SOLUÇÕES ALGÉBRICAS DE SISTEMAS CONSISTENTES E INCONSISTENTES DE EQUAÇÕES LINEARES

SELMA HELENA de VASCONCELOS ARENALES

Orientador

Prof. Dr. José Vitório Zago

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Julho 79.

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Ao Zago , pela sugestão deste trabalho, orientação e amizade dedicada.

A todos os professores pelo incentivo e orientação durante o curso de pós-graduação.

Aos amigos, pelo apoio e companheirismo durante minha permanência em Campinas.

À Heloisa, Valéria e Olinda pela convivência agradável de todos os dias.

Ao Joni pelo seu constante humor, que tornou mais agradável a realização deste trabalho.

Aos professores da Fafi de Presidente Prudente, pelo apoio e incentivo.

Ao Marcos, pela ajuda na parte computacional, pelo apoio e paciência durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

À CAPES pela bolsa de estudos concedida para o desenvolvimento desta pesquisa.

SUMÁRIO

Este trabalho tem por finalidade apresentar métodos para resolver sistemas consistentes e inconsistentes de equações lineares.

CAPÍTULO I : Uma variação no método de Gauss, com uma estratégia diferente na escolha dos pivôs.

CAPÍTULO II: Minimização de resíduo no senso da norma L_∞ , usando programação linear.

CAPÍTULO III: Algorítmos para determinar uma solução de norma mínima L_∞ de sistemas consistentes de equações lineares.

ÍNDICE

Notações e Definições

1. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \quad , \quad i = 1, \ldots, n\}$.

2. $x = (x_i)_{n\times 1}$: um vetor coluna com n componentes.

3. x' : o transposto do vetor x.

4. $A = (a_{ij})_{m\times n}$: matriz de ordem $m\times n$.

5. A' : a transposta da matriz A.

6. $L_\infty(x) = \|x\|_\infty = \max\ \{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ para $x \in R^n$.

7. $L_1(x) = \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ para $x \in R^n$.

8. ℓ_1^n : o espaço $\mathbb{R}^n$ munido da norma L_1.

9. ℓ_∞^n : o espaço $\mathbb{R}^n$ munido da norma L_∞.

10. Para $x \in R^n$,

$\operatorname{sgn}(x) = ((\operatorname{sgn}(x))_j)_{n\times 1}$ onde

$$(\operatorname{sgn}(x))_j = \operatorname{sgn}(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x_j > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x_j = 0 \\ -1 & \text{se} \quad x_j < 0 \end{cases}$$

11. Problema padrão de programação linear :

$$\min c'x$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{(problema primal)}$$

12. Problema dual do problema em (11)

$$\max y'b$$
$$\begin{cases} A'y \leq c \end{cases}$$

13. Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ com $m < n (m > n)$ satisfaz a condição de Haar, se toda sub-matriz $m \times m$ $(n \times n)$ de A é não singular.

SÍMBOLOS

Símbolos	Significado
$\Longrightarrow$	implica
$\neq$	diferente
$\in$	pertence
$\notin$	não pertence
$\Longleftrightarrow$	se e somente se
ϕ	conjunto vazio

CAPÍTULO 1

"UMA VARIAÇÃO NA ELIMINAÇÃO DE GAUSS"

INTRODUÇÃO:

Dado um sistema $n \times n$ de equações lineares

$$Ax = b ,$$

determinar a solução deste sistema é achar $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots x_n a_n = b$ onde a_j é j-ésima coluna da matriz A, e x_j é a j-ésima componente da solução x.

O algorítmo resolve sistemas lineares usando estraté- gias de pivotamento, de maneira a tornar a norma L_∞ do resíduo $r = b - Ax$ menor que $\varepsilon > 0$ dado.

Desenvolvimento:

O algorítmo proposto é baseado no método de eliminação de Gauss, com uma nova escolha dos pivôs.

Requer uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, um vetor $b = [b_1, \ldots, b_n]'$ e um número $\varepsilon > 0$.

Dado o sistema $Ax = b$. Para uma solução inicial $x^{(o)} = (0, 0 \ldots 0)$ teremos o resíduo $r^{(o)} = b - Ax^{(o)}$.

Seja $L = 1$. Tome a componente de $r^{(o)}$ de maior valor absoluto. Nesta linha, tome o maior elemento em valor absoluto da matriz A. Esse elemento escolhido será o pivô determinado.

Trocas de linhas e colunas são efetuadas de maneira que a linha escolhida seja trocada com a L-ésima linha, e o pivô ocupe a (L, L) ésima posição.

Aplica-se o método de eliminação de Gauss, e obteremos $x^{(L)} = (x_1^{(L)}, 0 \ldots 0)$ colocando os parâmetros que não são escolhidos iguais a zero, e o parâmetro restante por substituições na L-ésima linha da matriz A.

Para esta solução, teremos o resíduo $r^{(L)} = b - A(P_L x^{(L)})$ onde P_L é a matriz de permutação que se refere as trocas de colunas para a determinação da solução $x^{(L)}$.

Faça $L = L + 1$ e novamente uma escolha é feita no resíduo atual, e um novo pivô é determinado. Procede-se como anteriormente.

Para $L = k$, obteremos $x^{(k)} = x_1^{(k)}, x_2^{(k)} \ldots x_k^{(k)}, 0 \ldots 0)$ e o resíduo correspondente $r^{(k)} = b - A(P_k x^{(k)})$.

A solução $x^{(k)}$ como antes é obtida pela substituição nas primeiras k equações do atual sistema obtido, e que se satisfazer a desigualdade $\| b - AP_k x^{(k)} \|_\infty < \varepsilon$, teremos uma solução aproximada para o sistema dado.

Normalmente $x^{(k)}$ tem k componentes diferentes de zero, aquelas componentes que irão satisfazer k equações do sistema original (com negligência de erros de arredondamento)

Para a solução $x^{(o)} = (0, 0 \ldots 0)$ temos um resíduo cor respondente $r^{(o)} = (b_1, b_2 \dots b_n)'$. Para a solução $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, 0, 0 \dots 0)$ o resíduo correspodente será $r^{(1)} = (0, b_2^{(1)}, \dots, b_n^{(1)})$. Generalizando, depois do k-ésimo passo da eliminação de Gauss, para $k = 0,\dots,n-1$ teremos a solução aproximada $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)} \dots x_n^{(k)}, 0 \dots 0)$ e o correspondente resíduo $r^{(k)} = (0,\dots 0, b_{k+1}^{(k)},\dots,b_n^{(k)})$ tal que $r^{(k)} = b - A(P_k x^{(k)})$.

As componentes de $r^{(k)}$ diferentes de zero, ocorrem depois do k-ésimo passo; e podem ser analisadas apenas olhando o atual vetor b mas n-k equações.

Devido trocas de linhas durante o processo, é necessário guardar a ordem dessas trocas, para posterior substituição da solução aproximada $x^{(k)}$ $k = 1,\dots,n-1$, e obtenção dos respectivos resíduos, antes da n-ésima iteração de Gauss.

Caso executarmos o algorítmo em $n-1$ passos teremos a solução exata do sistema dado (a menos de erros de arredondamento).

ALGORÍTMO

Seja um sistema $n \times n$ de equações lineares $Ax = b$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

1º Passo: Tome $x^{(o)} = (0, 0 \ldots 0)$, $\varepsilon > 0$ e $k = 1$

2º Passo: Selecionar dentre as últimas n-k+1 equações, a maior componente do vetor b_k em valor absoluto; onde b_k são vetores modificados pelas trocas de linhas e operações de pivotamento.

3º Passo: Selecionar nesta equação dentre os n-k+1 coeficientes, o de maior valor absoluto, que será escolhido como pivô.

4º Passo: Determinado k_ésimo pivô, executa-se a eliminação de Gauss.

5º Passo: Se $\| b - AP_k x^{(k)} \|_\infty < \varepsilon$, então $x^{(k)}$ é a solução aproximada. Caso contrário faça $k = k+1$ e vá para o passo 2.

ANÁLISE DO ALGORÍTMO

1. O algorítmo apresentado é usado quando os resíduos podem tornar-se pequenos, resolvendo o sistema para k parâmetros e fazendo os demais zero .

2. A cada passo, quando tomamos o maior resíduo atual, este é forçado a tornar-se zero.

3. A escolha dos pivôs como maior elemento em cada linha dá ao algorítmo a mesma estabilidade do método de Gauss com pivotamento parcial.

EXEMPLO:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 89 \\ x_1 + 4x_2 + 16x_3 = 209 \\ x_1 + 5x_2 + 25x_3 = 201 \end{cases} \qquad (1)$$

i) Aplicando o algorítmo apresentado teremos:

$$\begin{cases} 16\, x_3^* + 4x_2 + x_1 = 209 \\ \quad 3/4\ x_2 + 15/15\ x_1 = 1215/16 \\ \quad -5/4\ x_2^* - 9/16\ x_1 = -2009/16 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} 16x_3^* + 4x_2 + x_1 = 209 \\ -5/4\ x_2 - 9/16\ x_1 = -2009/16 \\ \qquad 3/5\ x_1 = 3/5 \end{cases} \qquad (3)$$

Resolvendo (3) por substituição, teremos a solução exata

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 100 \qquad x_3 = -12$$

3) mostra também uma solução aproximada

$x^{(2)} = (0, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})'$ que corresponde ao resíduo

$r^{(2)} = (3/5, 0, 0)'$ colocando $x_1 = 0$, substituindo nas duas primeiras equações $x^{(2)} = (0, \frac{2009}{20}, -\frac{241}{20})'$.

ii) Aplicando o método de eliminação de Gauss ao sistema (1) teremos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 89 \\ 3x_2 + 15x_3 = 120 \\ 4x_3 = -48 \end{cases}$$

$x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, 0)$ que corresponde ao resíduo $r^{(2)} = b - Ax^{(2)}$

colocando $x_3 = 0$ teremos $x^{(2)} = (49, 40, 0)'$ e

o correspondente resíduo será $r^{(2)} = (0, 0, -48)'$

iii) Aplicando ao sistema (1) o método de Gauss com pivotamento parcial.

Trocas de linhas e colunas são efetuadas.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 89 \\ 4x_2 + 2yx_3 = 112 \\ -3x_3 = 36 \end{cases}$$

Desde que a 2ª e 3ª equação foram trocadas, colocando $x_3 = 0$, teremos $x^{(2)} = (61, 28, 0)$ e o respectivo resíduo
$r^{(2)} = (0, 36, 0) = b - Ax^{(2)}$.

Podemos observar que nos casos ii) e iii) em nenhum deles depende do resíduo. Ao contrário o algorítmo apresentado além de determinar uma solução aproximada, obtemos um resíduo bem menor comparado nos outros dois casos citados acima, a cada passo.

Note que o sistema dado no exemplo acima, pode ser obtido quando a função $\{(1,89), (4,209), (5,201)\}$ é interpolada pela função $f(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$.

Para os casos:

i) obtivemos $x^{(2)} = (0, \frac{2009}{20}, -\frac{241}{20})'$ ou

$$f_1(t) = \frac{2009}{20} t - \frac{241}{20} t^2$$

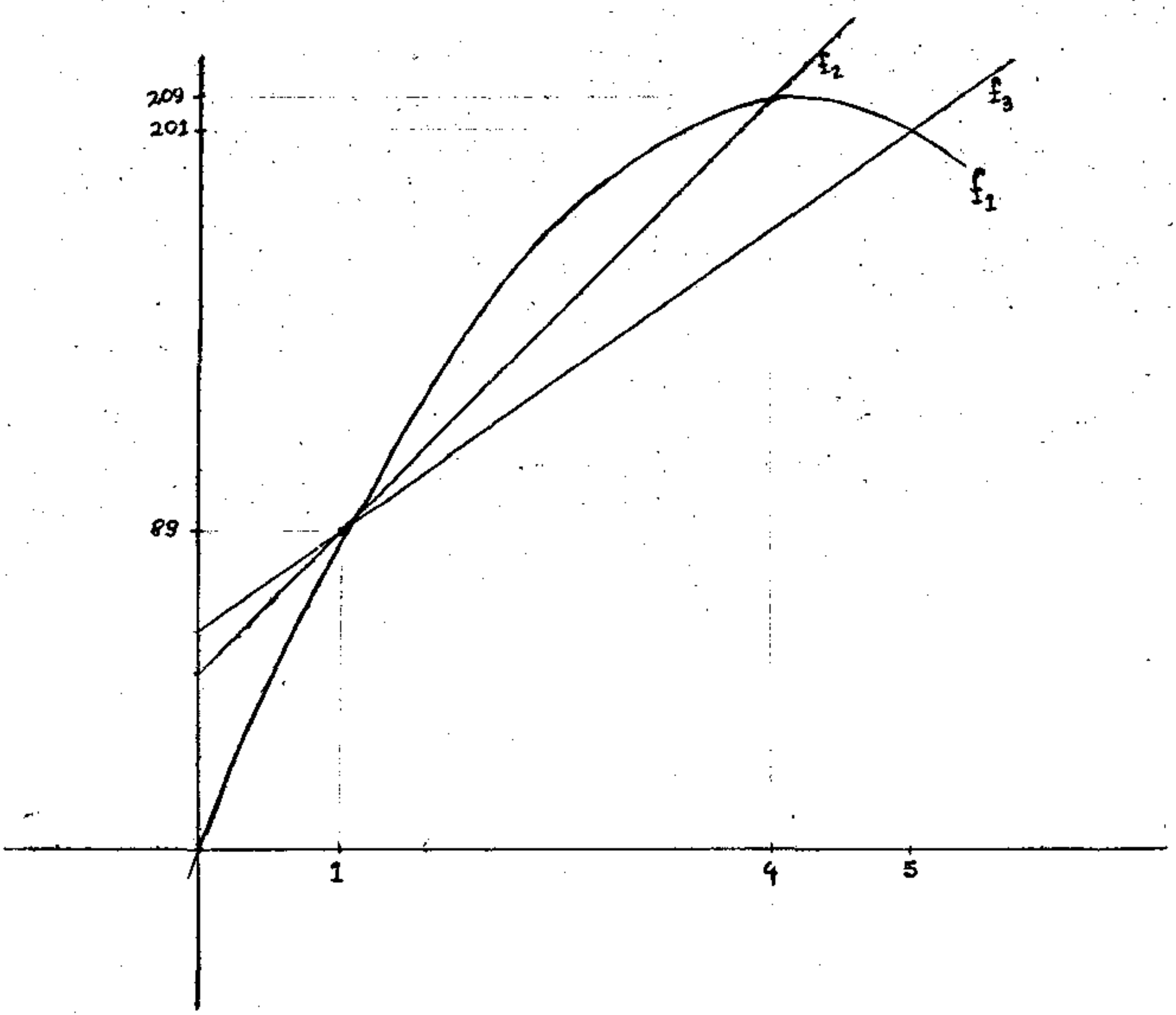
ii) obtivemos $x^{(2)} = (49, 40, 0)'$ ou

$$f_2(t) = 49 + 40 t$$

iii) obtivemos $x^{(2)} = (61, 28, 0)$ ou

$$f_3(t) = 61 + 28\,t$$

e $f(t) = 1 + 100t - 12\,t^2$ a função interpoladora.



Observamos que o gráfico de f e f_1 quase coincidem no intervalo [1,5].

Análise de erro.

O método de eliminação de Gauss com pivotamento parcial decompõe a matriz A em:

$$PA = LU$$

onde P é uma matriz de permutação especificando trocas de linhas; L é uma matriz triangular inferior com 1 na diagonal formada pelos multiplicadores com $|\ell_{ij}| \leq 1$ para $i > j$ e a matriz U é triangular superior, resultante no (n-1)-ésimo passo de Gauss com pivotamento parcial.

No algorítmo apresentado, temos:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \; a_{kj}^{(k-1)} \qquad (1)$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \left[\frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \right] a_{ik}^{(k-1)} = a_{ij}^{(k-1)} - n_{kj} \, a_{ik}^{(k-1)}$$

onde $n_{kj} = \left[a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \right]$ e $a_{kk}^{(k-1)}$ $\qquad k = 1, n-1$

é o maior elemento em módulo na k-ésima linha da matriz $A^{(k-1)}$.

logo $|n_{kj}| \leq 1$ $\qquad$ (2)

De (1) e (2) temos:

$$|a_{ij}^{(k)}| \leq |a_{ij}^{(k-1)}| + |a_{ik}^{(k-1)}|$$

Seja a_o tal que $\max\limits_{i,j} |a_{ij}^{(o)}| \leq a_o$.

então:

$$a = \max_{i,j,k} |a_{ij}^{(k)}| \leq 2^{n-1} a_o \qquad (3)$$

Logo, o limite (3) obtido para nosso algorítmo é exatamente o mesmo para eliminação de Gauss com pivotamento parcial (Ref. 6).

