comprovavam o isocronismo do pêndulo, ou seja, mostrou que o período de um pêndulo em movimento não depende da massa mas sim do comprimento da haste<sup>1</sup>(ver [9]).

Sabemos que essa conclusão de Galileu só é válida para oscilações de pequenas amplitudes. Christiaan Huygens (1629-1695), também ciente disso e inspirado na descoberta de Galileu, propôs-se a construir um pêndulo isócrono, isto é, um pêndulo que tivesse o mesmo período para qualquer que fosse a sua amplitude de oscilação. Assim ele conseguiu inventar o relógio de pêndulo, em 1656, usando o escape<sup>2</sup>, trabalho que publicou em *Horologium Oscillatorium* (1673). A descoberta do relógio de pêndulo e sua aplicação no cálculo da longitude constitui uma revolução no âmbito da ciência na medida em que solucionou um problema geofísico em terra com o conceito peso, não mais usando os astros, constelações ou qualquer conhecimento astronômico acumulado na época, mas aplicando a teoria newtoniana. As implicações dessa descoberta no modo de produção das sociedades posteriores, sabemos bem, também foram revolucionárias, haja vista a Revolução Industrial que melhor exemplifica as mudanças sofridas pelos homens em suas organizações políticas, sociais e em seus valores culturais. Por isso, podemos, com justiça, igualar esse feito à invenção da imprensa tipográfica.

## 4.2 Christiaan Huygens e o pêndulo isócrono

O holandês Christiaan Huygens nasceu em Haia, educado inicialmente em sua própria casa, a qual era frequentada por intelectuais de destaque, entre eles, René Descartes (1596-1650) que, impressionado com seus primeiros textos de geometria, influenciou o desenvolvimento de sua habilidade matemática. Assim, Christiaan estudou direito e matemática na Universidade de Leiden.

---

<sup>1</sup>Conta-se que essa descoberta foi a mola propulsora para o abandono da medicina por Galileu, passando a dedicar-se à ciência e à matemática.

<sup>2</sup>Escape - ou escape - é uma das três partes do mecanismo do relógio de pêndulo (motor, regulador e escape). O escape é um órgão intermediário que torna recíproca a ação do regulador e do motor.

## 4.2. Christiaan Huygens e o pêndulo isócrono



Figura 4.1: Gravura de 1791.

Apesar de ser conhecido como um dos grandes físicos de seu tempo, principalmente pelo seu estudo e invenção do pêndulo e das leis de quedas de corpos, Huygens foi importante no progresso da geometria e mostrou a importância do cálculo. Em seu marcante trabalho, o *Horologium Oscillatorium*, ele também provou que a cicloide é uma tautócrona<sup>3</sup>.

Christiaan passou 40 anos de sua vida envolvido na construção de relógios de pêndulo. Na época era muito importante que se construísse um cronômetro marítimo para a determinação da longitude e, como o balanço dos navios alterava, inevitavelmente, as amplitudes de oscilação dos pêndulos, percebeu-se a necessidade de se obter um pêndulo isócrono. À princípio, Huygens, fez construções empíricas, colocando obstáculos em ambos os lados de um pêndulo simples pois, dessa forma, à medida que o fio encostava no obstáculo, o comprimento efetivo do pêndulo se tornava menor. Como o período de um pêndulo diminui se encurtamos seu comprimento, esse procedimento poderia fornecer um mecanismo que compensasse o aumento do período para

---

<sup>3</sup>Tautócrona é a curva plana ao longo da qual uma partícula material atinge um ponto dado da trajetória num espaço de tempo que não depende do ponto de onde ela saiu.

## 4.2. Christiaan Huygens e o pêndulo isócrono



Figura 4.2: Christiaan Huygens.

grandes amplitudes. Mas suas tentativas foram em vão e, assim, desistiu temporariamente de sua empreitada.

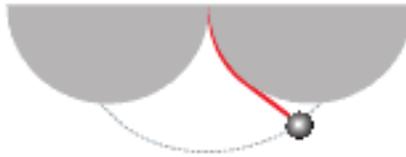


Figura 4.3: Pêndulo isócrono.

Certo dia, ao participar de uma competição sobre a cicloide, a convite do francês Blaise Pascal (1623-1662), Huygens percebeu que, se um pêndulo simples tivesse seu movimento restrito por obstáculos que obrigassem a partícula presa em seu extremo inferior a descrever uma trajetória cicloidal (Figura 4.3), seu período seria o mesmo, qualquer que fosse a amplitude de oscilação, e mais, demonstrou que os obstáculos deveriam ter uma forma cicloidal para que a trajetória do pêndulo fosse cicloidal [9].

