

nt
PROGRAMAÇÃO LINEAR COM
RESTRIÇÕES *nt* CANALIZADAS

t
MARCOS NEREU ARENALES

ORIENTADOR *nt*
nt
MIGUEL TAUBE NETTO

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Fevereiro 1979

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Aos meus Pais.

AGRADECIMENTOS

Ao Taube pelo problema que me propôs e pela valorosa ajuda na etapa de redação.

Ao Zago pelos esclarecimentos dados durante a pesquisa.

Ao Martínez pelo interesse dispensado.

À Valéria pelos auxílios computacionais.

Aos amigos e professores pela calorosa atenção.

Ao Caetano pelo incentivo inconsciente.

À minha esposa pelo incentivo e apoio, sem os quais nada conseguiria.

À FAPESP pela bolsa de estudos concedida à primeira etapa desta pesquisa.

SUMÁRIO

Este trabalho tem como finalidade:

- 1) Resolver uma classe especial de problemas de programação linear, quando as restrições são canalizadas.
- 2) Reunir métodos que exploram a particularidade do problema.
- 3) Utilizar o método simplex no problema de PLRC.

No Capítulo 1 descrevemos uma aplicação de programação linear onde as restrições são canalizadas.

No Capítulo 2, até a seção 2.5 apresentamos sugestões alternativas para a solução do problema. Na seção 2.6 apresentamos um exemplo resolvido pelas sugestões descritas no Capítulo. Na seção 2.7 apresentamos os resultados dos desempenhos numéricos de duas das alternativas propostas.

ÍNDICE

CAPÍTULO	PÁGINA
1. MOTIVAÇÃO.....	1
2. SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA	6
NOTAÇÃO.....	6
2.1. Soluções explícitas.....	7
2.2. Método de subotimização - SUBOPT 1.....	7
2.3. Método de subotimização - SUBOPT 2.....	17
2.4. Um problema equivalente.....	24
2.5. O problema dual.....	25
2.6. Um exemplo resolvido.....	26
2.7. Experiência computacional.....	35
3. APÊNDICE.....	39

CAPÍTULO 1

MOTIVAÇÃO

A ocorrência de aplicações de Programação Linear onde as restrições tem a forma $a_i \leq \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j \leq b_i$ é frequente.

Por exemplo, o problema clássico de formulações de rações de custo mínimo, consiste em escolher de um conjunto de N ingredientes (milho, soja, farinha de peixe, etc.) as frações x_j ($j = 1, 2, \dots, N$) de cada ingrediente que deverá compor uma unidade (digamos uma tonelada) de uma certa ração, sendo que esta ração especifica que a fração do nutriente i , dada por $\sum_{j=1}^N A_{ij} x_j$, não deve ser inferior a a_i nem superior a b_i , onde A_{ij} representa a fração do nutriente i em uma unidade (tonelada) do ingrediente j . A função objetiva deste problema é $z = \sum_{j=1}^N c_j x_j$, onde c_j é o preço de uma tonelada do ingrediente j . Note que não estamos especificando limitações nos estoques dos ingredientes. Interessa apenas determinar as frações de cada ingrediente na ração, sendo que algumas delas poderão ser zero. Evidentemente a restrição $\sum_{j=1}^N x_j \leq 1$ deve ser considerada. Poderemos supor que ela corresponde a um nutriente fictício M , com $A_{Mj} = 1$, $j = 1, 2, \dots, N$ e $b_M = 1$. Quando a solução for tal que $\sum_{j=1}^N x_j < 1$, temos o caso em que é possível satisfazer as restrições nutricionais sem completar uma tonelada. Este peso poderia ser completado com ingredientes inócuos (por

exemplo, caolin) cujo coeficiente de custo c_r na função objetivo tem o valor zero. Assim, a M -ésima restrição seria representado por $A_M \leq \sum_{j=1}^N A_{Mj} x_j \leq b_M$, com $A_{MJ} = A_M = b_M = 1$. Isto não exclui a possibilidade de haver uma linha na matriz $A = (A_{ij})$ referente ao "nutriente" caolin, digamos a $(M-1)$ -ésima linha, onde $A_{M-1,j}$ representa a fração de caolin do ingrediente j , sendo, evidentemente $A_{M-1,r} = 1$ onde r representa o ingrediente caolin. Os valores a_{M-1} e b_{M-1} seriam os limites de caolin na ração.

No problema descrito acima não apareceram restrições de estocagem. Suponhamos implicitamente que os estoques de ingredientes são infinitos. Este é o caso em que trabalhamos com c_j representando os preços de mercado, mercado este capaz de suprir quaisquer quantidades dos ingredientes. Assim, por exemplo, se quisermos produzir a quantidade Q da ração, então podemos sempre comprar a quantidade $Q \cdot x_j^*$ do ingrediente j , onde x_j^* é a fração ótima daquele ingrediente na ração.

Entretanto, em muitas situações práticas as restrições de estoques ocorrem naturalmente. Por exemplo, as limitações superiores do tipo $Q \cdot x_j \leq L_j$ podem significar mera impossibilidade de dispor de mais do que L_j toneladas do ingrediente j durante o período de produção da ração. Restrições do tipo $\ell_j \leq Q \cdot x_j$ podem significar a necessidade de consumir pelo menos ℓ_j do ingrediente j o qual poderá estar em processo de deteriorização e precisa ser consumido rapidamente.

Quando há várias rações, digamos K , para serem produzidas nas quantidades $Q_1, Q_2, \dots, Q_K$; e quando há limitações de esto-

ques, o problema da produção dessas rações se apresenta na forma:

$$\text{Min } z = c^t x_1 + c^t x_2 + \dots + c^t x_K$$

sujeito a:

$$l \leq Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + \dots + Q_K x_K \leq L$$

$$a^1 \leq A x_1 \leq b^1$$

$$a^2 \leq A x_2 \leq b^2$$

$$\vdots$$

$$a^K \leq A x_K \leq b^K$$

onde

$$l = (l_1, l_2, \dots, l_N)^t$$

$$L = (L_1, L_2, \dots, L_N)^t$$

sendo l_j e L_j os limites inferior e superior do estoque do ingrediente j ;

$$x_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{Nk})^t,$$

sendo x_{jk} a fração do ingrediente j na ração k ;

$$a^k = (a_1^k, a_2^k, \dots, a_M^k)^t$$

$$b^k = (b_1^k, b_2^k, \dots, b_M^k)^t$$

sendo a_i^k e b_i^k os limites inferior e superior da fração do nutriente i na ração k .

Q_k = quantidade requerida da ração k .

Note que este problema é um problema que pode ser resolvido por métodos de decomposição, os quais dependem da solução de vários subproblemas com restrições da forma $a \leq Ax \leq b$. Portanto há forte interesse em se obter soluções eficientes para estes subproblemas.

DEFINIÇÃO: Chamamos de problema de programação linear com restrições canalizadas e variáveis não negativas (PLRC), ao problema:

$$\begin{aligned} \text{Min } c^t x \\ \text{sujeito: } a \leq Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

onde $A = (A_{ij})$, $a = (a_i)$, $b = (b_i)$, $x = (x_j)$, $c = (c_j)$ $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Um problema de PLRC, claramente, é equivalente ao seguinte problema padrão de programação linear (PPL):

$$\begin{aligned} \text{Min } c^t x \\ \text{sujeito a: } Ax \leq b \\ -Ax \leq -a \\ x \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Desta forma, o problema (1) pode ser resolvido pela aplicação direta do método simplex ao problema (2). Porém, este caminho tem o inconveniente de utilizar bases de dimensões $2m$ (onde m é o número de restrições do problema original). Sabe-se que o método simplex é mais eficiente para problemas com bases de menores

dimensões, isto é, problemas com menor número de restrições.