O algorítmo apresentado resulta na fatorização

$$QAP = \hat{L}\,\hat{U} \qquad (4)$$

onde Q e P são matrizes de permutação especificando trocas de linhas e colunas respectivamente; $\hat{L}$ é uma matriz triangular inferior com 1 na diagonal formada pelos multiplicadores e a matriz $\hat{U}$ é triangular superior resultante no (n-1)-ésimo passo da eliminação de Gauss.

Não temos que $|\hat{\ell}_{ij}| \leq 1$ para $i > j$, mas temos que $|\hat{u}_{ii}| \geq |\hat{u}_{ij}|$ $(i < j)$, pois $\hat{u}_{ii}$ é o maior elemento na i-ésima linha.

Tomando a transposta em (4) temos:

$$(QAP)' = (\hat{L}\hat{U})' \quad \text{ou}$$

$$P'A'Q' = \hat{U}' \cdot \hat{L}' \qquad (5)$$

Podemos escrever $\hat{U}'$ por

$$\hat{U}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\hat{u}_{21}}{\hat{u}_{11}} & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ \frac{\hat{u}_{n1}}{\hat{u}_{11}} & \cdots & \frac{\hat{u}_{n\,n-1}}{\hat{u}_{n-1\,n-1}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{u}_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \hat{u}_{n\,n} \end{bmatrix} =$$

$$= L \cdot E$$

onde $\ell_{ij} = \dfrac{\hat{u}_{ij}}{\hat{u}_{ii}} \qquad i > j$

$\ell_{ij} = 0 \qquad i < j$

$\ell_{ii} = 1$

Seja $U = E \cdot \hat{L}'$, então temos de (5):

$$P'A'Q' = L(E\hat{L}')$$

$$P'A'Q' = L \cdot U$$

onde L é uma matriz triangular inferior com $|\ell_{ij}| \leq 1 \quad i > j$ e U é uma matriz triangular superior.

Logo, o algorítmo apresentado é equivalente ao método de eliminação de Gauss com pivotamento parcial.

Comentários:

1. A escolha das linhas no passo 2, pode ser alterada se normalizarmos a matriz A.
   Considerando o exemplo dado, notamos que normalizando a matriz do sistema, temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 39 \\ 1/16x_1+4/16x_2+x_3 = 209/16 \\ 1/25x_1+5/25x_2+x_3 = 201/25 \end{cases}$$

O maior resíduo será dado pela primeira equação, enquanto que anteriormente o maior resíduo era dado pela segunda equação.

2. A idéia do algorítmo é forçar o maior resíduo em módulo tornar-se zero, porém nada é garantido que os resíduos decresçam a cada passo.

Considere o exemplo:

$$\begin{cases} 1x_1 + 0{,}5x_2 = 10 \\ 1x_1 + 0{,}2x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 = 10 \\ \quad - 0{,}3x_2 = -13 \end{cases}$$

Temos que;

$$\|r^{(o)}\|_\infty = 10$$

$$\|r^{(1)}\|_\infty = 13$$

CAPÍTULO 2

MINIMIZAÇÃO RESIDUAL

"<u>Minimização de resíduos por programação linear</u>"

INTRODUÇÃO:

Dado um sistema de equação lineares m×n

$$Ax = b \qquad (1)$$

onde $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e b um vetor m×1, a norma infinita do resíduo $r = b - Ax$ será minimizada. Apresentaremos um procedimento que transforma o problema $\min \|b-Ax\|_\infty$ num problema padrão de programação linear.

O método simplex será aplicado a este problema, e determinaremos a solução $x^0 = (x_j)$ $j = 1,\ldots,n$.

Desenvolvimento:

Seja $Ax = b$ um sistema de equações lineares onde $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $b = (b_i)_{m\times 1}$

Determinaremos x^0 tal que $\|b-Ax^0\|_\infty \leq \|b-Ax\|_\infty$ qualquer que seja $x \in R^n$

Para efeito de tornar as variáveis positivas, vamos definir:

$$\alpha_{n+1} = \max\ (0, -\min_j x_j) \quad \text{tal que,}$$

$$\alpha_j = x_j + \alpha_{n+1} \implies x_j = \alpha_j - \alpha_{n+1}$$

Para $i = 1,2,\ldots,m$, temos:

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha_j - \alpha_{n+1}) - b_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \alpha_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \alpha_{n+1} - b_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}\, \alpha_j - b_i$$

onde colocaremos $a_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

O problema é minimizar $\max\limits_{i=1,m} |r_i|$

Seja $w = \max\limits_{i=1,m} |r_i| = \max \left| \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}\, \alpha_j - b_i \right|$

Temos que

$$\left| \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}\, \alpha_j - b_i \right| \leq w \iff \begin{cases} -\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}\, \alpha_j + w \geq -b_i \\ +\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}\, \alpha_j + w \geq b_i \\ \quad i = 1,2,\ldots,m \end{cases}$$

Portanto, o problema se resume em:

$$\min w = \min_{i=1,m} (\max |r_i|) \qquad (2)$$

sujeito a 2m restrições

$$\begin{cases} - \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}\, \alpha_j + w \geq -b_i \\ \\ + \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}\, \alpha_j + w \geq b_i & i = 1,m \end{cases}$$

Colocando o problema (2) na forma matricial temos:

Seja $\hat{A} = (A,\ a_{i,n+1})$

onde $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $a_{i\ n+1} = (a_{1\ n+1}, \ldots, a_{m\ n+1})'$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{bmatrix} \qquad e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Então :

$$\begin{cases} - \hat{A}\alpha + e\, w \geq - b \\ \\ + \hat{A}\alpha + e\, w \geq b \end{cases}$$

Portanto :

$$\text{Min } (0 \;\; 0 \ldots 0 \;\; 1) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \\ w \end{bmatrix}$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} -\hat{A}\alpha + ew \geq -b \\ \hat{A}\alpha + ew \geq b \\ \alpha \geq 0 \quad w \geq 0 \end{cases}$$

ou ainda

$$\text{Min } (0 \ldots 0 \;\; 0 \;\; 1) \begin{matrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \\ w \end{matrix} \qquad (3)$$

$$\text{sujeito} \begin{bmatrix} -\hat{A} & e \\ \hat{A} & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ w \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -b \\ b \end{bmatrix}$$

$$\alpha \geq 0 \quad w \geq 0$$

Na prática tomaremos o dual do problema (3) notando que de 2m restrições, passaremos a n+2 restrições.

O dual do problema (3)

$$\max \;\; (-b'b') \;\; \binom{t}{s}$$

$$\text{sujeito} \begin{bmatrix} -\hat{A}' & \hat{A}' \\ e' & e' \end{bmatrix} \binom{t}{s} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou ainda:

$$\max \quad (-b'b') \binom{t}{s}$$

$$\text{sujeito} \begin{cases} -\hat{A}'t + \hat{A}'s \leq 0 \\ e't + e's \leq 1 \\ s_i \geq 0 \quad t_i \geq 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Acrescentando as variáveis de folga no problema (4), teremos o problema padrão de programação linear.

Aplica-se o método simplex ao problema (4) onde o maior valor da função objetiva no dual, corresponde ao mínimo valor da função objetiva no primal.

APLICAÇÃO

Podemos aplicar nosso procedimento de minimização residual para a teoria de aproximação de funções.

Seja $f(y)$ uma função real definida no conjunto $Y = \{y_1,\ldots,y_m\}$. Dado um conjunto de n funções reais $c\ell_j(y)$, o problema é determinar uma combinação linear destas funções dadas que melhor se aproxime à função f nos pontos y_i $i = 1,\ldots,m$ no senso da norma L_∞.

Seja $F(x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \, c\ell_j(y)$, onde

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a função aproximação.

Portanto, determinaremos $x^o = (x_j)$ $j = 1, \ldots, n$ tal que,

$$\max_{y \in Y} |F(x^o, y) - f(y)| \leq \max_{y \in Y} |F(x, y) - f(y)| \qquad (5)$$

Definindo

$$b_i = f(y_i) \qquad i = 1, m$$

$$a_{ij} = c\ell_j(y_i) \qquad i = 1, m$$

O problema é então determinar x^o tal que

$$\|Ax^o - b\|_\infty \leq \|Ax - b\|_\infty \qquad \text{conforme } (5)$$

O sistema a ser resolvido:

$$\begin{bmatrix} c\ell_1(y_1) & c\ell_2(y_1) & \cdots & c\ell_n(y_1) \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ c\ell_1(y_m) & c\ell_2(y_m) & \cdots & c\ell_m(y_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(y_1) \\ f(y_2) \\ \vdots \\ f(y_m) \end{bmatrix}$$

EXEMPLO:

Determine a melhor aproximação no senso da norma L_∞ da função f, tal que

$f(0) = 1.520$, $f(1) = 1.025$, $f(2) = 0.475$, $f(3) = 0.010$,

$f(4) = -0.475$, $f(5) = -1.005$; pela função

$F = x_1\ c\ell_1(y) + x_2\ c\ell_2(y)$ onde $c\ell_1(y) = 1$ e $c\ell_2(y) = y$.

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.520 \\ 1.025 \\ 0.475 \\ 0.010 \\ -0.475 \\ -1.005 \end{bmatrix}$$

$$x_j = \alpha_j - \alpha_{n+1}$$

Como $F = \sum_{j=1}^{2} x_j\ c\ell_j(y) = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j\ c\ell_j(y) - \alpha_{n+1} \sum_{j=1}^{2} c\ell_j(y)$

$$= \alpha_1\ c\ell_1(y) + \alpha_2\ c\ell_2(y) - \alpha_3\ c\ell_3(y)$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 \cdot y - \alpha_3(1+y)$$

onde $c\ell_3(y) = \sum_{j=1}^{2} c\ell_j(y)$

Então, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.520 \\ 1.025 \\ 0.475 \\ 0.010 \\ -0.475 \\ -1.005 \end{bmatrix}$$

O problema é:

$$\max \ (-b'b') \binom{t}{s}$$

$$\begin{bmatrix} -\hat{A}' & \hat{A}' \\ e' & e' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$t_i \geq 0 \quad e \quad s_i \geq 0 .$$

Então:

$$\max \ (-1.520 \ldots -1.005 +1.520 \ldots +1.005) \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_6 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_6 \end{bmatrix}$$

$$\text{sujeito} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_6 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_6 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Colocando as variâveis de folga, depois de aplicar o método simplex, teremos o seguinte resultado

$$F = \alpha_1 + \alpha_2\, y - \alpha_3\, (1+y) = 2.000 - 0.500\ (1+y)$$
$$= 1.500 - 0.500\ y$$

y	0	1	2	3	4	5
F	1.500	1.000	0.500	0.000	-0.500	-1.000
f - F	0.020	0.025	-0.025	0.010	0.025	-0.005

como $\alpha_1 = 2.000$

$\alpha_2 = 0.000$

$\alpha_3 = 0.500$

e $x_j = \alpha_j - \alpha_{n+1}$ $\quad j = 1,n$

temos:

$$x_1 = \alpha_1 - \alpha_3 = 2.000 - 0.500 = 1.500$$

$$x_2 = \alpha_2 - \alpha_3 = 0.000 - 0.500 = -0.500$$

$$x^o = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.500 \\ -0.500 \end{bmatrix}$$

logo:

$$\max |F(x^o, y_i) - f\ (y_i)| = 0.025\ ,$$

como dado na tabela acima.

CAPÍTULO 3

"SOLUÇÃO DE NORMA MÍNIMA DE UM SISTEMA CONSISTENTE DE EQUAÇÕES LINEARES"

1º Algorítmo finito para solução de norma L_∞ mínima de um sistema consistente de equações lineares .

INTRODUÇÃO:

Dado um sistema consistente de equações lineares

$$Ax = b \qquad (1)$$

onde $A=(a_{ij})$, posto $(A) = m$ com $m < n$, $b = (b_i)_{m\times 1}$ e $x=(x_i)_{n\times 1}$.

Desde que o posto $(A) = m$ e $m < n$, segue que o sistema de equações (1) tem infinitas soluções.

Seja $S = \{x$ tal que $Ax = b\}$. O propósito do algorítimo é determinar $\min \|x\|_\infty$ tal que $x \in S$; ou seja determinar a solução do sistema (1) que tenha a maior componente em valor absoluto o menor possível. Para o desenvolvimento do algorítmo é necessário considerar que a matriz A satisfaça a condição de Haar.

Desenvolvimento:

DEFINIÇÃO: O vetor $w \in \ell_1^n$ e $z \in \ell_\infty^n$ são alinhados se

$$w'z = \sum_{i=1}^{n} w_i z_i = \|w\|_1 \cdot \|z\|_\infty$$

LEMA 1: Se $w \neq 0 \in \ell_1^n$, somente os vetores

$z = (z_i)$ tal que

$$z_i = \begin{cases} \alpha \quad \operatorname{sgn}[w_i] & \text{se } w_i \neq 0 \\ \alpha_i & \text{se } w_i = 0 \end{cases}$$

são alinhados com w, onde $\alpha \geq 0$ e $|\alpha_i| \leq \alpha$.

TEOREMA 1. Dado um sistema consistente $Ax = b$

onde $A = (A_{ij})_{m \times n}$ então:

$$\begin{array}{ll} \min \|x\|_\infty = \max b'u \\ Ax = b \qquad \|A'u\|_1 \leq 1 \end{array}$$

e "x" ótimo e $A'u^o$ são alinhados.

(Prova - Ref. 5).

TEOREMA 2. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ com posto $(A) = m$ e b um vetor $m \times 1$, então existe um vetor u^o $m \times 1$ tal que

$$b'u^o = \max_{\|A'u\|_1 \leq 1} b'u = \max_{\|A'u\| = 1} b'u$$

e pelo menos $m-1$ das componentes de $A'u^o$ são zeros; isto é

$$a_i'u^o = 0 \quad \text{para} \quad i \in \Omega = \{i_1, \ldots, i_{m-1}\},\ 1 \leq i_k \leq n$$

onde a_i é a i-ésima coluna da matriz A. Além disso, o conjunto

$$\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{m-1}}\} \text{ é linearmente independente.}$$

PROVA: Assumimos que existe um vetor ótimo u^o tal que q componentes de $A'u^o$ são zeros, onde $0 \leq q < m-1$, isto é,

$$a'_{i_j}u^o = 0 \quad \text{com} \quad 1 \leq j \leq q \quad \text{e} \quad 1 \leq i_j \leq n .$$

O vetor ótimo deve satisfazer

$\|A'u^o\|_1 = 1$, pois $b'u$ é uma função linear e $\|A'u\|_1 \leq 1$ é um conjunto fechado.

Seja $\sigma = \text{sgn}\left[A'u^o\right]$, então

$$\|A'u^o\|_1 = \sigma'A'u^o = 1 \qquad (2)$$

Vamos perturbar o vetor u^o da seguinte forma

$$u^o + \Delta u \quad \text{tal que}$$

$$\text{sgn}[A'(u^o + \Delta u)] = \text{sgn}\,[A'u^o] = \sigma \qquad (3)$$

Esta perturbação implica que $A'(u^o+\Delta u)$ tem o mesmo si_nal das componentes de $A'u^o$.

Desde que o máximo do problema dual ocorre para u tal que $\|A'u\|_1 = 1$, a perturbação no vetor u^o seria construída por:

$$\|A'(u^o+ \Delta u)\|_1 = \sigma'A'(u^o+\Delta u) = \sigma'A'u^o + \sigma'A'\Delta u = 1$$

Entretanto, por (2), teremos que :

$$\sigma'A'\Delta u = 0 \qquad (4)$$

Isto é, o vetor perturbação Δu deve ser ortogonal ao vetor $A\sigma$.

Vamos mostrar que é possível escolher a perturbação $\Delta u \neq 0$ que satisfaça (3) e (4).

Seja $M = \{$o conjunto de vetores ortogonais aos vetores

$$a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}, A\sigma\} .$$

Claramente, M é um subespaço do R_m com $\dim(M) \geq m - (q+1) = m-q-1$. A dimensão de M seria $m-q-1$ somente se os vetores $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}, A\sigma\}$ fossem linearmente independentes.

Tomando-se o vetor $\Delta u \in M$, (4) é satisfeita imediatamente. Para stisfazer (3), observamos que se

$$\delta = \min |a_i' u^o| \quad \text{para} \quad i \neq i_j \quad 1 \leq j \leq q ,$$

então selecionando $\Delta u \in M$, tal que $\|A'\Delta u\|_\infty < \delta$ (3) é satisfeita.

Com o vetor Δu selecionado vem

$$b'(u^o+\Delta u) = b'u^o+b'\Delta u$$

como u^o resolve o problema dual, então $b'\Delta u = 0$.

Assim $b'(u^o+\Delta u) = b'u^o$.