## 4.2. Christiaan Huygens e o pêndulo isócrono

Assim, Huygens alcançou o objetivo que buscava, seu relógio de pêndulo reduziu a margem de erro de cerca de quinze minutos por dia para meros dez ou quinze segundos. O relógio se tornara, enfim, um instrumento realmente confiável para medir o tempo.

Entendendo um pouco como isso acontece, vamos analisar, matematicamente, sua teoria [23].

Primeiro começamos por lembrar a definição de cicloide: *cicloide é uma curva descrita por um ponto na circunferência de um círculo, quando esta rola ao longo de uma linha reta.* Ver Figura 4.4.

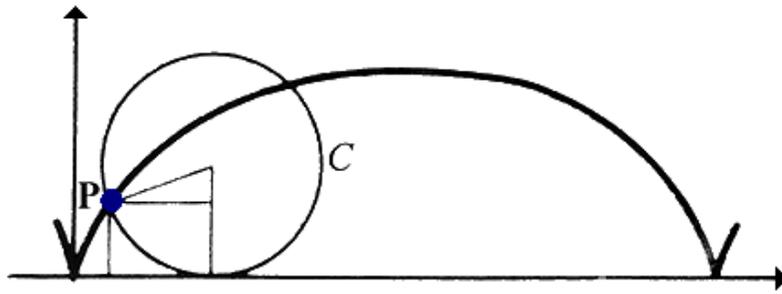


Figura 4.4: Cicloide.

Quem a estudou primeiro foi Nicolás de Cusa<sup>4</sup> quando estava tentando encontrar a área de um círculo pela integração; quem a definiu apropriadamente destacando suas propriedades foi Mersenne (1588-1648) e quem a nomeou foi Galileu. As aplicações dessa curva vão desde relógios, tobogãs, esteiras industriais a sistemas ótimos de engrenagens.

Huygens considerou o movimento de uma partícula em uma superfície cicloidal e analisou a projeção vertical desse movimento. Com isso concluiu que ele coincidia com um movimento harmônico uniforme.

Suponhamos, então, uma partícula situada, inicialmente, num ponto  $P$  da superfície cicloidal e abandonada de seu repouso de uma altura  $H$ , considerando o ponto mais baixo da cicloide. Em um determinado instante, essa

---

<sup>4</sup>Seu nome verdadeiro era Nicolaus Krebs ou Chrypffs (1401-1464), mas ficou conhecido por Nicolás de Cusa pela cidade em que nasceu, Kues

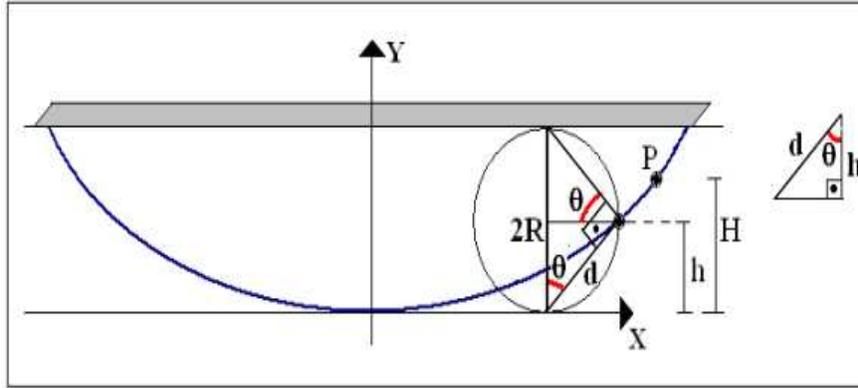


Figura 4.5: Movimento da partícula em uma superfície cícloidal.

partícula atinge uma altura  $h$ , conforme Figura 4.5 onde, por conveniência, desenhamos a ciclóide com a sua concavidade para cima, e também, escolhemos os eixos cartesianos de modo que a superfície plana está localizada a uma altura igual a  $2R$ .

