Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Equigeodésicas e aplicações equiharmônicas em variedades flag generalizadas

por

Lino Anderson da Silva Grama

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros

Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq e CAPES.

Equigeodésicas e Aplicações Equiharmônicas em Variedades Flag Generalizadas

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Lino Anderson da Silva Grama** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de Fevereiro de 2011.

Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros
Prof. Dr. Luiz Antônio Barrera San Martin
Prof. Dr. Pedro José Catuogno
Profa. Dra. Maria Luiza Soares Leite
Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

	Grama, Lino Anderson da Silva
G761e	Equigeodésicas e aplicações equiharmônicas em variedades flag generalizadas/Lino Anderson da Silva Grama-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.
	Orientador : Caio José Colletti Negreiros
	Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1.Lie, Grupos de. 2.Lie, Álgebra de. 3.Espaços homogêneos. 4.Mapas harmônicos. 5.Geodésica (Matemática). I. Negreiros, Caio José Colletti. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Equigeodesics and equiharmonic maps on generalized flag manifolds

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Lie groups. 2.Lie algebras. 3.Homogeneous spaces. 4.Harmonic maps. 5.Geodesics (Mathematics).

Área de concentração: Geometria diferencial

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Luiz Antônio Barrera San Martin (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC – UNICAMP)
Profa. Dra. Maria Luiza Soares Leite (UFPE)
Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka (UEM)

Data da defesa: 25/02/2011

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 25 de Fevereiro de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____

Prof(a). Dr(a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS

____

Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

____

Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO

____

Prof(a). Dr(a). MARIA LUIZA SOARES LEITE

____

Prof(a). Dr(a). RYUICHI FUKUOKA

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, por mais esta oportunidade de aprendizado e por sempre estar presente na minha vida.

À minha mãe Sônia, por seu amor, apoio e encorajamento.

À minha esposa Roberta, minha companheira de todas as horas. Obrigado pela paciência e encorajamento durante todos estes anos (desde o início da minha graduação).

Ao meu orientador, Prof. Caio Negreiros, pelo respeito, honestidade, paciência e amizade durante estes anos.

Aos Professores Luiz A.B. San Martin e Pedro J. Catuogno pelas várias sugestões e dicas durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos Professores da Banca Examinadora, pelas várias sugestões que tornaram este texto melhor.

Ao Prof. José C. S. Kiihl, meu orientador de iniciação científica, pelo encorajamento e pela amizade.

Aos amigos da turma do Doutorado de 2008: Anderson Araújo, Luis Lucinger, Thiago Ferraiol, Diogo Diniz, Ricardo Martins, Angelo Bianchi e Nelson Louza. Muito obrigado pela amizade de vocês.

Aos amigos de outras turmas e outros cursos da Pós Graduação do IMECC: Wellington Assunção, Rodrigo Lambert, Fábio Campos, Juliana Gaiba, João Paulo Bressan, Durval Tonon, Luis de Miranda, Márcio Valk, Rodrigo Pires, Luciano Felix, Adriano João da Silva, Marcos Spreafico, Félix Silva e Vitor Moretto.

Aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação do IMECC/UNICAMP.

Ao CNPq e CAPES, pelo apoio financeiro.

De tudo ficaram três coisas...
A certeza de que estamos começando...
A certeza de que é preciso continuar...
A certeza de que podemos ser interrompidos antes de terminar...
Façamos da interrupção um caminho novo...
Da queda, um passo de dança...
Do medo, uma escada...
Do sonho, uma ponte...
Da procura, um encontro!
(Fernando Sabino)

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é o estudo de aplicações harmônicas em variedades flag generalizadas. Na primeira parte do trabalho, consideramos aplicações cujo domínio é uma superfície de Riemann. Provamos que toda aplicação holomorfa-horizontal na variedade flag é uma *aplicação equiharmônica* (ie, harmônica com respeito a cada métrica invariante na variedade flag). Obtemos também as fórmulas de Plücker para curvas holomorfa-horizontais na variedade flag maximal.

Na segunda parte do trabalho, consideramos aplicações harmônicas cujo domínio possui dimensão 1 (ie, geodésicas) na variedade flag. Provamos que toda variedade flag generalizada admite curvas que são geodésicas com respeito a cada métrica invariante. Tais curvas são chamadas *equigeodésicas*. Fornecemos uma descrição algébrica para tais curvas e exibimos famílias de equigeodésicas em diversas famílias de variedades flag.

Abstract

The main goal of this work is the study of harmonic maps in generalized flag manifolds. In the first part of the work, we consider maps whose domain is a Riemann surface. We prove that every holomorphic-horizontal map in the flag manifold is an *equiharmonic map* (i.e. harmonic with respect to each invariant metric in the flag manifold). We also obtain the Plücker formulae for holomorphic-horizontal curves in full flag manifolds.

In the second part of the work, we consider harmonic maps whose domain has dimension one (i.e. geodesics) in the flag manifold. We prove that every generalized flag manifold admit curves that are geodesics with respect to each invariant metric. Such curves are called *equigeodesics*. We provide an algebraic characterization for such curves and exhibit families of equigeodesics in several families of flag manifolds.

Sumário

Introdução

Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas compactas. Uma aplicação diferenciável $f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ é dita harmônica se f for um ponto crítico do funcional energia

$$E(f) = \int_M |df|^2 \upsilon_g.$$

Exemplos bem conhecidos de aplicações harmônicas são as geodésicas e as superfícies mínimas, que são objetos clássicos de estudo em geometria diferencial.

Nosso principal objetivo será estudar aplicações harmônicas numa classe de espaços homogêneos não-simétricos chamadas *variedades flag generalizadas*.

No contexto de espaços homogêneos, é bastante natural considerar objetos que são invariantes pela ação do grupo de transformações. Desta forma o contexto escolhido é o ambiente Riemanniano invariante, isto é, utilizaremos somente métricas Riemannianas invariantes nas variedades flag.

É conhecido que variedades flag generalizadas possuem uma rica geometria (Riemanniana e Hermitiana), cf. [3] e [40], além de uma boa descrição em termos da Teoria de Lie (grupos e álgebras). De fato, grande parte dos objetos invariantes numa variedade flag tem sua descrição simplificada, o que permite na maioria das vezes soluções explícitas para certos problemas. Podemos citar, por exemplo, a situação de se encontrar métricas de Einstein. Sabemos que as equações de Einstein para uma métrica Riemanniana geral formam um sistema de equações diferenciais parciais. Quando restringimos este problema ao caso invariante, as equações de Einstein são dadas por um sistema algébrico de equações, que embora ainda seja não-trivial é mais tratável que um sistema de equações parciais.

A geometria invariante de variedades flag tem sido objeto de estudos recentes sobre vários aspectos como geodésicas, métricas de Einstein, aplicações harmônicas, fluxos de Ricci e estruturas Hermitianas. Veja, por exemplo, [1], [4], [15], [21], [24], [22], [36], [40].

Nosso estudo sobre aplicações harmônicas se dividirá em duas partes: a primeira parte diz respeito a aplicações harmônicas cujo domínio é uma superfície de Riemann e a segunda parte trata de geodésicas (que são aplicações harmônicas com domínio 1-dimensional). Descreveremos com mais detalhes os problemas que abordamos e nossos resultados relativos a cada parte do trabalho. Iniciamos com as aplicações harmônicas cujo domínio é uma superfície de Riemann.

A classificação de aplicações harmônicas em espaços simétricos inicia-se com Calabi em [14], que discutiu a classificação das aplicações harmônicas cujo domínio era a esfera 2-dimensional e o contra-domínio era uma esfera $2n$-dimensional. A principal ideia nesse trabalho é a seguinte: considere uma aplicação $g : S^2 \to SO(2n+1)/U(n)$ que seja holomorfa e horizontal (ie. a imagem de g é tangente a uma distribuição horizontal do fibrado tangente holomorfo de $SO(2n+1)/U(n)$). A aplicação g tem a propriedade que $\pi \circ g : S^2 \to S^{2n}$ é uma aplicação harmônica, onde π é a projeção da fibração de $SO(2n+1)/U(n)$ em S^{2n}. Vice-versa, dado uma aplicação harmônica $f : S^2 \to S^{2n}$, então existe uma aplicação $\bar{f} : S^2 \to SO(2n+1)/U(n)$ que é holomorfa e horizontal. Desta forma, o estudo das aplicações harmônicas pode ser feito através do estudo de curvas holomorfas na variedade (flag) $SO(2n+1)/U(n)$. Observe que com este método torna-se possível o uso de ferramentas de análise e geometria complexa.

Posteriormente, Eells e Wood em [18] classificaram as aplicações harmônicas de S^2 no espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ utilizando métodos semelhantes, isto é, provando que existe uma correspondência 1-1 entre as aplicações harmônicas e curvas holomorfa-horizontais em certas variedades flag. Na prova foi fundamental que a aplicação em $\mathbb{C}P^n$ era levantada para uma variedade flag de $SU(n)$.

Negreiros, em [34], mostrou que as aplicações holomorfa-horizontais nas variedades flag de $SU(n)$, utilizadas na construção de Eells-Wood, eram aplicações harmônicas. Na verdade, foi mostrado que estas aplicações tem uma interessante propriedade: elas são harmônicas com respeito a todas as métricas invariantes na variedade flag. Observamos que Negreiros não utilizou explicitamente ferramentas da teoria de Lie nesse trabalho.

Black, em [8], chamou as aplicações que são harmônicas com respeito a todas as métricas invariantes na variedade flag de *aplicações equiharmônicas.* Black estudou as aplicações equiharmônicas utilizando teoria de Lie e a teoria de f-estruturas introduzida por Yano em [46], obtendo diversos resultados interessantes.

Baseados nas ideias de Negreiros e de Black, conseguimos estender o resultado de Negreiros ([34]) para variedades flag mais gerais. Nossa primeira contribuição é a seguinte:

Teorema A: *Toda curva holomorfa-horizontal numa variedade flag generalizada é uma aplicação equiharmônica.*

O resultado acima fornece uma classe de exemplos de aplicações equiharmônicas e foi utilizado no estudo da estabilidade de tais aplicações em [36].

Bryant, em [11], mostrou que as variedades flag maximais são espaços total de uma fibração sobre espaço simétricos, com a propriedades que curvas holomorfas-horizontais no flag projetam em aplicações harmônicas no espaço simétrico. De maneira mais explícita, seja M uma superfície de Riemann, G/T uma variedade flag maximal (T toro maximal de G), G/H é um espaço simétrico ($T \subset H$) e $\pi : G/T \to G/H$ a projeção natural. Se $h : M \to G/T$ é uma aplicação holomorfa-horizontal então $f = \pi \circ h : M \to G/H$ é uma aplicação harmônica. Bryant também descreveu explicitamente a distribuição horizontal de uma variedade flag maximal munida com uma estrutura complexa invariante. Tal descrição é dada em termos de espaços de raízes da álgebra de Lie de G.

Yang, em [43] e [44], usando a descrição da distribuição horizontal dada por Bryant, observou que as fórmulas de Plücker clássicas para aplicações holomorfas $f : M \to \mathbb{C}P^n = SU(n)/S(U(1) \times U(n-1))$, sendo M uma superfície de Riemann, podem ser obtidas a partir do seu levantamento horizontal para $SU(n)/T$.

As fórmulas de Plücker clássicas para curvas holomorfas em $\mathbb{C}P^n$ são obtidas através de curvas associadas. Seja $f = f_0 : M \to \mathbb{C}P^n$ uma aplicação holomorfa. Podemos levantar f localmente a uma aplicação em $\mathbb{C}^{n+1}$, isto é, na vizinhança de qualquer ponto $p \in M$ podemos encontrar uma função v a valores em $\mathbb{C}^{n+1}$ tal que $f(z) = [v_0(z), \ldots, v_n(z)]$. Definimos a i-ésima curva associada a f: $f_i : M \to Gr_{i+1}\mathbb{C}^{n+1} \subset \mathbb{C}P^N$ por

$$f_i(z) = [v(z) \wedge v'(z) \wedge \ldots \wedge v^{(i)}(z)],$$

onde $0 \leq i \leq n-1$ e $Gr_{i+1}\mathbb{C}^{n+1}$ denota a variedade de Grassmann de $i+1$-planos em $\mathbb{C}^{n+1}$. Seja d_i o grau de $f_i(M) \subset \mathbb{C}P^N$ como curva algébrica e seja $\#_i$ o índice de ramificação total de f_i. Então, as fórmulas de Plücker clássicas são dadas por

$$2g - 2 - \#_i = d_{i-1} - 2d_i + d_{i+1},\ 0 \leq i \leq n-1,$$

onde $d_{-1} = d_n = 0$ e g é o gênero de M.

De acordo com [25], estas fórmulas são um tipo de Teorema de Gauss-Bonnet, pois relacionam topologia (gênero da superfície de Riemann) com geometria (o lado direito da expressão pode ser entendido como a curvatura de uma métrica degenerada em M) e tem várias aplicações em geometria algébrica. Para mais detalhes, veja [25].

Além da interpretação das fórmulas de Plücker usando curvas holomorfa-horizontais em $SU(n)/T$, Yang também usou o mesmo método para calcular as expressões análogas para curvas holomorfas em $SO(n)/T$. Estas expressões ainda são chamadas de fórmulas de Plücker.