Seja $\hat{u}^o = u^o+\varepsilon\Delta u$ onde ε é um escalar.

Variando ε (positiva ou negativamente), pelo menos uma componente original de $A'u^o$ não zero é conduzida a zero em primeiro lugar; desde que posto $(A) = m$ e $\dim(M) \geq m-q-1 > 0$.

Com esta perturbação do vetor u^o, o valor ótimo é mantido, enquanto que uma componente adicional de $A'u^o$ é forçada a ser zero.

Uma perturbação à $\hat{u}^0$, análoga à u^0, conduz outra componente não zero de $A'\hat{u}^0$ a ser zero, enquanto mantém-se o valor ótimo.

Continuando este processo, até que dim(M) = 0, se numa dada situação

$$M = \{\text{conjunto dos vetores ortogonais aos vetores } a_{i_1}, \ldots, a_{i_N}, A\sigma\}$$

e dim(M) = 0, então existe pelo menos m-1 vetores linearmente independentes no conjunto $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_N}\}$.

(c.q.d)

O objetivo do algorítmo é resolver o seguinte problema

$$\begin{array}{l} \min \|x\|_\infty \\ Ax = b \end{array}$$

Pelo T. 1 temos que:

$$\begin{array}{ll} \min \|x\|_\infty = & \max b'u \\ Ax = b & \|A'u\|_1 \leq 1 \end{array}$$

Pelo T. 2 temos que:

$$\begin{array}{lll} b'u^0 = & \max b'u & = \max b'u \\ & \|A'u\|_1 \leq 1 & \|A'u\|_1 = 1 \end{array}$$

Então, podemos concluir que o problema inicial dado é resolvido, desde que determinemos um vetor "u^o" no problema dual, i.é.:

$$\min \|x\|_\infty = b'u^o$$
$$Ax = b$$

tal que $a_i'u^o = 0$ para $i = 1,\ldots,m-1$ conforme T. 2.

Usaremos o fato de que a solução do problema dual é ortogonal a m-1 colunas linearmente independentes da matriz A.

Vamos gerar um conjunto de vetores $U = \{u_1,\ldots,u_N\}$ tal que:

a) cada vetor gerado é ortogonal a m-1 colunas de A linearmente independentes.

b) cada vetor gerado satisfaz a condição $\|A'u\|_1 = 1$ como requer o T. 2; e N é limitado por $\binom{n}{m-1}$

Como este limite superior pode ser excessivamente grande, o número de soluções factíveis N pode ser grande, havendo então a necessidade de um procedimento algorítmico.

A solução do problema dual é determinar $u \in U$ tal que:

$$b'u^o = \max \{\pm b'u_1,\ldots,\pm b'u_N\} = \max \{|b'u_1|,\ldots,|b'u_N|\}$$

Usaremos a condição de alinhamento entre $A'u^o$ e x para determinar a solução ótima x, conforme T.1.

Pelo Lema 1, a solução desejada é do tipo $x = (x_i)$ onde

$$x_i = \begin{cases} b'u^o \operatorname{sgn} [A'u^o]_i & \text{se } [A'u^o]_i \neq 0 \\ \alpha_i & \text{se } [A'u^o]_i = 0 \end{cases}$$

com $|\alpha_i| \leq b'u^o$.

O algorítmo escolhe inicialmente $u \in U$, ortogonal a m-1 colunas linearmente independentes de A, e que satisfaz $\|A'u\|_1 = 1$.

A matriz A será particionada em duas sub-matrizes F e G, onde $F = (f_{ij})_{m\times(m-1)}$ e posto (F) = m-1; que corresponde às colunas da matriz A que são ortogonais à atual solução factível.

A matriz $G = (g_{ij})_{m\times(n-m+1)}$ corresponde às colunas restantes da matriz A.

Podemos escrever o sistema de equações original da seguinte forma:

$$Ax = Fx^F + Gx^G = b$$

onde $x = \begin{bmatrix} x^F \\ \hline x^G \end{bmatrix}$ e x^F é um vetor $(m-1)\times 1$

enquanto que x^G é um vetor $(n-m+1)\times 1$.

O algorítmo será baseado na idéia de troca de uma coluna da matriz F, com uma coluna da matriz G, formando novas matrizes $\overline{F}$ e $\overline{G}$. Esta troca é feita de maneira que "b'u" sempre aumente em cada iteração. Como o número de partição de uma matriz é finito, i.é $\binom{n}{m-1}$, segue que a solução do problema dual converge num número finito de iterações.

Usaremos o fato de que:

LEMA 2. a) se $\|x^F\|_\infty \leq b'u$, então $A'u$ e x são alinhados

b) se $\|x^F\|_\infty > b'u$, então $A'u$ e x não são alinhados.

PROVA:

a) Por definição $A'u$ e x são alinhados se:

$$(A'u)'x = \|A'u\|_1 \, \|x\|_\infty \tag{5}$$

Temos que $x = \begin{bmatrix} x^F \\ \hline x^G \end{bmatrix}$ e $x^G = (b'u)\ \text{sgn}\ (G'u)$ e $\|A'u\|_1 = 1$

Por outro lado:

$$\|x^G\|_\infty = \|(b'u)\ \text{sgn}\ (G'u)\|_\infty = |b'u|\,\|\text{sgn}\ (G'u)\|_\infty$$

$$\|A'u\|_1 = \left\|\begin{bmatrix} F'u \\ \hline G'u \end{bmatrix}\right\|_1 = \left\|\begin{bmatrix} 0 \\ \hline G'u \end{bmatrix}\right\|_1 = \|G'u\|_1 = 1$$

logo

$$[G'u]_i \neq 0 \implies \text{sgn}\ (G'u)_i = \pm 1 \implies \|\text{sgn}\ (G'u)\|_\infty = 1$$

Por hipótese $0 \leq \|x^F\|_\infty \leq b'u$, portanto $b'u \geq 0$

Então:

$$\|x^G\|_\infty = b'u$$

Como $\|x^F\|_\infty < b'u$ segue que:

$$\|x\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} x^F \\ -- \\ x^G \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max \left(\frac{\|x^F\|_\infty}{\|x^G\|_\infty} \right) = b'u$$

Provando a igualdade (5) vem:

$$(A'u)'x = (u'A)x = u'(Ax) = b'u = \|A'u\|_1 \ \|x\|_\infty$$

logo:

$\|x^F\|_\infty \leq b'u$, então $A'u$ e x são alinhados.

(c.q.d)

b) se $\|x^F\|_\infty > b'u$, então $A'u$ e x não são alinhados

PROVA:

$$\|x\|_\infty = \max \ (\|x^F\|_\infty, b'u) = \|x^F\|_\infty$$

$$(A'u)'x = \|A'u\|_1 \ \|x\|_\infty$$

i) $\|A'u\|_1 \|x\|_\infty = 1 \cdot \|x\|_\infty = \|x^F\|_\infty$

ii) $(A'u)'x = (u'A)x = u'(Ax) = b'u$

logo: a condição de alinhamento não é satisfeita.

(c.q.d)

LEMA 3. Seja U o conjunto de vetores soluções factíveis.
Se numa dada iteração "x" e A'u são alinhados, então x é solução ótima, onde $u \in U$.

PROVA:

Desde que x e A'u são alinhados, temos

a) $\|x\|_\infty = \|x\|_\infty \|A'u\|_1 = (A'u, x) = (u', Ax) = b'u$

Suponhamos que "u" não é a melhor solução factível para a maximização da função "b'u".

Vamos perturbar "u" até obter vetor ótimo u^0.

$$u^0 = (u + \Delta) \in U$$

Desde que u^0 é ótimo, temos que:

$$b'u < b'u^0 = b'(u+\Delta) = b'u + b'\Delta$$

$$b'u - b'u < b'\Delta \implies 0 < b'\Delta$$

$$\therefore b'\Delta > 0$$

Como u^o é ótimo segue que $A'u^o$ e x^o são alinhados, então:

b) $\|x^o\|_\infty = \|x^o\|_\infty \|A'u^o\|_1 = (u^{o}{}'A, x^o) = (u^o, Ax) =$

$= (u^o, b) = b'u^o = b'u + b'\Delta$

De a) e b) teremos:

$$\|x^o\|_\infty = \|x\|_\infty + b'\Delta .$$

Como $b'\Delta > 0$ segue que $\|x^o\|_\infty > \|x\|_\infty$.

Absurdo, contra hipótese de x^o ser ótimo. Logo não existe a perturbação Δ, e x é a solução de norma L_∞ mínima.

"ALGORÍTMO"

1º Passo: Selecione um conjunto de m-1 colunas linearmente independentes de A, e forme matrizes F e G.

2º Passo: Determine um vetor m×1, "v" diferente de zero tal que $F'v = 0$

3º Passo: Gerar a partir do vetor v uma solução factível

$$u = \left(\frac{\operatorname{sgn}(b'v)}{\|G'v\|_1}\right) \cdot v$$

4º Passo: Calcule $b'u$

5º Passo: Calcule $x^G = (b'u)\ \mathrm{sgn}\ [G'u]$.

e x^F tal que $F\ x^F = b - (b'u)\ G\ \mathrm{sgn}\ [G'u]$

6º Passo: Verifique a condição de alinhamento entre $A'u$ e x:

a) se $\|x^F\|_\infty \leq b'u$, então $A'u$ e x são alinhados, e

$$x = \left[\begin{array}{c} x^F \\ \hline x^G \end{array}\right]$$ é a solução ótima.

b) se $\|x^F\|_\infty > b'u$, então $A'u$ e x não são alinhados, segue para o passo seguinte.

7º Passo: Selecione "p" tal que $\|x^F\|_\infty = |x^F(p)|$

(a p-ésima coluna de F vai ser trocada com a q-ésima coluna de G a ser determinada)

8º Passo: Para determinar a coluna de G que vai ser trocada, resolveremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} F'\delta = (\mathrm{sgn}\ [x^F(p)])e_p \\ u'\delta = 0 \end{cases}$$

onde δ é um vetor direção $m \times 1$, e_p é um vetor $(m-1)\times 1$ tal que:

$$(e_p)_i = \begin{cases} 1 & i = p \\ 0 & i = 1,\dots,m-1 \qquad i \neq p \end{cases}$$

9º Passo: Calcule $\frac{1}{\varepsilon_i}$ onde

$$\frac{1}{\varepsilon_i} = \frac{-[G'\delta]_i}{[G'u]_i} \qquad i = 1,\ldots,n-m+1$$

e seja $\frac{1}{\varepsilon_q}$ a maior dessas frações.

10º Passo: Troque a p-ésima coluna de F, com a q-ésima coluna de G, e forme novas matrizes $\overline{F}$ e $\overline{G}$.

(O posto $(\overline{F}) = m-1$, desde que A satisfaz a condição de Haar)

11º Passo: A solução factível nesta iteração

$$\hat{u} = \frac{\mathrm{sgn}(\varepsilon_q)}{\|G'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1}(u+\varepsilon_q\delta)$$

12º Passo: Vá para o passo 4º.

Demonstrações das propriedades usadas no algorítmo

1. a) $u = \left(\frac{\mathrm{sgn}(b'v)}{\|G'v\|_1}\right)v$ é ortogonal a m-1 colunas linearmente independentes de F.

b) $\|A'u\|_1 = 1$

PROVA:

a) O vetor v é ortogonal às colunas linearmente independentes F $\Longrightarrow$ αv também é ortogonal; onde

$$\alpha = \left(\frac{\operatorname{sgn}(b'v)}{\|G'v\|_1}\right)$$

b) $$\|A'u\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} F' \\ \hline G' \end{bmatrix} u \right\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} F'u \\ \hline G'u \end{bmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ \hline G'u \end{bmatrix} \right\|_1 =$$

$$= \|G'u\|_1 = \left\| G' \frac{\operatorname{sgn}(b'v)\ v}{\|G'v\|_1} \right\|_1 =$$

$$= |\operatorname{sgn}(b'v)| \cdot 1 = 1$$

2. Os vetores x^F e x^G tomados no passo 5 satisfaz as equações: $Ax = F\,x^F + G\,x^G = b$

PROVA: Seja $f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}$ colunas linearmente independentes da matriz F.

Desde que posto (F) = m-1 e $F'u = 0$, segue que o conjunto $\{f_1, \ldots, f_{m-1}, u\}$ forma uma base do R_m e $f_k'u = 0$ para $k = 1, \ldots, m-1$.

Seja $x^G = (b'u)\ \operatorname{sgn}(G'u)$. Substituindo na relação $Ax = b$ onde $A = [F \vdots G]$ e $x = \begin{bmatrix} x^F \\ \hline x^G \end{bmatrix}$ temos :

$$F\,x^F + G\,x^G = b$$

$$F\,x^F = b-(b'u)\;G\;\mathrm{sgn}(G'u)$$

Por outro lado como $\|A'u\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} F' \\ \hline G' \end{bmatrix} u \right\|_1 = \|G'u\|_1 = 1$

$$u'[b-(b'u)\;G\;\mathrm{sgn}(G'u)] = u'b - (b'u)\;(u'G\;\mathrm{sgn}\;(G'u))'$$

$$= b'u - (b'u)(\mathrm{sgn}\;(G'u))'\;G'u$$

$$= b'u - (b'u)\;\sum_{i=1}^{n}\;|(G'u)_i| =$$

$$= b'u - (b'u)\;\|G'u\|_1 =$$

$$= b'u - (b'u)\;\|A'u\|_1 = 0$$

logo o vetor $m\times 1[b - (b'u)\;G\;\mathrm{sgn}\;(G'u)]$ é ortogonal ao vetor $m\times 1$ u.

O vetor u é ortogonal as colunas $f_1,\ldots,f_{m-1}$ de F; e como o vetor $[b-(b'u)\;G\;\mathrm{sgn}(G'u)]$ é também ortogonal ao vetor u, segue que o vetor $[b-(b'u)\;G\;\mathrm{sgn}(G'u)]$ se escreve como combinação linear das colunas $f_1,\ldots,f_{m-1}$ da matriz F. Então podemos escrever

$$x^F = (F'F)^{-1}\;F'(b-(b'u)\;G\;\mathrm{sgn}(G'u))$$

Logo o sistema é consistente, e a solução $x \begin{bmatrix} x^F \\ \hline x^G \end{bmatrix}$ é única.

(c.q.d)

3. <u>Construção do vetor direção δ</u> .

Se o vetor u não é a solução ótima, vamos perturbá-lo de maneira que a função objetiva cresça.

Sejam δ um vetor $m \times 1$, e $v = u + \varepsilon\delta$ uma perturbação do vetor u atual na direção de δ .

Como somente a p-ésima coluna da matriz F deve ser trocada por uma coluna da matriz G, a propriedade de ortogonalidade pode ser quebrada para esta coluna, mas no entanto deve ser preservada para as demais colunas da matriz F.

Desta forma, escolhemos um vetor δ tal que

$$F'\delta = \operatorname{sgn}(x^F(p)) \cdot e_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(x^F(p)) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo

$$F'v = F'u + \varepsilon F'\delta = \varepsilon \operatorname{sgn} (x^F(p))e_p$$

pois $F'u = 0$; ou seja, v é ortogonal às colunas da matriz F, a menos da p-ésima coluna.

O vetor δ pode ser determinado unicamente pela resolução do sistema:

$$\begin{cases} F'\delta = \operatorname{sgn}(x^F(p))e_p \\ \alpha'\delta = 0 \end{cases}$$

onde α é um vetor $m \times 1$ não pertencente ao espaço gerado pelas colunas da matriz F. Uma boa escolha é tomar $\alpha = u$, pois $F'u = 0$.

4. Escolha do "ε"

Suponha que $\|x^F\|_\infty > b'u$, então $A'u$ e x não são alinhados, pelo Lema 2.

Seja δ um vetor direção $m \times 1$, conforme 3. Vamos perturbar o vetor u atual na direção do vetor δ e obter uma nova solução v, como segue:

$$v = u + \varepsilon\delta$$

note que esta nova solução é ortogonal às colunas da matriz F, a menos da p-ésima coluna (por construção do vetor δ).

Como queremos que o vetor v pertença ao conjunto de vetores U, devemos escolher "ε" tal que o vetor v seja ortogonal pelo menos coluna da matriz G, digamos a q-ésima.

Construiremos $\overline{F}$ e $\overline{G}$ trocando a p-ésima coluna da matriz F, pela q-ésima coluna da matriz G, tal que $\overline{F}'v = 0$.