Pela conservação de energia temos:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(H - h),$$

o que resulta, para a velocidade:

$$v = \sqrt{2g(H - h)}.$$

A componente vertical da velocidade é dada por

$$v_y = -v \cos \theta = -\sqrt{2g(H - h)} \cos \theta. \quad (4.1)$$

Usando a propriedade fundamental da ciclóide<sup>5</sup>, temos:

$$h = d \cos \theta \quad \text{com} \quad d = 2R \cos \theta \quad (4.2)$$

<sup>5</sup>Essa propriedade diz que a reta tangente à ciclóide em um ponto  $P$  passa pelo ponto mais alto da circunferência geratriz e a reta normal passa pelo ponto mais baixo, no caso o alto e o baixo estão trocados.

## 4.2. Christiaan Huygens e o pêndulo isócrono

onde  $R$  é o raio da circunferência geratriz. Temos, então, o seguinte resultado:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{h}{2R}}. \quad (4.3)$$

Substituindo o último resultado na Eq.(4.1), obtemos:

$$v_y = -\sqrt{\frac{g}{R}h(H-h)}.$$

Como  $h = h(t)$ , podemos representar, matematicamente, a velocidade vertical como a derivada  $v_y = \frac{dh}{dt}$  e a equação anterior toma a forma:

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{(H-h)h}.$$

Pela simetria do problema, o tempo que a partícula leva para chegar ao ponto  $h = 0$  é  $1/4$  do seu período  $T$  de oscilação.

Separando as variáveis da equação acima e integrando ambos os lados, temos:

$$\int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{(H-h)h}} = -\sqrt{\frac{g}{R}} \int_0^{T/4} dt,$$

o que resulta em:

$$T = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^H \frac{dh}{\sqrt{(H-h)h}}.$$

A fim de encontrar esse período, fazemos a substituição de variável  $\kappa = h/H$  na integral acima, obtendo:

$$T = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^1 \frac{d\kappa}{\sqrt{(1-\kappa)\kappa}}.$$

Fazendo mais a seguinte substituição de variável:

$$\kappa = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sen}\alpha),$$

alcançamos o seguinte resultado:

$$T = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}} = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}}.$$

## 4.2. Christiaan Huygens e o pêndulo isócrono

Contudo, no processo de determinar o período exato para esse movimento, foi possível concluir que esse período independe da altura inicial que a partícula é abandonada. No caso do pêndulo, Huygens manipulou obstáculos ao seu redor de modo que ele percorresse essa trajetória cicloidal e, assim, seu período deixava de depender de sua amplitude de oscilação, tornando-se isócrono. O período do pêndulo isócrono coincide com o de um pêndulo simples de pequena amplitude de oscilação onde o comprimento  $l$  da haste é igual a  $4R$ .

As anotações de Christiaan são mostradas na Figura 4.6.

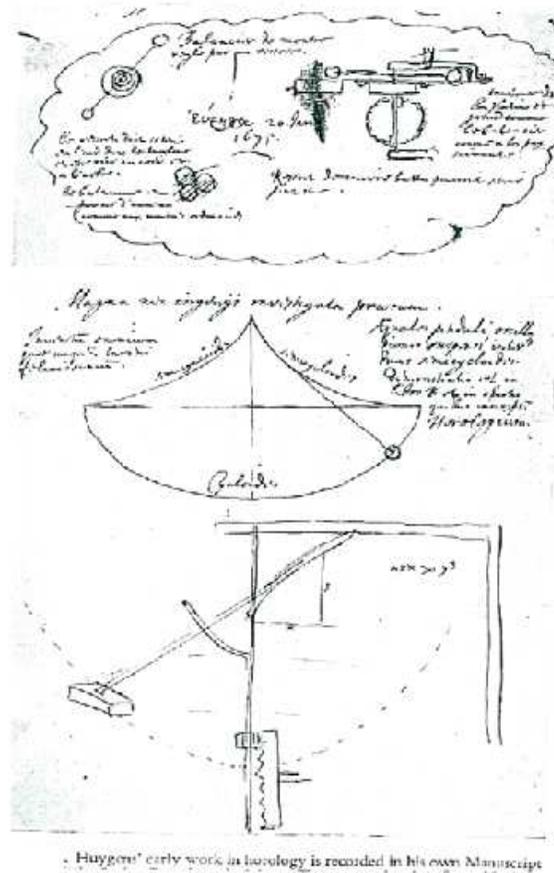


Figura 4.6: Rascunhos de Christiaan Huygens.

