

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

**O Complexo de Morse-Witten
via Sequências Espectrais**

por

Ewerton Rocha Vieira

Mestrado em Matemática - Campinas - SP
Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP.

Orientadora: Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende

O COMPLEXO DE MORSE-WITTEN VIA SEQUÊNCIAS ESPECTRAIS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Ewerton Rocha Vieira** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 28 de fevereiro de 2011



Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende
Orientadora

Banca Examinadora:

- 1 Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende
- 2 Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto
- 3 Profa. Dra. Mariana Rodrigues da Silveira

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **MESTRE em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Vieira, Ewerton Rocha

V673c O complexo de Morse-Witten via sequências espectrais/Ewerton
Rocha Vieira-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.

Orientador : Ketty Abaroa de Rezende

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Morse, Teoria de. 2.Matriz de conexão. 3.Sequências espectrais
(Matemática). 4.Topologia algébrica. 5.Sistemas dinâmicos.
I. Rezende, Ketty Abaroa de. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: The Morse-Witten complex via spectral sequences

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1.Morse theory. 2.Matrix of connection. 3.Spectral
sequences (Mathematics). 4.Algebraic topology. 5.Dynamical systems.

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende (IMECC – UNICAMP)
Profa. Dra. Mariana Rodrigues da Silveira (UFABC)
Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto (ICMC - USP)

Data da defesa: 28/02/2011

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 28 de fevereiro de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). KETTY ABAROA DE REZENDE



Prof. (a). Dr (a). OZIRIDE MANZOLI NETO



Prof. (a). Dr (a). MARIANA RODRIGUES DA SILVEIRA

Agradecimentos

À minha orientadora Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende pela dedicação e paciência, e por ter me conduzido durante o mestrado.

À Profa. Dra. Mariana Rodrigues da Silveira por todo o apoio e ajuda durante o desenvolvimento deste trabalho.

À minha família, por todo apoio e carinho, em especial à minha mãe Cristina, ao meu pai Waldeci, à minha avó Clotilde e à minha tia Suely.

À FAPESP pela bolsa de estudo concedida.

Aos funcionários da Secretaria de Pós Graduação do IMECC-UNICAMP pela gentileza e atenção diariamente prestados.

A todas as pessoas que colaboraram para a concretização desta dissertação.

Resumo

Nesse trabalho, estudaremos o complexo de Morse-Witten via sequências espectrais, utilizando a matriz de conexão sobre $\mathbb{Z}$ que codifica as órbitas de conexão do fluxo de Morse associado ao complexo. O algoritmo do Método da Varredura aplicado à matriz de conexão sobre $\mathbb{Z}$ produz uma sequência espectral (E^r, d^r) , que por sua vez nos fornece informações importantes sobre a dinâmica. Dada a necessidade de computarmos os geradores dos $\mathbb{Z}$ -módulos $E_{p,q}^r$ e as diferenças $d_{p,q}^r$ da sequência espectral, utilizamos o software *SweepingAlgorithm*, que calcula os $E_{p,q}^r$ e $d_{p,q}^r$ de forma rápida e eficiente.

Apresentamos uma forma de estender o complexo de Morse-Witten, conforme [BaC1] e [BaC]. Tal complexo apresenta informações entre pontos críticos não consecutivos, até então não obtidas pelo complexo de Morse-Witten. Para esse complexo estendido temos também uma sequência espectral associada, através da qual obtemos informações dinâmicas, conforme os trabalhos [BaC1] e [BaC].

Abstract

In this work, we study the Morse-Witten Complex via spectral sequences, using the connection matrix over $\mathbb{Z}$, which codifies the connecting orbits of the Morse flow associated to the complex. The Sweeping Method algorithm applied to the connection matrix over $\mathbb{Z}$ produces a spectral sequence (E^r, r^d) , which in turn gives us important information on the dynamics. Given the need to compute the generators of $\mathbb{Z}$ -modules $E_{p,q}^r$ and the differentials $d_{p,q}^r$ of the spectral sequence, we use the software *SweepingAlgorithm*, that calculates $E_{p,q}^r$ and $d_{p,q}^r$ quickly and efficiently.

We present a way to extend the Morse-Witten as [BaC1] and [BaC]. This complex exhibits information between non-consecutive critical points, not obtainable using the Morse-Witten complex. For this extended Morse Complex we also have an associated spectral sequence, whereby dynamical information is also obtained as in [BaC1] and [BaC].

Sumário

Introdução	1
1 Matriz de Conexão	5
1.1 Fluxo Morse-Smale	6
1.2 Variedades Conectantes	8
1.3 O Complexo de Morse-Witten	12
1.4 Matrizes de Conexão	14
2 Sequência Espectral	19
2.1 Filtração em um complexo de cadeias	22
3 Método da Varredura	33
3.1 Calculando Exemplos Utilizando Recursos Computacionais	40
3.2 Propriedades básicas provenientes do Método da Varredura	52
4 Os $\mathbb{Z}$-módulos $E_{p,q}^r$ gerados pelo Método da Varredura	57
5 As Diferenciais da Sequência Espectral Associadas ao Método da Varredura	73
6 As Implicações Dinâmicas das Diferenciais	91
7 Complexo de Morse Estendido	101
Apêndice A	117
Apêndice B	123
Apêndice C	147

Introdução

Essa dissertação tem como finalidade explorar as informações dinâmicas dada pela sequência espectral associada ao Método da Varredura, bem como explorar o complexo de Morse estendido, o qual foi definido recentemente em [BaC] e [BaC1].

Uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida em uma variedade Riemanniana suave e fechada (M, g) dá origem a um complexo $(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c)$, chamado de complexo de Morse-Witten, cujos grupos de cadeias são gerados pelos pontos críticos de f e cujo operador bordo é definido por uma contagem algébrica do número de linhas de fluxo, contadas com sinal, associado ao campo $-\nabla f$.

Interligando a teoria de matrizes de conexão e a teoria de Morse, temos que a diferencial do complexo de Morse-Witten ∂_* pode ser interpretada como uma matriz de conexão para um fluxo Morse-Smale sem órbitas periódicas sobre M . Para simplificar, neste trabalho, definiremos matriz de conexão Δ como sendo a diferencial ∂_* .

Ao aplicarmos o Método da Varredura em uma matriz de conexão Δ obtemos uma sequência espectral associada, e o estudo dessa sequência nos fornece informações dinâmicas.

As sequências espectrais foram introduzidas por Leray nos anos 50 e são extensivamente usadas em álgebra homológica, topologia e geometria algébrica. Podemos definir uma sequência espectral (ver [S]) para um complexo de cadeia (C, ∂) que possui uma filtração crescente. A sequência espectral associada a (C, ∂) é uma sequência de módulos bigraduados (E^r, d^r) , onde d^r tem bigrau $(-r, r-1)$, tal que $H(E^r, d^r) = E^{r+1}$. Temos ainda que essa sequência é convergente.

Os Teoremas 4.1 e 5.1 provam a existência da sequência espectral associado ao Método da Varredura. Podemos observar que ao aplicarmos o algoritmo a uma matriz de conexão Δ geramos muitos cálculos, que podem ser computados utilizando o Software *SweepingAlgorithm*. Tal programa tornou-se um laboratório experimental que serviu de motivação à algumas perguntas como também serve de apoio a novos trabalhos.

Uma aplicação do Método da Varredura consiste no Teorema 6.1, mais especificamente, esse teorema garante que associado a uma diferencial não nula da sequência espectral, existe um caminho unindo dois pontos críticos consecutivos. Este caminho é constituído de curvas que coincidem com as linhas de fluxo, onde alguns de seus arcos correspondem a linhas do fluxo reverso.

Apresentamos uma forma de estender o complexo de Morse-Witten, conforme [BaC1] e [BaC]. Tal complexo será chamado de complexo de Morse estendido, e a sua construção faz o uso da teoria do espaço dos laços de Moore. Tal complexo apresenta informações entre pontos críticos não consecutivos, até então não obtidas pelo complexo de Morse-Witten. Para esse complexo estendido, temos também uma sequência espectral associada, através da qual obtemos informações dinâmicas, conforme os trabalhos [BaC1] e [BaC].

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

- O primeiro capítulo apresenta de forma sucinta os pré-requisitos que servirão de suporte para a compreensão dos capítulos seguintes. Neste capítulo encontramos noções básicas de sistemas dinâmicos e a definição do complexo de Morse-Witten, bem como a definição de matriz de conexão.
- O segundo capítulo é dedicado exclusivamente à teoria das sequências espectrais. Vale a pena observar que apresentamos uma noção introdutória sobre sequências espectrais. Caso o leitor queira fazer um estudo mais aprofundado sobre este tema, consulte as referências [Ch], [S] e $H1$.
- No terceiro capítulo, apresentamos o Método da Varredura aplicado a uma matriz de conexão Δ sobre $\mathbb{Z}$. No caso em que a matriz Δ esteja sobre um corpo $\mathbb{F}$ o Método sofrerá uma pequena alteração. Para mais detalhe veja Observação 3.1. Este capítulo possui um exemplo de aplicação do Método da Varredura utilizando o programa *SweepingAlgorithm*.
- O Capítulo 4 mostra como o Método da Varredura define os $\mathbb{Z}$ -módulos $E_{p,q}^r$ da sequência espectral associada ao Método da Varredura. Vale a pena observar que neste capítulo ainda não podemos afirmar que existe uma sequência espectral associada ao Método da Varredura. Tal conclusão é feita no Capítulo 5.
- O quinto capítulo mostra como o Método da Varredura define as diferenciais $d_{p,q}^r$ tais que (E^r, d^r) seja a sequência espectral associada a este método.

- O Teorema 6.1 do Capítulo 6 mostra que, associado a uma diferencial não nula da sequência espectral, existe um caminho unindo dois pontos críticos consecutivos. Este caminho é constituído por curvas que coincidem com as linhas de fluxo, onde alguns de seus arcos correspondem a linhas do fluxo reverso.
- O último capítulo contém inicialmente algumas definições e proposições necessárias para podermos definir o complexo de Morse estendido. Mostramos que o complexo estendido é uma generalização do complexo de Morse-Witten, ou seja, quando os pontos críticos são consecutivos as duas definições coincidem. Definimos também uma sequência espectral associada ao complexo de Morse estendido, a qual possui muitas informações dinâmicas conforme foi mostrado em [BaC] e [BaC1].
- No Apêndice A apresentamos um tutorial de como usar o software *SweepingAlgorithm*. E nos Apêndices B e C calculamos alguns exemplos computacionais do Método da Varredura.

Capítulo 1

Matriz de Conexão

O objetivo deste capítulo é revisar noções básicas de sistemas dinâmicos necessárias para definir matriz de conexão, a qual é o elemento base para podermos aplicar o Método da Varredura.

Como dispomos de uma boa referência [L] para este capítulo e o objetivo principal desta dissertação é o estudo da sequência espectral associada ao Método da Varredura, este capítulo será breve e não possuirá demonstrações.

Para um estudo mais aprofundado sobre a construção do complexo de Morse-Witten apresentada neste capítulo veja [W] e [L], sendo que esta última referência possui vários exemplos de complexos de Morse-Witten e de matriz de conexão. Para questões envolvendo sistemas dinâmicos, a referência básica é [PM].

A definição de matriz de conexão que veremos neste capítulo não será a definição feita por Franzosa em [Fr2], definiremos matriz de conexão para um caso particular, já que o Método da Varredura só é aplicável para esse caso particular.

Portanto, iremos definir matriz de conexão para um fluxo Morse-Smale em uma variedade Riemanniana M suave e fechada de dimensão finita. Para isto precisaremos introduzir o complexo de Morse-Witten que é um complexo de cadeias definido a partir de uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, cujos grupos de cadeias são gerados pelos pontos críticos de f e cujo operador bordo é definido por uma contagem algébrica do número de linhas de fluxo, contadas com sinal, associadas ao campo $-\nabla f$.

1.1 Fluxo Morse-Smale

Começaremos esta seção expondo algumas propriedades básicas de fluxos. Como referência para esta seção veja [C], [F], [PM] e [Sa1].

Ao longo desta seção, consideremos X um espaço topológico arbitrário.

Definição 1.1. Um **fluxo contínuo** φ sobre X é uma ação contínua de $\mathbb{R}$ sobre X , ou seja, é uma aplicação contínua $\varphi : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ que satisfaz:

1. $\varphi(0, x) = x$, para todo $x \in X$;
2. $\varphi(s + t, x) = \varphi(s, \varphi(t, x))$ para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$ e $x \in X$.

Definição 1.2. Dado $x \in X$, a **órbita** através de x com respeito ao fluxo φ é o conjunto $\mathcal{O}(x) := \{\varphi(t, x) : t \in \mathbb{R}\}$, ou seja, $\mathcal{O}(x) := \varphi(\mathbb{R}, x)$.

Dizemos que uma **órbita** é **singular** se a órbita é formada por um único ponto p . Neste caso, dizemos que o ponto p é uma singularidade do fluxo φ . Dizemos que uma **órbita** é **fechada** (ou periódica) se existe $T \neq 0$ tal que $\varphi(T, p) = p$ e $\varphi(t, p) \neq p$ sempre que $t \in (0, T)$. Chamamos de **órbita regular** uma órbita que não é singular e também não é fechada. Desde modo, existem três tipos de órbitas: órbita singular, órbita fechada e órbita regular.

Um conjunto $S \subset X$ é um **conjunto invariante** em relação ao fluxo φ se, para todo $p \in S$, $\varphi(t, p) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, se $\varphi(\mathbb{R}, S) = S$.

Se S é invariante sob φ então o fecho de S e o complementar de S também o são. O mesmo vale para união e intersecção sob qualquer coleção de conjuntos invariantes.

Seja $N \subset X$ um subconjunto de X . O **conjunto invariante maximal** de N é definido por:

$$Inv(N) = \{x \in X \mid \varphi(t, x) \in N, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$

Definição 1.3. Dado $Y \subset X$, o conjunto ω -**limite** de Y , denotado por $\omega(Y)$, é definido por

$$\omega(Y) = Inv(cl\{\varphi([0, \infty), Y)\}).$$

Analogamente, o conjunto ω^* -**limite** (ou α -limite) de Y é definido por:

$$\omega^*(Y) = Inv(cl\{\varphi((-\infty, 0], Y)\}).$$

Dado $q \in X$, $\omega(q)$ é o maior conjunto invariante em $\varphi(q, [0, \infty])$, reciprocamente, $\omega^*(q)$ é o maior conjunto invariante em $\varphi(q, [-\infty, 0])$.

Sejam X é um espaço topológico compacto, $Y \subset X$ e φ um fluxo sobre X . Então $\omega(Y) \neq \emptyset$, $\omega(Y)$ é fechado, $\omega(Y)$ é invariante pelo fluxo φ em X , $\omega(Y)$ é compacto em X , e $\omega(Y)$ é conexo se Y for conexo. Notemos que estas propriedades também são válidas para o conjunto ω^* -limite. As demonstrações destas afirmações podem ser encontradas em [Sal].

No decorrer deste trabalho, iremos trabalhar com fluxos gradientes negativos sobre variedades Riemannianas suaves e fechadas de dimensão finita. Nesse sentido, vamos introduzir agora o conceito de fluxo gradiente negativo.

Consideremos M uma variedade Riemanniana suave e fechada de dimensão finita n , g uma métrica Riemanniana em M e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. A identidade

$$g(\nabla f, \cdot) = df(\cdot)$$

determina unicamente o campo vetorial gradiente ∇f sobre M . Chamamos de **fluxo gradiente negativo** o fluxo associado ao campo gradiente negativo $-\nabla f$.

Se γ é uma trajetória do fluxo gradiente negativo, então:

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = g(\nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)) = -|\nabla f(\gamma(t))|^2 \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Disto vemos que f decresce ao longo de órbitas não singulares e, portanto, órbitas fechadas não podem existir e qualquer órbita regular $\mathcal{O}(q)$ intersecta o conjunto de nível $f^{-1}(f(q))$ no máximo uma vez. Além disso, tal intersecção é ortogonal com respeito à métrica g . Usando estas propriedades e a notação $\text{Crit}(f)$ para denotar o conjunto dos pontos críticos de uma função suave f , temos a seguinte proposição:

Proposição 1.1. *Seja M uma variedade fechada de dimensão finita e φ o fluxo associado ao campo vetorial $-\nabla f$. Então para todo $p \in M$ tem-se que $\omega^*(p) \cup \omega(p) \subset \text{Crit}(f)$. Se o fluxo gradiente negativo é gerado por uma função de Morse¹ f então $\omega^*(q)$ e $\omega(q)$ consistem cada um de apenas um ponto crítico de f , para todo $q \in M$.*

Dado $x \in \text{Crit}(f)$, definimos a **variedade estável** de x por

$$W^s(x) := \{q \in M \mid \omega(q) = x\},$$

¹Uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se chamada de função de Morse se todos os seus pontos críticos são não degenerados.

e a *variedade instável* de x por:

$$W^u(x) := \{q \in M \mid \omega^*(q) = x\}.$$

Defina o índice de Morse de um ponto crítico $x \in \text{Crit}(f)$ por $\text{ind}_f(x) = \dim(W^u(x))$.

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse em uma variedade Riemanniana (M, g) suave e fechada de dimensão finita n . Se $x \in \text{Crit}(f)$ então o Teorema da Variedade Estável e Instável garante que $W^s(x)$ e $W^u(x)$ são subvariedades de M sem fronteira. De fato, as variedades $W^s(x)$ e $W^u(x)$ são imagens de mergulhos suaves de discos abertos de dimensões $n - \text{ind}_f(x)$ e $\text{ind}_f(x)$, respectivamente. Além disso, o espaço tangente de M em x se decompõe como

$$T_x M = T_x W^s(x) \oplus T_x W^u(x).$$

O campo vetorial gradiente $\nabla^g f$ satisfaz a **condição de Morse-Smale** se $W^u(x)$ e $W^s(y)$ se intersectam transversalmente para todos os pontos $x, y \in \text{Crit}(f)$. Neste caso, (g, f) é dito um **par Morse-Smale**, f é dita ser uma **função Morse-Smale** e o fluxo associado ao campo $-\nabla f$ é dito **fluxo Morse-Smale**.

Teorema 1.1 (Transversalidade de Morse-Smale). *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana suave e fechada de dimensão finita e f uma função de Morse, então o campo $\nabla^g f$ pode ser aproximado em C^1 por um campo gradiente suave $\nabla^{\tilde{g}} \tilde{f}$ que satisfaz a condição Morse-Smale.*

A prova do Teorema 1.1 é devido a Smale [Sm]. Podemos também escolher $\tilde{f}$ de forma que seu valor em qualquer ponto crítico seja igual ao índice de Morse do ponto crítico.

Daqui em diante, consideraremos (g, f) um par Morse-Smale (salvo menção em contrário).

1.2 Variedades Conectantes

Fixados pontos críticos $x, y \in \text{Crit}(f)$, defina a *variedade conectante* entre x e y por:

$$\mathcal{M}_{xy} := \mathcal{M}_{xy}(f, g) := W^u(x) \cap W^s(y).$$

Observe que $u \in \mathcal{M}_{xy}$ se, e somente se, $\omega^*(\mathcal{O}(u)) = x$ e $\omega(\mathcal{O}(u)) = y$.

Seja a um valor regular entre $f(x)$ e $f(y)$. O **espaço das órbitas conectantes** ou

espaço moduli entre x e y é definido por:

$$\widehat{\mathcal{M}}_{xy} := \widehat{\mathcal{M}}_{xy}(f, g, a) := \mathcal{M}_{xy} \cap f^{-1}(a). \quad (1.1)$$

Este conjunto é composto por um único representante de cada órbita do fluxo gradiente negativo de x para y , pois cada órbita intersecta a superfície de nível, $f^{-1}(a)$, no máximo em um ponto.

Para duas escolhas diferentes de a , existe uma identificação natural entre os espaços $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}(f, g, a)$ correspondentes, a qual é dada pelo fluxo.

Teorema 1.2. *Se o fluxo gradiente negativo é de Morse-Smale, então os espaços $\mathcal{M}_{xy}$ e $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ são subvariedades de M sem fronteira e suas dimensões são dadas por:*

$$\dim(\mathcal{M}_{xy}) = \text{ind}_f(x) - \text{ind}_f(y) \quad \text{e} \quad \dim(\widehat{\mathcal{M}}_{xy}) = \text{ind}_f(x) - \text{ind}_f(y) - 1.$$

Proposição 1.2. *Se as variedades $W^u(x)$ e $W^s(y)$ se intersectam transversalmente, então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se $\text{ind}_f(x) < \text{ind}_f(y)$, então $\mathcal{M}_{xy} = \emptyset$;*
2. *$\mathcal{M}_{xx} = \{x\}$;*
3. *Se $\text{ind}_f(x) = \text{ind}_f(y)$ e $x \neq y$, então $\mathcal{M}_{xy} = \emptyset$;*
4. *Se $\mathcal{M}_{xy} \neq \emptyset$ e $x \neq y$, então $\text{ind}_f(x) > \text{ind}_f(y)$.*

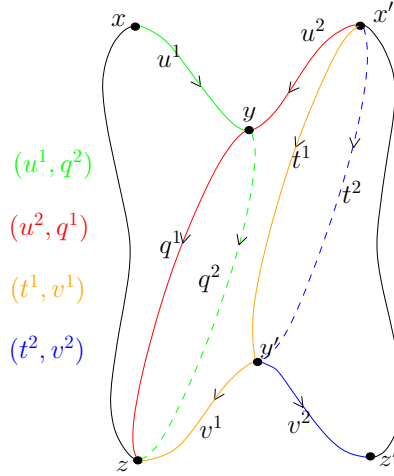
O primeiro item da Proposição 1.2 afirma que não existe uma órbita do fluxo Morse-Smale de x para y , quando $\text{ind}_f(x) < \text{ind}_f(y)$. O terceiro item assegura que não existem órbitas conectantes entre pontos críticos que possuem o mesmo índice de Morse. Assim, se existe uma órbita conectante de x para y (com $x \neq y$), então $\text{ind}_f(x) > \text{ind}_f(y)$. Em outras palavras, dada uma órbita não-singular do fluxo gradiente negativo, esta órbita “nasce” em um ponto crítico de índice r e “morre” em um ponto crítico de índice s , onde $s, r \in \mathbb{N}$ e $s < r$.

Vamos assumir, ao longo dessa seção, que o campo $-\nabla f$ é Morse-Smale e $x, y \in \text{Crit}(f)$. No caso em que a diferença $\text{ind}_f(x) - \text{ind}_f(y)$ entre os índices de x e y é $+1$, a variedade $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ é compacta, logo é um conjunto finito de pontos.

Proposição 1.3. *Se $\text{ind}_f(x) - \text{ind}_f(y) = 1$ então $\#\widehat{\mathcal{M}}_{xy} < \infty$.*

Existe uma relação biunívoca entre as órbitas da variedade conectante $\mathcal{M}_{xy}$ e os pontos do espaço moduli $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$. Deste modo, os pontos do espaço moduli podem ser considerados como órbitas.

Considere as órbitas conectantes $u^i \in \widehat{\mathcal{M}}_{x_{i-1}x_i}$, com $x_i \in \text{Crit}(f)$ e $i \in \{0, 1, \dots, l\}$. O conjunto formado pela união das órbitas $u^1, \dots, u^l$ e dos pontos $x_0, \dots, x_l$ é chamado de **órbita quebrada** e denotado por $(u^1, \dots, u^l)$. Veja Figura ??



A próxima definição formaliza a ideia de convergência de órbitas p_k , que é uma convergência geométrica com respeito a distância Riemanniana d em M das órbitas de p_k à união das órbitas de u^j 's. Mais precisamente,

Definição 1.4. Dada uma sequência de órbitas $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$, a sequência $\{p_k\}$ converge para a órbita quebrada $(u^1, \dots, u^l)$ quando

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0, \mathcal{O}(p_k) \subset U_\epsilon(\mathcal{O}(u^1) \cup \dots \cup \mathcal{O}(u^l)),$$

onde $U_\epsilon(A)$ denota uma ϵ -vizinhança aberta do subconjunto $A \subset M$.

O fato da sequência $\{p_k\}$ convergir para a órbita quebrada $(u^1, \dots, u^l)$ será denotado por $p_k \rightarrow (u^1, \dots, u^l)$. Neste caso, dizemos que a sequência p_k converge para a órbita quebrada $(u^1, \dots, u^l)$ de ordem l . Veja Figura 1.1.

Definição 1.5. Um subconjunto $K \subset \widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ é dito **compacto por órbitas quebradas** se: para toda sequência de Cauchy $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em K , existem pontos críticos $x = x_0, x_1, \dots, x_{l-1}, x_l = y$ e existem órbitas conectantes $u^j \in \widehat{\mathcal{M}}_{x_{j-1}x_j}$, com $j = 1, \dots, l$ tais que $p_k \rightarrow (u^1, \dots, u^l)$ quando $k \rightarrow \infty$.

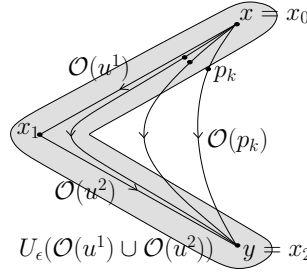


Figura 1.1: Convergência da sequência p_k para a órbita quebrada (u^1, u^2) de ordem 2.

O seguinte teorema fornece uma compactificação natural para os espaços moduli via órbitas quebradas.

Teorema 1.3 (Compacidade). *Se a condição de Morse-Smale é satisfeita, então o espaço moduli $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ é compacto por órbitas quebradas. Além disso, a convergência é de ordem no máximo $\text{ind}_f(x) - \text{ind}_f(y)$.*

O próximo teorema garante que, dados $x, y \in \text{Crit}(f)$, a variedade conectante $\mathcal{M}_{xy}$ é uma variedade orientável. De fato, o Teorema 1.4 afirma que, dadas orientações de $W^u(x)$ e $W^u(y)$, estas induzem uma orientação em $\mathcal{M}_{xy}$, denotada por $[\mathcal{M}_{xy}]_{\text{ind}}$.

Teorema 1.4. *Fixe uma orientação arbitrária para $W^u(x)$, $\forall x \in \text{Crit}(f)$ e $\text{ind}_f(x) > 0$. Então, para todo $x, y \in \text{Crit}(f)$, $\mathcal{M}_{xy}$ herda uma orientação induzida $[\mathcal{M}_{xy}]_{\text{ind}}$.*

Como $W^u(x) \pitchfork W^s(y)$, segue do Teorema 1.2 que o fibrado tangente $TW^u(x)$ decompõe-se ao longo de $\mathcal{M}_{xy}$ do seguinte modo:

$$T_{\mathcal{M}_{xy}} W^u(x) \simeq T\mathcal{M}_{xy} \oplus \mathcal{V}_{\mathcal{M}_{xy}} W^s(y). \quad (1.2)$$

As orientações induzidas $[\mathcal{M}_{xy}]_{\text{ind}}$ nas variedades conectantes $\mathcal{M}_{xy}$, com x e y variando no conjunto dos pontos críticos de f tais que $\text{ind}_f(x) = k$ e $\text{ind}_f(y) = k - 1$, serão essenciais na definição do complexo de Morse-Witten. Segundo a demonstração do Teorema 1.4, que pode ser encontrado em [W], o procedimento para obter tais orientações é:

1. Para cada ponto $x \in \text{Crit}(f)$, com $\text{ind}_f(x) > 0$, fixamos arbitrariamente uma orientação para $W^u(x)$;
2. Consideramos o espaço $\mathcal{V}_y W^s(y)$ (fibrado normal à variedade $W^s(y)$) com orientação compatível à orientação de $W^u(y)$;

3. Através do isomorfismo que preserva orientação (1.2), determinamos a orientação $[\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$.

O Teorema 1.4 exige que os índices dos pontos críticos sejam maiores que zero. Ora, se $ind_f(y) = 0$ então $\mathcal{V}_y W^s(y) = 0$. Daí, $T_{\mathcal{M}_{xy}} W^u(x) \simeq T\mathcal{M}_{xy}$, de onde segue a orientação de $\mathcal{M}_{xy}$ no caso em que $ind_f(y) = 0$.

Notemos que não há restrições sobre a orientabilidade da variedade Riemanniana M .

Antes de partir para próxima seção, vale apenas olhar alguns exemplos na referência [L], de como obter a orientação induzida da variedade conectante $\mathcal{M}_{xy}$, pois esta orientação é a parte mais importante e difícil para obtermos o complexo de Morse-Witten e, como veremos, também para a matriz de conexão.

1.3 O Complexo de Morse-Witten

Ao longo desta seção, vamos considerar M uma variedade Riemanniana suave e fechada de dimensão finita n . Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Escolha de forma arbitrária uma orientação para cada variedade instável dos pontos críticos de f e denote este conjunto de escolhas por Or .

Definição 1.6. *O grupo graduado de Morse $\mathcal{C}_*(f) = \{\mathcal{C}_k(f)\}$, associado a uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, com coeficientes inteiros e graduado pelos índices de Morse, é definido por:*

1. $\mathcal{C}_k(f) = 0$, se $k < 0$;
2. se $k \geq 0$, $\mathcal{C}_k(f)$ é o grupo abeliano livre gerado pelo conjunto $Crit_k(f)$, ou seja,

$$\mathcal{C}_k(f) := \bigoplus_{x \in Crit_k(f)} \mathbb{Z}\langle x \rangle, \quad k \in \mathbb{Z},$$

onde $Crit_k(f)$ é o conjunto dos pontos críticos de f de índice k .

Na definição acima, $\langle x \rangle$ denota o par consistindo do ponto crítico x e da orientação de $T_x W^u(x)$.

Note que os grupos de cadeia de Morse são finitamente gerados, pois uma função de Morse admite um número finito de pontos de críticos.

Assuma que $\text{ind}_f(x) - \text{ind}_f(y) = 1$ e seja $u \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy}$. A órbita $\mathcal{O}(u)$ é uma componente conexa de $\mathcal{M}_{xy}$, logo tem orientação induzida $[\mathcal{O}(u)]_{\text{ind}}$. Denotando a orientação induzida em $\mathcal{O}(u)$ pelo fluxo tangente por $[\dot{u}]$, o **senal característico** $n_u = n_u(\mathcal{O}r)$ da órbita através de u é definido por meio da igualdade

$$[\mathcal{O}(u)]_{\text{ind}} = n_u[\dot{u}].$$

Definição 1.7. O operador bordo de Morse-Witten $\partial_k(x) : \mathcal{C}_k(f) \longrightarrow \mathcal{C}_{k-1}(f)$ é definido nos geradores x de $\mathcal{C}_k(f)$ por

$$\partial_k \langle x \rangle := \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n(x, y) \langle y \rangle, \quad n(x, y) = \sum_{u \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy}} n_u, \quad (1.3)$$

e é estendido a toda cadeia por linearidade.

Sabemos que uma função de Morse admite apenas uma quantidade finita de pontos críticos, logo a primeira soma em (1.3) é finita. Já a proposição 1.3 garante que $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ é formado por uma quantidade finita de pontos, o que garante que a segunda soma em (1.3) também é finita. Desde modo, o operador bordo de Morse-Witten está bem definido.

O próximo teorema afirma que a aplicação ∂ , apresentada na Definição 1.7, é de fato um operador bordo, ou seja, $\partial \circ \partial = 0$.

Proposição 1.4 (Operador Bordo). O operador bordo de Morse-Witten satisfaz

$$\partial_{k-1} \partial_k = 0, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Assim concluímos que o par $(C_*(f), \partial_*)$ formado pelo grupo graduado de Morse juntamente com o operador bordo de Morse-Witten, formam um complexo de cadeia, que chamamos de **complexo de Morse-Witten**.

1.4 Matrizes de Conexão

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana que seja suave e fechada e tenha dimensão finita n e φ um fluxo gradiente negativo sobre M oriundo de uma função de Morse-Smale f . Sob essas hipóteses podemos considerar o complexo de Morse-Witten $(\mathcal{C}_*(f), \partial_*)$ para M .

Podemos ver cada aplicação $\partial_k : \mathcal{C}_k(f) \rightarrow \mathcal{C}_{k-1}(f)$ como uma matriz Δ_k de ordem $c_k \times c_{k-1}$, onde $c_k = \# \text{Crit}_k(f)$. Mais especificamente, sejam $\text{Crit}_k(f) = \{x_1, \dots, x_{c_k}\}$ e $\text{Crit}_{k-1}(f) = \{y_1, \dots, y_{c_{k-1}}\}$. Então

$$\mathcal{C}_k(f) = \mathbb{Z}\langle x_1 \rangle \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\langle x_{c_k} \rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_{k-1}(f) = \mathbb{Z}\langle y_1 \rangle \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\langle y_{c_{k-1}} \rangle.$$

E o operador de Morse-Witten é definido nos geradores por

$$\partial_k \langle x_i \rangle := \sum_{j=1}^{c_{k-1}} n(x_i, y_j) \langle y_j \rangle.$$

Logo, a aplicação ∂_k pode ser representada pela matriz Δ_k :

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & x_1 & x_2 & \dots & x_{c_k} \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{c_{k-1}} \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc} n(x_1, y_1) & n(x_2, y_1) & \dots & n(x_{c_k}, y_1) \\ n(x_1, y_2) & n(x_2, y_2) & \dots & n(x_{c_k}, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n(x_1, y_{c_{k-1}}) & n(x_2, y_{c_{k-1}}) & \dots & n(x_{c_k}, y_{c_{k-1}}) \end{array} \right] \end{array}$$

Assim, representamos a aplicação ∂_k por uma matriz cujas entradas são os números de intersecção $n(x, y)$ entre pontos críticos de índice consecutivos.

Da mesma forma, podemos visualizar o operador de Morse-Witten ∂_* como uma matriz Δ que contém as matrizes Δ_k , para $k \in \mathbb{Z}$ e $0 < k \leq n$, conforme a Figura 1.2:

A matriz Δ é dita uma **matriz de conexão** para M . Claramente vemos que a matriz Δ é triangular estritamente superior.

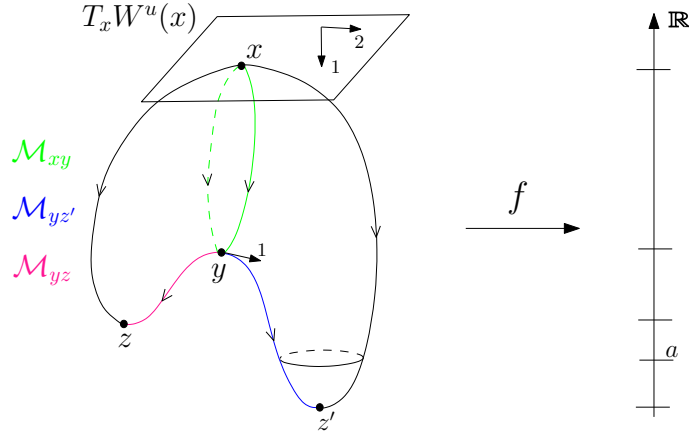
Portanto, para obter uma matriz de conexão para um fluxo Morse-Smale em uma variedade Riemanniana suave e fechada de dimensão finita basta construir o complexo de Morse-Witten.

Para finalizar este capítulo introdutório, vejamos um exemplo.

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{C}_0 \\
 \vdots \\
 \mathcal{C}_{k-2} \\
 \mathcal{C}_{k-1} \\
 \mathcal{C}_k \\
 \mathcal{C}_{k+1} \\
 \vdots \\
 \mathcal{C}_n
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 \mathcal{C}_0 & \cdots & \mathcal{C}_{k-1} & \mathcal{C}_k & \mathcal{C}_{k+1} & \mathcal{C}_{k+2} & \cdots & \mathcal{C}_n \\
 0 & & & & & & & \\
 & & \boxed{\Delta_{k-1}} & & & 0 & & \\
 0 & & 0 & \boxed{\Delta_k} & & & & \\
 0 & & & 0 & \boxed{\Delta_{k+1}} & & & \\
 0 & & 0 & & 0 & \boxed{\Delta_{k+2}} & & \\
 & & & & & & & 0
 \end{pmatrix}$$

Figura 1.2: Matriz de Conexão

Exemplo 1.1. Consideremos a variedade S^2 e a função altura $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, como na Figura 1.3. A função f é de Morse com 4 pontos críticos: um ponto repulsor x , um ponto de sela y e dois pontos atratores z e z' . Veja que f é, de fato, uma função de Morse-Smale, pois o fluxo gradiente negativo oriundo de f não possui conexão entre pontos críticos de mesmos índices.


 Figura 1.3: Função altura em S^2 .

Consideremos ainda as orientações para as variedades instáveis fixadas na Figura 1.3. Nosso objetivo é encontrar as orientações dadas pelo Teorema 1.4 para as variedades conexas em questão.

Como z tem índice de Morse nulo, a orientação de $\mathcal{M}_{\ell z}$ é facilmente obtida, pois esta é induzida pela orientação de $T_\ell W^u(\ell)$, onde $\ell \in \{x, y\}$. Já a orientação $[\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$ requer

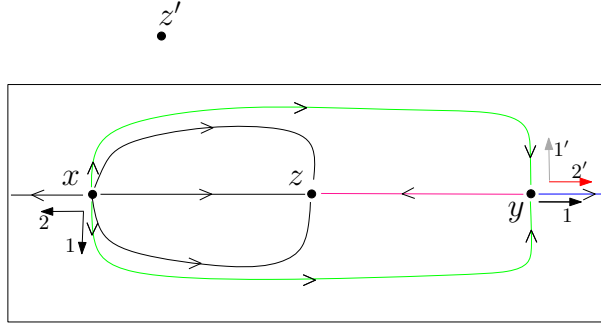


Figura 1.4: Representação planar do fluxo em S^2 .

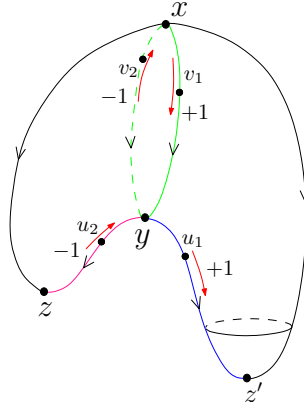


Figura 1.5: Orientações induzidas nas variedades conectantes.

um pouco mais de atenção, ela é obtida através do isomorfismo (1.2). Uma boa maneira para encontrarmos esta orientação é via a representação planar do fluxo em questão, como na Figura 1.4. Veja que a união no infinito do retângulo com o ponto z' fornece a esfera S^2 . Nesta representação, o vetor $2'$ é obtido da orientação de $W^u(y)$ (que é compatível com a orientação de $\mathcal{V}_y W^s(y)$). O vetor $1'$ é escolhido de forma que a orientação dada pela base $\{1', 2'\}$ seja compatível com a orientação de $W^u(x)$, isto é, a orientação dada pela base $\{1, 2\}$. O vetor $1'$ determina a orientação $[\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$, assim a orientação $[\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$ é oposta à orientação dada pelo fluxo na órbita de v_2 e compatível com a orientação dada pelo fluxo na órbita de v_1 , como mostra a Figura 1.5. $\triangle$

Veja que os grupos de cadeia de Morse e o operador bordo de Morse-Witten estão bem definidos, para este caso. Os grupos de cadeia são: $\mathcal{C}_2(f) = \mathbb{Z}\langle x \rangle$, $\mathcal{C}_1(f) = \mathbb{Z}\langle y \rangle$, $\mathcal{C}_0(f) = \mathbb{Z}\langle z \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle z' \rangle$ e $\mathcal{C}_k(f) = 0$, para $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}$. A partir da Figura 1.5 temos que $n_{u_1} = +1$, $n_{u_2} = -1$, $n_{v_1} = +1$ e $n_{v_2} = -1$. Logo,

$$\Delta(S^2) = \begin{array}{c} z \\ z' \\ y \\ x \end{array} \begin{array}{cccc} z & z' & y & x \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Figura 1.6: Matriz de conexão

$$n(x, y) = n_{v_1} + n_{v_2} = 0, \quad n(y, z) = n_{u_2} = -1, \quad n(y, z') = n_{u_1} = +1.$$

E os operadores $\partial_2 : \mathcal{C}_2(f) \rightarrow \mathcal{C}_1(f)$, $\partial_1 : \mathcal{C}_1(f) \rightarrow \mathcal{C}_0(f)$ e $\partial_0 : \mathcal{C}_0(f) \rightarrow \bar{0}$ são definidos nos geradores por:

$$\partial_2 \langle x \rangle = 0, \quad \partial_1 \langle y \rangle = \langle z' \rangle - \langle z \rangle, \quad \partial_0 \langle z \rangle = 0 \quad \partial_0 \langle z' \rangle = 0.$$

Assim, para todo $k \in \mathbb{Z}$ com $k \neq 0, 1, 2$, temos que ∂_k é o operador nulo.

A matriz de conexão para este fluxo na esfera é dada pela Figura 1.6.

Capítulo 2

Sequência Espectral

Recentemente, a ferramenta algébrica, sequência espectral, tem sido usada em sistemas dinâmicos, como podemos ver nos diversos trabalhos do Cornea, o qual usa a sequência espectral como umas das principais ferramentas em seus trabalhos. Tal ferramenta nos dá informações dinâmicas até então não encontradas por outros tipos de argumentos. Acreditamos que esses trabalhos recentes servirão de motivação para o estudo das sequências espectrais e por fim quebrarão o mito, bem exposto por [Ch], da dificuldade de se estudar essa ferramenta algébrica

Esse capítulo contém a teoria de sequências espectrais necessária para demonstrar a existência de uma sequência espectral associada ao Método da Varredura, a qual nos dá informações a respeito da dinâmica do fluxo Morse-Smale na variedade M .

Iniciaremos o capítulo enunciando o seguinte teorema, que será usado diversas vezes neste capítulo.

Teorema 2.1 (Teorema do Isomorfismo de Noether). *Sejam A e B submódulos de um módulo C e seja $A + B$ o submódulo gerado por $A \cup B$. O mapa inclusão $A \subseteq A + B$ envia $A \cap B$ em B e induz um isomorfismo entre $A/(A \cap B)$ e $(A + B)/B$.*

Um **módulo bigraduado** E^r sobre um domínio de ideais principais R é uma coleção indexada de R -módulos $E_{p,q}^r$ para todo par de inteiros p e q . Uma **diferencial d^r de bi-grau** $(-r, r-1)$ é uma coleção de homomorfismos $d^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$ para todo p e q , tal que $(d^r)^2 = 0$. O **módulo de homologia** $H(E^r)$ é um módulo bigraduado definido por

$$H_{p,q}(E^r) = \frac{\text{Ker } d^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r}{\text{Im } d^r : E_{p+r,q-r+1}^r \rightarrow E_{p,q}^r}.$$

Definição 2.1. Uma sequência espectral $E = \{E^r\}_{r \geq k}$ é uma sequência $\{E^r, d^r\}$ com $r \geq k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, tal que

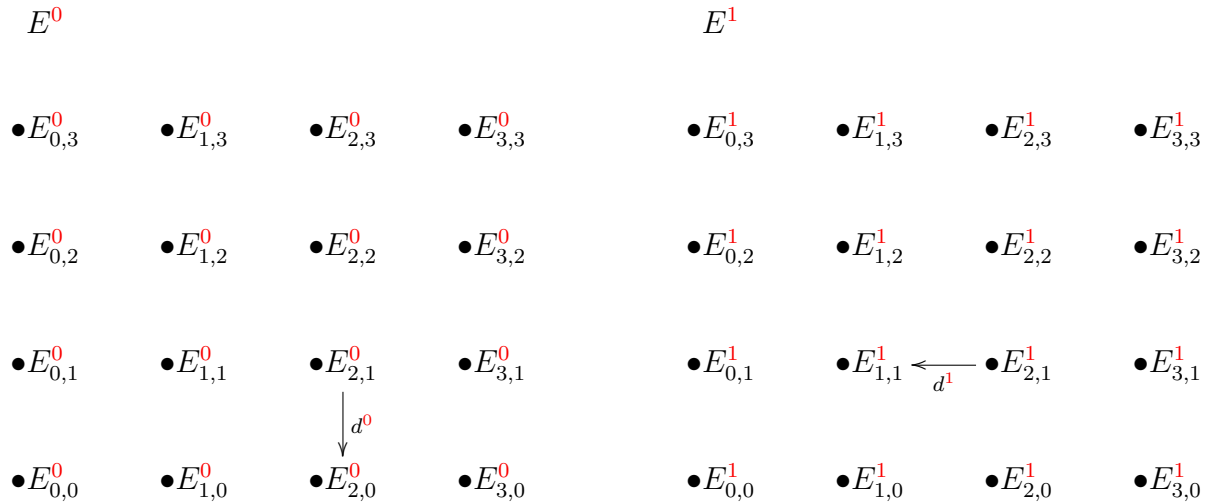
1. E^r é um R -módulo bigraduado, e d^r é uma diferencial de bi-grau $(-r, r-1)$.

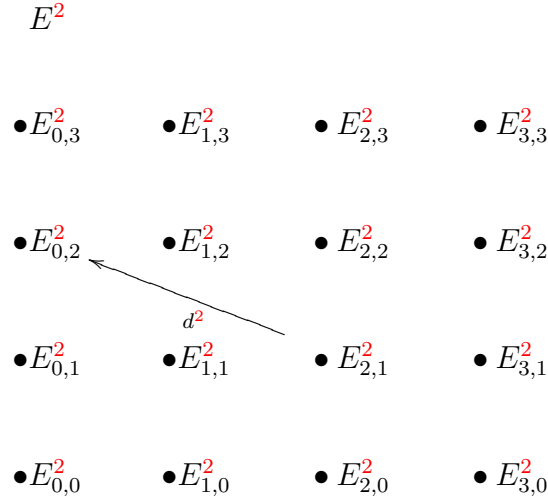
2. Para todo $r \geq k$ existe um isomorfismo $H(E^r) \approx E^{r+1}$ onde

$$H_{p,q}(E^r) = \frac{\text{Ker} d^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r}{\text{Im} d^r : E_{p+r,q-r+1}^r \rightarrow E_{p,q}^r}$$

(módulo de homologia)

De uma maneira informal, podemos visualizar a sequência espectral como um livro com páginas quadriculadas. A r -ésima página corresponde ao E^r , e cada vértice dos quadrados da página quadriculada corresponde ao $E_{p,q}^r$, onde tomamos p na direção horizontal e q na direção vertical.





Observe que se definirmos $E_q^r = \bigoplus_{s+t=q} E_{s,t}^r$ então a diferencial d^r define um homomorfismo $\partial^r : E_q^r \rightarrow E_{q-1}^r$ tal que $\{E_q^r, \partial^r\}_{q \in \mathbb{Z}}$ é um complexo de cadeia com o q -ésimo módulo de homologia igual a $\bigoplus_{s+t=q} H(E)_{s,t}$. Note que E_q^r corresponde a $(s+t)$ -ésima diagonal e a diferencial ∂^r leva um elemento da diagonal q para outro elemento na diagonal $q-1$, como ilustra a seguinte figura.

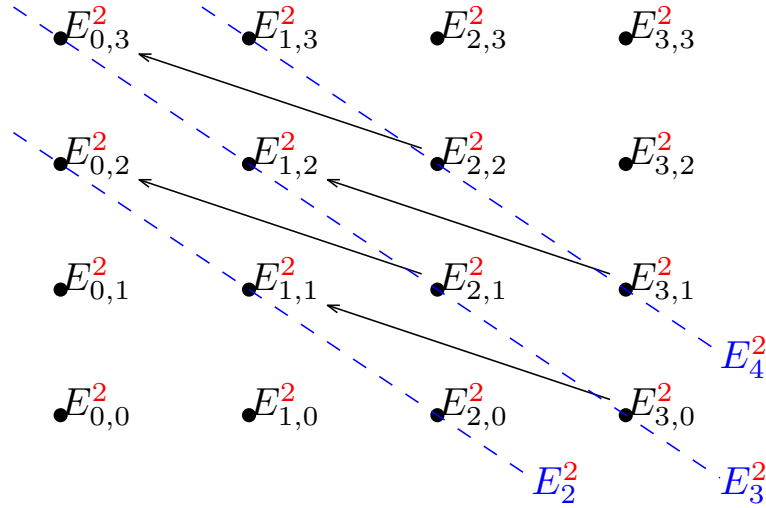


Figura 2.1: $\{E_q^r, \partial^r\}_{q \in \mathbb{Z}}$

Se $E_{p,q}^r = 0$ para algum par fixado (p, q) então $E_{p,q}^{r+\varphi} = 0$ para todo $\varphi \geq 0$.

Um homomorfismo $\phi : E \rightarrow E'$ de uma sequência espectral para outra é uma coleção de homomorfismo $\phi^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p,q}^{r'}$ para $r \geq k$ e para todo p e q que comutam com as diferenciais

e tal que $\phi_*^r : H(E) \rightarrow H(E')$ corresponde a $\phi^{r+1} : E^{r+1} \rightarrow E'^{r+1}$ pelos isomorfismos $H(E^r) \approx E^{r+1}$ da sequência espectral.

Para definir o termo limite de uma sequência espectral, faremos uns cálculos.

Sejam $Z_{p,q}^0 = \text{Ker}(d_{p,q}^0 : E_{p,q}^0 \rightarrow E_{p,q-1}^0)$ e $B_{(p,q)}^0 = \text{Im}(d_{p,q+1}^0 : E_{p,q+1}^0 \rightarrow E_{p,q}^0)$ então $B^0 \subseteq Z^0$, pois $(d^0)^2 = 0$, e $E^1 = Z^0/B^0$. Sejam $Z(E^1)_{p,q} = \text{Ker}(d_{p,q}^1 : E_{p,q}^1 \rightarrow E_{p-1,q}^1)$ e $B(E^1)_{p,q} = \text{Im}(d_{p+1,q}^1 : E_{p+1,q}^1 \rightarrow E_{p,q}^1)$. Então pelo Teorema do Isomorfismo existem submódulos bigraduados Z^1 e B^1 de Z^0 contendo B^0 tais que $Z(E^1)_{p,q} = Z_{p,q}^1/B_{p,q}^0$ e $B(E^1)_{p,q} = B_{p,q}^1/B_{p,q}^0$ para todo p e q , segue que

$$B^0 \subseteq B^1 \subseteq Z^1 \subseteq Z^0.$$

Por indução

$$B^0 \subseteq B^1 \subseteq \dots \subseteq B^r \subseteq \dots \subseteq Z^r \subseteq \dots \subseteq Z^1 \subseteq Z^0.$$

Assim definimos o **termo limite** como $E^\infty = Z^\infty/B^\infty$, onde $Z^\infty = \bigcap_r Z^r$ e $B^\infty = \bigcup_r B^r$.

Uma sequência espectral é **convergente** se dados p e q existe $r(p, q) \geq 0$ tal que para todo $r \geq r(p, q)$, $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$ é trivial. Uma sequência espectral é **fortemente convergente** se dados p e q existe $r(p, q) \geq 0$ tal que $E_{p,q}^r \approx E_{p,q}^\infty$, para todo $r \geq r(p, q)$.

2.1 Filtração em um complexo de cadeias

Definição 2.2. Uma **filtração** (crescente) em um R -módulo C é uma sequência de submódulos $F_p C$ para todos os inteiros p tal que $F_p C \subset F_{p+1} C$. Se C é um módulo graduado, ou seja, $\{C = C_q\}$ é uma coleção de R -módulo indexado pelos inteiros, a filtração deve ser compatível com a graduação, isto é, $F_p C$ é um submódulo graduado de C para cada p .