Assim,

$$[G'v]_i = G[u + \varepsilon\delta]_i = [G'u]_i + \varepsilon[G'\delta]_i = 0$$

Então,

$$\varepsilon_i = - \frac{[G'u]_i}{[G'\delta]_i} \qquad i = 1,\ldots, n-m+1 .$$

Faremos a seguinte seleção:

i) O menor positivo ε_q do conjunto $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-m+1})$ ou,

ii) se não há nenhum positivo neste conjunto , então

$$\varepsilon_q = \min(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-m+1})$$

Equivalentemente a i) e ii)

$$\frac{1}{\varepsilon_q} = \max\left(\frac{1}{\varepsilon_1},\dots,\frac{1}{\varepsilon_{n-m+1}}\right) \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_q} = \max\left\{\left(\frac{-[G'\delta]_i}{[G'u]_i}\right), \quad i = 1,\dots,n-m+1\right\}$$

Escolhamos $\varepsilon = \varepsilon_q$, que corresponde a dizer que $v = u + \varepsilon_q\delta$ é ortogonal à q-ésima coluna da matriz G.

5. Tomando

$$\bar{u} = \frac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_q)}{\|\bar{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1}\,(u + \varepsilon_q\delta)$$

Temos: a) $\|\bar{G}'\bar{u}\|_1 = 1$, b) $\bar{F}'\bar{u} = 0$

PROVA:

a) $$\|\bar{G}'\bar{u}\|_1 = \left\|\frac{1}{\|G'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1}\right\| \,[\bar{G}'u + \bar{G}'\delta\ \operatorname{sgn}(\varepsilon_q)\varepsilon_q]\,\|_1 =$$

$$= \frac{\|\overline{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\ \mathrm{sgn}\ (\varepsilon_q)\|_1}{\|\overline{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\ \|_1} = |\mathrm{sgn}\ (\varepsilon_q)| \cdot \frac{\|\overline{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\ \|_1}{\|\overline{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1} = 1$$

b) $\overline{F}'\overline{u} = 0$

Temos que $F'u = 0$, $\quad \overline{f}_i' = f_i \quad i \neq p$

onde f_i, $\overline{f}_i$ são i-ésimas colunas das matrizes F e $\overline{F}$ respectivemente.

$$f_p' = g_q' \qquad e \qquad g_q'\ v = 0$$

$$[\overline{F}'\overline{u}] = K \cdot \overline{F}'\ (u + \varepsilon_q\delta) = K\ [\overline{F}'u + \varepsilon_q\ \overline{F}'\delta]$$

onde $K = \dfrac{\mathrm{sgn}(\varepsilon_q)}{\|\overline{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1}$

$$[\overline{F}'\overline{u}]_i = K\ [\overline{f}_i'u + \varepsilon_q\ \overline{f}_i'\delta]$$

Para $\quad i \neq p$

$$[\overline{F}'\overline{u}]_i = K[\ f_i'u + \varepsilon_q\ f_i'\delta] = 0$$

Para $\quad i = p$

$$[\overline{F}'\overline{u}]_p = K[\ g_q'u + \varepsilon_q\ g_q'\delta] = K[g_q'\ (u + \varepsilon_q\delta)] = K[\ g_q'\ \overline{v}] = 0$$

(c.q.d)

7. $[F'\bar{u}]_p = \dfrac{|\varepsilon_q| \ \mathrm{sgn}[x_p^F]}{\|\bar{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1}$

PROVA:

Temos que:

$$\text{i)} \quad \bar{u} = \frac{\mathrm{sgn}(\varepsilon_q)}{\|\bar{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1} \ [u+\varepsilon_q\delta]$$

$$\text{ii)} \quad F'u = 0$$

$$\text{iii)} \quad F'\delta = \mathrm{sgn}\,[x_p^F]\,e_p$$

$$[F'\bar{u}] = \frac{F'(\mathrm{sgn}(\varepsilon_q))(u+\varepsilon_q\delta)}{\|\bar{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1} = \frac{1}{\|\bar{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1} \ [F'u \ \mathrm{sgn}(\varepsilon_q)+F'\delta\,\mathrm{sgn}(\varepsilon_q)\varepsilon_q]$$

$$= F'\delta|\varepsilon_q| \ \frac{1}{\|\bar{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1} = [\mathrm{sgn}(x_p^F)e_p|\varepsilon_q|]\cdot\frac{1}{\|\bar{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1}$$

logo

$$[F'\bar{u}]_p = \frac{|\varepsilon_q| \ \mathrm{sgn}(x_p^F)}{\|\bar{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1}$$

(c.q.d)

8. $u'Fx^F = [F'\overline{u}]_p \; x_p^F$

PROVA:

Temos que:

i) $\overline{u} = \dfrac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_q)}{\|\overline{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1} \; [u+\varepsilon_q\delta]$

2i) $F'u = 0$

3i) $F'\delta = \operatorname{sgn}\;(x_p^F)e_p$

4i) $|\varepsilon_q| = \operatorname{sgn}\;(\varepsilon_q)\varepsilon_q$

5i) $(F'\overline{u})_p = \dfrac{|\varepsilon_q|\operatorname{sgn}\, x_p^F}{\|\overline{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1}$

$$\overline{u}'F\, x^F = \frac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_q)}{\|\overline{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1}\; (u'+\varepsilon_q\delta')\; F\, x^F \;=$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_q)}{\|\overline{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1}\; u'F\; x^F + \frac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_q)}{\|G'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1}\;\; \varepsilon_q\delta'\; F\; x^F =$$

$$= \frac{\text{sgn}(\varepsilon_q)}{\|\overline{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1} \cdot \varepsilon_q [\text{sgn}(x_p^F) e_p \ x^F] =$$

$$= \frac{\text{sgn}(\varepsilon_q)}{\|\overline{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1} \cdot \varepsilon_q \ \text{sgn}(x_p^F) \ x_p^F =$$

$$= \frac{|\varepsilon_q| \text{sgn} \ x_p^F}{\|\overline{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1} \cdot x_p^F = [F'\overline{u}]_p \ x_p^F \ .$$

(c.q.d)

9. $\overline{u}'G \ \text{sgn}(G'u) = \|\overline{G}'\overline{u}\|_1 - |[F'\overline{u}]_p| = 1 - |[F'\overline{u}]_F|$

PROVA.
Temos que:

i) $\text{sgn}(G'u)_i = \text{sgn}(G'\overline{u})_i \quad i = 1,\ldots,n-m+1 \quad i \neq q$

ii) $(\overline{G}'\overline{u})_i = (\overline{G}'\overline{u})_i \quad i = 1,\ldots,n-m+1 \quad i \neq q$

iii) $(G'\overline{u})_q = 0$

$$\overline{u}'G \ \text{sgn}(G'u) = \sum_{i=1}^{n-m+1} (\overline{u}'G)_i \ \text{sgn}(G'u)_i = \sum_{i=1}^{n-m+1} \text{sgn}(G'u)_i \ (G'\overline{u})_i$$

$$= \sum_{i=1 \ i\neq q}^{n-m+1} (\text{sgn}(G'u)_i)(G'u)_i + \text{sgn}(G'u)_q \ (G'\overline{u})_q =$$

$$= \sum_{i=1\ i\neq q}^{n-m+1} \operatorname{sgn}(G'\bar{u})_i\ (\bar{G}'\bar{u})_i =$$

$$= \sum_{i=1\ i\neq q}^{n-m+1} \operatorname{sgn}(\bar{G}'\bar{u})_i\ (\bar{G}'\bar{u})_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n-m+1} |(\bar{G}'\bar{u})_i| - |(\bar{G}'\bar{u})_q|$$

$$= \|(\bar{G}'\bar{u})\|_1 - |(F'\bar{u})| = 1 - |(F'\bar{u})_p|$$

(c.q.d)

10. <u>Na</u> <u>escolha</u> <u>do</u> "<u>ε</u>" <u>em</u> <u>4</u>; <u>tomamos</u>

1) "ε" o menor positivo do conjunto $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-m+1}\}$

2) "ε" = $\min\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-m+1}\}$ quando ε_j são todos negativos.

Caso o ε selecionado seja tomado como em (1) então temos:

i) $\operatorname{sgn}(G'v)_i = \operatorname{sgn}(G'u)_i \qquad i \neq q$

ou se ε for selecionado como em (2) temos:

ii) $\operatorname{sgn}(G'v)_i = -\operatorname{sgn}(G'u)_i \qquad i \neq q$

PROVA:

i) $(G'v)_i = (G'u)_i + \varepsilon_i (G'\delta)_i = 0$

$$\varepsilon_i = -\frac{(G'u)_i}{(G'\delta)_i} \qquad i = 1,\dots,n-m+1$$

a) $\varepsilon_j > 0$. Se $(G'u)_j < 0 \implies (G'\delta)_j > 0$

Desde que $\varepsilon_j > \varepsilon$,

$$0 = (G'u)_j + \varepsilon_j (G'\delta)_j > (G'u)_j + \varepsilon (G'\delta)_j = (G'v)_j$$

logo $(G'v)_j < 0$

b) $\varepsilon_j > 0$. Se $(G'u) > 0 \implies (G'\delta)_j < 0$

$$0 = (G'u)_j + \varepsilon_j (G'\delta)_j < (G'u)_j + \varepsilon (G'\delta)_j = (G'v)_j$$

logo $(G'v)_j > 0$

c) $\varepsilon_j < 0$. Se $(G'u)_j < 0 \implies (G'\delta)_j < 0$

$$0 = (G'u)_j + \varepsilon_j (G'\delta)_j > (G'u)_j + \varepsilon (G'\delta)_j = (G'v)_j$$

logo $(G'v)_j < 0$

$$\text{ii)} \quad \varepsilon_j > \varepsilon, \quad \varepsilon_i = -\frac{(G'u)_i}{(G'\delta)_i} \qquad i = 1,\ldots,n-m+1$$

a) $\varepsilon_j < 0$. Se $(G'u)_j > 0 \Longrightarrow (G'\delta)_j > 0$

$$0 = (G'u)_j + \varepsilon_j(G'\delta) > (G'u)_j + \varepsilon(G'\delta)_j = (G'v)_j$$

logo $(G'v)_j < 0$

b) $\varepsilon_j < 0$. Se $(G'u)_j < 0 \Longrightarrow (G'\delta)_j < 0$

$$0 = (G'u)_j + \varepsilon_j(G'\delta)_j < (G'u)_j + \varepsilon(G'\delta)_j = (G'v)_j$$

logo $(G'v) > 0$

Provaremos que quando tomamos "ε" como em (10) será possível provar que $\text{sgn}(G'u)_i = \text{sgn}(G'\bar{u})_i$ $i = 1,\ldots,n-m+1$. Esta propriedade é necessária para provar o Teorema 3.

11. $\text{sgn}(G'u)_i = \text{sgn}(G'\bar{u})_i \qquad i = 1,\ldots,n-m+1$

PROVA:

Temos por (10) que:

i) $\varepsilon_q > 0 \Longrightarrow \text{sgn}(G'v)_i = \text{sgn}(G'u)_i \quad i \neq q \quad i = 1,\ldots,n-m+1$

ii) $\varepsilon_q < 0 \Longrightarrow \operatorname{sgn}(G'v)_i = -\operatorname{sgn}(G'u)_i \qquad i \neq q$

$$\bar{u} = K \cdot v \quad \text{onde} \quad K = \frac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_q)}{\|\bar{G}'v\|_1}$$

$\operatorname{sgn}(K) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_q)$

$G'\bar{u} = K\, G'v$

a) $\operatorname{sgn}(G'u)_i = \operatorname{sgn}(K\, G'v)_i = \operatorname{sgn}[K(G'v)_i] =$

$= \operatorname{sgn} K \cdot \operatorname{sgn}(G'v)_i$

$= \operatorname{sgn}(\varepsilon_q) \cdot \operatorname{sgn}(G'v)_i$

Se $\varepsilon_q > 0$, temos que $\operatorname{sgn}(G'u)_i = \operatorname{sgn}(G'v)_i \overset{a)}{=} \operatorname{sgn}(G'\bar{u})_i$

Se $\varepsilon_q < 0$, temos que $-\operatorname{sgn}(G'u)_i = \operatorname{sgn}(G'v) \overset{a)}{=} -\operatorname{sgn}(G'\bar{u})_i$

logo

$\operatorname{sgn}[G'u]_i = \operatorname{sgn}[G'\bar{u}]_i$ qualquer que seja ε.

(c.q.d)

TEOREMA 3.

Se a atual seleção da matriz F não é ótima, então o procedimento de trocas de colunas no algorítmo sempre faz crescer "b'u" .

PROVA:

Na atual iteração, as matrizes F e G e o vetor solução factível u satisfaz:

$$F'u = 0 \quad e \quad \|G'u\|_1 = 1$$

Temos que:

$$F\, x^F = b - G\, x^G \quad e \quad x^G = (b'u)\ \mathrm{sgn}\,(G'u)$$

Desde que a seleção da matriz F não é ótima, então

$$\|x^F\|_\infty > \|x^G\|_\infty = \|(b'u)\ \mathrm{sgn}(G'u)\|_\infty = b'u$$

Seja $\|x^F\|_\infty = |x^F_p|$; então $|x^F_p| > b'u$

Seja δ um vetor único $m\times 1$ que satisfaz

$$F'\delta = \mathrm{sgn}(x^F_p)e_p$$

$$u'\delta = 0$$

Vamos perturbar o vetor u atual na direção do vetor δ.

$$v = u + \varepsilon\delta$$

onde $\varepsilon = \varepsilon_q$ tomado de acordo com (4).

Trocando a p-ésima coluna da matriz F, com a q-ésima coluna da matriz G, formamos novas matrizes $\overline{F}$ e $\overline{G}$ nesta iteração , tal que

$$\overline{F}'\overline{u} = 0 \qquad e \qquad \|\overline{G}'\overline{u}\|_1 = 1$$

onde $\overline{u}$ atual é dado por:

$$\overline{u} = \frac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_q)}{\|\overline{G}'(u+\varepsilon_q\delta)\|_1}(u + \varepsilon_q\delta)$$

logo $\overline{u} \in U$ é um vetor solução factível.

Temos de mostrar que $b'\overline{u} > b'u$

$$F\,x^F + G\,x^G = b$$

$$\overline{u}'\,F\,x^F + \overline{u}'\,G\,x^G = \overline{u}'b \qquad \text{(a)}$$

$\overline{u}'\,F\,x^F = (F'\overline{u})_p\,x_p^F$ por (8) e $x^G = (b'u)\,\operatorname{sgn}(G'u)$

$\overline{u}'G\,\operatorname{sgn}(G'u) = 1 - |(F'\overline{u})_p|$ por (9)

Temos que $\operatorname{sgn}(F'\overline{u})_p = \operatorname{sgn}(x_p^F)$, então :

$$[F'\overline{u}]_p\,x_p^F = |F'\overline{u}_p|\,|x_p^F|$$

Substituindo estes resultados em (a) teremos:

$$|[F'\overline{u}]_p|\cdot|x_p^F| + (b'u)\,[1 - |[F'\overline{u}_p|] = b'\overline{u}$$

$$-(b'u) + (b'\bar{u}) = [\,|[F'\bar{u}]_p|\,[\,|x_p^F| - (b'u)]] > 0$$

pois $|x_p^F| > b'u$ por hipótese

logo $b'\bar{u} > b'u$

(c.q.d)

APLICAÇÃO:

Exemplo 1.