Nossa contribuição, neste sentido, foi escrever as fórmulas de Plücker para curvas holomorfa-horizontais em qualquer variedade flag maximal sob um ponto de vista unificado. Ressaltamos que foi utilizada fortemente a descrição das variedades flag maximais em termos da teoria de Lie. Temos portanto o seguinte resultado:

Teorema B: *Seja $(G/T, J, ds^2_\Lambda)$ uma variedade flag maximal equipada com uma métrica e uma estrutura complexa invariante. Seja $f : M \to (G/T, J, ds^2_\Lambda)$ aplicação holomorfa-horizontal não-degenerada. Então as fórmulas de Plücker para f são dadas por*

$$2g - 2 - \#_i = -\sum_{j=1}^{k} \alpha_i(H_{\alpha_j})d_j, \quad 1 \leq i \leq k,$$

onde g é o gênero da superfície de Riemann M, k é o número de raízes simples da álgebra de Lie de G; d_j e $\#_j$ $(1 \leq j \leq k)$ são a área normalizada e o número de zeros de uma métrica degenerada em M induzida pela distribuição horizontal $\mathcal{H}$, respectivamente.

Nesta fórmula, os vetores H_{α_j} pertencem a uma base da álgebra de Lie de G, com uma ordem especial. Veja Seção 2.2 para maiores detalhes. As fórmulas que obtivemos recuperam as fórmulas de Yang e as fórmulas clássicas de Plücker.

A segunda parte do nosso trabalho trata sobre geodésicas em variedades flag generalizadas. Vamos nos restringir à classe de geodésicas homogêneas. Geodésicas homogêneas são órbitas de subgrupos a 1-parâmetro do grupo de transformações G, isto é, curvas da forma

$$\gamma(t) = \exp(tX) \cdot o,$$

onde o é a origem do espaço homogêneo (coset trivial) e X é um elemento da álgebra de Lie de G.

Se a curva γ é uma geodésica, dizemos que X é um vetor geodésico. Claramente, existe uma correspondência 1-1 entre vetores geodésicos e geodésicas homogêneas. Portanto, quando trabalhamos com geodésicas homogêneas, é bastante natural traduzir nossos problemas em termos dos vetores geodésicos. A principal vantagem dessa abordagem é a existência de uma estrutura de álgebra de Lie semi-simples subjacente no espaço tangente na origem de uma variedade flag.

Kowalski e Vanhecke em [33] forneceram uma condição necessária e suficiente para um vetor X ser vetor geodésico em qualquer variedade homogênea munida de uma métrica invariante. Esse resultado é puramente algébrico, isto é, as condições para um vetor ser geodésico dependem essencialmente das álgebras de Lie do grupo de transformações e do subgrupo de isotropia. Em [32], foi provado que toda variedade homogênea admite pelo menos uma geodésica homogênea.

Durante nosso estudo sobre geodésicas homogêneas, observamos que existem curvas na variedade flag que são geodésicas com respeito a todas as métricas invariantes. Denominamos tais curvas de *equigeodésicas* em analogia às aplicações equiharmônicas. Queremos ressaltar que este conceito não foi encontrado nas referências consultadas e, pelo menos para variedades flag, acreditamos que nosso trabalho é a primeira referência sobre este assunto.

Nosso primeiro resultado sobre equigeodésicas é o seguinte:

Teorema C: *Toda variedade flag generalizada admite equigeodésicas.*

De forma análoga às geodésicas homogêneas, chamamos o gerador infinitesimal do subgrupo a 1-parâmetro de *vetor equigeodésico*. Uma vez garantida a existência de tais objetos o próximo passo é a classificação das equigeodésicas. Isso será feito através dos vetores equigeodésicos. O próximo resultado fornece uma caracterização algébrica dos vetores equigeodésicos. Denote por $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ uma variedade flag generalizada e considere a seguinte decomposição da álgebra de Lie de U: $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{m}_\Theta$, onde $\mathfrak{k}_\Theta$ é a álgebra de Lie de K_Θ.

Teorema D: *Seja* $\mathbb{F}_\Theta$ *uma variedade flag generalizada, com* $\mathfrak{m}_\Theta$ *isomorfo a* $T_o\mathbb{F}_\Theta$ *onde* *o é a origem de $\mathbb{F}_\Theta$. Um vetor $X \in \mathfrak{m}_\Theta$ é equigeodésico se, e somente se,*

$$[X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}_\Theta} = 0,$$

para cada métrica invariante Λ em $\mathbb{F}_\Theta$.

Observamos que a equação acima é equivalente a um sistema algébrico não-linear cujas variáveis são os coeficientes do vetor X. Porém, em algumas situações, as soluções da equação do Teorema D dependem essencialmente da estrutura de álgebra de Lie subjacente no espaço vetorial $\mathfrak{m}_\Theta$ (basicamente a decomposição em espaços de raízes e os componentes irredutíveis da representação da isotropia). Lembramos que a representação da isotropia de uma variedade flag generalizada se decompõe em componentes irredutíveis e não-equivalentes. Desta forma, o espaço tangente na origem o de $\mathbb{F}_\Theta$ pode ser escrito como

$$\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{m}_s,$$

onde cada $\mathfrak{m}_i$ é uma componente irredutível.

Uma situação onde a equação do Teorema D é simplificada ocorre quanto o vetor X pertence a exatamente uma componente irredutível da representação da isotropia. Neste caso a equação do Teorema D é trivialmente satisfeita e chamamos estes vetores de *equigeodésicos triviais*. No caso de variedades flag maximais, os vetores equigeodésicos triviais ainda tem uma propriedade adicional.

Teorema E: *Seja $\mathbb{F}_\Theta$ uma variedade flag maximal e X um vetor geodésico trivial em $\mathbb{F}_\Theta$. Então a equigeodésica correspondente $\gamma(t) = \exp(tX) \cdot o$ é fechada.*

A partir deste ponto, procuramos famílias de soluções para a equação do Teorema D em algumas variedades flag generalizadas. Primeiramente, consideramos as variedades flag do tipo A_l, isto é, variedades flag da forma

$$\mathbb{F}_\Theta = SU(n)/S(U(n_1) \times \ldots \times U(n_s)),$$

onde $n = n_1 + \ldots + n_s$.

Uma das razões para trabalhar com esta família de variedades flag é que os componentes irredutíveis da representação da isotropia apresentam uma boa descrição em termos matriciais. De fato, podemos traduzir a equação do Teorema D em termos de um sistema de equações matriciais.

Teorema F: *Seja $\mathbb{F}_\Theta$ uma variedade flag do tipo A_l e $X \in \mathfrak{m}_\Theta$. Se as coordenadas de X satisfazem o sistema de equações matriciais (3.12), então X é equigeodésico.*

Cada solução do sistema de equações matriciais dá origem a um vetor geodésico X. Porém, observamos que podemos produzir uma família de soluções, considerando a órbita de X pela ação de conjugação por elementos de um certo subgrupo do grupo unitário $\mathbb{U}(n)$.

Teorema G: *Seja $\mathbb{F}_\Theta$ uma variedade flag do tipo A_l e $X \in \mathfrak{m}_\Theta$. Suponha que as coordenadas de X satisfazem as equações (3.12) (ou seja, X é um vetor equigeodésico). Então $Y = DXD^{-1}$, é um vetor equigeodésico para cada $D \in \hat{U}$, onde $\hat{U} := \mathbb{U}(n_1) \oplus \ldots \oplus \mathbb{U}(n_s) \subset \mathbb{U}(n)$. Em outras palavras, a órbita de X pela ação de conjugação por elementos de $\hat{U}$ é composta de vetores equigeodésicos.*

Finalmente, analisamos o fato de uma classe de equigeodésicas ser fechada ou não. Tal classe de equigeodésicas são obtidas pelas *matrizes essencialmente bloco diagonais*. A principal ideia aqui é a análise do campo de Killing gerado por um vetor X e a observação que uma equigeodésica é uma trajetória de tal campo, veja Seção 3.3 para maiores detalhes.

Outra família de variedades flag que analisamos são aquelas cuja representação da isotropia se decompõe em duas componentes não equivalentes. Uma motivação para tratar tal família é que, devido ao baixo número de somandos isotrópicos, os sistemas algébricos tornam-se mais simples. Em particular observamos que existem variedades flag que admitem somente vetores equigeodésicos triviais.

Teorema H: *As variedades flag generalizadas com dois somandos isotrópicos*

$$
\begin{array}{lll}
G_2/U(2), & F_4/Sp(3) \times U(1), & E_6/SU(6) \times U(1), \\
E_7/SO(12) \times U(1), & E_8/E_7 \times U(1), & Sp(l)/U(1) \times Sp(l-1), \\
SO(2l+1)/U(2) \times SO(2l-3), & SO(2l)/U(2) \times SO(2l-4) &
\end{array}
$$

admitem somente vetores equigeodésicos triviais.

Por fim, analisando os sistemas de raízes das álgebras de Lie excepcionais, exibimos explicitamente famílias de vetores equigeodésicos nas variedades flag $F_4/SO(7) \times U(1)$, $E_6/SU(5) \times SU(2) \times U(1)$ e $E_7/SO(10) \times SU(2) \times U(1)$.

Nosso trabalho está organizado da seguinte maneira:

No Capítulo 1 relembramos os principais conceitos utilizados no restante do texto. Este Capítulo também tem a função de estabelecer as notações que utilizamos.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo das relações entre aplicações equiharmônicas e holomorfa-horizontais, onde são provados os Teoremas A e B.

No Capítulo 3 estudamos as equigeodésicas. Ele está dividido em três partes: a primeira estabelece os conceitos gerais sobre geodésicas homogêneas e equigeodésicas; na segunda parte, trabalhamos com variedades flag do tipo A_l; e na terceira parte, tratamos de variedades flag com dois somandos isotrópicos de grupos de Lie clássicos e excepcionais.

Alguns dos resultados do Capítulo 3 consistem essencialmente na análise do sistemas de raízes das álgebras de Lie excepcionais. Desta forma, no final do texto, incluímos um Apêndice que contém a listagem de todas raízes positivas das álgebras de Lie excepcionais E_6, E_7, E_8, F_4 e G_2.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

1.1 Variedades flag generalizadas

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa e simples e G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dada uma sub-álgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, denotamos por Π o conjunto de raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, temos

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_{\alpha}, \tag{1.1}$$

onde $\mathfrak{g}_{\alpha} = \{X \in \mathfrak{g}; \forall H \in \mathfrak{h}, [H, X] = \alpha(H)X\}$ denota o correspondente espaço de raízes de dimensão complexa 1.

Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a forma Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ e fixamos uma base de Weyl de $\mathfrak{g}$, isto é, elementos $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ tais que $\langle X_{\alpha}, X_{-\alpha} \rangle = 1$, e $[X_{\alpha}, X_{\beta}] = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$ com $m_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$, $m_{-\alpha,-\beta} = -m_{\alpha,\beta}$ e $m_{\alpha,\beta} = 0$ se $\alpha + \beta$ não é uma raiz (veja Helgason [26], chapter IX).

Lembramos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não degenerada em $\mathfrak{h}$. Dado $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ tomamos H_{α} dado por $\alpha(\cdot) = \langle H_{\alpha}, \cdot \rangle$, e denotamos por $\mathfrak{h}_R$ o espaço vetorial real gerado por H_{α}, $\alpha \in \Pi$. De fato, $\mathfrak{h}_R^*$ forma um subespaço real do espaço dual $\mathfrak{g}^*$ gerado pelas raízes.

Seja Π^+ uma escolha de raízes positivas e Σ o correspondente conjunto de raízes simples.

Definição 1.1.1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples. A sub-álgebra de Borel $\mathfrak{b}$ é a sub-álgebra solúvel maximal definida por*

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Definição 1.1.2. *Dizemos que uma sub-álgebra $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ é parabólica se $\mathfrak{p}$ contém a sub-álgebra de Borel $\mathfrak{b}$.*

Se Θ é um subconjunto de Σ então denotamos por $\langle\Theta\rangle$ o conjunto de raízes gerado por Θ, e $\langle\Theta\rangle^{\pm} := \langle\Theta\rangle \cap \Pi^{\pm}$. Temos então

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle^{+}} \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle^{+}} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \sum_{\beta \in \Pi^{+} \setminus \langle\Theta\rangle} \mathfrak{g}_{\beta} \oplus \sum_{\beta \in \Pi^{+} \setminus \langle\Theta\rangle} \mathfrak{g}_{-\beta}. \tag{1.2}$$

Seja

$$\mathfrak{p}_{\Theta} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle^{-}} \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^{+}} \mathfrak{g}_{\alpha} \tag{1.3}$$

a subálgebra parabólica gerada por Θ. Definimos

$$\mathfrak{q}_{\Theta} = \sum_{\beta \in \Pi^{+} \setminus \langle\Theta\rangle} \mathfrak{g}_{-\beta}. \tag{1.4}$$

Assim, $\mathfrak{g} = \mathfrak{q}_{\Theta} \oplus \mathfrak{p}_{\Theta}$.

Definição 1.1.3. *A variedade flag generalizada $\mathbb{F}_{\Theta}$ associada a $\mathfrak{p}_{\Theta}$ é definida como o espaço homogêneo*

$$\mathbb{F}_{\Theta} = G/P_{\Theta}, \tag{1.5}$$

onde P_{Θ} é o normalizador de $\mathfrak{p}_{\Theta}$ em G.

Tomamos uma forma real compacta de $\mathfrak{g}$, a saber; a subálgebra real

$$\mathfrak{u} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}, A_{\alpha}, S_{\alpha} : \alpha \in \Pi^{+}\} \tag{1.6}$$

onde $A_{\alpha} = X_{\alpha} - X_{-\alpha}$ and $S_{\alpha} = \sqrt{-1}(X_{\alpha} + X_{-\alpha})$.

Observamos (cf. [39]) que os vetores

$$A_{\alpha}, \quad S_{\alpha}, \quad \sqrt{-1}H_{\beta} \tag{1.7}$$

formam uma base de $\mathfrak{u}$ (a forma real compacta de $\mathfrak{g}$), onde $\alpha \in \Pi^{+}$ e $\beta \in \Sigma$.