Neste trabalho, o interesse principal é a utilização do método simplex no problema de PLRC. Apresentamos, entretanto, alguns algoritmos que resolvem o problema de PLRC modificado.

CAPÍTULO 2

SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA

Seja o problema:

$$\begin{array}{ll} \max & c^t x \\ \text{sujeito à:} & a \leq Ax \leq b \end{array} \quad (3)$$

Evidentemente, o problema (3) pode ser posto na formado problema (1) e vice-versa. Nas seções (2.1) a (2.3) usaremos a forma (3) para compatibilidade de notação com as referências [1,3,4].

Definição: Dizemos que o problema (3) é factível e limitado se existe $x^* \in \Omega = \{x : a \leq Ax \leq b\}$ e $c^t x^* \geq c^t x$ para todo $x \in \Omega$ e $c^t x^* < \infty$.

Notação:

$$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in R\};$$

$A_{m \times n}$: matriz com m linhas e n colunas,

POSTO(A) : maior número de linhas linearmente independente da matriz A ,

$R_r^{m \times n}$: conjunto das matrizes $m \times n$ de posto r ,

A^t : transposta da matriz A ,

$\text{Im}(A) = \{y \in R^m : y = Ax \text{ para algum } x \in R^n\}$,

A_i : i -ésima linha da matriz A .

$$N(A) = \{x : Ax = 0\}$$

$$N(A)^\perp = \{y : y^t x = 0, \text{ para todo } x \in N(A)\}$$

2.1. SOLUÇÕES EXPLÍCITAS

Ben-Israel e Charnes [1] provaram que o problema (3), quando factível, é limitado, se e somente se $c \in N(A)^\perp$. É também mostrado em [1] que se A é de posto completo por linhas, isto é, $\text{posto}(A) = m$ e A com m linhas, e se T é uma matriz $n \times m$ com colunas $t_1, t_2, \dots, t_m$ satisfazendo $ATA = A$, então

$$x = \sum_{\{-\}} t_i a_i + \sum_{\{+\}} t_i b_i + \sum_{\{0\}} t_i [\sigma_i b_i + (1 - \sigma_i) a_i] + N(A) \quad (4)$$

resolve (3), onde $\sum_{\{-\}}$, $\sum_{\{+\}}$, $\sum_{\{0\}}$ são somatórias executadas em i , sobre valores negativos, positivos ou nulos de $c^t t_i$ respectivamente, e $0 \leq \sigma_i \leq 1$.

2.2. UM MÉTODO DE SUBOTIMIZAÇÃO PARA RESOLVER O PROBLEMA (3):

SUBOPT 1 [5].

Este método resolve o problema (3) onde a matriz A é de posto completo por colunas, entretanto se A não tem esta propriedade, utilizamos os lemas dados a seguir.

LEMA 1: Sejam $A \in R_r^{m \times n}$ e $D \in R_r^{r \times n}$ tal que $\text{Im}(A^t) = \text{Im}(D^t)$ (5)

então

$$AD^t \in R_r^{m \times r}$$

A matriz D pode ser escolhida como uma submatriz de linhas de A de posto r .

Usaremos a notação $RC(c,a,A,b)$ para nos referirmos ao problema (3).

LEMA 2: Sejam $RC(c,a,A,b)$ dado com $c \in N(A)^\perp$ onde $A \in R_r^{m \times n}$ e $D \in R_r^{r \times n}$ satisfazendo (5). Então as soluções ótimas de $RC(c,a,A,b)$ são da forma

$$D^t y^* + N(A) \quad (6)$$

onde y^* é uma solução ótima de $RC(Dc,a,AD^t,b)$.

PROVA: Da hipótese $c \in N(A)^\perp$ e do fato conhecido que $\text{Im}(A^t) = N(A)^\perp$, segue que soluções ótimas de $RC(c,a,A,b)$ são da forma $x^* + N(A)$, onde x^* é uma solução ótima de

$$\begin{aligned} \max \quad & c^t x \\ \text{sujeito a:} \quad & a \leq Ax \leq b \\ & x \in \text{Im}(A^t) \end{aligned} \quad (7)$$

De (5), a expressão (7) é equivalente a

$$x = D^t y \quad (8)$$

para algum $y \in R^r$, substituindo (8) em (3) segue a tese.

2.2.1. - UM PROBLEMA AUXILIAR

Consideremos o problema (PA):

$$\begin{aligned} \max \quad & c^t x \\ \text{sujeito } \tilde{a}: \quad & a \leq Bx \leq b \end{aligned} \quad (9)$$

$$\bar{a} \leq dx \leq \bar{b} \quad (10)$$

onde $B \in R_r^{r \times r}$, $d \in R_r^{1 \times r}$ e $a \leq b$ e $\bar{a} \leq \bar{b}$

Substituindo

$$z = Bx \quad (11)$$

em (PA), temos:

$$\max \quad c^t B^{-1} z \quad (12)$$

$$\text{sujeito } \tilde{a}: \quad a \leq z \leq b \quad (13)$$

$$\bar{a} \leq dB^{-1} z \leq \bar{b} \quad (14)$$

(PA) é factível, se e somente se o problema (12), (13), (14) é factível, e soluções ótimas de (PA) são da forma $x^* = B^{-1} z^*$, onde z^* é uma solução ótima de (12), (13), (14). Portanto, resolveremos (PA) usando o problema equivalente (12), (13), (14).

NOTA 1: As soluções ótimas z^0 do subproblema (12), (13) são da forma:

$$z_i^0 = \begin{cases} b_i & \text{se } (c^t B^{-1})_i < 0 \\ a_i & \text{se } (c^t B^{-1})_i > 0 \\ \theta_i b_i + (1 - \theta_i) a_i & \text{se } (c^t B^{-1})_i = 0 \end{cases} \quad (15)$$

com $0 \leq \theta_i \leq 1$.

NOTA 2: Se $\bar{a} \leq dB^{-1} z^0 \leq \bar{b}$ então z^0 é solução ótima de (12), (13), (14).

NOTA 3: Se (PA) é factível e z^0 não satisfaz (14), digamos $dB^{-1}z^0 > \bar{b}$, então existe uma solução ótima de (12), (13), (14) que satisfaz $dB^{-1}z^* = \bar{b}$. Assumimos sem perda de generalidades que z^0 satisfaz (14) ou a desigualdade superior é violada, pois se $dB^{-1}z^0 < \bar{a}$, a desigualdade é equivalente à $-dB^{-1}z^0 > -\bar{a}$ e então redefinimos $dB^{-1}, \bar{b}$ de maneira óbvia. Seja

$$\Delta = \bar{b} - dB^{-1}z^0 \quad (16)$$

a quantidade em que (14) está sendo violada à z^0 .

De (15), observamos que as componentes z_i^0 que podem ser mudadas, para atingir a factibilidade de (14) (mantendo a factibilidade de (13)), são aquelas indexadas por:

$$Q = \{i : 1 \leq i \leq r, (dB^{-1})_i \neq 0, \gamma_i = \frac{(c^t B^{-1})_i}{(dB^{-1})_i} \geq 0\}$$

Reordenamos os índices de Q (digamos q índices) por $Q = \{k_1, k_2, \dots, k_q\}$, onde

$$\gamma_{k_1} \leq \gamma_{k_2} \leq \dots \leq \gamma_{k_q} \text{ e } k_i < k_{i+1} \text{ se } \gamma_i = \gamma_{i+1}.$$

LEMA 3. Sejam (PA), z^0 , Δ , $Q = \{k_1, k_2, \dots, k_q\}$ e $\{\gamma_i : i \in Q\}$ como definidos acima.