Dado o sistema $\begin{cases} x+2y+1z=1 \\ 2x+1y+8z=3 \end{cases}$ consistente, achar a solução de norma L_∞ mínima.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad \text{posto } (A) = 2 = m$$

1º Passo

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

2º Passo

$$F'v = 0$$

$$(1\ \ 2) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3º Passo

$$u = \frac{\operatorname{sgn}(b'v)}{\|G'v\|_1} \cdot v$$

$$u = 1/9 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/9 \\ 1/9 \end{bmatrix}$$

4º Passo

$$b'u = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/9 \\ 1/9 \end{bmatrix} = 1/9$$

5º Passo

$$x^G = 1/9 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/9 \\ 1/9 \end{bmatrix}$$

$$x^F = 50/45 = 10/9$$

6º Passo

$$\|x^F\|_\infty = 10/9$$

$$\therefore \|x^F\|_\infty > b'u, \text{ então } x = \begin{bmatrix} x^F \\ \hline x^G \end{bmatrix} \text{ não é a solução ótima.}$$

7º Passo

$$|x_p^F| = \|x^F\|_\infty$$

$$p = 1$$

8º Passo

$$\delta = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

9º Passo

$$1/\varepsilon_i = - \frac{(G'\delta)_i}{(G'u)_i} \qquad \begin{array}{l} 1/\varepsilon_1 = 36/5 \\ 1/\varepsilon_2 = \frac{-51}{30} \end{array} \quad \therefore \quad q = 1$$

10º Passo

$$\overline{F} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \overline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

11º Passo

$$\overline{u} = \frac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_q)}{\| G'(u+\varepsilon_q \delta) \|_1} \; (u + \varepsilon_q \delta)$$

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} -1/18 \\ 1/9 \end{bmatrix}$$

vá para 4

4º Passo

$$b'u = 5/18$$

5º Passo: $x^G = \begin{bmatrix} 5/18 \\ 5/18 \end{bmatrix}$

$$x^F = (2/9)$$

6º Passo

$\|x^F\|_\infty < b'\bar{u}$, então $x = \begin{bmatrix} x^F \\ -- \\ x^G \end{bmatrix}$ é a solução ótima

$$x = \begin{bmatrix} 5/18 \\ 2/9 \\ 5/18 \end{bmatrix}$$ solução ótima do sistema dado

INTERPRETAÇÃO GRÁFICA

$\max b'u = \max u_1 + 3u_2$

$\|A'u\|_1 \leq 1 \quad |u_1+2u_2| + |2u_1+u_2| + |u_1+8u_2| \leq 1$

Se $u_1+2u_2 \geq 0$, $2u_1+u_2 \geq 0$ e $u_1+8u_2 \geq 0$ temos:

$$11u_2 + 4u_1 \leq 1$$

Se $u_1+2u_2 \geq 0$, $2u_1+u_2 \geq 0$ e $u_1+8u_2 \leq 0$ temos:

$$-5u_2 + 2u_1 \leq 1$$

Se $u_1+2u_2 \geq 0$, $2u_1+u_2 \leq 0$ e $u_1+8u_2 \geq 0$ temos:

$$9u_2 \leq 1$$

Fazendo todas as combinações de sinais, teremos o problema

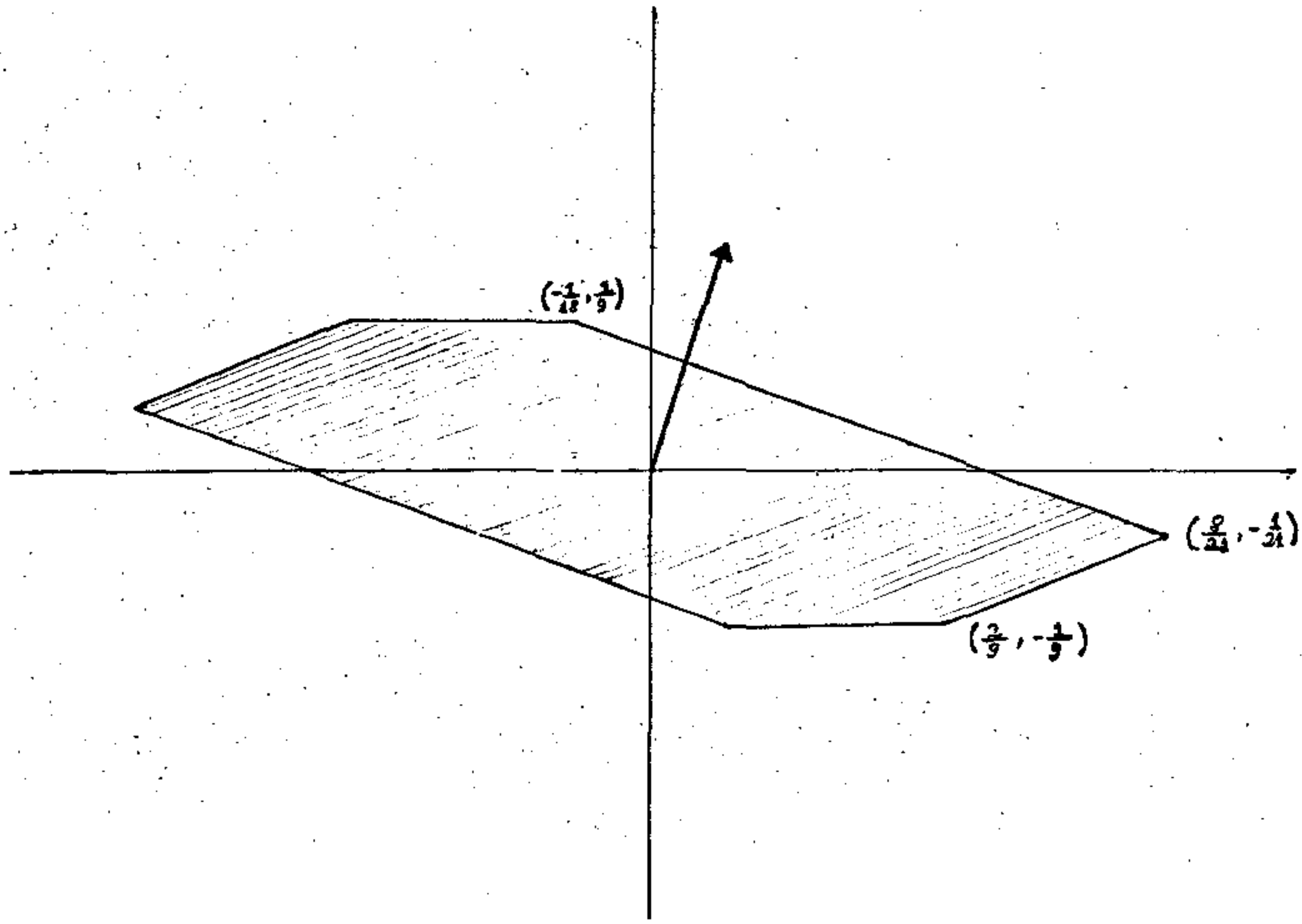
$$\max \ u_1 + 3u_2$$

$$\text{ou} \left\{ \begin{array}{l} 4u_1 + 11u_2 \leq 1 \\ u_1 + 2u_2 \geq 0 \\ 2u_1 + u_2 \geq 0 \\ u_1 + 8u_2 \geq 0 \end{array} \right. \qquad \text{ou} \left\{ \begin{array}{l} 2u_1 - 5u_2 \leq 1 \\ u_1 + 2u_2 \geq 0 \\ 2u_1 + u_2 \geq 0 \\ u_1 + 8u_2 \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{sujeito a ou} \left\{ \begin{array}{l} 9u_2 \leq 1 \\ u_1 + 2u_2 \geq 0 \\ 2u_1 + u_2 \leq 0 \\ u_1 + 8u_2 \geq 0 \end{array} \right. \qquad \text{ou} \left\{ \begin{array}{l} -2u_1 - 7u_2 \leq 1 \\ u_1 + 2u_2 \leq 0 \\ 2u_1 + u_2 \geq 0 \\ u_1 + 8u_2 \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{ou} \left\{ \begin{array}{l} -9u_2 \leq 1 \\ u_1 + 2u_2 \leq 0 \\ 2u_1 + u_2 \geq 0 \\ u_1 + 8u_2 \leq 0 \end{array} \right. \qquad \text{ou} \left\{ \begin{array}{l} -2u_1 + 5u_2 \leq 1 \\ u_1 + 2u_2 \leq 0 \\ 2u_1 + u_2 \geq 0 \\ u_1 + 8u_2 \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{ou} \left\{ \begin{array}{l} -4u_1 - 11u_2 \leq 1 \\ u_1 + 2u_2 \leq 0 \\ 2u_1 + u_2 \leq 0 \\ u_1 + 8u_2 \leq 0 \end{array} \right.$$



Solução ótima :

$u^0 = (-\frac{1}{18}, \frac{1}{9})$

Exemplo 2.

$$\begin{bmatrix} -6 & 4 & 2 & -8 & 5 & -1 & 6 & 3 \\ 7 & -3 & 9 & 5 & -9 & 8 & 7 & -4 \\ 9 & 7 & -5 & 2 & 7 & 0 & 1 & 8 \\ 9 & -3 & 2 & 4 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_1 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O algorítmo foi programado em Fortran, onde foi resolvido o exemplo acima.

Resultados:

$$u^{o} = \begin{bmatrix} 0,03151 \\ -0,02010 \\ -0,04836 \\ 0,08500 \end{bmatrix}$$

Solução ótima.

$$x^{o} = [-0,0679 \; - 0,5371 \quad 0.5371 \; - 0.5371 \quad 0.4607 \quad 0,5371 \quad 0,2024 \; - 0.5371]$$

2º ALGORÍTMO PARA DETERMINAR UMA SOLUÇÃO DE NORMA L_∞ MÍNIMA DE UM SISTEMA CONSISTENTE DE EQUAÇÕES LINEARES.

INTRODUÇÃO:

Descreveremos outro procedimento algorítmico para determinar uma solução de norma L_∞ mínima de um sistema de equações lineares

$$Ax = b \qquad (1)$$

onde $A = (a_{ij})_{m\times n}$ com $m < n$ e posto $(A) = m$, x é um vetor $n\times 1$ e b é um vetor dado $m\times 1$.

Desde que o posto $(A) = m$ e $m < n$, segue que o sistema (1) tem infinita soluções.

Desenvolvimento

De acordo com o Teorema 1, dado no algorítmo anterior, temos:

$$\min_{Ax = b} \|x\|_\infty = \max_{\|A'u\|_1 \leq 1} b'u$$

e a solução ótima x^o é alinhada com a solução $A'u^o$ do problema dual; que é :

$$x_i = \begin{cases} (b'u\ )\ \text{sgn}\ (A'u^o)_i & \text{se}\ (A'u^o)_i \neq 0 \\ \alpha_i & \text{se}\ (A'u^o)_i = 0 \end{cases}$$

onde α_i é selecionado tal que $|\alpha_i| \leq b'u$ e $Ax^o = b$.

<u>Transformação</u> <u>do</u> <u>problema</u> <u>dual</u>:

$$\max_{\|A'u\|_1 \leq 1} b'u \qquad (2)$$

A matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ será decomposta na soma de duas matrizes:

$$A = F + G$$

onde $F = [\xi_1 b \vdots \xi_2 b \ldots \vdots \xi_n b]$ tal que

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{b'b}\right] A'b \quad \text{e} \quad G = [g_1 \vdots g_2 \vdots \ldots \vdots g_n]$$

obtida de A-F e teremos que $b'g_i = 0$ para $i = 1,\ldots,n$.

Desde que o posto (A) = m e posto (F) = 1, segue que o posto (G) = m-1.

Notemos que $u \in R^m$ pode ser expresso unicamente como:

$$u = \alpha b + p \quad \text{com} \quad b'p = 0$$

onde α é um escalar; segue que o problema (2) pode ser transformado em:

$$b'u = b'(\alpha b + p) = \alpha b'b + b'p = \alpha b'b$$

$$A'u = (F' + G')u = F'u + G'u = F'(\alpha b + p) +$$

$$+ G'u = \alpha F'b + F'p + G'u = \alpha F'b + G'u$$

pois $F'p = 0$, já que $b'p = 0$.

Então:

$$\max_{\|A'u\|_1 \leq 1} b'u = b'b \left(\max_{\|\alpha F'b+G'u\|_1 \leq 1} \alpha\right) \tag{3}$$

Por outro lado:

$$\|\alpha F'b + G'u\|_1 = |\alpha| \; \|F'b + G'(u/\alpha)\|_1 \leq 1$$

$$|\alpha| \leq \frac{1}{\|F'b+G'(u/\alpha)\|_1} \tag{4}$$

Maximizar "α" em (3) para todo α, e "u" que satisfaça a restrição (4), será equivalente resolver o seguinte problema

$$\min_{u\in R^m} \|F'b + G'u\|_1 \tag{5}$$

Se u^o é uma solução para (5), temos que:

$$\|x^o\|_\infty = \max_{\|A'u\|_1 \leq 1} b'u = (b'b)\alpha^o = (b'b)\frac{1}{\|F'b+G'u^o\|_1}$$

Pelo T. 1 temos que x^o ótimo e $A'u^o$ são alinhados, como $A'u^o = (F'b + G'u^o)$ segue que:

$$x_i^o = \begin{cases} \dfrac{b'b}{\|F'b+G'u^o\|_1}\,\mathrm{sgn}(F'b+G'u^o)_i & \text{se } (F'b+G'u)_i \neq 0 \\ \alpha_i & \text{se } (F'b+G'u)_i = 0 \end{cases}$$

com $|\alpha_i| \leq \dfrac{b'b}{\|F'b+G'u^o\|_1}$

Notamos que $\min\limits_{u\in R^m} \|F'b + G'u\|_1$ tem mais de uma solução, pois qualquer solução $kb + u$ é solução de (5). Usamos aqui o fato de que:

se $\alpha_o = \dfrac{1}{\|F'b+G'v\|_1}$ onde v é solução, então :

$$\overline{\alpha} = \frac{1}{\|F'b+G'(kb+v)\|_1} = \frac{1}{\|F'b+kG'b+G'v\|_1} = \frac{1}{\|F'b+G'v\|_1} = \alpha_o$$

Concluimos que a solução do problema $\min_{Ax=b} \|x\|_\infty$ é obtida resolvendo o problema (5), usando-se o critério de alinhamento entre $(F'b + G'u^o)$ e x^o ótimo para gerar x^o.

Minimização de $\|F'b + G'u\|_1$

Temos que:

$$\|F'b + G'u\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |[F'b + G'u]_i| = \sum_{i \notin I} [F'b+G'u]_i \ \ \mathrm{sgn}[F'b+G'u]_i$$

onde $I = \{i \text{ tal que } [F'b + G'u]_i = 0\}$.

Iniciaremos o processo de minimização de $\|F'b + G'u\|_1$ com um vetor "u" inicial qualquer.

Vamos perturbar o vetor u, na direção do vetor η

$$u = u + \varepsilon\eta$$

onde ε é positivo.

$$\|F'b + G'(u + \varepsilon\eta)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} [F'b + G'(u+\varepsilon\eta)]_i \ \mathrm{sgn}[F'b + G'(u+\varepsilon\eta)]_i \qquad (6)$$

Para "ε", suficientemente pequeno temos:

$$\mathrm{sgn}[F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_i = \mathrm{sgn}[F'b + G'u]_i \quad \text{para} \quad i \notin I \qquad (7)$$

Para tais valores de ε, a expressão (6) vem como:

$$\|F'b + G'(u + \varepsilon\eta)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |[F'b + G'(u + \varepsilon\eta]_i| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |[F'b + G'u + \varepsilon G'\eta]_i| =$$

$$= \varepsilon \sum_{i\in I} |[G'\eta]_i| + [\sum_{i\notin I} [F'b + G'(u + \varepsilon\eta]_i]$$

$$\cdot [\operatorname{sgn} F'b + G'(u + \varepsilon\eta]_i]$$

$$\geq \varepsilon \sum_{i\in I} |[G'\eta]_i| + [\sum_{i\notin I} [F'b+G'u+\varepsilon(G'\eta)]_i]$$

$$\cdot [\operatorname{sgn}[F'b + G'u]_i]$$

$$= \varepsilon \sum_{i\in I} |[G'\eta]_i| + [\sum_{i\notin I} [F'b + G'u]_i]$$

$$\cdot [\operatorname{sgn}[F'b + G'u]_i]$$

$$+ \varepsilon \sum_{i\notin I} [G'\eta]_i \operatorname{sgn}[F'b + G'u]_i$$

Colocando $h(\eta) = \sum_{i\notin I} [G'\eta]_i \operatorname{sgn}[F'b + G'u]_i + \sum_{i\in I} |[G'\eta]_i|$ (8)

teremos:

$$\|F'b + G'(u + \varepsilon\eta)\|_1 = \|F'b + G'u\|_1 + \varepsilon \cdot h(\eta) \qquad (9)$$

Podemos expressar $h(\eta)$ como:

$$h(\eta) = d'\eta + \sum_{i \in I} |[g_i \eta]|$$

onde $d = \sum_{i \notin I} g_i \operatorname{sgn}[F'b + G'u]_i = G \operatorname{sgn}[F'b + G'u]$

e g_i é a i-ésima coluna da matriz G, gerada da decomposição da matriz A.

Para que $\|F'b + G'(u + \varepsilon\eta)\|_1 < \|F'b + G'u\|_1$ é necessário selecionar o vetor η tal que $h(\eta)$ seja negativo.

Será construído o vetor η de maneira que $h(\eta)$ seja negativo e apropriadamente escolher um parâmetro ε tal que:

$$\|F'b + G'(u + \varepsilon\eta)\|_1 < \|F'b + G'u\|_1$$

Para gerar η, tomaremos como referência o teorema 2 do algorítmo anterior que prova que existe uma solução "u" que minimiza $\|F'b + G'u\|_1$, e é ortogonal a pelo menos m-1 colunas linearmente independentes de A. Isto implica que pelo menos m-1 componentes de $[F'b + G'u^o]$ são zeros.

Será desenvolvido um procedimento pelo qual pelo menos uma componente previamente não zero, vai ser conduzida a zero em cada iteração, enquanto vamos decrescendo $\|F'b + G'u\|_1$.

<u>Procedimento para seleção do vetor</u> η.

Suponha que numa dada iteração temos o conjunto,

$$I = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$$

e $h(\eta) = d'\eta + \sum_{i=1}^{k} |g'_{j_i}\eta|$.