## 4.3 Aplicação das equações de Hamilton-Jacobi

Voltando ao pêndulo, a aproximação descoberta pelo já citado inventor Christiaan Huygens e que encontramos comumente nos livros introdutórios de física [8] é:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (4.4)$$

onde  $l$  é o comprimento do pêndulo e  $g$  a aceleração gravitacional. Como já vimos no capítulo anterior, essa aproximação é obtida linearizando-se a equação diferencial associada ao movimento do pêndulo por meio de

$$\text{sen}\theta \approx \theta \quad (4.5)$$

onde  $\theta$  denota a posição angular do pêndulo em relação ao equilíbrio. A linearização dada pela Eq.(4.5) é chamada de *aproximação harmônica* e leva à equação do oscilador harmônico.

Contornando as dificuldades matemáticas, a aproximação harmônica é largamente usada nos cursos introdutórios de física. Fora de um laboratório didático, essa aproximação harmônica tem dois problemas básicos que a tornam de pouca utilidade. O primeiro é o fato dela produzir resultados numéricos bastante imprecisos se a amplitude de oscilação estiver fora do chamado regime de pequenas oscilações. Embora não sendo definido com clareza na literatura, esse regime é tomado como sendo o maior intervalo de amplitudes dentro do qual o período da aproximação harmônica difere em menos de 1% do valor exato. No caso, o ângulo máximo de oscilação do pêndulo corresponde a  $23^\circ$ , mas, se o comprimento do pêndulo for maior ou igual a  $25\text{cm}$  e for exigida uma concordância com o período exato de apenas 3 casas decimais, o ângulo de oscilação deverá ser menor que  $0,5^\circ$ . O segundo problema é que a aproximação harmônica descreve o pêndulo como um sistema cujo período não depende da amplitude de oscilação. Esse comportamento uniforme, chamado de isocronismo, contrasta com o do pêndulo real, chamado de anisocronismo, para o qual o período cresce monotonicamente com a amplitude.

Usando a conservação da energia mecânica, é possível obter uma expressão analítica exata para o período do pêndulo simples. Essa expressão envolve

uma função não elementar do Cálculo, a *integral elíptica completa do primeiro tipo*, que na prática requer algum tipo de aproximação para ser avaliada. Conforme vimos no capítulo anterior, a hamiltoniana do pêndulo é dada por

$$H = T + V = \frac{1}{2} \frac{p^2}{ml^2} - mgl \cos \theta. \quad (4.6)$$

Como a hamiltoniana representa a energia  $E$  total do sistema, consideramos a função:

$$p(\theta) = \pm \sqrt{2ml^2(E + mgl \cos \theta)}. \quad (4.7)$$

Assim, como  $E = -mgl \cos \theta_0$ , se  $E < mgl$ , então  $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ , ou seja, o pêndulo oscila periodicamente entre  $-\theta_0$  e  $\theta_0$  (libração). Graficamente, esse movimento representa uma curva fechada no espaço de fase (em forma de elipses), conforme Figura 4.7. Já, se  $E > mgl$ , o pêndulo ainda tem energia cinética no ponto mais alto  $\theta = \pm\pi$  e continua seu movimento sem inversão do sentido (rotação). Assim, o movimento se repete cada vez que o ângulo  $\theta$  varia de  $2\pi$ . As curvas mais externas do gráfico expressam esse movimento. Finalmente, se  $E = mgl$ , o pêndulo encontra-se numa situação de limite instável, pois, ao atingir a posição vertical  $\theta = \pi$ , a energia cinética reduz-se a zero e o pêndulo poderia permanecer nessa posição eternamente. No gráfico da Figura 4.7, a curva  $S$  que representa esse último quadro recebe o nome de *separatriz*.

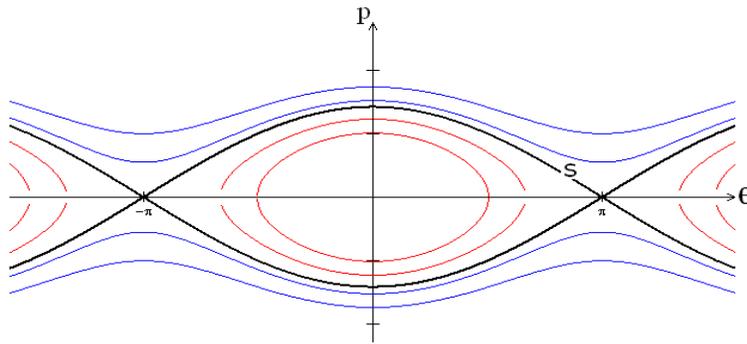


Figura 4.7: Espaço de fase do pêndulo simples.