- i) se z^0 satisfaz (14) então (PA) é factível e $x^* = B^{-1}z^0$ é uma solução ótima de (PA).
- ii) (PA) é infactível se e somente se $\Delta < 0$ e $\sum_{i \in Q} \delta_i (dB^{-1})_i > \Delta$

onde

$$\delta_i = \begin{cases} a_i - z_i^0 & \text{se } (dB^{-1})_i > 0 \\ b_i - z_i^0 & \text{se } (dB^{-1})_i < 0 \end{cases}$$

para $i \in Q$.

iii) Se (PA) é factível, sejam

$$p = \min \{i : 1 \leq i \leq q, \sum_{j=1}^i \delta_{k_j} (dB^{-1})_{k_j} \leq \Delta\} \quad (17)$$

e

$$\theta = \frac{\Delta - \sum_{j=1}^{p-1} \delta_{k_j} (dB^{-1})_{k_j}}{(dB^{-1})_{k_p}} \quad (18)$$

então a solução ótima de (PA) é

$$\begin{aligned} x^* &= B^{-1}(z^0 + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_{k_i} e_{k_i} + \theta e_{k_p}) = \\ &= B^{-1}z^0 + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_{k_i} t_{k_i} + \theta t_{k_p} \end{aligned} \quad (19)$$

onde $t_i, i = 1, \dots, r$ são as colunas de B^{-1} .

NOTA 4: Se (PA) é factível, é sempre possível retirar uma restrição sem afetar a solução ótima. Na parte 1) do lema 3 por exemplo, a restrição (10) pode ser retirada de (PA) sem afetar x^* . Analogamente,

mente, em iii), a k_p -ésima restrição pode ser retirada, onde p é dado por (17). Para ver isso, note que (19) independe de a_{k_p} e b_{k_p} .

NOTA 5: No caso iii) do lema 3, se

$$(c^t_B)^{-1}_i \neq 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (20)$$

então

$$c^t_{x^*} < c^t_B (d_B)^{-1} z^0, \quad (21)$$

Pois de (15) e $(d_B)^{-1} z^0 > \bar{b}$, segue que

$$\delta_i \leq 0 \quad \text{se} \quad (c^t_B)^{-1}_i > 0$$

$$\delta_i \geq 0 \quad \text{se} \quad (c^t_B)^{-1}_i < 0$$

$$\theta \leq 0 \quad \text{se} \quad (c^t_B)^{-1}_{k_p} > 0$$

$$\theta \geq 0 \quad \text{se} \quad (c^t_B)^{-1}_{k_p} < 0$$

Então a desigualdade (21) segue imediatamente de (19).

2.2.2. - O ALGORÍTIMO SUBOPT 1.

O problema a ser resolvido é:

$$\max c^t x$$

sujeito a:

$$a \leq A x \leq b$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Caso A não seja de posto n , aplicamos os lemas 1 e 2.

Defina $J(x)$ para todo $x \in R^n$, como segue:

$$J(x) = \{i : 1 \leq i \leq m \text{ e } (Ax)_i < a_i \text{ ou } (Ax)_i > b_i\} \quad (22)$$

e seja v o índice de iteração. Ache um conjunto de n índices $H(0) \subset \{1, \dots, m\}$ tal que $\{A_i : i \in H(0)\}$ é um conjunto de linhas da matriz A , linearmente independentes. Escolha $s(0) \in \{1, \dots, m\}$ tal que $s(0) \notin H(0)$ e proceda a primeira iteração ($v=1$). Seja $v \geq 1$. Ache $x^{(v)}$, uma solução ótima do seguinte problema auxiliar:

$$(PA.v): \quad \max c^t x$$

$$\text{sujeito a: } a_i \leq A_i x \leq b_i \quad i \in H(v-1) \quad 23.v$$

$$a_{s(v-1)} \leq A_{s(v-1)} x \leq b_{s(v-1)} \quad 24.v$$

onde $H(v-1)$ e $s(v-1)$ são definidos ao fim da iteração $v-1$, e A_i é a i -ésima linha de A .

Existe três casos possíveis:

- a) $(PA.v)$ é infactível, isto implica que $RC(c,a,A,b)$ é infactível,
- b) $(PA.v)$ é factível e $J(x^{(v)}) = \emptyset$, neste caso $x^{(v)}$ é uma solução ótima de $RC(c,a,A,b)$,
- c) $(PA.v)$ é factível e $J(x^{(v)}) \neq \emptyset$.

No caso c) seja $s(v)$ escolhido por $s(v) \in J(x^{(v)})$ 25.v

e seja

$$H(v) = H(v-1) \cup \{s(v-1)\} / k_{P(v)} \quad 26.v$$

onde / denota retirada; $p(v)$ é dado por (17) para o problema $(PA.v)$ e $k_{p(v)}$ é o $p(v)$ -ésimo elemento do conjunto ordenado Q para o $(PA.v)$.

Se a restrição adicional for satisfeita por z^0 , isto é, o caso i) do lema 3 ocorreu, faça $H(v)=H(v-1)$. Da definição de $s(v)$ é óbvio que o caso i) do lema 3, no algoritmo SUBOPT 1, pode ocorrer somente para $v=1$, desde então deverá ser ignorado para $v>1$. se os casos a) ou b) acima ocorrem, termina o problema $RC(c,a,A,b)$ com infactibilidade (caso (a)) ou com $x^{(v)}$ sendo solução ótima (caso b)). No caso c) proceda a iteração $v+1$.

O Lema 3 pode ser usado para resolver $(PA.v)$ somente se $A^{(v-1)}$ for não singular, onde $A^{(v-1)}$ é a matriz de $(PA.v)$ formada pelas linhas A_i de A , $i \in H(v-1)$.

LEMA 4: Se o algoritmo SUBOPT 1 é aplicado a $RC(c,a,A,b)$, então $A^{(v)}$ é não singular para $v \geq 1$.

PROVA: Por indução.

$A^{(0)}$ é não singular por escolha. Suponha que $A^{(v-1)}$ seja não singular. Desde que $A^{(v)}$ difere de $A^{(v-1)}$ somente na $k_{p(v)}$ -ésima linha, a qual é trocada por $A_{s(v-1)}$, segue que $A^{(v)}$ é não singular, se somente se,

$$(A_{s(v-1)} (A^{(v-1)})^{-1})_{k_{p(v)}} \neq 0.$$

Entretanto, a desigualdade acima ocorre pela maneira com que Q é

construído.

TEOREMA 1: O algoritmo SUBOPT 1 quando aplicado ao problema $RC(c, a, A, b)$, usando a expressão (29) com (15), é finito.

PROVA: Desde que o problema $(PA.v + 1)$ é obtido de $(PA.v)$, segundo (25. v) e (26. v), uma restrição $(k_{P(v)} - \text{ésima})$ que não afeta $x^{(v)}$ é retirada, e uma restrição $(s(v) - \text{ésima})$ não satisfeita por $x^{(v)}$ é adicionada. Assim,

$$c^t x^{(v+1)} \leq c^t x^{(v)}. \quad (27)$$

Através de uma perturbação, essencialmente equivalente àquela usada por Charnes [2] para o método simplex, podemos excluir a igualdade em (27). A desigualdade estrita em (27) garante que um problema auxiliar (PA), no algoritmo SUBOPT 1, não se repete. Como existe um número finito de (PA) distintos, garante-se que ocorrerá um número de iterações.