Vamos assumir que k colunas g_{j_i}, $i = 1,k$ da matriz G são linearmente independentes.

Formaremos a matriz $m \times m$

$$G_k = [g_{j_1} \vdots g_{j_2} \vdots \ldots \vdots g_{j_k} \vdots e_{i_1} \vdots \ldots \vdots e_{i_{m-k}}]$$

As k primeiras colunas de G_k consistem de k colunas g_{j_i} $i=1,\ldots,k$ da matriz G, enquanto que e_{i_j} é i_j-ésima coluna da matriz identidade para $j = 1,\ldots,m-k$, selecionados de maneira que o posto $(G_k) = m$.

Caso o conjunto $I = \emptyset$, então a matriz G_k coincide com a matriz identidade.

Vamos gerar o vetor α, tal que:

$$d = G_k \alpha \text{ onde } d = G \,\mathrm{sgn}[F'b + G'u].$$

Temos que:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \hline \alpha^2 \end{bmatrix} = G_k^{-1} \cdot d$$

e α^1 é um vetor $k\times 1$, α^2 é um vetor $(m-k)\times 1$

1º Caso:

Se $\alpha^2 \neq 0$, então o vetor η é selecionado como:

$$\eta' = -[0' \vdots \text{sgn}(\alpha^{2'})] G_k^{-1}$$

onde $0' = (0,\dots,0)$ é um vetor $1\times k$.

Temos:

$$\eta' d = -[0' \vdots \text{sgn}(\alpha^{2'})] G_k^{-1} \cdot G_k \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \hline \alpha^2 \end{bmatrix} =$$

$$= -[\text{sgn}(\alpha^2)]' \alpha^2 = -\|\alpha^2\|_1$$

enquanto que,

$$\eta' G_k = [0' \vdots \text{sgn}(\alpha^2)']$$ o que corresponde a dizer que

$g'_{j_i} \eta = 0$ para $i = 1,\dots,k$

Como $h(\eta) = d'\eta + \sum_{i=1}^{k} |g'_{j_i}\eta|$

então: $h(\eta) = - \|\alpha^2\|_1$

Tomando-se $\eta = - [0' \vdots \operatorname{sgn}(\alpha^{2'})] \cdot G_k^{-1}$, será possível construir $h(\eta)$ negativo, onde o vetor η é ortogonal as colunas g_{j_i} $i=1,\ldots,k$ da matriz G_k.

Note que se $[F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_{j_i} = [F'b + G'u]_{j_i} + \varepsilon(G'\eta)_{j_i} = 0$ $i = 1,\ldots,k$; então as componentes que eram nulas de $[F'b + G'u]_{j_i}$ preservam esta propriedade quando perturbamos o vetor atual u.

Se perturbarmos o atual vetor "u" na direção do vetor η, com um "ε" construído adequadamente; uma componente previamente não zero de $[F'b + G'u]$, digamos a j_{k+1} é conduzida a zero.

Como $[F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_{j_{k+1}} = [F'b + G'u]_{j_{k+1}} + \varepsilon[G'\eta]_{j_{k+1}}$, é necessário que $g_{j_{k+1}}\eta \neq 0$; e desde que $g_{j_i}\eta=0$ para $i = 1,\ldots,k$, segue que o conjunto $\{g_{j_1}, g_{j_2},\ldots,g_{j_{k+1}}\}$ é linearmente independente.

Portanto nesta iteração temos:

$$I = \{j_1,\ldots,j_k, j_{k+1}\}$$

enquanto que a matriz G_{k+1} é gerada de G_k trocando uma coluna de $[e_{i_1},\ldots,e_{i_{m-k}}]$ pela coluna g_{k+1}, de modo a manter posto (G_{k+1})=m.

Note que G_k e G_{k+1} são idênticas, exceto por uma coluna.

2º Caso: $\alpha^2 = 0$

Temos que $d = G_k \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \hline \alpha^2 \end{bmatrix}$.

Como $\alpha^2 = 0$, $d = \alpha_1^1 g_{j_1} + \ldots + \alpha_k^1 g_{j_k}$, isto é d se escreve como combinação linear das colunas g_{j_i} da matriz G_k.

Como $h(\eta) = d'\eta + \sum_{i=1}^{k} |g'_{j_i}\eta|$,

$$h(\eta) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^1 (g'_{j_i}\eta) + |g'_{j_i}\eta| =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |g'_{j_i}\eta| + \alpha_i^1 \ \mathrm{sgn}\,[g'_{j_i}\eta] \ \mathrm{sgn}\,[g'_{j_i}\eta][g'_{j_i}\eta] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |g'_{j_i}\eta| + \alpha_i^1 \ \mathrm{sgn}[g'_{j_i}\eta]\,|g'_{j_i}\eta| =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \{1 + \alpha_i^1 [\mathrm{sgn}\ g'_{j_i}\eta]\}\ |g'_{j_i}\eta| \qquad (10)$$

Como resultado imediato de (10) enunciaremos :

TEOREMA 4:

Seja α um vetor $m \times 1$ tal que $\alpha = G_k^{-1} \cdot d$

a) se $|\alpha_i^1| \leq 1$ $i = 1,\ldots,k$, então $h(\eta)$ como dado pela expressão (10) não será negativo.

b) se existe pelo menos um α_i^1 $i = 1,\ldots,k$ tal que $|\alpha_i^1| > 1$, então $h(\eta)$ dado pela expressão (10) será negativo.

PROVA:

Seja $|\alpha_p^{\prime}| > 1$.

Escolhamos $\eta' = - [e_p' \vdots 0'] \, G_k^{-1} \, \text{sgn}\,(\alpha_p^1)$

onde $e_p' = (0 \ldots 0 \; 1 \; 0 \ldots 0)$; onde 1 ocorre na p-ésima componente

$\eta' G_k = - [e_p' \vdots 0'] \, \text{sgn}(\alpha_p^1)$ o que implica

que $g_{j_i}' \, \eta = 0 \quad i = 1,\ldots,k \, , \; i \neq p$

$g_{j_p}' \, \eta = - \, \text{sgn}(\alpha_p^1)$

Então a espressão $h(\eta)$ dada pela expressão (10) vem como:

$$h(\eta) = \sum_{i=1}^{k} \{1 + \alpha_i^1 \text{ sgn } (g'_{j_i} \eta)\} \; |g'_{j_i} \eta| =$$

$$= \{1 + \alpha_p^1 \; \text{sgn}(g'_{j_p} \eta)\} \; |g'_{j_p} \eta| =$$

$$= \{1 - \alpha_p^1 \; \text{sgn}(\alpha_p^1)\} \cdot 1 = (1 - |\alpha_p^1|)$$

logo: $h(\eta) < 0$

(c.q.d).

Neste caso, perturbaremos o vetor u na direção do vetor η, conduzindo uma componente previamente não nula de $[F'b + G'u]$, digo a q-ésima, a tornar-se zero.

Nesta iteração, trocamos a coluna g_{j_p} pela coluna g_q, e procedemos como antes.

Note que neste caso, as trocas de colunas são feitas de maneira diferente do que no caso 1, e também que a condição a) do Teorema 4, é conveniente como condição de parada do algorítmo. Para efeito de calcular a inversa da matriz G_{k+1} enunciaremos.

TEOREMA 5.

Seja C uma matriz não singular $m \times m$, e $t_1, t_2, \ldots, t_m$ as linhas da sua inversa. Seja $\bar{C}$ uma matriz obtida trocando a p-ésima coluna da matriz C por um vetor $m \times 1$ r. Se $t_p r \neq 0$, então $\overline{C}$ é não singular, e as linhas da sua inversa são dadas por:

$$\overline{t}_p = \frac{1}{t_p r} \; t_p \quad ,$$

$$\overline{t}_i = t_i - (t_i r) \; \overline{t}_p \quad i = 1,\ldots,m \text{ e } i \neq p.$$

(Ref. 7)

<u>Seleção de</u> "ε".

Desde que o vetor η foi selecionado, de maneira que $h(\eta)$ seja negativo, é necessário determinar um valor positivo para "ε" tal que,

$$\|F'b + G'(u + \varepsilon\eta)\|_1 < \|F'b + G'u\|_1 .$$

Vamos gerar um conjunto de valores positivos para "ε", de modo que uma componente previamente não nula de $[F'b + G'u]$ venha tornar-se zero, e consequentemente garantir que

$$\|F'b + G(u + \varepsilon\eta)\|_1 < \|F'b + G'u\|_1$$

$$[F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_i = [F'b + G'u + \varepsilon G'\eta]_i = 0 \quad \text{para} \quad i \notin I$$

ou

$$\varepsilon_i = \frac{-[F'b + G'u]_i}{[G'\eta]_i} \qquad i \notin I \quad \text{e} \quad [G'\eta]_i \neq 0$$

Selecionaremos os ε_i positivos em ordem crescente :

$$0 < \varepsilon_{p_1} < \ldots < \varepsilon_{p_s}$$

Pela expressão (9) $\|F'b + G'(u + \varepsilon\eta)\|_1 = \|F'b + G'u\|_1 + \varepsilon h(\eta)$.

Como $h(\eta) < 0$, e $\mathrm{sgn}[F'b + G'(u + \varepsilon\eta)] = \mathrm{sgn}[F'b + G'u]$ podemos concluir que:

$$\|F'b + G'u\|_1 > \|F'b + G'(u + \varepsilon\eta)\|_1 \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_{p_1}$$

O novo vetor $u + \varepsilon_{p_1}\eta$ sempre garante algum decrêscimo em $\|F'b + G'u\|_1$.

Por outro lado, quando tomamos $\varepsilon_{p_1} < \varepsilon < \varepsilon_{p_2}$,

$$\mathrm{sgn}[F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_i = \mathrm{sgn}[F'b + G'u]_i \quad i \neq p_1 \tag{11}$$

$$\mathrm{sgn}[F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_{p_1} = -\mathrm{sgn}[F'b + G'u]_{p_1}. \tag{12}$$

De (6) $\|F'b + G'(u + \varepsilon\eta)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} [F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_i \, \mathrm{sgn}[F'b+G'(u+\varepsilon\eta)]_i$

Substituindo as relações (11) e (12) em (6) temos:

$$\|F'b + G'(u + \varepsilon\eta)\|_1 = \|F'b + G'u\|_1 - 2\,\varepsilon_{p_1} |g'_{p_1}\eta| + \varepsilon\,(h(\eta) + 2\,|g'_{p_1}\eta|)$$

$$\varepsilon_{p_1} < \varepsilon \leq \varepsilon_{p_2} \tag{13}$$

onde $h(\eta)$ é dado pela expressão (8).

Claramente se $h(\eta) + 2|g'_{p_1}\eta|) < 0$, podemos descrever $\|F'b + G'(u + \varepsilon\eta)\|_1$ tomando $\varepsilon = \varepsilon_{p_2}$.

Generalizando este procedimento temos o seguinte :

LEMA 4 .

Tomando-se $\varepsilon_{p_k} < \varepsilon < \varepsilon_{p_{l+1}}$ temos:

$$\|F'b + G'(u + \varepsilon\eta)\|_1 = \|F'b + G'u\|_1 - 2\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_{p_i} |g'_{p_i}\eta| +$$

$$+ \varepsilon \{h(\eta) + 2\sum_{i=1}^{k} |g'_{p_i}\eta| .$$

PROVA:

Seja $\varepsilon_{p_k} < \varepsilon < \varepsilon_{p_{k+1}}$; temos que:

$$\mathrm{sgn}[F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_{p_i} = - \mathrm{sgn}[F'b + G'u]_{p_i} \qquad i = 1,k$$

$$\mathrm{sgn}[F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_i = \mathrm{sgn}[F'b + G'u]_i \ , \qquad i \notin I \ \text{ e}$$

$i \neq p_1,\ldots,p_k$

$$\|F'b + G'(u + \varepsilon\eta)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} [F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_i \ \mathrm{sgn}[F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_i =$$

$$= \sum_{\substack{i \notin I \\ i \neq p_1,\ldots,p_k}} [F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_i \ \mathrm{sgn}[F'b + G'u]_i$$

$$+ \sum_{i \in I} [F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_i \ \mathrm{sgn}[F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_i +$$

$$- \sum_{i=1}^{k} [F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_{p_i} \ \mathrm{sgn}[F'b + G'u]_{p_i} =$$

$$= \sum_{\substack{i \notin I \\ i\neq p_1,\ldots,p_k}} |F'b + G'u|_i + \varepsilon \sum_{\substack{i \notin I \\ i\neq p_1\ldots,p_k}} [g_i' \eta] \ \mathrm{sgn}[F'b + G'u]_i +$$

$$+ \sum_{i \in I} [F'b + G'u]_i \ \mathrm{sgn}[F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_i +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i \in I} [g_i'\eta] \ \mathrm{sgn}[F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_i - \sum_{i=1}^{k} |F'b + G'u|_{p_i} +$$

$$- \varepsilon \sum_{i=1}^{k} [g_{p_i}' \eta] \ \mathrm{sgn}[F'b + G'u]_{p_i} = \sum_{\substack{i \notin I \\ i\neq p_1,\ldots,p_k}} |F'b + G'u|_i +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i \notin I} [g_i'\eta] \ \mathrm{sgn}[F'b + G'u]_i - \varepsilon \sum_{i=1}^{k} [g_{p_i}' \eta] \ \mathrm{sgn}[F'b + G'u]_{p_i} +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i\in I} [g_i' \eta] \operatorname{sgn} [F'b + G'(u+\varepsilon\eta)]_i - \sum_{i=1}^{k} |F'b + G'u|_{p_i} +$$

$$- \varepsilon \sum_{i=1}^{k} [g_{p_i}' \eta] \operatorname{sgn}[F'b + G'u]_{p_i} = \|F'b + G'u\|_1 +$$

$$+ \varepsilon \{ \sum_{i\notin I} [g_i'\eta] \operatorname{sgn}[F'b + G'u]_i + \sum_{i\in I} [g_i' \eta] \operatorname{sgn}[F'b + G'(u+\varepsilon\eta)]_i +$$

$$- 2 \sum_{i=1}^{k} |F'b + G'u|_{p_i} + 2 \varepsilon \sum_{i=1}^{k} |g_{p_i}' \eta| =$$

$$= \|F'b + G'u\|_1 - 2 \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_{p_i} |g_{p_i}'\eta| + \varepsilon \{ h(\eta) + 2 \sum_{i=1}^{k} |g_{p_i}' \eta|$$

onde $h(\eta)$ é dado pela expressão 8 .

(c.q.d).

TEOREMA 5.

Se $h(\eta) + 2 \sum_{i=1}^{k} |g_{p_i}' \eta| < 0$ então,

$$\|F'b + G'u\|_1 > \|F'b + G'(u+\varepsilon_{p_1}\eta)\|_1 > \dots > \|F'b+G'(u+\varepsilon_{p_{k+1}}\eta)\|_1$$

PROVA:

Temos que $\|F'b + G'(u + \varepsilon_{p_1}\eta)\|_1 = \|F'b + G'u\|_1 + \varepsilon\, h(\eta)$

$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{p_1}$ dado pela expressão (9), onde concluímos que

$$\|F'b + G'u\|_1 > \|F'b + G'(u + \varepsilon_{p_1}\eta)\|_1$$

Tomando-se $\varepsilon = \varepsilon_{p_k}$, temos pelo Lema 4 que :

$$\|F'b+G'(u+\varepsilon_{p_k}\eta)\|_1 = \|F'b + G'u\|_1 - 2 \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_{p_i} |g'_{p_i}\eta| +$$

$$+ \varepsilon_{p_k} \{h(\eta) + 2 \sum_{i=1}^{k} \|g'_{p_i}\eta|\} \qquad (14)$$

Tomando-se $\varepsilon = \varepsilon_{p_{k+1}}$ temos:

$$\|F'b + G'(u + \varepsilon_{p_{k+1}}\eta)\|_1 = \|F'b + G'u\|_1 -2 \sum_{i=1}^{k+1} \varepsilon_{p_i} |g'_{p_i}\eta| +$$

$$+ \varepsilon_{p_{k+1}} \{h(\eta) + 2 \sum_{i=1}^{k+1} |g'_{p_i}\eta|\} \qquad (15)$$

De (14) temos:

$$\|F'b + G'u\|_1 = \|F'b + G'(u + \varepsilon_{p_k}\eta)\|_1 + 2\varepsilon_{p_i} \sum_{i=1}^{k} |g'_{p_i}\eta| +$$

$$- \varepsilon_{p_k} \{h(\eta) + 2 \sum_{i=1}^{k} |g'_{p_i}\eta| .$$

Substituindo este resultado em (15) temos:

$$\|F'b + G'(u + \varepsilon_{p_{k+1}}\eta)\|_1 = \|F'b + G'(u + \varepsilon_{p_k}\eta)\|_1 + 2 \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_{p_i} |g'_{p_i}\eta| +$$

$$- \varepsilon_{p_k} \{h(\eta) + 2 \sum_{i=1}^{k} |g'_{p_i} \eta|\} - 2 \sum_{i=1}^{k+1} \varepsilon_{p_i} |g'_{p_i} \eta| +$$

$$+ \varepsilon_{p_{k+1}} \{h(\eta) + 2 \sum_{i=1}^{k+1} |g'_{p_i} \eta| = \|F'b + G'(u + \varepsilon_{p_k} \eta)\|_1 +$$

$$+ \varepsilon_{p_{k+1}} \{h(\eta) + 2 \sum_{i=1}^{k+1} |g'_{p_i} \eta| - 2 |g'_{p_{k+1}} \eta| +$$

$$- \varepsilon_{p_k} \{h(\eta) + 2 \sum_{i=1}^{k} |g'_{p_i} \eta| = \|F'b+G'(u + \varepsilon_{p_k} \eta)\|_1 +$$

$$+ (\varepsilon_{p_{k+1}} - \varepsilon_{p_k}) \{h(\eta) + 2 \sum_{i=1}^{k} |g'_{p_i} \eta|\}$$

logo:

$$\|F'b + G'(u + \varepsilon_{p_{k+1}} \eta)\|_1 = \|F'b + G'(u + \varepsilon_{p_k} \eta)\|_1 +$$

$$+ (\varepsilon_{p_{k+1}} - \varepsilon_{p_k}) \{h(\eta) + 2 \sum_{i=1}^{k} |g'_{p_i} \eta|\}$$

Desde que $(\varepsilon_{p_{k+1}} - \varepsilon_{p_k}) > 0$ pois $\varepsilon_{p_{k+1}} > \varepsilon_{p_k}$ e

$\{h(\eta) + 2 \sum_{i=1}^{k} |g'_{p_i} \eta|\} < 0$ por hipótese, então:

$$\|F'b + G'(u + \varepsilon_{p_k}\eta)\|_1 > \|F'b + G'(u + \varepsilon_{p_{k+1}}\eta)\|_1$$

(c.q.d).