Todas as filtrações usadas nessa dissertação serão crescentes, o que nos dará a liberdade de omitir o termo “crescente” da expressão “filtração crescente”.

Uma **filtração F em um complexo de cadeias C** é uma filtração compatível com a graduação de C e com a diferencial de C , ou seja, cada $F_p C$ é um subcomplexo de C da forma $\{F_p C_q\}_q$.

A Figura 2.2 auxilia a visualização de uma filtração crescente em um R -módulo C ; por exemplo para $C = C_{p+q}$ temos que a filtração corresponde a linha com $F_* C_{p+q}$, onde i é a aplicação inclusão. Para o caso em que $C = C_q$ é um complexo de cadeias a Figura 2.2 descreve a filtração desse caso, onde ∂ é a diferencial associada ao complexo de cadeias.

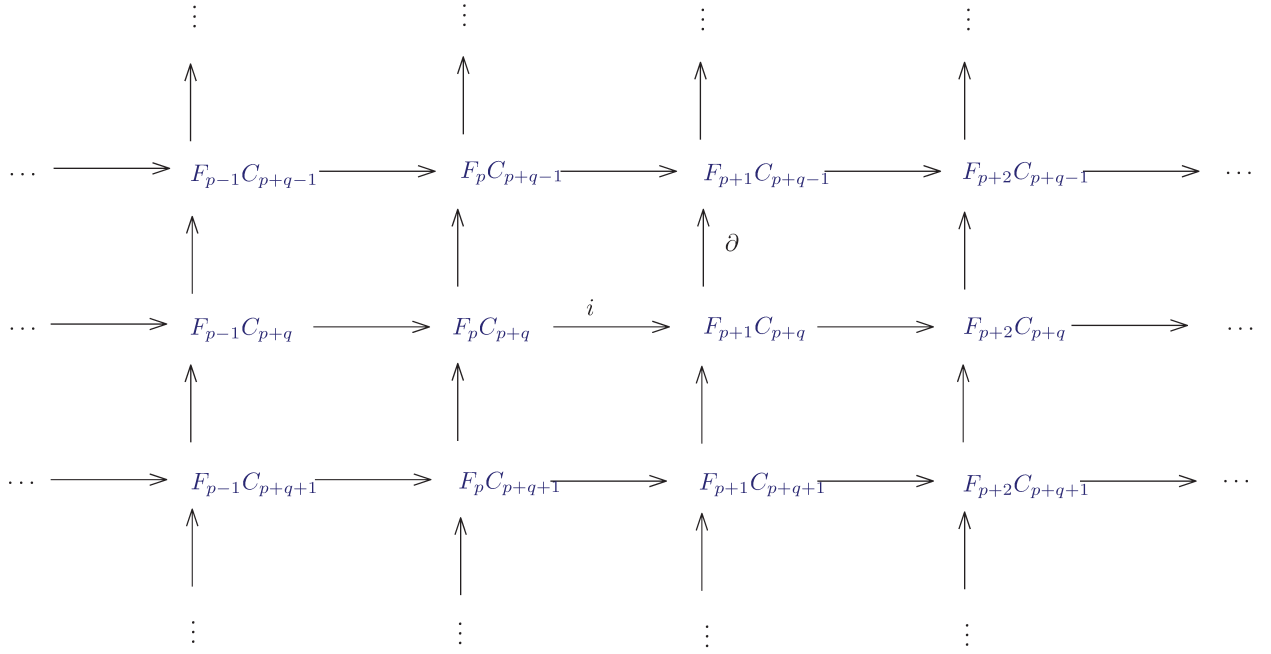


Figura 2.2: Filtração em um complexo de cadeias

Dada uma filtração F em um R -módulo C , o **módulo graduado associado** $G(C)$ é definido por $G(C)_p = F_p C / F_{p-1} C$. Se C é um módulo graduado, o módulo associado $G(C)$ é um módulo bigraduado

$$G(C)_{p,q} = \frac{F_p C_{p+q}}{F_{p-1} C_{p+q}}$$

A **filtração** F é **convergente** se $\cap_p (F_p C) = 0$ e $\cup_p (F_p C) = C$. A **filtração** F é **finita** se $F_p C = 0$ para algum p e $F_{p'} C = C$ para algum p' .

A filtração F em C induz uma filtração F em $H_*(C)$ definida por

$$F_p H_*(C) = \text{Im}[H_*(F_p C) \rightarrow H_*(C)].$$

Uma filtração F no módulo graduado C é **limitada inferiormente** se, dado q , existe $p(q)$ tal que $F_{p(q)} C_q = 0$. A filtração induzida em $H_*(C)$ herda as propriedades da filtração F .

O próximo teorema associa uma sequência espectral a uma filtração em um complexo de cadeias.

Teorema 2.2. *Seja F uma filtração convergente limitada inferiormente em um complexo de*

cadeias C . Existe uma sequência espectral $E = \{E^r\}_{r \geq 0}$ convergente com

$$E_{p,q}^0 = \frac{F_p C_{p+q}}{F_{p-1} C_{p+q}} = G(C)_{p,q},$$

$$E_{p,q}^1 \approx H_{p+q}\left(\frac{F_p C_{p+q}}{F_{p-1} C_{p+q}}\right)$$

e E^∞ é isomorfa ao módulo $GH_*(C)$.

Durante a demonstração deste teorema é bom sempre ter em mente a Figura 2.2.

Demonstração. A demonstração será dividida em 3 partes:

- 1 Cálculo de E_p^r para $r < 0$, $r = 0$ e $r = 1$;
- 2 Prova de que $E = \{E^r\}_{r \geq 0}$ é uma sequência espectral;
- 3 Cálculo da convergência da sequência espectral.

Demonstração da parte 1:

Para r arbitrário definimos

$$Z_p^r = \{c \in F_p C \mid \partial c \in F_{p-r} C\}$$

e

$$Z_p^\infty = \{c \in F_p C \mid \partial c = 0\}.$$

Esses são módulos graduados com $Z_{p,q}^r = \{c \in F_p C_{p+q} \mid \partial c \in F_{p-r} C_{p+q-1}\}$ e $Z_{p,q}^\infty = \{c \in F_p C_{p+q} \mid \partial c = 0\}$.

Afirmação:

$$\begin{aligned} \dots \subseteq \partial Z_{p-1}^{-1} \subseteq \partial Z_p^0 \subseteq \partial Z_{p+1}^1 \subseteq \dots \subseteq \partial C \cap F_p C \subseteq Z_p^\infty \subseteq \dots \\ \dots \subseteq Z_p^1 \subseteq Z_p^0 = F_p C \end{aligned} \tag{2.1}$$

Com efeito, basta mostrar que $\partial Z_{p+t}^t \subseteq \partial C \cap F_p C$, para todo t e $\partial C \cap F_p C \subseteq Z_p^\infty$, pois as outras inclusão seguem diretamente da definição.

Seja $c \in \partial Z_{p+t}^t$ com t qualquer, temos que existe $w \in Z_{p+t}^t$ tal que $\partial w = c$, isto é $w \in F_{p+t} C$ tal que $c = \partial w \in F_{p+t-t} C = F_p C$ e $c \in \partial F_{p+t} C \subseteq \partial C$ para todo t . Portanto $\partial Z_{p+t}^t \subseteq \partial C \cap F_p C$, para todo t .

Seja $c \in \partial C \cap F_p C$, ou seja, $c \in \partial C_{p+q+1} \cap F_p C_{p+q}$ para algum q . Logo existe $w \in C_{p+q+1}$ tal que $c = \partial w$, daí $\partial c = \partial \partial w = 0$. Como $c \in F_p C_{p+q}$ então $c \in Z_p^\infty$, portanto $\partial C \cap F_p C \subseteq Z_p^\infty$. $\triangleright$

Defina

$$E_{p,q}^r = \frac{Z_{p,q}^r}{Z_{p-1,q+1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,q-r+2}^{r-1}},$$

$$E_{p,q}^\infty = \frac{Z_{p,q}^\infty}{Z_{p-1,q+1}^\infty + \partial C \cap F_p C_{p+q}}.$$

Note que a aplicação ∂ envia Z_p^r para Z_{p-r}^r e envia $Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1}$ para ∂Z_{p-1}^{r-1} .

De fato, seja $c \in Z_p^r = \{c \in F_p C \mid \partial c \in F_{p-r} C\}$ temos que $\partial c \in F_{p-r} C$ e $\partial \partial c = 0 \in F_{p-r-r} C$, logo $\partial c = w \in Z_{p-r}^r$. Seja $c + d \in Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1}$ tal que $c \in Z_{p-1}^{r-1}$ e $d \in \partial Z_{p+r-1}^{r-1}$, ou seja, $d = \partial b$ com $b \in Z_{p+r-1}^{r-1}$, daí $\partial(c + d) = \partial c + \partial \partial b = \partial c \in \partial Z_{p-1}^{r-1}$.

Assim ∂ induz o homomorfismo

$$\begin{aligned} d^r : E_p^r &\longrightarrow E_{p-r}^r \\ c + Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1} &\longmapsto \partial c + Z_{p-r-1}^{r-1} + \partial Z_{p-1}^{r-1} \end{aligned}$$

Pela definição de $E_{p,q}^r$ temos que E^r é um módulo bigraduado. Provaremos que d^r é uma diferencial de bigrau $(-r, r-1)$ de E^r . Com efeito $d^r \circ d^r(c + Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1}) = d^r(\partial c + Z_{p-r-1}^{r-1} + \partial Z_{p-1}^{r-1}) = \partial \partial c + Z_{p-r-r-1}^{r-1} + \partial Z_{p-r-1}^{r-1} = 0_{E_{p-r-r}^r}$. Por ∂ levar $Z_{p,q}^r \rightarrow Z_{p-r,q+r-1}^r$ temos que $d^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$, assim d^r é uma diferencial de bigrau $(-r, r-1)$.

Afirmção: $E_p^r = F_p C / F_{p-1} C$ para todo $r \leq 0$ e $d^r = 0$ para todo $r < 0$.

De fato, para todo $c \in F_p C$ temos que $\partial c \in F_p C \subseteq F_{p-r} C$, pois $p-r \geq p$ já que $r \leq 0$, assim $F_p C \subseteq Z_p^r$. Ora $Z_p^r = \{c \in F_p C \mid \partial c \in F_{p-r} C\} \subseteq F_p C$, segue que $Z_p^r = F_p C$.

Usando esse fato vemos que

$$E_{p,q}^r = \frac{Z_{p,q}^r}{Z_{p-1,q+1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,q-r+2}^{r-1}} = \frac{F_p C}{F_{p-1} C + \partial F_{p+r-1} C} = \frac{F_p C}{F_{p-1} C}, \quad \forall r \leq 0,$$

pois $\partial F_{p+r-1} C \subseteq F_{p+r-1} C \subseteq F_{p-1} C$, já que $p+r-1 \leq p-1$.

Para $r < 0$, temos

$$\begin{aligned} d^r : \frac{F_p C}{F_{p-1} C} &\longrightarrow \frac{F_{p-r} C}{F_{p-r-1} C} \\ c + F_{p-1} C &\longmapsto \partial c + F_{p-r-1} C. \end{aligned}$$

Note que $c \in F_p C \subseteq F_{p-r-1} C$, visto que $p \leq p - r - 1$, $\forall r < 0$. Assim $\partial(c + F_{p-1} C) = \partial c + F_{p-r-1} C = 0_{F_{p-1} C / F_{p-r-1} C}$.

Observe que $d^0 = \partial$

$$\begin{aligned} d^0 : \frac{F_p C}{F_{p-1} C} &\longrightarrow \frac{F_p C}{F_{p-1} C} \\ c + F_{p-1} C &\longmapsto \partial c + F_{p-1} C, \end{aligned}$$

pois $\partial F_{p-1} C \subseteq F_{p-1} C$. Ou seja, d^0 é o operador bordo do complexo quociente $E_{p,q}^0 = \frac{F_p C_{p+q}}{F_{p-1} C_{p+q}} = G(C)_{p,q}$. $\triangleright$

Agora iremos calcular $E_{p,q}^1 \approx H_{p+q}(F_p C / F_{p-1} C)$, para isso basta encontrar o módulo dos ciclos e o módulo dos bordos do complexo quociente $F_p C / F_{p-1} C$.

Pela definição e pelo resultado anterior temos

$$\begin{aligned} E_p^1 &= \frac{Z_p^1}{Z_{p-1}^0 + \partial Z_{p-1}^0} = \frac{Z_p^1}{F_{p-1} C + \partial F_{p-1} C}, \\ \frac{Z_p^1}{Z_{p-1}^0} &= \frac{Z_p^1}{F_{p-1} C}. \end{aligned}$$

Afirmção: Z_p^1 / Z_{p-1}^0 é o módulo dos ciclos de $F_p C / F_{p-1} C$.

Seja $a + F_{p-1} C \in Z_p^1 / F_{p-1} C$ então $\partial(a + F_{p-1} C) = \partial a + \partial F_{p-1} C \subseteq F_{p-1} C = 0_{F_p C / F_{p-1} C}$.

Logo $\frac{Z_p^1}{Z_{p-1}^0}$ é um submódulo do módulo dos ciclos de $F_p C / F_{p-1} C$.

Seja $c + F_{p-1} C$ um ciclo de $F_p C / F_{p-1} C$ então $\partial(c + F_{p-1} C) = 0 = \partial c + F_{p-1} C$, pois $F_{p-1} C$ é o elemento neutro do quociente $F_p C / F_{p-1} C$, assim $\partial c \in F_{p-1} C$. Como $c \in F_p C$ e $\partial c \in F_{p-1} C$, então $c \in Z_p^1$ e $Z_{p-1}^0 = F_{p-1} C$, ou seja, $c + F_{p-1} C \in Z_p^1 / Z_{p-1}^0$. $\triangleright$

Afirmção: $\frac{Z_{p-1,q+1}^0 + \partial Z_{p-1,q+1}^0}{Z_{p-1,q+1}^0}$ é o módulo dos bordos de $F_p C / F_{p-1} C$.

Observe que

$$\frac{Z_{p-1,q+1}^0 + \partial Z_{p-1,q+1}^0}{Z_{p-1,q+1}^0} = \frac{F_{p-1} C_{p+q} + \partial F_p C_{p+q+1}}{F_{p-1} C_{p+q}}.$$

Seja $a + F_{p-1}C_{p+q} \in (F_{p-1}C_{p+q} + \partial F_p C_{p+q+1})/F_{p-1}C_{p+q}$, podemos escrever $a = b + d$ com $b \in F_{p-1}C_{p+q}$, $d \in \partial F_p C_{p+q+1}$ e $d = \partial w$ onde $w \in F_p C_{p+q+1}$. Como $a + F_{p-1}C_{p+q} = b + d + F_{p-1}C_{p+q} = d + b + F_{p-1}C_{p+q} = d + F_{p-1}C_{p+q} = \partial w + F_{p-1}C_{p+q} \in \partial(F_p C_{p+q+1}/F_{p-1}C_{p+q+1})$. Portanto $Z_{p-1,q+1}^0 + \partial Z_{p-1,q+1}^0/Z_{p-1,q+1}^0$ é submódulo do módulo dos bordos de $F_p C/F_{p-1}C$.

Afirmção: $\partial F_{p-1}C_{p+q+1} = \partial F_p C_{p+q+1} \cap F_{p-1}C_{p+q}$.

Com efeito seja $a \in \partial F_p C_{p+q+1} \cap F_{p-1}C_{p+q}$ logo existe $b \in F_p C_{p+q+1}$ tal que $\partial b = a$, ora $a \in F_{p-1}C_{p+q}$ segue que $b \in F_{p-1}C_{p+q+1}$, portanto $a \in \partial F_{p-1}C_{p+q+1}$, ou seja, $\partial F_p C_{p+q+1} \cap F_{p-1}C_{p+q} \subseteq \partial F_{p-1}C_{p+q+1}$. A outra inclusão segue analogamente. $\triangleright$

Seja $w + F_{p-1}C_{p+q} \in \partial(F_p C_{p+q+1}/F_{p-1}C_{p+q+1})$ daí existe

$$\begin{aligned} \partial(a + F_{p-1}C_{p+q+1}) &= w + F_{p-1}C_{p+q} = \partial a + \partial F_{p-1}C_{p+q+1} = \\ &= \partial a + \partial F_p C_{p+q+1} \cap F_{p-1}C_{p+q} \in \frac{\partial F_p C_{p+q+1}}{\partial F_p C_{p+q+1} \cap F_{p-1}C_{p+q}} \approx \frac{F_{p-1}C_{p+q} + \partial F_p C_{p+q+1}}{F_{p-1}C_{p+q}}, \end{aligned}$$

onde o isomorfismo segue do Teorema dos isomorfismos de Noether. $\triangleright$

Logo

$$H_{p+q}(F_p C/F_{p-1}C) = \frac{\frac{Z_p^1}{Z_{p-1}^0}}{\frac{Z_{p-1,q+1}^0 + \partial Z_{p-1,q+1}^0}{Z_{p-1,q+1}^0}} \approx E_{p,q}^1.$$

Demonstração da 2ª parte:

Provaremos que $E = \{E^r\}_{r \geq 0}$ é uma sequência espectral calculando a homologia de E^r com respeito a d^r .

Afirmção * :

$$\begin{aligned} \{c \in Z_p^r \mid \partial c \in Z_{p-r-1}^{r-1} + \partial Z_{p-1}^{r-1}\} &= \{c \in Z_p^r \mid \partial c \in F_{p-r-1}C\} + \{c \in Z_p^r \mid \partial c \in \partial Z_{p-1}^{r-1}\} \\ &= Z_p^{r+1} + (Z_{p-1}^{r-1} + Z_p^\infty) = Z_p^{r+1} + Z_{p-1}^{r-1} \end{aligned}$$

A primeira igualdade segue da definição de $Z_{p-r-1}^{r-1} = \{w \in F_{p-r-1}C \mid \partial w \in F_{p-2r}\}$. A segunda igualdade segue dos seguintes fatos.

Fato: $\{c \in Z_p^r \mid \partial c \in F_{p-r-1}C\} = Z_p^{r+1}$.

De fato, usando a definição de Z_p^r temos $\{c \in Z_p^r \mid \partial c \in F_{p-r-1}C\} = \{c \in F_pC \mid \partial c \in F_{p-r}C \text{ e } \partial c \in F_{p-r-1}C\} = Z_p^{r+1}$, pois $F_{p-r-1}C \subseteq F_{p-r}C$. $\triangleright$

Fato: $\{c \in Z_p^r \mid \partial c \in \partial Z_{p-1}^{r-1}\} = Z_{p-1}^{r-1} + Z_p^\infty$.

Note que $\{c \in Z_p^r \mid \partial c \in \partial Z_{p-1}^{r-1}\} = \{c \in F_pC \mid \partial c \in F_{p-r}C \text{ e } \exists w \in Z_{p-1}^{r-1} \text{ tal que } \partial c = \partial w\}$, então $c = e + w$ onde $e \in F_pC$ tal que $\partial e = 0$ pois $\partial c = \partial w$ logo $\partial(c - w) = 0$, ou seja, $c - w = e$. Assim para todo $c \in \{c \in Z_p^r \mid \partial c \in \partial Z_{p-1}^{r-1}\}$ temos que c pode ser decomposto na soma $c = e + w$ onde $e \in Z_p^\infty$ e $w \in Z_{p-1}^{r-1}$, ou seja, segue o resultado. $\triangleright$

A última igualdade segue do fato de que $Z_p^\infty \subseteq Z_p^{r+1}$. $\triangleright$

Iremos calcular $\text{Ker}(d^r : E_p^r \rightarrow E_{p-r}^r)$ e $\text{Im}(d^r : E_{p+r}^r \rightarrow E_p^r)$. Pela definição de

$$\begin{aligned} d^r : E_p^r &\longrightarrow E_{p-r}^r \\ c + Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1} &\longmapsto \partial c + Z_{p-r-1}^{r-1} + \partial Z_{p-1}^{r-1} \end{aligned}$$

temos que $\partial c = 0 \Leftrightarrow \partial c \in Z_{p-r-1}^{r-1} + \partial Z_{p-1}^{r-1}$, ou seja, se $c \in \text{Ker}(d^r : E_p^r \rightarrow E_{p-r}^r)$ então $c \in Z_p^r$ e $\partial c \in Z_{p-r-1}^{r-1} + \partial Z_{p-1}^{r-1}$. Daí por (*), temos $\{c \in Z_p^r \mid \partial c \in Z_{p-r-1}^{r-1} + \partial Z_{p-1}^{r-1}\} = Z_p^{r+1} + Z_{p-1}^{r-1}$, daí $\text{Ker}(d^r) = \frac{Z_p^{r+1} + Z_{p-1}^{r-1}}{Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1}}$.

Segue também que $\text{Im}(d^r : E_{p+r}^r \rightarrow E_p^r) = \frac{\partial Z_{p+r}^r}{Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1}} \approx \frac{\partial Z_{p+r}^r + Z_{p-1}^{r-1}}{Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1}}$, tal isomorfismo é dado pela aplicação

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_{p+r}^r + Z_{p-1}^{r-1}}{Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1}} &\longrightarrow \frac{\partial Z_{p+r}^r}{Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1}} \\ a + b + Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1} &\longmapsto a + Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{Ker d^r}{Im d^r} &= \frac{\frac{Z_p^{r+1} + Z_{p-1}^{r-1}}{Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1}}}{\frac{\partial Z_{p+r}^r + Z_{p-1}^{r-1}}{Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1}}} = \frac{(Z_p^{r+1} + Z_{p-1}^{r-1})}{(Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r}^r)} \\
&\approx \frac{Z_p^{r+1}}{Z_p^{r+1} \cap (Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r}^r)} \\
&= \frac{Z_p^{r+1}}{(Z_{p-1}^r + \partial Z_{p+r}^r)} = E_p^{r+1}
\end{aligned}$$

O isomorfismo segue do Teorema de Noether onde $A = Z_p^{r+1}$ e $B = Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r}^r$ e note que $\partial Z_{p+r}^r \subseteq Z_p^{r+1}$ devido às das inclusões em (2.1), assim $A + B = Z_p^{r+1} + Z_{p-1}^{r-1}$. A penúltima igualdade segue do fato de que $Z_p^{r+1} \cap Z_{p-1}^{r-1} = \{c \in F_p C \mid \partial c \in F_{p-r-1} C\} \cap \{c \in F_{p-1} C \mid \partial c \in F_{p-r} C\} = \{c \in F_{p-1} C \mid \partial c \in F_{p-r-1} C\} = Z_{p-1}^r$.

Portanto,

$$H_*(E^r) \approx E^{r+1}.$$

Demonstração da terceira parte:

Primeiramente, calcularemos o termo limite dessa sequência e depois mostraremos a sua convergência.

Antes disso, provaremos alguns resultados que auxiliarão no cálculo do termo limite.

$$1. \left[E_p^r = \frac{Z_p^r}{(Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1})} \approx \frac{(Z_p^r + F_{p-1} C)}{(F_{p-1} C + \partial Z_{p+r-1}^{r-1})} \right]$$

Em E_p^r sejam $A = Z_p^r$ e $B = F_{p-1} C + \partial Z_{p+r-1}^{r-1}$ temos que $E_p^r = \frac{A}{A \cap B}$, pois $\partial Z_{p+r-1}^{r-1} \subseteq Z_p^r$ por (2.1) e $Z_p^r \cap F_{p-1} C = \{c \in F_{p-1} C \mid \partial c \in F_{p-r} C\} = Z_{p-1}^{r-1}$. Usando o Teorema de Noether obtemos

$$E_p^r = \frac{Z_p^r}{(Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1})} = \frac{A}{A \cap B} \approx \frac{A + B}{B} = \frac{(Z_p^r + F_{p-1} C)}{(F_{p-1} C + \partial Z_{p+r-1}^{r-1})}.$$

Note que na expressão, o numerador decresce e o denominador cresce quando r cresce, basta observar as inclusões em (2.1).

$$2. \left[\partial C \cap F_p C = \partial Z_{p+r-1}^{r-1} \right]$$

Como $\cup_p F_p C = C$ então $\cup_r \partial Z_{p+r-1}^{r-1} = \partial C \cap F_p C$. De fato, por (2.1) temos $\partial Z_{p+r-1}^{r-1} \subseteq F_p C \cap \partial C$, $\forall r$ portanto $\cup_r \partial Z_{p+r-1}^{r-1} \subseteq F_p C \cap \partial C$. Seja $c \in F_p C \cap \partial C$, daí existe $w \in C$

tal que $\partial w = c$. Temos que existe $p_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $w \in F_{p_0}C$, por $\cup_p F_p C = C$. Como $\cup_r \partial Z_{p+r-1}^{r-1} = \cup_r \partial \{a \in F_{p+r-1}C \mid \partial a \in F_p C\}$ e $w \in F_{p_0}C$ e $\partial w = c \in F_p C$ então $c \in \partial Z_{r_0}^{r_0-p} \subseteq \cup_r \partial Z_{p+r-1}^{r-1}$, onde $r_0 = p_0 - p + 1$. Portanto $\partial C \cap F_p C = \partial Z_{p+r-1}^{r-1}$.

3. $[\cap_r Z_{p,q}^r = Z_{p,q}^\infty]$

Para $p + q - 1$ existe $p_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $F_{p_0}C_{p+q-1} = 0$, já que a filtração é limitada inferiormente, logo $\cap_r Z_{p,q}^r = \cap_r \{c \in F_p C_{p+q} \mid \partial c \in F_{p-r} C_{p+q-1}\} = \{c \in F_p C_{p+q} \mid \partial c \in \cap_r F_{p-r} C_{p+q-1}\} = \{c \in F_p C_{p+q} \mid \partial c \in 0\} = Z_{p,q}^\infty$

Usando esses resultados e o Teorema de Noether ($A = Z_p^\infty$, $B = F_{p-1}C + \partial C \cap F_p C$ e usando $\partial C \cap F_p C \subseteq Z_p^\infty$) segue

$$\begin{aligned} E^\infty(p) &= \frac{Z^\infty(p)}{B^\infty(p)} = \frac{\cap_r Z^r(p)}{\cap_r B^r(p)} \stackrel{*}{=} \frac{\cap_r (Z_p^r + F_{p-1}C)}{\cup_r (F_{p-1}C + \partial Z_{p+r-1}^{r-1})} = \frac{(\cap_r Z_p^r + F_{p-1}C)}{(F_{p-1}C + \cup_r \partial Z_{p+r-1}^{r-1})} \\ &= \frac{(Z_p^\infty + F_{p-1}C)}{(F_{p-1}C + \partial C \cap F_p C)} \\ &\approx \frac{Z_p^\infty}{(Z_{p-1}^\infty + \partial C \cap F_p C)} = E_p^\infty \end{aligned}$$

★ Note que na definição do termo limite E^∞ , visto anteriormente, $Z^r = Z_p^r + F_{p-1}C$ e $B^r = F_{p-1}C + \partial Z_{p+r-1}^{r-1}$ pois satisfazem as condições apresentadas na definição do termo limite E^∞ . Observe também que o termo limite E^∞ , Z^r e B^r são bimódulos graduados e que $E^\infty(p)$, $Z^r(p)$ e $B^r(p)$ são módulos graduados com p fixo. Não confunda Z^r com Z_p^r , $Z^r(p)$ com Z_p^r , E^∞ com E_p^∞ e $E^\infty(p)$ com E_p^∞ esses módulos tem definições distintas apesar de algum deles serem iguais pelo que foi demonstrado acima ($E^\infty(p) = E_p^\infty$).

Agora, mostraremos a convergência da sequência espectral.

Como a filtração é limitada inferiormente temos que dado $s + t$ existe $\tilde{s}(s + t)$ tal que $F_s C_{s+t} = 0$ para todo $s < \tilde{s}(s + t)$, daí

$$E_{s,t}^r = \frac{Z_{s,t}^r}{Z_{s-1,t+1}^{r-1} + \partial Z_{s+r-1,t-r+2}^{r-1}} = \frac{\{c \in F_s C_{s+t} \mid \partial c \in F_{s-r} C_{s+t-1}\}}{Z_{s-1,t+1}^{r-1} + \partial Z_{s+r-1,t-r+2}^{r-1}} = 0. \quad (2.2)$$

Assim para p e q fixados basta tomar $r_0 = p - \tilde{p}(p + q - 1)$, daí para todo $r > r_0$ $d^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$ é nulo. De fato $E_{p-r,q+r-1}^r = 0$, visto que os subíndices de $E_{p-r,q+r-1}^r$ tem a soma $p - r + q + r - 1 = p + q - 1$ e $p - r < p - r_0 = p - p + \tilde{p}(p + q - 1) = \tilde{p}(p + q - 1)$, assim por (2.2) $E_{p-r,q+r-1}^r = 0 \forall r > r_0$. Com isso provamos a convergência.

Finalmente, para completar a prova interpretamos o limite E^∞ como $GH_*(C)$. Pela definição $GH_*(C)_{p,q} = \frac{F_p H_{p+q}(C)}{F_{p-1} H_{p+q}(C)}$, onde $F_p H_{p+q}(C) = \text{Im}[H_{p+q}(F_p C) \rightarrow H_{p+q}(C)]$.

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_{p+q} : H_{p+q}(F_p C) &\longrightarrow H_{p+q}(C) \\ a + \text{Im}(\partial_F^{p+q+1}) &\longmapsto a + \text{Im}(\partial^{p+q+1}), \end{aligned}$$

onde ∂_F^{p+q+1} é a restrição em $F_p C$ do operador bordo $\partial_{p+q+1} : C_{p+q+1} \rightarrow C_{p+q}$ e $a \in \text{Ker}(\partial_F^{p+q})$, ou seja $a \in Z_p^\infty$ por definição. Logo

$$\text{Im}(\varphi_{p+q}) = \frac{Z_p^\infty + \text{Im}(\partial^{p+q+1})}{\text{Im}(\partial^{p+q+1})} \approx \frac{Z_p^\infty}{Z_p^\infty \cap \text{Im}(\partial^{p+q+1})} = \frac{Z_p^\infty}{\partial C_{p+q+1} \cap F_p C_{p+q+1}},$$

pois o isomorfismo é dado pelo Teorema de Noether e $Z_p^\infty \cap \text{Im}(\partial^{p+q+1}) = \partial C_{p+q+1} \cap F_p C_{p+q+1}$. Assim, o módulo graduado $F_* H_{p+q}(C) = \frac{Z_p^\infty}{\partial C \cap F_p C}$. Como $\partial C \cap F_{p-1} C \subseteq \partial C \cap F_p C$ então

$$\frac{(Z_p^\infty / \partial C \cap F_p C)}{(Z_{p-1}^\infty / \partial C \cap F_{p-1} C)} \approx \frac{Z_p^\infty}{(Z_{p-1}^\infty + \partial C \cap F_p C)},$$

via o isomorfismo que leve

$$a + \partial C \cap F_p C + Z_{p-1}^\infty / \partial C \cap F_{p-1} C \leftrightarrow a + Z_{p-1}^\infty + \partial C \cap F_p C,$$

onde $a \in Z_p^\infty$. Segue que

$$\begin{aligned} F_p H_*(C) / F_{p-1} H_*(C) &= \\ &= \frac{(Z_p^\infty / \partial C \cap F_p C)}{(Z_{p-1}^\infty / \partial C \cap F_{p-1} C)} \\ &\approx \frac{Z_p^\infty}{(Z_{p-1}^\infty + \partial C \cap F_p C)} \\ &= E_p^\infty. \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Método da Varredura

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana suave, fechada e de dimensão finita n e seja φ um fluxo gradiente negativo sobre M oriundo de uma função de Morse-Smale f . Consideremos o complexo de Morse-Witten $(\mathcal{C}_*(f), \partial_*)$ associado a M , dado por

$$\mathcal{C}_k(f) := \bigoplus_{x \in \text{Crit}_k(f)} \mathbb{Z}\langle x \rangle, \quad k \in \mathbb{Z},$$

onde $\text{Crit}_k(f)$ é o conjunto dos pontos críticos de f de índice k .

Conforme o Capítulo 1, temos que o operador bordo ∂_* é representado pela matriz Δ (veja Figura 1.2) com as seguintes propriedades:

- A matriz Δ é triangular estritamente superior;
- $\Delta \circ \Delta = 0$.

Para construir a matriz Δ observe que enumeramos cada conjunto $\text{Crit}_k(f) = \{h_k^1, \dots, h_k^{c_k}\}$, onde c_k é o número de pontos críticos de índice k . Note que cada coluna da matriz Δ está associado a um ponto crítico de f . Então ordenamos o conjunto de todos os pontos críticos de f conforme a ordem das colunas de Δ (Figura 1.2). Como exemplo, ordenamos o conjunto dos pontos críticos de f da seguinte forma

$$\{h_0^{(1)}, \dots, h_0^{(\ell_0)}, h_1^{(\ell_0+1)}, \dots, h_1^{(\ell_1)}, \dots, h_k^{(\ell_{k-1}+1)}, \dots, h_k^{(\ell_k)}, \dots\}.$$

Agora, consideremos a seguinte filtração F para o complexo de Morse-Witten:

$$F_p \mathcal{C}_k(f) := \bigoplus_{h_k^{(\ell)} \in \text{Crit}_k(f), \ell \leq p+1} \mathbb{Z} \langle h_k^{(\ell)} \rangle.$$

Notemos que a numeração das colunas da matriz Δ está deslocada por 1 com relação ao índice p da filtração $F_p \mathcal{C}_k(f)$.

Para simplificar a notação neste trabalho o termo $h_k^{(\ell)}$ apresentará vários significados, os quais são: um ponto crítico de índice k ; a ℓ -ésima coluna da matriz Δ (também poderá representar a ℓ -ésima linha, porém faremos menção explícita nesse caso.); e a cadeia elementar associada a ℓ -ésima coluna.

Nesse capítulo, apresentaremos o algoritmo do Método da Varredura e para a matriz de conexão associada ao complexo de Morse-Witten. Esse método marca algumas entradas não nulas chamados de *pivôs primários* e *pivôs mudanças de base*, os quais tem um papel importante para provar que temos uma sequência espectral associada ao Método da Varredura.

O algoritmo do Método da Varredura será desenvolvido sobre uma matriz Δ com entradas em $\mathbb{Z}$, com uma pequena adaptação, mostrada a posteriori, podemos utilizar o mesmo método sobre um corpo qualquer $\mathbb{F}$.

Fixada uma diagonal auxiliar r , o método descrito abaixo deve ser aplicado para todo k simultaneamente.

Primeiro Passo

1. Considere todas as colunas h_k junto com todas as linhas h_{k-1} em Δ . Sejam $\Delta_{k_{i,j}}$ as entradas de Δ tais que a i -ésima linha é h_{k-1} e a j -ésima coluna é h_k .

Seja ξ_1 a primeira diagonal auxiliar de Δ que contém entradas não nulas $\Delta_{k_{i,j}}$. Tais entradas são chamadas ***pivôs primários de índice k*** . Assim, para cada $\Delta_{k_{i,j}}$ não nulo em ξ_1 as entradas $\Delta_{k_{s,j}}$ para $s > i$ são todas nulas, pois caso contrário, as mesmas teriam sido detectadas como pivôs primários em uma diagonal auxiliar ξ para $\xi < \xi_1$.

Encerramos este primeiro passo definindo Δ^{ξ_1} como sendo Δ com todos os k pivôs primários da ξ_1 -ésima diagonal auxiliar marcados.

2. Consideremos a matriz Δ^{ξ_1} e sejam $\Delta_{k_{i,j}}^{\xi_1}$ as entradas em Δ^{ξ_1} tais que a i -ésima linha é h_{k-1} e a j -ésima coluna é h_k . Seja ξ_2 a primeira diagonal auxiliar maior que ξ_1 que contém entradas não nulas $\Delta_{k_{i,j}}^{\xi_1}$. Construimos a matriz Δ^{ξ_2} seguindo o procedimento abaixo:

Dada uma entrada $\Delta_{k,i,j}^{\xi_1}$ não nula na ξ_2 -ésima diagonal auxiliar de Δ^{ξ_1}

- (a) se não existem pivôs primários na i -ésima linha e j -ésima coluna, marque $\Delta_{k,i,j}^{\xi_1}$ como um pivô primário de índice k e o valor numérico desta entrada permanece o mesmo, ou seja, $\Delta_{k,i,j}^{\xi_2} = \Delta_{k,i,j}^{\xi_1}$.
- (b) caso contrário, considere as entradas na j -ésima coluna e na s -ésima linha com $s > i$ em Δ^{ξ_1} .
 - i. Se existe um k pivô primário em uma entrada na j -ésima coluna e na s -ésima linha, com $s > i$, então o valor numérico de $\Delta_{k,i,j}^{\xi_1}$ permanece o mesmo e tal entrada não é marcada, ou seja, $\Delta_{k,i,j}^{\xi_2} = \Delta_{k,i,j}^{\xi_1}$.
 - ii. Se não existem pivôs primários na j -ésima coluna abaixo de $\Delta_{k,i,j}^{\xi_1}$, então existe um k pivô primário na i -ésima linha, digamos na t -ésima coluna de Δ^{ξ_1} , com $t < j$. Neste caso, o valor numérico da entrada $\Delta_{k,i,j}^{\xi_1}$ permanece o mesmo, mas no entanto este é marcado como pivô mudança de base, ou seja, $\Delta_{k,i,j}^{\xi_2} = \Delta_{k,i,j}^{\xi_1}$. Notemos que Δ^{ξ_2} é na verdade igual a Δ^{ξ_1} exceto pelas entradas da ξ_2 -ésima diagonal auxiliar marcadas com pivôs primários e mudanças de base. Veja Figura 3.1.

A Mudança de Base

Neste passo, consideramos a matriz Δ^r com os pivôs primários marcados na ξ -ésima diagonal auxiliar para todo $\xi \leq r$ e com os pivôs mudanças de base marcados na r -ésima diagonal auxiliar. Vamos descrever agora como a matriz Δ^{r+1} é definida. Sem perda de generalidade, podemos supor que existe pelo menos um pivô mudança de base na r -ésima diagonal auxiliar, pois caso contrário $\Delta^{r+1} = \Delta^r$ com a $(r+1)$ -ésima diagonal auxiliar marcada com pivôs primários e pivôs mudança de base.

Suponhamos que $\Delta_{k,i,j}^r$ é um pivô mudança de base. Então realizamos uma mudança de base em Δ^r adicionando uma combinação linear em $\mathbb{Q}$ de todas as ℓ -ésimas colunas de Δ^r , com $\kappa \leq \ell < j$, onde κ é a primeira coluna de Δ^r associada a uma k -cadeia, a um múltiplo inteiro positivo $u \neq 0$ da j -ésima coluna de Δ^r , com o objetivo de zerar a entrada $\Delta_{k,i,j}^r$ sem introduzir entradas não nulas da forma $\Delta_{k,s,j}^r$ para $s > i$. Além disso, a combinação linear resultante deve ser da forma $\beta^\kappa h_k^{(\kappa)} + \dots + \beta^{j-1} h_k^{(j-1)} + \beta^j h_k^{(j)}$ com β^ℓ inteiro para $\ell = \kappa, \dots, j$. A notação $h_k^{(\ell)}$ indica a k -cadeia elementar associada a ℓ -ésima coluna de Δ .

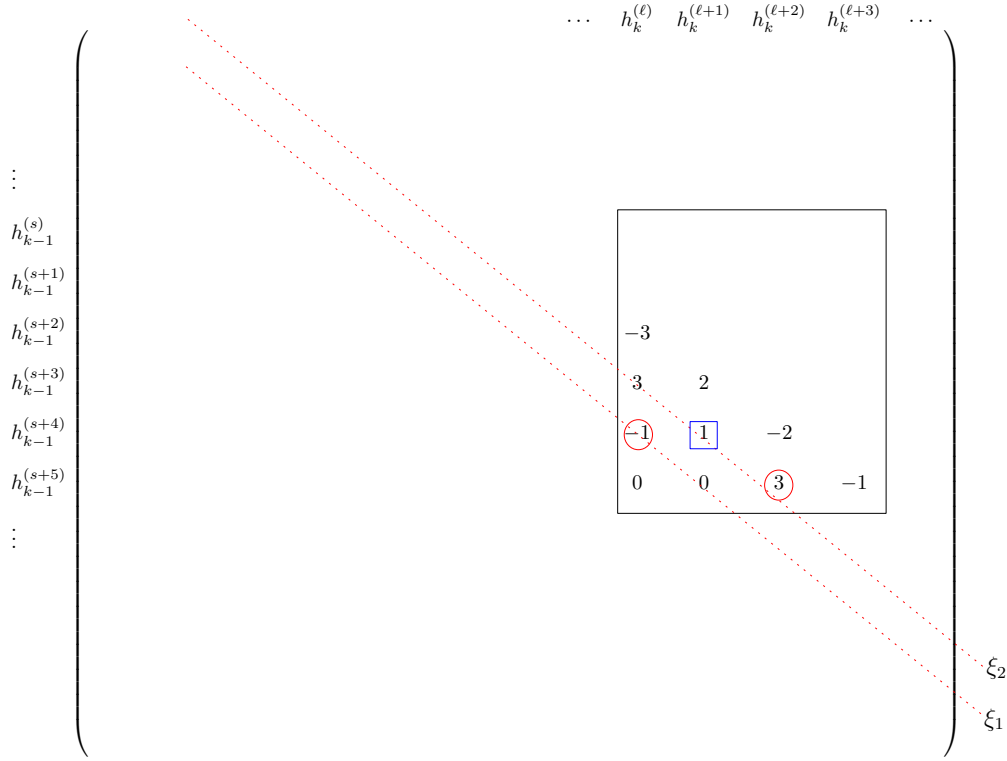


Figura 3.1: Diagonais auxiliares ξ_1 e ξ_2 .

O inteiro u é chamado **coeficiente líder** da mudança de base. Se mais que uma combinação linear for possível, escolhemos aquela que minimiza u . Seja u o coeficiente líder minimal de uma mudança de base. Uma vez que a mudança de base é feita, obtemos uma k -cadeia associada a j -ésima coluna de Δ^{r+1} que é uma combinação linear em $\mathbb{Q}$ das ℓ -ésimas h_k colunas $\kappa \leq \ell < j$ de Δ^r mais um múltiplo inteiro u da j -ésima coluna de Δ^r tal que $\Delta_{k_{i,j}}^{r+1} = 0$. Além disso, esta combinação linear é também uma combinação linear inteira de colunas h_k de Δ à esquerda da j -ésima coluna.

Observe que se a $\bar{\ell}$ -ésima coluna de Δ^r é uma h_k coluna, então corresponde a uma combinação linear inteira $\sigma_k^{(\bar{\ell}),r} = \sum_{\ell=\kappa}^{\bar{\ell}} c_{\ell}^{\bar{\ell},r} h_k^{(\ell)}$ de h_k colunas de Δ tal que a κ -ésima h_k coluna é a primeira coluna de Δ associada a uma k -cadeia. A notação de $\sigma_k^{(\bar{\ell}),r}$ indica índice de Morse k e a $\bar{\ell}$ -ésima coluna de Δ^r . Portanto, se a j -ésima coluna Δ^{r+1} é uma h_k coluna,

então será da forma

$$\sigma_k^{(j),r+1} = u \underbrace{\sum_{\ell=\kappa}^j c_\ell^{j,r} h_k^{(\ell)}}_{\sigma_k^{(j),r}} + q_{j-1} \underbrace{\sum_{\ell=\kappa}^{j-1} c_\ell^{j-1,r} h_k^{(\ell)}}_{\sigma_k^{(j-1),r}} + \cdots + q_{\kappa+1} \underbrace{(c_\kappa^{\kappa+1,r} h_k^{(\kappa)} + c_{\kappa+1}^{\kappa+1,r} h_k^{(\kappa+1)})}_{\sigma_k^{(\kappa+1),r}} + q_\kappa \underbrace{c_\kappa^{\kappa,r} h_k^{(\kappa)}}_{\sigma_k^{(\kappa),r}} \quad (3.1)$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} & (uc_\kappa^{j,r} + q_{j-1}c_\kappa^{j-1,r} + \cdots + q_\kappa c_\kappa^{\kappa,r})h_k^{(\kappa)} + (uc_{\kappa+1}^{j,r} + q_{j-1}c_{\kappa+1}^{j-1,r} + \cdots + q_{\kappa+1}c_{\kappa+1}^{\kappa+1,r})h_k^{(\kappa+1)} + \cdots \\ & \cdots + (uc_{j-1}^{j,r} + q_{j-1}c_{j-1}^{j-1,r})h_k^{(j-1)} + uc_j^{j,r}h_k^{(j)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

com $c_\kappa^{\kappa,r} = 1$ e

$$c_\kappa^{j,r+1} = uc_\kappa^{j,r} + q_{j-1}c_\kappa^{j-1,r} + \cdots + q_\kappa c_\kappa^{\kappa,r} \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

$$c_{\kappa+1}^{j,r+1} = uc_{\kappa+1}^{j,r} + q_{j-1}c_{\kappa+1}^{j-1,r} + \cdots + q_{\kappa+1}c_{\kappa+1}^{\kappa+1,r} \in \mathbb{Z} \quad (3.4)$$

$\vdots$

$$c_{j-1}^{j,r+1} = uc_{j-1}^{j,r} + q_{j-1}c_{j-1}^{j-1,r} \in \mathbb{Z} \quad (3.5)$$

$$c_j^{j,r+1} = uc_j^{j,r} \in \mathbb{Z}. \quad (3.6)$$

A primeira coluna de qualquer Δ_k não pode sofrer nenhuma mudança de base, já que não existem h_k colunas a sua esquerda, o que explica o porque $c_\kappa^{\kappa,r} = 1$.

Notemos que $q_{\bar{\ell}} = 0$ em $q_{\bar{\ell}} \sum_{\ell=1}^{\bar{\ell}} \bar{c}_\ell^{j,r} h_k^{(\ell)}$ quando a $\bar{\ell}$ -ésima coluna tem um pivô primário em uma linha s para $s > i$.

Se o pivô primário da i -ésima linha está na t -ésima coluna então o número racional q_t é não nulo em $q_t \sum_{\ell=1}^t c_\ell^{t,r} h_k^{(\ell)}$ e é tal que

$$\Delta_{k_{i,j}}^{r+1} = u\Delta_{k_{i,j}}^r + q_t\Delta_{k_{i,t}}^r = 0.$$

Como $u \geq 1$ é único, então q_t é unicamente definido.

Uma vez que o processo acima é feito para todos os pivôs mudança de base da r -ésima diagonal auxiliar de Δ^r , podemos então definir uma matriz mudança de base.

Portanto a matriz Δ^{r+1} tem valores numéricos determinados por uma mudança de base em $\mathbb{Q}$ de Δ^r . Em particular, todos os pivôs mudança de base na r -ésima diagonal auxiliar de Δ^r são iguais a zero em Δ^{r+1} . Veja as Figuras 3.2 e 3.3.

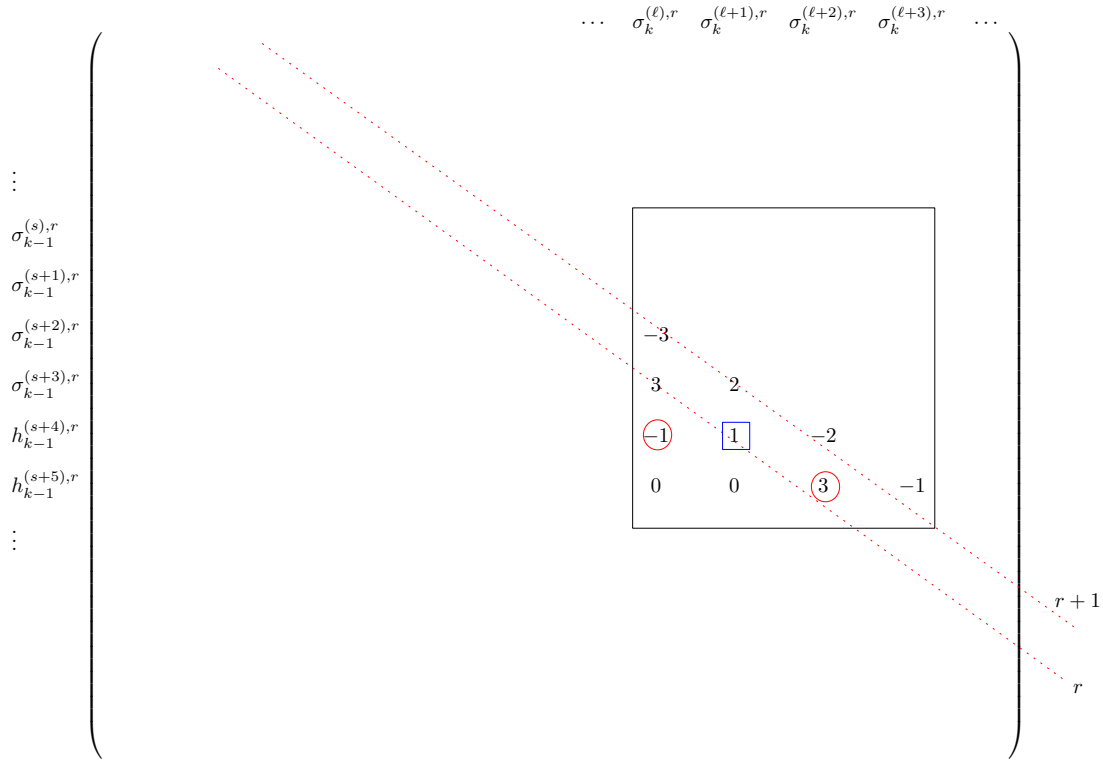


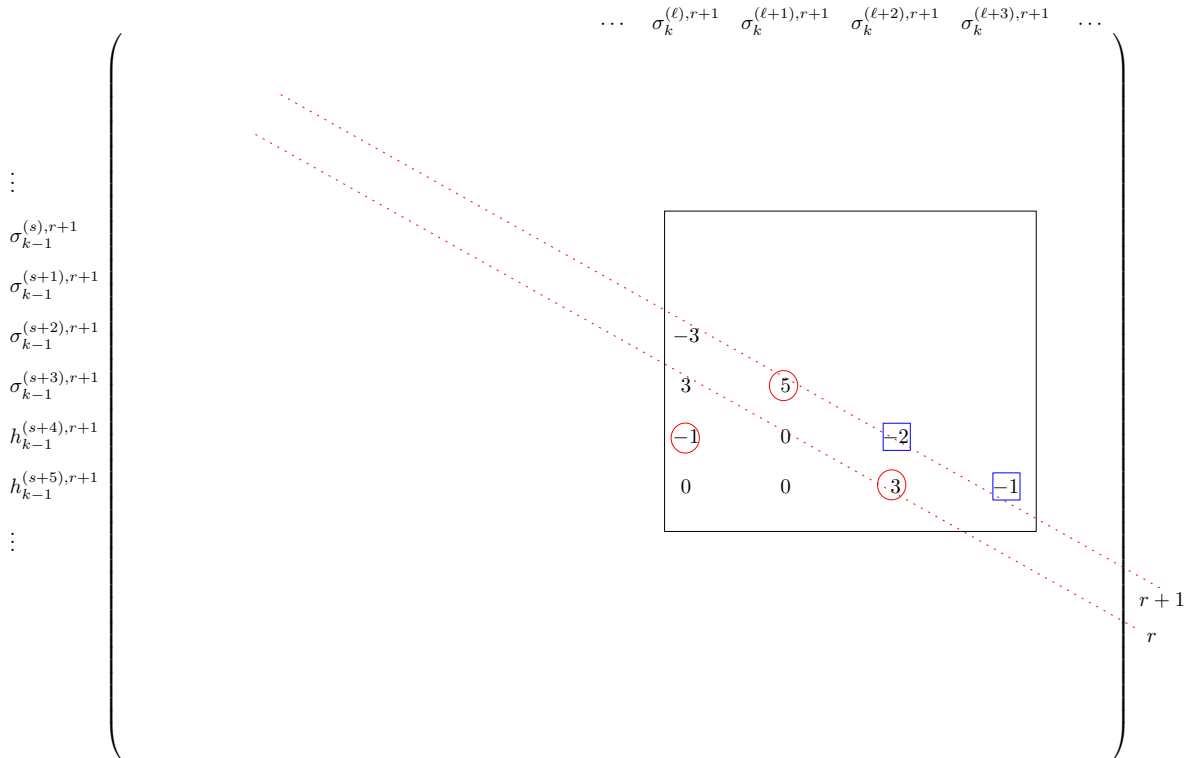
Figura 3.2: Método da Varredura: Δ^r .