Denote por $U = \exp \mathfrak{u}$ a correspondente forma real compacta de G e escrevemos $K_{\Theta} = P_{\Theta} \cap U$. O grupo de Lie U age transitivamente em $\mathbb{F}_{\Theta}$ com subgrupo de isotropia K_{Θ} e portanto temos a identificação

$$\mathbb{F}_{\Theta} = U/K_{\Theta}. \tag{1.8}$$

Seja $\mathfrak{k}_\Theta$ a álgebra de Lie de K_Θ e escreva $\mathfrak{k}_\Theta^{\mathbb{C}}$ para a sua complexificação. Temos $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}_\Theta$ e

$$\mathfrak{k}_\Theta^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Denote por $o = eK_\Theta$ a origem de $\mathbb{F}_\Theta$. O espaço tangente $T_o\mathbb{F}_\Theta$ pode ser identificado com o complemento ortogonal de $\mathfrak{k}_\Theta$ em $\mathfrak{u}$ (com respeito a forma de Cartan-Killing), ou seja,

$$T_o\mathbb{F}_\Theta = \mathfrak{m}_\Theta = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{A_\alpha, S_\alpha : \alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle\} = \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle} \mathfrak{u}_\alpha,$$

onde $\mathfrak{u}_\alpha = (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}) \cap \mathfrak{u} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{A_\alpha, S_\alpha\}$. Complexificando $\mathfrak{m}_\Theta$ obtemos o espaço tangente complexificado $T_o^{\mathbb{C}}\mathbb{F}_\Theta$, o qual podemos identificar com

$$\mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}} = \sum_{\beta \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_\beta.$$

Para simplificar a notação, definimos os seguintes conjuntos de raízes:

Definição 1.1.4. *Sejam Π um sistema de raízes, Σ um sistema simples de raízes e Θ um subconjunto de Σ.*

- *Denotamos o conjunto das raízes complementares a $\langle \Theta \rangle$ por $\Pi_M = \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$*
- *Denotamos conjunto das raízes simples complementares por $\Sigma_M = \Pi_M \cap \Sigma$.*
- *Denotamos o conjunto das raízes positivas (resp. negativas) complementares por $\Pi_M^+ = \Pi_M \cap \Pi^+$ (resp. $\Pi_M^- = \Pi_M \cap \Pi^-$).*

A estrutura de álgebra de Lie subjacente no espaço vetorial $\mathfrak{m}_\Theta$ será de grande importância em nosso trabalho. O próximo lema será utilizado nos próximos capítulos e fornece o colchete de Lie entre os elementos da forma real compacta de $\mathfrak{g}$.

Lema 1.1.5. *O colchete de Lie entre os elementos da base (1.7) de $\mathfrak{u}$ são dados por*

$$\begin{array}{ll} [\sqrt{-1}H_\alpha, A_\beta] = \beta(H_\alpha)S_\beta & [A_\alpha, A_\beta] = m_{\alpha,\beta}A_{\alpha+\beta} + m_{-\alpha,\beta}A_{\alpha-\beta} \\ \left[\sqrt{-1}H_\alpha, S_\beta\right] = -\beta(H_\alpha)A_\beta & [S_\alpha, S_\beta] = -m_{\alpha,\beta}A_{\alpha+\beta} - m_{\alpha,-\beta}A_{\alpha-\beta} \ , \\ [A_\alpha, S_\alpha] = 2\sqrt{-1}H_\alpha & [A_\alpha, S_\beta] = m_{\alpha,\beta}S_{\alpha+\beta} + m_{\alpha,-\beta}S_{\alpha-\beta} \end{array} \tag{1.9}$$

Um importante objeto no estudo da geometria das variedades flag é a representação da isotropia que passamos a descrever agora. Seja $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ uma variedade flag generalizada. A decomposição $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{m}_\Theta$ satisfaz $\mathrm{ad}(\mathfrak{k}_\Theta)\mathfrak{m}_\Theta \subset \mathfrak{m}_\Theta$ (neste caso dizemos que $\mathbb{F}_\Theta$ é um espaço homogêneo redutível, cf [31]).

Em nosso contexto, a representação da isotropia $j : \mathfrak{k}_\Theta \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{m}_\Theta)$ é dada por $j(k) = \mathrm{ad}(k)|_{\mathfrak{m}_\Theta}$, com $k \in \mathfrak{k}_\Theta$ ([3]). Esta representação é completamente redutível e portanto podemos decompor $\mathfrak{m}_\Theta$ como

$$\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{m}_\mathfrak{n}, \tag{1.10}$$

onde cada $\mathfrak{m}_i$ é componente irredutível da representação da isotropia.

Analogamente, o espaço tangente complexificado $\mathfrak{m}_\Theta^\mathbb{C}$ é invariante sobre a ação adjunta de $\mathfrak{k}_\Theta^\mathbb{C}$ e podemos definir a complexificação da representação da isotropia $j^\mathbb{C} : \mathfrak{k}_\Theta^\mathbb{C} \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{m}_\Theta^\mathbb{C})$. Esta representação será útil na descrição de objetos utilizados no estudo de geometria complexa do próximo capítulo (por exemplo, espaço tangente holomorfo, curvas horizontais, etc).

Podemos descrever precisamente os componentes irredutíveis da representação da isotropia complexificada da seguinte maneira (ver [3], [2], [8] para mais detalhes).

Seja Π o conjunto das raízes de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Em Π, defina a seguinte relação de equivalência:

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + \sum n_i \alpha_i, \ \ \alpha_i \in \Theta, \, n_i \in \mathbb{Z}. \tag{1.11}$$

Denote por $\pi : \Pi \to \Pi/\sim$ a projeção canônica e por $\Pi(\Theta)$ o conjunto $\pi(\Pi_M)$ (note que $\langle\Theta\rangle$ representa a classe trivial em $\Pi/\sim$). O seguinte resultado estabelece uma relação biunívoca entre os elementos de $\Pi(\Theta)$ e os componentes irredutíveis da representação da isotropia (complexa).

Teorema 1.1.6 ([2],[3])**.** *Existe uma bijeção entre os elementos de* $\Pi(\Theta)$ *e os componentes irredutíveis da representação da isotropia complexa. Esta bijeção é dada por*

$$\Pi(\Theta) \ni \bar{\sigma} \longleftrightarrow \mathfrak{m}_{\bar{\sigma}}^\mathbb{C} = \sum_{\pi(\alpha)=\bar{\sigma}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Além disso, estes componentes irredutíveis são não-equivalentes como sub-representações.

Observação 1.1.7. *Em alguns trabalhos relacionados a variedades flag, os elementos de* $\Pi(\Theta)$ *são chamados de* $\mathfrak{t}$*-raízes. Veja por exemplo [1], [3], [6].*

Observação 1.1.8. *Omitiremos a barra nos elementos de* $\Pi(\Theta)$. *Por exemplo, escreveremos simplesmente* $\sigma \in \Pi(\Theta)$, $\mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}$, *etc. Isso será feito sempre que não houver risco de confusão com o sistema de raízes propriamente dito.*

Desta forma, o espaço tangente complexificado da variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$ pode ser escrito como

$$\mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}} = \sum_{\sigma \in \Pi(\Theta)} \mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}. \tag{1.12}$$

As raízes que aparecem em cada componente irredutível $\sigma \in \Pi(\Theta)$ são todas positivas ou negativas. Logo, faz sentido escrever $\Pi(\Theta)^+$ e $\Pi(\Theta)^-$ para o conjunto dos componentes irredutíveis que contém somente raízes positivas ou negativas, respectivamente. Denotamos por

$$\Sigma(\Theta) = \{\sigma \in \Pi(\Theta);\ \text{a altura de } \sigma \text{ em } \Pi(\Theta) \text{ é } 1\}$$

o conjunto das raízes que tem altura 1 módulo $\langle\Theta\rangle$.

Com esta descrição dos componentes irredutíveis da representação da isotropia complexa, os componentes da isotropia real são dados por $\mathfrak{m}_\sigma = (\mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{m}_{-\sigma}^{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{u}$, onde $\sigma \in \Pi(\Theta)$ e $\mathfrak{u}$ é a forma real compacta de $\mathfrak{g}$.

Apresentaremos um exemplo onde construiremos o conjunto $\Pi(\Theta)$ em uma variedade flag de $SU(n)$. Uma vez que a complexificação de $\mathfrak{su}(n)$ é a álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, primeiramente descreveremos a estrutura dos sistemas de raízes e dos espaços de raízes dessa álgebra de Lie. O exemplo abaixo será utilizado diversas vezes no decorrer do nosso trabalho.

Exemplo 1.1.9 (Estrutura da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$)**.** *A álgebra de Lie* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ *é formada pela matrizes* $n \times n$ *de traço zero. Uma subálgebra de Cartan é dada por*

$$\mathfrak{h} = \{H = diag(a_1, \ldots, a_n) : \sum a_i = 0\},$$

isto é, pelas matrizes diagonais de traço zero. Defina os funcionais

$$\varepsilon_j : D = diag(a_1, \ldots, a_l) \mapsto a_j.$$

O sistema de raízes Π *para* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *é dado por*

$$\Pi = \{\alpha_{ij} := \varepsilon_i - \varepsilon_j : 1 \leq i \neq j \leq n\},$$

as raízes positivas são

$$\Pi^+ = \{\alpha_{ij} := \varepsilon_i - \varepsilon_j : 1 \leq i < j \leq n\},$$

e o sistema simples de raízes

$$\Sigma = \{\alpha_{ij} \in \Pi^+ : j = i + 1\}.$$

Os espaços de raízes são dados por $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} = span_{\mathbb{C}}\{E_{ij,}\}$*onde* E_{ij} *é a matriz* $n \times n$ *com* 1 *na entrada* ij *e zero nas outras entradas.*

Observe que $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$*. Para a forma real compacta de* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$*, definimos os vetores* $A_{\alpha_{ij}} = E_{ij} - E_{ji}$ *e* $S_{\alpha_{ij}} = \sqrt{-1}(E_{ij} + E_{ji})$*, onde* $\alpha_{ij} \in \Pi^+$*. Seja* $\mathfrak{u}_{\alpha_{ij}} = span_{\mathbb{R}}\{A_{\alpha_{ij}}, S_{\alpha_{ij}}\}$ *e podemos decompor a álgebra real* $\mathfrak{u} = \mathfrak{su}(n)$ *como*

$$\mathfrak{u} = \sqrt{-1}\mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha_{ij} \in \Pi^+} \mathfrak{u}_{\alpha_{ij}}.$$

Note que $\mathfrak{u}_{\alpha_{ij}} = (\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_{ji}}) \cap \mathfrak{su}(n)$*.*

Exemplo 1.1.10. *Seja* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(7, \mathbb{C})$*. Utilizaremos o sistema de raízes definido no Exemplo 1.1.9. Neste caso,* $\Sigma = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha_{45}, \alpha_{56}, \alpha_{67}\}$*. Definimos* $\Theta = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{45}, \alpha_{67}\}$*. Com esta escolha de* Θ *obtemos a variedade flag* $\mathbb{F}_\Theta = SU(7)/S(U(3) \times U(2) \times U(2))$*. Note que o conjunto das raízes simples complementares é dado por* $\Sigma_M = \Sigma \setminus \Theta = \{\alpha_{34}, \alpha_{56}\}$*. Vamos obter a descrição das classes de equivalência da relação 1.11 no conjunto das raízes complementares* Π_M*. Primeiro, note que podemos escrever os elementos de* Π_M^+ *como*

α_{34}	α_{36}	α_{56}
$\alpha_{14} = \alpha_{34} + \alpha_{13}$	$\alpha_{16} = \alpha_{36} + \alpha_{13}$	$\alpha_{46} = \alpha_{56} + \alpha_{45}$
$\alpha_{24} = \alpha_{34} + \alpha_{23}$	$\alpha_{26} = \alpha_{36} + \alpha_{23}$	$\alpha_{47} = \alpha_{56} + \alpha_{45} + \alpha_{67}$
$\alpha_{15} = \alpha_{34} + \alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{45}$	$\alpha_{17} = \alpha_{36} + \alpha_{13} + \alpha_{67}$	$\alpha_{57} = \alpha_{56} + \alpha_{67}$
$\alpha_{25} = \alpha_{34} + \alpha_{23} + \alpha_{45}$	$\alpha_{27} = \alpha_{36} + \alpha_{23} + \alpha_{67}$	
$\alpha_{35} = \alpha_{34} + \alpha_{45}$	$\alpha_{37} = \alpha_{36} + \alpha_{67}$	

e os elementos de cada coluna são equivalentes entre si. Portanto, temos

$$\Pi(\Theta) = \{\pm\,\bar{\alpha}_{34}, \pm\,\bar{\alpha}_{36}, \pm\,\bar{\alpha}_{56}\}.$$

Observe que $\alpha_{36} = \alpha_{34} + \alpha_{56}$*, isto é,* α_{36} *possui altura dois. Desta forma, os elementos de altura* 1 *módulo* $\langle\Theta\rangle$ *são* $\Sigma(\Theta) = \{\bar{\alpha}_{34}, \bar{\alpha}_{56}\}$*.* □

Cada $\sigma \in \Pi(\Theta)$ define uma distribuição complexa em $\mathbb{F}_\Theta$ por

$$E_\sigma\,(k \cdot o) = k_*\left(\mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}\right),$$

onde $k \in G$ é pensado como o difeomorfismo induzido pela ação do grupo. Esta distribuição é bem definida pois $\mathrm{Ad}\,(k)\left(\mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}\right) = \mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}$, $\sigma \in \Pi(\Theta)$. Para qualquer $x \in \mathbb{F}_\Theta$, temos

$$T_x^{\mathbb{C}}\mathbb{F}_\Theta = \sum_\sigma E_\sigma\,(x)\,. \tag{1.13}$$

1.1.1 Classificação das variedades flag

Nesta seção trataremos sobre a classificação das variedades flag generalizadas. Assim como os espaços simétricos, as variedades flag são classificadas via a classificação das álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$. As referências básicas para esta seção são [12], [3] e [2].