Considere o problema auxiliar $(PA.v)$, perturbando a função objetivo como se segue:

$$c_\epsilon = c + \sum_{i \in H(v-1)} \epsilon_i A_i \quad (28)$$

para $\epsilon_i > 0$ suficientemente pequenos. Soluções ótimas deste problema perturbado são soluções do problema auxiliar original.

Entretanto, de (28) nenhuma das componentes de

$$c_{\epsilon}^t(A^{(v-1)})^{-1}$$

se anulam.

A $k_{p(v)}$ -ésima restrição de $(PA.v)$ não afeta $x^{(v)}$. Na solução de $(PA.v+1)$ a expressão (15) pode ser trocada por

$$z^0 = A^{(v)} \cdot x^{(v)}.$$

Usando a nota 5,

$$c_{\epsilon}^t x^{(v+1)} < c_{\epsilon}^t(A^{(v)})^{-1} \cdot z^0 = c_{\epsilon}^t(A^{(v)})^{-1} A^{(v)} \cdot x^{(v)} = c_{\epsilon}^t \cdot x^{(v)}$$

$$\text{ou } c_{\epsilon}^t \cdot x^{(v+1)} < c_{\epsilon}^t \cdot x^{(v)}.$$

Assim o SUBOPT 1 é então finito, quando aplicado ao problema perturbado.

Na prática, não é necessário introduzir ϵ_i explicitamente para garantir que a sequência $x^{(v)}$ de soluções de $(PA.v)$ coincida com a correspondente sequência do problema perturbado. Uma mudança no vetor custo poderá afetar o algoritmo SUBOPT 1 em dois lugares: na expressão (15), quando z^0 é determinado na solução de cada subproblema, e na ordem de Q .

Uma perturbação de ϵ_i suficientemente pequena não afeta a ordem de Q .

Na expressão (15) uma perturbação de c por c_{ϵ} , indicará como θ_i será escolhido para cada subproblema. De (28) segue

que

$$[c_{\varepsilon}^t(A^{(v-1)})^{-1}]_i = [c^t(A^{(v-1)})^{-1}]_i + \varepsilon_i,$$

e então temos:

- i) se $[c^t(A^{(v-1)})^{-1}]_i \neq 0$, então $\text{sgn} \{[c^t(A^{(v-1)})^{-1}]_i\} = \text{sgn} \{[c_{\varepsilon}^t(A^{(v-1)})^{-1}]_i\}$ para ε_i suficientemente pequeno,
- ii) se $[c^t(A^{(v-1)})^{-1}]_i = 0$, então $[c_{\varepsilon}^t(A^{(v-1)})^{-1}]_i = \varepsilon_i > 0$.

Assim $\theta_i^{\varepsilon} = 1$, então basta escolher θ_i para $(PA \cdot v)$ como

$$\theta_i = 1 \text{ se } [c^t(A^{(v-1)})^{-1}]_i = 0 \quad (29)$$

Note que a escolha feita em (29) depende da perturbação dada em (28).

2.3. OUTRO MÉTODO DE SUBOTIMIZAÇÃO PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA (3), SUBOPT 2 [3].

Na realidade este algoritmo descrito por Charnes, Granot, Philips [3], difere do anterior (SUBOPT 1), apenas na solução do problema auxiliar da seção 2.2.1. Aqui a matriz B não necessariamente precisa pertencer ao conjunto $R_n^{n \times n}$ como na seção 2.2.1, desde então os lemas 1, 2 não serão aplicados.

2.3.1. UM SUBPROBLEMA

Consideremos o problema (SP):

$$\max c^t x$$

$$a \leq Bx \leq b \quad (30)$$

$$\bar{a} \leq dx \leq \bar{b}, \quad (31)$$

onde $B \in R_m^{m \times n}$ (B é de posto completo por linhas) e d um vetor tal que posto $(B^T, d^T) = m$.

Desde que $B \in R_m^{m \times n}$, existe uma matrix $B^\#$ tal que $BB^\# = I$ (onde I é a matriz identidade). A matrix $B^\#$ é chamada inversa à direita de B .

Fazendo $z = Bx$, temos $x = B^\# z + N(B)$, o que substituindo em (SP) produz:

$$\max c^t B^\# z + c^t N(B) \quad (32)$$

$$a \leq z \leq b \quad (33)$$

$$\bar{a} \leq d B^\# z \leq \bar{b} \quad (34)$$

Supondo (SP) limitado, isto é, $c \perp N(B)$, o termo $c^t \cdot N(B)$ desaparece de (32).

Considerando

$$\tilde{z}_i = \begin{cases} z_i - a_i & \text{se } dB_i^\# \geq 0 \\ b_i - z_i & \text{se } dB_i^\# < 0, \end{cases} \quad (35)$$

de (33) obtemos

$$0 \leq \tilde{z}_i \leq b_i - a_i. \quad (36)$$

Se $\{+,0\}$ refere aos índices i para os quais $dB_i^{\#} \geq 0$ e $\{-\}$ aos índices i para os quais $dB_i^{\#} < 0$, onde $B_i^{\#}$ é a i -ésima coluna de $B^{\#}$, então (32) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \max_{\{+,0\}} \sum c_{B_i^{\#}}^t (\tilde{z}_i + a_i) + \sum_{\{-\}} c_{B_i^{\#}}^t (b_i - \tilde{z}_i) = \\ = \max_{\{+,0\}} \sum c_{B_i^{\#}}^t a_i + \sum_{\{-\}} c_{B_i^{\#}}^t b_i + \sum_{\{+,0\}} c_{B_i^{\#}}^t \tilde{z}_i + \sum_{\{-\}} (-1) c_{B_i^{\#}}^t \tilde{z}_i \end{aligned} \quad (37)$$

$$\text{seja } \eta(\tilde{z}) = \sum_{\{+,0\}} dB_i^{\#} (\tilde{z}_i + a_i) + \sum_{\{-\}} dB_i^{\#} (b_i - \tilde{z}_i) \quad (38)$$

então

$$\eta(0) = \sum_{\{+,0\}} dB_i^{\#} a_i + \sum_{\{-\}} dB_i^{\#} b_i \quad (39)$$

usando (36), (37), (39), obtemos um problema equivalente

$$\max_{\{+,0\}} \sum c_{B_i^{\#}}^t \tilde{z}_i + \sum_{\{-\}} (-1) c_{B_i^{\#}}^t \tilde{z}_i = \sum_{i=1}^n \text{sgn}(dB_i^{\#}) c_{B_i^{\#}}^t \cdot \tilde{z}_i \quad (40)$$

$$0 \leq \tilde{z}_i \leq b_i - a_i \quad i = 1, \dots, m \quad (36)$$

$$\bar{a} - \eta(0) \leq \sum_{i=1}^m |dB_i^{\#}| \tilde{z}_i \leq \bar{b} - \eta(0) \quad (41)$$

onde

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

(40), (36), (41) é um problema com variáveis canalizadas e uma úni-

ca restrição canalizada, e os coeficientes de (41) são não negativos.

NOTA 1. Podemos supor que $|dB_i^{\#}| > 0$ em (41) pois se $dB_i^{\#} = 0$ temos:

$$\tilde{z}_i = \begin{cases} b_i - a_i & \text{se } c^t B_i^{\#} > 0 \\ 0 & \text{se } c^t B_i^{\#} \leq 0 \end{cases} \quad (42)$$

e então reorganizar ℓ variáveis nas quais $dB_i^{\#} \neq 0$ $1 \leq i \leq \ell$.