Marcando a $(r+1)$ -ésima diagonal auxiliar de Δ^{r+1}

Consideremos a matriz Δ^{r+1} definida no passo anterior. Marcamos a $(r+1)$ -ésima diagonal auxiliar com pivôs primários e mudança de base como segue: dada uma entrada não nula $\Delta_{k_{i,j}}^{r+1}$

1. Se não existem pivôs primários na i -ésima linha e nem na j -ésima coluna, marcamos $\Delta_{k_{i,j}}^{r+1}$ como um pivô primário de índice k .

2. Se este não é o caso, consideremos as entradas na j -ésima coluna e na s -ésima linha com $s > i$ em Δ^{r+1} .
 - (a) Se existe um k pivô primário na j -ésima coluna abaixo de $\Delta_{k,i,j}^{r+1}$ então este não é marcado.
 - (b) Se não existem pivôs primários de índice k na j -ésima coluna abaixo de $\Delta_{k,i,j}^{r+1}$ então existe um pivô primário de índice k na i -ésima linha e em uma coluna t de Δ^{r+1} , com $t < j$. Neste caso, marque $\Delta_{k,i,j}^{r+1}$ como um pivô mudança de base. Veja a Figura 3.3.


 Figura 3.3: Método da Varredura: Δ^{r+1} .

Último Passo

Repetimos o procedimento acima até que todas as diagonais auxiliares tenham sido consideradas.

Observação 3.1. Para usar o Método da Varredura sobre um corpo $\mathbb{F}$ basta alterar a etapa “A Mudança de Base” da seguinte forma: multiplique a p -ésima coluna por $\Delta_{k,i,j}^r (\Delta_{k,i,p}^r)^{-1}$,

subtraia esta coluna com a j -ésima coluna e em seguida substitua na j -ésima coluna, onde $\Delta_{k_i,j}^r$ é um pivô mudança de base e $\Delta_{k_i,p}^r$ é um pivô primário. Tal pivô primário existe, pois caso contrário $\Delta_{k_i,j}^r$ não seria um pivô mudança de base.

Os exemplos se encontram na próxima seção.

3.1 Calculando Exemplos Utilizando Recursos Computacionais

Utilizaremos o programa *Computer implementation of the sweeping algorithm and the random matrix generator*, que se encontra na referência [Me], para fazer os cálculos de todos os exemplos apresentados nessa dissertação. No Apêndice A, temos um tutorial de como usar esse programa.

Ao todo serão 3 exemplos de aplicações do Método da Varredura em diferentes matrizes.

- O primeiro exemplo, que se encontra nessa seção, serve para nos dar uma ideia de como usar o Método da Varredura sem auxílio do programa.
- O segundo exemplo, apresentado no Apêndice B, serve de motivação para o fato que mesmo que encontremos entradas não inteiras nas matrizes intermediárias a última matriz apresenta entradas inteiras. Tal fato (a última matriz gerada pelo Método da Varredura sempre apresentará entradas inteiras) foi provado em [dRmS]. Esse exemplo também apresenta os cálculos dos $\mathbb{Z}$ -módulos E_p^r da sequência espectral associada ao Método da Varredura.
- O último exemplo é a aplicação do Método da Varredura em um matriz sobre o corpo $\mathbb{Z}_2$.

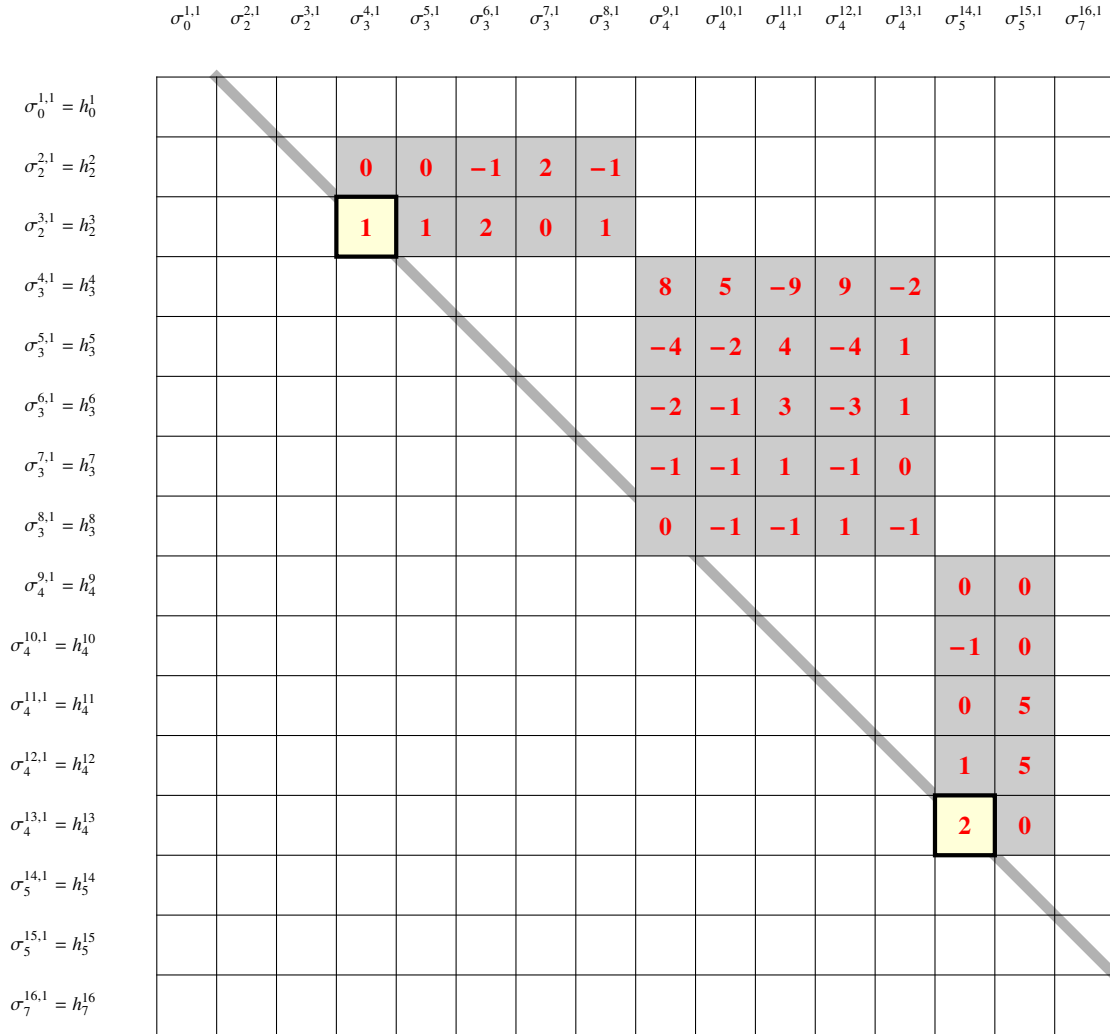
No seguinte exemplo explicitaremos a forma manual de encontrar as matrizes Δ^1 , Δ^2 , Δ^3 e Δ^4 quando aplicamos o Método da Varredura na matriz Δ . Como dispomos de um programa que faz todo o cálculo, não há necessidade de fazer os cálculos para as demais matrizes.

Exemplo 3.1.

Seja Δ como na Figura 3.4. Aplicando o Método da Varredura a Δ obtemos as matrizes Δ^1 , Δ^2 , Δ^3 , Δ^4 , Δ^5 , Δ^6 , Δ^7 , Δ^8 e Δ^9 dadas pelas Figuras 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12 e 3.13 respectivamente.

	h_0^1	h_2^2	h_2^3	h_3^4	h_3^5	h_3^6	h_3^7	h_3^8	h_4^9	h_4^{10}	h_4^{11}	h_4^{12}	h_4^{13}	h_5^{14}	h_5^{15}	h_7^{16}
h_0^1																
h_2^2				0	0	-1	2	-1								
h_2^3				1	1	2	0	1								
h_3^4									8	5	-9	9	-2			
h_3^5									-4	-2	4	-4	1			
h_3^6									-2	-1	3	-3	1			
h_3^7									-1	-1	1	-1	0			
h_3^8									0	-1	-1	1	-1			
h_4^9														0	0	
h_4^{10}														-1	0	
h_4^{11}														0	5	
h_4^{12}														1	5	
h_4^{13}														2	0	
h_5^{14}																
h_5^{15}																
h_7^{16}																

Figura 3.4: Δ .

Figura 3.5: Δ^1 : Marcando os pivôs primários.

Para a construção de Δ^1 , marcamos a primeira diagonal auxiliar e as entradas não nulas nesta diagonal. $\Delta_{3,4}^1$ e $\Delta_{13,14}^1$ serão pivôs primários. Veja Figura 3.5

Para construir a próxima matriz Δ^2 , marcamos a segunda diagonal auxiliar e analisamos todas as entradas não nulas nesta diagonal. Observe que a entrada $\Delta_{12,14}^2$ está acima de um pivô primário, logo não é marcada. Já a entrada $\Delta_{3,5}^2$ não está acima de pivô primário mas existe um pivô primário à esquerda, ou seja, tal entrada é marcada como pivô mudança de base. Por fim as entradas $\Delta_{7,9}^2$ e $\Delta_{8,10}^2$ não estão acima de pivô primário e nem existem pivôs primários à esquerda, logo são marcados como pivôs primários. Observe a Figura 3.6.

Como a matriz Δ^2 tem um pivô mudança de base então no próximo passo haverá uma

	$\sigma_0^{1,2}$	$\sigma_2^{2,2}$	$\sigma_2^{3,2}$	$\sigma_3^{4,2}$	$\sigma_3^{5,2}$	$\sigma_3^{6,2}$	$\sigma_3^{7,2}$	$\sigma_3^{8,2}$	$\sigma_4^{9,2}$	$\sigma_4^{10,2}$	$\sigma_4^{11,2}$	$\sigma_4^{12,2}$	$\sigma_4^{13,2}$	$\sigma_5^{14,2}$	$\sigma_5^{15,2}$	$\sigma_7^{16,2}$
$\sigma_0^{1,2} = h_0^1$																
$\sigma_2^{2,2} = h_2^2$				0	0	-1	2	-1								
$\sigma_2^{3,2} = h_2^3$				1	1	2	0	1								
$\sigma_3^{4,2} = h_3^4$									8	5	-9	9	-2			
$\sigma_3^{5,2} = h_3^5$									-4	-2	4	-4	1			
$\sigma_3^{6,2} = h_3^6$									-2	-1	3	-3	1			
$\sigma_3^{7,2} = h_3^7$									-1	-1	1	-1	0			
$\sigma_3^{8,2} = h_3^8$									0	-1	-1	1	-1			
$\sigma_4^{9,2} = h_4^9$														0	0	
$\sigma_4^{10,2} = h_4^{10}$														-1	0	
$\sigma_4^{11,2} = h_4^{11}$														0	5	
$\sigma_4^{12,2} = h_4^{12}$														1	5	
$\sigma_4^{13,2} = h_4^{13}$														2	0	
$\sigma_5^{14,2} = h_5^{14}$																
$\sigma_5^{15,2} = h_5^{15}$																
$\sigma_7^{16,2} = h_7^{16}$																

Figura 3.6: Δ^2 . Marcando os pivôs primários e os pivôs mudança de base.

mudança de base, a qual deve satisfazer as seguintes propriedades:

- i Cada coluna mudada é uma combinação linear sobre $\mathbb{Z}$ das colunas de Δ , ou seja, as colunas representadas pelos h_k 's;
- ii A mudança de base zera a entrada do pivô mudança de base sem acrescentar entradas não nulas abaixo;
- iii A mudança deve respeitar a filtração, ou seja, só podemos fazer operações com colunas à esquerda.

Daí

$$\sigma_3^{5,3} = \sigma_3^{5,2} - \sigma_3^{4,2} = h_3^5 - h_3^4$$

Observe que na Figura 3.7 a entrada $\Delta_{3,5}^3$ foi anulada e a linha que corresponde a $\sigma_3^{4,2}$ foi alterada. Isso aconteceu pois ao fazer uma mudança de base o que alteramos na coluna também é alterado na linha. Os seguintes cálculos esclarecem o que aconteceu com a linha $\sigma_3^{4,2}$.

Ao aplicar a transformação linear Δ^2 no elemento da base $\sigma_4^{9,2}$ obtemos

$$\Delta^2(\sigma_4^{9,2}) = 0\sigma_0^{1,2} + \dots + a\sigma_3^{4,2} + b\sigma_3^{5,2} + \dots$$

Ao fazer a mudança de base temos

$$\Delta^3(\sigma_4^{9,3}) = 0\sigma_0^{1,3} + \dots + a'\sigma_3^{4,3} + b'\sigma_3^{5,3} + \dots$$

Ora $\sigma_3^{4,3} = \sigma_3^{4,2}$ e $\sigma_3^{5,3} = \sigma_3^{5,2} - \sigma_3^{4,2} = h_3^5 - h_3^4$ então da igualdade $\Delta^2(\sigma_4^{9,2}) = \Delta^3(\sigma_4^{9,3})$ obtemos que $b' = b$ e $a' = a + b$, ou seja, na nova matriz Δ^3 a linha $\sigma_3^{4,3}$ é a soma das linhas $\sigma_3^{4,2}$ e $\sigma_3^{5,2}$.

Agora marcamos a terceira diagonal auxiliar e analisamos todas as entradas não nulas nesta diagonal, como fizemos antes. Assim encontraremos os pivôs primários e os pivôs mudança de base conforme a Figura 3.7.

Como as entradas $\Delta_{3,6}^3$ e $\Delta_{8,11}^3$ são pivôs mudança de base, novamente temos uma mudança de base:

$$\sigma_3^{6,4} = \sigma_3^{6,3} - 2\sigma_3^{4,3} - \sigma_3^{5,3} = h_3^6 - 2h_3^4 - h_3^5 + h_3^4 = h_3^6 - h_3^4 - h_3^5$$

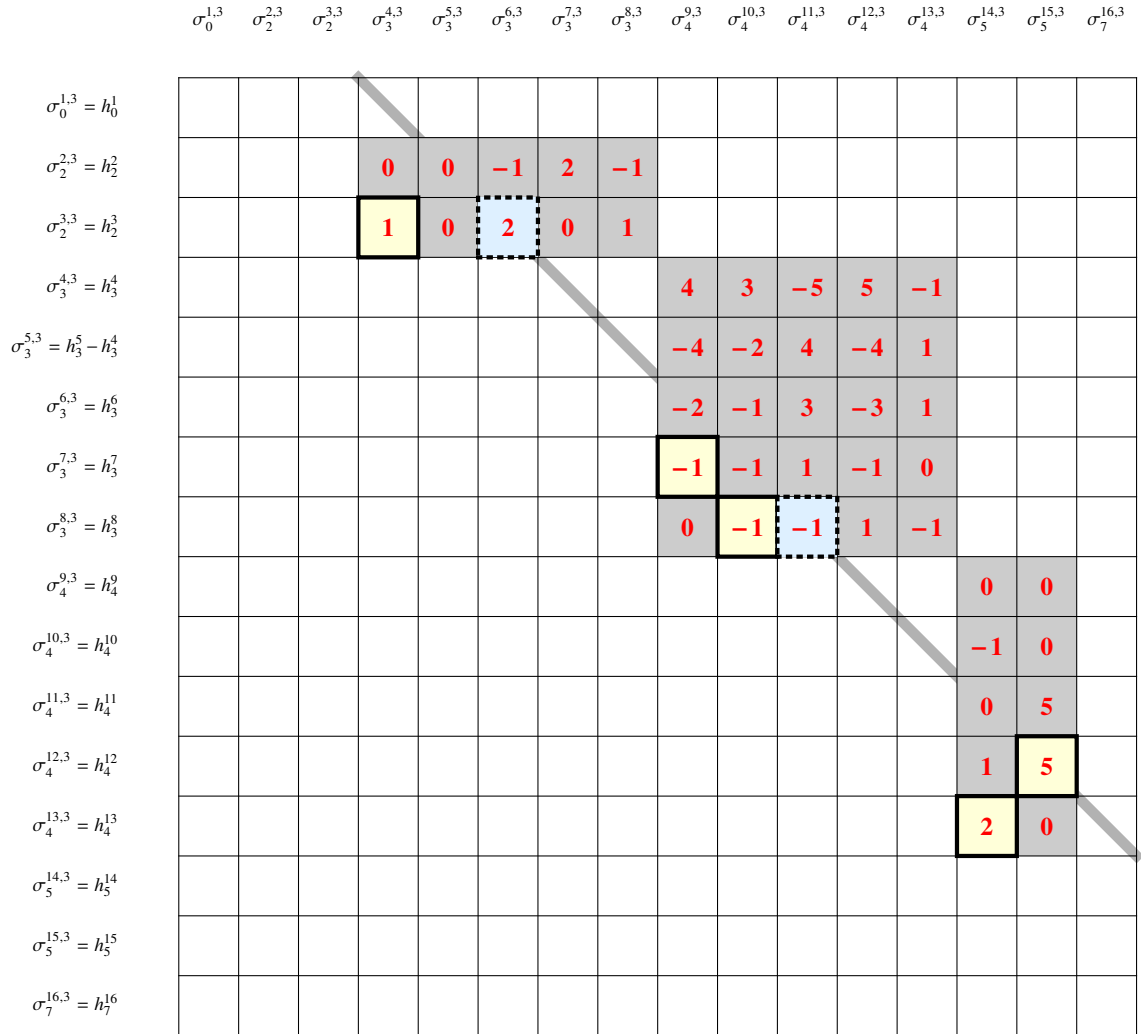
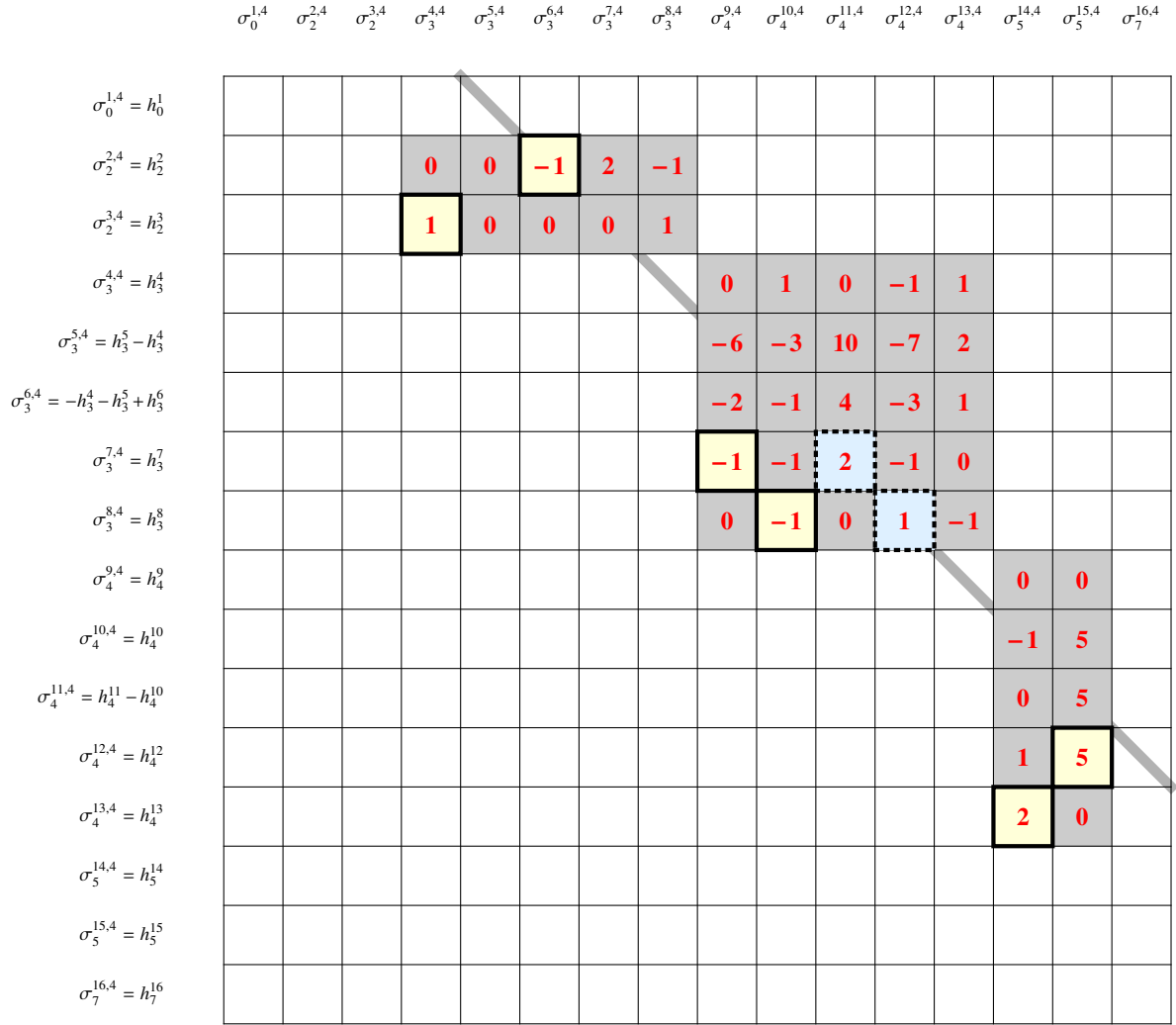


Figura 3.7: Δ^3 .

Figura 3.8: Δ^4 .

$$\sigma_4^{11,4} = \sigma_4^{11,3} - \sigma_4^{10,3} = h_4^{11} - h_4^{10}$$

Atente-se para as mudanças que ocorreram nas linhas $\sigma_3^{4,3}$, $\sigma_3^{5,3}$ e $\sigma_4^{10,4}$ na Figura 3.8. Seguindo com o algoritmo temos as demais matrizes.

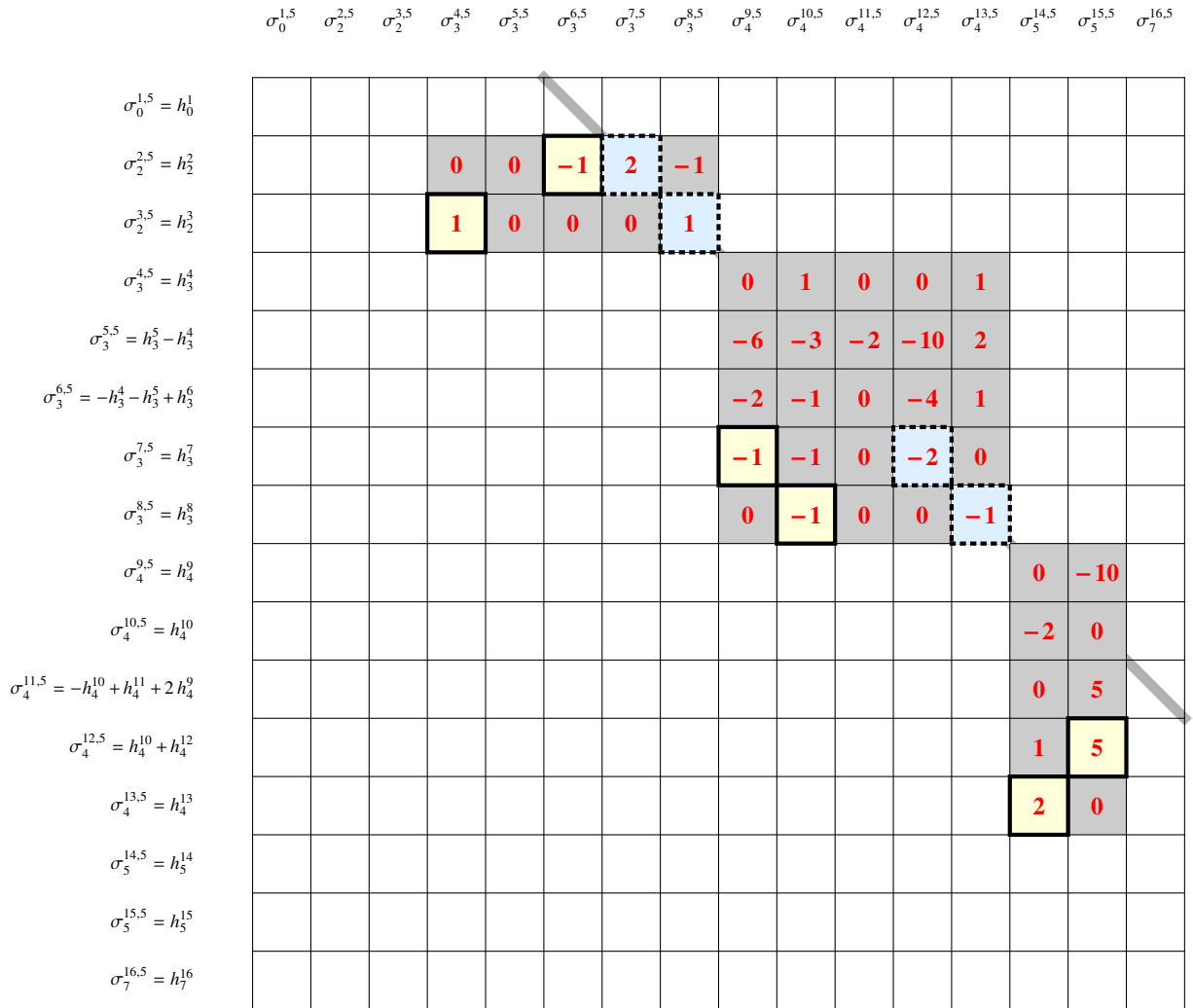
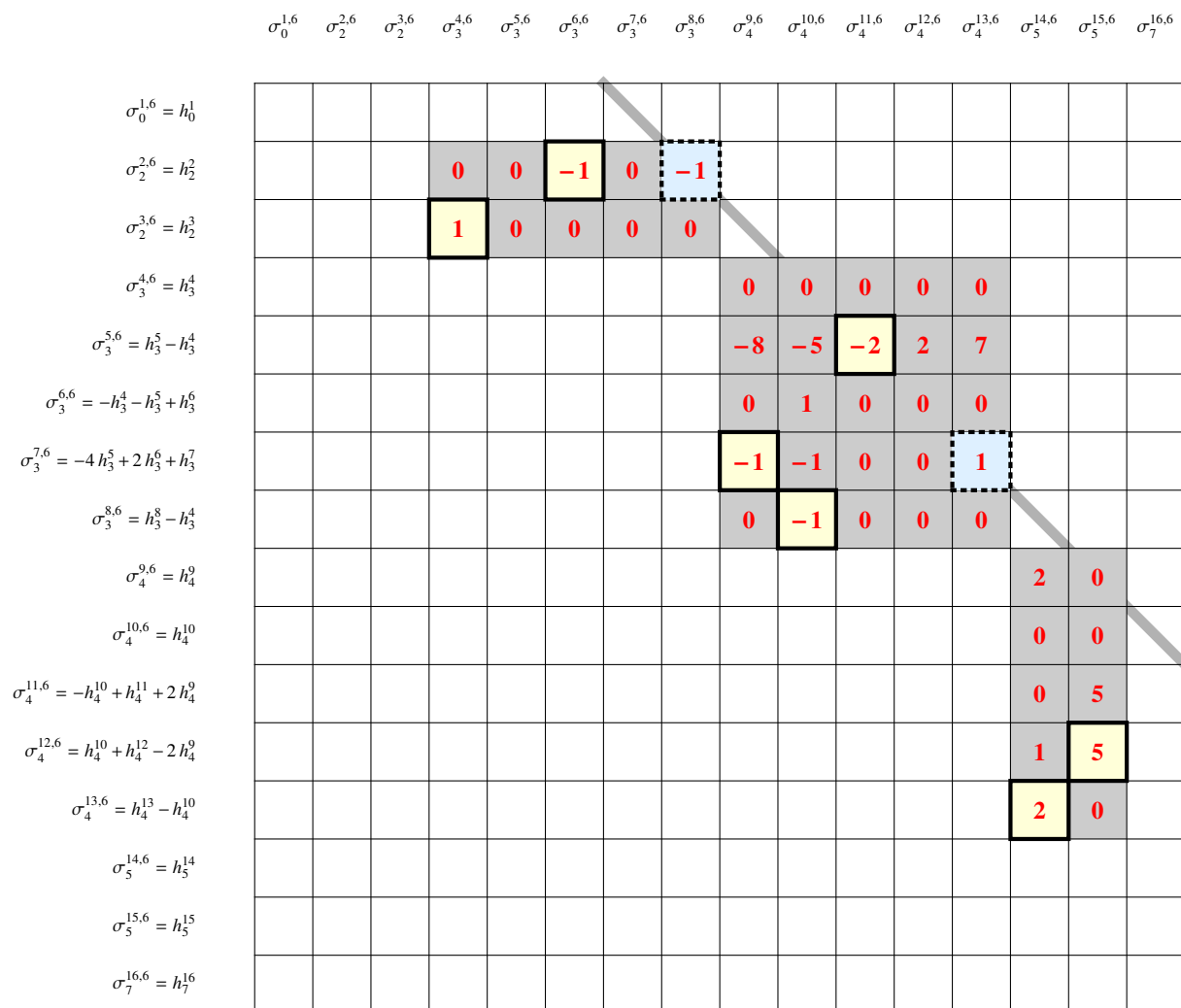
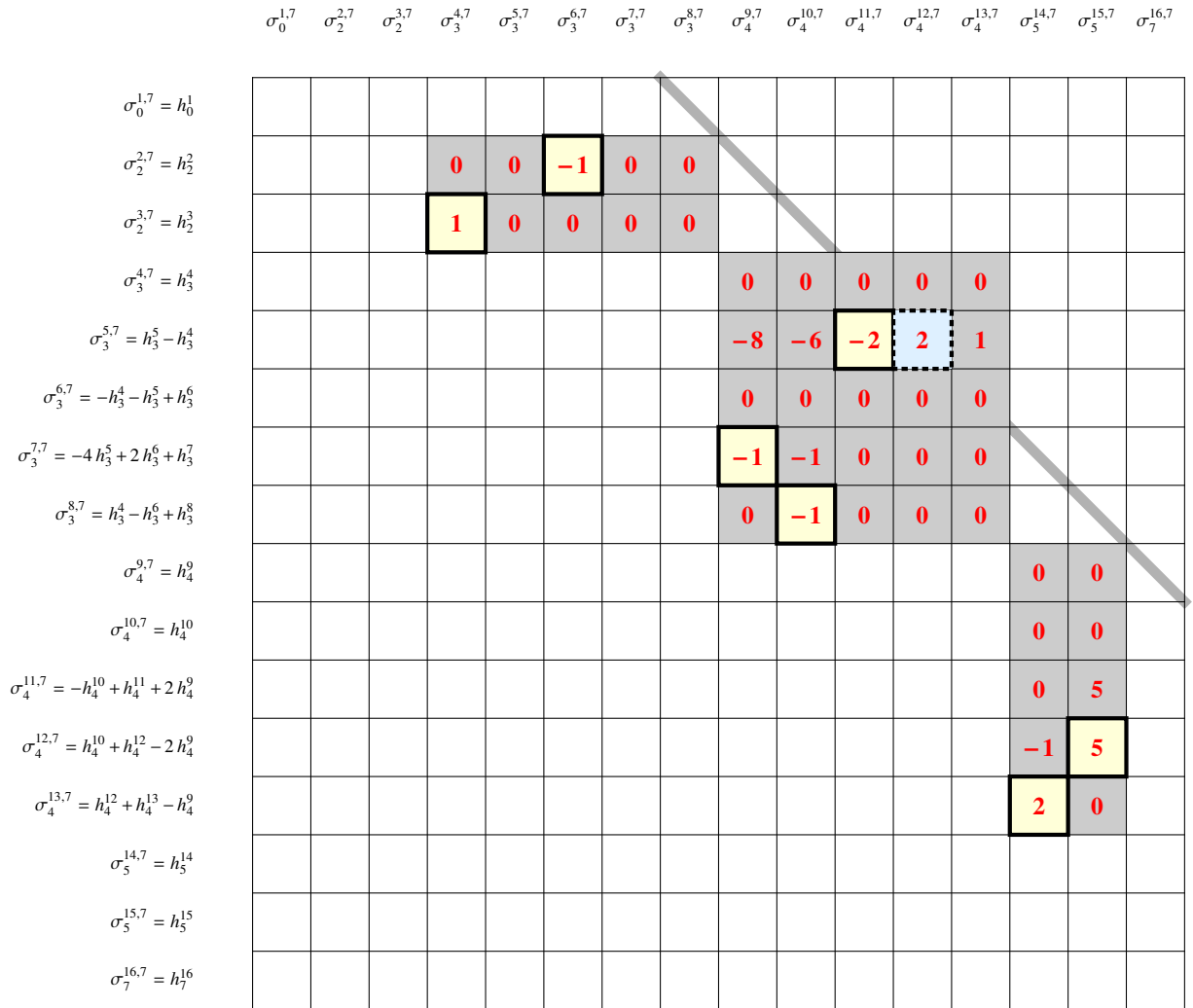
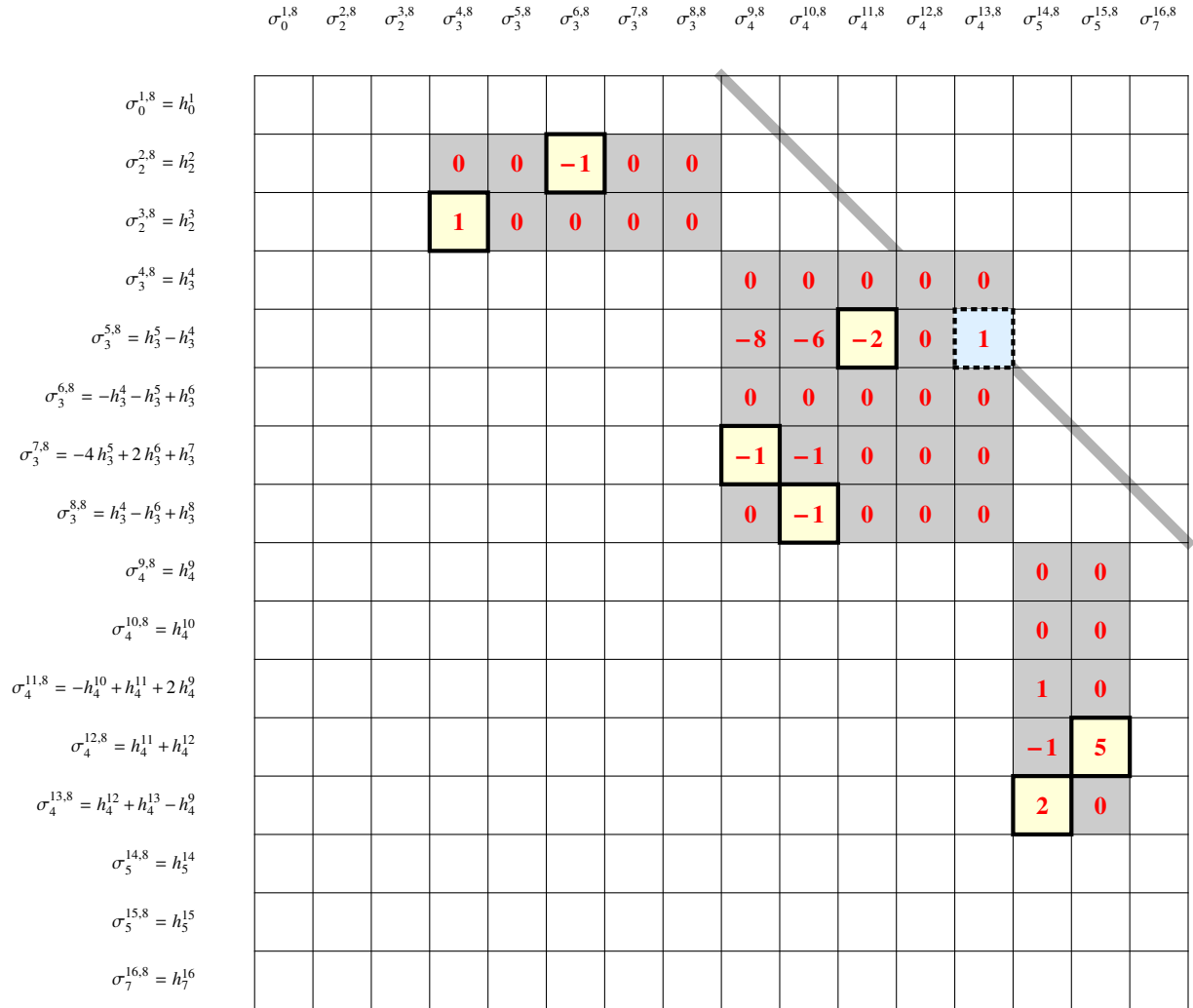


Figura 3.9: Δ^5 .

Figura 3.10: Δ^6 .

Figura 3.11: Δ^7 .

Figura 3.12: Δ^8 .

	$\sigma_0^{1,10}$	$\sigma_2^{2,10}$	$\sigma_2^{3,10}$	$\sigma_3^{4,10}$	$\sigma_3^{5,10}$	$\sigma_3^{6,10}$	$\sigma_3^{7,10}$	$\sigma_3^{8,10}$	$\sigma_4^{9,10}$	$\sigma_4^{10,10}$	$\sigma_4^{11,10}$	$\sigma_4^{12,10}$	$\sigma_4^{13,10}$	$\sigma_5^{14,10}$	$\sigma_5^{15,10}$	$\sigma_7^{16,10}$
$\sigma_0^{1,10} = h_0^1$																
$\sigma_2^{2,10} = h_2^2$				0	0	-1	0	0								
$\sigma_2^{3,10} = h_2^3$				1	0	0	0	0								
$\sigma_3^{4,10} = h_3^4$									0	0	0	0	0			
$\sigma_3^{5,10} = h_3^5 - h_3^4$									-8	-6	-2	0	0			
$\sigma_3^{6,10} = -h_3^4 - h_3^5 + h_3^6$									0	0	0	0	0			
$\sigma_3^{7,10} = -4h_3^5 + 2h_3^6 + h_3^7$									-1	-1	0	0	0			
$\sigma_3^{8,10} = h_3^4 - h_3^6 + h_3^8$									0	-1	0	0	0			
$\sigma_4^{9,10} = h_4^9$														0	0	
$\sigma_4^{10,10} = h_4^{10}$														0	0	
$\sigma_4^{11,10} = -h_4^{10} + h_4^{11} + 2h_4^9$														0	0	
$\sigma_4^{12,10} = h_4^{11} + h_4^{12}$														0	5	
$\sigma_4^{13,10} = -h_4^{10} + h_4^{12} + 2h_4^{13}$														1	0	
$\sigma_5^{14,10} = h_5^{14}$																
$\sigma_5^{15,10} = h_5^{15}$																
$\sigma_7^{16,10} = h_7^{16}$																

Figura 3.13: Δ^9 .

3.2 Propriedades básicas provenientes do Método da Varredura

Nesta seção, provaremos propriedades básicas das matrizes Δ^r provenientes do Método da Varredura aplicado à matriz Δ . Tais propriedades estão relacionadas aos pivôs primários e pivôs mudança de base, que por sua vez são essenciais na construção da sequência espectral.

Observe que cada matriz Δ^r é triangular superior e $\Delta^r \circ \Delta^r = 0$, já que elas são recursivamente obtidas de uma matriz de conexão inicial Δ por mudanças de base sobre $\mathbb{Q}$, ou seja, $[\Delta^r]^2 = [P^r \dots P \Delta (P)^{-1} (P^r)^{-1}]^2 = P^r \dots P \Delta^2 (P)^{-1} (P^r)^{-1} = 0$, onde as matrizes P^s são matrizes mudança de base.

Para simplificar a notação, a referência ao índice k na matriz Δ_k^r será omitida, quando não for necessária.

Proposição 3.1. *Se a entrada $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é identificada pelo método da varredura como um pivô primário ou um pivô mudança de base então $\Delta_{s,p+1}^r = 0$ para todo $s > p - r + 1$.*

Demonstração: Pelo método da varredura $\Delta_{s,p+1}^r$ não pode ser um pivô primário para todo $s > p - r + 1$. Como entradas não nulas abaixo da r -ésima diagonal de Δ^r , as quais não são pivô primário somente ocorrem em colunas acima de um pivô primário então $\Delta_{s,p+1}^r = 0$, para todo $s > p - r + 1$. $\square$

Um resultado importante, que segue dessa proposição, é quando $\Delta_{k_i,j}^r$ é um pivô primário. Neste caso não existe combinação linear das colunas à esquerda da j -ésima coluna (incluindo também a j -ésima coluna) que zeraria o pivô e deixaria as entradas $\Delta_{k_s,j}^r = 0$ para $s > i$. De fato, suponha que exista essa combinação linear, temos que existem três tipos de colunas à esquerda da j -ésima coluna:

O pivô primário está acima da i -ésima linha, logo as entradas abaixo da i -ésima linha são nulas;

A coluna não tem pivô primário, logo as entradas abaixo da r -ésima diagonal auxiliar são nulas;

O pivô primário $\Delta_{s,t}^r$ está abaixo da i -ésima linha, logo se houver outra entrada $\Delta_{s,l}^r$ na mesma linha desse pivô e $t < l < j$ então existe um pivô primário na l -ésima coluna

abaixo da i -ésima linha. Repita este processo até chegar na j -ésima coluna. Encontramos um pivô primário na n -ésima coluna em uma linha que só o contém como elemento diferente de zero à esquerda da j -ésima coluna. Assim, a n -ésima coluna não pode fazer parte da combinação linear. Mais ainda todas as colunas que foram encontradas nesse processo indutivo não fazem parte da combinação linear.

Como em todos os casos as colunas não fazem parte da combinação linear, segue que não existe tal combinação.

A próxima proposição não só garante que não podemos ter mais do que um pivô primário em uma linha ou coluna fixada, como também se existir um pivô primário numa linha i então não existe pivô primário na coluna i e vice versa.

Proposição 3.2. *Seja $\{\Delta^r\}$ a família de matrizes produzidas pelo método da varredura aplicado a uma matriz de conexão Δ . Dados quaisquer dois pivôs primários distintos $\Delta_{k_i,j}^r$ e $\Delta_{k_m,\ell}^r$ temos que $\{i, j\} \cap \{m, \ell\} = \emptyset$.*

Demonstração: Sejam $\Delta_{k_i,j}^r$ e $\Delta_{k_m,\ell}^r$ dois pivôs primários distintos, pelo Método da Varredura temos que não existem dois pivôs primários distintos na mesma linha ou coluna. Logo $i \neq m$ e $j \neq \ell$. O que nos resta provar é $i \neq \ell$ e $j \neq m$. Ora, basta provar que $j \neq m$, pois o argumento será análogo para $i \neq \ell$.

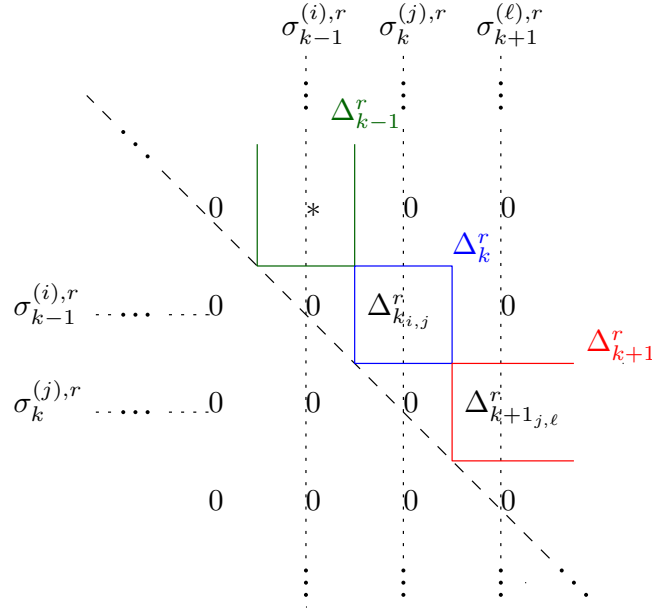
Se $\bar{k} \neq k-1$ e $\bar{k} \neq k+1$ então $j \neq m$, pois as colunas h_k de Δ_k^r são as linhas h_k de Δ_{k+1}^r e as linhas h_{k-1} de Δ_k^r são as colunas de Δ_{k-1}^r .

Vamos supor agora que $\bar{k} = k+1$, o outro caso $\bar{k} = k-1$ é inteiramente análogo. Suponha por absurdo que $j = m$, ou seja, suponha que existe um pivô primário na j -ésima coluna e outro na j -ésima linha de Δ^r , isto é, $\Delta_{k_i,j}^r$ e $\Delta_{k+1,j,\ell}^r$ são pivôs primários. Então $\Delta_{k_s,j}^r = 0$ para todo $s > i$ e $\Delta_{k+1,s,\ell}^r = 0$ para todo $s > j$.

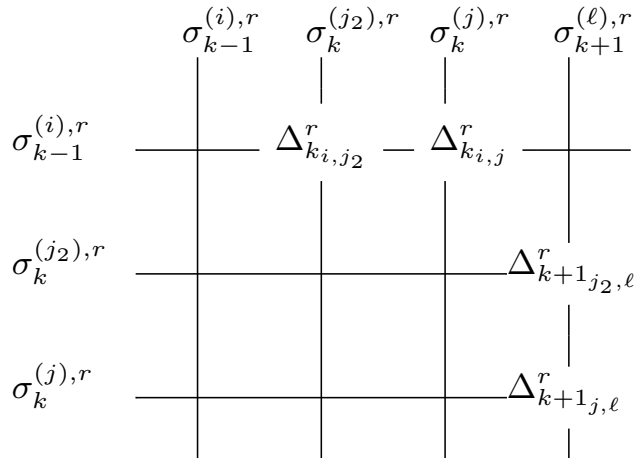
Sejam $\sigma_k^{(j),r}$, $\sigma_{k-1}^{(i),r}$ e $\sigma_{k+1}^{(\ell),r}$ cadeias associadas à j -ésima, à i -ésima e à ℓ -ésima colunas de Δ^r respectivamente.

* Afirmamos que $V_1 = \{\sigma_{k-1}^{(i),r}, \sigma_k^{(j),r}, \sigma_{k+1}^{(\ell),r}\}$ não pode ser um intervalo.

De fato suponha que $V_1 = \{\sigma_{k-1}^{(i),r}, \sigma_k^{(j),r}, \sigma_{k+1}^{(\ell),r}\}$ seja um intervalo então segue que a submatriz Δ_k^r da matriz Δ^r só contém a entrada $\Delta_{k_i,j}^r$. Observe a Figura 3.14. Daí a entrada $(\Delta^r \circ \Delta^r)_{j,\ell} = \Delta_{k_i,j}^r \Delta_{k+1,j,\ell}^r \neq 0$, já que é uma multiplicação de pivôs primários. Como $\Delta^r \circ \Delta^r = 0$ segue que V_1 não pode ser um intervalo.

Figura 3.14: Supondo por absurdo que $V1$ é intervalo.

Pela afirmação anterior (*) deve existir um $\sigma_k^{(j_2),r}$ associado a j_2 -ésima coluna de Δ^r , tal que $j_2 \neq j$, $\Delta_{k,i,j_2}^r \neq 0$ e $\Delta_{k+1,j_2,\ell}^r \neq 0$. As duas desigualdades anteriores seguem do fato que $0 = (\Delta^r \circ \Delta^r)_{j,\ell} = \Delta_{k,i,j}^r \Delta_{k+1,j,\ell}^r + \dots + \Delta_{k,i,j_2}^r \Delta_{k+1,j_2,\ell}^r + \dots$ e como $\Delta_{k,i,j}^r \Delta_{k+1,j,\ell}^r \neq 0$ então temos que ter o tal j_2 com $\Delta_{k,i,j_2}^r \neq 0$ e $\Delta_{k+1,j_2,\ell}^r \neq 0$ para anular $\Delta_{k,i,j}^r \Delta_{k+1,j,\ell}^r + \dots$. A Figura 3.15 nos dá uma idéia desse fato. Observe que também podemos concluir que $j_2 < j$, pois abaixo do pivô primário $\Delta_{k+1,j,\ell}^r$ só têm entradas nulas.

Figura 3.15: A existência de $\sigma_k^{(j_2),r}$.

★ A entrada Δ_{k,i,j_2}^r não pode ser um pivô primário.

Com efeito, a i -ésima linha já tem um pivô primário. Logo o pivô primário da j_2 -ésima coluna deve estar abaixo da entrada Δ_{k_i, j_2}^r , ou seja, existe um $\sigma_{k-1}^{(i_2), r}$ associado à i_2 -ésima linha de Δ^r , $i_2 > i$, tal que Δ_{k_i, j_2}^r é um pivô primário. Assim $\Delta_{k_s, j_2}^r = 0$ para todo $s > i_2$.

Usando um raciocínio análogo à afirmação (*) temos que $V_2 = \{\sigma_{k-1}^{(i_2), r}, \sigma_k^{(j_2), r}, \sigma_{k+1}^{(\ell), r}\}$ não pode ser um intervalo, logo existe $\sigma_k^{(j_3), r}$ na j_3 -ésima coluna de Δ^r tal que $\sigma_k^{(j_3), r} \neq \sigma_k^{(j_2), r}$, $j_3 \leq j$, $\Delta_{k_{i_2}, j_3}^r \neq 0$ e $\Delta_{k+1, j_3, \ell}^r \neq 0$.

Mostraremos que $\sigma_k^{(j_3), r} \neq \sigma_k^{(j), r}$. Pela construção de $\sigma_k^{(j_3), r}$ temos que $\Delta_{k_{i_2}, j_3}^r \neq 0$ com $i_2 > i$. Logo se j_3 fosse igual a j então teríamos uma entrada $\Delta_{k_{i_2}, j}^r \neq 0$ abaixo do pivô primário $\Delta_{k_i, j}^r$. Isso contradiz o fato de que $\Delta_{k_s, j}^r = 0$ para todo $s > i$.

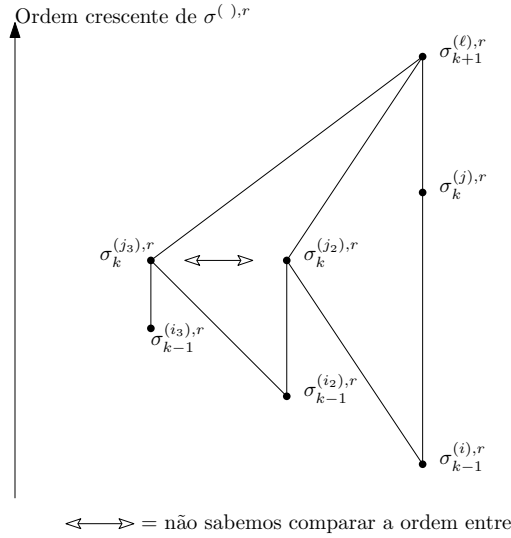


Figura 3.16: Construção de uma sequência finita de singularidades.