Baseando-se no Teorema 5 a seleção lógica para o parâmetro "ε" seria selecionar o maior índice "q" que primeiramente fizesse

$$h(\eta) + 2 \sum_{i=1}^{q} |g'_{p_i}\eta| \geq 0$$

Portanto,

$$\|F'b + G'(u + \varepsilon_{p_q}\eta)\|_1 < \|F'b + G'(u + \varepsilon_{p_i}\eta)\|_1$$

$i = 1,\ldots,q-1.$

Concluimos que ε_{p_q} é a seleção ótima para o parâmetro "ε" que minimiza $\|F'b + G'(u + \varepsilon\eta)\|_1$ na direção do vetor η.

Acerca do procedimento para seleção de ε e o vetor η ,sempre garantimos que,

$$\|F'b + G'(u + \varepsilon\eta)\|_1 < \|F'b + G'u\|_1$$

Desde que $\|F'b + G'u\|_1$ é reduzido em cada iteração, e pelo menos m-1 componentes são zeros, então segue que algorítmo converge num número finito de iterações.

ALGORÍTMO

1º Passo: Escolher uma solução inicial qualquer "u"

2º Passo: Calcular $[F'b + G'u]$

3º Passo: Gerar o conjunto $I = \{i: [F'b + G'u]_i = 0\}$

4º Passo: Calcular o vetor d, tal que:

$$d = G\,\mathrm{sgn}(F'b + G'u)$$

5º Passo: $\begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \hline \alpha^2 \end{bmatrix} = G_k^{-1} \cdot d$

6º Passo: Se $\alpha^2 = 0$ e $|\alpha_i^1| \leq 1,\ i = 1,\ldots,k$ então o vetor "u" atual é ótimo. Caso contrário siga para o passo seguinte.

7º Passo: Cálculo do vetor direção η.

a) se $\alpha^2 = 0$, e pelo menos uma das componentes de α_i^1 é maior que 1, então:

$$\eta' = -[e_p' \ \vdots\ 0']\ G_k^{-1} \cdot \mathrm{sgn}(\alpha_p^1) \quad \text{com} \quad |\alpha_p^1| > 1$$

b) se $\alpha^2 \neq 0$, então

$$\eta' = -[0' \ \vdots\ \mathrm{sgn}(\alpha^{2'})]\,G_k^{-1}$$

8º Passo: Cálculo do "ε" .

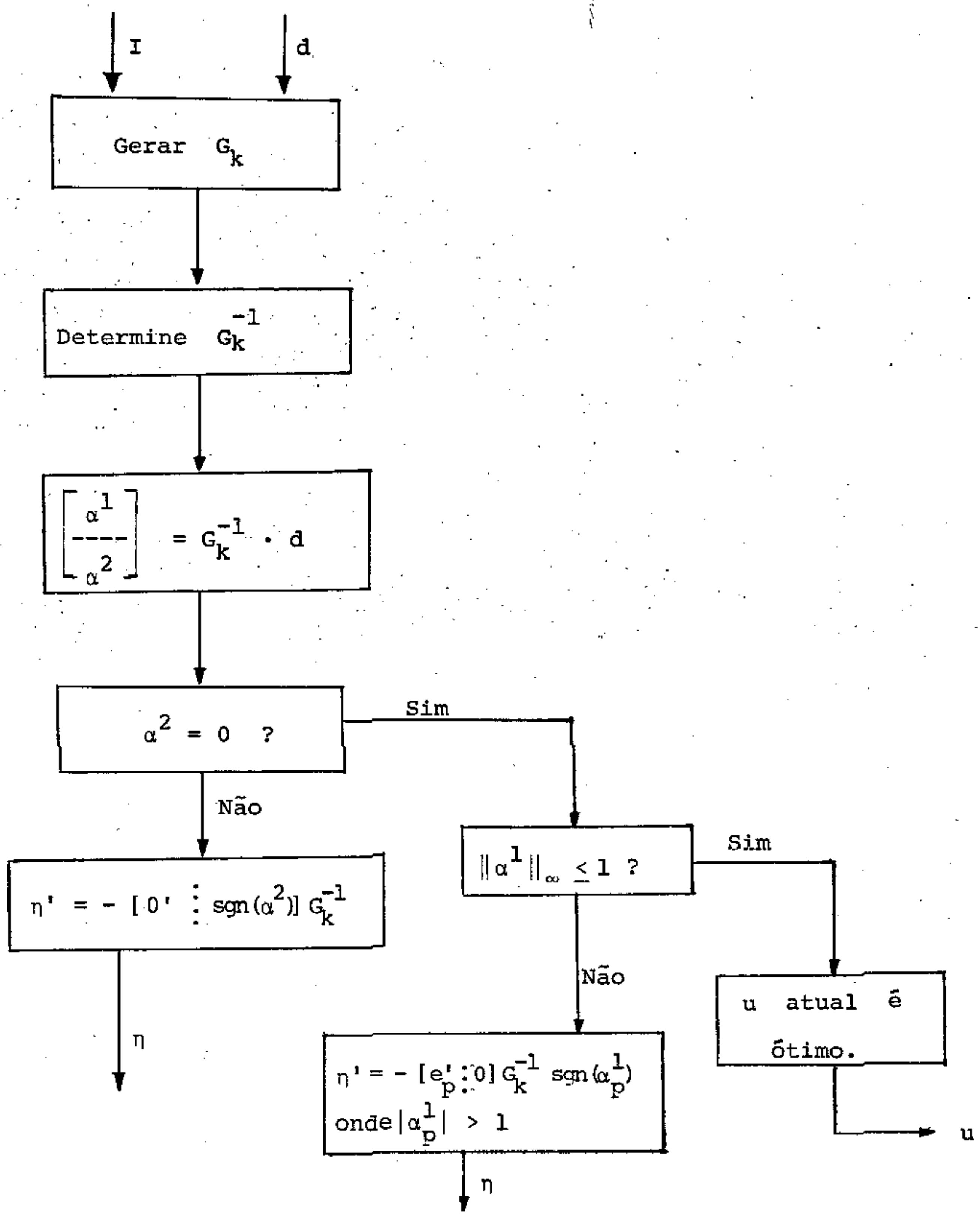
$$\varepsilon_i = \frac{-[F'b + G'u]_i}{[G'\eta]_i} \quad \text{para} \quad i \notin I$$

Selecionar ε_i positivos em ordem crescente $\varepsilon_{p_1} < \varepsilon_{p_2} < \ldots < \varepsilon_{p_s}$. Escolha o maior índice "q" que primeiramente faça $h(\eta) + 2 \sum_{i=1}^{q} |g'_{p_i}\eta| \geq 0$. Tome $\varepsilon = \varepsilon_q$.

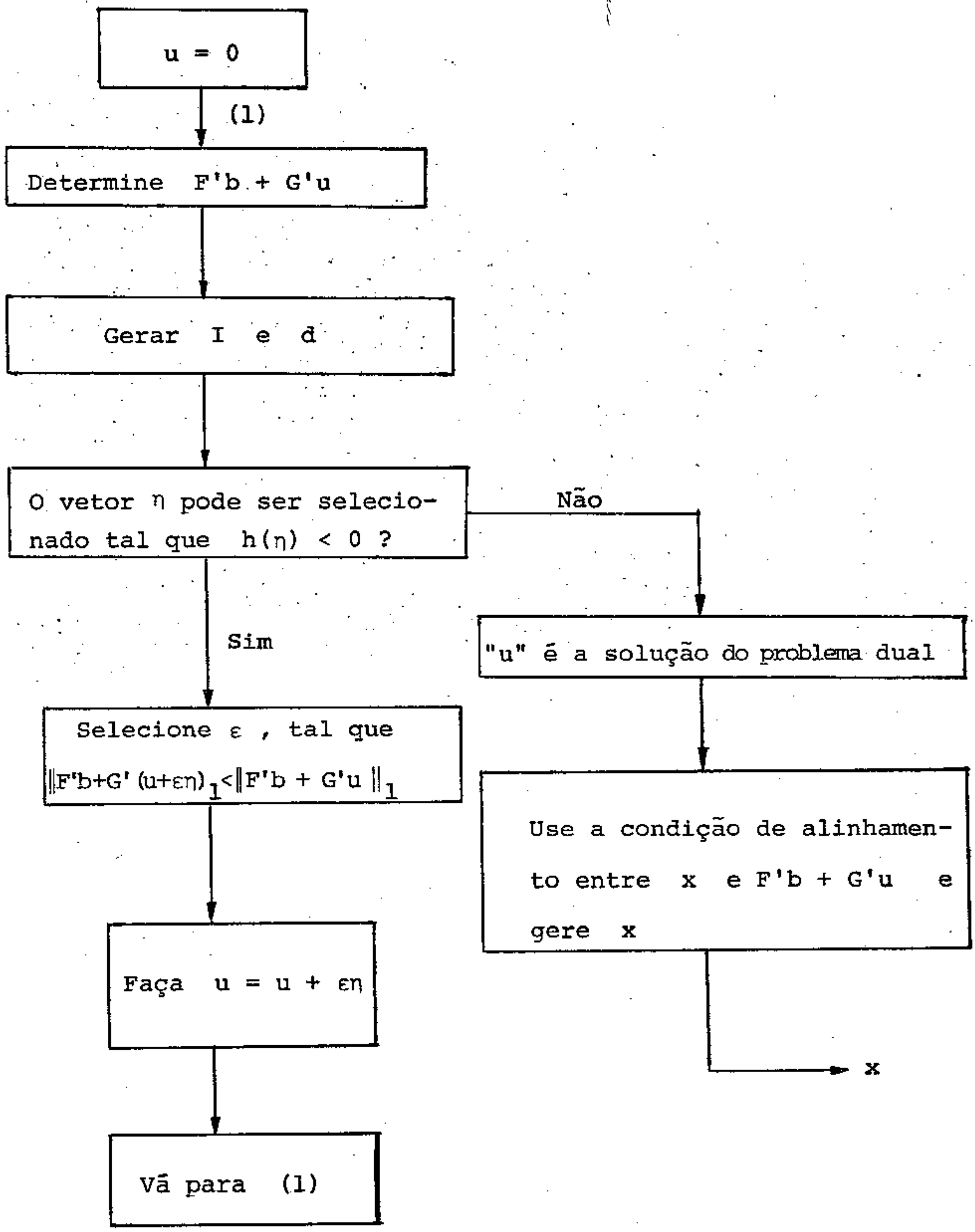
9º Passo: O novo vetor $\hat{u} = u + \varepsilon\eta$, e vá para o 2º passo.

Obs.: Para garantir a existência da matriz G_k^{-1} no 5º passo, é suficiente que a matriz G_k satisfaça a condição de Haar.

Geração do vetor η . (diagrama de bloco)



"Algorítmo" (diagrama de bloco)



TEOREMA 6.

O algorítmo apresentado sempre converge a uma solução em uma iteração, para o caso de duas equações lineares a n incógnitas.

PROVA:

$1^{\underline{a}}$ parte : $I = \phi$, $k > 0$.

Iniciaremos com uma solução inicial $u = 0$.

$$\text{Seja } G = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_i & \cdots & g_n \\ kg_1 & kg_2 & \cdots & kg_i & \cdots & kg_n \end{bmatrix}$$

$$sgn[F'b+G'u] = \begin{bmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sg\ 1 \\ \pm 1 \\ sg\ 2 \end{bmatrix}.$$

onde $sg\ 1 = [\pm 1 \ \ldots \ \pm 1]_{(q-1)\times 1}$ e $sg\ 2 = [\pm 1 \ \ldots \ \pm 1]_{(n-q)\times 1}$

$$d = G\ sgn[F'b + G'u] = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{q-1} g_j (sg\ 1)_j + g_q (sgn(F'b+G'u))_q + \sum_{j=q+1}^{n} g_j (sg\ 2)_j \\ k(\sum_{j=1}^{q-1} g_j (sg\ 1)_j + g_q (sgn(F'b+G'u))_q + \sum_{j=q+1}^{n} g_j (sg\ 2)_j \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} S \\ \\ k \quad S \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad S = \sum_{j=1}^{q-1} g_j(sg\ 1)_j + g_q(\mathrm{sgn}(F'b+G'u))_q + \sum_{j=q+1}^{n} g_j(sg\ 2)_j$$

Como $I = \phi$, então $\alpha = G_o^{-1} \cdot d = [\alpha^2] = d$

onde $G_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $G_o^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Supor que $S > 0$

$\eta' = - [\mathrm{sgn}(\ ^{2'})] \cdot G_o^{-1} = [-1 \quad -1]$

Supor que $0 < \varepsilon_1 \ldots < \varepsilon_{q-1} < \varepsilon_q < \varepsilon_{q+1} \cdots < \varepsilon_s$ todos positivos

Temos que:

$$\varepsilon_j = \frac{-[F'b]_j}{[G'\eta]_j} = \frac{-[F'b]_j}{[g_j \quad kg_j][\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}]} = \frac{-[F'b]_j}{-(1+k)g_j}$$

Portanto,

$$\varepsilon_j = \frac{[F'b]_j}{(1+k)g_j} \qquad j = 1,\ldots,s$$

Como $\varepsilon_j > 0 \Longrightarrow$ $\text{sgn}\,[F'b]_j = \text{sgn}(g_j) \quad j = 1,\ldots,s$ (16)

Seja ε_q o parâmetro escolhido, então

$$h(\eta) + 2 \sum_{j=1}^{q} |g_j' \eta| \geq 0 \qquad (17)$$

Como $S = \sum_{j=1}^{q-1} g_j(\text{sg } 1)_j + g_q(\text{sgn}(F'b))_q + \sum_{j=q+1}^{n} g_j(\text{sg } 2)_j$ e de (16)

temos:

$$S = \sum_{j=1}^{q-1} |g_j| + |g_q| + \sum_{j=q+1}^{n} g_j(\text{sg } 2)_j$$

Por outro lado

$$h(\eta) = -\|\alpha^2\|_1 = -(1+k)S \qquad (18)$$

novo $u^o = \varepsilon_q \eta$

$$G_1 = \begin{bmatrix} g_q & 0 \\ kg_q & 1 \end{bmatrix} \qquad G_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1/g_q & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = G\,\text{sgn}(F'b + G'u) = G \begin{bmatrix} -\text{sg } 1 \\ 0 \\ +\text{sg } 2 \end{bmatrix}$$

pois $\mathrm{sgn}[F'b + G'u]_i = -\mathrm{sgn}[F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_i \qquad i = 1,\ldots,q-1$

e $\mathrm{sgn}[F'b + G'u]_i = \mathrm{sgn}[F'b + G'(u + \varepsilon\eta)]_i \qquad i = q+1,\ldots,n$

$$\alpha = G_1^{-1} \cdot d = \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ ---- \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1/g_q & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} -sg\ 1 \\ 0 \\ -sg\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/g_q & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^{q-1} g_j + \sum_{j=q+1}^{n} g_j (sg\ 2)_j \\ k(-\sum_{j=1}^{q-1} g_j + \sum_{j=q+1}^{n} g_j (sg\ 2)_j) \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1/g_q(-\sum_{j=1}^{q-1} |g_j| + \sum_{j=q+1}^{n} g_j (sg\ 2)_j) \\ 0 \end{bmatrix}$$

condição de otimalidade

$$|1/g_q(-\sum_{j=1}^{q-1} |g_j| + \sum_{j=q+1}^{n} g_j \ (sg\ 2)_j)| \leq 1$$

mostraremos que:

$$|g_q| \geq \left| - \sum_{j=1}^{q-1} |g_j| + \sum_{j=q+1}^{n} g_j (sg\ 2)_j \right|$$