LEMA 1. Condições necessárias e suficientes para que (36) e (41) sejam factíveis são $\eta(0) \leq \bar{b}$ e $\eta(b-a) \geq \bar{a}$.

PROVA: Basta substituir os limites superior e inferior de (36) em (41).

Se o problema dado por (40), (36), (41) é factível então seja γ_i a fração do correspondente coeficiente de $\tilde{z}_i$ em (40) e (41) para $1 \leq i \leq \ell$. Assim P_i é escrito como:

$$\gamma_i = \text{Sgn}(dB_i^{\#}) c^t B_i^{\#} / |dB_i^{\#}|$$

seja ainda $\{\gamma_{(i)}\}$ o conjunto dos γ_j arranjados na ordem decrescente.

NOTA 2: Desde que o denominador de γ_j é sempre positivo (Nota 1); os elementos em $\{\gamma_{(i)}\}$ estão ordenados de tal maneira que aqueles

que tem valores positivos para $\text{Sgn}(\text{dB}_i^{\#}) c_{B_i}^{\#}$ aparecem primeiro, e aqueles com valores negativos aparecem por último.

Sejam: P_1 o menor inteiro tal que

$$\sum_{i=1}^{P_1} |\text{dB}_{(i)}^{\#}| (b_{(i)} - a_{(i)}) \geq \bar{a} - \eta(0), \text{ quando } \bar{a} - \eta(0) \geq 0, \text{ ou } P_1 = 0 \text{ caso}$$

contrário;

P_2 o menor inteiro tal que

$$\sum_{i=1}^{P_2} |\text{dB}_{(i)}^{\#}| (b_{(i)} - a_{(i)}) > \bar{b} - \eta(0) \text{ se tal índice existe, ou } P_2 = \ell + 1$$

caso contrário;

P o maior inteiro para o qual $P_{(i)} \geq 0$, se tal índice existe, ou $P = 0$ caso contrário.

A solução ótima $\tilde{z}^*$ a (17) (18) (19) pode ser escrita para diferentes casos nas seguintes maneiras:

Caso I) Para $P < P_1 \leq P_2$ a solução ótima é:

$$\tilde{z}^*_{(i)} = \begin{cases} b_{(i)} - a_{(i)}; & 1 \leq i \leq P_1 - 1 \\ \sigma(P_1) = [\bar{a} - \eta(0) - \sum_{i=1}^{P_1-1} |\text{dB}_{(i)}^{\#}| (b_{(i)} - a_{(i)})] / |\text{dB}_{(P_1)}^{\#}|, & i = P_1 \\ 0 & ; \quad P_1 + 1 \leq i \leq \ell \end{cases} \quad (43)$$

Caso II) Para $P_1 \leq P_2 \leq P$ a solução ótima é:

$$\tilde{z}^*_{(i)} = \begin{cases} b_{(i)} - a_{(i)}; & 1 \leq i \leq P_2 - 1 \\ \sigma(P_2) = [\bar{b} - \eta(0) - \sum_{i=1}^{P_2-1} |\text{dB}_{(i)}^{\#}| (b_{(i)} - a_{(i)})] / |\text{dB}_{(P_2)}^{\#}|, & i = P_2 \\ 0 & ; \quad P_2 + 1 \leq i \leq \ell \end{cases} \quad (44)$$

Caso III) Para $P_1 \leq P < P_2$ a solução ótima é:

$$\begin{aligned} b_{(i)} - a_{(i)} ; 1 \leq i \leq P \\ \bar{z}_{(i)}^* = \begin{cases} 0 & ; P+1 \leq i \leq l. \end{cases} \end{aligned} \quad (45)$$

Usando (42) com (43), (44), (45) podemos determinar o valor correspondente de z^* . Desde que $\bar{z}^*$ é ótimo para o problema (40), (36); (41), o qual é equivalente a (32), (33) (34), concluímos que z^* é ótimo para o problema (32), (33), (34).

TEOREMA 1. Se factível, o conjunto de soluções ótimas do problema (SP) é dado por $x^* = B^{\#} z^* + N(B)$.

NOTA 3: Observe que x^* é independente de $a_{(P_1)}$ e $b_{(P_1)}$ se o caso I ocorre, e independente de $a_{(P_2)}$ e $b_{(P_2)}$, se o caso II ocorre. Para mostrar isto, notamos que os termos em z^* que podem depender de $a_{(P_1)}$ e $b_{(P_1)}$ no Caso I ($a_{(P_2)}$ e $b_{(P_2)}$ no Caso II) são somente $\sigma_{(P_1)} + a_{(P_1)}$ e $b_{(P_1)} - \sigma_{(P_1)}$ ($\sigma_{(P_2)} + \sigma_{(P_2)}$ e $b_{(P_2)} - \sigma_{(P_2)}$)

Entretanto,

$$\begin{aligned} \sigma_{(P_1)} + a_{(P_1)} &= [d - \sum_{\{+\}} dB_i^{\#} a_i - \sum_{\{-\}} dB_i^{\#} b_i + \\ &- \sum_{i=1}^{P_1-1} |dB_{(i)}^{\#}| (b_{(i)} - a_{(i)}) + a_{(P_1)} dB_{(P_1)}^{\#}] / dB_{(P_1)}^{\#} \end{aligned} \quad (24)$$

((24) ocorre se $(P_1) \in \{+\}$),

então

$$\sigma_{(P_1)} + a_{(P_1)} = [\bar{a} - \sum_{i \in \{+\}} \frac{1}{P_1} dB_i^{\#} a_i - \sum_{i \in \{-\}} \frac{1}{P_1} dB_i^{\#} b_i - \sum_{i=1}^{P_1-1} |dB_{(i)}^{\#}| (b_{(i)} - a_{(i)})] / dB_{(P_1)}^{\#}$$

o qual independe de $a_{(P_1)}$ e $b_{(P_1)}$. A prova dos outros casos é obtido de maneira similar.

NOTA 4: Se o problema (SP) é factível, sempre é possível retirar a restrição do conjunto de restrições (30) e (31) que não afeta a solução ótima. Isto segue da nota (3), na qual mostrou que no Caso I x^* é independente de $a_{(P_1)}$ e $b_{(P_1)}$. Assim, a restrição (P_1) de (SP) pode ser retirada. No Caso II, a restrição (P_2) de (SP) pode ser retirada e no Caso III a restrição adicional (6) pode ser retirada. Em cada um dos casos acima, o fato de retirar a restrição citada não afetará as soluções ótimas.

2.3.2. O ALGORITMO SUBOPT 2

O problema a ser resolvido é:

$$\max c^t x$$

sujeito a: $a \leq Ax \leq b$

onde $A \in R_r^{m \times n}$. Defina $J(x), H(0), S(0)$ como em 2.2.2 (aqui $H(0)$ é um conjunto de r índices) e proceda de maneira análoga ao algo-

ritmo SUBOPT 1.

2.4. UM PROBLEMA EQUIVALENTE

Consideremos agora o problema (PLRC) como definido no capítulo 1,

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{sujeito a: } & a \leq Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

TEOREMA: o problema de PLRC acima é equivalente ao seguinte problema de programação linear com variáveis canalizadas (PE):

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{sujeito} \quad & Ax + y = b \\ & 0 \leq y \leq b - a \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

PROVA: Sejam $S = \{x : a \leq Ax \leq b\}$

$$\bar{S} = \{(x, y) : Ax + y = b, 0 \leq y \leq b - a\}.$$

Mostremos que se $x \in S$, então existe y tal que $(x, y) \in \bar{S}$ e se $(x, y) \in \bar{S}$, então $x \in S$.