Repetindo os passos acima e sempre usando o fato de que $\Delta^r \circ \Delta^r = 0$, eventualmente se esgotarão as linhas ou as colunas para continuar os argumentos acima. Veja Figura 3.16.

- Se as h'_k s colunas se esgotarem, então teremos um intervalo $V = \{\sigma_{k-1}^{(\alpha), r}, \sigma_k^{(\beta), r}, \sigma_k^{(\gamma), r}\}$ o que contradiz a afirmação (*).
- Se não existem mais h'_{k-1} s linhas então teremos uma entrada não nula em Δ^r abaixo da r -ésima diagonal auxiliar que não é um pivô primário e nem uma entrada acima de um pivô primário. Com efeito, se o processo recursivo está na s -ésima interação e não existe mais h_{k-1} linhas durante a argumentação (*) então a i_s estará fora da

submatriz Δ_k^r , ou seja, temos um pivô primário $\Delta_{k_{i_s}, j_s}^r$ fora da submatriz Δ_k^r . Absurdo, pois nenhuma entrada na $\sigma_k^{(j_s), r}$ coluna fora da submatriz Δ_k^r pode ser diferente de zero. A Figura 3.17 esclarece esse fato.

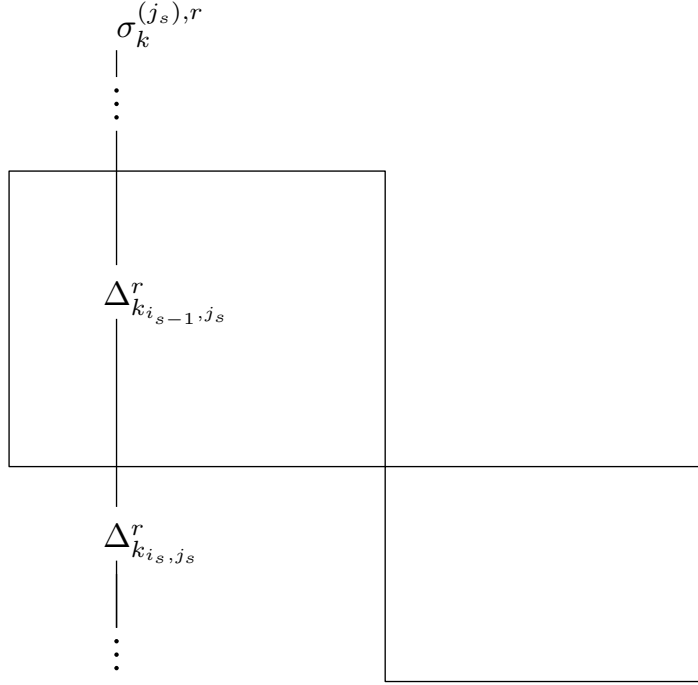


Figura 3.17: Impossibilidade de não existir mais h_{k-1} linhas.

Portanto, como consequência do processo recursivo descrito anteriormente, o número de linhas e colunas é infinito. Contradizendo o fato de que a quantidade de colunas e linhas são finitas. Portanto, o fato suposto $j = m$, ou seja, $\Delta_{k_{i,j}}^r$ e $\Delta_{k+1,j,\ell}^r$ são pivôs primários não ocorre.

□

Capítulo 4

Os $\mathbb{Z}$ -módulos $E_{p,q}^r$ gerados pelo Método da Varredura

Neste Capítulo, apresentaremos como o Método da Varredura produz os $\mathbb{Z}$ -módulos $Z_{p,q}^r$, que por sua vez auxiliam a encontrar os $\mathbb{Z}$ -módulos $E_{p,q}^r$, conforme o Teorema 4.1.

Vale a pena observar que os pivôs primários e os pivôs mudança de base tem um papel crucial no processo de determinar os geradores de $Z_{p,q}^r$ de acordo com a Proposição 4.1, e por isso a Proposição 4.2 garante a credibilidade do Método da Varredura.

Neste trabalho, usaremos a seguinte convenção: “acima da linha x ” = todas as linhas que estão acima da x -ésima linha mais a linha x , ou seja, estamos incluindo a linha x . Análogo para “à esquerda da coluna x ”, isto é, incluímos a coluna x ; “abaixo da linha x ” = todas as linhas que estão abaixo da x -ésima linha, ou seja, não estamos incluindo a linha x . Análogo para “à direita da coluna”, isto é, não incluímos a coluna x .

O $\mathbb{Z}$ -módulo $Z_{p,k-p}^r = \{c \in F_p C_k; \partial c \in F_{p-r} C_{k-1}\}$ é gerado por k -cadeias contidas em $F_p C_k$ com bordos em $F_{p-r} C_{k-1}$. Isto corresponde na matriz Δ a combinações lineares de todas as h_k colunas à esquerda da $(p+1)$ -ésima coluna tais que seus bordos (entradas não nulas) estão acima da $(p-r+1)$ -ésima linha. Observe na Figura 4.1 que $Z_{p,k-p}^r$ corresponde às colunas tracejadas da forma ---- em azul e as combinações dessas colunas. O mesmo para $Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} = \{c \in F_{p-1} C_k; \partial c \in F_{p-r} C_{k-1}\}$ que corresponde na matriz Δ a combinações lineares de todas as h_k colunas à esquerda da p -ésima coluna tais que seus bordos estão acima da $(p-r+1)$ -ésima linha.

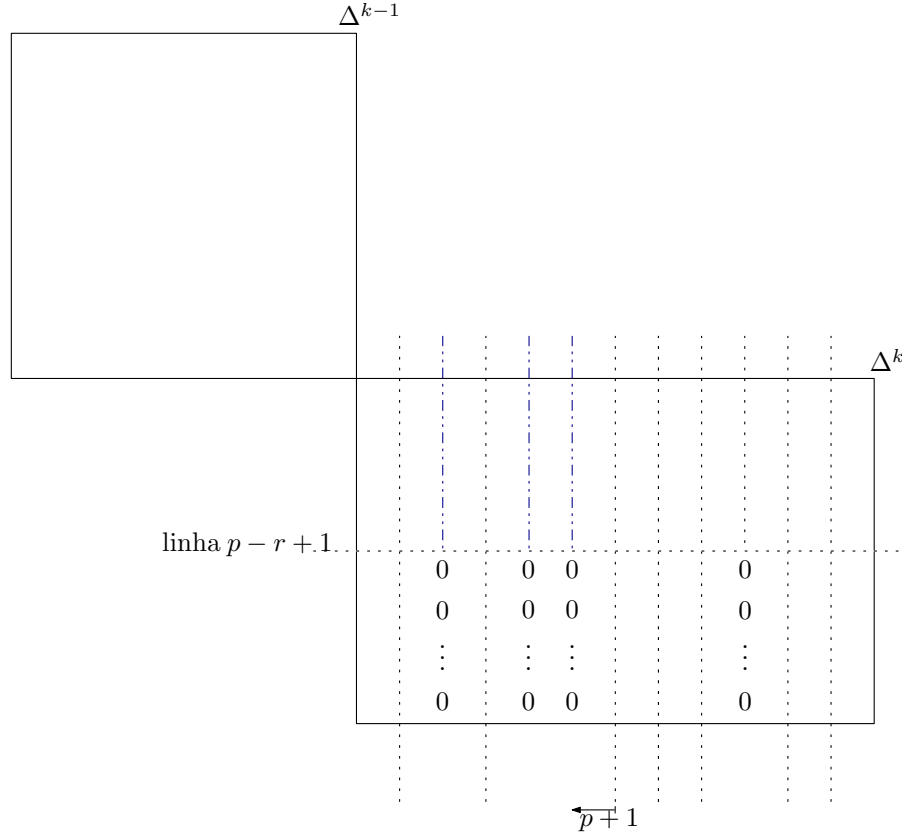


Figura 4.1: Definição de $Z_{p,k-p}^r$.

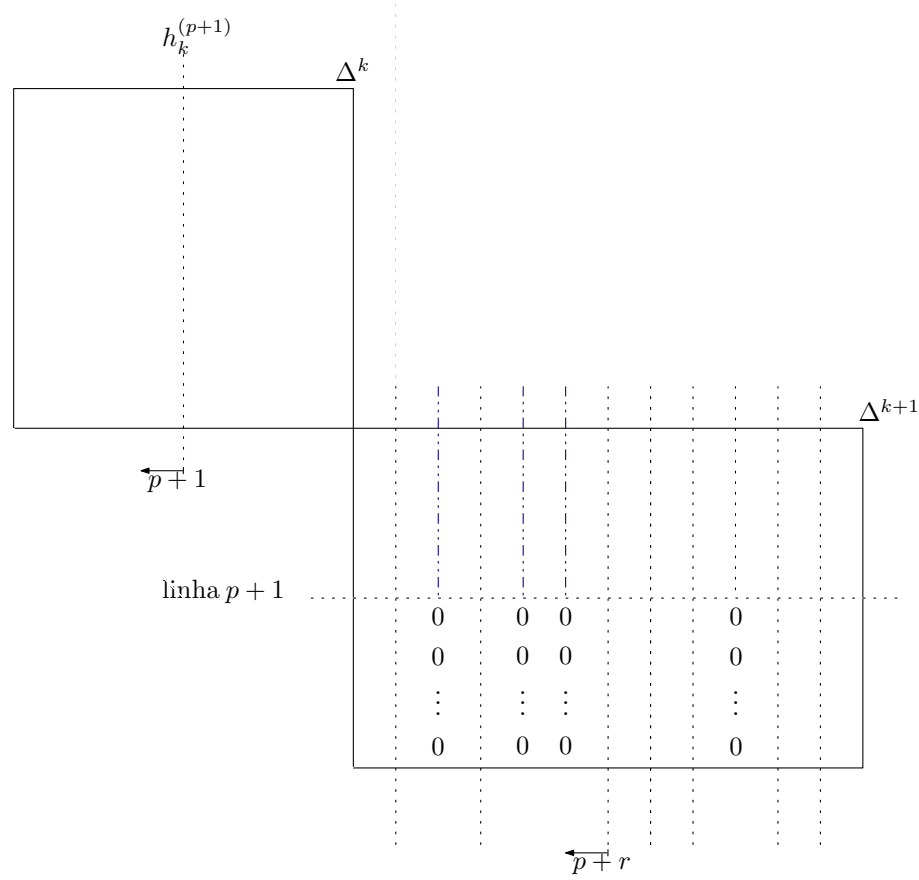
Para entendermos a definição de E_p^r falta ver que

$$\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} = \partial\{c \in F_{p+r-1}C_{k+1}; \partial c \in F_pC_k\}$$

é o conjunto de todos os bordos de elementos em $Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$. O que corresponde na matriz de conexão Δ a todas as h_k colunas à esquerda da $(p+1)$ -ésima coluna (pois $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \subseteq Z_{p,k-p}^r$ pelas inclusões (2.1)) que são bordos do conjunto

$$Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1},$$

ou seja, são bordos do conjunto das combinações lineares de todas as h_{k+1} colunas que estão à esquerda da $(p+r)$ -ésima coluna tais que seus bordos (entradas não nulas) estão acima da $(p+1)$ -ésima linha. Note na Figura 4.2 que corresponde as colunas à esquerda de h_k que


 Figura 4.2: Definição de $\partial Z_{p+r-1, (k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$

são bordos das colunas tracejadas da forma $-\cdots-$ em azul.

A singularidade de índice k em $F_p C_k / F_{p-1} C_k$ corresponde a uma k cadeia associadas à $(p+1)$ -ésima coluna de Δ . Denotamos tal singularidade por $h_k^{(p+1)}$. A próxima proposição estabelece uma fórmula para $Z_{p,k-p}^r$.

Proposição 4.1. *Sejam κ a primeira coluna de Δ associada a uma k -cadeia, $\mu^{(j),\zeta} = 1$ quando o pivô primário na j -ésima coluna está acima da $(j-\zeta)$ -ésima linha e $\mu^{(j),\zeta} = 0$ quando o pivô primário na j -ésima coluna está abaixo da $(j-\zeta)$ -ésima linha. Então*

$$Z_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}[\mu^{(p+1),r} \sigma_k^{(p+1),r}, \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}].$$

Demonstração:

Note que uma cadeia $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$ é associada a $(p+1-\xi)$ -ésima coluna da matriz $\Delta^{r-\xi}$ e, por definição, $\mu^{(p+1-\xi),r-\xi} = 1$ se, e somente se, o pivô primário na $(p+1-\xi)$ -ésima

coluna está acima da linha $((p+1-\xi) - (r-\xi) = p-r+1$. Novamente, por definição as cadeias associadas às colunas cujos pivôs primários estão abaixo da $(p-r+1)$ -ésima linha não correspondem a geradores de $Z_{p,k-p}^r$. Consideremos então a k -cadeia $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$, com $\xi \in \{0, \dots, p+1-\kappa\}$, associada a $(p+1-\xi)$ -ésima coluna de $\Delta^{r-\xi}$ tal que o pivô primário da $(p+1-\xi)$ -ésima coluna de $\Delta^{r-\xi}$ esteja acima da $(p-r+1)$ -ésima linha. Mostremos primeiramente que $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$ é uma k -cadeia que corresponde a um gerador de Z_p^r . Observe que $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$ está associada à $(p+1-\xi)$ -ésima coluna e como $F_p C_k$ corresponde a todas as colunas à esquerda de $p+1$ então $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$ está na filtração $F_p C_k$ para todo $\xi \geq 0$. Além disso, o Método Varredura na $(r-\xi)$ -ésima diagonal auxiliar zerou todos os pivôs mudança de base abaixo da $(r-\xi)$ -ésima diagonal, isto é, as entradas não nulas da coluna $(p+1-\xi)$ de $\Delta^{r-\xi}$ estão acima da $(p+1-\xi) - (r-\xi) = (p-r+1)$ -ésima linha. Portanto, o bordo de $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$ está em $F_{p-r} C_{k-1}$ e como consequência $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi} \in Z_{p,k-p}^r$.

Provaremos agora que qualquer elemento em $Z_{p,k-p}^r$ é uma combinação linear inteira dos $\mu^{(p+1-\xi),r-\xi} \sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$ para $\xi = 0, \dots, p+1-\kappa$. Usaremos indução dupla em p e r .

• **Base da indução dupla ($p = \kappa - 1$ e r qualquer).**

Consideremos a filtração $F_{\kappa-1}$, onde κ é a primeira coluna de Δ associada a uma k -cadeia. Seja ξ tal que o bordo de $h_k^{(\kappa)}$ está em $F_{\kappa-1-\xi} C_{k-1} \setminus F_{\kappa-1-\xi-1} C_{k-1}$, ou seja, $h_k^{(\kappa)}$ é uma combinação linear dos geradores de $F_{\kappa-1-\xi} C_{k-1}$ o qual não pode ser escrito como uma combinação linear dos geradores de $F_{\kappa-1-\xi-1} C_{k-1}$ portanto a entrada $\delta_{\kappa-1-\xi,\kappa} \neq 0$ e zeros abaixo dessa entrada. Observe na Figura 4.3 o que isso significa.

i $Z_{\kappa-1}^r$ é gerado por k -cadeias contidas em $F_{\kappa-1} C_k$ cujos bordos estão em $F_{\kappa-1-r} C_{k-1}$.

Notemos que existe apenas uma cadeia $h_k^{(\kappa)}$ em $F_{\kappa-1} C_k$. Logo

se $\xi < r$ então $\partial h_k^{(\kappa)} \notin F_{\kappa-1-r} C_{k-1}$, pois $F_{\kappa-1-r} C_{k-1} \subseteq F_{\kappa-1-\xi-1} C_{k-1}$, portanto, $Z_{\kappa-1}^r = 0$

se $\xi > r$ então $\partial h_k^{(\kappa)} \in F_{\kappa-1-\xi} C_{k-1} \subseteq F_{\kappa-1-r} C_{k-1}$, assim $Z_{\kappa-1}^r = [h_k^{(\kappa)}]$.

ii Por outro lado, $\sigma_k^{(\kappa),r}$ é a k -cadeia associada a κ -ésima coluna de Δ^r . Como não há mudanças de base na primeira coluna de Δ_k então $\sigma_k^{(\kappa),r} = h_k^{(\kappa)}$. Além disso, $\mu^{(\kappa),r} = 1$ se e somente se o bordo de $h_k^{(\kappa)} = \sigma_k^{(\kappa),r}$ está acima da diagonal r . Portanto, $Z_{\kappa-1}^r = [\mu^{(\kappa),r} \sigma_k^{(\kappa),r}]$.

Se $\xi < r$ então $\mu^{(\kappa),r} = 0$, pois $\partial h_k^{(\kappa)}$ não está acima da r diagonal (observe a Figura 4.4), assim $[\mu^{(\kappa),r} \sigma_k^{(\kappa),r}] = 0$.

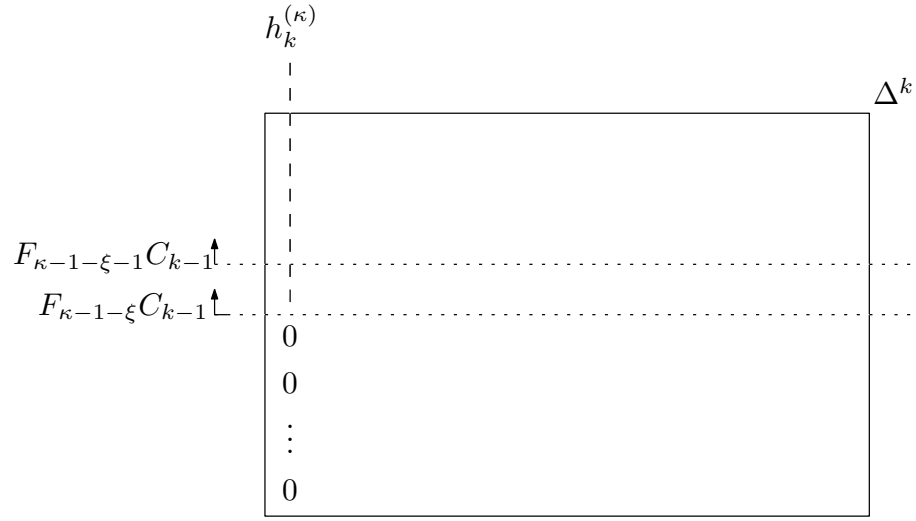


Figura 4.3:

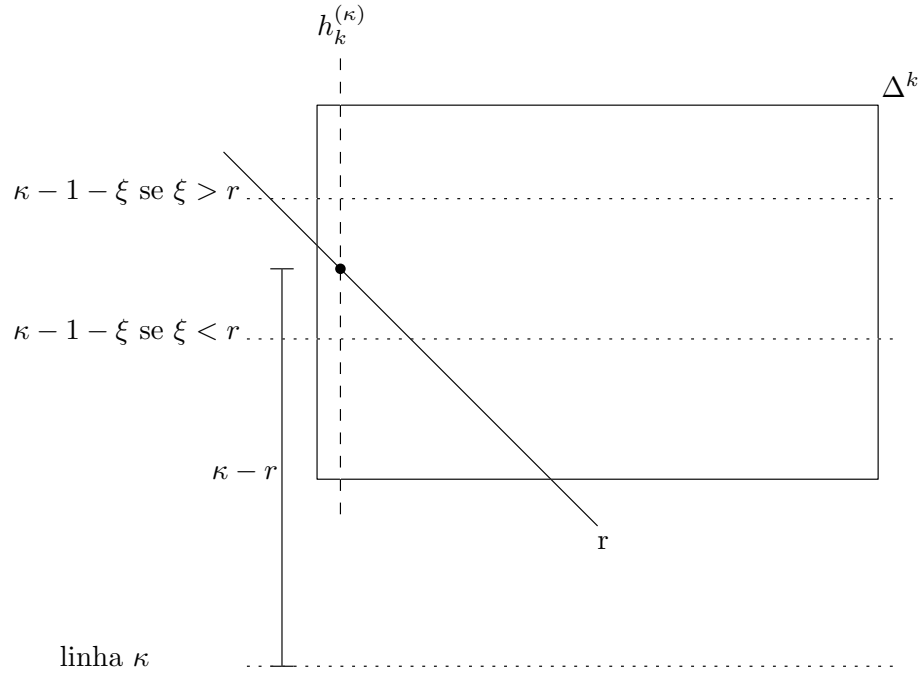


Figura 4.4:

Se $\xi > r$ então $\mu^{(\kappa),r} = 1$, pois $\partial h_k^{(\kappa)}$ está acima da r diagonal (observe a Figura 4.4), logo $[\mu^{(\kappa),r} \sigma_k^{(\kappa),r}] = [\sigma_k^{(\kappa),r}] = [h_k^{(\kappa)}]$.

Portanto, $Z_{\kappa-1}^r = [\mu^{(\kappa),r} \sigma_k^{(\kappa),r}]$

- **Base da indução dupla** ($r = \xi_1$ e p qualquer).

Seja ξ_1 a primeira diagonal auxiliar em Δ que intercepta Δ_k , ou seja, as colunas

de Δ correspondentes às cadeias $h_k^{(\kappa)}, \dots, h_k^{(p+1)}$ tem entradas não nulas acima da diagonal ξ_1 e, portanto, acima da $(p - \xi_1 + 1)$ -ésima linha de Δ .

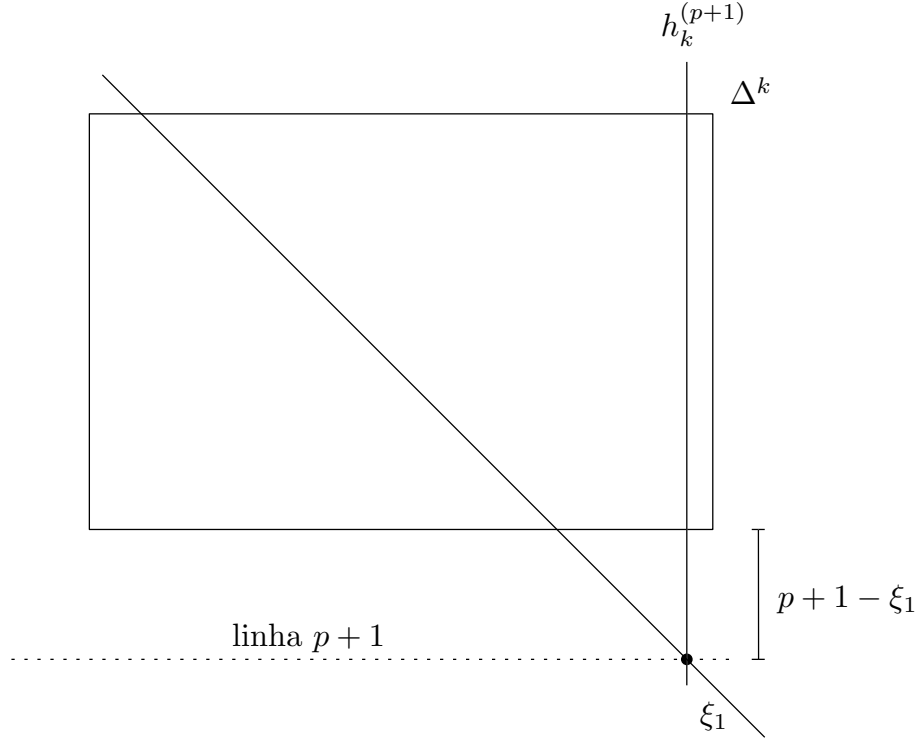


Figura 4.5:

- i Pela definição $Z_p^{\xi_1}$ é gerado pelas k -cadeias contidas em $F_p C_k$ cujos bordos estão em $F_{p-\xi_1} C_{k-1}$. Como as colunas de Δ_k correspondentes às cadeias $h_k^{(\kappa)}, \dots, h_k^{(p+1)}$ tem entradas não nulas acima da $(p - \xi_1 + 1)$ -ésima linha, a Figura 4.5 ilustra esse fato. Daí os bordos das cadeias $h_k^{(\kappa)}, \dots, h_k^{(p+1)}$ estão na filtração $F_{p-\xi_1} C_{k-1}$, isto é,

$$Z_p^{\xi_1} = [h_k^{(p+1)}, \dots, h_k^{(\kappa)}].$$

- ii Como as entradas não nulas das colunas de Δ associadas as cadeias $h_k^{(\kappa)}, \dots, h_k^{(p+1)}$ estão todos acima de ξ_1 diagonal auxiliar, ou seja, não houve pivôs abaixo da diagonal ξ_1 na submatriz Δ_k então $\sigma_k^{(j), \xi_1} = h_k^{(j)}$, $j = \kappa, \dots, p+1$ e $\mu^{(j), \xi_1} = 1$, $j = \kappa, \dots, p+1$. Daí,

$$[\mu^{(p+1), \xi_1} \sigma_k^{(p+1), r}, \dots, \mu^{(\kappa), \kappa-p+1+\xi_1} \sigma_k^{(\kappa), \kappa-p+1+\xi_1}] = [h_k^{(p+1)}, \dots, h_k^{(\kappa)}].$$

Portanto, $Z_p^{\xi_1} = [\mu^{(p+1),\xi_1} \sigma_k^{(p+1),r}, \dots, \mu^{(\kappa),\kappa-p+1+\xi_1} \sigma_k^{(\kappa),\kappa-p+1+\xi_1}]$.

- **Passo indutivo** (se a proposição é válida para Z_{p-1}^{r-1} então vale para Z_p^r).

Suponhamos sem perda de generalidade que os geradores de Z_{p-1}^{r-1} correspondam as k -cadeias associadas $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$, $\xi = 1, \dots, p+1-\kappa$ tais que o pivô primário da $(p+1-\xi)$ -ésima coluna está acima da $(p-r+1)$ -ésima linha.

Se o pivô primário da $(p+1)$ -ésima coluna está abaixo da $(p-r+1)$ -ésima linha então a coluna $\sigma_k^{(p+1),r}$ não pertence a Z_p^r por definição, daí $Z_p^r = Z_{p-1}^{r-1}$, ou seja, esse é o caso quando $\mu^{(p+1),r} = 0$. Portanto, provamos o passo indutivo para esse caso.

Suponhamos agora que o pivô primário da $(p+1)$ -ésima coluna está acima da $(p-r+1)$ -ésima linha e seja $\mathfrak{h}_k = b^{p+1}h_k^{(p+1)} + \dots + b^\kappa h_k^{(\kappa)}$ uma k -cadeia correspondente a um elemento de $Z_{p,k-p}^r$. Por definição de $Z_{p,k-p}^r$, temos que $\mathfrak{h}_k$ está em $F_p C_k$ e seu bordo está acima da $(p-r+1)$ -ésima linha. Se $b^{p+1} = 0$ então $\mathfrak{h}_k \in Z_{p-1}^{r-1}$, ou seja, $Z_p^r = Z_{p-1}^{r-1}$, logo, provamos o passo indutivo para esse caso.

Suponhamos que $b^{p+1} \neq 0$. Pelo Método da Varredura, $\sigma_k^{(p+1),r}$ tem $c_{p+1}^{p+1,r}$ como coeficiente líder minimal. Mostremos que, como $c_{p+1}^{p+1,r}$ é minimal, então $b^{p+1} = \alpha_1 c_{p+1}^{p+1,r}$, $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$. De fato se, b_{p+1} não é um inteiro múltiplo de $c_{p+1}^{p+1,r}$ então existe $v > 0$ um inteiro tal que $vc_{p+1}^{p+1,r}$ é o maior múltiplo de $c_{p+1}^{p+1,r}$ com $vc_{p+1}^{p+1,r} < b^{p+1}$. Assim temos $vc_{p+1}^{p+1,r} < b^{p+1} < (v+1)c_{p+1}^{p+1,r}$, ou seja, $0 < b^{p+1} - vc_{p+1}^{p+1,r} < c_{p+1}^{p+1,r}$. Segue que a k -cadeia $\mathfrak{h}_k - v\sigma_k^{(p+1),r}$ tem coeficiente líder $b^{p+1} - vc_{p+1}^{p+1,r} < c_{p+1}^{p+1,r}$ o que contradiz o fato de $c_{p+1}^{p+1,r}$ ser coeficiente líder minimal. Portanto, $b^{p+1} = \alpha_1 c_{p+1}^{p+1,r}$, onde $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$.

Assim $\mathfrak{h}_k = \alpha_1 c_{p+1}^{p+1,r} h_k^{(p+1)} + \dots + b^\kappa h_k^{(\kappa)}$. Como $\sigma_k^{(p+1),r} = c_{p+1}^{p+1,r} h_k^{(p+1)} + \dots + c_k^{p+1,r} h_k^{(\kappa)}$ então

$$\mathfrak{h}_k = \alpha_1 \sigma_k^{(p+1),r} + (b^p - \alpha_1 c_p^{p+1,r}) h_k^{(p)} + \dots + (b^\kappa - \alpha_1 c_\kappa^{p+1,r}) h_k^{(\kappa)}.$$

Observe que $\mathfrak{h}_k - \alpha_1 \sigma_k^{(p+1),r} = (b^p - \alpha_1 c_p^{p+1,r}) h_k^{(p)} + \dots + (b^\kappa - \alpha_1 c_\kappa^{p+1,r}) h_k^{(\kappa)} \in F_{p-1} C_k$. Além disso, como $\mathfrak{h}_k$ e $\sigma_k^{(p+1),r}$ têm seus bordos acima da $(p-r+1)$ -ésima linha então o bordo de $\mathfrak{h}_k - \alpha_1 \sigma_k^{(p+1),r}$ está acima da $(p-r+1)$ -ésima linha. Segue que $\mathfrak{h}_k - \alpha_1 \sigma_k^{(p+1),r} \in Z_{p-1}^{r-1}$. Por hipótese de indução, temos que $\mathfrak{h}_k - \alpha_1 \sigma_k^{(p+1),r} =$

$$\alpha_2 \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1} + \dots + \alpha_\kappa \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}, \text{ isto é,}$$

$$\mathfrak{h}_k = \alpha_1 \sigma_k^{(p+1),r} + \alpha_2 \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1} + \dots + \alpha_\kappa \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}.$$

□

Nem sempre as entradas das matrizes Δ^r são números inteiros. Porém, a seguinte proposição garante que todos os pivôs na r -ésima diagonal de Δ^r são sempre números inteiros.

Proposição 4.2. *Suponha que $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô primário ou um pivô mudança de base. Então $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um inteiro.*

Demonstração: Como $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô primário ou um pivô mudança de base então $\Delta_{s,p+1}^r = 0$, para todo $s > p - r + 1$. Logo $\sigma_k^{(p+1),r} \in Z_p^r$ e

$$\partial \sigma_k^{(p+1),r} = \Delta_{p-r+1,p+1}^r \sigma_{k-1}^{(p-r+1),r} + \dots + \Delta_{\kappa^*,p+1}^r \sigma_{k-1}^{(\kappa^*),r},$$

onde κ^* é a primeira coluna associada a uma $(k-1)$ -cadeia. Pelas inclusões (2.1) temos que $\partial Z_{p-r}^0 \subseteq \dots \subseteq \partial Z_p^r \subseteq \dots \subseteq Z_{p-r}^\infty \subseteq \dots \subseteq Z_{p-r}^{r+1}$. Segue que

$$\partial \sigma_k^{(p+1),r} \in \partial Z_p^r \subseteq Z_{p-r}^{r+1} = \mathbb{Z}[\mu^{(p-r+1),r+1} \sigma_k^{(p-r+1),r+1}, \mu^{(p-r),r} \sigma_k^{(p-r),r}, \dots, \mu^{(\kappa),2r-p+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),2r-p+\kappa}].$$

Portanto, o coeficiente $\Delta_{p-r+1,p+1}^r c_{p-r+1}^{p-r+1,r}$ de $h_{k-1}^{(p-r+1)}$ em $\partial \sigma_k^{(p+1),r}$ tem que ser um múltiplo α do coeficiente $c_{p-r+1}^{p-r+1,r+1}$ de $h_{k-1}^{(p-r+1)} \in Z_{p-r}^{r+1}$, isto é,

$$\Delta_{p-r+1,p+1}^r c_{p-r+1}^{p-r+1,r} = \alpha c_{p-r+1}^{p-r+1,r+1},$$

onde $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Logo temos

$$\Delta_{p-r+1,p+1}^r = \frac{\alpha c_{p-r+1}^{p-r+1,r+1}}{c_{p-r+1}^{p-r+1,r}}.$$

Segue de (3.6) que $\frac{c_{p-r+1}^{p-r+1,r+1}}{c_{p-r+1}^{p-r+1,r}} = u \in \mathbb{Z}$ e portanto $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um inteiro. □

O seguinte lema técnico será usado para auxiliar a demonstração do próximo teorema. Este lema detecta o aparecimento de torção na sequência espectral.

Lema 4.1. *Suponha que $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$. Então*

$Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} = \mathbb{Z}[\ell \sigma_k^{(p+1),r}, \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}],$
 onde $\ell = \text{mdc}\{\mu^{(r+p),r-1} c_{p+1}^{p+1,r-1} \Delta_{p+1,r+p}^{r-1}, \dots, \mu^{(\bar{\kappa}),\bar{\kappa}-p-1} c_{p+1}^{p+1,\bar{\kappa}-p-1} \Delta_{p+1,\bar{\kappa}}^{\bar{\kappa}-p-1}\} / c_{p+1}^{p+1,r}$, κ é a primeira coluna associada a uma k -cadeia e $\bar{\kappa}$ é a primeira coluna associada a uma $(k+1)$ -cadeia.

Demonstração: Por hipótese $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$ então $Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$ é um submódulo de

$$Z_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}[\mu^{(p+1),r} \sigma_k^{(p+1),r}, \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}]$$

que não é submódulo de

$$Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} = \mathbb{Z}[\mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1}, \mu^{(p-1),r-2} \sigma_k^{(p-1),r-2}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}].$$

Então $\mu^{(p+1),r} = 1$ e $Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$ contém um múltiplo inteiro ℓ de $\sigma_k^{(p+1),r}$, já que $Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} \neq Z_{p,k-p}^r$ por $Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$. Assim $Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$ é igual a

$$\mathbb{Z}[\ell \sigma_k^{(p+1),r}, \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1}, \mu^{(p-1),r-2} \sigma_k^{(p-1),r-2}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}].$$

Determinaremos agora o inteiro l . Temos que

$$Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} = \mathbb{Z}[\mu^{(p+r),r-1} \sigma_{k+1}^{(p+r),r-1}, \dots, \mu^{(\bar{\kappa}),\bar{\kappa}-p-1} \sigma_{k+1}^{(\bar{\kappa}),\bar{\kappa}-p-1}],$$

onde $\bar{\kappa}$ é a primeira coluna associada a uma k -cadeia e $\mu^{(p+r-\xi),r-1-\xi} = 0$ se o pivô primário da $(p+r-\xi)$ -ésima coluna está abaixo da $(p+1)$ -ésima linha ou $\mu^{(p+r-\xi),r-1-\xi} = 1$ caso contrário. Portanto,

$$\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} = \mathbb{Z}[\mu^{(p+r),r-1} \partial \sigma_{k+1}^{(p+r),r-1}, \dots, \mu^{(\bar{\kappa}),\bar{\kappa}-p-1} \partial \sigma_{k+1}^{(\bar{\kappa}),\bar{\kappa}-p-1}]. \quad (4.1)$$

Para $\xi = 0, \dots, p+r-\bar{\kappa}$ com $\mu^{(p+r-\xi),r-1-\xi} = 1$ temos $\Delta_{i,p+r-\xi}^{r-1-\xi} = 0$ para $i > p+1$. Logo

$$\partial \sigma_{k+1}^{(p+r-\xi),r-1-\xi} = \Delta_{p+1,p+r-\xi}^{r-1-\xi} \sigma_k^{(p+1),r-1-\xi} + \dots + \Delta_{\kappa,p+r-\xi}^{r-1-\xi} \sigma_k^{(\kappa),r-1-\xi},$$

pois os bordos $\partial\sigma_{k+1}^{(p+r-\xi),r-1-\xi}$ com $\Delta_{i,p+r-\xi}^{r-1-\xi} \neq 0$ para algum $i > p+1$ correspondem às linhas que têm pivôs primários abaixo da $(p+1)$ -ésima linha e neste caso temos $\mu^{(p+r-\xi),r-1-\xi} = 0$. Segue que para $\xi = 0, \dots, p+r-\bar{\kappa}$, quando $\mu^{(p+r-\xi),r-1-\xi} = 1$ temos

$$Z_{p-1}^{r-1} + [\partial\sigma_{k+1}^{(p+r-\xi),r-1-\xi}] = Z_{p-1}^{r-1} + [\Delta_{p+1,p+r-\xi}^{r-1-\xi}\sigma_k^{(p+1),r-1-\xi} + \dots + \Delta_{\kappa,p+r-\xi}^{r-1-\xi}\sigma_k^{(\kappa),r-1-\xi}]. \quad (4.2)$$

Por outro lado, $Z_{p-1}^{r-1} + [\partial\sigma_{k+1}^{(p+r-\xi),r-1-\xi}] \subset Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$ implica que

$$Z_{p-1}^{r-1} + [\partial\sigma_{k+1}^{(p+r-\xi),r-1-\xi}] = [\ell_\xi \sigma_k^{(p+1),r}, \mu^{(p),r-1}\sigma_k^{(p),r-1}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa}\sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}]. \quad (4.3)$$

Como $\sigma_k^{(p+1),r}$ pode ser expandido da forma que vimos em (3.2) então o coeficiente de $h_k^{(p+1)}$ no conjunto de geradores do $\mathbb{Z}$ -módulo em (4.2) é $\Delta_{p+1,p+r-\xi}^{r-1-\xi}c_{p+1}^{p+1,r-1-\xi}$.

Por outro lado, o coeficiente de $h_k^{(p+1)}$ no conjunto de geradores do $\mathbb{Z}$ -módulo em (4.3) é $\ell_\xi c_{p+1}^{p+1,r}$, daí $\ell_\xi = \Delta_{p+1,p+r-\xi}^{r-1-\xi}c_{p+1}^{p+1,r-1-\xi}/c_{p+1}^{p+1,r}$. Temos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{Z}[\ell\sigma_k^{(p+1),r}, \mu^{(p),r-1}\sigma_k^{(p),r-1}, \mu^{(p-1),r-2}\sigma_k^{(p-1),r-2}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa}\sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}] \\ &= Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \\ &= Z_{p-1}^{r-1} + \sum_{\xi=0}^{p+r-\kappa} [\mu^{(p+r-\xi),r-1-\xi}\partial\sigma_{k+1}^{(p+r-\xi),r-1-\xi}] \\ &= \left[\left(\sum_{\xi=0}^{p+r-\kappa} \ell_\xi \mu^{(p+r-\xi),r-1-\xi} \sigma_k^{(p+1),r} \right), \mu^{(p),r-1}\sigma_k^{(p),r-1}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa}\sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \right] \\ &= \left[(mdc\{\mu^{(p+r-\xi),r-1-\xi}\ell_\xi\}) \sigma_k^{(p+1),r}, \mu^{(p),r-1}\sigma_k^{(p),r-1}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa}\sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \right]. \end{aligned}$$

Logo, $\ell = mdc\{\mu^{(p+r-\xi),r-1-\xi}\ell_\xi\}$ onde $\xi = 0, \dots, p+r-\bar{\kappa}$, isto é,

$$\ell = mdc\{\mu^{(r+p),r-1}c_{p+1}^{p+1,r-1}\Delta_{p+1,r+p}^{r-1}, \dots, \mu^{(\bar{\kappa}),\bar{\kappa}-p-1}c_{p+1}^{p+1,\bar{\kappa}-p-1}\Delta_{p+1,\bar{\kappa}}^{\bar{\kappa}-p-1}\}/c_{p+1}^{p+1,r}.$$

□

Teorema 4.1. *A matriz Δ^r obtida no método da varredura aplicado a Δ determina E_p^r .*

Demonstração:

Mostremos que

$$E_{p,k-p}^r = \frac{Z_{p,k-p}^r}{Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}}$$

é zero ou um módulo finitamente gerado cujo gerador corresponde a uma k -cadeia associada à $(p+1)$ -ésima coluna de Δ^r .

Iremos então identificar o efeito que as entradas na r -ésima diagonal auxiliar de Δ^r têm em determinar os geradores dos $\mathbb{Z}$ -modules E_p^r . Veremos que $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$, que está na r -ésima diagonal, tem um papel crucial no processo de determinar $E_{p,k-p}^r$.

Note que uma entrada não nula na r -ésima diagonal auxiliar pode ser um pivô primário, um pivô mudança de base ou estar em uma coluna acima de um pivô primário. Uma entrada nula pode estar numa coluna acima de um pivô primário ou todas as entradas abaixo da mesma são também iguais a zero.

1. Suponha que a entrada $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ tenha sido identificada pelo Método da Varredura como um pivô primário. Segue da Proposição 3.1 que $\Delta_{s,p+1}^r = 0$, para todo $s > p-r+1$.

Portanto, segue da Proposição 4.1 que a cadeia associada à $(p+1)$ -ésima coluna em Δ^r , $\sigma_k^{(p+1),r}$, corresponde a um gerador de $Z_{p,k-p}^r$. Pelo Método da Varredura, esta cadeia é uma combinação linear sobre $\mathbb{Q}$ de cadeias associadas às h_k colunas de Δ^{r-1} à esquerda da $(p+1)$ -ésima coluna tal que o coeficiente da $(p+1)$ -ésima h_k coluna é um inteiro não nulo, lembre que isso é feito para obtermos Δ^r através de Δ^{r-1} . Novamente, pelo Método da Varredura, a cadeia $\sigma_k^{(p+1),r}$ também é uma combinação linear sobre $\mathbb{Z}$ das h_k colunas de Δ à esquerda da $(p+1)$ -ésima coluna com o coeficiente de $h_k^{(p+1)}$, o qual é inteiro não nulo. Daí $\sigma_k^{(p+1),r}$ não é combinação linear das colunas à esquerda da p -ésima coluna, segue então que $\sigma_k^{(p+1),r}$ não está contido nos geradores de $Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$.

Como supomos que $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô primário, mostraremos que

$$\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}.$$

De fato, os geradores de $Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$ devem corresponder às $(k+1)$ -cadeias associadas às h_{k+1} colunas com a propriedade que seus bordos estão acima da $(p+1)$ -ésima linha, ou seja, todas as entradas abaixo da $(p+1)$ -ésima linha são iguais a zero. Portanto, as entradas destas h_{k+1} colunas na $(p+1)$ -ésima linha devem ser um pivô primário ou uma entrada nula, pois as entradas que não forem pivô primário serão anuladas em algum momento quando aplicarmos o Método da Varredura em Δ . Veja a Figura 4.6. Pela Proposição 3.2, a $(p+1)$ -ésima linha não pode conter um pivô

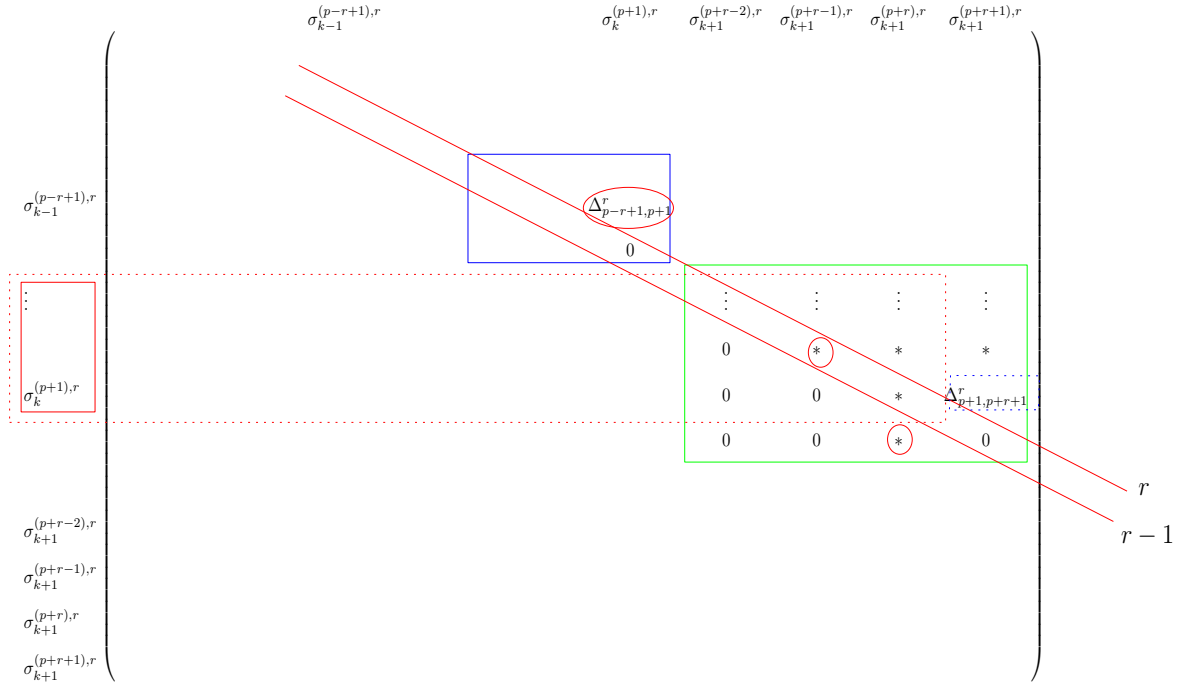


Figura 4.6: $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$.

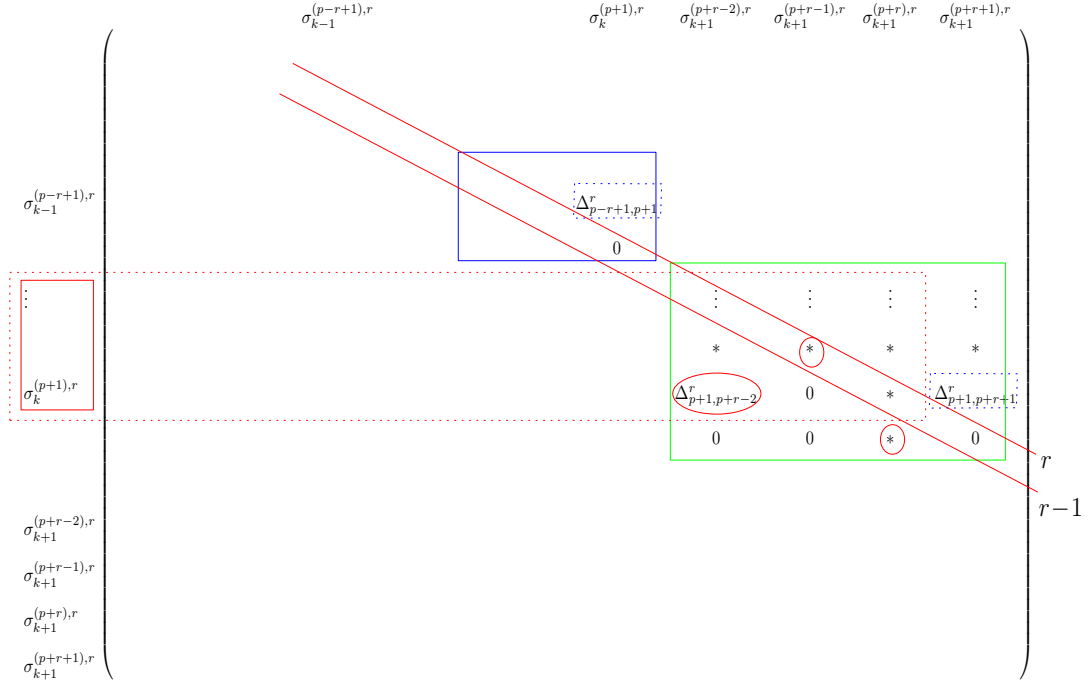
primário, já que $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô primário, isto é, a $(p+1)$ -ésima coluna tem um pivô primário. Logo as entradas destas h_{k+1} colunas na $(p+1)$ -ésima linha devem ser nulas.

Daí $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$ não contém em seu conjunto de geradores um múltiplo do gerador $\sigma_k^{(p+1),r}$, visto que os elementos de $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$ são bordos dos elementos de $Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$ e como os geradores desse último módulo são combinações lineares de todas as h_k colunas à esquerda da $(p+r-1)$ -ésima coluna tais que seus bordos estão acima da $(p+1)$ -ésima linha ou mais precisamente estão acima da p -ésima linha, usando o fato demonstrado.

Usando a Proposição 4.1 e o fato demonstrado temos

$$E_{p,k-p}^r = \frac{Z_{p,k-p}^r}{Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}} = \frac{Z_{p,k-p}^r}{Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}} = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}].$$

2. Se a entrada $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ foi identificada pelo Método da Varredura como um pivô mudança de base então o Método garante que $\Delta_{p-r+1,p+1}^{r+1} = 0$. Além disso, $\Delta_{s,p+1}^r = 0$ para todo $s > p-r+1$ pela Proposição 3.1.


 Figura 4.7: $\partial Z_{p+r-1, (k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-1, k-(p-1)}^{r-1}$.

Logo, como no caso anterior, o gerador correspondente à k -cadeia associada à $(p+1)$ -ésima coluna $\sigma_k^{(p+1),r}$ é um gerador de $Z_{p,k-p}^r$. Portanto, temos que analisar a $(p+1)$ -ésima linha. Veja Figura 4.7. Existem duas possibilidades:

- (a) $\partial Z_{p+r-1, (k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \subseteq Z_{p-1, k-(p-1)}^{r-1}$, isto é, todos os bordos de elementos em $Z_{p+r-1, (k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$ estão acima da p -ésima linha.

Neste caso, assim como antes, pela Proposição 4.1 $E_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$.

- (b) $\partial Z_{p+r-1, (k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-1, k-(p-1)}^{r-1}$, ou seja, existem elementos que estão em $Z_{p+r-1, (k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$ cujo bordo tem uma entrada não nula na $(p+1)$ -ésima linha. Esta, por sua vez, é necessariamente um pivô primário.

Pela Proposição 4.1 e pelo Lema 4.1, temos $E_{p,k-p}^r = \frac{\mathbb{Z}}{\ell\mathbb{Z}}[\sigma_k^{(p+1),r}]$.