Retomando a Eq.(4.6), temos, pela *equação de Hamilton-Jacobi*, o seguinte resultado:

$$\frac{1}{2ml^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 - mgl \cos \theta + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (4.8)$$

Sendo  $S(\theta, \alpha, t) = W(\theta) - \alpha t$  temos, nesse caso:

$$\frac{1}{2ml^2} \left( \frac{dW}{d\theta} \right)^2 - mgl \cos \theta = \alpha, \quad (4.9)$$

o que resulta na expressão

$$W = \int \sqrt{2ml^2\alpha + 2m^2l^3g \cos \theta} d\theta. \quad (4.10)$$

Assim, obtemos:

$$-\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int \frac{2ml^2 d\theta}{\sqrt{2ml^2\alpha + 2m^2l^3g \cos \theta}} - t \quad (4.11)$$

ou ainda na forma

$$t - \beta = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha/mgl + \cos \theta}}. \quad (4.12)$$

Considerando que, no início do movimento,  $t_0 = 0$ , a energia total é igual à energia potencial, uma vez que a partícula está imóvel e a haste que a sustenta faz com a vertical um ângulo  $\theta_0$ , temos  $E_0 = -mgl \cos \theta_0$ . Como o sistema é conservativo, sua energia é constante, assim, sem perda de generalidade, podemos impor:

$$\alpha = -mgl \cos \theta_0. \quad (4.13)$$

Substituindo  $\beta$  por  $t_0 = 0$ , obtemos:

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}. \quad (4.14)$$

Usando a relação trigonométrica  $\cos \phi = 1 - 2\text{sen}^2(\phi/2)$ , temos:

$$2t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\text{sen}^2(\theta_0/2) - \text{sen}^2(\theta/2)}}. \quad (4.15)$$

#### 4.4. Representação por função hipergeométrica

Chamamos  $\text{sen}(\theta_0/2) = k$  e fazemos a substituição

$$\text{sen}(\theta/2) = k \text{sen} \xi \quad (4.16)$$

onde, a variação  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  resulta em  $0 \leq \text{sen} \xi \leq 1$  e, conseqüentemente,  $\xi \in [0, \pi/2]$ . Segue, então, o seguinte:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \xi}}. \quad (4.17)$$

Considerando como período  $T$  do pêndulo o tempo que ele leva para voltar à posição inicial, temos que  $T = 4t$ . Logo,

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \xi}}. \quad (4.18)$$

Esta integral é conhecida na literatura especializada com o nome de *integral elíptica completa de primeiro tipo* e denotada por  $K(k)$ . Deste modo,

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \xi}}.$$

Para pequenas amplitudes de oscilação, o parâmetro  $k$  se aproxima de zero. Conseqüentemente,  $K$  tende à  $\pi/2$  e a Eq.(4.18) toma a forma da aproximação harmônica, ou seja, a linearização dada pela Eq.(4.5) equivale a aproximar a curva  $K(k)$  da reta horizontal  $\pi/2$ . Como  $K(k)$  é uma função monotonicamente crescente que diverge exponencialmente no limite  $|k| = 1$ , isto é, para  $\theta = \pi$ , a razão entre o período exato  $T$  e a aproximação, digamos  $T_0$ , aumenta rapidamente com a amplitude [21], conforme podemos observar na Figura 4.8.

## 4.4 Representação por função hipergeométrica

A integral elíptica de primeiro tipo, função que compõe o período do pêndulo, é uma função não elementar que pode ser representada pela função hipergeométrica  ${}_2F_1$ , conforme apresentada no Capítulo 2. Com esse propósito, considere a distribuição binomial:

$$(1 + x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots$$

#### 4.4. Representação por função hipergeométrica

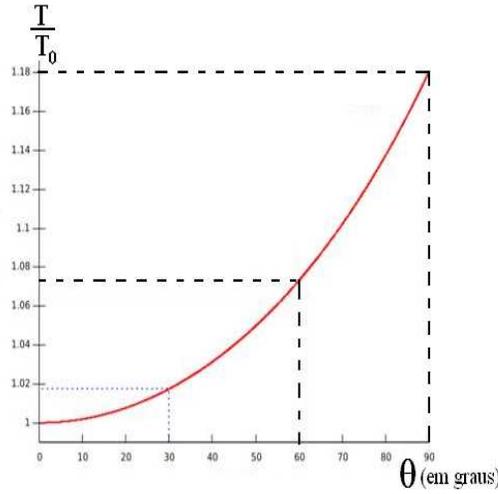


Figura 4.8: Período do pêndulo em função da amplitude.