- i) seja $x \in S$, logo $Ax \leq b$ e $Ax \geq a$. tome $y = b - Ax$, então
- $$y = b - Ax \leq b - a$$
- $$y = b - Ax \geq b - b \geq 0,$$

logo $Ax + y = b$ e $0 \leq y \leq b - a$, portanto $(x, y) \in \bar{S}$.

ii) seja $(x, y) \in \bar{S}$, logo $Ax + y = b$ com $0 \leq y \leq b - a$.

Então $Ax = b - y \leq b$ e $Ax = b - y \leq b - (b - a) = a$, isto é, $a \leq Ax \leq b$, portanto $x \in S$. c.g.d.

Há vantagem em trabalhar com o problema equivalente (PE), pois trata-se de um problema bem conhecido de programação linear com variáveis canalizadas, onde utiliza-se o método simplex com pequenas modificações (método simplex canalizado, vide apêndice), operando com bases de dimensões m .

2.5. O PROBLEMA DUAL

Uma outra alternativa para a solução do problema de PLRC, é resolve-lo através de seu problema dual, que daremos a seguir.

Consideremos o problema de PLRC na forma padrão de programação linear (2),

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{sujeito a:} \quad & Ax \leq b \\ & -Ax \leq -a \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

O problema dual de (2) é bem conhecido como:

$$\begin{aligned} \max \quad & (b, -a) (u, v)^t \\ \text{sujeito a:} \quad & (u, v) \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \leq c \\ & (u, v) \leq 0 \end{aligned}$$

ou, na forma padrão de programação linear redefinido (u,v) :

$$\begin{aligned} & \max -b^t u^t + a^t v^t \\ \text{sujeito } \tilde{a}: & -A^t u^t + A^t v^t \leq c \quad (\text{PD}) \\ & (u,v) \geq 0. \end{aligned}$$

Se tomarmos o dual do problema (PE) dado no teorema da seção 2.4, obteremos o problema (PD).

2.6. UM EXEMPLO RESOLVIDO

Nesta seção resolveremos um exemplo simples utilizando as alternativas das seções anteriores.

Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \max x + y \\ \text{sujeito } & 0 \leq x \leq 1 \\ & 0 \leq y \leq 1 \\ & 1 \leq 3x+y \leq 3 \\ & -3 \leq -x+y \leq 0 \end{aligned}$$

a) SUBOPT 1

$$v=1) H(0) = \{1,2\}; s(0) = 3$$

$$\begin{aligned} \text{P.A.1)} \quad & \max x + y \\ & 0 \leq x \leq 1 \\ & 0 \leq y \leq 1 \\ & 1 \leq 3x+y \leq 3 \end{aligned}$$

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(A^{(0)}\right)^{-1} = A^{(0)}$$

$$c^t \left(A^{(0)}\right)^{-1} = (1, 1)$$

$$z^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{s(0)} \left(A^{(0)}\right)^{-1} z^0 = (3, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 > 3 \quad 3 \text{ então } \Delta = -1.$$

$$\gamma_1 = 1/3, \gamma_2 = 1/1; \text{ então } k_1 = 1, k_2 = 2.$$

$$\delta = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

cálculo de p :

$$\delta_{k_1} \left(A_{s(0)} \left(A^{(0)}\right)^{-1}\right)_{k_1} = 1.3 = -3 \leq \Delta \text{ portanto } p = 1$$

$$\theta = \frac{\Delta}{\left(A_{s(0)} \left(A^{(0)}\right)^{-1}\right)_{k_1}} = -1/3$$

$$X^{(1)} = \left(A^{(0)}\right)^{-1} z^0 + \theta t_{k_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1/3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = -2/3 + 1 = 1/3 > 0 \quad \text{logo } J(X^{(1)}) = \{4\}.$$

$$v = 2) \quad H(1) = \{2 \ 3\}; \quad s(1) = 4$$

$$\max \quad x + y$$

$$P.A.2) \quad 1 \leq 3x+y \leq 3$$

$$0 \leq y \leq 1$$

$$-3 \leq -x+y \leq 0$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A^{(1)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c^t (A^{(1)})^{-1} = (1 \ 1) \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1/3 \ 2/3)$$

$$z^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{s(1)} (A^{(1)})^{-1} z^0 = (-1 \ 1) \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1/3 \ 4/3) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = + 1/3 > 0$$

então $\Delta = -1/3$

$\gamma_2 = 1/2$ então $K_1 = 2$ (note que $\gamma_1 < 0$)

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de p:

$$\delta_{k_1} (A_{s(1)} (A^{(1)})^{-1})_{k_1} = -1 \cdot 4/3 = -4/3 < -1/3$$

portanto $p = 1$.

$$\theta = \frac{\Delta}{(A_{s(1)} (A^{(1)})^{-1})_{k_1}} = -\frac{1/3}{4/3} = -1/4$$

$$x^{(2)} = (A^{(1)})^{-1} z^0 + \theta t_{k_1} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} - 1/4 \cdot \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$0 \leq 3/4 \leq 1$ portanto $J(x^{(2)}) = \emptyset$

logo a $x^* = x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$.

b) SUBOPT 2

$$v = 1) \quad H(0) = \{1, 2\}$$

$$s(0) = 3$$

$$\begin{aligned} \text{SP1)} \quad & \max \quad x + y \\ & 0 \leq x \leq 1 \\ & 0 \leq y \leq 1 \\ & 1 \leq 3x + y \leq 3 \end{aligned}$$

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A^{(0)})^\# = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c^t (A^{(0)})^\# = (1 \ 1)$$

$$A_{s(0)} (A^{(0)})^\# = (3 \ 1)$$

$$\eta(0) = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0, \quad \bar{a} - \eta(0) = 1, \quad \bar{b} - \eta(0) = 3$$

$$\gamma_1 = 1/3, \quad \gamma_2 = 1$$

então $(1) = 2, (2) = 1$

$$P_1 :$$

$$1 \cdot (1-0) = 1 \geq 1 = \bar{a} - \eta(0), \text{ portanto } P_1 = 1,$$

$$P_2 :$$

$$1 \cdot (1-0) + 3 \cdot (1-0) = 4 > 3 = \bar{b} - \eta(0), \text{ portanto}$$

$$P_2 = 2, \quad P = 2.$$

Como $P_1 < P_2 \leq P$ temos o caso 2.

$$\tilde{z}_{(1)} = \tilde{z}_2 = 1$$

$$\tilde{z}_{(2)} = \tilde{z}_1 = [3 - 1] / 3 = 2/3$$

$$z_1 = \tilde{z}_1 + a_1 = 2/2$$

$$z_2 = \bar{z}_2 + a_2 = 1$$

$$x^{(1)} = (A^{(0)})^{\#}_z = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

como

$$-1 \cdot 2/3 + 1 \cdot 1 = 1/3 > 0$$

temos

$$J(x^{(1)}) = \{4\}$$

V=2) Como $(P_2) = 1$, então a 1ª restrição vai ser retirada:

$$H(1) = \{2, 3\}, s(1) = 4$$

SP.2). Max $x + y$

$$1 \leq 3x + y \leq 3$$

$$0 \leq y \leq 1$$

$$-3 \leq -x + y \leq 0$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (A^{(1)})^{\#} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c^t (A^{(1)})^{\#} = (1/3 \quad 2/3)$$

$$A_{s(1)} (A^{(1)})^{\#} = (-1/3 \quad 4/3)$$

$$\eta(0) = 4/3 \cdot 0 + (-1/3) \cdot 3 = -1, \bar{a} - \eta(0) = -2, \bar{b} - \eta(0) = 1$$

$$\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1/2$$

então $(1) = 2, (2) = 1$

$$P_1 : \text{como } \bar{a} - \eta(0) < 0, P_1 = 0$$

$$P_2 : 4/3 \cdot (1-0) = 4/3 > 1, \text{ portanto } P_2 = 1$$

$$P : \text{como } \gamma_{(1)} = 1/2 \geq 0 \text{ e } \gamma_{(2)} = -1 < 0 \text{ temos } P = 1.$$