Seja $\mathbb{F}_\Theta$ uma variedade flag generalizada e Γ o diagrama de Dynkin do sistema simples de raízes Σ da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Pintando de preto os nós de Γ correspondentes às raízes $\Sigma_M = \Sigma \setminus \Theta$, obtemos o *diagrama de Dynkin pintado* de $\mathbb{F}_\Theta$. Neste diagrama, o sistema Θ é determinado pelo sub-diagrama de raízes brancas.

Definição 1.1.11. *Duas variedades flag $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ e $\mathbb{F}'_\Theta = U/K'_\Theta$ são* equivalentes *se existir um automorfismo $\alpha \in Aut(U)$ tal que $\alpha(K_\Theta) = K'_\Theta$.*

O automorfismo α induz um difeomorfismo $\tilde{\alpha} : \mathbb{F}_\Theta \to \mathbb{F}'_\Theta$ dado por $\tilde{\alpha}(gK_\Theta) = \alpha(g)K'_\Theta$, que satisfaz $\tilde{\alpha}(gx) = \alpha(g)\tilde{\alpha}(x)$, para todo $g \in U$ e $x \in \mathbb{F}_\Theta$.

Proposição 1.1.12 ([12])**.** *Diferentes diagramas de Dynkin pintados e conexos Γ_1 e Γ_2 (exceto para o caso D_l) definem variedades flag equivalentes $\mathbb{F}_\Theta$ e $\mathbb{F}'_\Theta$ se os sub-diagramas Γ_1 e Γ_2 formado pelas raízes brancas correspondentes a Θ e Θ' são isomorfos.*

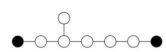
Usando esta proposição é possível dar uma lista completa de todas as variedades flag de grupos de Lie clássicos e excepcionais (a menos de isomorfismo).

- *Variedades flag de um grupo de Lie clássico.*

$$\begin{array}{lcl}
\text{Tipo } \mathbf{A} & : & SU(n)/S(U(n_1)\times\ldots\times U(n_s)), \\
 & & n = n_1+\ldots+n_s,\; n_1 \geq \ldots \geq n_s \geq 1, \\
\text{Tipo } \mathbf{B} & : & SO(2l+1)/U(l_1)\times\ldots\times U(l_k)\times SO(2m+1), \\
\text{Tipo } \mathbf{C} & : & Sp(l)/U(l_1)\times\ldots\times U(l_k)\times Sp(m), \\
\text{Tipo } \mathbf{D} & : & SO(2l)/U(l_1)\times\ldots\times U(l_k)\times SO(2m), \\
 & & l = l_1+\ldots+l_k+m,\; l_1 \geq \ldots \geq l_k \geq 1,\; k,m \geq 0.
\end{array}$$

- *Variedades flag de um grupo de Lie excepcional.* A lista de variedades flag de um grupo de Lie excepcional consiste de 101 variedades flag não equivalentes. O processo para descrever estas variedades é o seguinte: Seja Γ um diagrama de Dynkin pintado e Θ o conjunto das raízes pintado em branco, o que corresponde a parte semi-simples $\mathfrak{k}'_\Theta$ de $\mathfrak{k}_\Theta$. Então
$$\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{u}(1) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{k}'_\Theta,$$
onde cada cópia de $\mathfrak{u}(1)$ representa um nó pintado de preto. O caso onde todos os nós são pintados de preto corresponde a variedade flag maximal $\mathbb{F} = U/T$ onde T é um toro maximal de U. Para maiores detalhes, contendo a lista completa com os diagramas correspondentes, veja [12].

Exemplo 1.1.13. *Considere o diagrama pintado da álgebra de Lie de E_8:*



Este diagrama corresponde à variedade flag $E_8/SO(12) \times U(1) \times U(1)$.

Uma outra classificação em termos dos componentes irredutíveis (reais) da representação da isotropia é também relevante. Assim, dado $n \in \mathbb{N}$, é interessante descrever todas as variedades flag que tenham exatamente n componentes irredutíveis da isotropia.

De acordo com as referências bibliográficas consultadas, esta classificação é feita para $n = 2, 3$ e 4. Em todos estes casos, a classificação é feita em termos da escolha de Θ com certas propriedades. Enunciamos abaixo a classificação para $n = 3$ e $n = 4$. O caso $n = 2$ será discutido na seção 3.4.

Lembre que a altura de uma raiz simples α, denotada por $\mathrm{ht}(\alpha)$, é o coeficiente de α na raiz máxima μ de $\mathfrak{g}$, isto é, se $\mu = \sum c_i \alpha_i$ então $\mathrm{ht}(\alpha_i) = c_i$.

Teorema 1.1.14 ([30])**.** *Uma variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$ possui três componentes irredutíveis da representação isotrópica se, e somente se, o conjunto das raízes simples complementares $\Sigma_M = \Sigma \setminus \Theta$ é dado por*
$$\Sigma_M = \{\alpha_1, \alpha_2 : \ \mathrm{ht}(\alpha_1) = \mathrm{ht}(\alpha_2) = 1\},$$
ou
$$\Sigma_M = \{\alpha : \ \mathrm{ht}(\alpha) = 3\}.$$

Teorema 1.1.15 ([4]). *Uma variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$ possui quatro componentes irredutíveis da representação isotrópica se, e somente se, o conjunto das raízes simples complementares $\Sigma_M = \Sigma \setminus \Theta$ é dado por*

$$\Sigma_M = \{\alpha_1, \alpha_2 : \ \mathrm{ht}(\alpha_1) = 1, \, \mathrm{ht}(\alpha_2) = 2\},$$

ou

$$\Sigma_M = \{\alpha : \ \mathrm{ht}(\alpha) = 4\}.$$

1.1.2 Estruturas quase-complexas e f-estruturas

Uma estrutura quase-complexa U-invariante J (abreviadamente iacs) em $\mathbb{F}_\Theta$ é completamente determinada por seu valor na origem, isto é, $J : \mathfrak{m}_\Theta \to \mathfrak{m}_\Theta$ onde $\mathfrak{m}_\Theta$ denota o espaço tangente na origem. A aplicação J satisfaz $J^2 = -1$ e comuta com a representação adjunta de K_Θ em $\mathfrak{m}_\Theta$. Também denotamos por J a complexificação desta aplicação para $\mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}}$.

A invariância de J implica que $J(\mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}) = \mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}$ para todo $\sigma \in \Pi(\Theta)$. Os autovalores de J são $\pm\sqrt{-1}$ e os autovetores em $\mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}}$ são X_α, $\alpha \in \Pi_M$. Logo, em cada componente irredutível $\mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}$, temos $J = \sqrt{-1}\epsilon_\sigma \mathrm{id}$ com $\epsilon_\sigma = \pm 1$ satisfazendo $\epsilon_{-\sigma} = -\epsilon_\sigma$. Desta forma, uma iacs em $\mathbb{F}_\Theta$ é completamente determinada pelos números $\varepsilon_\sigma = \pm 1$, $\sigma \in \Pi(\Theta)$.

Como é usual os autovetores associados a $\sqrt{-1}$ são ditos serem do tipo $(1,0)$ enquanto os autovetores associados a $-\sqrt{-1}$ são do tipo $(0,1)$. Assim os vetores do tipo $(1,0)$ são múltiplos de X_α, $\epsilon_\alpha = 1$, e os vetores do tipo $(0,1)$ são múltiplos de X_α, $\epsilon_\alpha = -1$.

Como $\mathbb{F}_\Theta$ é um espaço homogêneo de um grupo de Lie complexo, uma variedade flag possui uma estrutura natural de variedade complexa. A estrutura quase complexa integrável associada J_C é dada por $\epsilon_\sigma = 1$ se $\sigma < 0$. A estrutura complexa conjugada $-J_C$ é também integrável.

Neste trabalho utilizaremos uma generalização das estruturas complexas chamadas de f-estruturas, introduzidas por Yano [46].

Definição 1.1.16. *Uma f-estrutura $\mathcal{F}$ em $\mathbb{F}_\Theta$ é uma seção do fibrado* $\mathrm{End}\big(T(\mathbb{F}_\Theta)\big)$ *tal que* $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$.

Assim como nas estruturas quase complexas, nos restringimos ao estudo de f-estruturas invariantes. Estas são completamente determinadas por seu valor na origem pelo endomorfismo $\mathcal{F}_o : \mathfrak{m}_\Theta \to \mathfrak{m}_\Theta$ com $\mathcal{F}_o^3 + \mathcal{F}_o = 0$. Os autovalores de $\mathcal{F}_o$ são $-\sqrt{-1}, 0, \sqrt{-1}$. Note que uma estrutura quase complexa é uma f-estrutura com trivial 0-autoespaço. Como no caso das estruturas quase complexas, uma f-estrutura é dada por números $(f_\alpha)_{\alpha\in\Pi_\Theta}$ com $f_\alpha = 1$, -1 ou 0, de acordo com os autovalores $\mathcal{F}_o$.

1.1.3 Métricas Invariantes

Uma métrica Riemanniana em $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ é invariante à esquerda (ou simplesmente invariante) se o difeomorfismo $L_a : U/K_\Theta \to U/K_\Theta$ dado por $L_a(gK_\Theta) = agK_\Theta$ é uma isometria para todo $a \in G$. Uma métrica invariante é completamente determinada por seu valor na origem de $\mathbb{F}_\Theta$.

Como $\mathbb{F}_\Theta$ é um espaço homogêneo redutível com uma decomposição $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{m}_\Theta$, existe uma correspondência natural um-a-um entre métricas U-invariantes em $\mathbb{F}_\Theta$ e produtos escalares $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante B em $\mathfrak{m}_\Theta$, veja por exemplo [31].

Seja ds^2_Λ uma métrica invariante e B o correspondente produto escalar $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante em $\mathfrak{m}_\Theta$. Então B é dado por $B(X,Y) = Q(\Lambda X, Y)$, onde Q é o negativo da forma de Cartan-Killing e o operador linear $\Lambda : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ é simétrico e definido positivo com respeito a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{u}$. Frequentemente abusaremos da notação e diremos que Λ é uma métrica invariante.

Seja $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{m}_n$ a decomposição de $\mathfrak{m}_\Theta$ em componentes irredutíveis da representação da isotropia. Como consequência do Lema de Schur temos que $\Lambda\big|_{\mathfrak{m}_i} = \lambda_i \cdot Id\big|_{\mathfrak{m}_i}$ para cada $i = 1, \ldots, n$ e portanto qualquer produto escalar invariante tem a forma

$$B(X,Y) = \lambda_1 \cdot Q(X,Y)\big|_{\mathfrak{m}_1} \oplus \cdots \oplus \lambda_n \cdot Q(X,Y)\big|_{\mathfrak{m}_n},$$

com $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$. Desta forma o conjunto das métricas invariantes pode ser parametrizado por

$$\mathcal{M}^U = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0\}.$$

Considerando o espaço tangente complexificado, o produto escalar B admite uma extensão natural a uma forma simétrica bilinear em $\mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}}$. Nós ainda denotaremos o produto escalar complexificado por B e o correspondente operador por Λ, a menos que isto possa causar alguma confusão.

De forma análoga à representação da isotropia real, em cada componente $\mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}}$ temos $\Lambda = \lambda_\sigma \mathrm{id}$ com $\lambda_{-\sigma} = \lambda_\sigma > 0$.

1.2 Superfícies de Riemann

Nesta seção lembramos de alguns fatos básicos relacionados a superfícies de Riemann que serão utilizados no decorrer do trabalho. Nosso foco principal será estabelecer a relação entre a 1-forma de conexão com a 2-forma de curvatura. Sugerimos [25] para maiores detalhes.

Seja M uma superfície de Riemann (ie, uma variedade complexa de dimensão 1) compacta e conexa. Uma métrica hermitiana em M é dada por um produto interno hermitiano definido positivo

$$(\,,\,)_z : T_z^{(1,0)} \otimes \overline{T_z^{(1,0)}} \to \mathbb{C}$$

no espaço tangente holomorfo em z, dependendo suavemente de z. Escrevendo $(\,,\,)_z$ em termos da base $\{dz \otimes d\bar{z}\}$ a métrica hermitiana é dada por

$$ds^2 = h(z) dz \otimes d\bar{z},$$

onde $h(z) = (\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})_z$.

Um co-referencial para a métrica hermitiana ds^2 é uma 1-forma φ do tipo $(1,0)$ tal que

$$ds^2 = \varphi \otimes \bar{\varphi}.$$

Co-referenciais sempre existem localmente (cf. [25]).

Existe um isomorfismo $\mathbb{R}$-linear natural entre $T_{\mathbb{R},z}(M)$ e $T^{(1,0)}M$. Consideramos uma métrica hermitiana em M e via este isomorfismo pode-se mostrar que $\operatorname{Re} ds^2$ induz uma métrica riemanniana em M, chamada de métrica riemanniana induzida. Noções de distância, área ou volume numa variedade complexa com métrica hermitiana sempre serão consideradas com respeito a métrica riemanniana induzida.

A forma quadrática alternada $\Phi = -\operatorname{Im} ds^2$ é uma forma real de grau 2 chamada de $(1,1)$-forma associada (ou forma Kähler).

Explicitamente, se φ é um co-referencial para a métrica hermitiana ds^2 então

$$\Phi = \frac{1}{2}\sqrt{-1}\varphi \wedge \bar{\varphi}.$$

Dizemos que uma variedade complexa é uma variedade Kähler se a $(1,1)$-forma associada for fechada. Portanto qualquer superfície de Riemann é uma variedade Kähler pois $\dim_{\mathbb{R}} M = 2$.