3. Se a entrada $\Delta_{p-r+1, p+1}^r$ não é um pivô primário, nem um pivô mudança de base e também não é nula, então deve ser uma entrada acima de um pivô primário. Ou seja, existe $s > p-r+1$ tal que $\Delta_{s, p+1}^r$ é um pivô primário. Conforme a Proposição 4.1 $\mu^{(p+1),r} = 0$, pois o pivô primário da $(p+1)$ -ésima coluna está abaixo da $(p+1-r)$ -ésima linha, segue que $\sigma_k^{(p+1),r}$ não está em $Z_{p,k-p}^r$. Logo $Z_{p-1, k-(p-1)}^{r-1} = Z_{p, k-p}^r$, e como

$\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \subseteq Z_{p,k-p}^r$ então

$$E_{p,k-p}^r = \frac{Z_{p,k-p}^r}{Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}} = \frac{Z_{p,k-p}^r}{Z_{p,k-p}^r} = 0.$$

4. Se a entrada $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é uma entrada nula então temos as seguintes possibilidades:

- (a) Existe pelo menos uma entrada diferente de zero abaixo da $s > (p-r+1)$ -ésima linha, daí existe um pivô primário abaixo de $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$, isto é, existe $s > p-r+1$ tal que $\Delta_{s,p+1}^r$ é um pivô primário, tal pivô existe pois a diagonal auxiliar r já passou pela entrada. Neste caso, o gerador correspondente à k -cadeia associada à $(p+1)$ -ésima coluna $\sigma_k^{(p+1),r}$ não é um gerador de Z_p^r conforme foi explicado anteriormente, logo $Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} = Z_{p,k-p}^r$. Portanto $E_{p,k-p}^r = 0$.
- (b) $\Delta_{s,p+1}^r = 0$ para todo $s > p-r+1$. Neste caso, o gerador correspondente à k -cadeia associada à $(p+1)$ -ésima coluna $\sigma_k^{(p+1),r}$ em Δ^r é um gerador de $Z_{p,k-p}^r$, note que isso segue da Proposição 4.1 já que $\mu^{(p+1),r} = 0$, pois o pivô primário da $(p+1)$ -ésima coluna está abaixo da $(p+1-r)$ -ésima linha. Portanto, devemos analisar a $(p+1)$ -ésima linha. Temos as seguintes possibilidades:

- i. $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$, isto é, todos os bordos de elementos em $Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$ estão associados a colunas cujas entradas não nulas estão acima da p -ésima linha. Tal raciocínio foi visto em 1.

Neste caso, assim como antes, pela Proposição 4.1 temos $E_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$.

- ii. $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$, ou seja, $Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$ contém elementos cujo bordo está associado a uma coluna que tem uma entrada não nula na $(p+1)$ -ésima linha. Pela Proposição 4.1 e pelo Lema 4.1 $E_{p,k-p}^r = \frac{\mathbb{Z}}{\ell\mathbb{Z}}[\sigma_k^{(p+1),r}]$, $\ell \in \mathbb{Z}$. Novamente, esse raciocínio foi visto em 1.

5. A entrada $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ não está em Δ_k^r . Isto inclui o caso em que $p-r+1 < 0$, ou seja, $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ não está na matrix Δ^r .

A análise de E_p^r é muito semelhante ao caso anterior, ou seja, existem duas possibilidades:

- (a) Existe um pivô primário na $(p+1)$ -ésima coluna em uma diagonal auxiliar $\bar{r} < r$. Neste caso, o gerador correspondente à k -cadeia associada à $(p+1)$ -ésima coluna

$\sigma_k^{(p+1),r}$ não é um gerador de $Z_{p,k-p}^r$. Portanto, $Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} = Z_{p,k-p}^r$ e $E_{p,k-p}^r = 0$.

- (b) Todas as entradas em Δ^r na $(p+1)$ -ésima coluna em diagonais auxiliares menores que r são nulas, ou seja, o gerador correspondente à k -cadeia associada à $(p+1)$ -ésima coluna $\sigma_k^{(p+1),r}$ em Δ^r é um gerador de $Z_{p,k-p}^r$. Então temos que analisar a $(p+1)$ -ésima linha.

- i. Se $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$ então, pela Proposição 4.1, $E_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$.
- ii. Se $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$ então, pela Proposição 4.1 e pelo Lema 4.1, $E_{p,k-p}^r = \frac{\mathbb{Z}}{\ell\mathbb{Z}}[\sigma_k^{(p+1),r}]$.

□

O Teorema anterior mostra que a sequência de matrizes produzida pelo Método da Varredura determina os geradores dos espaços E_p^r . A demonstração deste teorema mostra como isto acontece.

Capítulo 5

As Diferenciais da Sequência Espectral Associadas ao Método da Varredura

Este capítulo começa com uma série de resultados técnicos que auxiliarão na demonstração do resultado principal desse capítulo, o Teorema 5.1. Esse resultado tem importância pois afirma que, dentro das hipótese, as entradas das matrizes produzidas pelo Método da Varredura, induzem as diferenciais da sequência espectral associada ao Método da Varredura. Resumindo, temos uma maneira fácil de encontrar as diferenciais da sequência espectral.

No Capítulo 3, definimos $\sigma_k^{(p+1),r+1}$ como uma combinação linear inteira de h_k 's, onde $c_{p+1}^{p+1,r}$ é o menor coeficiente líder. A próxima proposição mostra que tal combinação linear é também uma combinação linear de $\sigma_k^{(j),\xi} \in \Delta^\xi$, $j = \kappa, \dots, p+1$, $\xi = r-p-1+\kappa, \dots, r$ para $j-\xi = p-r+1$. Em ambos os casos as combinações lineares minimizam u .

Proposição 5.1. *Dado um pivô mudança de base $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$, existem inteiros $b_{p+1}, b_p, \dots, b_\kappa$ tais que o bordo de*

$$b_{p+1}\sigma_k^{(p+1),r} + b_p\mu^{(p),r-1}\sigma_k^{(p),r-1} + \dots + b_\kappa\mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa}\sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}$$

está acima da $(p-r+1)$ -ésima linha. Além disso, o menor b_{p+1} que satisfaz tal propriedade é u .

Demonstração: Como $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô mudança de base, $\Delta_{s,p+1}^r = 0$ para todo $s > (p-r+1)$, $\Delta_{p-r+1,p+1}^{r+1} = 0$ e o pivô primário da $(p+1)$ -ésima coluna está acima da

$(p-r)$ -ésima linha. Logo, pela definição de Z_p^{r+1} , $\sigma_k^{(p+1),r+1} \in Z_p^{r+1} \subset Z_p^r$. Segue pela Proposição 4.1

$$Z_p^r = \mathbb{Z}[\mu^{(p+1),r} \sigma_k^{(p+1),r}, \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}].$$

E note que $\mu^{(p+1),r} = 1$, pois o pivô primário da $(p+1)$ -ésima coluna está acima da $(p+1-r)$ -ésima linha.

Podemos então escrever

$$\sigma_k^{(p+1),r+1} = b_{p+1} \mu^{(p+1),r} \sigma_k^{(p+1),r} + b_p \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1} + \dots + b_\kappa \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}$$

com $b_{p+1}, \dots, b_\kappa$ inteiros. Pelas equações (3.1) e (3.6) temos que $c_{p+1}^{p+1,r+1} = u c_{p+1}^{p+1,r}$ o que implica $b_{p+1} = u$. Então mostramos a existência dos inteiros $b_{p+1}, b_p, \dots, b_\kappa$ e que u é um possível valor para b_{p+1} . Falta mostrar que u é o menor valor para b_{p+1} tal que existem $b_p, \dots, b_\kappa$.

De fato, suponha que $\bar{u} < u$ é um inteiro positivo tal que existem $\bar{b}_p, \dots, \bar{b}_\kappa$ com

$$\sigma_k^{(p+1),r+1} = \bar{u} \mu^{(p+1),r} \sigma_k^{(p+1),r} + \bar{b}_p \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1} + \dots + \bar{b}_\kappa \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}.$$

Então

$$\begin{aligned} \sigma_k^{(p+1),r+1} &= \bar{u} \mu^{(p+1),r} c_{p+1}^{p+1,r} h_k^{(p+1)} + (\bar{u} \mu^{(p+1),r} c_p^{p+1,r} + \bar{b}_p \mu^{(p),r-1} c_p^{p,r-1}) h_k^{(p)} + \dots \\ &\dots + (\bar{u} \mu^{(p+1),r} c_\kappa^{p+1,r} + \bar{b}_p \mu^{(p),r-1} c_\kappa^{p,r-1} + \dots + \bar{b}_\kappa \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} c_\kappa^{\kappa,r-p-1+\kappa}) h_k^{(\kappa)} \end{aligned}$$

o que contradiz a propriedade de minimalidade de u como foi definido em (3.2). Portanto, u é o menor inteiro positivo tal que $b_p, \dots, b_\kappa$ existem.

□

A Proposição 5.2 estabelece uma fórmula para u quando a entrada é um pivô mudança de base, para os demais casos sabemos que $u = 1$ já que não há mudança de base.

Proposição 5.2. *Suponha que $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô mudança de base e seja $u = \frac{c_{p+1}^{p+1,r+1}}{c_{p+1}^{p+1,r}}$ o*

inteiro definido em (3.1). Se

$$v = \text{mdc}\{\mu^{(p),r-1} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-1} \Delta_{p-r+1,p}^{r-1}, \dots, \mu^{(\kappa),\kappa-p+r-1} c_{p-r+1}^{p-r+1,\kappa-p+r-1} \Delta_{p-r+1,\kappa}^{\kappa-p+r-1}\} / c_{p-r+1}^{p-r+1,r}$$

$$e \lambda = \frac{v}{\text{mdc}\{\Delta_{p-r+1,p+1}^r, v\}} \text{ então } u = \lambda.$$

Demonstração: Conforme a proposição anterior existem inteiros tais que $b_{p+1}, \dots, b_\kappa$ com

$$\sigma_k^{(p+1),r+1} = b_{p+1} \mu^{(p+1),r} \sigma_k^{(p+1),r} + b_p \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1} + \dots + b_\kappa \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}.$$

Como $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô mudança de base então $\Delta_{s,p+1}^r = 0$ para todo $s > (p-r+1)$, logo $\mu^{(p+1),r} = 1$ (raciocínio usando na última proposição). Calculando o bordo de ambos os lados da equação acima temos

$$\partial \sigma_k^{(p+1),r+1} = b_{p+1} \partial \sigma_k^{(p+1),r} + b_p \mu^{(p),r-1} \partial \sigma_k^{(p),r-1} + \dots + b_\kappa \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \partial \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}. \quad (5.1)$$

Novamente, por $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ ser um pivô mudança de base então $\Delta_{p-r+1,p+1}^{r+1} = 0$. Assim, o coeficiente de $h_{k-1}^{(p-r+1)}$ em $\partial \sigma_k^{(p+1),r+1}$ é zero.

Usando as submatrizes $\Delta_k^r, \dots, \Delta_k^{r-p-1+\kappa}$ podemos ver que

$$\begin{aligned} \partial \sigma_k^{(p+1),r} &= \Delta_{p-r+1,p+1}^r \sigma_{k-1}^{(p-r+1),r} + \dots \\ \mu^{(p),r-1} \partial \sigma_k^{(p),r-1} &= \mu^{(p),r-1} \Delta_{p-r+1,p}^{r-1} \sigma_{k-1}^{(p-r+1),r-1} + \dots \\ &\vdots \\ \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \partial \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa} &= \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \Delta_{p-r+1,\kappa}^{r-p-1+\kappa} \sigma_{k-1}^{(p-r+1),r-p-1+\kappa} + \dots \end{aligned}$$

Note que $\mu^{(s),t} \sigma_k^{(s),t}$ do lado esquerdo das equações são os geradores de $Z_{p,k-p}^r$, por isso que as entradas abaixo da $(p-r+1)$ -ésima linha não contam. Além disso, há a necessidade de colocarmos os $\mu^{(s),t}$ s nos dois lados da equação, pois se $\mu^{(s),t} = 0$ para algum s e t temos que $\sigma_k^{(s),t}$ não entrará para o cálculo de $\partial \sigma_k^{(p+1),r+1}$, e também $\sigma_k^{(s),t}$ não será escrito daquela forma, já que a s -ésima coluna necessariamente terá entradas abaixo da $(p-r+1)$ -ésima linha.

Usando (3.2) para fazer as devidas substituições nas últimas equações temos

$$\partial \sigma_k^{(p+1),r} = \Delta_{p-r+1,p+1}^r c_{p-r+1}^{p-r+1,r} h_{k-1}^{(p-r+1)} + \dots$$

$$\begin{aligned}
\mu^{(p),r-1} \partial \sigma_k^{(p),r-1} &= \mu^{(p),r-1} \Delta_{p-r+1,p}^{r-1} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-1} h_{k-1}^{(p-r+1)} + \dots \\
&\vdots \\
\mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \partial \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa} &= \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \Delta_{p-r+1,\kappa}^{r-p-1+\kappa} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-p-1+\kappa} h_{k-1}^{(p-r+1)} + \dots
\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de $h_{k-1}^{(p-r+1)}$ em ambos os lados da equação (5.1), obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= b_p + \Delta_{p-r+1,p+1}^r c_{p-r+1}^{p-r+1,r} + b_p \mu^{(p),r-1} \Delta_{p-r+1,p}^{r-1} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-1} + \dots \\
&\quad \dots + b_\kappa \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \Delta_{p-r+1,\kappa}^{r-p-1+\kappa} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-p-1+\kappa}.
\end{aligned}$$

Note que essa última igualdade é um combinação linear das colunas associadas aos σ_k 's quando restrita à $(p-r+1)$ -ésima linha, como ilustra a Figura 5.1, fazendo as devidas substituições.

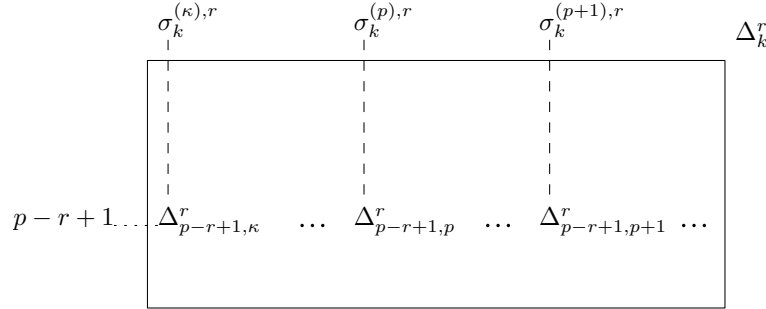


Figura 5.1: $(p-r+1)$ -ésima linha da submatriz Δ_k^r

Observe que as outras equações obtidas por igualar os coeficientes de h_{k-1}^α , $\alpha < p-r+1$, em ambos os lados da equação (5.1) não nos dão informação adicional. Pois o que importa é anular o pivô mudança de base $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ independentemente dos valores que $\Delta_{(\alpha),p+1}^r$ venha assumir.

Daí,

$$\begin{aligned}
b_{p+1} \Delta_{p-r+1,p+1}^r c_{p-r+1}^{p-r+1,r} &= -(b_p \mu^{(p),r-1} \Delta_{p-r+1,p}^{r-1} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-1} + \dots \\
&\quad \dots + b_\kappa \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \Delta_{p-r+1,\kappa}^{r-p-1+\kappa} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-p-1+\kappa}).
\end{aligned}$$

Pela Proposição 5.1, temos que u é o mínimo dos valores possíveis para b_{p+1} , logo pela última equação e pela identidade de Bezout segue que

$$u \Delta_{p-r+1,p+1}^r c_{p-r+1}^{p-r+1,r} = \text{mdc} \{ \mu^{(p),r-1} \Delta_{p-r+1,p}^{r-1} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-1}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \Delta_{p-r+1,\kappa}^{r-p-1+\kappa} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-p-1+\kappa} \},$$

ou seja, $u\Delta_{p-r+1,p+1}^r = v$, segue que

$$\lambda = \frac{v}{\text{mdc}\{\Delta_{p-r+1,p+1}^r, v\}} = \frac{v}{\Delta_{p-r+1,p+1}^r} = u.$$

□

Lema 5.1. *Seja $E_p^r = \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}]$, onde*

$$t = \frac{\text{mdc}\{\mu^{(r+p),r-1}c_{p+1}^{p+1,r-1}\Delta_{p+1,r+p}^{r-1}, \dots, \mu^{(\bar{k}),\bar{k}-p-1}c_{p+1}^{p+1,\bar{k}-p-1}\Delta_{p+1,\bar{k}}^{\bar{k}-p-1}\}}{c_{p+1}^{p+1,r}}.$$

Suponha que $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô mudança de base.

1. *Se $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$ é um pivô mudança de base, então*

$$E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{\text{mdc}\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\}\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}.$$

2. *Se $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$ é uma entrada nula com colunas de zeros abaixo, isto é, $\Delta_{s,p+r+1}^r = 0$ para $s > p+1$, então*

$$E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{t\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}.$$

Analogamente, se $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo então as fórmulas acima valem para $u=1$.

Demonstração: Como $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô mudança de base ou uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo então $\Delta_{p-r+1,p+1}^{r+1} = 0$, e logo $\sigma_k^{(p+1),r+1} \in Z_p^{r+1}$. Pelo Lema 4.1 e pelo Teorema 4.1, temos que $E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{s\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}$, onde

$$\begin{aligned} s &= \frac{\text{mdc}\{\mu^{(p+r+1),r}c_{p+1}^{p+1,r}\Delta_{p+1,p+r+1}^r, \mu^{(r+p),r-1}c_{p+1}^{p+1,r-1}\Delta_{p+1,r+p}^{r-1}, \dots, \mu^{(\bar{k}),\bar{k}-p-1}c_{p+1}^{p+1,\bar{k}-p-1}\Delta_{p+1,\bar{k}}^{\bar{k}-p-1}\}}{c_{p+1}^{p+1,r+1}} \\ &= c_{p+1}^{p+1,r} \frac{\text{mdc}\{\frac{\mu^{(p+r+1),r}c_{p+1}^{p+1,r}\Delta_{p+1,p+r+1}^r}{c_{p+1}^{p+1,r}}, \frac{\text{mdc}\{\mu^{(r+p),r-1}c_{p+1}^{p+1,r-1}\Delta_{p+1,r+p}^{r-1}, \dots, \mu^{(\bar{k}),\bar{k}-p-1}c_{p+1}^{p+1,\bar{k}-p-1}\Delta_{p+1,\bar{k}}^{\bar{k}-p-1}\}}{c_{p+1}^{p+1,r}}\}}{c_{p+1}^{p+1,r+1}}. \end{aligned}$$

Como $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$ é um pivô mudança de base ou uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo, então $\mu^{(p+r+1),r} = 1$. Assim

$$s = c_{p+1}^{p+1,r} \frac{\text{mdc}\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\}}{c_{p+1}^{p+1,r+1}}.$$

No caso em que $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô mudança de base segue que

$$\frac{c_{p+1}^{p+1,r}}{c_{p+1}^{p+1,r+1}} = \frac{1}{u}.$$

Substituindo o valor de s na expressão de $E_{p,k-p}^{r+1}$ obtemos (1), e note que o caso (2) é simplesmente o caso (1) com $\Delta_{p+1,p+r+1}^r = 0$.

Quando $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo então não ocorre mudança de base, portanto $c_{p+1}^{p+1,r} = c_{p+1}^{p+1,r+1}$, isto é, $u = 1$.

□

Observação 5.1. Usando a demonstração do Lema 5.1 vemos que $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô mudança de base, $u \leq \text{mdc}\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\} \leq t$.

Lema 5.2. Seja $E_p^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$ e suponha que $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô mudança de base.

1. Se $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$ é um pivô primário, então

$$E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{\Delta_{p+1,p+r+1}^r \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}.$$

2. Se $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$ é uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo, então

$$E_{p,k-p}^{r+1} = u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}].$$

Analogamente, se $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo então as fórmulas acima valem para $u = 1$.

Demonstração: Como $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô mudança de base ou uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo então $\Delta_{p-r+1,p+1}^{r+1} = 0$, logo $\sigma_k^{(p+1),r+1} \in Z_{p,k-p}^{r+1}$, pela definição de $Z_{p,k-p}^{r+1}$, daí usando a Proposição 4.1 temos $Z_{p-1,k-(p-1)}^r \subsetneq Z_{p,k-p}^{r+1}$.

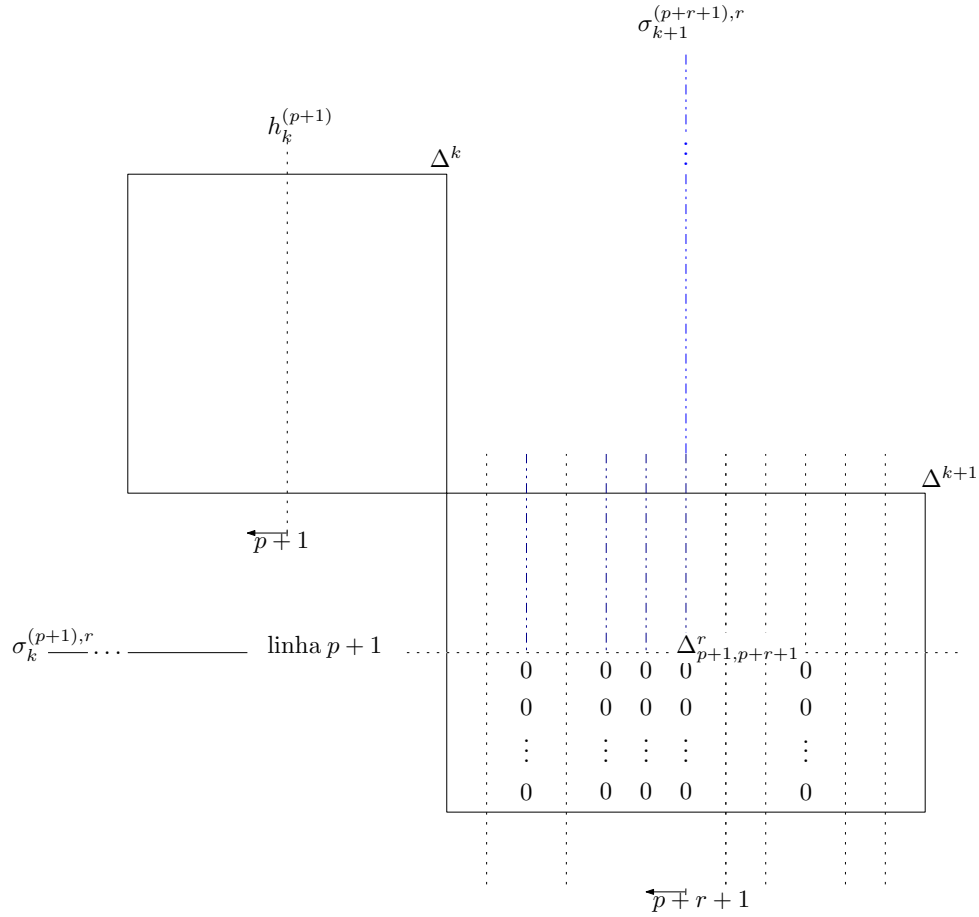


Figura 5.2: Definição de $\partial Z_{p+r,(k+1)-(p+r)}^r$.

Por hipótese, temos

$$\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}] = E_p^r = \frac{Z_p^r}{Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1}},$$

assim $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$, mais detalhes desse último argumento podem ser encontrados na demonstração do Teorema 4.1. Por causa dessa inclusão e da Proposição 4.1

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[\mu^{(p+r-1),r-1} \partial \sigma_{k+1}^{(p+r-1),r-1}, \dots, \mu^{(\bar{\kappa}),\bar{\kappa}-p-1} \partial \sigma_{k+1}^{(\bar{\kappa}),\bar{\kappa}-p-1}] &= Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \\ &\subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}. \end{aligned}$$

- * Para todo $\sigma_{k+1}^{(p+r-\xi),r-1-\xi}$, $\xi = 0, \dots, p+r-\bar{\kappa}$ temos duas possibilidades: ou $\partial \sigma_{k+1}^{(p+r-\xi),r-1-\xi} \in Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$ portanto $\Delta_{p+1,p+r-\xi}^{r-1-\xi} = 0$; ou $\sigma_{k+1}^{(p+r-\xi),r-1-\xi}$ tem um pivô primário abaixo da $(p+r-\xi-(r-1-\xi)) = (p+1)$ -ésima linha, logo $\mu^{(p+r-\xi),r-1-\xi} = 0$.

- Se $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$ é um pivô primário então $\partial\sigma_{k+1}^{p+r+1,r} \in \partial Z_{p+r,(k+1)-(p+r)}^r$, ou seja, $\sigma_p^{p+1,r}$ é um gerador de $\partial Z_{p+r,(k+1)-(p+r)}^r$, observe a Figura 5.2. Note que $\sigma_p^{p+1,r} \notin Z_{p-1,k-(p-1)}^r$ daí $\partial Z_{p+r,(k+1)-(p+r)}^r \not\subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^r$. Pela hipótese ($\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô mudança de base) e usando o que foi demonstrado no Teorema 4.1 (parte 4 (b) ii) temos que $E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{s\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}$, onde s é igual a

$$\frac{\text{mdc}\{\mu^{(p+r+1),r} c_{p+1}^{p+1,r} \Delta_{p+1,p+r+1}^r, \mu^{(p+r),r-1} c_{p+1}^{p+1,r-1} \Delta_{p+1,p+r}^{r-1}, \dots, \mu^{(\bar{k}),\bar{k}-p-1} c_{p+1}^{p+1,\bar{k}-p-1} \Delta_{p+1,\bar{k}}^{r-1}\}}{c_{p+1}^{p+1,r+1}}$$

Usando (*) e $\mu^{(p+r+1),r} = 1$ segue que

$$s = \frac{\mu^{(p+r+1),r} c_{p+1}^{p+1,r} \Delta_{p+1,p+r+1}^r}{c_{p+1}^{p+1,r+1}} = \frac{\Delta_{p+1,p+r+1}^r}{u}.$$

- Se $\Delta_{p+1,p+r+1}^r = 0$ então $\partial Z_{p+r,(k+1)-(p+r)}^r \subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^r$, assim pela hipótese ($\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô mudança de base) e usando o que foi demonstrado no Teorema 4.1 (parte 4 (b) i) segue que $E_p^{r+1} = u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$.

□

O seguinte lema segue de álgebra elementar e será utilizado na demonstração do próximo teorema.

Lema 5.3. *Seja $\mathfrak{m}$ o homomorfismo multiplicação por um inteiro não nulo m e seja $\lambda = \frac{v}{\text{mdc}\{m,v\}}$.*

1. Se $\mathbb{Z} \xrightarrow{\mathfrak{m}} \mathbb{Z}_v$ então $\ker \mathfrak{m} = \lambda\mathbb{Z}$ e $\text{Im } \mathfrak{m} = \frac{\mathbb{Z}}{\lambda\mathbb{Z}} = \frac{\text{mdc}\{m,v\}\mathbb{Z}}{v\mathbb{Z}}$.
2. Se $\mathbb{Z}_t \xrightarrow{\mathfrak{m}} \mathbb{Z}_v$ e $t \geq \lambda$ então $\ker \mathfrak{m} = \frac{\lambda\mathbb{Z}}{t\mathbb{Z}}$ e $\text{Im } \mathfrak{m} = \frac{\mathbb{Z}}{\lambda\mathbb{Z}} = \frac{\text{mdc}\{m,v\}\mathbb{Z}}{v\mathbb{Z}}$.

Antes de enunciar o teorema central desse capítulo e fazer a sua demonstração, faremos uma breve revisão de como encontrar o módulo $E_{p,k-p}^r$. Na demonstração do Teorema 4.1, vimos que existem três possibilidades para $E_{p,k-p}^r$:

- $E_{p,k-p}^r = \frac{\mathbb{Z}}{\ell\mathbb{Z}}[\sigma_k^{(p+1),r}] = \mathbb{Z}_\ell[\sigma_k^{(p+1),r}]$, quando satisfaz o caso **2b**, **4bii** ou **5bii**;

- $E_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$ quando satisfaz o caso **2a**, **4bi** ou **5bi**;
- $E_{p,k-p}^r = 0$ quando satisfaz o caso **3**, **4a** ou **5a**.

Lembre que na demonstração do Teorema 4.1 o caso

- 1 é quando $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô primário;
- 2 é quando $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô mudança de base;
- 3 é quando $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ não é um pivô primário, nem um pivô mudança de base e também não é uma entrada nula;
- 4 é quando $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é uma entrada nula;
- 5 é quando $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ não está em Δ_k^r .

Para seguir a demonstração do próximo teorema é bom manter em mente as considerações feitas acima.

Teorema 5.1. *Se E_p^r e E_{p-r}^r são ambos não nulos, então a aplicação $d_p^r : E_p^r \rightarrow E_{p-r}^r$ é induzida por δ_p^r , isto é, multiplicação pela entrada $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ quando a mesma é um pivô primário, um pivô mudança de base ou uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo.*

Demonstração: Suponha que E_p^r e E_{p-r}^r são ambos não nulos, caso contrário d_p^r é zero. Por definição

$$E_p^{r+1} = \frac{\ker d_p^r}{\operatorname{Im} d_{p+r}^r}$$

segue do Teorema 4.1 que precisamos considerar três casos para a entrada $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$: pivô primário, pivô mudança de base e uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo (essa restrição garante que não estamos nos casos **3**, **4a** e **5a** quando $E_{p,k-p}^r = 0$). Nessa demonstração não iremos fazer para o caso **5** ($\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ não está em Δ_k^r), haja vista que, esse caso é inteiramente análogo ao caso **4**.

1. $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô primário.

Neste caso, sabemos pelo Teorema 4.1 que $E_p^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$. Suponha que $E_{p-r}^r = \mathbb{Z}_t[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}]$, onde

$$t = \ell = \operatorname{mdc}\{\mu^{(r+p),r-1} c_{p+1}^{p+1,r-1} \Delta_{p+1,r+p}^{r-1}, \dots, \mu^{(\bar{\kappa}),\bar{\kappa}-p-1} c_{p+1}^{p+1,\bar{\kappa}-p-1} \Delta_{p+1,\bar{\kappa}}^{\bar{\kappa}-p-1}\} / c_{p+1}^{p+1,r},$$

pelo Lema 4.1. Pela demonstração do Teorema 4.1, estamos no caso **2b**, **4bii** ou **5bii**, ou seja, $\partial Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-r-1,k-(p-r-1)}^{r-1}$ assim existe um pivô primário na $(p-r+1)$ -ésima linha à esquerda da $(p-1)$ -ésima coluna. No entanto, isso contradiz o fato de $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ ser um pivô primário, já que não podemos ter dois pivôs primários na mesma linha. Logo $E_{p-r}^r = \mathbb{Z}[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}]$, visto que $E_{p-r}^r \neq 0$ por hipótese.

Temos a seguinte sequência:

$$\cdots \longleftarrow \mathbb{Z}[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}] \xleftarrow{\delta_p^r} \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}] \xleftarrow{\delta_{p+r}^r} E_{p+r}^r \longleftarrow \cdots . \quad (5.2)$$

Como

$$\begin{aligned} \delta_p^r : \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}] &\rightarrow \mathbb{Z}[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}] \\ z\sigma_k^{(p+1),r} &\mapsto \Delta_{p-r+1,p+1}^r z\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r} \end{aligned}$$

é multiplicação por $\Delta_{p-r+1,p+1}^r \neq 0$ então $\ker \delta_p^r = 0$.

(a) Suponha que $E_{p+r}^r = 0$, daí $\frac{\ker \delta_p^r}{\text{Im} \delta_{p+r}^r} = 0$.

(b) Suponha que $E_{p+r}^r \neq 0$, temos então três possibilidades para $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$. Tal entrada pode ser um pivô primário, um pivô mudança de base ou uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo. Pela Proposição 3.2, não há pivô primário na $(p+1)$ -ésima linha, já que $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô primário. Portanto $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$ não pode ser um pivô primário e nem um pivô mudança de base, pois a definição de pivô mudança de base nos garante que devemos ter um pivô na mesma linha o que não acontece. Logo $\Delta_{p+1,p+r+1}^r = 0$, assim $\frac{\ker \delta_p^r}{\text{Im} \delta_{p+r}^r} = 0$.

Por $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ ser um pivô primário segue que $\sigma_k^{(p+1),r+1} = \sigma_k^{(p+1),r}$ e seu bordo restrito à $(p-r+1)$ -ésima linha é $\Delta_{p-r+1,p+1}^r \neq 0$, assim seu bordo não está acima da $(p-r)$ -ésima linha. Consequentemente, $\sigma_k^{(p+1),r+1} \notin Z_p^{r+1}$ logo $Z_p^{r+1} = Z_{p-1}^r$ e $E_p^{r+1} = 0$.

2. $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ é um pivô mudança de base.

Segue que existe um pivô primário na $(p-r+1)$ -ésima linha em uma diagonal abaixo da r -ésima diagonal auxiliar, ou seja, $\partial Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-r-1,k-(p-r-1)}^{r-1}$ conforme visto

anteriormente, daí estamos no caso **2b**, **4bii** ou **5bii** do Teorema 4.1. Portanto $E_{p-r}^r = \mathbb{Z}_v[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}]$, onde

$$v = \text{mdc}\{\mu^{(p)}c_{p-r+1}^{p-r+1,r-1}\Delta_{p-r+1,p}^{r-1}, \dots, \mu^{(\kappa)}c_{p-r+1}^{p-r+1,\kappa-p+r-1}\Delta_{p-r+1,\kappa}^{\kappa-p+r-1}\}/c_{p-r+1}^{p-r+1,r}.$$

Seja $\lambda = \frac{v}{\text{mdc}\{\Delta_{p-r+1,p+1}^r, v\}}$. Pela Proposição 5.2, temos que $\lambda = u$.

- (a) Se $\Delta_{p+1,p+r+1}^r \neq 0$ é um pivô primário, então pela Proposição 3.2 não existe pivô primário na $(p+1)$ -ésima linha. Consequentemente $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$. Assim, estamos no caso **2a** do Teorema 4.1, ou seja, $E_p^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$. Note que também estamos no caso **1** do Teorema 4.1 para E_{p+r}^r , isto é, $E_{p+r}^r = \mathbb{Z}[\sigma_{k+1}^{(p+r+1),r}]$. Logo temos a seguinte sequência:

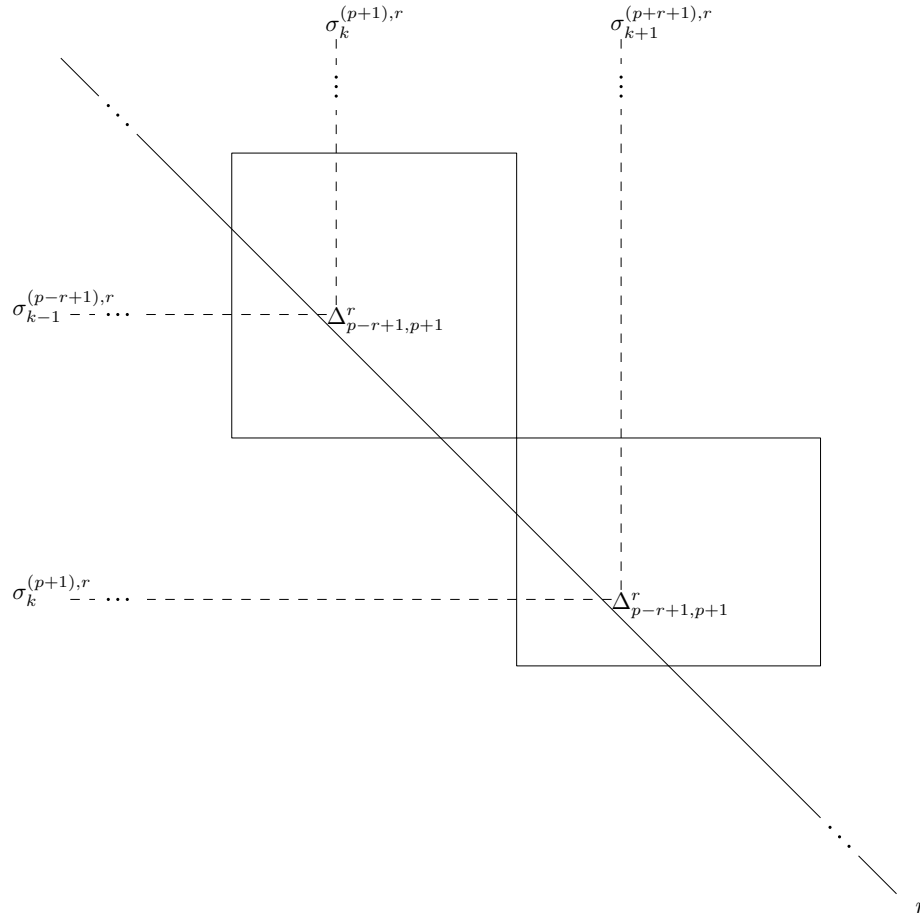


Figura 5.3: $\Delta_{p-r+1,p+1}^r \neq 0$ pivô mudança de base.

$$\dots \longleftarrow \mathbb{Z}_v[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}] \xleftarrow{\delta_p^r} \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}] \xleftarrow{\delta_{p+r}^r} \mathbb{Z}[\sigma_{k+1}^{(p+r),r}] \longleftarrow \dots \quad (5.3)$$

Observe que $\text{Im}\delta_{p+r}^r = \Delta_{p+1,p+r+1}^r \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$ e pelo Lema 5.3 $\text{Ker}\delta_p^r = \lambda \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$.

Dai

$$\frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r} = \frac{\lambda \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{\Delta_{p+1,p+r+1}^r \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]} = \frac{u \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{\Delta_{p+1,p+r+1}^r \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}.$$

E como $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$ é um pivô primário por hipótese, segue do Lema 5.2 que

$$E_p^{r+1} = \frac{u \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{\Delta_{p+1,p+r+1}^r \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]},$$

ou seja,

$$E_p^{r+1} = \frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r}.$$

(b) Se $\Delta_{p+1,p+r+1}^r = 0$ com uma coluna de zeros abaixo então $\text{Im}\delta_{p+r}^r = 0$. Portanto

$$\frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r} = \text{Ker}\delta_p^r.$$

i. Suponha que $E_p^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$. Usando o Lema 5.3, segue que

$$\text{Ker}\delta_p^r = \lambda \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}] = u \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}].$$

Por outro lado, pelo Lema 5.2 temos que $E_p^{r+1} = u \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]$.

ii. Suponha que $E_p^r = \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}]$. Pelo Lema 5.3 que

$$\text{Ker}\delta_p^r = \frac{\lambda \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{t \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]} = \frac{u \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{t \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}.$$

Por outro lado, pelo Lema 5.1, $E_p^{r+1} = u \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r+1}]$.

(c) Se $\Delta_{p+1,p+r+1}^r \neq 0$ é um pivô mudança de base então existe um pivô primário na $(p+1)$ -ésima linha e numa diagonal auxiliar abaixo de r , ou seja,

$$\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \notin Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}.$$

Logo, estamos no caso **2b** do Teorema 4.1, portanto $E_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}]$, onde

$$t = \text{mdc}\{\mu^{(r+p),r-1}c_{p+1}^{p+1,r-1}\Delta_{p+1,r+p}^{r-1}, \dots, \mu^{(\bar{\kappa}),\bar{\kappa}-p-1}c_{p+1}^{p+1,\bar{\kappa}-p-1}\Delta_{p+1,\bar{\kappa}}^{\bar{\kappa}-p-1}\}/c_{p+1}^{p+1,r}.$$

Seja $\bar{\lambda} = \frac{t}{\text{mdc}\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\}}$. Novamente, temos a sequência

$$\dots \longleftarrow \mathbb{Z}_v[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}] \xleftarrow{\delta_p^r} \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}] \xleftarrow{\delta_{p+r}^r} E_{p+r}^r \longleftarrow \dots. \quad (5.4)$$

Como $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$ é um pivô mudança de base então E_{p+r}^r é determinado pelo caso **2a** ou **2b** do Teorema 4.1, ou seja, $E_{p+r}^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+r),r}]$ ou $E_{p+r}^r = \mathbb{Z}_w[\sigma_k^{(p+r),r}]$. Contudo não precisamos explicitar E_{p+r}^r , já que estamos interessado em determinar $\text{Im}\delta_{p+r}^r$.

Calculemos então $\text{Ker}\delta_p^r$ e $\text{Im}\delta_{p+r}^r$. Pela Observação 5.1 e pela Proposição 5.2, temos que $\lambda = u \leq t$ e $\bar{\lambda} = c_{p+r+1,r+1}^{p+r+1}/c_{p+r+1,r+1}^{p+r+1} \leq w$, usando o Lema 5.3 obtemos

$$\text{Ker}\delta_p^r = \frac{\lambda \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{t \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]},$$

$$\text{Im}\delta_{p+r}^r = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{\bar{\lambda} \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]} = \frac{\text{mdc}\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\} \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{t \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}.$$

Logo,

$$\frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r} = \frac{\lambda \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{\text{mdc}\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\} \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}.$$

Por outro lado, como $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$ é um pivô mudança de base, segue do Lema 5.1 e do Teorema 4.1 que $E_p^{r+1} = \frac{u \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{\text{mdc}\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\} \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}$, onde $u = \lambda$ pela Proposição 5.2.

- (d) Se $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$ é uma entrada acima de um pivô primário então existe um pivô primário na $(p+r+1)$ -ésima coluna abaixo de $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$. Logo, $\mu^{(p+r+1),r} = 0$ e $\sigma_{k+1}^{(p+r+1),r} \notin Z_{p+r}^r$, consequentemente $Z_{p+r-1}^{r-1} = Z_{p+r}^r$ o que implica $E_{p+r}^r = 0$. Portanto $\text{Im}\delta_{p+r}^r = 0$. Então

$$\frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r} = \text{Ker}\delta_p^r.$$

i. Se $E_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$,

$$\cdots \longleftarrow \mathbb{Z}_v[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}] \xleftarrow{\delta_p^r} \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]^{\delta_{p+r}^r} \longleftarrow 0 \longleftarrow \cdots \quad (5.5)$$

e pelo Lema 5.3

$$\text{Ker}\delta_p^r = \lambda\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}] = u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}].$$

Conforme na demonstração do Teorema 4.1, temos que $\partial Z_{p+r-1,k+1-(p+r-1)}^{r-1} \subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$, já que $E_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$.

Provaremos que nessas condições temos $\partial Z_{p+r-1,k+1-(p+r-1)}^{r-1} \subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$.

De fato, pelas inclusões (2.1) temos que

$$\partial Z_{p+r-1,k+1-(p+r-1)}^{r-1} \subseteq \partial Z_{p+r-1,k+1-(p+r-1)}^{r-1} \quad (5.6)$$

e

$$Z_{p-1,k-(p-1)}^r \subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}. \quad (5.7)$$

Usando a Proposição 4.1 vemos que

$$\partial Z_{p+r,k+1-(p+r)}^r = \partial \mathbb{Z}[\mu^{(p+r+1),r} \sigma_{k+1}^{(p+r+1),r}, \dots, \mu^{(\ell),\ell-p-1} \sigma_{k+1}^{(\ell),\ell-p-1}]$$

e

$$\partial Z_{p+r-1,k+1-(p+r)}^{r-1} = \partial \mathbb{Z}[\mu^{(p+r),r-1} \sigma_{k+1}^{(p+r),r-1}, \dots, \mu^{(\ell),\ell-p-1} \sigma_{k+1}^{(\ell),\ell-p-1}],$$

ora $\mu^{(p+r+1),r} = 0$ então $\partial Z_{p+r,k+1-(p+r)}^r = \partial Z_{p+r-1,k+1-(p+r)}^{r-1} \subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$.

Usando a definição de $Z_{p-1}^r = \{c \in F_{p-1}C \mid \partial c \in F_{p-1-r}C\}$ e de $Z_{p-1}^{r-1} = \{c \in F_{p-1}C \mid \partial c \in F_{p-1-r}C\}$ concluímos que $\partial Z_{p+r,k+1-(p+r)}^r \subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$, pois $\partial \partial Z_{p+r,k+1-(p+r)}^r = 0$.

Desse último fato segue que

$$E_{p,k-p}^{r+1} = u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}] = \text{Ker}\delta_p^r = \frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r}.$$

ii. Se $E_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}]$,

$$\cdots \longleftarrow \mathbb{Z}_v[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}] \xleftarrow{\delta_p^r} \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}]^{\delta_{p+r}^r} \longleftarrow 0 \longleftarrow \cdots \quad (5.8)$$

e pelo Lema 5.3

$$\text{Ker} \delta_p^r = \frac{\lambda \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{t \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]} = u \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}].$$

Conforme na demonstração do Teorema 4.1, temos que $\partial Z_{p+r-1, k+1-(p+r-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-1, k-(p-1)}^{r-1}$, já que $E_{p, k-p}^r = \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}]$.

Provaremos que nessas condições temos $E_{p, k-p}^{r+1} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{s \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}$, onde

$$s = \frac{\text{mdc}\{\mu^{(p+r+1),r} c_{p+1}^{p+1,r} \Delta_{p+1,p+r+1}^r, \dots, \mu^{(\bar{\kappa}), \bar{\kappa}-p-1} c_{p+1}^{p+1, \bar{\kappa}-p-1} \Delta_{p+1, \bar{\kappa}}^{\bar{\kappa}-p-1}\}}{c_{p+1}^{p+1,r+1}}.$$

Ou seja, é suficiente mostrar que $\partial Z_{p+r-1, k+1-(p+r-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-1, k-(p-1)}^{r-1}$.

Com efeito, suponha que $\partial Z_{p+r-1, k+1-(p+r-1)}^{r-1} \subseteq Z_{p-1, k-(p-1)}^{r-1}$, usando as inclusões (5.6) e (5.7) segue que $\partial Z_{p+r-1, k+1-(p+r-1)}^{r-1} \subseteq Z_{p-1, k-(p-1)}^{r-1}$. Absurdo,

pois $\partial Z_{p+r-1, k+1-(p+r-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-1, k-(p-1)}^{r-1}$. Portanto $E_{p, k-p}^{r+1} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{s \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}$.

Como $\mu^{(p+r+1),r} = 0$ segue que

$$\begin{aligned} s &= \frac{\text{mdc}\{\mu^{(p+r+1),r} c_{p+1}^{p+1,r} \Delta_{p+1,p+r+1}^r, \dots, \mu^{(\bar{\kappa}), \bar{\kappa}-p-1} c_{p+1}^{p+1, \bar{\kappa}-p-1} \Delta_{p+1, \bar{\kappa}}^{\bar{\kappa}-p-1}\}}{c_{p+1}^{p+1,r+1}} \\ &= c_{p+1}^{p+1,r} \frac{s}{c_{p+1}^{p+1,r+1}} = \frac{t}{u}, \end{aligned}$$

onde

$$s = \text{mdc} \left\{ \frac{\mu^{(p+r+1),r} \Delta_{p+1,p+r+1}^r}{c_{p+1}^{p+1,r}}, t \right\} = \text{mdc} \left\{ \frac{0 \cdot \Delta_{p+1,p+r+1}^r}{c_{p+1}^{p+1,r}}, t \right\} = t$$

e

$$t = \frac{\text{mdc}\{\mu^{(r+p),r-1} c_{p+1}^{p+1,r-1} \Delta_{p+1,r+p}^{r-1}, \dots, \mu^{(\bar{\kappa}), \bar{\kappa}-p-1} c_{p+1}^{p+1, \bar{\kappa}-p-1} \Delta_{p+1, \bar{\kappa}}^{\bar{\kappa}-p-1}\}}{c_{p+1}^{p+1,r}}.$$

Portanto,

$$E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{t\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]} = \text{Ker}\delta_p^r = \frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r}.$$

3. $\Delta_{p-r+1,p+1}^r = 0$ com uma coluna de zeros abaixo.

Note que $\text{Ker}\delta_p^r = E_p^r$, além disso, $\sigma_k^{(p+1),r} = \sigma_k^{(p+1),r+1}$ daí $u = 1$.

(a) Se $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$ é uma entrada acima de um pivô primário então, como no caso **2d** desse teorema, temos $\mu^{(p+r+1),r} = 0$ e $E_{p+r}^r = 0$. Portanto $\text{Im}\delta_{p+r}^r = 0$, daí

$$\frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r} = E_p^r.$$

Por outro lado, como estamos nas mesmas hipótese do caso **2d** desse teorema com a diferença de que $\sigma_k^{(p+1),r} = \sigma_k^{(p+1),r+1}$ e $u = 1$, assim $E_p^{r+1} = E_p^r$.

(b) Se $\Delta_{p+1,p+r+1}^r = 0$ com uma coluna de zeros abaixo então $\text{Im}\delta_{p+r}^r = 0$ e

$$\frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r} = E_p^r.$$

Usando os Lemas 5.1 e 5.2 juntamente com o fato de que $\sigma_k^{(p+1),r} = \sigma_k^{(p+1),r+1}$ e $u = 1$ segue que $E_p^{r+1} = E_p^r$.

(c) Se $\Delta_{p+1,p+r+1}^r \neq 0$ é um pivô primário então não existe um pivô primário na $(p+1)$ -ésima linha e nem na $(p+r+1)$ -ésima coluna em uma diagonal auxiliar abaixo de r . Portanto, pelo Teorema 4.1 caso **4bi** e **1**, $E_p^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$ e $E_{p+r}^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+r+1),r}]$. Considere a sequência

$$\dots \longleftarrow E_{p-r}^r \xleftarrow{\delta_p^r} \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}] \xleftarrow{\delta_{p+r}^r} \mathbb{Z}[\sigma_{k+1}^{(p+r+1),r}] \longleftarrow \dots \quad (5.9)$$

Segue que

$$\frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{\Delta_{p+1,p+r+1}^r \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}.$$

Por outro lado, como $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$ é um pivô primário, pelo Lema 5.2, pelo fato de

que $\sigma_k^{(p+1),r} = \sigma_k^{(p+1),r+1}$ e $u = 1$, temos

$$E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{\Delta_{p+1,p+r+1}^r \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}.$$

- (d) Se $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$ é um pivô mudança de base, então existe um pivô primário na $(p+1)$ -ésima linha em uma diagonal auxiliar abaixo de r . Assim, pelo Teorema 4.1 caso **4bii**, segue que $E_p^r = \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}]$.

$$\cdots \longleftarrow E_{p-r}^r \xleftarrow{\delta_p^r} \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}] \xleftarrow{\delta_{p+r}^r} E_{p+r}^r \longleftarrow \cdots \quad (5.10)$$

Existem dois casos possíveis para E_{p+r}^r ou é igual a $\mathbb{Z}[\sigma_{k+1}^{(p+r+1),r}]$ ou a $\mathbb{Z}_w[\sigma_{k+1}^{(p+r+1),r}]$, como no caso 2b desse teorema não há necessidade de encontrar E_{p+r}^r , o que precisamos descobrir é $Im\delta_{p+r}^r$.

Sejam $\bar{\lambda} = \frac{t}{mdc\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\}}$ e $\tilde{u} = \frac{c_{p+r+1}^{p+r+1,r}}{c_{p+r+1}^{p+r+1,r+1}}$. Como $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$ é pivô mudança de base então, pela Proposição 5.2 e pela Observação 5.1, temos $\bar{\lambda} = \tilde{u} \leq mdc\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, w\} \leq w$, isto é, $\bar{\lambda} \leq w$. Pelo Lema 5.3,

$$Im\delta_{p+r}^r = \frac{mdc\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\} \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{t \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}.$$

Portanto

$$\frac{Ker\delta_p^r}{Im\delta_{p+r}^r} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{mdc\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\} \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}.$$

Por outro lado, como $\Delta_{p+1,p-r+1}^r$ é uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo, segue do Lema 5.1 que

$$E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{mdc\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\} \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}.$$

Portanto, vimos para todos os casos que $\frac{Ker d_p^r}{Im d_{p+r}^r} = E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{Ker \delta_p^r}{Im \delta_{p+r}^r}$.