Como $P_1 < P_2 \leq P$, temos o caso 2.

$$\tilde{z}_{(1)} = \tilde{z}_2 = 3/4$$

$$\tilde{z}_{(2)} = \tilde{z}_1 = 0$$

então $z_1 = b_1 - \tilde{z}_1 = 3$

$$z_2 = \tilde{z}_2 + a_2 = 3/4$$

$$x^{(2)} = \left(A^{(1)} \right)^{\#} z = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

como

$$0 \leq 3/4 \leq 1, \text{ temos } J(x^{(2)}) = \emptyset,$$

portanto $x^* = x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}.$

c) PROBLEMA EQUIVALENTE DA SEÇÃO 2.4.

O problema dado pode ser colocado na forma:

$$\text{Max } x + y$$

$$\text{s.a } 1 \leq 3x + y \leq 3$$

$$-3 \leq -x + y \leq 0$$

com $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

Tomando então o problema equivalente, temos:

$$\text{Max } x + y$$

$$\text{s.a } 3x + y + u = 3$$

$$-x + y + v = 0$$

com $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 3$

FASE 1) Resolva o problema auxiliar:

$$\begin{aligned} \text{Min } z + w \\ \text{s.a. } 3x + y + u + z &= 3 \\ -x + y + v + w &= 0 \end{aligned}$$

com $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 3$, $z \geq 0$, $w \geq 0$.

Tomemos o quadro prático:

z	3	1	1	0	1	0	3
w	-1	1	0	1	0	1	0
	0	0	0	0	1	1	

eliminando as variáveis básicas do vetor custo, temos:

z	3	1	1	0	1	0	3
w	-1	1	0	1	0	1	0
	-2	-2	-1	-1	0	0	-3
	+	+	+	+			
	↑						

a) $h_1 = 1$ +

b) $\hat{\delta}_1 = 1$
 $\hat{A}_{11}$

z	-3	1	1	0	1	0	0
w	1	1	0	1	0	1	1
	2	-2	-1	-1	0	0	-1
	-	+	+	+			
	↑						

a) $h_2 = 1$

b) $\min \{0, 1\} = 0$

y	-3	1	1	0	1	0	0
w	4	0	-1	1	-1	1	1
	-4	0	1	-1	2	0	-1
	-	+	+	+			
	↑						

a) $h_1 = 1$

b) $1/4$

c) $\frac{0-1}{-3} = 1/3$

y	0	1	1/4	3/4	1/4	3/4	3/4
x	1	0	-1/4	1/4	-1/4	1/4	1/4
	0	0	0	0	1	1	0
	-	+	+	+			

Fim da fase 1:

FASE 2) Base Inicial {y,x}

Tomando o quadro prático, agora com o vetor custo $c=(1,1)$, e fazendo eliminações das variáveis básicas tem:

y	0	1	1/4	3/4	3/4
x	1	0	-1/4	1/4	1/4
	0	0	0	-1	
	-	+	+	+	

OBS.: Como o problema é de maximização, a condição de otimalidade está verificada.

Portanto,

$$x = h_1 - x^- = 1 - 1/4 = 3/4$$

$$y = y^+ = 3/4$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}.$$

2.7. EXPERIÊNCIA COMPUTACIONAL

A expectativa inicial com problema equivalente da seção 2.4, era o de obter sua solução em aproximadamente m iterações [7, prefácio]. Porém, ficou evidente nos exemplos numéricos desenvolvidos, que o número de iterações necessárias é muito superior a m .

Por outro lado verificou-se, com surpresa, que o problema dual convergiu em aproximadamente m iterações, enquanto esperávamos a ordem de n iterações. Este fato parece estar associado com o que estabelece a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO: Sejam $(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n)$ variáveis do problema dual (2.5). Se a variável u_i é básica então a variável v_i é não básica, e vice-versa.

PROVA. Se a variável u_i é básica, então seu custo relativo é zero, isto é,

$$-b_i + \pi A_i = 0 \quad \text{ou} \\ b_i = \pi A_i \quad (1)$$

onde π é o vetor multiplicador, o custo relativo da variável v_i é $a_i - \pi A_i$, utilizando (1), resulta $a_i - \pi A_i = a_i - b_i \leq 0$.

Assim, se u_i é uma variável básica, v_i não será escolhida a ser básica, pois viria a diminuir o valor da função objetivo.

Para o problema de ração que estamos considerando, c_i re-

presenta o custo do i -ésimo ingrediente, e portanto vamos sempre supor $c_i \geq 0$. Por isso o problema dual

$$\max \quad -b^t u^t + a^t v^t$$

$$\text{S.a.:} \quad -A^t u^t + A^t v^t + w^t = c^t$$

$$(u, v, w) \geq 0$$

tem sempre uma solução básica factível inicial com $w_i = c_i$, onde w_i são as variáveis de folga do problema dual. Desta forma, evita-se a fase 1 do método simplex. Por outro lado, das $2m$ variáveis não básicas restantes, no máximo m poderão tornar-se básicas simultaneamente. (É claro que uma variável escolhida a ser básica, mais tarde poderá ser escolhida a sair da base).

Para efeito de comparações utilizamos uma matriz tecnológica típica encontrada em formulação de rações (vide tabela 1) e geramos subproblemas formando rações com diferentes nutrientes.

Obtivemos a seguinte tabela

		M x N				
		5x47	10x47	15x47	20x47	25x47
PROBL.	AMOSTRA 1	0.93	4.31	8.01	17.2	14.93
EQUIVALENTE	AMOSTRA 2	0.61	1.62	7.7	13.16	34.83
PROBL.	AMOSTRA 1	1.46	3.04	3.36	5.04	5.68
DUAL	AMOSTRA 2	1.16	1.71	3.48	2.86	5.45

TABELA 2

Observando a tabela 2, nota-se que para rações com o número de ingredientes superior a 5 vezes o número de nutrientes ($m \leq 5n$), o problema equivalente pode ser preferível. A medida que o número de nutrientes são considerados na ração, a vantagem do dual se acentua.

NOTA: O programa utilizado para obtenção da tabela 2, foi o método simplex com utilização de todo o quadro, podendo ser otimizado.

O computador utilizado foi PDP-10 da Digital.

Prepared by Richard D. Allen
Consulting Nutritionalist, Richard Allen & Associates, P.O. Box 63, Brentwood Bay, B.C. Canada V8S 1A0

[illegible]

*Feedstuffs, July 1978-volume 50, number 30

APÊNDICE

O MÉTODO SIMPLEX CANALIZADO [4]

Considere o problema:

$$\text{Min } CZ$$

$$\text{sujeito a: } AZ = b$$

$$z_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$0 \leq z_k \leq h_k, \quad k = K+1, K+2, \dots, n ;$$

onde $A = (A_{ij})$, $b = (b_i)$, $c = (c_j)$ com $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

DEFINIÇÃO: Uma solução básica extendida factível correspondente ao problema (*), é uma solução factível, para a qual $n-m$ variáveis (não básicas) estão nos seus limites ($z_j = 0$, ou $z_k = h_k$ se $K+1 \leq k \leq n$), e as restantes m variáveis (básicas) correspondem às colunas linearmente independentes de A .