Enunciamos abaixo um resultado sobre formas de conexão e curvatura no fibrado tangente holomorfo de uma superfície de Riemann, cuja demonstração pode ser encontrada em [25].

Proposição 1.2.1 ([25]). *Seja M uma superfície de Riemann com métrica hermitiana $ds^2 = \varphi \otimes \bar{\varphi}$. Então:*

a) Existe uma única 1-forma ψ tal que $\psi + \bar{\psi} = 0$ e

$$d\varphi = -\psi \wedge \varphi.$$

A forma ψ é chamada 1-forma de conexão no fibrado tangente.

b) Seja ψ a 1-forma de conexão em M. Então

$$\sqrt{-1}d\psi = K \cdot \Phi,$$

onde K é a curvatura Gaussiana de ds^2 e Φ é a $(1,1)$-forma associada. Diremos que $d\psi$ é a 2-forma de curvatura no fibrado tangente.

Observação 1.2.2. *Em [25] o resultado acima é enunciado para variedades complexas mais gerais. Enunciamos aqui somente o caso particular de superfícies de Riemann.*

1.3 Aplicações Harmônicas

Nesta seção iremos revisar os principais resultados referentes à aplicações harmônicas utilizadas no decorrer deste trabalho. Terminamos a seção estabelecendo as primeiras relações entre aplicações harmônicas e holomorfas. A principal referencia aqui é [17].

Nesta seção, (M^m, g) e (N^n, h) serão variedades riemannianas, conexas e orientáveis, sendo M compacta. Seja $\phi : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável e $|d\phi|$ é a norma de Hilbert-Shimidt da aplicação linear $d\phi(x)$.

Definição 1.3.1. *A densidade da energia de ϕ é a função $e(\phi) = \frac{1}{2}|d\phi|^2$. O funcional energia $E : C^\infty(M, N) \longrightarrow \mathbb{R}$ é definido por*

$$E(\phi) = \int_M e(\phi)\nu_g.$$

O número $E(\phi)$ é chamado de energia de ϕ.

Observação 1.3.2. *1. $d\phi$ pode ser visto com uma seção no fibrado $\Lambda^1(\phi^{-1}TN) = T^*M \otimes \phi^{-1}TN$ (isto é, $d\phi$ é uma 1-forma com valores em $\phi^{-1}TN$).*

2. Note que para qualquer aplicação $\phi : M \longrightarrow N$, temos $E(\phi) \geq 0$ e $E(\phi) = 0$ se, e somente se, ϕ é constante.

3. A compacidade de N não é essencial.

Definição 1.3.3 (Aplicação Harmônica)**.** *Uma aplicação diferenciável é dita harmônica se for um ponto crítico do funcional energia.*

Vamos descrever o significado de "ponto crítico do funcional energia": dado $v \in C^\infty(M, \phi^{-1}TN)$, consideramos a família de aplicações ϕ_t tal que $\phi_0 = \phi$ e $\frac{\partial \phi_t}{\partial t}\Big|_{t=0} = v$ (por exemplo, $\phi_t(x) = exp_{\phi(x)}tv$). Então, ϕ é harmônica se, e somente se, $D_vE(\phi) = \frac{dE(\phi_t)}{dt}\Big|_{t=0} = 0$.

Definição 1.3.4. *Dada uma aplicação diferenciável $\phi : M \longrightarrow N$, a segunda forma fundamental β_ϕ é uma seção no fibrado $T^*M \otimes T^*M \otimes \phi^{-1}TN$ (forma bilinear com valores em $\phi^{-1}TN$) definida por*

$$\beta_\phi(X, Y) = \nabla d\phi(X, Y) = \nabla_X^{\phi^{-1}TN} d\phi \cdot Y - d\phi \cdot (\nabla_X^M Y),$$

onde $X, Y \in C^\infty(M, TM)$ e ∇ é a divergência generalizada.

Definição 1.3.5. *Uma aplicação $\phi : M \longrightarrow N$ é totalmente geodésica se $\beta_\phi \equiv 0$.*

Proposição 1.3.6. *Uma aplicação diferenciável $\phi : M \longrightarrow N$ é harmônica se, e somente se, ϕ satisfaz as equações de Euler-Lagrange $\tau(\phi) = 0$, onde $\tau(\phi) = traço \nabla d\phi = traço \beta_\phi$ é uma seção no fibrado $\phi^{-1}TN$ chamada campo de tensão de ϕ.*

Demonstração: Ver [17], página 14.

Dado $p \in M^m$, seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal em T_pM. Então, a equação de Euler-Lagrange pode ser escrita como

$$\tau(\phi) = \sum_{i=1}^{m} (\nabla_{e_i}^{\phi^{-1}TN} d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i}^M e_i)) = 0. \tag{1.14}$$

Além do mais, se o referencial provém de um sistema normal de coordenadas centrado em p temos que $d\phi(\nabla_{e_i}^M e_i) = 0$.

Aplicações harmônicas surgem naturalmente em geometria diferencial e em aplicações, especialmente na física-matemática. A seguir, apresentamos alguns exemplos de aplicações harmônicas:

- **Aplicação constante** $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ e a **aplicação identidade** $\phi : (M, g) \longrightarrow (M, g)$ são trivialmente aplicações harmônicas; **isometrias** são aplicações harmônicas;

- **Geodésicas.** Uma curva suave em (N, h), isto é, uma aplicação $\phi : A \longrightarrow (N, h)$, onde A é um aberto de $\mathbb{R}$ ou é o círculo S^1 é harmônica se, e somente se, ϕ é uma geodésica parametrizada linearmente(isto é, parametrizado por um múltiplo constante do comprimento de arco). Neste caso, a equação de Euler-Lagrange $\tau(\phi) = 0$ se reduz a $\nabla_{\dot{\phi}}\dot{\phi} = 0$. Uma aplicação totalmente geodésica é harmônica pois

$$\tau(\phi) = \text{traço}\nabla d\phi = \text{traço}\beta_\phi = 0.$$

  Assim, por exemplo, a inclusão $i : S^{n-1} \longrightarrow S^n$ pelo equador é harmônica. Vale ressaltar que aplicações totalmente geodésicas são muito raras;

- **Aplicações Harmônicas entre espaços euclidianos.** Uma função $\phi : A \longrightarrow \mathbb{R}$, onde A é um aberto de $\mathbb{R}^n$, é harmônica se, e somente se, for solução da equação de Laplace $\Delta\phi = 0$, onde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{(\partial x^n)^2}, \quad (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

  Uma aplicação $\phi : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é harmônica se, e somente se, cada componente é uma função harmônica;

- **Aplicações Holomorfas** entre variedades Kähler são harmônicas. Veja por exemplo [17];

- **Aplicações Conformes entre superfícies.** Uma aplicação diferenciável $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ é dita conforme se para todo $p \in M$, temos que $d\phi_p : T_pM \longrightarrow T_{\phi(p)}N$ é uma transformação linear conforme, isto é, existe um número $\lambda(p) \neq 0$ tal que

$$h(d\phi_p(X), d\phi_p(Y)) = \lambda(p)^2\, g(X, Y), \quad X, Y \in T_pM.$$

  Pode-se provar que localmente aplicações conformes entre superfícies se comportam como aplicações holomorfas e assim aplicações conformes entre superfícies são harmônicas;

- **Morfismos Harmônicos.** Uma aplicação diferenciável $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ é um morfismo harmônico se, para toda função harmônica $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida num aberto $V \subset N$, com $V \neq \emptyset$, a composição $f \circ \phi$ é harmônica em $\phi^{-1}(V)$. Morfismos harmônicos constituem uma importante classe de aplicações harmônicas e é um objeto de pesquisa por si só interessante, mas não trataremos sobre eles neste trabalho. Enunciaremos somente uma caracterização dos morfismos harmônicos e daremos alguns exemplos. Uma referência sobre o assunto é [7].

  Uma aplicação diferenciável $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ é chamada de *horizontalmente fracamente conforme* (ou *semiconforme*) se, para cada $p \in M$ ocorre uma das duas possibilidades: a) $d\phi_p = 0$, ou seja, p é um ponto crítico; ou b) $d\phi_p$ leva o espaço horizontal $H_p = \{\ker(d\phi_p)\}^{\perp}$ conformemente e sobrejetivamente em $T_{\phi(p)N}$. Nós temos a seguinte caracterização de morfismos harmônicos: *"Uma aplicação $\phi : M \longrightarrow N$ entre variedades Riemannianas é um morfismo harmônico se, e somente se, ϕ for uma aplicação harmônica e horizontalmente fracamente conforme."* São exemplos de morfismos harmônicos:

  1. Quando $\dim N = 1$, os morfismos harmônicos são exatamente as aplicações harmônicas
  2. Quando $\dim M = \dim N = 2$, os morfismos harmônicos são as aplicações (fracamente) conformes.
  3. Uma submersão Riemanniana é um morfismo harmônico se as fibras são minimais. Um exemplo é o fibrado de Hopf $S^1 \longrightarrow S^3 \longrightarrow S^2$;

- **Física.** O *modelo-σ 2-dimensional não linear* consiste no estudo de aplicações harmônicas de S^2 em $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ e o *modelo chiral* consiste no estudo de aplicações harmônicas de S^2 em $U(n)$.

A proposição a seguir relaciona os conceitos de aplicação harmônica e aplicação totalmente geodésica.

Proposição 1.3.7 (Lei da Composição). *Sejam $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ e $\psi : (N, h) \longrightarrow (P, k)$ aplicações diferenciáveis. Então*

$$\nabla d(\psi \circ \phi) = d\psi \circ \nabla d\phi + \nabla d\psi(d\phi, d\phi); \tag{1.15}$$

$$\tau(\psi \circ \phi) = d\psi \circ \tau(\phi) + tra\c{c}o\nabla d\psi(d\phi, d\phi). \tag{1.16}$$

Em particular, se ϕ e ψ são totalmente geodésica então $\psi \circ \phi$ também é, e se ϕ é harmônica e ψ é totalmente geodésica então $\psi \circ \phi$ é harmônica.

Demonstração: Sejam X e Y campos de vetores em M. Então,

$$\begin{aligned}
\nabla d(\psi \circ \phi)(X,Y) &= \nabla_X^{(\psi\circ\phi)^{-1}TP}(d\psi.d\phi.Y) - d(\psi\circ\phi).\nabla_X^M Y \\
&= (\nabla_{d\phi.X}^{\psi^{-1}TP} d\psi)d\phi.Y + d\psi.\nabla_X^{\phi^{-1}TN}(d\phi.Y) - d\psi.d\phi\nabla_X^M Y \\
&= (\nabla_{d\phi.X}^{\psi^{-1}TP} d\psi)d\phi.Y + d\psi(\nabla_X^{\phi^{-1}TN}(d\phi.Y) - d\phi\nabla_X^M Y) \\
&= \nabla d\psi(d\phi.X, d\phi.Y) + d\psi(\nabla d\phi(X,Y)).
\end{aligned}$$

Tomando o traço, segue que

$$tr(\nabla d(\psi \circ \phi)) = tr(\nabla d\psi(d\phi, d\phi)) + tr(d\psi(\nabla d\phi)).$$

Portanto,

$$\tau(\psi \circ \phi) = tr\nabla d\psi(d\phi, d\phi) + \psi(\tau(\phi)),$$

e concluímos a demonstração.

Observação 1.3.8. *É importante observar que a composta de duas aplicações harmônicas, em geral, não é harmônica. De fato, considere as aplicações $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, ax+b)$ e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2 - y^2$. f é harmônica pois é uma geodésica em $\mathbb{R}^2$ e g é harmônica pois g é uma função harmônica, isto é, $\Delta g = 0$. Entretanto, $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $g \circ f(x) = (1-a^2)x^2 - 2abx - b^2$, e se $a \neq \pm 1$ $g \circ f$ não é harmônica, pois $d^2(g \circ f) \neq 0$.*

Uma das principais técnicas para estudar aplicações harmônicas é a utilização da Análise e Geometria Complexa. A principal motivação para esta abordagem é o caso de funções holomorfas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. É conhecido da Análise Complexa que se $f = u + iv$ é holomorfa, então as partes real e imaginária de f são harmônicas, isto é, $\Delta u = 0$ e $\Delta v = 0$. Por outro lado, dada uma função harmônica $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, existe uma função harmônica $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (chamada harmônica conjugada) tal que $g = u + iv$ é holomorfa. Assim, neste caso, o conceito de harmonicidade é equivalente ao conceito de holomorficidade. A ideia é tentar reduzir o estudo de aplicações harmônicas ao estudo de aplicações holomorfas, num contexto mais geral do que o apresentado acima. Algumas justificativas para isto são:

- Aplicações holomorfas são soluções das equações de Cauchy-Riemann e estas são um sistemas de equações diferenciais parciais de 1a. ordem, já aplicações harmônicas são soluções das equações de Euler-Lagrange que são sistemas de equações diferenciais parciais de 2a. ordem. Esta importante ideia é conhecida como redução de ordem do problema.

- Aplicações holomorfas são mais "tratáveis" que aplicações harmônicas (pelo menos em princípio) e os métodos de Geometria Complexa e Geometria Algébrica podem ser utilizados.

Historicamente, o uso de métodos de análise complexa no estudo de aplicações harmônicas iniciou-se com Weierstrass, no caso de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$. A abordagem que usaremos neste trabalho inicia-se com Calabi ([14]) onde é discutido a classificação das aplicações harmônicas $S^2 \to S^{2n}$ via curvas holomorfas com uma propriedade adicional (horizontalidade) na variedade flag $SO(2n+1)/U(n)$. Um método semelhante foi utilizado para classificação das 2-esferas harmônicas em $\mathbb{C}P^n$. No próximo capítulo estudaremos as relações entre as curvas horizontais e aplicações harmônicas em variedades flag generalizadas. As primeiras relações entre curvas horizontais e aplicações harmônicas em variedades flag maximais de $SU(n)$ foram observadas por Negreiros em [34].