Temos de (17) e (18) que :

$$-(1+k)S + 2 \sum_{j=1}^{q-1} |[g_j \quad kg_j]\ \eta| + 2\,|[g_q \quad kg_q]\ \eta| \geq 0 \qquad (19)$$

Por outro lado

$$([g_j \quad kg_j]\ \eta) = [g_j \quad kg_j] \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix} = -(1+k) g_j$$

Então de (19) temos :

$$-[(1+k)[\sum_{j=1}^{q-1} |g_j| + |g_q| + \sum_{j=q+1}^{n} g_j (sg\ 2)_j]] + 2 \sum_{j=1}^{q-1} (1+k)\ |g_j| +$$

$$+ (1+k)\ 2\ |g_q| \geq 0$$

$$-\sum_{j=1}^{q-1} |g_j| - |g_q| - \sum_{j=q+1}^{n} g_j (sg\ 2)_j + 2 \sum_{j=1}^{q-1} |g_j| + 2\ |g_q| \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{q-1} |g_j| + |g_q| - \sum_{j=q+1}^{n} g_j (sg\ 2)_j \geq 0$$

logo:

$$|g_q| \geq - \sum_{j=1}^{q-1} |g_j| + \sum_{j=q+1}^{n} g_j (sg\ 2)_j \qquad (20)$$

Por outro lado temos:

$$h(\eta) + 2 \sum_{j=1}^{q-1} |(g_j \quad kg_j)\eta| < 0$$

$$-(1+k)S + 2 \sum_{j=1}^{q-1} |(g_j \quad kg_j)\eta| < 0$$

$$\sum_{j=1}^{q-1} |g_j| - |g_q| - \sum_{j=q+1}^{n} g_j (sg\ 2)_j < 0$$

$$- |g_q| < - \sum_{j=1}^{q-1} |g_j| + \sum_{j=q+1}^{n} g_j (sg\ 2)_j \qquad (21)$$

De (20) e (21) temos :

$$|g_q| \geq \left| - \sum_{j=1}^{q-1} |g_j| + \sum_{j=q+1}^{n} g_j \ (sg\ 2)_j \right|$$

logo a condição de otimalidade é satisfeita, e podemos concluir que o vetor u^0 obtido em uma iteração é ótimo.

$2^{\underline{a}}$ Parte : $I \neq \phi$ e $k > 0$.

Tomemos $u = 0$

$I = \{i\}$

$$\operatorname{sgn}(F'b + G'u) = \begin{bmatrix} sg\ 1 \\ 0 \\ sg\ 2 \end{bmatrix} \qquad ; \operatorname{sgn}(F'b + G'u)_i = 0$$

$$d = \begin{bmatrix} S \\ kS \end{bmatrix} \text{ onde } S = \sum_{j=1}^{i-1} g_j (sg\ 1)_j + \sum_{j=i+1}^{n} g_i (sg\ 2)_j$$

$$G_o = \begin{bmatrix} g_i \\ kg_i \end{bmatrix} \qquad G_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1/g_i & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = G_o^{-1} \cdot d = \begin{bmatrix} 1/g_i \cdot S \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $\alpha^2 = 0$, se $|1/g_i \cdot S| \leq 1 \Longrightarrow u$ ē ōtimo

se $|1/g_i \cdot S| > 1$ com $S > 0$ e $g_i > 0$.

$$\eta' = [-1/g_i \quad 0]$$

$$\varepsilon_j = \frac{(F'b)_j}{1/g_i\ g_j} \qquad j \neq i$$

Suponha que $0 < \varepsilon_1 \dots < \varepsilon_s$

então $\operatorname{sgn}(F'b)_j = \operatorname{sgn}(g_j) \qquad j = 1,\dots,s$

Suponha que :

$$h(\eta) + 2 \sum_{j=1}^{q-1} \left|\frac{g_j}{g_i}\right| < 0 \qquad \text{(i)}$$

$$h(\eta) + 2 \sum_{j=1}^{q} \left|\frac{g_j}{g_i}\right| \geq 0 \qquad \text{(ii)}$$

Temos a nova solução:

$$u^0 = u + \varepsilon_q \eta = \varepsilon_q \eta$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} g_q & 0 \\ kg_q & 1 \end{bmatrix} \qquad G_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1/g_q & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{sgn}(F'b + G'u^0) = \begin{bmatrix} s\hat{g}\ 1 \\ 0 \\ s\hat{g}\ 2 \end{bmatrix}$$

onde $(s\hat{g}\ 1)_j = -\ (sg\ 1)_j \qquad j = 1\dots q-1$

$(s\hat{g}\ 2)_j = (sg\ 1)_j \qquad j = q+1,\dots,i-1$

$\operatorname{sgn}(F'b + G'u^0)_q = 0$

$$(s\hat{g}\ 2)_j = (sg\ 2)_j \qquad j = i+1,\ldots,n$$

$$(s\hat{g}\ 2)_i = -1 \quad \text{pois} \quad (F'b + G'(u + \varepsilon_q \eta))_i = \varepsilon_q (g_i' \eta) < 0$$

$$d = G\ \text{sgn}\ (F'b + G'u^o) = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ k\hat{S} \end{bmatrix}$$

onde $\hat{S} = - \sum_{j=1}^{q-1} g_j (sg\ 1)_j + \sum_{j=q+1}^{n} g_j (s\hat{g}\ 2)_j$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \hat{S} \cdot 1/g_q \\ 0 \end{bmatrix}$$

de (i) e (ii) temos que $|\hat{S}| \leq |g_q|$

logo : u^o é ótimo.

Podemos notar que o teorema é válido para qualquer k.

(c.q.d).

Aplicação

Exemplo 1:

Determinar a solução de norma L_∞ mínima do sistema consistente,

$$\begin{cases} 1\,x_1 + 2\,x_2 + 1\,x_3 = 1 \\ 2\,x_1 + 1\,x_2 + 8\,x_3 = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

posto (A) = $m = 2$, e $m < n$.

Aplicando o algorítmo apresentado :

$$F = \begin{bmatrix} 7/10 & 5/10 & 25/10 \\ 21/10 & 15/10 & 75/10 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 3/10 & 15/10 & -15/10 \\ -1/10 & -5/10 & 5/10 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \end{bmatrix} \quad \text{vetor inicial}$$

1. $F'b + G'u = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ 60 \end{bmatrix}$

2. $G_k = \begin{bmatrix} 3/10 & 0 \\ -1/10 & 1 \end{bmatrix}$

3. $G_k^{-1} = \begin{bmatrix} 10/3 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix}$

4. $d = G \cdot \text{sgn}\, F'b + G'u = \begin{bmatrix} 3/10 & 15/10 & -15/10 \\ -1/10 & -5/10 & 5/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} \alpha^1 \\ ---- \\ \alpha^2 \end{bmatrix} = G_k^{-1} \cdot d = \begin{bmatrix} 10/3 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\alpha^2 = 0 \quad \text{e} \quad |\alpha^1| > 1$$

6. Cálculo de η

$$\eta' = - [e_p' \vdots 0'] [G_k^{-1}] \quad \text{sgn}\, \alpha_p^1$$

$$\eta' = - [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 10/3 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \cdot -1 = [10/3 \quad 0]$$

7. Cálculo dos "ε"

$$G'\eta = \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ 15/10 & -5/10 \\ -15/10 & 5/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10/3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_i = \frac{-[F'b + G'u]_i}{[G'\eta]_i}$$

$$\varepsilon_1 = 0$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{(-30)}{5} = 6$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{60}{-5} = 12$$

$$\varepsilon_{p_1} = 6 \quad , \quad \varepsilon_{p_2} = 12 \quad , \quad \varepsilon_{p_1} < \varepsilon_{p_2} \quad .$$

$$h(\eta) + 2\sum_{i=1}^{2} |g'_{p_i}\eta| = -9 + 2 \begin{bmatrix} 15/10 & -5/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10/3 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -9 + 2 \cdot 5 = 1 > 0$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{p_1} = 6$$

8. $u^o = u + \varepsilon\eta$

$$u^o = \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 10/3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 70 \end{bmatrix}$$

9. Teste de otimalidade

$$F'b + G'u^o = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ 15/10 & -5/10 \\ -15/10 & 5/10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$d = G\ \mathrm{sgn}[F'b + G'u^o] = \begin{bmatrix} -12/10 \\ 4/10 \end{bmatrix}$$

10. Troque g_{j_p} por g_q, onde $p = 1$ e $q = 2$ e forme :

$$G_k = \begin{bmatrix} 15/10 & 0 \\ -5/10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_k^{-1} = \begin{bmatrix} 10/15 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

11. $$\begin{bmatrix} \alpha^1 \\ ---- \\ \alpha^2 \end{bmatrix} = G_k^{-1} \cdot d = \begin{bmatrix} 10/15 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12/10 \\ 4/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12/15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Temos que $\alpha^2 = 0$ e $|\alpha^1| < 1$

logo $u^o = \begin{bmatrix} 20 \\ 70 \end{bmatrix}$ é o vetor é ótimo.

12. Usando a condição de alinhamento entre $[F'b + G'u^o]$ e x, geramos :

$$x = \begin{cases} \dfrac{b'b}{\|F'b + G'u^o\|_1}\ \mathrm{sgn}(F'b + G'u^o)_i & \text{se } [F'b + G'u^o]_i \neq 0 \\[2ex] \alpha_i & \text{se } [F'b + G'u^o]_i = 0 \end{cases}$$

onde $|\alpha_i| \leq \dfrac{b'b}{\|F'b + G'u^o\|_1}$.

Então a solução de norma L_∞ mínima é:

$$x^0 = \begin{bmatrix} 5/18 \\ 2/9 \\ 5/18 \end{bmatrix}$$

O algorítmo foi programado em Fortran.

EXEMPLO 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & -5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$u^0 = [-133.1944, -9.0277, 9.0277]$$

$$x^0 = [2, 2, 0, -1]$$

EXEMPLO 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 9 & -1 \\ 2 & 7 & 5 & 7 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$u^0 = [3.5324, -4.1917, -2.0307, 1.3255]$

$x^0 = [0.1101, -0.0848, 0.0430, 0.1025, 0.1101, -0.1101]$

Resolução do problema $\min\limits_{Ax=b} \|x\|_\infty$ por programação linear

Apresentamos algorītmos que resolvem o problema $\min\limits_{Ax=b} \|x\|_\infty$. Uma alternativa proposta aqui, serã transformar este problema num problema padrão de programação linear.

Desejamos resolver o problema primal

$$\min_{Ax=b} \|x\|_\infty \qquad (22)$$

O problema (22) ē equivalente a :

$$\min_{Ax=b} \|x\|_\infty = \min_{\substack{Ax=b \\ |x_i| \le s}} s$$

$$\min\ (0,1)\ (x,s)$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ -s \le x_i \le s \end{cases}$$

Coloquemos o problema (22) na forma padrão de um problema de programação linear.

Introduziremos as variáveis

$$\overline{x}_i = x_i + s \qquad i = 1,\ldots,n$$

Usando o fato de que $-s \leq x_i \leq s$ segue que

$$0 \leq \overline{x}_i \leq 2s \qquad i = 1,\ldots,n$$

Então temos

$$\min \ (0,1)\ (x,s)$$
$$Ax = b$$

$$0 \leq \overline{x}_i \leq 2s$$

colocando $\overline{x}_i$ em forma vetorial

$$\overline{x} = x + se$$

onde s é um escalar, e "e" é um vetor $n\times 1$ com componentes unitárias.

O sistema original segue como:

$$Ax = A(x - se) = A\overline{x} - sAe = b \qquad e \qquad \overline{x}_i \leq 2s$$

Para suprir a desigualdade, introduzimos variáveis de folga q_i :

$$\bar{x}_i + q_i = 2s \qquad i = 1,\ldots,n$$

na forma vetorial :

$$\bar{x} + q = 2se$$

Portanto temos :

$$\min \quad s$$

$$\begin{cases} A\bar{x} - sAe = b \\ \bar{x} - 2se + q = 0 \\ \bar{x}_i \geq 0 \quad q_i \geq 0 \end{cases} \qquad (23)$$

Para gerar uma base factível inicial, adicionaremos variáveis artificiais

$$A\bar{x} - sAe + Ia = b$$

onde I é a matriz identidade, "a" um vetor variável artificial com componentes a_i, $i = 1,\ldots,m$

Resolveremos o problema artificial

$$\min \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_m$$

$$\begin{cases} A\bar{x} - sAe + Ia = b \\ \bar{x} - 2se + q = 0 \\ x_i \geq 0 \quad q_i \geq 0 \quad b_i \geq 0 \quad a_i \geq 0 \quad s > 0 \end{cases}$$

cuja solução final dará uma base factível inicial para o problema (23).

Observamos que o problema de m equações a n incógnitas $Ax = b$, foi transformado em m+n equações $2n + m + 1$ incógnitas x, q, a e s.

Note que se utilizarmos o método simplex revisado, a cada iteração estaremos invertendo uma matriz $(m+n)\times(m+n)$; enquanto que no algorítmo apresentado teremos a inversão de uma matriz $(m\times m)$.

Claramente estas inversas podem ser obtidas das inversas na iteração anterior, pois apenas uma coluna é alterada na matriz a cada iteração. Assim aplicando simplex revisado no problema (23) teremos $2(m+n)^2$ multiplicações para o cálculo da inversa; enquanto que no algorítmo teremos $2m^2$ multiplicações em cada iteração.

TABELAS:

Algorítmo	nº de multiplicações
$F'b + G'u$ ($F'b$ é fixo)	$m\,n$
d	$m(n-1)$ (adição)
η { G_k^{-1}	$2m^2$
$G_k^{-1}d$	m^2
	$m(m-1)$ (adição)
η	
ε_i { $G'\eta$	$m\,n$
ε_i	n

simplex revisado em (23)	nº de multiplicações
B_k^{-1}	$2(n+m)^2$
$\overline{x}_B = B_k^{-1} \cdot b$	$(n+m)^2$
$c_B \overline{x}_B$	$(n+m)$
$\pi = c_B' B_k^{-1}$	$(n+m)^2$
$c_j - \pi a_j$ para n+1 valores de j. (variáveis não básicas)	$(n+m)(n+1)$

REFERÊNCIAS

[1] I. BARRODALE, "A new variant of Gaussian elimination".J. Inst. Math. Appl., 19 (1977), p. 39-47.

[2] I. BARRODALE and ANDREW YOUNG, "Algorithms for best L_1 and L_∞ linear approximations on a discrete set". Numer. Math. 8 (1966), p. 295-306.

[3] JAMES A. CADZON, "An efficient algorithmic procedure for obtaining a minimum L_∞ solution to a system of consistent linear equation". Siam J. Numerical Analysis, Vol. 11 December (1974) p. 1151-1165.

[4] JAMES A. CADZON, "A finite algorithm for the minimum L_∞ solution to a system of consistent linear equation". Siam J. Numerical Analysis, Vol. 10 (1973) p. 607-617.

[5] D.G. LUENBERGER, "Optimization by vector space methods". John Wiley & Sons, Inc. (1969).

[6] J.H. WILKINSON, "Rouding errors in algebraic processes".Prentice-Hall (1963).

[7] E.W. CHENEY, "Introduction to approximation theory" McGraw--Hill, New York (1966).

[8] M. SAKAROVITCH, "Notes on linear programming". Van Nostrand Reinhold (1971).

Além da bibliografia citada em (2), encontramos na literatura os seguintes algorítmos alternativos.

[9] A. K. CLINE, "A descent method for the uniform solution to overdetermined systems of linear equations"; Siam J. Numerical Analysis, 13 (1976) p. 293-309.

[10] RICHARD H. BARTELS, ANDREW R. CONN and CHRISTAKIS CHARALAMBOUS, "On Cline's direct method for solving overdetermined linear systems in the L_∞ sense", Siam J. Numerical Analysis, April (1978) p. 255-270.