DEFINIÇÃO: Seja $I = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ um conjunto de m índices que indicam as variáveis básicas. Dizemos que I é uma base extendida factível, se a solução básica extendida associada a I , é factível.

NOTAÇÃO: Seja A^I a submatriz de A formada pelas colunas indexadas em I ; c^I o vetor formado pelas componentes de c , indexadas em I ; e $\hat{A} = (\hat{A}_{ij})$, $\hat{b} = (\hat{b}_i)$, $\hat{c} = (\hat{c}_j)$ são dados por

$$\hat{A} = (A^I)^{-1} \cdot A$$

$$\hat{b} = (A^I)^{-1} \cdot b$$

$$\hat{c} = c - c^I (A^I)^{-1} \cdot A$$

Suponha que começamos com uma solução básica estendida factível do problema. Examinamos as variáveis não básicas, como possíveis candidatas a serem mudadas a melhorar a solução. Uma variável no seu limite superior, somente poderá decrescer, e um decréscimo somente será em benefício se o custo relativo correspondente for positivo. Uma variável no seu limite inferior somente poderá crescer, e um acréscimo somente será em benefício se o custo relativo ($\hat{c}_k$) correspondente for negativo.

Suponha que uma variável não básica z_k foi escolhida para ser mudada, mantendo fixas as demais variáveis não básicas. Uma mudança deve ser feita de tal modo que a solução continua sendo factível. A variável não básica z_k com $k \leq K$ poderá crescer continuamente até uma variável básica atingir um de seus limites, enquanto que z_k com $k > K$, poderá ser mudada até:

- i) uma variável básica atingir um dos seus limites,
- ii) z_k atingir seu limite oposto.

Se uma variável básica atingir um de seus limites, então ela é declarada não básica, e a variável não básica que está sendo mudada será declarada básica, se a variável não básica z_k ($k > K$) atingir seu limite oposto, então a base não será alterada.

Este procedimento é realizado até que qualquer alteração das variáveis não básicas faz crescer o valor da função objetivo.

TEOREMA DE OTIMALIDADE

Uma solução básica extendida factível é ótima, se para as variáveis não básicas z_k ,

$$\hat{c}_k \geq 0 \quad \text{se} \quad z_k = 0$$

$$\text{e} \quad \hat{c}_k \leq 0 \quad \text{se} \quad z_k = h_k.$$

A rotina discutida acima leva a uma solução melhor se o teorema de otimalidade não for satisfeito. Para descrever o algoritmo é conveniente introduzir a seguinte mudança de variáveis, para $k > K$.

$$z_k^+ = z_k, \text{ se } z_k \text{ atingir seu limite inferior e,}$$

$$z_k^- = h_k - z_k, \text{ se } z_k \text{ atingir seu limite superior.}$$

Usaremos o indicador e_k com $e_k = +$ ou $e_k = -$ para indicar se z_k atingiu seu limite superior ou inferior, respectivamente. Note que com esta mudança de variáveis, as variáveis não básicas sempre serão zeros, pois se z_k atingir seu limite superior, isto é, $z_k = h_k$, então fazendo a mudança de variável, $z_k^- = h_k - z_k = 0$. Desta forma sempre estaremos querendo crescer as variáveis não básicas, e então procuramos custos relativos ($\hat{c}_k$) sempre negativos.

O ALGORÍTIMO

Dada uma base extendida factível inicial I , expresse a função objetivo em termos das variáveis não básicas (calcule $\hat{c}$).

PASSO 1) Ache uma variável não básica z_k , para a qual o custo relativo ($\hat{c}_k$) é negativo. Se $k \leq K$, vá para a 2a) ; caso contrário, vá para 2b). Se não existe tal índice, então uma solução ótima é a solução básica extendida associada a I . Pare.

PASSO 2a) Determine um índice s que dê o mínimo entre i) e ii), e vá para o passo 3a).

$$i) \quad \min_i \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{A}_{i,k}} : \hat{A}_{i,k} > 0 \right\}$$

$$ii) \quad \min_i \left\{ \frac{\hat{b}_i - h_{j_i}}{\hat{A}_{i,k}} : A_{i,k} < 0 \text{ e } j_i > K, \text{ onde } j_i \text{ é a } i\text{-ésima variável básica.} \right\}$$

se tal índice não existe, o problema é ilimitado. Pare.

PASSO 2b) Determine um índice s que dê o mínimo entre i), ii) e iii), e vá para o passo 3b).

$$i) \quad h_k$$

$$ii) \quad \min_i \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{A}_{i,k}} : \hat{A}_{i,k} > 0 \right\}$$

$$iii) \quad \min_i \left\{ \frac{\hat{b}_i - h_{j_i}}{\hat{A}_{i,k}} : \hat{A}_{i,k} < 0 \text{ e } j_i > K, \text{ onde } j_i \text{ é a } i\text{-ésima variável básica} \right\}.$$

PASSO 3a) Conforme a origem do mínimo no passo 2a), temos um procedimento:

i) Pivoteie em $\hat{A}_{s,k}$ Faça $j_s = k$ e volte ao passo 1).

ii) A s -ésima variável básica $z_{j_s}^{e_{j_s}}$, é canalizada e atingiu seu limite oposto (mudança de variável). Subtraia h_{j_s} de $\hat{b}_s$, troque o sinal de $\hat{A}_{s,j_s}$ e de e_{j_s} , e pivoteie em $\hat{A}_{s,k}$ Faça $j_s = k$ e volte ao passo 1).

3b) Conforme a origem do mínimo no passo 2b), temos um procedimento:

i) A variável z_k atingiu seu limite oposto (mudança de variável). Subtraia de $\hat{b}_k$ h_k vezes a k -ésima coluna de $\hat{A}$, troque o sinal da k -ésima coluna de $\hat{A}$, de $\hat{c}_k$ e de e_k . A base não é alterada e não requer pivotamento. Volte ao passo 1).

ii) Pivoteie em $\hat{A}_{s,k}$, Faça $j_s = k$ e volte ao passo 1).

iii) A s -ésima variável básica $z_{j_s}^{e_{j_s}}$, atingiu seu limite oposto (mudança de variável). Subtraia h_{j_s} de $\hat{b}_s$, troque o sinal de $\hat{A}_{s,j_s}$ de e_{j_s} , e pivoteie em $\hat{A}_{s,k}$. Faça $j_s = k$ e volte ao passo 1).

REFERÊNCIA

- [1] A.BEN - ISRAEL and A.CHARNES, "An explicit solution of a Special class of linear programming Problems", Opns.Res. 16, 1166 - 1175 (1968).
- [2] A.CHARNES, "Optimality and Degeneracy in linear programming", Econometria, 20, 160 - 170 (1952).
- [3] A.CHARNES, FRIEDA GRANOT e F.PHILLIPS, "An algorithm for solving interval linear programming problems", OpnsRes., Vol. 25, 688 - 695 (1977).
- [4] D.G.LUENBERGER, "Introduction to linear and nonlinear programming", Addison-Wesley Publishing Company, (1973).
- [5] P.D. ROBERS and A.BEN-ISRAEL, "A Suboptimization method for interval linear programming: A new method for linear programming", Linear Algebra; Its Appl. 3, 383 - 405, (1970).
- [6] M.SAKAROVITCH, "Notes on linear programming", Van Nostrand Reinhold. (1971).
- [7] M.SIMONNARD, "Linear Programming, Prentice - Hall, (1966).