□

Capítulo 6

As Implicações Dinâmicas das Diferenciais

Definição 6.1. *Um **caminho associado** a d^r é a justaposição de curvas representadas por órbitas conectantes. As curvas, representadas na matriz Δ^ξ por um pivô primário ou um pivô mudança de base $\Delta_{i,j}^\xi$, para $\xi < r$, podem ser consideradas com a orientação invertida.*

Mais precisamente, seja $\gamma_{i,j}$ um caminho entre as singularidades $h_k^{(j)}$ e $h_{k-1}^{(i)}$. Se $\gamma_{i,j}$ corresponde a uma órbita conectante no fluxo, dizemos que $\gamma_{i,j}$ é um **caminho elementar** e definimos o comprimento de $\gamma_{i,j}$ como $\ell(\gamma_{i,j}) = (j - i)$. No entanto, quando $\gamma_{i,j}$ não corresponde a uma órbita conectante no fluxo, $\gamma_{i,j}$ pode ser escrito como uma sequência de caminhos elementares. Esta construção é feita recursivamente definindo

$$\gamma_{i,j} = [\gamma_{\bar{i},j}, -\gamma_{\bar{i},\bar{j}}, \gamma_{i,\bar{j}}],$$

onde $\bar{j} < j$ e $\bar{i} > i$, ou seja, $h_k^{(\bar{j})}$ está associada a uma coluna de Δ à esquerda de $h_k^{(j)}$, e $h_{k-1}^{(\bar{i})}$ está associado a uma linha de Δ abaixo de $h_{k-1}^{(i)}$.

O sinal negativo indica que $\gamma_{\bar{i},\bar{j}}$ é considerado com a orientação invertida. Se $\gamma_{\bar{i},\bar{j}}$ é um caminho elementar, a órbita conectante correspondente é considerada na orientação invertida. Se $\gamma_{\bar{i},\bar{j}}$ não corresponde a uma órbita conectante então é um caminho

$$\gamma_{\bar{i},\bar{j}} = [\gamma_{\bar{i},\bar{j}}, -\gamma_{\bar{i},\bar{j}}, \gamma_{\bar{i},\bar{j}}],$$

onde $\bar{\bar{j}} < \bar{j}$ e $\bar{\bar{i}} > \bar{i}$, e definimos

$$-\gamma_{\bar{i},\bar{\bar{j}}} = -[\gamma_{\bar{i},\bar{j}}, -\gamma_{\bar{i},\bar{j}}, \gamma_{\bar{i},\bar{\bar{j}}}] = [-\gamma_{\bar{i},\bar{j}}, \gamma_{\bar{i},\bar{j}}, -\gamma_{\bar{i},\bar{j}}].$$

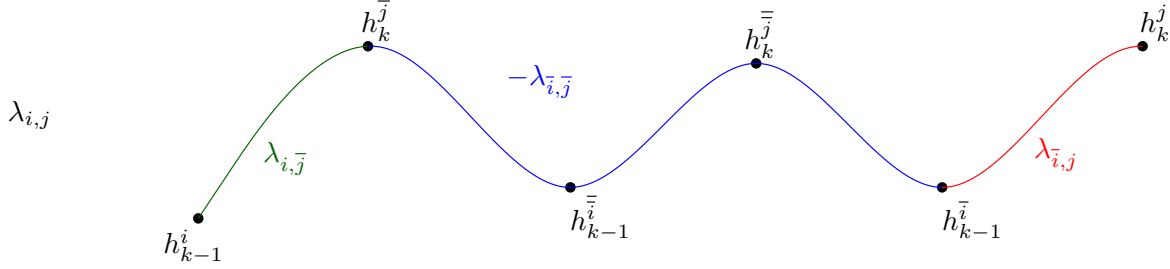


Figura 6.1: Caminho genérico.

O **comprimento** de $\gamma_{i,j} = [\gamma_{\bar{i},\bar{j}}, -\gamma_{\bar{i},\bar{j}}, \gamma_{\bar{i},\bar{\bar{j}}}]$ é definido como $\ell(\gamma_{i,j}) = \ell(\gamma_{\bar{i},\bar{j}}) + \ell(\gamma_{\bar{i},\bar{\bar{j}}}) + \ell(\gamma_{\bar{i},\bar{j}})$.

O próximo lema nos mostra que certas colunas não precisam ser consideradas nas mudanças de base do Método da Varredura.

Lema 6.1. *Seja $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ um pivô mudança de base. No Método da Varredura, a escolha das colunas associadas a $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$ que anularão a entrada $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ na próxima matriz Δ^{r+1} não precisa levar em consideração as colunas correspondente a uma cadeia cujo bordo esteja acima da $(p-r+1)$ -ésima linha. Isto é, se existe uma combinação linear do Método envolvendo uma coluna cujo bordo está acima da $(p-r+1)$ -ésima linha então existe uma outra combinação linear que não envolve tal coluna e que pode ser escolhida.*

Demonstração: Como temos que anular o pivô mudança de base $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$, na próxima matriz Δ^{r+1} , com uma combinação linear das colunas à esquerda da coluna $p+1$ na matriz Δ^r , então não precisamos considerar as colunas correspondente a uma cadeia cujo bordo esteja acima da $(p-r+1)$ -ésima linha, já que as entradas na $(p-r+1)$ -ésima linha dessas colunas são nulas.

O que falta demonstrar é que o módulo $E_{p,k-p}^{r+1}$ não se altera ao mudarmos a combinação linear para outra combinação linear que não envolve colunas correspondentes a cadeias cujos bordos estejam acima da $(p-r+1)$ -ésima linha.

De fato,

$$E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{Z_{p,k-p}^{r+1}}{Z_{p-1,k-(p-1)}^r + \partial Z_{p+r,(k+1)-(p+r)}^r},$$

onde

$$Z_{p,k-p}^{r+1} = \mathbb{Z}[\mu^{(p+1),r+1} \sigma_k^{(p+1),r+1}, \mu^{(p),r} \sigma_k^{(p),r}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p+\kappa}],$$

$$Z_{p-1,k-p+1}^r = \mathbb{Z}[\mu^{(p),r} \sigma_k^{(p),r}, \mu^{(p-1),r-1} \sigma_k^{(p-1),r-1}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p+\kappa}].$$

Usando a hipótese, segue pela Proposição 5.1 que

$$\sigma_k^{(p+1),r+1} = u \mu^{(p+1),r} \sigma_k^{(p+1),r} + b_p \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1} + \dots + b_\kappa \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}. \quad (6.1)$$

Suponhamos que para algum $\xi \in \{1, 2, \dots, p+1-\kappa\}$, $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$ seja tal que $\partial \sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$ é zero na $(p-r+1)$ -ésima linha e $\mu^{(p+1-\xi),r-\xi} = 1$, isto é, $\Delta_{s,p+1-\xi}^{r-\xi} = 0$ para todo $s \geq p+r-1$. Como $\mu^{(p+1-\xi),r-\xi} = 1$ então $\partial \sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$ está acima da $(p-r)$ -ésima linha, logo $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi} = \sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi+1} \in Z_{p-1,k-(p-1)}^r$ pela definição de $Z_{p-1,k-(p-1)}^r$, a Figura 6.2 nos ajuda a visualizar melhor esse fato.

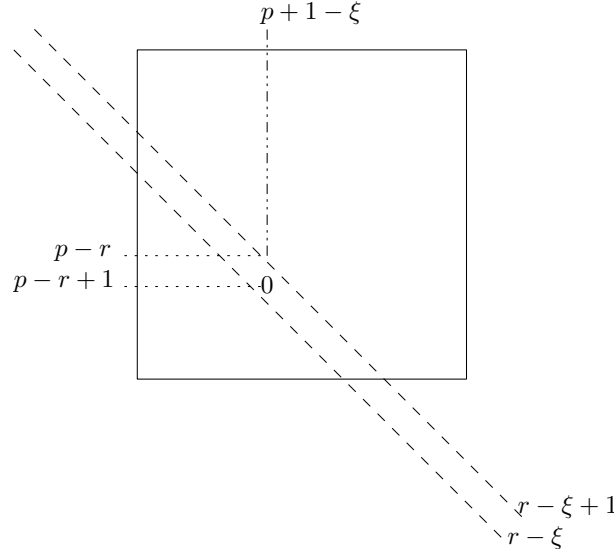


Figura 6.2: $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi} = \sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi+1}$

Usando o fato de que $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi} = \sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi+1}$ temos

$$E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{\mathbb{Z}[\mu^{(p+1),r+1} \sigma_k^{(p+1),r+1}, \dots, \sigma_k^{(p+1-\xi),r+1-\xi}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p+\kappa}]}{\mathbb{Z}[\mu^{(p),r} \sigma_k^{(p),r}, \dots, \sigma_k^{(p+1-\xi),r+1-\xi}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}] + \partial Z_{p+r,(k+1)-(p+r)}^r}$$

$$= \frac{\mathbb{Z}[\mu^{(p+1),r+1} \sigma_k^{(p+1),r+1} - b_{p+1-\xi} \sigma_k^{(p+1-\xi),r+1-\xi}, \dots, \sigma_k^{(p+1-\xi),r+1-\xi}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p+\kappa}]}{\mathbb{Z}[\mu^{(p),r} \sigma_k^{(p),r}, \dots, \sigma_k^{(p+1-\xi),r+1-\xi}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}] + \partial Z_{p+r,(k+1)-(p+r)}^r}$$

$$= \frac{\mathbb{Z}[\mu^{(p+1),r+1}\sigma_k^{(p+1),r+1} - b_{p+1-\xi}\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}, \dots, \sigma_k^{(p+1-\xi),r+1-\xi}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p+\kappa}\sigma_k^{(\kappa),r-p+\kappa}]}{\mathbb{Z}[\mu^{(p),r}\sigma_k^{(p),r}, \dots, \sigma_k^{(p+1-\xi),r+1-\xi}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa}\sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}] + \partial Z_{p+r,(k+1)-(p+r)}^r}.$$

Relembre que $b_{p+1-\xi}$ é o coeficiente de $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$ na combinação linear (6.1). Da última equação concluímos que $E_{p,k-p}^{r+1}$ não é alterado se excluirmos $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$ da combinação linear (6.1). Podemos fazer isso para todos os $\xi \in \{1, 2, \dots, p+1-\kappa\}$ tais que $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$ com $\partial\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$ seja zero na $(p-r+1)$ -ésima linha e $\mu^{(p+1-\xi),r-\xi} = 1$. Portanto, temos o resultado desejado. $\square$

Seja $\Delta^0 = \Delta$, mostramos que o Método da Varredura produz uma sequência de matrizes Δ^r , onde a matriz Δ^{r+1} é obtida a partir de uma mudança de base em Δ^r , ou seja, existe uma sequência de matrizes mudança de base $M_0, \dots, M_{m-1}$ tais que

$$\Delta^{r+1} = M_r^{-1}\Delta^r M_r = M_r^{-1}M_{r-1}^{-1} \dots M_0^{-1}\Delta M_0 \dots M_{r-1}M_r,$$

para $r = 0, \dots, m-1$.

Para cada $r \in \{0, \dots, m-1\}$, definimos $\overline{\Delta}^r$ como sendo a matriz $\Delta M_0 \dots M_{r-1}M_r$. Observe que a matriz M_s leva a base $\{\sigma^{(\cdot),s}\}$ na base $\{\sigma^{(\cdot),s-1}\}$ e Δ^0 está na base $\{h^{(\cdot)}\}$, ou seja, a matriz $\overline{\Delta}^r$ leva a base $\{\sigma^{(\cdot),s}\}$ na base $\{h^{(\cdot)}\}$. Logo, se κ^* é a primeira h_{k-1} coluna e $\tilde{\kappa}$ é a última h_{k-1} coluna, então escrevemos

$$\partial\sigma^{(j),r} = \overline{\Delta}_{\tilde{\kappa},j}^r h_{k-1}^{(\tilde{\kappa})} + \dots + \overline{\Delta}_{\kappa^*,j}^r h_{k-1}^{(\kappa^*)},$$

onde $\overline{\Delta}_{s,j}^r \in \mathbb{Z}$ para $s = \kappa^*, \dots, \tilde{\kappa}$.

Proposição 6.1. $\overline{\Delta}_{s,j}^r = 0$ para todo $s > i$ se, e somente se, $\Delta_{s,j}^r = 0$ para todo $s > i$.

Demonstração: Temos que

$$\partial\sigma^{(j),r} = \overline{\Delta}_{\tilde{\kappa},j}^r h_{k-1}^{(\tilde{\kappa})} + \dots + \overline{\Delta}_{\kappa^*,j}^r h_{k-1}^{(\kappa^*)} \quad (6.2)$$

e

$$\partial\sigma^{(j),r} = \Delta_{\tilde{\kappa},j}^r \sigma_{k-1}^{(\tilde{\kappa}),r} + \dots + \Delta_{\kappa^*,j}^r \sigma_{k-1}^{(\kappa^*),r}. \quad (6.3)$$

Suponha que $\overline{\Delta}_{s,j}^r = 0$ para todo $s > i$, isto é,

$$\partial\sigma^{(j),r} = \overline{\Delta}_{i,j}^r h_{k-1}^{(i)} + \dots + \overline{\Delta}_{\kappa^*,j}^r h_{k-1}^{(\kappa^*)}. \quad (6.4)$$

Os coeficientes de $h_{k-1}^{(s)}$ são sempre não nulos em $\sigma_{k-1}^{(s),r} = \sum_{\ell=\kappa^*}^s c_\ell^{s,r} h_{k-1}^{(\ell)}$, ver equação (3.1), temos que ao substituir $\sigma_{k-1}^{(s),r}$ em (6.3) e usar o fato de que as equações (6.3) e (6.4) são iguais e que $h_{k-1}^{(s)} \neq 0$, segue que $\Delta_{s,j}^r = 0$. Ora, esse resultado vale para todo $s > i$, portanto

$$\partial \sigma^{(j),r} = \Delta_{i,j}^r \sigma_{k-1}^{(i),r} + \cdots + \Delta_{\kappa^*,j}^r \sigma_{k-1}^{(\kappa^*),r}.$$

A recíproca é análoga. $\square$

Pela proposição anterior, segue que $\Delta_{p-r,p}^r$ é um pivô se, e somente se, $\overline{\Delta}_{p-r,p}^r \neq 0$ e $\overline{\Delta}_{s,p}^r = 0$ para todo $s > p - r$.

Note que $\overline{\Delta}^r$ não tem necessariamente quadrado zero. No entanto, essa matriz tem propriedades que nos auxiliarão para demonstrar o seguinte lema e o teorema desse capítulo.

Lema 6.2. *Seja Δ uma matriz de conexão. Aplicando o Método da Varredura em Δ , seja Δ^r a matriz obtida depois que a r -ésima diagonal foi varrida. Se $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^r \neq 0$ para algum ξ , então existe um caminho $\gamma_{j-\xi,j} = [\gamma_{j-\bar{r},j}, -\gamma_{j-\bar{r},j-\xi}, \gamma_{j-\xi,j-\xi}]$ para algum $\bar{r}$ e ξ menor do que r no fluxo φ formado por órbitas conectantes unindo a singularidade $h_k^{(j)}$ à singularidade $h_{k-1}^{(j-\xi)}$.*

Demonstração: Usaremos indução dupla em r e ξ .

- **Base da indução dupla ($r = 1$ e ξ qualquer).**

Como $\sigma_k^{(j),1} = h_k^{(j)}$ então $\overline{\Delta}_{s,j}^1 = \Delta_{s,j}$, para $s = \kappa^*, \dots, \tilde{\kappa}$ onde κ^* e $\tilde{\kappa}$ são a primeira e a última coluna associadas a uma $(k-1)$ -cadeia, respectivamente. Logo, pela propriedade da matriz de conexão, segue que todas as entradas não nulas $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^1$ para todo ξ representam a existência de órbitas conectantes entre $h_k^{(j)}$ e $h_{k-1}^{(j-\xi)}$. Para cada ξ , temos um caminho no fluxo φ que é uma órbita conectante.

- **Base da indução dupla (ξ a primeira diagonal que intercepta Δ_k e r qualquer).**

Suponhamos agora que ξ seja a primeira diagonal que intercepta Δ_k e $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^r \neq 0$. Então qualquer que seja r , $\overline{\Delta}_{s,j}^r = 0$ para todo $s > j - \xi$ e $\overline{\Delta}_{j-\xi,\ell}^r = 0$ para $\ell < j$. Observe a Figura 6.3. Como $\overline{\Delta}_{j-\xi,\ell}^r = 0$ para todo $\ell < j$ então a j -ésima coluna não sofreu nenhuma mudança de base e assim $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^r = \overline{\Delta}_{j-\xi,j}^1$.

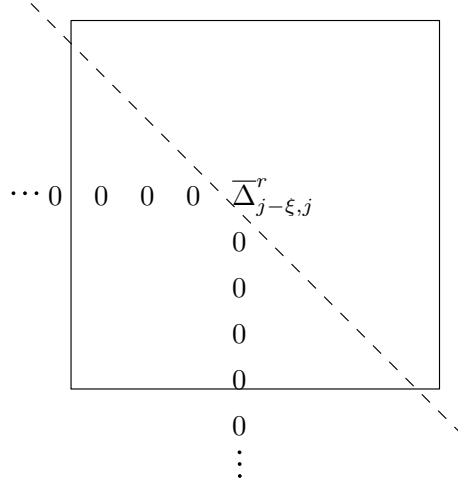


Figura 6.3: $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^r$ na ξ diagonal auxiliar

Como $\overline{\Delta}_{s,j}^r = 0$, para todo $s > j - \xi$ então $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^r = c_{j-\xi}^{j-\xi,r} \Delta_{j-\xi,j}^r$ para todo r . De fato, usando a Proposição 6.1 e $\overline{\Delta}_{s,j}^r = 0$ para todo $s > j - \xi$, segue que $\Delta_{s,j}^r = 0$ para todo $s > j - \xi$. Assim as equações (6.2) e (6.3) ficam

$$\partial \sigma^{(j),r} = \overline{\Delta}_{j-\xi,j}^r h_{k-1}^{(j-\xi)} + \cdots + \overline{\Delta}_{\kappa^*,j}^r h_{k-1}^{(\kappa^*)} \quad (6.5)$$

e

$$\partial \sigma^{(j),r} = \Delta_{j-\xi,j}^r \sigma_{k-1}^{(j-\xi),r} + \cdots + \Delta_{\kappa^*,j}^r \sigma_{k-1}^{(\kappa^*),r}. \quad (6.6)$$

Como $\sigma_{k-1}^{(s),r} = \sum_{\ell=\kappa^*}^s c_{\ell}^{s,r} h_{k-1}^{(\ell)}$ então $\sigma_{k-1}^{(j-\xi),r}$ é o único que tem o termo $h_{k-1}^{j-\xi}$, então substituindo $\sigma_{k-1}^{(j-\xi),r} = \sum_{\ell=\kappa^*}^{j-\xi} c_{\ell}^{j-\xi,r} h_{k-1}^{(\ell)}$ em (6.6) e igualando (6.5) com (6.6), temos $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^r = c_{j-\xi}^{j-\xi,r} \Delta_{j-\xi,j}^r$ para todo r .

Logo $\Delta_{j-\xi,j} \neq 0$ e temos um caminho no fluxo φ que é uma órbita conectante.

- **Passo indutivo (supor que o Lema é válido para todo $r' < r$ e $\xi' < \xi$ então vale para r e ξ).**

Suponha que o lema vale para todo $r' < r$ e $\xi' < \xi$ e seja $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^r \neq 0$. Se existe uma órbita conectante entre $h_k^{(j)}$ e $h_{k-1}^{(j-\xi)}$ então nada precisa ser mostrado. Em particular, esse é o caso quando $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^1 \neq 0$, pois $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^1 = \Delta_{j-\xi,j}$ e, neste caso existe uma órbita conectante entre $h_k^{(j)}$ e $h_{k-1}^{(j-\xi)}$. Assim, suponhamos que $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^1 = 0$ e que não existem órbitas conectantes entre $h_k^{(j)}$ e $h_{k-1}^{(j-\xi)}$. Mostremos que se $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^r \neq 0$, então existe um caminho de órbitas conectantes unindo tais singularidades.

Como $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^r \neq 0$ e $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^1 = 0$ então existe $\bar{r} < r$, $\bar{r} < \xi$, tal que $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^{\bar{r}} = 0$ e $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^{\bar{r}+1} \neq 0$, isto é, $\sigma_k^{(j),\bar{r}} \neq \sigma_k^{(j),\bar{r}+1}$. Note que $\bar{r}$ não precisa ser único. No caso de existir mais de um elemento com a mesma propriedade, podemos escolher qualquer um. De fato, a escolha de $\bar{r}$ é importante quando tratamos da minimização do comprimento do caminho.

O Método da Varredura afirma que uma mudança de base somente ocorre na j -ésima coluna de uma matriz quando um pivô mudança de base está presente na mesma. Neste caso, a mudança acontece precisamente quando o Método da Varredura passa por uma diagonal como $\bar{r}$ em $\Delta^{\bar{r}}$. Assim, existe um pivô mudança de base na j -ésima coluna e na r -ésima diagonal auxiliar de $\Delta^{\bar{r}}$. Este pivô mudança de base é $\Delta_{j-\bar{r},j}^{\bar{r}}$ e está na $(j - \bar{r})$ -ésima linha de $\Delta^{\bar{r}}$. Pela Proposição 6.1, $\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j}^{\bar{r}} \neq 0$ e tem uma coluna de zeros abaixo, ou seja, $\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j}^{\bar{r}} = c_{j-\bar{r}}^{j-\bar{r},\bar{r}} \Delta_{j-\bar{r},j}^{\bar{r}} \neq 0$.

Pelo Lema 5.1,

$$\partial \sigma_k^{(j),\bar{r}+1} = u \mu^{(j),\bar{r}} \partial \sigma_k^{(j),\bar{r}} + b_{j-1} \mu^{(j-1),\bar{r}-1} \partial \sigma_k^{(j-1),\bar{r}-1} + \dots + b_{\kappa} \mu^{(\kappa),\bar{r}-j+\kappa} \partial \sigma_k^{(\kappa),\bar{r}-j+\kappa}. \quad (6.7)$$

Igualando os coeficientes de $h_{k-1}^{(j-\bar{r})}$ em ambos os lados da equação (6.7) (ou seja, restringindo-a a $(j - \bar{r})$ -ésima linha de $\overline{\Delta}$) obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \overline{\Delta}_{j-\bar{r},j}^{\bar{r}+1} &= u \mu^{(j),\bar{r}} \overline{\Delta}_{j-\bar{r},j}^{\bar{r}} + b_{j-1} \mu^{(j-1),\bar{r}-1} \overline{\Delta}_{j-\bar{r},j-1}^{\bar{r}-1} + \dots \\ &\dots + \mu^{(j-\zeta),\bar{r}-\zeta} b_{j-\zeta} \overline{\Delta}_{j-\bar{r},j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} + \dots + b_{\kappa} \mu^{(\kappa),\bar{r}-j+\kappa} \overline{\Delta}_{j-\bar{r},\kappa}^{\bar{r}-j+\kappa}. \end{aligned}$$

Lembremos que se um pivô primário de uma coluna correspondente a uma cadeia $\sigma^{(j-\zeta),\bar{r}-\zeta}$ está abaixo da $(j - \bar{r})$ -ésima linha então $\mu^{(j-\zeta),\bar{r}-\zeta} = 0$. Ou seja, $\mu^{(j-\zeta),\bar{r}-\zeta} = 1$ somente quando na $(j - \bar{r})$ -ésima linha de $\Delta^{\bar{r}-\zeta}$ existe um pivô primário, um pivô mudança de base ou uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo.

Pelo Lema 6.1, podemos assumir sem perda de generalidade que em uma mudança de base, colunas com entradas nulas na $(j - \bar{r})$ -ésima linha de $\Delta^{\bar{r}-\zeta}$ e zeros abaixo não são consideradas. Logo, não há necessidade de considerarmos o caso em que $\Delta_{j-\bar{r},j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta}$ é nulo com uma coluna de zeros abaixo, também não convém considerar o caso em que $b_{j-\zeta} = 0$. Assim, o caso que nos interessa é quando $\mu^{(j-\zeta),\bar{r}-\zeta} = 1$, $b_{j-\zeta} \neq 0$ e $\Delta_{j-\bar{r},j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta}$ é um pivô primário ou um pivô mudança de base. Tal caso existe, pois temos uma combinação linear não trivial que anule $\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j}^{\bar{r}+1}$, já que $\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j}^{\bar{r}}$ é um pivô mudança de

base.

Pela Proposição 6.1, temos que $\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} \neq 0$ e a $j-\zeta$ -ésima coluna tem de zeros abaixo da entrada $\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta}$, ou seja, $\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} = c_{j-\bar{r}}^{j-\bar{r},\bar{r}-\zeta} \Delta_{j-\bar{r},j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} \neq 0$.

Igualando os coeficientes de $h_{k-1}^{(j-\xi)}$ em ambos os lados da equação (6.7) (ou seja, restringindo a equação à $(j-\xi)$ -ésima linha de $\overline{\Delta}$) temos que

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}_{j-\xi,j}^{\bar{r}+1} &= u\mu^{(j),\bar{r}}\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^{\bar{r}} + b_{j-1}\mu^{(j-1),\bar{r}-1}\overline{\Delta}_{j-\xi,j-1}^{\bar{r}-1} + \cdots \\ &\cdots + \mu^{(j-\zeta),\bar{r}-\zeta}b_{j-\zeta}\overline{\Delta}_{j-\xi,j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} + \cdots + b_{\kappa}\mu^{(\kappa),\bar{r}-j+\kappa}\overline{\Delta}_{j-\xi,\kappa}^{\bar{r}-j+\kappa}. \end{aligned}$$

Como $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^{\bar{r}+1} \neq 0$ e $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^{\bar{r}} = 0$, então existe $\zeta \in \{1, j-\kappa\}$ tal que $\mu^{(j-\zeta),\bar{r}-\zeta} = 1$, $b_{j-\zeta} \neq 0$ e $\overline{\Delta}_{j-\xi,j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} \neq 0$.

- Como $\overline{\Delta}_{j-\xi,j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} \neq 0$ é tal que $\xi - \zeta < \xi$ e $\bar{r} - \zeta < r$ então, por hipótese de indução, existe um caminho $\gamma_{j-\xi,j-\zeta}$ de órbitas conectantes unindo $h_k^{(j-\zeta)}$ a $h_{k-1}^{(j-\xi)}$;
- Como $\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} \neq 0$ é tal que $\bar{r} - \zeta < \xi$ e $\bar{r} - \zeta < r$ então, por hipótese de indução, existe um caminho $\gamma_{j-\bar{r},j-\zeta}$ de órbitas conectantes unindo $h_k^{(j-\zeta)}$ a $h_{k-1}^{(j-\bar{r})}$;
- Como $\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j}^{\bar{r}} \neq 0$ é tal que $\bar{r} < \xi$ e $\bar{r} < r$ então, por hipótese de indução, existe um caminho $\gamma_{j-\bar{r},j}$ de órbitas conectantes unindo $h_k^{(j)}$ a $h_{k-1}^{(j-\bar{r})}$.

Portanto $\gamma_{j-\xi,j} = [\gamma_{j-\bar{r},j}, -\gamma_{j-\bar{r},j-\zeta}, \gamma_{j-\xi,j-\zeta}]$ é um caminho unindo $h_k^{(j)}$ a $h_{k-1}^{(j-\xi)}$. Assim foi provado que $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^{\bar{r}} \neq 0$ corresponde a um caminho no fluxo $\square$

Com o auxílio do lema anterior podemos rapidamente provar o teorema principal deste capítulo.

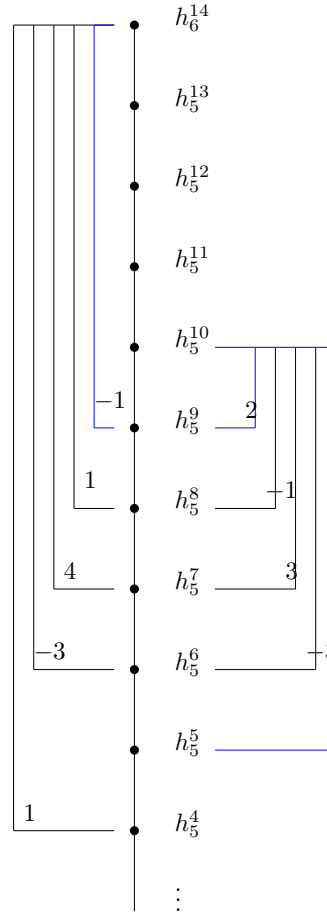
Teorema 6.1. *Sejam φ um fluxo gradiente de uma função de Morse f e Δ a matriz de conexão sobre $\mathbb{Z}$ da decomposição de Morse tal que cada conjunto de Morse é uma singularidade não degenerada. Seja (E^r, d^r) uma sequência espectral induzida pelo complexo de cadeias de Morse-Witten. Dada uma diferencial não nula $d^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$ da sequência espectral, existe um caminho de órbitas conectantes φ unindo a singularidade $h_k^{(p+1)}$ que gera $E_{p,q}^r$ à singularidade $h_{k-1}^{(p-r+1)}$ que gera $E_{p-r,q+r-1}^r$.*

Demonstração: Seja $d_p^r \neq 0$, pelo Teorema 5.1 a diferencial $d_p^r \neq 0$ é induzida por multiplicação pela entrada $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ (um pivô primário ou um pivô mudança de base). Assim,

pela Proposição 6.1, temos que $\overline{\Delta}_{p-r+1,p+1}^r \neq 0$ e todas as entradas na $(p+1)$ -ésima coluna abaixo da $(p-r+1)$ -ésima linha são nulas, ou seja, $\overline{\Delta}_{p-r+1,p+1}^r = c_{p-r+1}^{p-r+1,r} \Delta_{p-r+1,p+1}^r \neq 0$. Pelo Lema 6.2, existe um caminho no fluxo formado por órbitas conectantes unindo a singularidade $h_k^{(p+1)}$ a singularidade $h_{k-1}^{(p-r+1)}$.

□

Exemplo 6.1.


 Figura 6.4: Caminho $\gamma_{5,13}$.

Considere o Exemplo 7.3 do Apêndice B. Note que a entrada $\Delta_{5,13}^9 = 3$ é um pivô primário em Δ^9 que tinha sua entrada original em Δ^0 igual a zero, isto é, $\Delta_{5,13}^0 = 0$. Portanto, não há necessariamente uma órbita conectante entre $h_4^{(13)}$ e $h_3^{(5)}$. No entanto, o Teorema 6.1 garante a existência de um caminho de órbitas conectantes entre tais singularidades. Neste exemplo iremos construir tal caminho.

Note que

$$\begin{aligned}\partial\sigma_4^{(13),4} &= -\frac{1}{2}h_3^{(4)} - \frac{3}{2}(2h_3^{(5)} - 3h_3^{(4)}) - 3(h_3^{(4)} - h_3^{(5)} + h_3^{(6)}) + 4h_3^{(7)} + h_3^{(8)} - h_3^{(9)} \\ &= h_3^{(4)} - 3h_3^{(6)} + 4h_3^{(7)} + h_3^{(8)} - h_3^{(9)}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\partial\sigma_4^{(13),5} &= 2h_3^{(5)} - 3h_3^{(4)} + h_3^{(4)} - h_3^{(5)} + h_3^{(6)} - h_3^{(7)} \\ &= -2h_3^{(4)} + h_3^{(5)} + h_3^{(6)} - h_3^{(7)}.\end{aligned}$$

Logo $\overline{\Delta}_{5,13}^4 = 0$ e $\overline{\Delta}_{5,13}^5 = 1 \neq 0$. Portanto, consideremos $\bar{r} = 4$.

Calculando as entradas da prova do Lema 6.2 temos

$$\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j}^{\bar{r}} = \overline{\Delta}_{13-4,13}^4 = \overline{\Delta}_{9,13}^4 = -1 \neq 0,$$

$$\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} = \overline{\Delta}_{13-4,13-3}^{4-3} = \overline{\Delta}_{9,10}^1 = 2 \neq 0,$$

$$\overline{\Delta}_{j-\xi,j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} = \overline{\Delta}_{13-8,13-3}^{4-3} = \overline{\Delta}_{5,10}^1 = 1 \neq 0.$$

Pelo Lema 6.2, um caminho entre $h_4^{(13)}$ e $h_3^{(5)}$ é $\gamma_{5,13} = [\gamma_{9,13}, -\gamma_{9,10}, \gamma_{5,10}]$. Veja Figura 6.4.

O comprimento de $\gamma_{5,13}$ é $\ell(\gamma_{5,13}) = \ell(\gamma_{9,13}) + \ell(\gamma_{9,10}) + \ell(\gamma_{5,10}) = 4 + 1 + 5 = 10$. Para mais exemplos ver [CdRS]

Capítulo 7

Complexo de Morse Estendido

Neste capítulo, para simplificar a notação, iremos denotar o espaço moduli $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ por $\mathcal{M}_y^x$.

A construção do Complexo de Morse Estendido requer algumas definições e algumas propriedades de topologia algébrica, assim começaremos esse capítulo definindo espaço dos laços e espaço dos laços de Moore.

Definição 7.1. *Seja Y um espaço topológico. O **espaços dos laços do espaço Y** (com base em y_0), denotado por $\Omega'Y$ ou por $\Omega'[(Y, y_0)]$, é o espaço das funções contínuas*

$$\begin{aligned}\omega : [0, 1] &\rightarrow Y \\ \partial[0, 1] &\rightarrow y_0\end{aligned}$$

com a topologia compacto-aberto¹.

O espaço dos laços de Y pode ser visto como um espaço pontuado com base $\omega_0 : [0, 1] \rightarrow \{y_0\} \subseteq Y$. Temos a seguinte operação no espaço dos laços, chamada de **concatenação de laços**;

$$\begin{aligned}\mu' : \Omega'Y \times \Omega'Y &\rightarrow \Omega'Y \\ (\omega, \omega') &\mapsto \mu'(\omega, \omega'),\end{aligned}$$

onde

$$\mu'(\omega, \omega')(t) = \begin{cases} \omega(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \omega'(2t - 1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

¹topologia gerada pela subbase $\{< K, U >\}$, onde K é compacto em $[0, 1]$, A um aberto em Y e $\{< K, U >\} = \{\omega : [0, 1] \rightarrow Y \text{ contínua tal que } \omega(K) \subseteq A\}$.

O **espaço dos laços de Moore de Y** , denotado por ΩY , possui uma definição análoga a definição do espaço dos laços de Y com a diferença que qualquer laço ω está parametrizado pelo intervalo $[0, a]$, $a \in [0, \infty)$, isto é, diferentes laços podem ter parametrizações por intervalos diferentes. Observe que ambos espaços possuem o mesmo tipo de homotopia. A operação **concatenação de laços** no espaço dos laços de Moore é análoga a definição de concatenação vista anteriormente, com a diferença de que não precisamos reparametrizar os laços

$$\begin{aligned}\mu : \Omega Y \times \Omega Y &\rightarrow \Omega Y \\ (\omega, \omega') &\mapsto \mu(\omega, \omega'),\end{aligned}$$

onde $\omega : [0, a] \rightarrow Y$, $\omega' : [0, b] \rightarrow Y$

$$\mu(\omega, \omega')(t) = \begin{cases} \omega(t), & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ \omega'(t - a), & \text{se } a \leq t \leq a + b. \end{cases}$$

A vantagem de usar o espaço dos laços de Moore reside no fato de que a concatenação de laços é uma operação associativa. Porém, μ' a operação no espaço dos laços $\Omega'Y$ não é associativa, como podemos observar no seguinte exemplo:

Exemplo 7.1. *Sejam $\omega : [0, 1] \rightarrow Y$, $\alpha : [0, 1] \rightarrow Y$, $\beta : [0, 1] \rightarrow Y$ e μ' a operação no espaço dos laços, temos*

$$\mu(\omega, \mu(\alpha, \beta))(3/4) = \mu(\alpha, \beta)(2(3/4) - 1) = \alpha(2(1/2)) = \alpha(1),$$

$$\mu(\mu(\omega, \alpha), \beta)(3/4) = \beta(2(3/4) - 1) = \beta(1/2) \neq \alpha(1).$$

Já no caso Moore temos a associatividade que segue diretamente da definição. Por causa dessa propriedade usaremos somente o espaço de laços de Moore de Y , ΩY e μ a sua concatenação de laços.

Agora, vejamos que os elementos de $\mathcal{M}_y^x$ podem ser vistos como laços em M . Com efeito, seja γ um caminho simples (sem auto-intersecção) que liga todos os pontos críticos de f e contraia esse caminho a um ponto. Deste modo, obtemos um espaço quociente $\widehat{M}$, o qual tem o mesmo tipo de homotopia de M , veja [H].

A propriedade 7.1 de $\mathcal{M}_y^x$ é devido a compactificação de Gromov do espaço moduli, ver referência [MS] e [K]. Tal compactificação coincide com a que foi definida no Capítulo 1, ver

também [BaC].

$$\partial \overline{\mathcal{M}}_y^x = \bigcup_{z \in \text{Crit}(f)} \overline{\mathcal{M}}_z^x \times \overline{\mathcal{M}}_y^z. \quad (7.1)$$

Para simplificar a notação da fórmula 7.1, z percorre todos os pontos críticos, porém quando $\overline{\mathcal{M}}_z^x$ ou $\overline{\mathcal{M}}_y^z$ ou ambos não estão definidos, o produto $\overline{\mathcal{M}}_z^x \times \overline{\mathcal{M}}_y^z$ não entra na união.

Denotaremos por ΩM o espaço dos laços de Moore da variedade quociente $\widehat{M}$.

Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma_y^x : \mathcal{M}_y^x &\rightarrow C_y^x \\ u &\mapsto \gamma_y^x(u), \end{aligned}$$

onde

$$C_y^x = C^0([0, f(x) - f(y)], \{(W^s(x) \cap W^u(y)) \cup \{x\} \cup \{y\}\})$$

e

$$\gamma_y^x(u) : [0, f(x) - f(y)] \rightarrow M$$

é tal que

$$\gamma_y^x(u)(t) = z \Leftrightarrow t = f(x) - f(z) \text{ e } \mathcal{O}(u) \cap \{\gamma_y^x(u)([0, f(x) - f(y)])\} = \mathcal{O}(u).$$

Note que $\gamma_y^x(u)$ é um caminho que liga x a y passando pela órbita de u , $\mathcal{O}(u)$. A função $\gamma_y^x(u)$ é contínua, pois é uma reparametrização da órbita $\mathcal{O}(u)$ com o acréscimo dos pontos limites da órbita, x e y . Usando a topologia compacto-aberto em C_y^x temos que a aplicação γ_y^x é contínua, assim usando a compactificação de $\mathcal{M}_y^x$ via órbitas quebradas (Capítulo 1), podemos estender a aplicação γ_y^x a uma aplicação contínua

$$\overline{\gamma}_y^x : \overline{\mathcal{M}}_y^x \rightarrow C_y^x.$$

Observe que podemos definir a aplicação concatenação de caminhos de forma análoga à concatenação de laços

$$\begin{aligned} \# : C_y^x \times C_z^y &\rightarrow C_z^x \\ (g, h) &\mapsto g\#h, \end{aligned}$$

onde

$$g \# h(t) = \begin{cases} g(t), & \text{se } 0 \leq t \leq f(x) - f(y) \\ h(t - f(x) - f(y)), & \text{se } f(x) - f(y) \leq t \leq f(x) - f(z). \end{cases}$$

Veja que $\#$ também é associativo.

Como uma consequência imediata da fórmula 7.1, para cada elemento

$$u(u_1, u_2, \dots, u_k) \in \mathcal{M}_{z_1}^x \times \mathcal{M}_{z_2}^{z_1} \times \dots \times \mathcal{M}_y^{z_{k-1}} \subseteq \partial \overline{\mathcal{M}}_y^x$$

temos que

$$\overline{\gamma}_y^x(u) = \overline{\gamma}_{z_1}^x(u_1) \# \overline{\gamma}_{z_2}^{z_1}(u_2) \# \dots \# \overline{\gamma}_y^{z_{k-1}}(u_k).$$

Uma outra propriedade da aplicação $\#$ é a sua relação com a concatenação de laços μ através da aplicação quociente q , que leva o caminho simples γ a um ponto:

$$q \circ (\overline{\gamma}_z^x(u) \# \overline{\gamma}_y^z(v)) = \mu(q \circ \overline{\gamma}_z^x(u), q \circ \overline{\gamma}_y^z(v)), \quad (7.2)$$

onde $u \in \overline{\mathcal{M}}_z^x$, $v \in \overline{\mathcal{M}}_y^z$. De fato, essa propriedade segue diretamente das definições de $\#$, μ e q , a Figura 7.1 ilustra essa propriedade.

Considere a função

$$q_y^x : C_y^x \rightarrow \Omega M, \text{ onde } q_y^x(h) = q \circ h.$$

Observe que $q \circ h \in \Omega M$, pois h é um caminho que liga x a y e q leva o conjunto $\{x, y\}$ a um ponto. Logo, podemos fazer a seguinte composição

$$\begin{array}{ccccc} j_y^x : \overline{\mathcal{M}}_y^x & \xrightarrow{\overline{\gamma}_y^x} & C_y^x & \xrightarrow{q_y^x} & \Omega M \\ u & \longmapsto & \gamma_y^x(u) & \longmapsto & q \circ \gamma_y^x(u). \end{array}$$

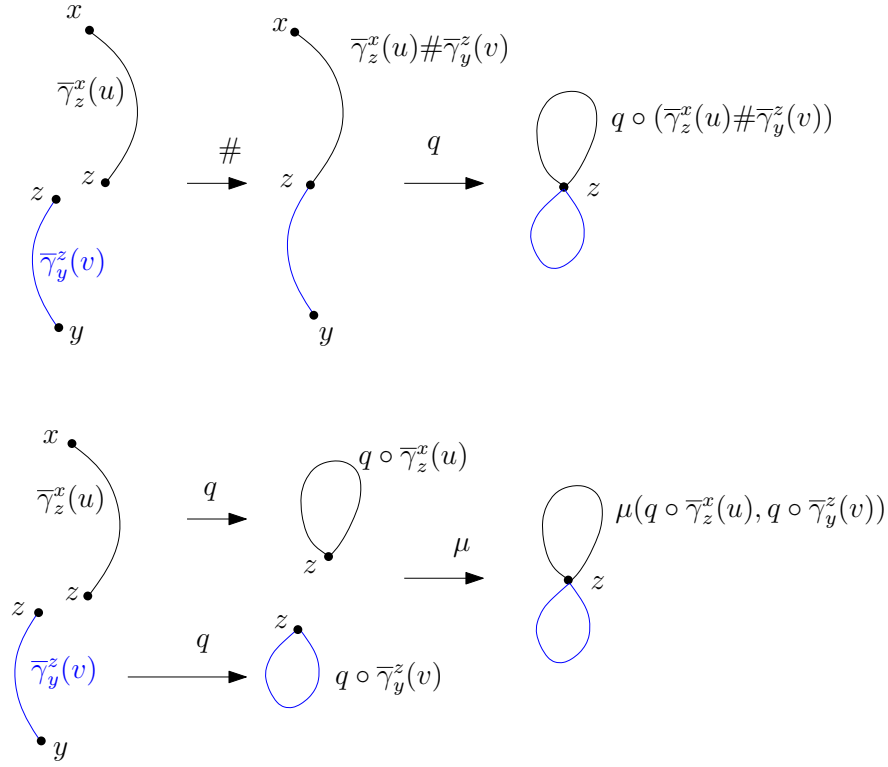
Usando a propriedade 7.2 temos

$$j_y^x(u, v) = \mu(j_z^x(u), j_y^z(v)), \text{ onde } (u, v) \in \overline{\mathcal{M}}_z^x \times \overline{\mathcal{M}}_y^z \subseteq \partial \overline{\mathcal{M}}_y^x.$$

Com efeito,

$$j_y^x(u, v) = q \circ \overline{\gamma}_y^x((u, v)) = q \circ (\overline{\gamma}_z^x(u) \# \overline{\gamma}_y^z(v)) = \mu(q \circ \overline{\gamma}_z^x(u), q \circ \overline{\gamma}_y^z(v)) = \mu(j_z^x(u), j_y^z(v)).$$

Agora, iremos iniciar a construção do Complexo Estendido de Morse.

Figura 7.1: Relação entre $\#$ e μ

Seja C_* o complexo cubical de M com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$. Usaremos cadeias cubicais (cadeias cujo domínios são cubos unitários, ver referência [Ma]) ao invés de cadeias singulares, pois nesse caso, para dois espaços X e Y , temos a aplicação

$$C_k(X) \otimes C_{k'}(Y) \rightarrow C_{k+k'}(X \times Y)$$

definida por $(\sigma \otimes \sigma')(x, y) = (\sigma(x), \sigma'(y))$.

Para quaisquer pontos críticos x e y com índice de Morse $|x|$ e $|y|$ definimos:

Definição 7.2. Um **sistema de cadeias representadas** para o espaço moduli $\mathcal{M}_y^x$ é a família $\{s_y^x \in C_{|x|-|y|-1}(\overline{\mathcal{M}}_y^x) : x, y \in \text{Crit}(f)\}$ tal que:

i s_y^x representa a classe fundamental em $H_{|x|-|y|-1}(\overline{\mathcal{M}}_y^x, \partial \overline{\mathcal{M}}_y^x)$.

ii $\partial s_y^x = \sum_{y \in \text{Crit}(f)} s_y^x \otimes s_z^y$.

Observação 7.1. Sistema de cadeias representadas do espaço moduli aparece naturalmente quando a compactificação do espaço moduli $\overline{\mathcal{M}}_y^x$ é triangularizada de um modo compatível

com a fórmula 7.1, nesse caso os s_y^x 's podem ser tomados como a soma dos cubos de maiores dimensão de $\overline{\mathcal{M}}_y^x$. Como estamos trabalhando com um fluxo Morse-Smale temos que a variedade $\overline{\mathcal{M}}_y^x$ é suave, logo triangularizada, ou seja, não precisamos mostrar a existência do sistema de cadeias representadas. Já no artigo [BaC] existe a prova da existência, pois Barraud e Cornea trabalham com espaço moduli mais gerais.

Defina $a_y^x \in C_{|x|-|y|-1}(\Omega M)$ por

$$a_y^x = (j_y^x)_*(s_y^x).$$

A seguinte proposição mostra que essa definição estende a definição dos coeficientes operador bordo de Morse-Witten quando $|x| - |y| - 1 = 0$, ou seja, quando x e y são pontos críticos consecutivos.

Proposição 7.1. *O operador bordo de Morse-Witten pode ser visto como*

$$\partial_k \langle x \rangle := \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}(f)} \#(a_y^x) \langle y \rangle,$$

onde $\#(a_y^x)$ é o número de laços da 0-cadeia a_y^x módulo 2.

Demonstração: Primeiramente, observe que o operador bordo de Morse-Witten sobre $\mathbb{Z}_2$ é dado por:

$$\partial_k \langle x \rangle := \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n(x, y) \langle y \rangle,$$

onde $n(x, y)$ é o número de órbitas de x a y módulo 2. Portanto, basta provar que $n(x, y) = \#(a_y^x)$, ou seja, o número de órbitas coincide com o número de laços da 0-cadeia a_y^x .

De fato, pela Proposição 1.3, temos que $s_y^x \in C_0(\overline{\mathcal{M}}_y^x)$ é uma 0-cadeia com finitos pontos, na verdade, pela Definição 7.2 segue que s_y^x possui a mesma quantidade de pontos que $\overline{\mathcal{M}}_y^x$ possui. Como $a_y^x = (j_y^x)_*(s_y^x)$ então a_y^x é uma 0-cadeia composta de $\#(\overline{\mathcal{M}}_y^x)$ laços, onde $\#(\overline{\mathcal{M}}_y^x)$ é a cardinalidade de $\overline{\mathcal{M}}_y^x$. Portanto

$$\#(a_y^x) = \#(\overline{\mathcal{M}}_y^x) \pmod{2} = n(x, y).$$

□

O Exemplo 7.2 ilustra bem a proposição anterior.

Considere o seguinte produto

$$\cdot : C_k(\Omega M) \otimes C_{k'}(\Omega M) \rightarrow C_{k+k'}(\Omega M \times \Omega M) \xrightarrow{C_*(\mu)} C_{k+k'}(\Omega M),$$

onde μ é a concatenação de laços e $C_*(\mu)$ é a induzida de μ no complexo de cadeias. Esse produto torna $C_*(\Omega M)$ em um anel diferencial². Com efeito, basta usar a definição de ∂ e do produto $\cdot$.

Sabemos calcular ∂a para qualquer $a \in C_*(\Omega M)$ pela definição de ∂ , já no caso ∂a_y^x temos uma fórmula específica, como nos mostra a proposição abaixo.

Proposição 7.2. *Sobre as considerações feitas acima temos*

$$\partial a_y^x = \sum_{z \in \text{Crit}(f)} a_z^x \cdot a_y^z,$$

para todos pontos críticos x e $y \in \text{Crit}(f)$.

Demonstração: Essa proposição segue da construção de a_y^x e da fórmula ∂s_y^x . De fato,

$$\begin{aligned} \partial a_y^x &= \partial(j_y^x)_*(s_y^x) = (j_y^x)_*(\partial s_y^x) = (j_y^x)_*\left(\sum_{z \in \text{Crit}(f)} s_z^x \otimes s_y^z\right) \\ &= \sum_{z \in \text{Crit}(f)} (j_y^x)_*(s_z^x \otimes s_y^z) \\ &= \sum_{z \in \text{Crit}(f)} (q_y^x \circ \bar{\gamma}_y^x)_*(s_z^x \otimes s_y^z). \end{aligned}$$

Usando a definição de $(q_y^x \circ \bar{\gamma}_y^x)_*$ temos que a cadeia $(s_z^x \otimes s_y^z) \in C_r(\overline{\mathcal{M}}_y^x)$ é levada na cadeia $(q \circ \bar{\gamma}_y^x \circ (s_z^x \otimes s_y^z)) \in C_r(\Omega M)$, onde $r = |x| - |z| - 1 + |z| - |y| - 1 = |x| - |y| - 2$, assim considere $t \in [0, 1]^r$, logo

$$\begin{aligned} q \circ \bar{\gamma}_y^x \circ (s_z^x \otimes s_y^z)(t) &= q \circ \bar{\gamma}_y^x((u, v)) = q \circ (\bar{\gamma}_z^x(u) \# \bar{\gamma}_y^z(v)) \\ &= \mu(q \circ \bar{\gamma}_z^x(u), q \circ \bar{\gamma}_y^z(v)) \\ &= \mu(j_z^x(u), j_y^z(v)) \\ &= \mu(j_z^x(s_z^x(t_1)), j_y^z(s_y^z(t_2))), \end{aligned}$$

onde $(s_z^x \otimes s_y^z)(t) = (s_z^x(t_1) \otimes s_y^z(t_2)) = (u, v) \in \overline{\mathcal{M}}_z^x \times \overline{\mathcal{M}}_y^z \subseteq \overline{\mathcal{M}}_y^x$, $t_1 \in [0, 1]^{|x|-|z|-1}$ e

²Anel diferencial é um anel que satisfaz a propriedade de Leibniz: $\partial(a \cdot b) = (\partial a) \cdot b + a \cdot (\partial b)$

$t_2 \in [0, 1]^{|z|-|y|-1}$, com $t = (t_1, t_2)$. Assim temos que

$$(q_y^x \circ \bar{\gamma}_y^x)_*(s_z^x \otimes s_y^z) = C_*(\mu)(j_z^x(s_z^x), j_y^z(s_y^z)),$$

segue que

$$\partial a_y^x = \partial(j_y^x)_*(s_y^x) = \sum_{z \in \text{Crit}(f)} C_*(\mu)(j_z^x(s_z^x), j_y^z(s_y^z)) = \sum_{z \in \text{Crit}(f)} a_z^x \cdot a_y^z.$$

□

Um outro modo de ver a fórmula da proposição anterior é construir a matriz $A = (a_y^x)$ que contém todos os a_y^x para todos os pontos críticos, assim segue da Proposição 7.2 que $\partial A = A^2$.