Capítulo 2

Aplicações equiharmônicas e holomorfa-horizontais

2.1 Relações entre aplicações harmônicas e holomorfa-horizontais generalizadas em $\mathbb{F}_\Theta$

Sejam (M, g) e (N, h) variedades riemannianas. Uma aplicação diferenciável $\phi : M \to N$ é dita ser uma *aplicação harmônica* se for um ponto crítico do *funcional energia*.

Recomendamos [17] para maiores detalhes sobre a teoria geral de aplicações harmônicas.

Seja $M = M^2$ uma superfície de Riemann e $N = \mathbb{F}_\Theta$ uma variedade flag generalizada. Consideraremos em N somente métricas invariantes. Neste trabalho estudaremos uma classe especial de aplicações harmônicas chamadas *aplicações equiharmônicas*

Definição 2.1.1. *Seja $\phi : M^2 \to \mathbb{F}_\Theta$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que ϕ é equiharmônica se é harmônica para cada métrica invariante ds^2_Λ em $\mathbb{F}_\Theta$.*

O estudo das aplicações equiharmônicas foi iniciado em [34] em variedades flag de $SU(n)$. Em [8], estas aplicações foram estudadas em variedades flag gerais usando Teoria de Lie e a teoria de f-estruturas. Em particular foi provada uma interessante condição necessária para uma aplicação $\phi : M^2 \to \mathbb{F}_\Theta$ ser equiharmônica. Enunciaremos este resultado abaixo. Primeiramente estabeleceremos alguns fatos básicos da teoria de f-estruturas em $\mathbb{F}_\Theta$.

Seja $\mathcal{F}$ uma f-estrutura invariante em $\mathbb{F}_\Theta$. Considere a decomposição de $T^{\mathbb{C}}\mathbb{F}_\Theta$ em componentes irredutíveis $\mathfrak{m}_\sigma^{\mathbb{C}}$, $\sigma \in \Pi(\Theta)$. Denotamos por ϕ_σ a σ-parte de $d^{\mathbb{C}}\phi(p)$, a diferencial complexificada de ϕ, isto é, usando a decomposição (1.13), ϕ_σ é a projeção da diferencial complexificada de ϕ sobre $E_\sigma(\phi(p)) \subset T_{\phi(p)}\mathbb{F}_\Theta$.

Definição 2.1.2. *Uma aplicação $\phi : (M^2, J) \to (\mathbb{F}_\Theta, \mathcal{F})$ é dita ser subordinada a $\mathcal{F}$ se para cada $\sigma \in \Pi(\Theta)$ com $\mathcal{F}_\sigma \neq 1$ temos $\phi_\sigma \equiv 0$.*

A definição acima diz que uma aplicação ϕ é subordinada a $\mathcal{F}$ quando ela é tangente a distribuição gerada pelo autoespaço associado ao autovalor $\sqrt{-1}$ de $\mathcal{F}$.

Uma classe especial de f-estruturas invariantes em variedades flag são as f-estruturas horizontais.

Definição 2.1.3. *Considere uma f-estrutura invariante $\mathcal{F}$ em $\mathbb{F}_\Theta$. Seja*

$$\mathcal{F}_+ := \sum_{\substack{\alpha \in \Pi(\Theta) \\ \mathcal{F}_\alpha = 1}} \mathfrak{g}_\alpha$$

e

$$\mathcal{F}_- := \sum_{\substack{\alpha \in \Pi(\Theta) \\ \mathcal{F}_\alpha = -1}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Dizemos que $\mathcal{F}$ é horizontal se $[\mathcal{F}_+, \mathcal{F}_-] \subset \mathfrak{k}_\Theta^{\mathbb{C}}$.

O próximo teorema foi provado por Black em [8] e fornece um condição necessária para uma aplicação diferenciável ser equiharmônica.

Teorema 2.1.4. *Seja $\phi : (M^2, J, g) \to (\mathbb{F}_\Theta, \mathcal{F}, ds^2_\Lambda)$ subordinada a uma f-estrutura horizontal $\mathcal{F}$. Então a aplicação ϕ é equiharmônica.*

O principal resultado desta seção é fornecer uma família de exemplos de aplicações equiharmônicas. Mais especificamente, vamos mostrar que uma *aplicação holomorfa-horizontal generalizada* é equiharmônica.

Definição 2.1.5. *Uma aplicação $\phi : M^2 \to (\mathbb{F}_\Theta, J)$ é dita ser holomorfa-horizontal generalizada se for J-holomorfa e satisfizer $\phi_\sigma = 0$ quando $\sigma \in \Pi(\Theta) \setminus \Sigma(\Theta)$.*

Estas aplicações aparecem como um levantamento twistor de aplicações harmônicas isotrópicas em espaços simétricos riemannnianos. Mais precisamente, denote por N um espaço simétrico compacto interno do tipo I (ver [26]). Em [13] prova-se que existe pelo menos uma variedade flag generalizada $\mathbb{F}_\Theta$, que é o espaço total de um fibrado twistor sobre N, isto é, se $\pi : \mathbb{F}_\Theta \to N$ denota tal fibração e $\phi : M \longrightarrow \mathbb{F}_\Theta$ é uma aplicação holomorfa-horizontal então $\pi \circ \phi : M \longrightarrow N$ é harmônica.

Aplicações harmônicas obtidas por este procedimento são chamadas de aplicações harmônicas isotrópicas. Vale a pena observar que todas as aplicações harmônicas $S^2 \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ são obtidas desta maneira. Em geral existem aplicações harmônicas não isotrópicas (veja por exemplo [37] para aplicações harmônicas em $G_2(\mathbb{C}^4)$ e [42] para aplicações harmônicas em $U(n)$). Maiores detalhes sobre os métodos da teoria twistor em espaços simétricos pode ser encontrado em [11] e [13].

Observação: Aplicações holomorfa-horizontais generalizadas também são chamadas de *aplicações super-horizontais*, cf. [13]. Aqui seguiremos a notação de Bryant em [11].

Exemplo 2.1.6. *Forneceremos uma descrição do conjunto* $\Sigma(\Theta)$ *em algumas variedades flags de* $SU(n)$ *em termos de espaços de raízes. Neste caso temos* $\mathfrak{u} = \mathfrak{su}(n)$ *e* $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. *Usaremos o sistema de raízes de* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ *como no Exemplo 1.1.9 . Consideramos primeiro a variedade flag maximal* $SU(4)/T$. *Neste caso,* $\Theta = \emptyset$ *e portanto* $\Sigma(\Theta) = \Sigma$. *Em termos matriciais, os espaços de raízes associados a raízes simples são*

$$\begin{pmatrix} 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja $\mathcal{H}$ *a distribuição definida na origem por*

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Note que esta distribuição é bem definida, pois $\mathrm{Ad}(t)\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$, *para todo* $t \in T$. *Então uma aplicação* $\phi : M \to (SU(4)/T, J_C)$ *é horizontal-holomorfa generalizada se for tangente a distribuição* $\mathcal{H}$, *isto é,* $\phi_\alpha = 0$ *se* $\alpha \notin \Sigma$. *Aqui* J_C *é a estrutura complexa determinada pela escolha de raízes positivas que estamos utilizando.*

Considere agora a variedade $\mathbb{F}_\Theta = SU(6)/S(U(2) \times U(2) \times U(2))$.

Seja $\Sigma = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha_{45}, \alpha_{56}\}$ um sistema simples de raízes de $\mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$. Neste caso, o conjunto de raízes simples complementares é formado por $\{\alpha_{23}, \alpha_{45}\}$, ou seja, $\Theta = \Sigma - \{\alpha_{23}, \alpha_{45}\}$. Neste exemplo, o conjunto $\Sigma(\Theta)$ é dado por

$$\Sigma(\Theta) = \{\beta : \beta = \alpha + \langle\Theta\rangle \text{ com } \alpha = \alpha_{23} \text{ ou } \alpha = \alpha_{45}\}.$$

Em termos matriciais, os espaços de raízes associados a estas raízes são

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De forma análoga ao exemplo anterior, definimos uma distribuição $\mathcal{H}$, que na origem é soma dos espaços de raízes descrito na matriz acima, isto é,

$$\mathcal{H}_o = \mathfrak{g}_{\alpha_{13}} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_{14}} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_{23}} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_{24}} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_{35}} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_{36}} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_{45}} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_{46}}.$$

Portanto uma aplicação $\phi : M \to (SU(6)/S(U(2) \times U(2) \times U(2)), J_C)$ é holomorfa-horizontal generalizada se for tangente à distribuição $\mathcal{H}$. Aqui J_C é a estrutura complexa determinada pela escolha de raízes positivas que estamos utilizando.

Passamos agora ao principal resultado desta seção.

Teorema 2.1.7. *Se $\phi : M^2 \to \mathbb{F}_\Theta$ é uma aplicação holomorfa-horizontal então ϕ é uma aplicação equiharmônica.*

Demonstração: Seja $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ uma variedade flag generalizada, com $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$. Primeiramente, descreveremos os componentes irredutíveis de $\mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}}$ que são associadas a raízes de $\mathfrak{g}$ com altura 1 em $\Pi(\Theta)$.

Se $\alpha \in \Sigma_M$ (isto é, α é uma raiz simples complementar a $\langle\Theta\rangle$, cf. Definição 1.1.4) definimos o conjunto

$$\Pi(\Theta)_\alpha^+ := \{\beta \in \Pi_M^+ : \beta = \alpha + \langle\Theta\rangle^+\}, \tag{2.1}$$

e se α é o negativo de uma raiz simples complementar (ou seja, $-\alpha \in \Sigma_M$) então definimos

$$\Pi(\Theta)^-_\alpha := \{\beta \in \Pi^-_M : \beta = \alpha + \langle\Theta\rangle^-\}. \tag{2.2}$$

Os conjuntos $\Pi(\Theta)^+_\alpha$ e $\Pi(\Theta)^-_\alpha$ contém as raízes de altura 1 módulo $\langle\Theta\rangle$. Considere, para cada $\alpha \in \Sigma_M$, os conjuntos

$$\mathfrak{m}_\alpha = \sum_{\beta\in\Pi(\Theta)^+_\alpha} \mathfrak{g}_\beta, \tag{2.3}$$

e

$$\mathfrak{m}_{-\alpha} = \sum_{\beta\in\Pi(\Theta)^-_\alpha} \mathfrak{g}_\beta. \tag{2.4}$$

É conhecido que $\mathfrak{m}_\alpha$ e $\mathfrak{m}_{-\alpha}$ são componentes irredutíveis da representação da isotropia (complexa), veja por exemplo [2]. Um cálculo direto mostra que os componetes irredutíveis $\mathfrak{m}_\alpha, \mathfrak{m}_\beta$ satisfazem

$$[\mathfrak{m}_\alpha, \mathfrak{m}_{-\beta}] \begin{cases} = 0, & \text{if } \alpha \neq \beta, \\ \subset \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}_\Theta, & \text{if } \alpha = \beta \end{cases} \tag{2.5}$$

onde $\alpha, \beta \in \Sigma_M$.

Agora, dada uma aplicação holomorfa-horizontal $\phi : M \to (\mathbb{F}_\Theta, J)$ podemos associar uma f-estrutura $\mathcal{F}^\phi$, chamada f-estrutura associada a aplicação holomorfa horizontal ϕ, da seguinte forma:

$$\mathcal{F}^\phi = \{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle} = \begin{cases} +1, & \text{se } \alpha \in \Pi(\Theta)^+_\beta \text{ para algum } \beta \in \Sigma_M; \\ -1, & \text{se } \alpha \in \Pi(\Theta)^-_\beta \text{ para algum } -\beta \in \Sigma_M; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Usando a linearidade do colchete de Lie e a equação (2.5) temos $[\mathcal{F}^\phi_+, \mathcal{F}^\phi_-] \subset \mathfrak{k}_\Theta$ e portanto a f-estrutura associada é horizontal. Por outro lado, se $\varepsilon_\alpha \neq 1$ então α não é uma raiz (positiva) de altura 1 modulo $\langle\Theta\rangle$ e $\phi_\alpha = 0$ pois, ϕ é horizontal. Logo ϕ é subordinada a $\mathcal{F}^\phi$ e pelo Teorema 2.1.4, ϕ é uma aplicação equiharmônica. □

Exemplo 2.1.8. *Considere $\phi : M \to (SU(6)/S(U(2) \times U(2) \times U(2)), J_C)$ uma aplicação holomorfa-horizontal generalizada, onde J_C é a estrutura complexa associada à escolha canônica de raízes positivas de $\mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$, cf. Exemplo 1.1.9.*

A f-estrutura associada $\mathcal{F}^\phi = \{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}$ definida na demonstração acima é representada pela matriz abaixo:

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & * & * & 1 & 1 \\ -1 & -1 & * & * & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & * & * \\ 0 & 0 & -1 & -1 & * & * \end{pmatrix},$$

onde a entrada ij da matriz (fora dos blocos-diagonais) representa o valor de $\varepsilon_{\alpha_{ij}}$, sendo α_{ij} uma raiz de $\mathfrak{sl}(6,\mathbb{C})$.

Gostaríamos de observar que o problema da estabilidade de aplicações harmônicas em variedades flag, isto é, o estudo da segunda variação da energia, foi recentemente abordado em [36]. A proposição acima foi importante neste trabalho, pois oferece uma grande quantidade de exemplos de aplicações equiharmônicas. Em particular foi obtido uma fórmula que nos permite entender como se comporta o índice de uma aplicação equiharmônica quando deformamos uma métrica invariante fixada inicialmente. Para mais detalhes, ver [36].