convergente para  $|x| < 1$  [14]. Sendo  $|k^2 \text{sen}^2 \xi| < 1$ , essa distribuição binomial é válida no integrando da Eq.(4.18):

$$(1 - k^2 \text{sen}^2 \xi)^{-1/2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) (-k^2 \text{sen}^2 \xi) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) (-k^2 \text{sen}^2 \xi)^2 + \\ + \frac{1}{3!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) (-k^2 \text{sen}^2 \xi)^3 + \dots \quad (4.19)$$

onde  $x = k^2 \text{sen}^2 \xi$  e  $p = -1/2$ .

Simplificando, podemos escrever:

$$(1 - k^2 \text{sen}^2 \xi)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \text{sen}^2 \xi + \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} k^4 \text{sen}^4 \xi + \frac{1}{3!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} k^6 \text{sen}^6 \xi + \dots \quad (4.20)$$

Essa série é convergente e pode ser integrada termo a termo. A fim de obtermos as integrais desses senos de forma recursiva, consideramos um número natural par  $m$  da forma  $m = 2n$  [20] e tomamos a integral

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^m \xi d\xi. \quad (4.21)$$

#### 4.4. Representação por função hipergeométrica

O termo seguinte conterá  $I_{m+2}$ . Calculando-o, temos:

$$\begin{aligned}
 I_{m+2} &= \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{m+2} \xi d\xi = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^m \xi \text{sen}^2 \xi d\xi = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^m \xi (1 - \cos^2 \xi) d\xi \\
 I_{m+2} &= \int_0^{\pi/2} \text{sen}^m \xi d\xi - \int_0^{\pi/2} \text{sen}^m \xi \cos^2 \xi d\xi \\
 I_{m+2} &= I_m - \int_0^{\pi/2} \text{sen}^m \xi \cos^2 \xi d\xi,
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

o que implica no seguinte resultado:

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^m \xi \cos^2 \xi d\xi = I_m - I_{m+2}. \tag{4.23}$$

Por outro lado, utilizando a integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^m \xi \cos^2 \xi d\xi &= \text{sen}^m \xi \cos \xi \text{sen} \xi \Big|_0^{\pi/2} + \\
 &- \int_0^{\pi/2} \text{sen} \xi (m \text{sen}^{m-1} \xi \cos^2 \xi - \text{sen}^{m+1} \xi) d\xi
 \end{aligned}$$

ou ainda na forma

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^m \xi \cos^2 \xi d\xi = 0 - m \int_0^{\pi/2} \text{sen}^m \xi \cos^2 \xi d\xi + \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{m+2} \xi d\xi,$$

de onde segue-se

$$(m+1) \int_0^{\pi/2} \text{sen}^m \xi \cos^2 \xi d\xi = I_{m+2}. \tag{4.24}$$

Substituindo a expressão (4.23) na expressão (4.24), obtemos:

$$(m+1)(I_m - I_{m+2}) = I_{m+2} \tag{4.25}$$

de onde segue-se

$$I_{m+2} = \frac{1+m}{2+m} I_m. \tag{4.26}$$

#### 4.4. Representação por função hipergeométrica

Visto que

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} d\xi = \frac{\pi}{2},$$

podemos escrever recursivamente:

$$I_2 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} \right)$$

$$I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3}{4} \frac{1}{2}I_0 = \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \right)$$

$$I_6 = \frac{5}{6}I_4 = \frac{5}{6} \frac{3}{4} \frac{1}{2}I_0 = \frac{5}{6} \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{3!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \right).$$

Realizando, de fato, a integração da equação obtemos:

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \text{sen}^2 \xi)^{-1/2} d\xi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \\ &+ \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \right)^2 k^4 + \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{3!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \right)^2 k^6 + \dots \end{aligned}$$

Assim, utilizando o símbolo de Pochhammer<sup>6</sup> [16], definido por:

$$(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda + k)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda + 1) \cdots (\lambda + k - 1),$$

e comparando-o à representação em série da função hipergeométrica, conforme a Eq.(2.25), podemos escrever:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \text{sen}^2 \xi)^{-1/2} d\xi = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{(1)_n n!} k^{2n}.$$

---

<sup>6</sup>Leo August Pochhammer (1841-1920).