Observe que a matriz A é estritamente triangular superior e podemos visualizar esta matriz conforme a Figura 7.2, onde os blocos que contém as k -ésima cadeias a_y^x . Os blocos pretos representam as 0-cadeias a_y^x , os blocos azuis representam as 1-cadeias a_y^x , e assim por diante. Os blocos pretos estão relacionados com a matriz de conexão, pois se considerarmos as entradas $\sharp a_y^x$ (com $|x| - |y| - 1 = 0$) teremos que os blocos pretos formam a matriz de conexão.

Agora, definimos um novo complexo de cadeias $\mathcal{C}(f)$ associado a f por

$$(\mathcal{C}(f), d) = (\{\mathcal{C}_k(f)\}_{k \in \mathbb{Z}}, d),$$

onde

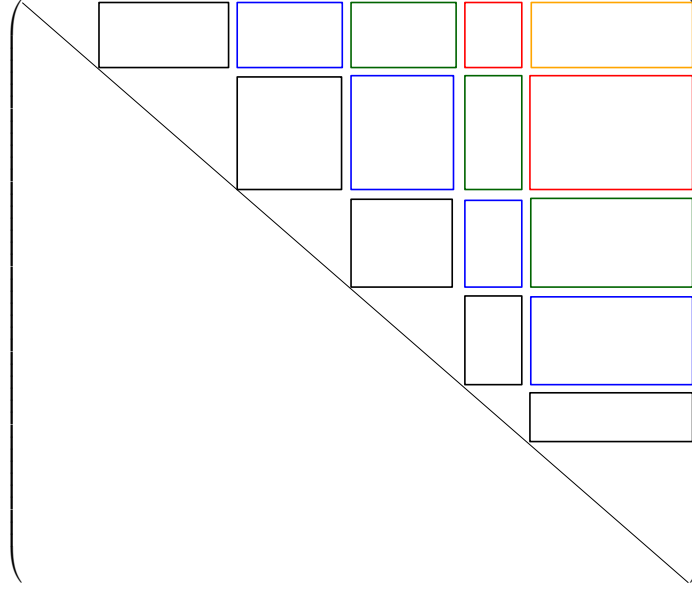
$$\mathcal{C}_k(f) = \bigoplus_{q+p=k} C_q(\Omega M) \otimes \mathbb{Z}_2 \langle \text{Crit}_p(f) \rangle,$$

$$d(a \otimes x) = (\partial a) \otimes x + a \cdot (d(1 \otimes x))$$

e

$$d(1 \otimes x) = \sum_{y \in \text{Crit}(f)} a_y^x \otimes y.$$

Esse complexo será chamado de **complexo de Morse estendido de f** .

Figura 7.2: Matriz $A=(a_y^x)$.

Proposição 7.3. $(\mathcal{C}(f), d)$ definido acima é um complexo no seguinte sentido

$$d_k : \mathcal{C}_k \rightarrow \mathcal{C}_{k-1} \text{ e } d^2 = 0.$$

Demonstração:

Do fato de que $d_k : \mathcal{C}_k \rightarrow \mathcal{C}_{k-1}$ segue que $d(a \otimes x) = (\partial a) \otimes x + a \cdot (d(1 \otimes x))$. Com efeito, suponha que $a \in C_q(\Omega M)$ e $x \in Crit_p(f)$ tais que $q + p = k$, é claro que $(\partial a) \otimes x \in \mathcal{C}_{k-1}$. Já $a \cdot (d(1 \otimes x)) \in \mathcal{C}_{k-1}$, haja vista que, $a \in C_q(\Omega M)$ e

$$d(1 \otimes x) = \sum_{y \in Crit(f)} a_y^x \otimes y \in \bigoplus_{s+t=k-1} C_s(\Omega M) \otimes \mathbb{Z}_2 \langle Crit_t(f) \rangle,$$

pois se $y \in Crit_t(f)$ então $a_y^x \in C_{|x|-|y|-1}(\Omega M) = C_{k-t-1}(\Omega M)$.

Para provar que $d^2 = 0$ basta usar a definição de d , o fato de que $C_*(\Omega M)$ é um anel diferencial, a Proposição 7.2, notar que os coeficientes das cadeias estão em $\mathbb{Z}_2$ e fazer alguns

cálculos:

$$\begin{aligned}
d(d(a \otimes x)) &= d(\partial a \otimes x + a \cdot d(1 \otimes x)) = d(\partial a \otimes x) + d(a \cdot d(1 \otimes x)) \\
&= \partial \partial a \otimes x + \partial a \cdot d(1 \otimes x) + d\left(\sum_y (a \cdot a_y^x \otimes y)\right) \\
&= 0 + \partial a \cdot d(1 \otimes x) + \sum_y [(\partial(a \cdot a_y^x)) \otimes y + a \cdot a_y^x \otimes d(1 \otimes y)] \\
&= \partial a \cdot d(1 \otimes x) + \sum_y [\partial a \cdot a_y^x \otimes y + a \cdot \partial a_y^x \otimes y + a \cdot a_y^x \cdot (\sum_z a_z^y \otimes z)] \\
&= 2(\partial a \cdot d(1 \otimes x)) + \sum_y [a \cdot \partial a_y^x \otimes y + a \cdot a_y^x \cdot (\sum_z a_z^y \otimes z)] \\
&= 0 + \sum_y [a \cdot \partial a_y^x \otimes y + a \cdot a_y^x \cdot (\sum_z a_z^y \otimes z)] \\
&= a \cdot \sum_t [\partial a_t^x \otimes t + \sum_s a_s^x \cdot a_t^s \otimes t] \\
&= a \cdot \sum_t [\sum_s a_s^x \cdot a_t^s \otimes t + \sum_s a_s^x \cdot a_t^s \otimes t] \\
&= a \cdot \sum_t [(2(\sum_s a_s^x \cdot a_t^s)) \otimes t] = 0.
\end{aligned}$$

□

Podemos também definir **complexo de Morse estendido de f sobre $\mathbb{Z}$** , para tal definiremos as cadeias $s_y^x \in C_{ast}(\mathcal{M}_y^x)$ e $a_y^x \in C_{ast}(\Omega M)$, como anteriormente, com a diferença de que os coeficientes de ambos complexos estão em $\mathbb{Z}$. O complexo estendido será dado por

$$(\mathcal{C}(f), d) = (\{\mathcal{C}_k(f)\}_{k \in \mathbb{Z}}, d),$$

onde

$$\mathcal{C}_k(f) = \bigoplus_{q+p=k} C_q(\Omega M) \otimes \mathbb{Z} \langle \text{Crit}_p(f) \rangle,$$

$$d(a \otimes x) = a \cdot d(1 \otimes x) - \partial a \otimes x$$

e

$$d(1 \otimes x) = \sum_{y \in \text{Crit}(f)} (-1)^{|x|-|y|-1} a_y^x \otimes y.$$

A seguinte proposição é análoga a Proposição 7.3.

Proposição 7.4. $(\mathcal{C}(f), d)$ definido acima é um complexo no seguinte sentido

$$d_k : \mathcal{C}_k \rightarrow \mathcal{C}_{k-1} \text{ e } d^2 = 0.$$

Demonstração:

A demonstração é inteiramente análoga à Proposição 7.3, com uma diferença no cálculo de $d^2 = 0$, como segue:

$$\begin{aligned}
d(d(a \otimes x)) &= d(-\partial a \otimes x + a \cdot d(1 \otimes x)) = -d(\partial a \otimes x) + d(a \cdot d(1 \otimes x)) \\
&= \partial \partial a \otimes x - \partial a \cdot d(1 \otimes x) + d\left(\sum_y (-1)^{|x|-|y|-1} (a \cdot a_y^x \otimes y)\right) \\
&= 0 - \partial a \cdot d(1 \otimes x) + \sum_y (-1)^{|x|-|y|-1} [(\partial(a \cdot a_y^x)) \otimes y + a \cdot a_y^x \otimes d(1 \otimes y)] \\
&= -\partial a \cdot d(1 \otimes x) + \sum_y (-1)^{|x|-|y|-1} [\partial a \cdot a_y^x \otimes y + a \cdot \partial a_y^x \otimes y + a \cdot a_y^x \cdot d(1 \otimes y)] \\
&= \partial a \cdot d(1 \otimes x) - \partial a \cdot d(1 \otimes x) + \sum_y (-1)^{|x|-|y|-1} [a \cdot \partial a_y^x \otimes y + a \cdot a_y^x \cdot d(1 \otimes y)] \\
&= 0 + \sum_y (-1)^{|x|-|y|-1} [a \cdot \partial a_y^x \otimes y + a \cdot a_y^x \cdot \left(\sum_z (-1)^{|y|-|z|-1} a_z^y \otimes z\right)] \\
&= 0 + \sum_y [(-1)^{|x|-|y|-1} a \cdot \partial a_y^x \otimes y + a \cdot a_y^x \cdot \left(\sum_z (-1)^{|x|-|y|-1} (-1)^{|y|-|z|-1} a_z^y \otimes z\right)] \\
&= 0 + \sum_y [(-1)^{|x|-|y|-1} a \cdot \partial a_y^x \otimes y + a \cdot a_y^x \cdot \left(\sum_z (-1)^{|x|-|z|-2} a_z^y \otimes z\right)] \\
&= a \cdot \sum_t [(-1)^{|x|-|t|-1} \partial a_t^x \otimes t + \sum_s (-1)^{|x|-|t|-2} a_s^x \cdot a_t^s \otimes t] \\
&= a \cdot \sum_t [-(-1)^{|x|-|t|-2} \sum_s a_s^x \cdot a_t^s \otimes t + (-1)^{|x|-|t|-2} \sum_s a_s^x \cdot a_t^s \otimes t] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Enunciaremos uma proposição análoga à Proposição 7.1, nesse sentido precisamos fazer umas considerações.

Fixemos x e y pontos críticos tais que $|x| - |y| - 1 = 0$. O caminho $\bar{\gamma}_y^x(u)$, onde $u \in \overline{\mathcal{M}}_y^x$, é uma componente conexa da variedade $W^s(x) \cap W^u(y)$, logo tem orientação induzida pela

orientação da variedade $W^s(x) \cap W^u(y)$. Como a aplicação quociente $q : M \rightarrow \widehat{M}$ leva o caminho $\bar{\gamma}_y^x$ no laço $q \circ \bar{\gamma}_y^x = j_y^x(u)$ pela simples junção dos pontos extremos do caminho, a saber x e y , então o laço $j_y^x(u)$ possui uma orientação $[j_y^x(u)]$ induzida pela orientação de $W^s(x) \cap W^u(y)$.

Temos também que o caminho $\bar{\gamma}_y^x(u)$ possui uma orientação induzida pelo fluxo, assim temos uma orientação induzida em $j_y^x(u)$ pelo fluxo tangente, a qual denotaremos por $[\dot{u}]$. Seja n_u^a o **sinál característico** do laço $j_y^x(u)$ definido pela igualdade

$$[j_y^x(u)] = n_u^a[\dot{u}].$$

A imagem do laço $j_y^x(u)$, com $u \in \overline{\mathcal{M}}_y^x$, é uma componente conexa da variedade $\widehat{M}$, logo tem orientação induzida.

Proposição 7.5. *O operador bordo de Morse-Witten pode ser visto como*

$$\partial_k \langle x \rangle := \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n_a(x, y) \langle y \rangle,$$

$$\text{onde } n_a(x, y) = \sum_{u \in \overline{\mathcal{M}}_{xy}} n_u^a.$$

Demonstração: Primeiramente, observe que o operador bordo de Morse-Witten sobre $\mathbb{Z}$ é dado por:

$$\partial_k \langle x \rangle := \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n(x, y) \langle y \rangle, \quad n(x, y) = \sum_{u \in \overline{\mathcal{M}}_{xy}} n_u.$$

Portanto, basta provar que $n(x, y) = n_a(x, y)$, ou seja,

$$\sum_{u \in \overline{\mathcal{M}}_{xy}} n_u^a = \sum_{u \in \overline{\mathcal{M}}_{xy}} n_u.$$

De fato, pela demonstração da Proposição 7.1 temos que a 0-cadeia α_y^x possui $\#(\overline{\mathcal{M}}_y^x)$ laços, logo, basta ver que $n_u^a = n_u$, o que segue das considerações feitas antes desta proposição. $\square$

Exemplo 7.2.

Considere o fluxo Morse-Smale na esfera deformada M dado pela Figura 7.3, e seja γ o caminho simples que liga todos os pontos críticos. Agora contraímos esse caminho a um

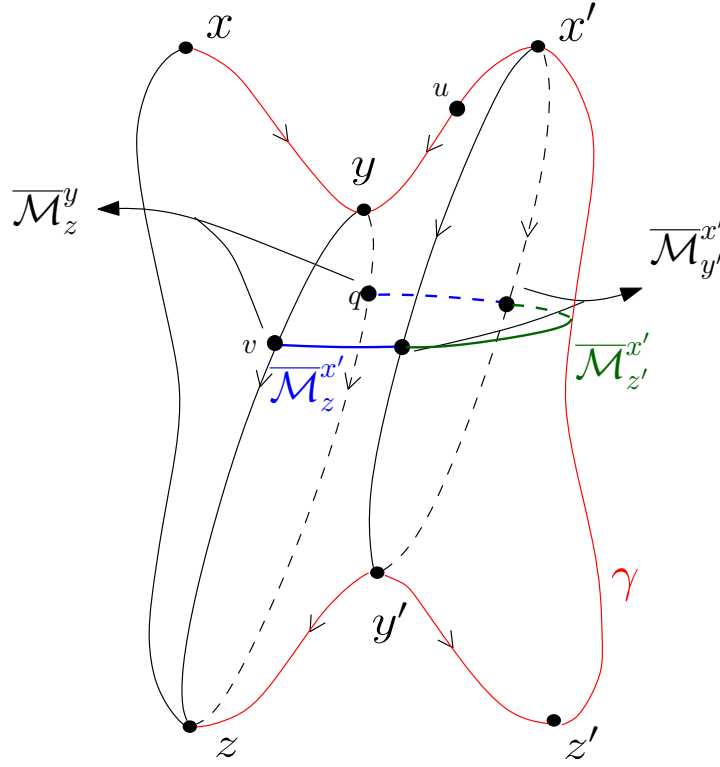


Figura 7.3: Fluxo na esfera deformada

ponto. Assim temos o espaço quociente $\widehat{M}$ onde γ é um ponto desse espaço.

Note que $\overline{\mathcal{M}}_z^y$ possui somente dois pontos, como $s_z^y \in C_0(\overline{\mathcal{M}}_z^y)$ e s_z^y tem que satisfazer o item (ii) da Definição 7.2, temos que s_z^y é uma 0-cadeia formada pelos dois pontos de $\mathcal{M}_z^y$, observe que s_z^y também satisfaz o item (i) da Definição 7.2. Analogamente, $s_{y'}^{x'}$ é uma 0-cadeia formada pelos dois pontos de $\mathcal{M}_{y'}^{x'}$. Portanto, $a_z^y = (j_z^y)_*(s_z^y)$ é uma 0-cadeia formada por dois laços e, analogamente, $a_{y'}^{x'} = (j_{y'}^{x'})_*(s_{y'}^{x'})$ é uma 0-cadeia formada por dois laços.

Veja que $a_z^{y'}$ é uma 0-cadeia formada pelo laço constante $w_0 : [0, f(y') - f(z)] \rightarrow \widehat{M}$ com $w_0([0, f(y') - f(z)]) = \{\gamma\}$, onde γ é visto como um ponto em $\widehat{M}$. Logo, a escolha do caminho simples γ poderia alterar $a_z^{y'}$, isto é, $a_z^{y'}$ poderia ser uma 0-cadeia formada por um laço diferente do laço constante, porém $a_z^{y'}$ continuaria a ser uma 0-cadeia.

Agora, iremos encontrar $a_z^{x'}$ e $a_{z'}^{x'}$. Antes, vejamos que para satisfazer as propriedades da Definição 7.2, $s_z^{x'}$ deve ser a 1-cadeia formada pelos dois arcos de circunferência de $\mathcal{M}_z^{x'}$, conforme o desenho em azul na Figura 7.3. Portanto, $a_z^{x'} = (j_z^{x'})_*(s_z^{x'})$ é a 1-cadeia formada pela imagem dos dois arcos de circunferência de $\mathcal{M}_z^{x'}$. Analogamente, $a_{z'}^{x'} = (j_{z'}^{x'})_*(s_{z'}^{x'})$ é a 1-cadeia formada pela imagem de um arco de circunferência de $\mathcal{M}_{z'}^{x'}$, conforme desenho em

$$\begin{array}{c}
z \\
z' \\
y \\
y' \\
x \\
x'
\end{array}
\begin{pmatrix}
z & z' & y & y' & x & x' \\
0 & 0 & a_z^y & a_z^{y'} & a_z^x & a_z^{x'} \\
0 & 0 & 0 & a_{z'}^{y'} & a_{z'}^x & a_{z'}^{x'} \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_y^x & a_y^{x'} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{y'}^{x'} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Figura 7.4: Matriz $A=(a_y^x)$.

verde na Figura 7.3.

Utilizando o que foi visto acima, podemos conferir (nesse exemplo) a fórmula provada na Proposição 7.2. De fato,

$$\partial a_z^{x'} = \partial(j_z^{x'})_*(s_z^{x'}) = (j_z^{x'})_*(\partial s_z^{x'})$$

e como $\partial s_z^{x'}$ são os pontos de $\overline{\mathcal{M}}_z^y$ e $\overline{\mathcal{M}}_{y'}^{x'}$, então $\partial a_z^{x'}$ é a 0-cadeia formada pelos laços que correspondem aos pontos de $\overline{\mathcal{M}}_z^y$ e de $\overline{\mathcal{M}}_{y'}^{x'}$. Por outro lado,

$$\sum_{t \in \text{Crit}(f)} a_t^{x'} \cdot a_z^t = a_y^{x'} \cdot a_z^y + a_{y'}^{x'} \cdot a_z^{y'},$$

como $a_y^{x'} \in (j_y^{x'})_*(C_0(\overline{\mathcal{M}}_y^{x'}))$ e $a_z^y \in (j_z^y)_*(C_0(\overline{\mathcal{M}}_z^y))$ então pela definição de $\cdot$ temos

$$a_y^{x'} \cdot a_z^y \in (j_z^{x'})_*(C_0(\overline{\mathcal{M}}_y^{x'} \times \overline{\mathcal{M}}_z^y)) \subseteq (j_z^{x'})_*(C_0(\partial \overline{\mathcal{M}}_z^{x'})).$$

Portanto, $a_y^{x'} \cdot a_z^y$ é a 0-cadeia formada pelos dois laços $j_z^{x'}(u, v) = \mu(j_y^{x'}(u), j_z^y(v))$ e $j_z^{x'}(u, q) = \mu(j_y^{x'}(u), j_z^y(q))$, onde $u \in \overline{\mathcal{M}}_y^{x'}$ e $v, q \in \overline{\mathcal{M}}_z^y$. Analogamente, $a_{y'}^{x'} \cdot a_z^{y'}$ é a 0-cadeia formada por dois laços. Logo

$$\partial a_z^{x'} = a_y^{x'} \cdot a_z^y + a_{y'}^{x'} \cdot a_z^{y'} = \sum_{t \in \text{Crit}(f)} a_t^{x'} \cdot a_z^t.$$

Calculando os demais $a_y^{x'}$ s podemos construir a matriz $A = (a_y^x)$, conforme a Figura 7.4. Veja também que os blocos pretos são os mesmos da matriz de conexão e o bloco azul

corresponde aos valores de a_s^t quando $|s| - |t| - 1 = 1$.

A coluna x representa $d(1 \otimes x)$, neste exemplo temos o cálculo de

$$d(1 \otimes x') = \sum_t a_t^{x'} \otimes t = a_y^{x'} \otimes y + a_{y'}^{x'} \otimes y' + a_z^{x'} \otimes z + a_{z'}^{x'} \otimes z'.$$

Podemos então definir o Complexo Estendido de Morse $(\mathcal{C}(f), d)$,

$$\mathcal{C}_k(f) = \bigoplus_{q+p=k} C_q(\Omega M) \otimes \mathbb{Z}_2 \langle \text{Crit}_p(f) \rangle, \quad d(a \otimes x) = (\partial a) \otimes x + a \cdot (d(1 \otimes x)).$$

△

Considere a seguinte filtração do complexo de Morse estendido

$$F_k \mathcal{C} = \bigoplus_{q+p \leq k} C_q(\Omega M) \otimes \mathbb{Z}_2 \langle \text{Crit}_p(f) \rangle.$$

Pelo Teorema 2.2 temos a sequência espectral

$$E(f) = (E_{p,q}^r(f), d^r)$$

associada à filtração $F_k \mathcal{C}$. Analogamente, temos o mesmo resultado quando o complexo estendido está sobre $\mathbb{Z}$.

De fato, em [BaC] e [BaC1] foi demonstrado que essa sequência espectral é a sequência espectral de Serre associada à fibração caminho-laço, para mais detalhes ver [H1]. Vários resultados são obtidos, em [BaC] e [BaC1], através da sequência de Serre, no entanto, estes artigos faz o estudo de sistemas Hamiltonianos e de topologia simplética. Portanto para utilizá-los, há a necessidade de adaptá-los para a Teoria de Morse.

Apêndice A

Nessa apêndice apresentarei um tutorial simplificado de como rodar o programa *Sweeping Algorithm*. Para mais detalhes veja a referência [dRMS].

O programa faz o uso do *Mathematica* versão 6 ou acima, ou seja, precisa desse programa instalado no computador.

O primeiro passo é baixar os arquivos [SweepingAlgorithm.nb](#), [RandomConnectionMatrixGenerator.nb](#) e [SweepingAlgorithm_NumericalExperiments.nb](#), na página <http://www.ime.unicamp.br/~margarid/software/>.

Depois abra o arquivo [SweepingAlgorithm.nb](#) e clique no último colchete do lado esquerdo, conforme a Figura 7.5, em seguida tecle shift + enter para compilar o programa.

Agora abra o arquivo [RandomConnectionMatrixGenerator.nb](#) e clique no último colchete do lado esquerdo, conforme a Figura 7.6, em seguida tecle shift + enter.

Abra o arquivo [SweepingAlgorithm_NumericalExperiments.nb](#), clique duas vezes no colchete indicado pela Figura 7.7 para mostrar os comandos, Figura 7.8. Em seguida tecle shift + enter. O programa apresentará os cálculos e as matrizes produzidas durante o processo do Método da Varredura.

Agora que sabemos fazer o programa funcionar, veremos como colocar uma matriz desejada para ser calculada.

Na Figura 7.8, temos uma sequência de comandos que defina uma matriz. Esses comandos pode ser melhor visualizados na Figura 7.9.

Mais especificamente:

- $\mathbf{A} = \text{Table}[0, 6, 6]$; Significa que A será uma matriz bidimensional 6 por 6:
- $\mathbf{A}[[1, 3]] = \mathbf{A}[[2, 3]] = \mathbf{A}[[4, 5]] = \mathbf{A}[[4, 6]] = 1$; Define qual será as entradas da matriz, isto é, $\mathbf{A}[[i, j]] = a_{i,j}$. Observe que antes de definir as entradas da matriz todas as entradas são nulas;

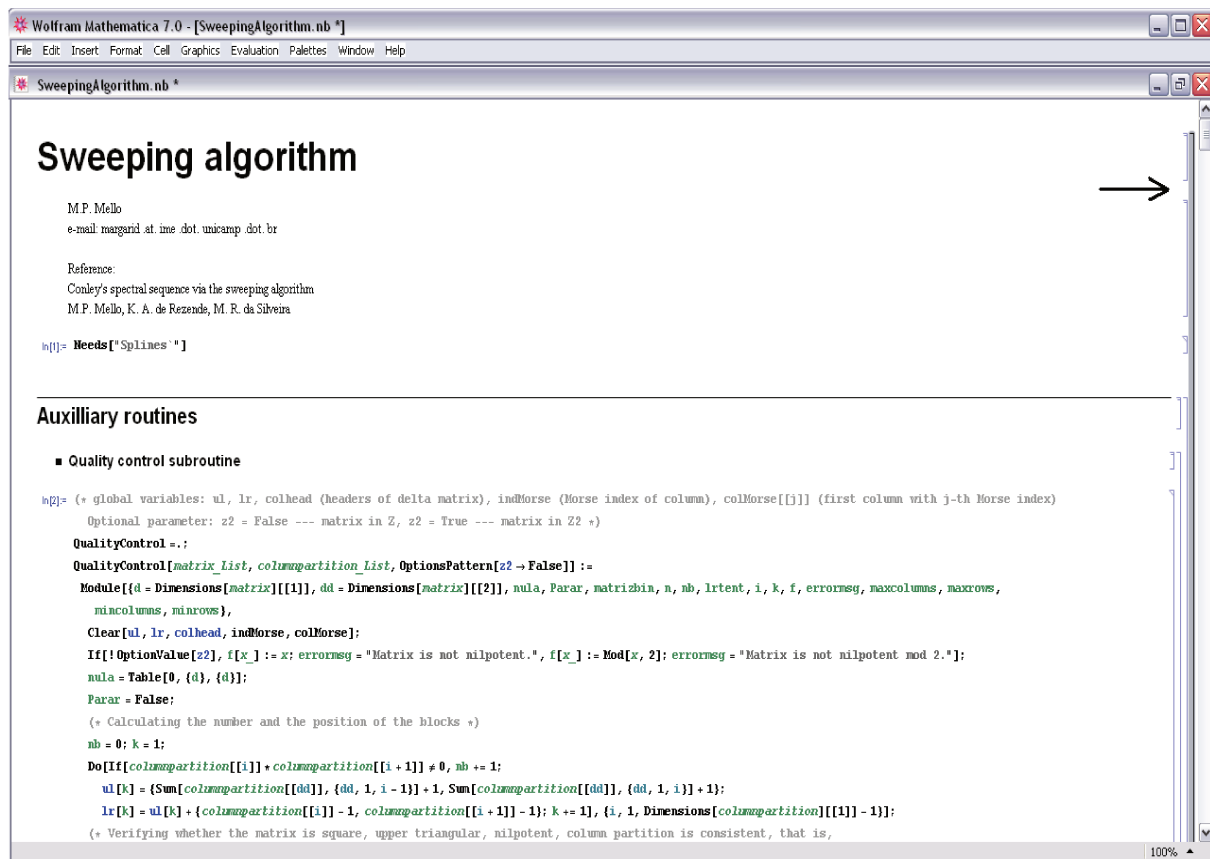


Figura 7.5:

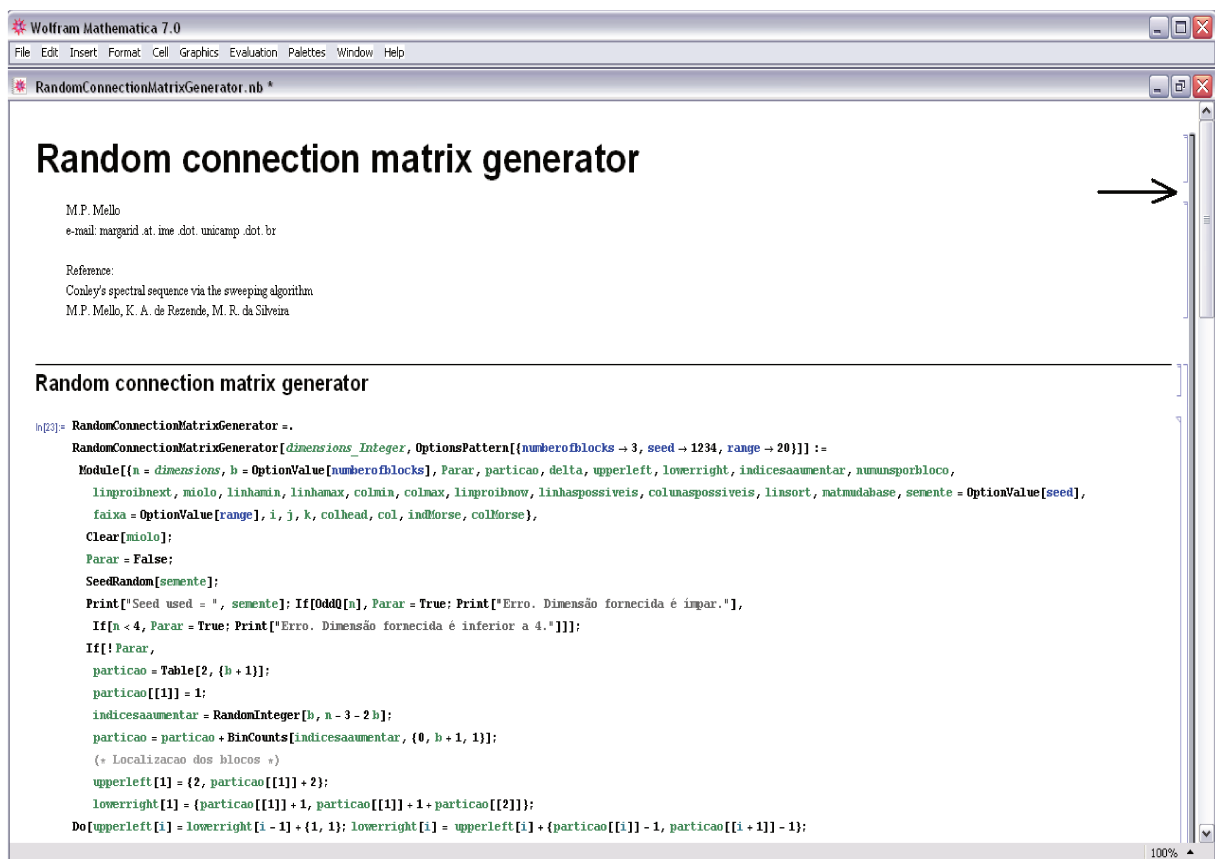


Figura 7.6:

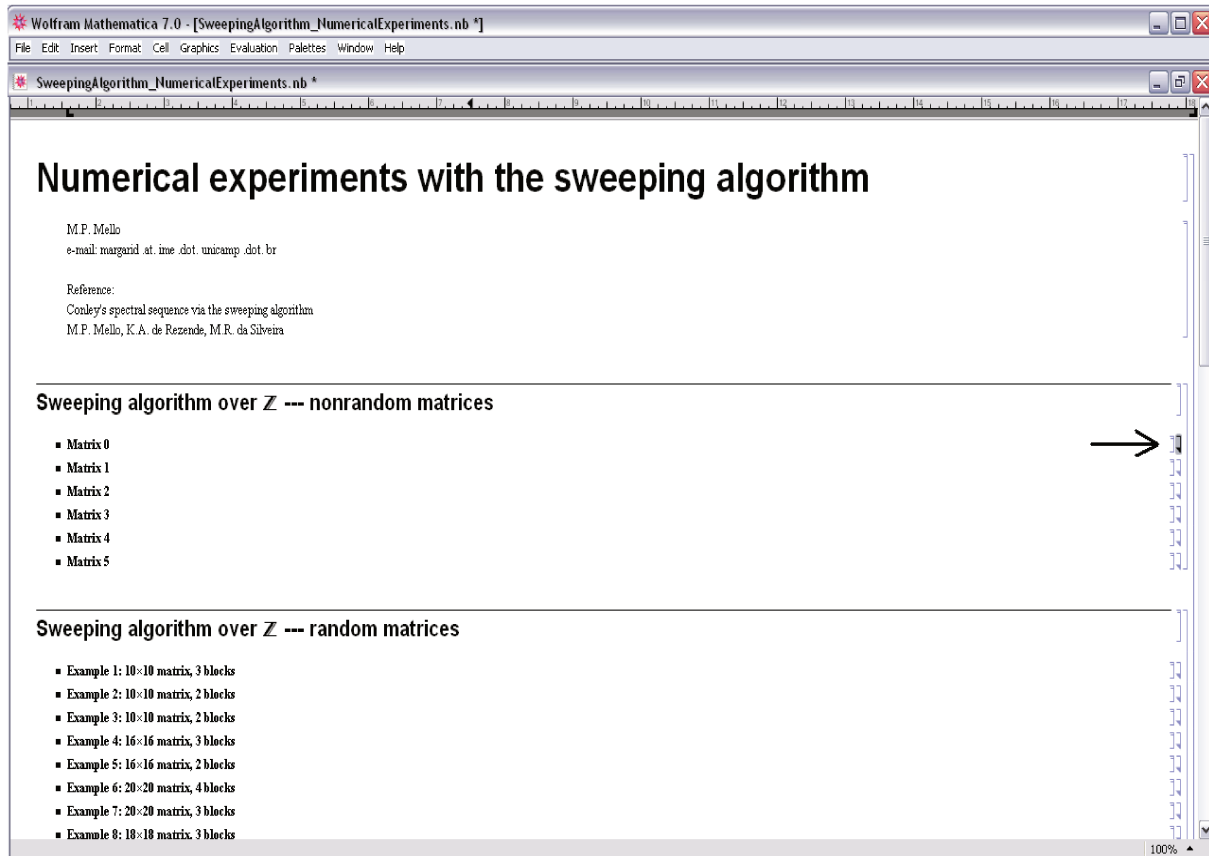


Figura 7.7:

- **partition = 2, 2, 2**; Define quantos pontos críticos de índice k existirá. Nesse caso temos 2 pontos críticos de índice 0, mais 2 de índice 1 e mais 2 de índice 2.

Observe que se a matriz A não tiver quadrado nulo ou se a matriz não for triangular estritamente superior então aparecerão as mensagens “*Matrix is not nilpotent.*” e “*Error. Stop, matrix is not upper triangular.*” respectivamente. Em todos os casos anteriores e também no caso em que a partição não estiver correta o programa gerará erros, já que o Método da Varredura não está definido para esses casos.

Na Figura 7.8, temos dois comandos que fazem rodar o programa *SweepingAlgorithm*. Esses comandos pode ser melhor visualizados na Figura 7.10.

Mais especificamente:

- **n = SpectralSequenceConstruction[A, partition, Nf -> True, Erp -> True];**
É a chamada do programa com umas propriedades adicionais;

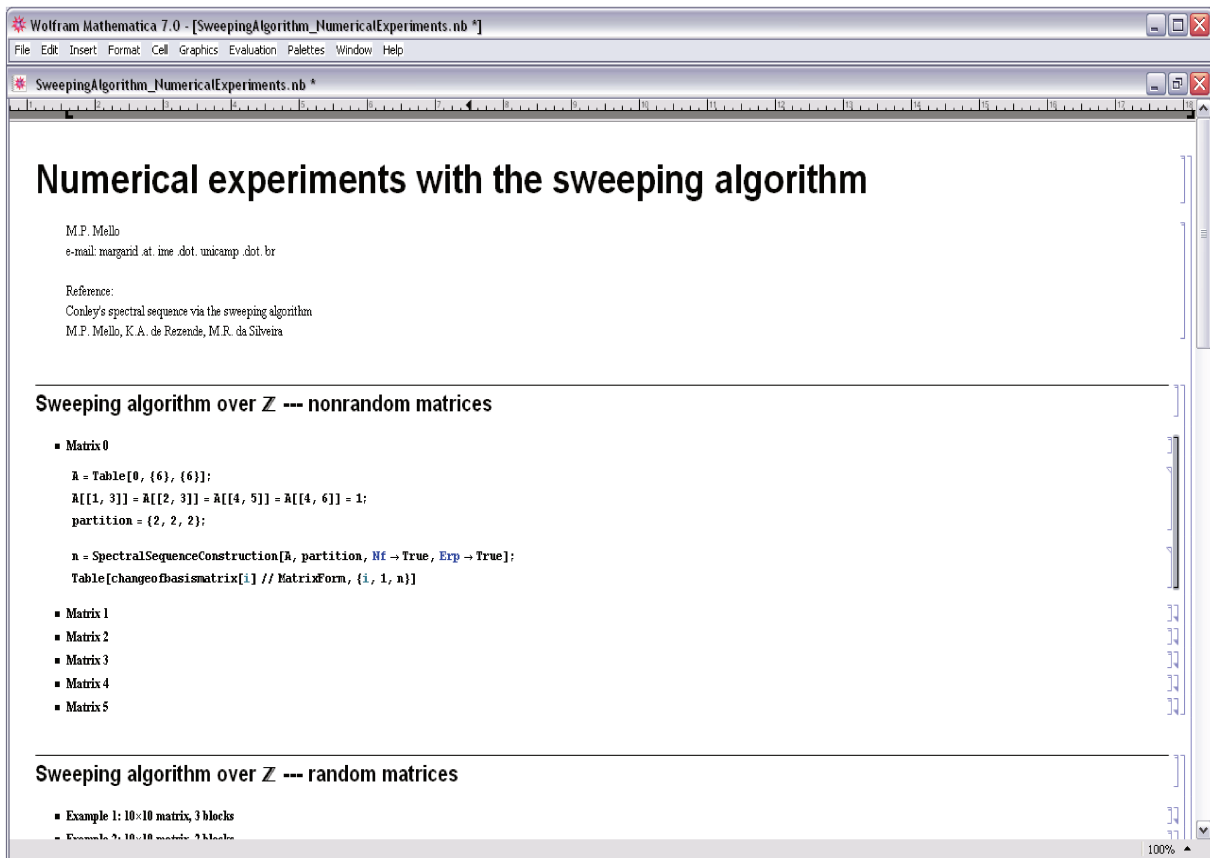


Figura 7.8:

```
A = Table[0, {6}, {6}];
A[[1, 3]] = A[[2, 3]] = A[[4, 5]] = A[[4, 6]] = 1;
partition = {2, 2, 2};
```

Figura 7.9:

1. **Nf -> True** Habilita um outro método para calcular o coeficiente líder da mudança de base (não há necessidade de ter opção para os cálculos, se quiser pode deletar esse termo, ficando $n = \text{SpectralSequenceConstruction}[A, \text{partition}, \text{Erp} \rightarrow \text{True}]$).
 2. **Erp -> True** Habilita os cálculos dos $\mathbb{Z}$ -módulos E_p^r . Caso não queira esses cálculos basta deletar esse termo, ficando $n = \text{SpectralSequenceConstruction}[A, \text{partition}, \text{Nf} \rightarrow \text{True}]$.
- **Table[changeofbasismatrix[i] // MatrixForm, i, 1, n]** Serve para calcular as matrizes mudança de base em cada etapa.

```
n = SpectralSequenceConstruction [A, partition, Nf -> True, Erp -> True];  
Table[changeofbasismatrix[i] // MatrixForm, {i, 1, n}]
```

Figura 7.10:

Caso queira gerar uma matriz aleatória, nesse mesmo arquivo [SweepingAlgorithm NumericalExperiments.nb](#) temos o seguinte título **Sweeping algorithm over $\mathbb{Z}$ — random matrices**. Basta escolher a dimensão e a quantidade de blocos da matriz, e colocar o programa para rodar. Caso não tenha o desejado, basta fazer as seguintes alterações.

- **Clear[A, partition]** Serve para apagar os dados anteriores da matriz A e da partição, é importante essa linha de comando já que é bem provável que a matriz A e a partição seja diferente da usada anteriormente.
- **Clear[A, ul, lr, partition]** Serve para apagar os dados anteriores da matriz A, da partição e alguns valores dentro do programa que gera matrizes aleatórias.
- **nb = 3;** A quantidade de blocos que a matriz A terá.
- **A, partition = RandomConnectionMatrixGenerator[18, seed -> 85, numberofblocks -> nb, range -> 20];** Faz a chamada do programa que gera matrizes aleatórias, com as seguintes propriedades:

1. O primeiro número é a dimensão da matriz, nesse caso a matriz é 18 por 18.
2. **seed -> 85** Para cada número diferente teremos matrizes diferentes.
3. **numberofblocks -> nb** A quantidade de blocos que a matriz terá é **nb**, que nesse caso é **nb=3**.
4. **range -> 20** As entradas da matriz A serão limitadas, quanto menor o valor da variável **range** mais limitadas serão as entradas da matriz A.

Apêndice B

Neste exemplo, observaremos entradas não inteiras nas matrizes intermediárias, porém como foi provado em [dRMS] a última matriz sempre apresentará entradas inteiras. Esse exemplo também apresenta os cálculos dos $\mathbb{Z}$ -módulos E_p^r da sequência espectral associada ao Método da Varredura. Tais cálculos serão mostrados até a quarta etapa, quando encontramos a matriz Δ^4 , Figura 7.

Exemplo 7.3.

```
In[42]:= n = SpectralSequenceConstruction[A, partition, Erp → True];
Table[changeofbasismatrix[i] // MatrixForm, {i, 1, n}]
```

Column partition is correct.

Total number of diagonals to be swept = 9

i = 0

$\Delta^0 =$

	h_0^1	h_2^2	h_2^3	h_3^4	h_3^5	h_3^6	h_3^7	h_3^8	h_3^9	h_4^{10}	h_4^{11}	h_4^{12}	h_4^{13}	h_6^{14}
h_0^1														
h_2^2				2	3	2	1	0	0					
h_2^3				2	3	1	0	2	1					
h_3^4										0	1	-3	1	
h_3^5										1	0	2	0	
h_3^6										-3	-2	1	-3	
h_3^7										3	2	-2	4	
h_3^8										-1	1	-2	1	
h_3^9										2	-2	3	-1	
h_4^{10}														
h_4^{11}														
h_4^{12}														
h_4^{13}														
h_6^{14}														

-----0-----0-----0-----

i = 1

$$\Delta^1 =$$

	$\sigma_0^{1,1}$	$\sigma_2^{2,1}$	$\sigma_2^{3,1}$	$\sigma_3^{4,1}$	$\sigma_3^{5,1}$	$\sigma_3^{6,1}$	$\sigma_3^{7,1}$	$\sigma_3^{8,1}$	$\sigma_3^{9,1}$	$\sigma_4^{10,1}$	$\sigma_4^{11,1}$	$\sigma_4^{12,1}$	$\sigma_4^{13,1}$	$\sigma_6^{14,1}$
$\sigma_0^{1,1} = h_0^1$														
$\sigma_2^{2,1} = h_2^2$				2	3	2	1	0	0					
$\sigma_2^{3,1} = h_2^3$				2	3	1	0	2	1					
$\sigma_3^{4,1} = h_3^4$										0	1	-3	1	
$\sigma_3^{5,1} = h_3^5$										1	0	2	0	
$\sigma_3^{6,1} = h_3^6$										-3	-2	1	-3	
$\sigma_3^{7,1} = h_3^7$										3	2	-2	4	
$\sigma_3^{8,1} = h_3^8$										-1	1	-2	1	
$\sigma_3^{9,1} = h_3^9$										2	-2	3	-1	
$\sigma_4^{10,1} = h_4^{10}$														
$\sigma_4^{11,1} = h_4^{11}$														
$\sigma_4^{12,1} = h_4^{12}$														
$\sigma_4^{13,1} = h_4^{13}$														
$\sigma_6^{14,1} = h_6^{14}$														

$$E_0^1$$

$$\text{Numerator: } \frac{\mu^{1,1} \sigma_0^{1,1}}{h_0^1 \mid 1}$$

Denominator:

There is no first term denominator

There is no second term denominator

$$E_1^1$$

$$\text{Numerator: } \frac{\mu^{2,1} \sigma_2^{2,1}}{h_2^2 \mid 1}$$

Denominator:

There is no first term denominator

There is no second term denominator

$$E_2^1$$

$$\text{Numerator: } \begin{array}{c|cc} & \mu^{2,0} \sigma_2^{2,0} & \mu^{3,1} \sigma_2^{3,1} \\ \hline h_2^2 & 1 & 0 \\ h_2^3 & 0 & 1 \end{array}$$

Denominator:

$$\text{1st term of denominator: } \begin{array}{c|cc} & \mu^{2,0} \sigma_2^{2,0} & \\ \hline h_2^2 & 1 & \\ h_2^3 & 0 & \end{array}$$

There is no second term denominator

E_3^1

$$\text{Numerator: } \begin{array}{c|cc} & \mu^{4,1} \sigma_3^{4,1} & \\ \hline h_3^4 & 1 & \\ h_3^5 & 0 & \\ h_3^6 & 0 & \\ h_3^7 & 0 & \\ h_3^8 & 0 & \\ h_3^9 & 0 & \end{array}$$

Denominator:

There is no first term denominator

There is no second term denominator

E_4^1

$$\text{Numerator: } \begin{array}{c|cc} & \mu^{4,0} \sigma_3^{4,0} & \mu^{5,1} \sigma_3^{5,1} \\ \hline h_3^4 & 1 & 0 \\ h_3^5 & 0 & 1 \\ h_3^6 & 0 & 0 \\ h_3^7 & 0 & 0 \\ h_3^8 & 0 & 0 \\ h_3^9 & 0 & 0 \end{array}$$

Denominator:

$$\text{1st term of denominator: } \begin{array}{c|cc} & \mu^{4,0} \sigma_3^{4,0} & \\ \hline h_3^4 & 1 & \\ h_3^5 & 0 & \\ h_3^6 & 0 & \\ h_3^7 & 0 & \\ h_3^8 & 0 & \\ h_3^9 & 0 & \end{array}$$

There is no second term denominator

E_5^1

$$\text{Numerator: } \begin{array}{c|ccc} & \mu^{4,-1} \sigma_3^{4,-1} & \mu^{5,0} \sigma_3^{5,0} & \mu^{6,1} \sigma_3^{6,1} \\ \hline h_3^4 & 1 & 0 & 0 \\ h_3^5 & 0 & 1 & 0 \\ h_3^6 & 0 & 0 & 1 \\ h_3^7 & 0 & 0 & 0 \\ h_3^8 & 0 & 0 & 0 \\ h_3^9 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Denominator:

	$\mu^{4,-1} \sigma_3^{4,-1}$	$\mu^{5,0} \sigma_3^{5,0}$
h_3^4	1	0
h_3^5	0	1
1st term of denominator: h_3^6	0	0
h_3^7	0	0
h_3^8	0	0
h_3^9	0	0

There is no second term denominator

E_6^1

	$\mu^{4,-2} \sigma_3^{4,-2}$	$\mu^{5,-1} \sigma_3^{5,-1}$	$\mu^{6,0} \sigma_3^{6,0}$	$\mu^{7,1} \sigma_3^{7,1}$
h_3^4	1	0	0	0
h_3^5	0	1	0	0
Numerator: h_3^6	0	0	1	0
h_3^7	0	0	0	1
h_3^8	0	0	0	0
h_3^9	0	0	0	0

Denominator:

	$\mu^{4,-2} \sigma_3^{4,-2}$	$\mu^{5,-1} \sigma_3^{5,-1}$	$\mu^{6,0} \sigma_3^{6,0}$
h_3^4	1	0	0
h_3^5	0	1	0
1st term of denominator: h_3^6	0	0	1
h_3^7	0	0	0
h_3^8	0	0	0
h_3^9	0	0	0

There is no second term denominator

E_7^1

	$\mu^{4,-3} \sigma_3^{4,-3}$	$\mu^{5,-2} \sigma_3^{5,-2}$	$\mu^{6,-1} \sigma_3^{6,-1}$	$\mu^{7,0} \sigma_3^{7,0}$	$\mu^{8,1} \sigma_3^{8,1}$
h_3^4	1	0	0	0	0
h_3^5	0	1	0	0	0
Numerator: h_3^6	0	0	1	0	0
h_3^7	0	0	0	1	0
h_3^8	0	0	0	0	1
h_3^9	0	0	0	0	0

Denominator:

	$\mu^{4,-3} \sigma_3^{4,-3}$	$\mu^{5,-2} \sigma_3^{5,-2}$	$\mu^{6,-1} \sigma_3^{6,-1}$	$\mu^{7,0} \sigma_3^{7,0}$
h_3^4	1	0	0	0
h_3^5	0	1	0	0
1st term of denominator: h_3^6	0	0	1	0
h_3^7	0	0	0	1
h_3^8	0	0	0	0
h_3^9	0	0	0	0

There is no second term denominator

E_8^1

	$\mu^{4,-4} \sigma_3^{4,-4}$	$\mu^{5,-3} \sigma_3^{5,-3}$	$\mu^{6,-2} \sigma_3^{6,-2}$	$\mu^{7,-1} \sigma_3^{7,-1}$	$\mu^{8,0} \sigma_3^{8,0}$	$\mu^{9,1} \sigma_3^{9,1}$
Numerator:	h_3^4	h_3^5	h_3^6	h_3^7	h_3^8	h_3^9
	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1

Denominator:

	$\mu^{4,-4} \sigma_3^{4,-4}$	$\mu^{5,-3} \sigma_3^{5,-3}$	$\mu^{6,-2} \sigma_3^{6,-2}$	$\mu^{7,-1} \sigma_3^{7,-1}$	$\mu^{8,0} \sigma_3^{8,0}$
1st term of denominator:	h_3^4	h_3^5	h_3^6	h_3^7	h_3^8
	1	0	0	0	0
	0	1	0	0	0
	0	0	1	0	0
	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0

There is no second term denominator

E_9^1

	$\mu^{10,1} \sigma_4^{10,1}$
Numerator:	h_4^{10}
	h_4^{11}
	h_4^{12}
	h_4^{13}
	1
	0
	0
	0

Denominator:

There is no first term denominator

There is no second term denominator

E_{10}^1

	$\mu^{10,0} \sigma_4^{10,0}$	$\mu^{11,1} \sigma_4^{11,1}$
Numerator:	h_4^{10}	h_4^{11}
	h_4^{11}	h_4^{12}
	h_4^{12}	h_4^{13}
	1	0
	0	1
	0	0
	0	0

Denominator:

	$\mu^{10,0} \sigma_4^{10,0}$
1st term of denominator:	h_4^{10}
	h_4^{11}
	h_4^{12}
	h_4^{13}
	1
	0
	0
	0

There is no second term denominator

E_{11}^1

	$\mu^{10,-1} \sigma_4^{10,-1}$	$\mu^{11,0} \sigma_4^{11,0}$	$\mu^{12,1} \sigma_4^{12,1}$
Numerator:	h_4^{10}	h_4^{11}	h_4^{12}
	h_4^{11}	h_4^{12}	h_4^{13}
	1	0	0
	0	1	0
	0	0	1
	0	0	0

Denominator:

	$\mu^{10,-1}$	$\sigma_4^{10,-1}$	$\mu^{11,0}$	$\sigma_4^{11,0}$
1st term of denominator:	h_4^{10}	1	0	
	h_4^{11}	0	1	
	h_4^{12}	0	0	
	h_4^{13}	0	0	

There is no second term denominator

E_{12}^1

	$\mu^{10,-2}$	$\sigma_4^{10,-2}$	$\mu^{11,-1}$	$\sigma_4^{11,-1}$	$\mu^{12,0}$	$\sigma_4^{12,0}$	$\mu^{13,1}$	$\sigma_4^{13,1}$
Numerator:	h_4^{10}	1	0	0	0	0		
	h_4^{11}	0	1	0	0	0		
	h_4^{12}	0	0	1	0	0		
	h_4^{13}	0	0	0	0	1		

Denominator:

	$\mu^{10,-2}$	$\sigma_4^{10,-2}$	$\mu^{11,-1}$	$\sigma_4^{11,-1}$	$\mu^{12,0}$	$\sigma_4^{12,0}$
1st term of denominator:	h_4^{10}	1	0	0	0	
	h_4^{11}	0	1	0	0	
	h_4^{12}	0	0	1	0	
	h_4^{13}	0	0	0	0	