2.2 Fórmulas de Plücker para curvas holomorfa- horizontais em variedades flag maximais

Nesta seção trabalharemos somente com variedades flag maximais. Lembrando o Capítulo 1, seja G um grupo de Lie complexo e simples e B um subgrupo de Borel (parabólico minimal) de G. Então $\mathbb{F}_\Theta = G/B = U/T$, onde U é a forma real compacta de G e $T = U \cap B$ é um toro maximal de U. Neste caso $\Theta = \emptyset$ e denotaremos uma variedade flag maximal por $\mathbb{F}$.

Vamos calcular as fórmulas de Plücker para curvas holomorfa-horizontais em flags maximais. Tais fórmulas relacionam a topologia da superfície de Riemann (ie, seu gênero) com objetos geométricos (curvaturas). Em [43] Yang obteve fórmulas de Plücker para variedades flag de $SO(n)$. Aqui, obtemos tais fórmulas para qualquer variedade flag maximal.

Como $\Theta = \emptyset$, temos que $\Sigma(\Theta) = \Sigma$ e alguns dos conceitos introduzidos na seção anterior tem sua descrição simplificada. Definiremos novamente os conceitos de curvas holomorfas-horizontais e distribuição horizontal no contexto de flags maximais, de modo a enfatizar o nosso contexto.

Definição 2.2.1 ([11]). *Seja $\mathbb{F} = U/T$ uma variedade flag maximal e J uma estrutura complexa invariante. A* distribuição horizontal $\mathcal{H} \subset T^{1,0}\mathbb{F}$ *é definida por*

$$\mathcal{H}_o = \sum_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha,$$

onde $o = eT$ é a origem de $\mathbb{F}$.

Esta distribuição é bem definida pois $\mathrm{Ad}(t)(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$ para todo $t \in T$.

Definição 2.2.2 ([11]). *Seja M uma superfície de Riemann e $(\mathbb{F}, J)$ uma variedade flag maximal munida com uma estrutura complexa invariante J. Uma aplicação $\phi : M \to (\mathbb{F}, J)$ é chamada* holomorfa-horizontal *se for J-holomorfa e tangente a distribuição $\mathcal{H}$, ou seja, $\phi_* T^{1,0}M \subset \mathcal{H}$.*

Definição 2.2.3 ([25], [43]). *Seja $\phi : M \to (\mathbb{F}, J)$ uma aplicação holomorfa-horizontal e rank $U = n$. Dizemos que ϕ é* não-degenerada *se $\phi(M)$ não pertence a nenhum subconjunto da forma $U'/(T \cap U')$, onde U' é um subgrupo fechado de U com rank $U' < n$.*

Considere uma variedade flag maximal $(\mathbb{F}, J, ds^2_\Lambda)$, onde ds^2_Λ é uma métrica U-invariante em $\mathbb{F}$. Lembramos que cada estrutura complexa J é associada com uma escolha de raízes positivas para $\mathfrak{g}$ e vice-versa, veja por exemplo [11], [10]. Assim, quando consideramos, portanto, uma variedade flag munida com uma estrutura complexa e utilizamos raízes positivas da álgebra de Lie de G (ou de U), estamos implicitamente fazendo a escolha de raízes positivas determinada pela estrutura complexa.

Considere a base de $\mathfrak{u}$ formada pelos vetores

$$\{A_\alpha, S_\alpha, H_\beta : \alpha \in \Pi^+,\ \beta \in \Sigma\}, \tag{2.6}$$

e considere a sua base dual $\{\mu_\alpha, \nu_\alpha, \xi_\beta : \alpha \in \Pi^+,\ \beta \in \Sigma\}$.

Suponha que a álgebra de Lie simples real $\mathfrak{u}$ de U tenha dimensão $m = 2n + k$, sendo n o número de raízes positivas e k o número de raízes simples. Escrevemos a base (2.6) e a correspondente base dual como segue:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} A_{\alpha_1} & S_{\alpha_1} & \dots & A_{\alpha_k} & S_{\alpha_k} & A_{\alpha_{k+1}} & S_{\alpha_{k+1}} & \dots & A_{\alpha_n} & S_{\alpha_n} & \sqrt{-1}H_{\alpha_1} & \dots & \sqrt{-1}H_{\alpha_k} \\ \mu_{\alpha_1} & \nu_{\alpha_1} & \dots & \mu_{\alpha_k} & \nu_{\alpha_k} & \mu_{\alpha_{k+1}} & \nu_{\alpha_{k+1}} & \dots & \mu_{\alpha_n} & \nu_{\alpha_n} & \xi_{\alpha_1} & \dots & \xi_k \end{array} \tag{2.7}$$

onde os primeiros $2k$ vetores da base são os A_α, S_α com α sendo uma raiz simples e os últimos k vetores são os $\sqrt{-1}H_\beta$ com β raiz simples. Escrevendo a base de $\mathfrak{u}$ nessa ordem iremos simplificar bastante os cálculos abaixo.

As formas μ_i, ν_i, ξ_i são conhecidas como formas de Maurer-Cartan. Note que cada uma delas é uma 1-forma real. O próximo resultado fornece a diferencial exterior das formas de Maurer-Cartan.

Teorema 2.2.4 ([41]). *Seja $\mathfrak{u}$ uma álgebra de Lie com base $\{v_i\}$ e base dual $\{\rho_i\}$. As equações de estrutura para as formas de Maurer-Cartan são dadas por*

$$d\rho_i = \sum_{p<q} C^i_{pq}\, \rho_p \wedge \rho_q, \tag{2.8}$$

onde C^i_{pq} são as constantes de estrutura da álgebra de Lie de $\mathfrak{u}$ definidas por $[v_p, v_q] = \sum_{k=1}^{m} C^k_{pq} v_k$.

Mostraremos agora o principal resultado desta seção. Este resultado generaliza o resultado obtido em [43]. Aqui utilizaremos fortemente a descrição abstrata de um flag maximal utilizando a Teoria de Lie.

Teorema 2.2.5. *Seja $(\mathbb{F}, J, ds^2_\Lambda)$ uma variedade flag maximal equipada com uma métrica e estrutura complexa invariantes. Seja $f : M \to (\mathbb{F}, J, ds^2_\Lambda)$ aplicação holomorfa-horizontal não-degenerada. Então as fórmulas de Plücker para f são dadas por*

$$2g - 2 - \#_i = -\sum_{j=1}^{k} \alpha_i(H_{\alpha_j}) d_j, \quad 1 \leq i \leq k, \tag{2.9}$$

onde g é o gênero da superfície de Riemann M, k é o número de raízes simples de $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$; d_j e $\#_j$ $(1 \leq j \leq k)$ são a área normalizada e o número de zeros de uma métrica degenerada em M induzida pela distribuição horizontal $\mathcal{H}$, respectivamente.

Demonstração: Seja $\mathbb{F} = G/B = U/T$ uma variedade flag maximal, e denote por $\mathfrak{u}$ e $\mathfrak{g}$ as álgebras de Lie de G e U, respectivamente. Lembramos que $\mathfrak{u}$ é a forma real compacta da álgebra de Lie complexa $\mathfrak{g}$.

Considere a base de $\mathfrak{u}$ (juntamente com a base dual) como foi definida em (2.7).

Definimos Θ_i, $i = 1, \ldots, n$, a 1-forma $\mathbb{C}$-linear a valores em $\mathfrak{g}$ por

$$\Theta_i = \mu_{\alpha_i} - \sqrt{-1}\nu_{\alpha_i},$$

onde $1 \leq i \leq n$.

Seja $f : M \to (\mathbb{F}, J, ds^2_\Lambda)$ uma aplicação holomorfa-horizontal não degenerada. Consideramos um $U-$referencial local $e : V \subset M \to U$ tal que $e \circ \pi = f$, onde $\pi : U \to \mathbb{F}$ é a projeção canônica, cf. [19]. Usando este referencial local definimos $\theta_i = e^*\Theta_i$. Note que θ_i é uma 1-forma $\mathbb{C}$-linear em M com valores em $\mathfrak{g}$.

O fato de f ser holomorfa implica que as formas θ_i são todas de tipo $(1, 0)$ em M, e a horizontalidade de f implica que $\theta_i = 0$ se α_i não for uma raiz simples, cf. [44]. Para simplificar a notação, se α_i é uma raiz simples escrevemos $\varphi_i = \theta_i$, com $1 \leq i \leq k$ (lembre que $\mathfrak{g}$ possui k raízes simples).

Ainda usando o referencial local e, definimos $\tilde{\mu}_{\alpha_i} = e^*\mu_{\alpha_i}$, $\tilde{\nu}_{\alpha_i} = e^*\nu_{\alpha_i}$, $\tilde{\xi}_{\alpha_i} = e^*\xi_{\alpha_i}$. Estas são 1-formas em M com valores em $\mathfrak{u}$.

Seja $L_{\alpha_i} \to \mathbb{F}$ o fibrado de linha holomorfo sobre $\mathbb{F}$, onde L_{α_i} é gerado pelo espaço de raiz (complexo) de α_i, com α_i sendo uma raiz simples. Escrevemos a distribuição horizontal $\mathcal{H}$ como

$$\mathcal{H} = L_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus L_{\alpha_k}.$$

Consideramos agora $ds^2_{L_i}$ como a métrica U-invariante em $\mathbb{F}$ restrita a cada fibrado de linha L_{α_i}, $1 \leq i \leq k$. Logo, $f^*ds^2_{L_i} = \varphi_i \otimes \bar{\varphi}_i = \varphi_i\bar{\varphi}_i$.

O fato de f ser não degenerada implica que φ_i não é identicamente nula, $1 \leq i \leq k$. Usando argumentos de compacidade e holomorfia, pode-se mostrar que φ possui somente zeros isolados e com multiplicidade finita, ver [45], [43]. Portanto, $\varphi_i\bar{\varphi}_i$ define uma métrica em M com singularidades.

Pela proposição 1.2.1 fora dos zeros de φ_i temos

$$d\varphi_i = -\psi_i \wedge \varphi_i, \tag{2.10}$$

$$d\psi_i = -\sqrt{-1}K_i\Phi_i, \tag{2.11}$$

onde ψ_i é a 1-forma de conexão, $d\psi_i$ é a 2-forma de curvatura, K_i e Φ_i são a curvatura Gaussiana e a forma Kähler de $(M, \varphi_i\bar{\varphi}_i)$, respectivamente.

Por definição temos

$$\varphi_i = \theta_i = e^*\Theta_i = e^*(\mu_{\alpha_i} - \sqrt{-1}\nu_{\alpha_i}) = e^*\mu_{\alpha_i} - \sqrt{-1}e^*\nu_{\alpha_i} = \tilde{\mu}_{\alpha_i} - \sqrt{-1}\tilde{\nu}_{\alpha_i},$$

onde $1 \leq i \leq k$.

Portanto, para calcular $d\varphi_i$ precisamos primeiro calcular $d\tilde{\mu}_{\alpha_i}$ e $d\tilde{\nu}_{\alpha_i}$ (utilizando $d\mu_{\alpha_i}$ e $d\nu_{\alpha_i}$), com $1 \leq i \leq k$.

Primeiramente, note que se α é uma raiz simples tal que $\alpha = \beta + \gamma$ então β ou γ é negativa, pois uma raiz simples não é soma de duas raízes positivas (lembre que raízes positivas ou negativas são determinadas pela estrutura complexa invariante $J = \{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$). Suponha que γ seja negativa, ou seja, $\varepsilon_\gamma = -1$. Como f é J-holomorfa e horizontal, $f_\gamma = 0$. Portanto,

$$C^\alpha_{\beta\gamma}\, \omega_\beta \wedge \omega_\gamma = C^\alpha_{\beta\gamma}\, e^*\mu_\beta \wedge e^*\mu_\gamma = 0,$$

onde $C^\alpha_{\beta\gamma}$ é a constante de estrutura da álgebra de Lie. Desta forma, estes termos não contribuem para o cálculo de $d\varphi$.

Analisando as constantes de estrutura e as equações de estrutura da álgebra de Lie $\mathfrak{u}$ vemos que as únicas contribuições são dadas por colchetes da forma:

$$[\sqrt{-1}H_{\alpha_j}, S_{\alpha_i}] = -\alpha_i(H_{\alpha_j})A_{\alpha_i}, \tag{2.12}$$

$$[\sqrt{-1}H_{\alpha_j}, A_{\alpha_i}] = \alpha_i(H_{\alpha_j})S_{\alpha_i}, \tag{2.13}$$

onde $1 \leq i, j \leq k$. Portanto, temos

$$d\mu_{\alpha_i} = \sum_{j=1}^{k} \sqrt{-1}\alpha_i(H_{\alpha_j})\xi_{\alpha_j} \wedge -\sqrt{-1}\nu_{\alpha_i},$$

$$d\nu_{\alpha_i} = -\sum_{j=1}^{k} \alpha_i(H_{\alpha_j})\xi_{\alpha_j} \wedge \mu_{\alpha_i}.$$

Mas $d\Theta_i = d(\mu_{\alpha_i} - \sqrt{-1}\nu_{\alpha_i})$. Logo

$$d\Theta_i = \sqrt{-1}\sum_{j=1}^{k} \alpha_i(H_{\alpha_j})\xi_{\alpha_j} \wedge \Theta_i. \tag{2.14}$$

Observamos que alguns $\alpha_i(H_{\alpha_j})$ são zero. Isso porque $\alpha(H_\beta) =< \alpha, \beta >$ onde $<,>$ denota a forma de Cartan-Killing no conjunto de raízes de $\mathfrak{g}$.