#### 4.4. Representação por função hipergeométrica

Substituindo a função hipergeométrica encontrada em Eq.(4.18) e sabendo que  $k = \text{sen}(\theta_0/2)$ , encontramos o período do pêndulo simples:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \text{sen}^2(\theta_0/2)\right] \quad (4.27)$$

associado à solução exata da equação de movimento

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\text{sen}\theta = 0,$$

como vista no capítulo anterior.

Note que, para  $\theta_0 \approx 0$ , recuperamos o clássico resultado

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

uma vez que  ${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 0\right) = 1$ .

---

# Conclusão

---

O problema do pêndulo simples constitui-se no pano de fundo para o estudo de uma ampla variedade de conceitos da física e da matemática, por isso, é tópico constante das disciplinas de cursos vinculados à área das ciências exatas. Ele é usado, na física, para se estudarem conceitos como aceleração da gravidade, força, movimento harmônico, entre outros. Já, na matemática, esse problema começa a mostrar sua importância no aparecimento frequente de sua equação de movimento no estudo básico de equações diferenciais. Além disso, permeia teorias mais elaboradas da física-matemática como as teorias lagrangiana e hamiltoniana, bem como o estudo das funções especiais, como vimos nesse trabalho. Discutimos, aqui, o desenvolvimento teórico das formulações da mecânica analítica visando à aplicação da técnica dada pela equação de Hamilton-Jacobi ao nosso problema do pêndulo simples.

Iniciamos nosso trabalho com o estudo das equações diferenciais parciais, sua classificação quanto ao tipo e do método de Fourier. Apresentamos o método de separação de variáveis, o qual produz um conjunto de equações diferenciais ordinárias. Depois disso, solucionamos a equação diferencial ordinária de segunda ordem com três pontos singulares regulares pelo método de Frobenius, conduzindo-a à equação hipergeométrica, que tem como solução as funções hipergeométricas. O caso particular, a função de Legendre, é abordada. Por um processo de tomada de limite efetuado sobre a equação hipergeométrica, encontramos a equação hipergeométrica confluyente com solução dada pelas funções hipergeométricas confluentes, como exemplo, mencionamos a função de Bessel. Discutimos, depois disso, as formulações newtoniana, lagrangiana, hamiltoniana dos osciladores harmônicos unidimensionais, incluindo o pêndulo e o sistema massa-mola.

#### 4.4. Representação por função hipergeométrica

Começamos o último capítulo contextualizando historicamente a descoberta do pêndulo isócrona, feita por Huygens e expusemos sua construção matemática no cálculo do seu período. Finalizando esse último capítulo, estudamos o movimento do pêndulo pela teoria de Hamilton-Jacobi, elucidando seu período composto pela integral elíptica a qual induzida por técnica recursiva e integração do cálculo representamos na última seção pela função hipergeométrica. Recuperamos, através da linearização da equação diferencial, o período do pêndulo associado às pequenas oscilações.

---

# Apêndice

---

## A função gama

Dado um número real  $p$ , definimos a função gama a partir da seguinte integral imprópria [13]

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$$

com  $p > 0$ , intervalo no qual ela é convergente<sup>7</sup>. O gráfico dessa função está representado na Figura 4.9.

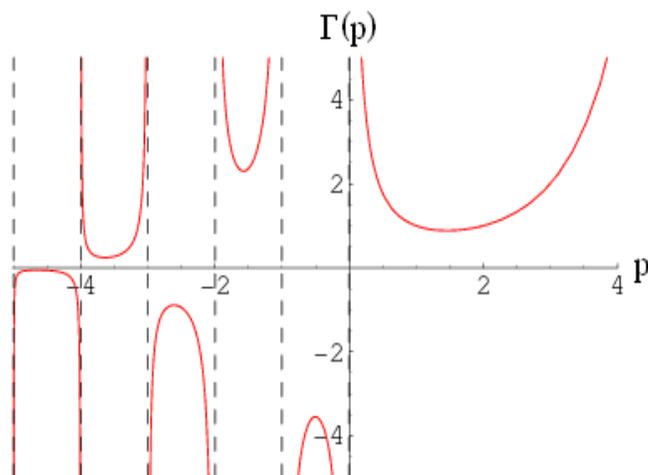


Figura 4.9: Gráfico da função gama.