There is no second term denominator

E_{13}^1

Numerator:	$\mu^{14,1}$	$\sigma_6^{14,1}$
	h_6^{14}	1

Denominator:

There is no first term denominator

There is no second term denominator

$$\{E_0^1 = \mathbb{Z}[h_0^1], E_1^1 = \mathbb{Z}[h_2^2], E_2^1 = \mathbb{Z}[h_3^2], E_3^1 = \mathbb{Z}[h_3^4], E_4^1 = \mathbb{Z}[h_3^5], E_5^1 = \mathbb{Z}[h_3^6], E_6^1 = \mathbb{Z}[h_3^7], \\ E_7^1 = \mathbb{Z}[h_3^8], E_8^1 = \mathbb{Z}[h_3^9], E_9^1 = \mathbb{Z}[h_4^{10}], E_{10}^1 = \mathbb{Z}[h_4^{11}], E_{11}^1 = \mathbb{Z}[h_4^{12}], E_{12}^1 = \mathbb{Z}[h_4^{13}], E_{13}^1 = \mathbb{Z}[h_6^{14}]\}$$

$$\{d_0^1 = 0, d_1^1 = 0, d_2^1 = 0, d_3^1 = 2, d_4^1 = 0, d_5^1 = 0, \\ d_6^1 = 0, d_7^1 = 0, d_8^1 = 0, d_9^1 = 2, d_{10}^1 = 0, d_{11}^1 = 0, d_{12}^1 = 0, d_{13}^1 = 0\}$$

-----1-----1-----1-----

i = 2

$$\Delta^2 =$$

	$\sigma_0^{1,2}$	$\sigma_2^{2,2}$	$\sigma_2^{3,2}$	$\sigma_3^{4,2}$	$\sigma_3^{5,2}$	$\sigma_3^{6,2}$	$\sigma_3^{7,2}$	$\sigma_3^{8,2}$	$\sigma_3^{9,2}$	$\sigma_4^{10,2}$	$\sigma_4^{11,2}$	$\sigma_4^{12,2}$	$\sigma_4^{13,2}$	$\sigma_6^{14,2}$
$\sigma_0^{1,2} = h_0^1$														
$\sigma_2^{2,2} = h_2^2$				2	3	2	1	0	0					
$\sigma_2^{3,2} = h_2^3$				2	3	1	0	2	1					
$\sigma_3^{4,2} = h_3^4$										0	1	-3	1	
$\sigma_3^{5,2} = h_3^5$										1	0	2	0	
$\sigma_3^{6,2} = h_3^6$										-3	-2	1	-3	
$\sigma_3^{7,2} = h_3^7$										3	2	-2	4	
$\sigma_3^{8,2} = h_3^8$										-1	1	-2	1	
$\sigma_3^{9,2} = h_3^9$										2	-2	3	-1	
$\sigma_4^{10,2} = h_4^{10}$														
$\sigma_4^{11,2} = h_4^{11}$														
$\sigma_4^{12,2} = h_4^{12}$														
$\sigma_4^{13,2} = h_4^{13}$														
$\sigma_6^{14,2} = h_6^{14}$														

$$E_0^2$$

$$\text{Numerator: } \frac{\mu^{1,2} \sigma_0^{1,2}}{h_0^1 \mid 1}$$

Denominator:

There is no first term denominator

There is no second term denominator

$$E_1^2$$

$$\text{Numerator: } \frac{\mu^{2,2} \sigma_2^{2,2}}{h_2^2 \mid 1}$$

Denominator:

There is no first term denominator

There is no second term denominator

$$E_2^2$$

$$\text{Numerator: } \begin{array}{c|cc} & \mu^{2,1} \sigma_2^{2,1} & \mu^{3,2} \sigma_2^{3,2} \\ \hline h_2^2 & 1 & 0 \\ h_2^3 & 0 & 1 \end{array}$$

Denominator:

$$\text{1st term of denominator: } \begin{array}{c|c} & \mu^{2,1} \sigma_2^{2,1} \\ \hline h_2^2 & 1 \\ h_2^3 & 0 \end{array}$$

$$\text{2nd term of denominator: } \begin{array}{c|c} & \partial \mu^{4,1} \sigma_3^{4,1} \\ \hline h_2^2 & 2 \\ h_2^3 & 2 \end{array}$$

E_3^2

$$\text{Numerator: } \begin{array}{c|c} & \mu^{4,2} \sigma_3^{4,2} \\ \hline h_3^4 & 0 \\ h_3^5 & 0 \\ h_3^6 & 0 \\ h_3^7 & 0 \\ h_3^8 & 0 \\ h_3^9 & 0 \end{array}$$

E_4^2

$$\text{Numerator: } \begin{array}{c|cc} & \mu^{4,1} \sigma_3^{4,1} & \mu^{5,2} \sigma_3^{5,2} \\ \hline h_3^4 & 1 & 0 \\ h_3^5 & 0 & 1 \\ h_3^6 & 0 & 0 \\ h_3^7 & 0 & 0 \\ h_3^8 & 0 & 0 \\ h_3^9 & 0 & 0 \end{array}$$

Denominator:

$$\text{1st term of denominator: } \begin{array}{c|c} & \mu^{4,1} \sigma_3^{4,1} \\ \hline h_3^4 & 1 \\ h_3^5 & 0 \\ h_3^6 & 0 \\ h_3^7 & 0 \\ h_3^8 & 0 \\ h_3^9 & 0 \end{array}$$

There is no second term denominator

E_5^2

$$\text{Numerator: } \begin{array}{c|ccc} & \mu^{4,0} \sigma_3^{4,0} & \mu^{5,1} \sigma_3^{5,1} & \mu^{6,2} \sigma_3^{6,2} \\ \hline h_3^4 & 1 & 0 & 0 \\ h_3^5 & 0 & 1 & 0 \\ h_3^6 & 0 & 0 & 1 \\ h_3^7 & 0 & 0 & 0 \\ h_3^8 & 0 & 0 & 0 \\ h_3^9 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Denominator:

	$\mu^{4,0} \sigma_3^{4,0}$	$\mu^{5,1} \sigma_3^{5,1}$
h_3^4	1	0
h_3^5	0	1
1st term of denominator: h_3^6	0	0
h_3^7	0	0
h_3^8	0	0
h_3^9	0	0

There is no second term denominator

E_6^2

	$\mu^{4,-1} \sigma_3^{4,-1}$	$\mu^{5,0} \sigma_3^{5,0}$	$\mu^{6,1} \sigma_3^{6,1}$	$\mu^{7,2} \sigma_3^{7,2}$
h_3^4	1	0	0	0
h_3^5	0	1	0	0
Numerator: h_3^6	0	0	1	0
h_3^7	0	0	0	1
h_3^8	0	0	0	0
h_3^9	0	0	0	0

Denominator:

	$\mu^{4,-1} \sigma_3^{4,-1}$	$\mu^{5,0} \sigma_3^{5,0}$	$\mu^{6,1} \sigma_3^{6,1}$
h_3^4	1	0	0
h_3^5	0	1	0
1st term of denominator: h_3^6	0	0	1
h_3^7	0	0	0
h_3^8	0	0	0
h_3^9	0	0	0

There is no second term denominator

E_7^2

	$\mu^{4,-2} \sigma_3^{4,-2}$	$\mu^{5,-1} \sigma_3^{5,-1}$	$\mu^{6,0} \sigma_3^{6,0}$	$\mu^{7,1} \sigma_3^{7,1}$	$\mu^{8,2} \sigma_3^{8,2}$
h_3^4	1	0	0	0	0
h_3^5	0	1	0	0	0
Numerator: h_3^6	0	0	1	0	0
h_3^7	0	0	0	1	0
h_3^8	0	0	0	0	1
h_3^9	0	0	0	0	0

Denominator:

	$\mu^{4,-2} \sigma_3^{4,-2}$	$\mu^{5,-1} \sigma_3^{5,-1}$	$\mu^{6,0} \sigma_3^{6,0}$	$\mu^{7,1} \sigma_3^{7,1}$
h_3^4	1	0	0	0
h_3^5	0	1	0	0
1st term of denominator: h_3^6	0	0	1	0
h_3^7	0	0	0	1
h_3^8	0	0	0	0
h_3^9	0	0	0	0

There is no second term denominator

E_8^2

	$\mu^{4,-3} \sigma_3^{4,-3}$	$\mu^{5,-2} \sigma_3^{5,-2}$	$\mu^{6,-1} \sigma_3^{6,-1}$	$\mu^{7,0} \sigma_3^{7,0}$	$\mu^{8,1} \sigma_3^{8,1}$	$\mu^{9,2} \sigma_3^{9,2}$
h_3^4	1	0	0	0	0	0
h_3^5	0	1	0	0	0	0
Numerator: h_3^6	0	0	1	0	0	0
h_3^7	0	0	0	1	0	0
h_3^8	0	0	0	0	1	0
h_3^9	0	0	0	0	0	1

Denominator:

	$\mu^{4,-3} \sigma_3^{4,-3}$	$\mu^{5,-2} \sigma_3^{5,-2}$	$\mu^{6,-1} \sigma_3^{6,-1}$	$\mu^{7,0} \sigma_3^{7,0}$	$\mu^{8,1} \sigma_3^{8,1}$
h_3^4	1	0	0	0	0
h_3^5	0	1	0	0	0
1st term of denominator: h_3^6	0	0	1	0	0
h_3^7	0	0	0	1	0
h_3^8	0	0	0	0	1
h_3^9	0	0	0	0	0

	$\partial \mu^{10,1} \sigma_4^{10,1}$
h_3^4	0
h_3^5	1
2nd term of denominator: h_3^6	-3
h_3^7	3
h_3^8	-1
h_3^9	2

E_9^2

	$\mu^{10,2} \sigma_4^{10,2}$
h_4^{10}	0
Numerator: h_4^{11}	0
h_4^{12}	0
h_4^{13}	0

E_{10}^2

	$\mu^{10,1} \sigma_4^{10,1}$	$\mu^{11,2} \sigma_4^{11,2}$
h_4^{10}	1	0
Numerator: h_4^{11}	0	1
h_4^{12}	0	0
h_4^{13}	0	0

Denominator:

	$\mu^{10,1} \sigma_4^{10,1}$
h_4^{10}	1
1st term of denominator: h_4^{11}	0
h_4^{12}	0
h_4^{13}	0

There is no second term denominator

E_{11}^2

	$\mu^{10,0} \sigma_4^{10,0}$	$\mu^{11,1} \sigma_4^{11,1}$	$\mu^{12,2} \sigma_4^{12,2}$
h_4^{10}	1	0	0
Numerator: h_4^{11}	0	1	0
h_4^{12}	0	0	1
h_4^{13}	0	0	0

Denominator:

		$\mu^{10,0}$	$\sigma_4^{10,0}$	$\mu^{11,1}$	$\sigma_4^{11,1}$
	h_4^{10}	1		0	
1st term of denominator:	h_4^{11}	0		1	
	h_4^{12}	0		0	
	h_4^{13}	0		0	

There is no second term denominator

E_{12}^2

		$\mu^{10,-1}$	$\sigma_4^{10,-1}$	$\mu^{11,0}$	$\sigma_4^{11,0}$	$\mu^{12,1}$	$\sigma_4^{12,1}$	$\mu^{13,2}$	$\sigma_4^{13,2}$
	h_4^{10}	1		0		0		0	
Numerator:	h_4^{11}	0		1		0		0	
	h_4^{12}	0		0		1		0	
	h_4^{13}	0		0		0		1	

Denominator:

		$\mu^{10,-1}$	$\sigma_4^{10,-1}$	$\mu^{11,0}$	$\sigma_4^{11,0}$	$\mu^{12,1}$	$\sigma_4^{12,1}$
	h_4^{10}	1		0		0	
1st term of denominator:	h_4^{11}	0		1		0	
	h_4^{12}	0		0		1	
	h_4^{13}	0		0		0	

There is no second term denominator

E_{13}^2

		$\mu^{14,2}$	$\sigma_6^{14,2}$
Numerator:	h_6^{14}	1	

Denominator:

There is no first term denominator

There is no second term denominator

$$\{E_0^2 = \mathbb{Z}[h_0^1], E_1^2 = \mathbb{Z}[h_2^2], E_2^2 = \mathbb{Z}_2[h_2^3], E_3^2 = \{0\}, E_4^2 = \mathbb{Z}[h_3^5], E_5^2 = \mathbb{Z}[h_3^6], E_6^2 = \mathbb{Z}[h_3^7], \\ E_7^2 = \mathbb{Z}[h_3^8], E_8^2 = \mathbb{Z}_2[h_3^9], E_9^2 = \{0\}, E_{10}^2 = \mathbb{Z}[h_4^{11}], E_{11}^2 = \mathbb{Z}[h_4^{12}], E_{12}^2 = \mathbb{Z}[h_4^{13}], E_{13}^2 = \mathbb{Z}[h_6^{14}]\}$$

$$\{d_0^2 = 0, d_1^2 = 0, d_2^2 = 0, d_3^2 = 0, d_4^2 = 3, d_5^2 = 0, \\ d_6^2 = 0, d_7^2 = 0, d_8^2 = 0, d_9^2 = 0, d_{10}^2 = -2, d_{11}^2 = 0, d_{12}^2 = 0, d_{13}^2 = 0\}$$

-----2-----2-----2-----

i = 3

$$\Delta^3 =$$

	$\sigma_0^{1,3}$	$\sigma_2^{2,3}$	$\sigma_2^{3,3}$	$\sigma_3^{4,3}$	$\sigma_3^{5,3}$	$\sigma_3^{6,3}$	$\sigma_3^{7,3}$	$\sigma_3^{8,3}$	$\sigma_3^{9,3}$	$\sigma_4^{10,3}$	$\sigma_4^{11,3}$	$\sigma_4^{12,3}$	$\sigma_4^{13,3}$	$\sigma_6^{14,3}$
$\sigma_0^{1,3} = h_0^1$														
$\sigma_2^{2,3} = h_2^2$				2	0	2	1	0	0					
$\sigma_2^{3,3} = h_2^3$				2	0	1	0	2	1					
$\sigma_3^{4,3} = h_3^4$										3	5	0	1	
$\sigma_3^{5,3} = 2h_3^5 - 3h_3^4$										2	2	1	0	
$\sigma_3^{6,3} = h_3^6$										1	1	1	0	
$\sigma_3^{7,3} = h_3^7$										2	2	1	0	
$\sigma_3^{8,3} = h_3^8$										-3	-5	1	-3	
$\sigma_3^{9,3} = h_3^9$										3	5	-2	4	
$\sigma_4^{10,3} = h_4^{10}$										-1	0	-2	1	
$\sigma_4^{11,3} = h_4^{10} + h_4^{11}$														
$\sigma_4^{12,3} = h_4^{12}$														
$\sigma_4^{13,3} = h_4^{13}$														
$\sigma_6^{14,3} = h_6^{14}$														

$$E_0^3$$

$$\text{Numerator: } \frac{\mu^{1,3} \sigma_0^{1,3}}{h_0^1 \mid 1}$$

Denominator:

There is no first term denominator

There is no second term denominator

$$E_1^3$$

$$\text{Numerator: } \frac{\mu^{2,3} \sigma_2^{2,3}}{h_2^2 \mid 1}$$

Denominator:

There is no first term denominator

$$\text{2nd term of denominator: } \frac{\partial \mu^{4,2} \sigma_3^{4,2}}{h_2^2 \mid 0}$$

$$E_2^3$$

$$\text{Numerator: } \begin{array}{c|cc} & \mu^{2,2} \sigma_2^{2,2} & \mu^{3,3} \sigma_2^{3,3} \\ \hline h_2^2 & 1 & 0 \\ h_2^3 & 0 & 1 \end{array}$$

Denominator:

$$\text{1st term of denominator: } \begin{array}{c|cc} & \mu^{2,2} \sigma_2^{2,2} & \\ \hline h_2^2 & 1 & \\ h_2^3 & 0 & \end{array}$$

$$\text{2nd term of denominator: } \begin{array}{c|cc} & \partial \mu^{4,1} \sigma_3^{4,1} & \partial \mu^{5,2} \sigma_3^{5,2} \\ \hline h_2^2 & 2 & 3 \\ h_2^3 & 2 & 3 \end{array}$$

E_3^3

E_4^3

$$\text{Numerator: } \begin{array}{c|cc} & \mu^{4,2} \sigma_3^{4,2} & \mu^{5,3} \sigma_3^{5,3} \\ \hline h_3^4 & 0 & -3 \\ h_3^5 & 0 & 2 \\ h_3^6 & 0 & 0 \\ h_3^7 & 0 & 0 \\ h_3^8 & 0 & 0 \\ h_3^9 & 0 & 0 \end{array}$$

Denominator:

$$\text{1st term of denominator: } \begin{array}{c|cc} & \mu^{4,2} \sigma_3^{4,2} & \\ \hline h_3^4 & 0 & \\ h_3^5 & 0 & \\ h_3^6 & 0 & \\ h_3^7 & 0 & \\ h_3^8 & 0 & \\ h_3^9 & 0 & \end{array}$$

There is no second term denominator

E_5^3

$$\text{Numerator: } \begin{array}{c|ccc} & \mu^{4,1} \sigma_3^{4,1} & \mu^{5,2} \sigma_3^{5,2} & \mu^{6,3} \sigma_3^{6,3} \\ \hline h_3^4 & 1 & 0 & 0 \\ h_3^5 & 0 & 1 & 0 \\ h_3^6 & 0 & 0 & 1 \\ h_3^7 & 0 & 0 & 0 \\ h_3^8 & 0 & 0 & 0 \\ h_3^9 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Denominator:

$$\text{1st term of denominator: } \begin{array}{c|cc} & \mu^{4,1} \sigma_3^{4,1} & \mu^{5,2} \sigma_3^{5,2} \\ \hline h_3^4 & 1 & 0 \\ h_3^5 & 0 & 1 \\ h_3^6 & 0 & 0 \\ h_3^7 & 0 & 0 \\ h_3^8 & 0 & 0 \\ h_3^9 & 0 & 0 \end{array}$$

There is no second term denominator

E_6^3

	$\mu^{4,0} \sigma_3^{4,0}$	$\mu^{5,1} \sigma_3^{5,1}$	$\mu^{6,2} \sigma_3^{6,2}$	$\mu^{7,3} \sigma_3^{7,3}$
h_3^4	1	0	0	0
h_3^5	0	1	0	0
Numerator: h_3^6	0	0	1	0
h_3^7	0	0	0	1
h_3^8	0	0	0	0
h_3^9	0	0	0	0

Denominator:

	$\mu^{4,0} \sigma_3^{4,0}$	$\mu^{5,1} \sigma_3^{5,1}$	$\mu^{6,2} \sigma_3^{6,2}$
h_3^4	1	0	0
h_3^5	0	1	0
1st term of denominator: h_3^6	0	0	1
h_3^7	0	0	0
h_3^8	0	0	0
h_3^9	0	0	0

There is no second term denominator

E_7^3

	$\mu^{4,-1} \sigma_3^{4,-1}$	$\mu^{5,0} \sigma_3^{5,0}$	$\mu^{6,1} \sigma_3^{6,1}$	$\mu^{7,2} \sigma_3^{7,2}$	$\mu^{8,3} \sigma_3^{8,3}$
h_3^4	1	0	0	0	0
h_3^5	0	1	0	0	0
Numerator: h_3^6	0	0	1	0	0
h_3^7	0	0	0	1	0
h_3^8	0	0	0	0	1
h_3^9	0	0	0	0	0

Denominator:

	$\mu^{4,-1} \sigma_3^{4,-1}$	$\mu^{5,0} \sigma_3^{5,0}$	$\mu^{6,1} \sigma_3^{6,1}$	$\mu^{7,2} \sigma_3^{7,2}$
h_3^4	1	0	0	0
h_3^5	0	1	0	0
1st term of denominator: h_3^6	0	0	1	0
h_3^7	0	0	0	1
h_3^8	0	0	0	0
h_3^9	0	0	0	0

	$\partial \mu^{10,2} \sigma_4^{10,2}$
h_3^4	0
h_3^5	0
2nd term of denominator: h_3^6	0
h_3^7	0
h_3^8	0
h_3^9	0

E_8^3

	$\mu^{4,-2} \sigma_3^{4,-2}$	$\mu^{5,-1} \sigma_3^{5,-1}$	$\mu^{6,0} \sigma_3^{6,0}$	$\mu^{7,1} \sigma_3^{7,1}$	$\mu^{8,2} \sigma_3^{8,2}$	$\mu^{9,3} \sigma_3^{9,3}$
h_3^4	1	0	0	0	0	0
h_3^5	0	1	0	0	0	0
Numerator: h_3^6	0	0	1	0	0	0
h_3^7	0	0	0	1	0	0
h_3^8	0	0	0	0	1	0
h_3^9	0	0	0	0	0	1

Denominator:

		$\mu^{4,-2} \sigma_3^{4,-2}$	$\mu^{5,-1} \sigma_3^{5,-1}$	$\mu^{6,0} \sigma_3^{6,0}$	$\mu^{7,1} \sigma_3^{7,1}$	$\mu^{8,2} \sigma_3^{8,2}$
	h_3^4	1	0	0	0	0
	h_3^5	0	1	0	0	0
1st term of denominator:	h_3^6	0	0	1	0	0
	h_3^7	0	0	0	1	0
	h_3^8	0	0	0	0	1
	h_3^9	0	0	0	0	0

		$\partial \mu^{10,1} \sigma_4^{10,1}$	$\partial \mu^{11,2} \sigma_4^{11,2}$
	h_3^4	0	1
	h_3^5	1	0
2nd term of denominator:	h_3^6	-3	-2
	h_3^7	3	2
	h_3^8	-1	1
	h_3^9	2	-2

E₉³E₁₀³

		$\mu^{10,2} \sigma_4^{10,2}$	$\mu^{11,3} \sigma_4^{11,3}$
	h_4^{10}	0	1
Numerator:	h_4^{11}	0	1
	h_4^{12}	0	0
	h_4^{13}	0	0

Denominator:

		$\mu^{10,2} \sigma_4^{10,2}$
	h_4^{10}	0
1st term of denominator:	h_4^{11}	0
	h_4^{12}	0
	h_4^{13}	0

There is no second term denominator

E₁₁³

		$\mu^{10,1} \sigma_4^{10,1}$	$\mu^{11,2} \sigma_4^{11,2}$	$\mu^{12,3} \sigma_4^{12,3}$
	h_4^{10}	1	0	0
Numerator:	h_4^{11}	0	1	0
	h_4^{12}	0	0	1
	h_4^{13}	0	0	0

Denominator:

		$\mu^{10,1} \sigma_4^{10,1}$	$\mu^{11,2} \sigma_4^{11,2}$
	h_4^{10}	1	0
1st term of denominator:	h_4^{11}	0	1
	h_4^{12}	0	0
	h_4^{13}	0	0

There is no second term denominator

E₁₂³

		$\mu^{10,0} \sigma_4^{10,0}$	$\mu^{11,1} \sigma_4^{11,1}$	$\mu^{12,2} \sigma_4^{12,2}$	$\mu^{13,3} \sigma_4^{13,3}$
	h_4^{10}	1	0	0	0
Numerator:	h_4^{11}	0	1	0	0
	h_4^{12}	0	0	1	0
	h_4^{13}	0	0	0	1

Denominator:

		$\mu^{10,0}$	$O_4^{10,0}$	$\mu^{11,1}$	$O_4^{11,1}$	$\mu^{12,2}$	$O_4^{12,2}$
	h_4^{10}	1		0		0	
1st term of denominator:	h_4^{11}	0		1		0	
	h_4^{12}	0		0		1	
	h_4^{13}	0		0		0	

There is no second term denominator

E_{13}^3

$$\text{Numerator: } \frac{\mu^{14,3} O_6^{14,3}}{h_6^{14}} \bigg| 1$$

Denominator:

There is no first term denominator

There is no second term denominator

$$\{E_0^3 = \mathbb{Z}[h_0^1], E_1^3 = \mathbb{Z}[h_2^2], E_2^3 = \{0\}, E_3^3 = \{0\}, E_4^3 = \mathbb{Z}[-3h_3^4 + 2h_3^5], E_5^3 = \mathbb{Z}[h_3^6], E_6^3 = \mathbb{Z}[h_3^7], \\ E_7^3 = \mathbb{Z}[h_3^8], E_8^3 = \mathbb{Z}_2[h_3^9], E_9^3 = \{0\}, E_{10}^3 = \mathbb{Z}[h_4^{10} + h_4^{11}], E_{11}^3 = \mathbb{Z}[h_4^{12}], E_{12}^3 = \mathbb{Z}[h_4^{13}], E_{13}^3 = \mathbb{Z}[h_6^{14}]\}$$

$$\{d_0^3 = 0, d_1^3 = 0, d_2^3 = 0, d_3^3 = 0, d_4^3 = 0, d_5^3 = 0, \\ d_6^3 = 0, d_7^3 = 0, d_8^3 = 0, d_9^3 = 0, d_{10}^3 = 0, d_{11}^3 = 3, d_{12}^3 = 0, d_{13}^3 = 0\}$$

-----3-----3-----3-----

i = 4

[illegible]

	$\sigma_0^{1,5}$	$\sigma_2^{2,5}$	$\sigma_2^{3,5}$	$\sigma_3^{4,5}$	$\sigma_3^{5,5}$	$\sigma_3^{6,5}$	$\sigma_3^{7,5}$	$\sigma_3^{8,5}$	$\sigma_3^{9,5}$	$\sigma_4^{10,5}$	$\sigma_4^{11,5}$	$\sigma_4^{12,5}$	$\sigma_4^{13,5}$	$\sigma_6^{14,5}$
$\sigma_0^{1,5} = h_0^1$														
$\sigma_2^{2,5} = h_2^2$			2	0	1	1	0	0						
$\sigma_2^{3,5} = h_2^3$			2	0	0	0	2	1						
$\sigma_3^{4,5} = h_3^4$									0	0	1	0		
$\sigma_3^{5,5} = 2h_3^5 - 3h_3^4$									-1	-2	0	1		
$\sigma_3^{6,5} = h_3^4 - h_3^5 + h_3^6$									-3	-5	-4	1		
$\sigma_3^{7,5} = h_3^7$									3	5	2	-1		
$\sigma_3^{8,5} = h_3^8$									-1	0	-1	0		
$\sigma_3^{9,5} = h_3^9$									2	0	0	0		
$\sigma_4^{10,5} = h_4^{10}$														
$\sigma_4^{11,5} = h_4^{10} + h_4^{11}$														
$\sigma_4^{12,5} = 3h_4^{11} + 2h_4^{12}$														
$\sigma_4^{13,5} = -h_4^{10} + h_4^{12} + h_4^{13}$														
$\sigma_6^{14,5} = h_6^{14}$														

[illegible]

[illegible]

	$\sigma_0^{1,9}$	$\sigma_2^{2,9}$	$\sigma_2^{3,9}$	$\sigma_3^{4,9}$	$\sigma_3^{5,9}$	$\sigma_3^{6,9}$	$\sigma_3^{7,9}$	$\sigma_3^{8,9}$	$\sigma_3^{9,9}$	$\sigma_4^{10,9}$	$\sigma_4^{11,9}$	$\sigma_4^{12,9}$	$\sigma_4^{13,9}$	$\sigma_6^{14,9}$
$\sigma_0^{1,9} = h_0^1$														
$\sigma_2^{2,9} = h_2^2$				2	0	1	0	0	0					
$\sigma_2^{3,9} = h_2^3$				2	0	0	0	0	0					
$\sigma_3^{4,9} = h_3^4$										0	0	0	0	
$\sigma_3^{5,9} = 2h_3^5 - 3h_3^4$										-1	-2	-1	3	
$\sigma_3^{6,9} = h_3^4 - h_3^5 + h_3^6$										0	0	0	0	
$\sigma_3^{7,9} = -h_3^4 + h_3^5 - h_3^6 + h_3^7$										3	5	6	0	
$\sigma_3^{8,9} = -2h_3^6 + 4h_3^7 + h_3^8$										-1	0	-1	0	
$\sigma_3^{9,9} = -h_3^6 + 2h_3^7 + h_3^9$										2	0	0	0	
$\sigma_4^{10,9} = h_4^{10}$														
$\sigma_4^{11,9} = h_4^{10} + h_4^{11}$														
$\sigma_4^{12,9} = 3h_4^{11} + 2h_4^{12}$														
$\sigma_4^{13,9} = -4h_4^{10} + h_4^{11} + 5h_4^{12} + 5h_4^{13}$														
$\sigma_6^{14,9} = h_6^{14}$														

Apêndice C

O seguinte exemplo é a aplicação do Método da Varredura na matriz Δ sobre o corpo $\mathbb{Z}_2$.

Exemplo 7.4.

Iremos aplicar o Método da Varredura na matriz Δ , Figura 7.11.

	h_0^1	h_2^2	h_2^3	h_3^4	h_3^5	h_3^6	h_3^7	h_3^8	h_3^9	h_4^{10}	h_4^{11}	h_4^{12}	h_4^{13}	h_6^{14}
h_0^1														
h_2^2				0	1	0	1	0	0					
h_2^3				0	1	1	0	0	1					
h_3^4										0	1	1	1	
h_3^5										1	0	0	0	
h_3^6										1	0	1	1	
h_3^7										1	0	0	0	
h_3^8										1	1	0	1	
h_3^9										0	0	1	1	
h_4^{10}														
h_4^{11}														
h_4^{12}														
h_4^{13}														
h_6^{14}														

Figura 7.11:

	$\sigma_0^{1,1}$	$\sigma_2^{2,1}$	$\sigma_2^{3,1}$	$\sigma_3^{4,1}$	$\sigma_3^{5,1}$	$\sigma_3^{6,1}$	$\sigma_3^{7,1}$	$\sigma_3^{8,1}$	$\sigma_3^{9,1}$	$\sigma_4^{10,1}$	$\sigma_4^{11,1}$	$\sigma_4^{12,1}$	$\sigma_4^{13,1}$	$\sigma_6^{14,1}$
$\sigma_0^{1,1} = h_0^1$														
$\sigma_2^{2,1} = h_2^2$			0	1	0	1	0	0						
$\sigma_2^{3,1} = h_2^3$			0	1	1	0	0	1						
$\sigma_3^{4,1} = h_3^4$										0	1	1	1	
$\sigma_3^{5,1} = h_3^5$										1	0	0	0	
$\sigma_3^{6,1} = h_3^6$										1	0	1	1	
$\sigma_3^{7,1} = h_3^7$										1	0	0	0	
$\sigma_3^{8,1} = h_3^8$										1	1	0	1	
$\sigma_3^{9,1} = h_3^9$										0	0	1	1	
$\sigma_4^{10,1} = h_4^{10}$														
$\sigma_4^{11,1} = h_4^{11}$														
$\sigma_4^{12,1} = h_4^{12}$														
$\sigma_4^{13,1} = h_4^{13}$														
$\sigma_6^{14,1} = h_6^{14}$														

Figura 7.12:

	$\sigma_0^{1,2}$	$\sigma_2^{2,2}$	$\sigma_2^{3,2}$	$\sigma_3^{4,2}$	$\sigma_3^{5,2}$	$\sigma_3^{6,2}$	$\sigma_3^{7,2}$	$\sigma_3^{8,2}$	$\sigma_3^{9,2}$	$\sigma_4^{10,2}$	$\sigma_4^{11,2}$	$\sigma_4^{12,2}$	$\sigma_4^{13,2}$	$\sigma_6^{14,2}$
$\sigma_0^{1,2} = h_0^1$														
$\sigma_2^{2,2} = h_2^2$				0	1	0	1	0	0					
$\sigma_2^{3,2} = h_2^3$				0	1	1	0	0	1					
$\sigma_3^{4,2} = h_3^4$										0	1	1	1	
$\sigma_3^{5,2} = h_3^5$										1	0	0	0	
$\sigma_3^{6,2} = h_3^6$										1	0	1	1	
$\sigma_3^{7,2} = h_3^7$										1	0	0	0	
$\sigma_3^{8,2} = h_3^8$										1	1	0	1	
$\sigma_3^{9,2} = h_3^9$										0	0	1	1	
$\sigma_4^{10,2} = h_4^{10}$														
$\sigma_4^{11,2} = h_4^{11}$														
$\sigma_4^{12,2} = h_4^{12}$														
$\sigma_4^{13,2} = h_4^{13}$														
$\sigma_6^{14,2} = h_6^{14}$														

Figura 7.13:

	$\sigma_0^{1,3}$	$\sigma_2^{2,3}$	$\sigma_2^{3,3}$	$\sigma_3^{4,3}$	$\sigma_3^{5,3}$	$\sigma_3^{6,3}$	$\sigma_3^{7,3}$	$\sigma_3^{8,3}$	$\sigma_3^{9,3}$	$\sigma_4^{10,3}$	$\sigma_4^{11,3}$	$\sigma_4^{12,3}$	$\sigma_4^{13,3}$	$\sigma_6^{14,3}$
$\sigma_0^{1,3} = h_0^1$														
$\sigma_2^{2,3} = h_2^2$				0	1	0	1	0	0					
$\sigma_2^{3,3} = h_2^3$				0	1	1	0	0	1					
$\sigma_3^{4,3} = h_3^4$										0	1	1	1	
$\sigma_3^{5,3} = h_3^5$										1	0	0	0	
$\sigma_3^{6,3} = h_3^5 + h_3^6$										1	0	1	1	
$\sigma_3^{7,3} = h_3^7$										1	0	0	0	
$\sigma_3^{8,3} = h_3^8$										1	1	0	1	
$\sigma_3^{9,3} = h_3^9$										0	0	1	1	
$\sigma_4^{10,3} = h_4^{10}$														
$\sigma_4^{11,3} = h_4^{10} + h_4^{11}$														
$\sigma_4^{12,3} = h_4^{12}$														
$\sigma_4^{13,3} = h_4^{13}$														
$\sigma_6^{14,3} = h_6^{14}$														

Figura 7.14:

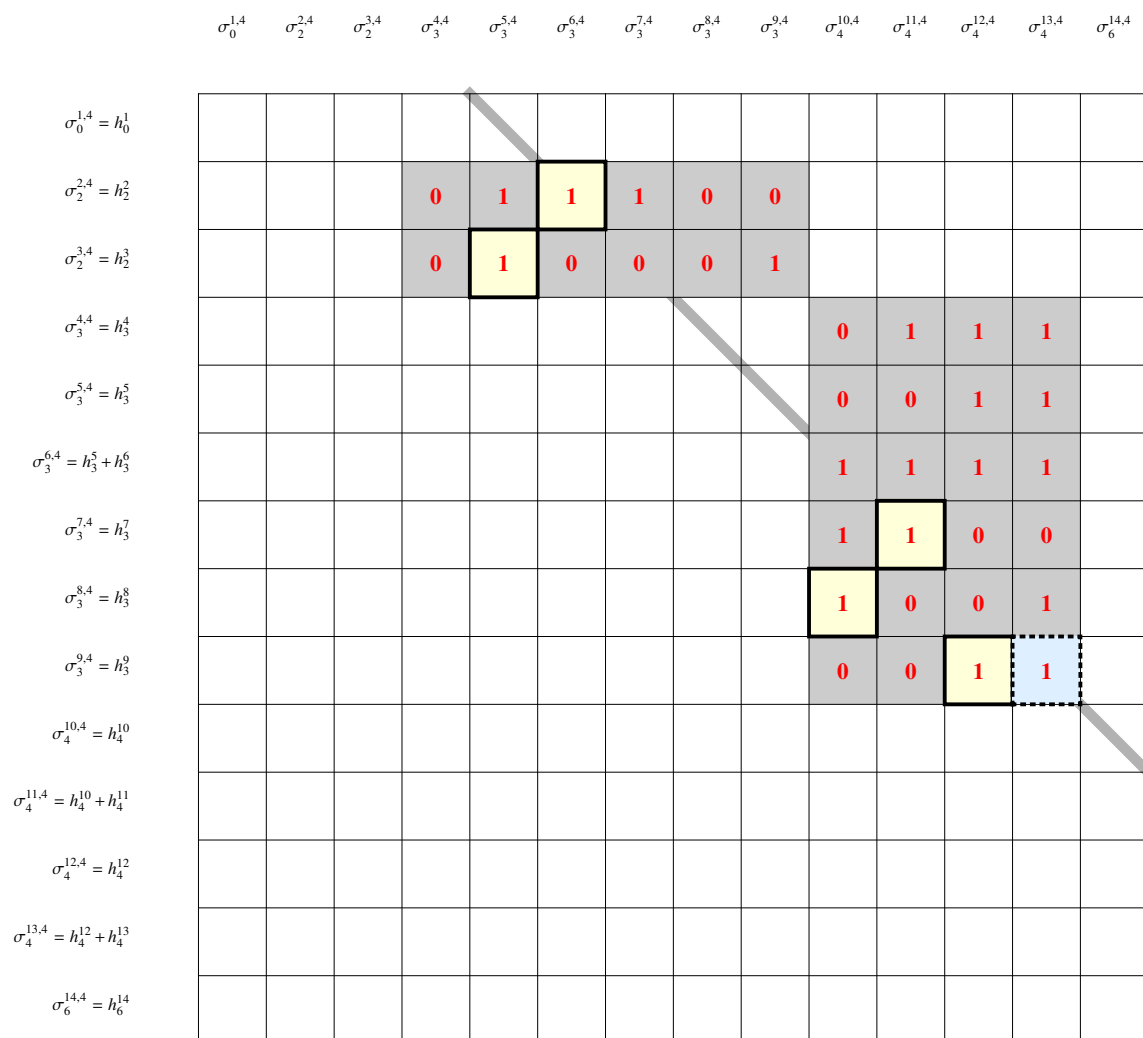


Figura 7.15:

	$\sigma_0^{1,5}$	$\sigma_2^{2,5}$	$\sigma_2^{3,5}$	$\sigma_3^{4,5}$	$\sigma_3^{5,5}$	$\sigma_3^{6,5}$	$\sigma_3^{7,5}$	$\sigma_3^{8,5}$	$\sigma_3^{9,5}$	$\sigma_4^{10,5}$	$\sigma_4^{11,5}$	$\sigma_4^{12,5}$	$\sigma_4^{13,5}$	$\sigma_6^{14,5}$
$\sigma_0^{1,5} = h_0^1$														
$\sigma_2^{2,5} = h_2^2$			0	1	1	1	0	0						
$\sigma_2^{3,5} = h_2^3$			0	1	0	0	0	1						
$\sigma_3^{4,5} = h_3^4$									0	1	1	0		
$\sigma_3^{5,5} = h_3^5$									0	0	1	0		
$\sigma_3^{6,5} = h_3^5 + h_3^6$									1	1	1	0		
$\sigma_3^{7,5} = h_3^5 + h_3^6 + h_3^7$									1	1	0	0		
$\sigma_3^{8,5} = h_3^8$									1	0	0	1		
$\sigma_3^{9,5} = h_3^9$									0	0	1	0		
$\sigma_4^{10,5} = h_4^{10}$														
$\sigma_4^{11,5} = h_4^{10} + h_4^{11}$														
$\sigma_4^{12,5} = h_4^{12}$														
$\sigma_4^{13,5} = h_4^{10} + h_4^{12} + h_4^{13}$														
$\sigma_6^{14,5} = h_6^{14}$														

Figura 7.16:

	$\sigma_0^{1,6}$	$\sigma_2^{2,6}$	$\sigma_2^{3,6}$	$\sigma_3^{4,6}$	$\sigma_3^{5,6}$	$\sigma_3^{6,6}$	$\sigma_3^{7,6}$	$\sigma_3^{8,6}$	$\sigma_3^{9,6}$	$\sigma_4^{10,6}$	$\sigma_4^{11,6}$	$\sigma_4^{12,6}$	$\sigma_4^{13,6}$	$\sigma_6^{14,6}$
$\sigma_0^{1,6} = h_0^1$														
$\sigma_2^{2,6} = h_2^2$			0	1	1	0	0	0						
$\sigma_2^{3,6} = h_2^3$			0	1	0	0	0	0	1					
$\sigma_3^{4,6} = h_3^4$										0	1	1	0	
$\sigma_3^{5,6} = h_3^5$										0	0	1	0	
$\sigma_3^{6,6} = h_3^5 + h_3^6$										0	0	1	0	
$\sigma_3^{7,6} = h_3^5 + h_3^6 + h_3^7$										1	1	0	1	
$\sigma_3^{8,6} = h_3^8$										1	0	0	0	
$\sigma_3^{9,6} = h_3^5 + h_3^9$										0	0	1	0	
$\sigma_4^{10,6} = h_4^{10}$														
$\sigma_4^{11,6} = h_4^{10} + h_4^{11}$														
$\sigma_4^{12,6} = h_4^{12}$														
$\sigma_4^{13,6} = 2h_4^{10} + h_4^{11} + h_4^{12} + h_4^{13}$														
$\sigma_6^{14,6} = h_6^{14}$														

Figura 7.17:

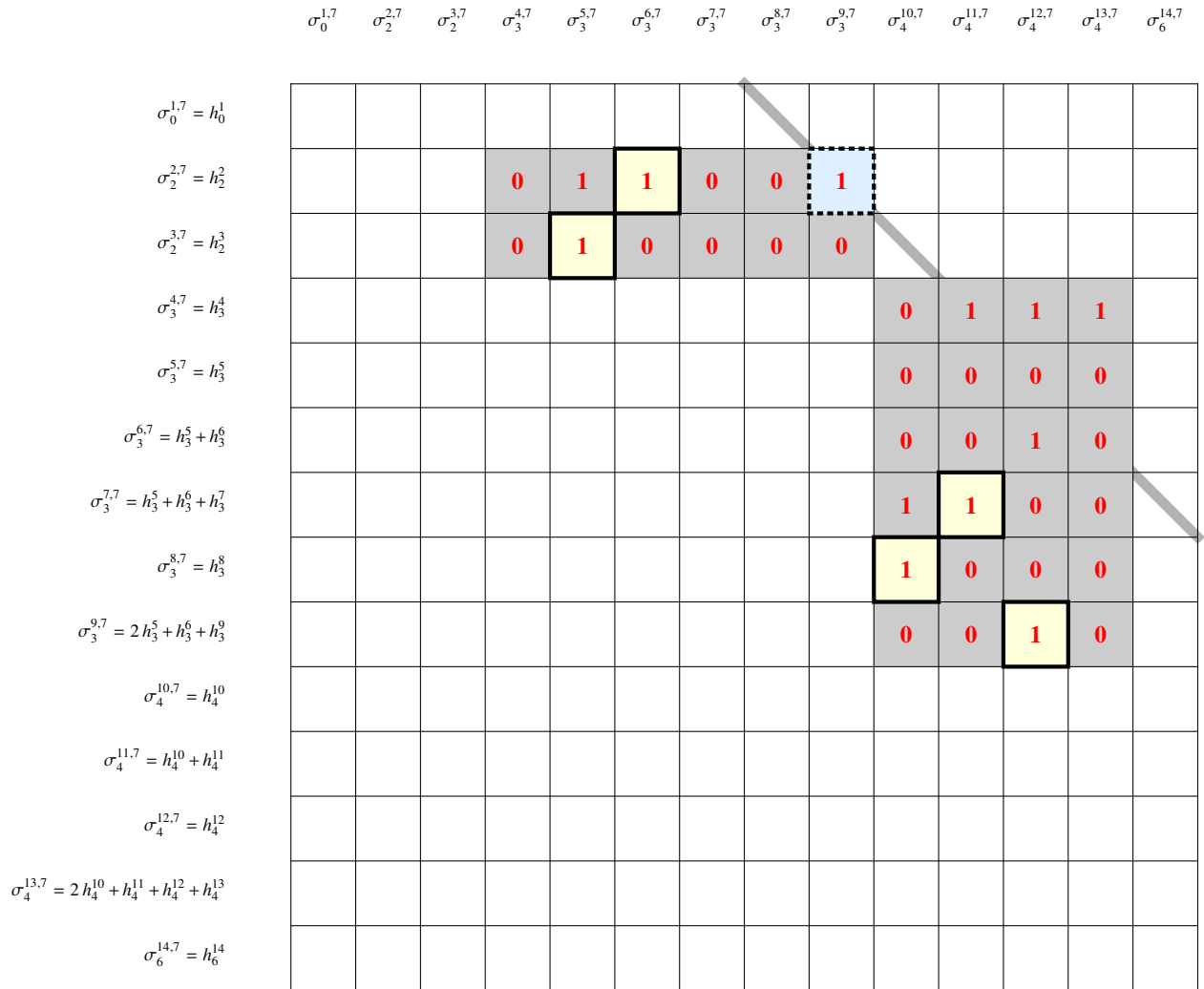


Figura 7.18:

	$\sigma_0^{1,8}$	$\sigma_2^{2,8}$	$\sigma_2^{3,8}$	$\sigma_3^{4,8}$	$\sigma_3^{5,8}$	$\sigma_3^{6,8}$	$\sigma_3^{7,8}$	$\sigma_3^{8,8}$	$\sigma_3^{9,8}$	$\sigma_4^{10,8}$	$\sigma_4^{11,8}$	$\sigma_4^{12,8}$	$\sigma_4^{13,8}$	$\sigma_6^{14,8}$
$\sigma_0^{1,8} = h_0^1$														
$\sigma_2^{2,8} = h_2^2$			0	1	1	0	0	0						
$\sigma_2^{3,8} = h_2^3$			0	1	0	0	0	0						
$\sigma_3^{4,8} = h_3^4$										0	1	1	1	
$\sigma_3^{5,8} = h_3^5$										0	0	0	0	
$\sigma_3^{6,8} = h_3^5 + h_3^6$										0	0	0	0	
$\sigma_3^{7,8} = h_3^5 + h_3^6 + h_3^7$										1	1	0	0	
$\sigma_3^{8,8} = h_3^8$										1	0	0	0	
$\sigma_3^{9,8} = 2h_3^5 + h_3^6 + h_3^9$										0	0	1	0	
$\sigma_4^{10,8} = h_4^{10}$														
$\sigma_4^{11,8} = h_4^{10} + h_4^{11}$														
$\sigma_4^{12,8} = h_4^{12}$														
$\sigma_4^{13,8} = 2h_4^{10} + h_4^{11} + h_4^{12} + h_4^{13}$														
$\sigma_6^{14,8} = h_6^{14}$														

Figura 7.19:

	$\sigma_0^{1,10}$	$\sigma_2^{2,10}$	$\sigma_2^{3,10}$	$\sigma_3^{4,10}$	$\sigma_3^{5,10}$	$\sigma_3^{6,10}$	$\sigma_3^{7,10}$	$\sigma_3^{8,10}$	$\sigma_3^{9,10}$	$\sigma_4^{10,10}$	$\sigma_4^{11,10}$	$\sigma_4^{12,10}$	$\sigma_4^{13,10}$	$\sigma_6^{14,10}$
$\sigma_0^{1,10} = h_0^1$														
$\sigma_2^{2,10} = h_2^2$				0	1	1	0	0	0					
$\sigma_2^{3,10} = h_2^3$				0	1	0	0	0	0					
$\sigma_3^{4,10} = h_3^4$										0	1	1	1	
$\sigma_3^{5,10} = h_3^5$										0	0	0	0	
$\sigma_3^{6,10} = h_3^5 + h_3^6$										0	0	0	0	
$\sigma_3^{7,10} = h_3^5 + h_3^6 + h_3^7$										1	1	0	0	
$\sigma_3^{8,10} = h_3^8$										1	0	0	0	
$\sigma_3^{9,10} = 2h_3^5 + h_3^6 + h_3^9$										0	0	1	0	
$\sigma_4^{10,10} = h_4^{10}$														
$\sigma_4^{11,10} = h_4^{10} + h_4^{11}$														
$\sigma_4^{12,10} = h_4^{12}$														
$\sigma_4^{13,10} = 2h_4^{10} + h_4^{11} + h_4^{12} + h_4^{13}$														
$\sigma_6^{14,10} = h_6^{14}$														

Figura 7.20:

Referências Bibliográficas

- [BaC] Barraud, J.F.; Cornea, O. *Lagrangian intersections and the Serre spectral sequence*
- [BaC1] Barraud, J.F.; Cornea, O. *Homotopical Dynamics in Symplectic Topology*
- [Ch] Chow, T.Y. *You Could Have Invented Spectral Sequences*. Notices American Mathematical Society, 53(1):15-19, 2006.
- [C] Conley, C. *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*. CMBS Regional Conference Series in Mathematics, n. 38. Providence: American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.
- [CdRS] Cornea, O.; de Rezende, K. A.; Silveira, M. R. *Spectral Sequences in Conley's theory*. Ergodic Theory and Dynamical Systems (2009)
- [L] Lima, D.V.S. *Matriz de Conexão via o Complexo de Morse-Witten*. Dissertação de Mestrado - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010.
- [F] Franks, J.M. *Homology and dynamical systems*. CMBS Regional Conference Series in Mathematics, n. 49. Providence: American Mathematical Society, R.I., 1982.
- [Fr1] Franzosa, R.D. *Index filtrations and the homology index braid for partially ordered Morse decompositions..* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 298, n. 1, p. 193-213, November 1986.
- [Fr2] Franzosa, R.D. *The connection matrix theory for Morse decompositions*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 311, n. 2, p. 561-592, February 1989.

- [Fr3] Franzosa, R.D. *The continuation theory for Morse decompositions and connection matrices*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 310, n. 2, p. 781-803, December 1988.
- [H] Hatcher, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press 2002.
- [H1] Hatcher, A. *Spectral Sequences in Algebraic Topology*.
- [K] Katić, J. *Compactification of Mixed Moduli Spaces in Morse - Floer Theory* Disponível em <http://rmmc.asu.edu/TO%20LINDA/3187/katic.pdf>
- [Ma] Massey, W. S. *Singular Homology Theory*. Graduate Texts in Math, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [Mi] Milnor, J. *Morse theory*. Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1968.
- [Mc] McCord, C. *The connection map for attractor-repeller pairs*. Transactions of the American Mathematical Society, vol 307, p. 195-203, 1988.
- [MdRS] Mello, M.; de Rezende, K. A.; Silveira, M. R. *The convergence of Conley's spectral sequence via the sweeping algorithm*. AMS (2009).
- [Mis] Mischikow, K.; Mrozek, M. *The Conley index theory*. July 2000. Disponível em <http://www.ii.uj.edu.pl/~mrozek/>
- [MS] McDuff, D.; Salamon, D. *J-holomorphic Curves and Quantum Cohomology*, AMS, University Lecture Series 6, 1994.
- [PM] Palis, J.; Melo, W. *Geometric theory of dynamical systems An Introduction*. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [R] Reineck, J.F. *The connection matrix in Morse-Smale flows*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 322, n. 2, p. 523-545, December 1990.
- [Ro] Rotman, J. *An Introduction to Algebraic Topology*. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [Sa1] Salamon, D.A. *Connected Simple Systems and The Conley Index of Isolated Invariants Sets*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 291, n. 1, p. 1-41, (1985).

-
- [Sa2] Salamon, D.A. *The Morse Theory, The Conley Index and The Floer Homology*. Bull. London Math.Soc. 22 1990, 113-240.
- [S] Spanier, E. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
- [V] Vick, J.W. *Homology theory An Introduction to algebraic topology*. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [W] Weber, J. *The Morse-Witten complex via dynamical systems*. Expositiones Mathematicae n. 24, 127-159, 2006.