Essa definição não é válida para  $p \leq 0$ , pois, nesse caso, a integral envolvida é

---

<sup>7</sup>Essa definição pode ser feita sobre os  $\mathbb{C}$  com  $\text{Re}(z) > 0$  [3].

#### 4.4. Representação por função hipergeométrica

divergente. Assim sendo, substituindo  $p$  por  $p + 1$  na definição acima temos:

$$\Gamma(p + 1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx.$$

Utilizando a integração por partes, obtemos:

$$\Gamma(p + 1) = p \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$$

ou seja,

$$\Gamma(p + 1) = p\Gamma(p).$$

Essa equação é conhecida como *relação recursiva* da função  $\Gamma$  pois produz:

$$\Gamma(p + n) = (p + n - 1)(p + n - 2)(p + n - 3) \cdots (p + 1)p\Gamma(p)$$

para todo inteiro positivo  $n$ , consistindo-se numa generalização da definição de fatorial:  $n! = n(n - 1)!$

Um resultado muito importante envolvendo a função gama é o seguinte [3]:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Mostremos tal resultado. A partir da definição da função gama com  $p = \frac{1}{2}$  temos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Introduzimos a mudança de variável  $x = t^2$  obtemos:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Multiplicando ambos os lados desta igualdade por  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$  temos, como resultado, uma dupla integral:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(t^2+u^2)} dt du.$$

Utilizando as coordenadas polares no plano, podemos escrever:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta.$$

Integrando nas variáveis  $r$  e  $\theta$ , obtemos  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  que é o resultado desejado.

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] E. Romão Martins e E. Capelas de Oliveira, *Equações Diferenciais e os Sistemas de Stäckel*, Textos Didáticos, Vol.4, Imecc-Unicamp, Campinas, (2006).
- [2] E. Capelas de Oliveira e J. Emílio Maiorino, *Introdução aos Métodos da Matemática Aplicada*, Terceira Edição, Editora da Unicamp, Campinas, (2010).
- [3] E. Capelas de Oliveira, *Funções Especiais com Aplicações*, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2004).
- [4] E. Capelas de Oliveira e W. A. Rodrigues Jr., *Funções Analíticas e Aplicações*, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2006).
- [5] E. Capelas de Oliveira, A. O. Chiacchio e J. Vaz Jr., *Equações Diferenciais: Métodos Analíticos e Aplicações*, IMECC, São Paulo, (2008).
- [6] H. Goldstein, *Mecânica Clásica*, Aguilar, Madrid, (1977).
- [7] W. Greiner, *Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer-Verlag, New York, (1935).
- [8] D. Halliday e R. Resnick, *Fundamentos de Física*, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, (2001).
- [9] H. Whitley Eves, *Introdução à História da Matemática*, Editora da Unicamp, Campinas, (1997).
- [10] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Mecânica*, Mir, Moscou, (1978).
- [11] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*, Livraria da Física, São Paulo, (2007).
- [12] E. Butkov, *Física Matemática*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro, (1978).

- [13] M. L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, J. Wiley, New York, (1966).
- [14] E. Lages Lima, *Análise Real*, vol. 1, IMPA, Rio de Janeiro, (2002).
- [15] D. T. Greenwood, *Classical Dynamics*, Dover, New York, (1997).
- [16] N. N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover, New York, (1972).
- [17] B. Spain, *Functions of Mathematical Physics*, Van Nostrand Reinhold Company LTD, Londres, (1970).
- [18] J. Mathews e R. L. Walker, *Mathematical Methods of Physics*, W. A. Benjamin, California, (1970).
- [19] E. T. Whittaker e G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 4ª Edição (1996).
- [20] E. Capelas de Oliveira, *Métodos Analíticos de Integração*, Editora Livraria de Física, São Paulo, (2010).
- [21] P. Amore, M. C. Valdovinos, G. Ornelas and S. Z. Barajas, *The Nonlinear Pendulum: Formulas for the Large Amplitude Period*, Rev. Mex. Fis., E **53**, 106-111 (2007).
- [22] W. E. Boyce e R. C. Di Prima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Editora Guanabara Koogan S.A., Rio de Janeiro (1994).
- [23] M. Burrowes e C. Farina, *Sobre o Pêndulo Isócrono de Christiaan Huygens*, Rev. Bras. Ens. Fís., **27** no.2, p. 175-179 (2005).
- [24] D. J. Pamplona da Silva, *Sobre um Tipo de Equação Diferencial Parcial*, Relatório de Pesquisa, IMECC-Unicamp, (2001).