Agora calculamos $d\varphi_i$ para obter a 1-forma de conexão.

$$\begin{aligned} d\varphi_i &= de^*\Theta_i \\ &= e^*(d\Theta_i) \\ &= e^*(\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i(H_{\alpha_j})\xi_{\alpha_j}\wedge\Theta_i) \\ &= \sqrt{-1}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i(H_{\alpha_j})\, e^*\xi_{\alpha_j}\wedge e^*\Theta_i \\ &= \sqrt{-1}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i(H_{\alpha_j})\tilde{\xi}_{\alpha_j}\wedge\varphi_i. \end{aligned}$$

Portanto, a 1-forma de conexão é dada por

$$\psi_i = -\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i(H_{\alpha_j})\tilde{\xi}_{\alpha_j}.$$

Usando as equações de estrutura calculamos $d\tilde{\xi}_{\alpha_j}$, com $1 \le j \le k$:

$$d\tilde{\xi}_{\alpha_j} = e^*(d\xi_{\alpha_j}) = -2e^*(\mu_{\alpha_j}\wedge\nu_{\alpha_j}) = -2e^*\mu_{\alpha_j}\wedge e^*\nu_{\alpha_j} = -2\tilde{\mu}_{\alpha_j}\wedge\tilde{\nu}_{\alpha_j}, \tag{2.15}$$

pois $[A_\alpha, S_\alpha] = 2\sqrt{-1}H_\alpha$.

Para obter a relação entre $d\tilde{\xi}_{\alpha_j}$ e a forma Kähler Φ_j calculamos

$$\varphi_j\wedge\bar{\varphi}_j = \tilde{\mu}_{\alpha_j} - \sqrt{-1}\tilde{\nu}_{\alpha_j}\wedge\tilde{\mu}_{\alpha_j} + \sqrt{-1}\tilde{\nu}_{\alpha_j} = 2\tilde{\mu}_{\alpha_j}\wedge\sqrt{-1}\tilde{\nu}_{\alpha_j},$$

e portanto

$$d\tilde{\xi}_{\alpha_j} = -2\tilde{\mu}_{\alpha_j}\wedge\tilde{\nu}_{\alpha_j} = (\sqrt{-1})^2 2\tilde{\mu}_{\alpha_j}\wedge\tilde{\nu}_{\alpha_j} = \sqrt{-1}\,.\,2\tilde{\mu}_{\alpha_j}\wedge\sqrt{-1}\tilde{\nu} = \sqrt{-1}\varphi_j\wedge\bar{\varphi}_j.$$

Mas $\Phi_j = \frac{\sqrt{-1}}{2}\varphi_j\wedge\bar{\varphi}_j$. Então temos

$$d\tilde{\xi}_{\alpha_j} = 2\Phi_j, \tag{2.16}$$

com $1 \le j \le k$. Usando (2.16) podemos calcular a 2-forma de curvatura:

$$d\psi_i = -\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i(H_{\alpha_j})d\tilde{\xi}_{\alpha_j} = -2\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i(H_{\alpha_j})\Phi_j. \tag{2.17}$$

Agora estamos prontos para obter as fórmulas de Plücker para a aplicação holomorfa-horizontal f. O teorema de Gauss-Bonnet generalizado (ver por exemplo [25]) diz que

$$\int_M K_i \cdot \Phi_i = 2\pi(\chi(M) + \#_i), \tag{2.18}$$

onde $\chi(M) = 2 - 2g$ é a característica de Euler da superfície de Riemann com gênero g e $\#_i$ é o número de zeros de φ_i contando com as multiplicidades.

Como $d\psi_i = -\sqrt{-1}K_i \cdot \Phi_i$ temos

$$\int_M d\psi_i = -\sqrt{-1}\int_M K_i \cdot \Phi_i = -2\pi\sqrt{-1}(\chi(M) + \#_i) = 2\pi\sqrt{-1}(2g - 2 - \#_i). \tag{2.19}$$

Por outro lado

$$\int_M d\psi_i = -2\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{k} \alpha_i(H_{\alpha_j})\int_M \Phi_j. \tag{2.20}$$

Seja $d_i = \frac{1}{\pi}\int_M \Phi_i =$ área de $(M, \varphi_i\bar{\varphi}_i)$. Logo, as equações (2.19) e (2.20) nos fornecem

$$2g - 2 - \#_i = -\sum_{j=1}^{k} \alpha_i(H_{\alpha_j})d_j, \quad 1 \le i \le k, \tag{2.21}$$

que são as fórmulas de Plücker para a aplicação horizontal-holomorfa f. $\square$

Agora calcularemos as fórmulas de Plücker em alguns exemplos. A matriz de Cartan da álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ será usada para o cálculo de $\alpha_i(H_{\alpha_j})$, $1 \le i, j \le k$. O Exemplo 2.2.6 calculado em [43] pode agora ser obtido de modo diferente e mais direto.

Exemplo 2.2.6 (Flags do tipo D_l)**.** *Considere a variedade flag maximal $SO(12)/T$. A matriz de Cartan de $\mathfrak{so}(12, \mathbb{C})$ é*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Então as equações (2.9) *são dadas por*

$$\begin{aligned} 2g-2-\#_1 &= -2d_1+d_2 \\ 2g-2-\#_2 &= d_1-2d_2+d_3 \\ 2g-2-\#_3 &= d_2-2d_3+d_4 \\ 2g-2-\#_4 &= d_3-2d_4+d_5+d_6 \\ 2g-2-\#_5 &= d_4-2d_5 \\ 2g-2-\#_6 &= d_4-2d_6. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.7 (Flags do tipo A_l)**.** *Consideramos a variedade flag $SU(4)/T$. A matriz de Cartan de $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$ é*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

portanto (2.9) *são dadas por*

$$\begin{aligned} 2g-2-\#_1 &= -2d_1+d_2 \\ 2g-2-\#_2 &= d_1-2d_2+d_3 \\ 2g-2-\#_3 &= d_2-2d_3. \end{aligned}$$

Deste modo vemos que recuperamos neste exemplo as mesmas equações clássicas de Plücker descritas em [25].

Exemplo 2.2.8 (Caso G_2)**.** *Considere a variedade flag G_2/T. A matriz de Cartan $\mathfrak{g}_2$ é*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

logo, as equações (2.9) *são dadas por*

$$\begin{aligned} 2g-2-\#_1 &= -2d_1+d_2 \\ 2g-2-\#_2 &= 3d_1-2d_2. \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Equigeodésicas em variedades flag

3.1 Geodésicas Homogêneas

Nesta seção estabeleceremos alguns fatos básicos com respeito a geodésicas homogêneas. Tais fatos serão úteis para o desenvolvimento da próxima seção, onde trataremos de uma classe especial de geodésicas homogêneas chamadas por *equigeodésicas*.

Seja $M = G/K$ um espaço homogêneo redutível, g uma métrica Riemanniana invariante à esquerda em M. Denotamos por $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{k}$ as álgebras de Lie de G e K, respectivamente. Lembramos que como M é redutível, podemos escrever a álgebra de Lie de G como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m},$$

com $\mathrm{Ad}(K)(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$.

Definição 3.1.1. *Seja $(G/K, g)$ uma variedade homogênea munida com uma métrica invariante à esquerda. Um vetor $X \in \mathfrak{g}$ é um* vetor geodésico *se a curva*

$$\gamma(t) = (\exp tX) \cdot o$$

é uma geodésica em G/K passando pela origem $o = eK$. A curva γ é chamada geodésica homogênea *em G/K.*

Em outras palavras, uma geodésica é homogênea se for a órbita de um subgrupo a 1-parâmetro de G gerado por $X \in \mathfrak{g}$. Existe uma correspondência 1-1 entre vetores geodésicos e geodésicas homogêneas.

O próximo resultado fornece uma caracterização dos vetores geodésicos em espaços homogêneos em termos das estruturas das álgebras de Lie de G e H.

Teorema 3.1.2 ([33]). *Seja $(G/K, g)$ uma variedade homogênea munida com uma métrica invariante à esquerda. Um vetor não nulo $X \in \mathfrak{g}$ é um vetor geodésico se, e somente se,*

$$B(X_{\mathfrak{m}}, [X, Z]_{\mathfrak{m}}) = 0, \tag{3.1}$$

para todo $Z \in \mathfrak{g}$, onde $B(\cdot, \cdot)$ é o produto escalar Ad*-invariante associado à métrica g.*

Demonstração: Sejam $X, Z \in \mathfrak{g}$ e denote por X^*, Z^* o correspondente campo de vetor fundamental em M, definido por

$$X_q^* = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (\exp tX)(q),$$

para cada $q \in M$, e similarmente para Z_q^*. Usando a conhecida fórmula para conexão Riemanniana

$$2g(Z, \nabla_Y X) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) - g([X, Y], Z),$$

obtemos em nosso caso a seguinte expressão

$$2g(\nabla_{X^*} X^*, Z^*) = 2X^* g(X^*, Z^*) - Z^* g(X^*, X^*) + 2g([Z^*, X^*], X^*). \tag{3.2}$$

Usaremos também as fórmulas

$$\mathrm{ad}(\exp tX)Y = Y + t[X, Y] + O(t^2), \quad X, Y \in \mathfrak{g}, \tag{3.3}$$

$$k. \exp tX.k^{-1} = \exp(t\,\mathrm{ad}(k)X) \quad k \in G,\ X \in \mathfrak{g}. \tag{3.4}$$

Seja $g_t = \exp tX$, $h_s = \exp sZ$. Usando (3.3) e (3.4) obtemos, para todo $x \in M$,

$$\begin{aligned} Z^*_{g_t(x)} &= \left.\frac{d}{ds}\right|_0 h_s g_t(x) = (dg_t)\left.\frac{d}{ds}\right|_0 g_t^{-1} h_s g_t(x) \\ &= (dg_t)\left.\frac{d}{ds}\right|_0 \exp(s\,\mathrm{ad}(g_t^{-1})Z)(x) = (dg_t)[\mathrm{ad}(g_t^{-1})Z]_x^* \\ &= (dg_t)[\mathrm{ad}(\exp(-tX))Z]_x^* \\ &= (dg_t)[Z - t[X, Z] + O(t^2)]_x^*\ , \end{aligned}$$

e similarmente

$$X^*_{h_s(x)} = (dh_s)[X - s[Z,X] + O(s^2)]^*_x \ .$$

Pela invariância dos campos fundamentais obtemos

$$X^*_{g_t(x)} = (dg_t)X^*_x, \quad Z^*_{h_s(x)} = (dh_s)Z^*_x \ .$$

Usando a identidade $[X,Z]^* = -[X^*, Z^*]$, calculamos

$$\begin{aligned} X^*_x g(X^*, Z^*) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 g(X^*_{g_t(x)}, Z^*_{g_t(x)}) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 g((dg_t)X^*_x, (dg_t)[Z - t[X,Z] + O(t^2)]^*_x) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 g(X^*_x,\, Z^*_x + t[X^*, Z^*]_x + O(t^2)) \\ &= g(X^*, [X^*, Z^*])(x). \end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned} Z^*_x g(X^*, X^*) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_0 g(X^*_x + s[Z^*, X^*]_x + O(s^2), X^*_x + s[Z^*, X^*]_x + O(s^2)) \\ &= 2g(X^*, [Z^*, X^*])(x). \end{aligned}$$

Substituindo em (3.2), obtemos

$$g(\nabla_{X^*} X^*, Z^*) = g(X^*, [X^*, Z^*]) = -g(X^*, [X,Z]^*). \tag{3.5}$$

Suponha agora que X seja um vetor geodésico. Temos então, em particular, $g(X^*_p, [X,Z]^*_p) = 0$, onde p é a origem do espaço homogêneo. Considere a projeção canônica $\pi : G \longrightarrow M$. Identificando $\mathfrak{g}$ com T_eG, obtemos $d\pi(X) = X^*_p$, para cada $X \in \mathfrak{g}$ e portanto $d\pi(X_\mathfrak{m}) = X^*_p$. Assim,

$$B(X_\mathfrak{m}, [X,Z]_\mathfrak{m}) = 0.$$

Por outro lado, suponha que (3.1) é verdadeira. Então,

$$\begin{aligned} g(X^*, [X,Z]^*)((\exp tX)(p)) &= g((dg_t)X^*_p, (dg_t)[X,Z]^*_p) \\ &= g(X^*_p, [X,Z]^*_p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo $Z \in \mathfrak{g}$. Então, por (3.5) temos que $\nabla_{X^*}X^* = 0$ e portanto $(\exp tX)(p)$ é uma geodésica. ■

Corolário 3.1.3. *Um vetor não nulo $X \in \mathfrak{g}$ é geodésico se, e somente se,*

$$B([X,Y]_{\mathfrak{m}}, X_{\mathfrak{m}}) = 0, \tag{3.6}$$

para todo $Y \in \mathfrak{m}$.

A fórmula do Teorema 3.1.2 é muito útil quando se trabalha com geodésicas em espaços homogêneos. Grande parte dos artigos consultados sobre este tema fazem uso deste resultado.

Uma questão interessante é sobre a existência de tais geodésicas homogêneas neste contexto mais geral. Neste sentido, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.1.4 ([32]). *Seja $(G/H, g)$ uma variedade homogênea munida com uma métrica invariante à esquerda,* $\dim M = m$*, com G grupo de Lie semi-simples. Então M admite m geodésicas homogêneas mutuamente ortogonais iniciando na origem o.*

Outra questão interessante é a seguinte: dada uma variedade homogênea $M = G/K$, existe uma métria Riemanniana invariante g tal que todas as geodésicas de (M, g) são geodésicas homogêneas ?

Exemplos "triviais" destas variedades são os grupos de Lie compactos com a métrica bi-invariante e as variedades Riemannianas homogêneas $(G/K, g)$ com G compacto g a métrica normal, veja por exemplo [16]. Portanto, procuram-se exemplos de tais variedades com a métrica invariante somente pela esquerda, e não com a métrica bi-invariante (ou normal).

Em [33] tais variedades são denominadas *espaços g.o.* (geodesic orbit). No mesmo artigo são classificados todos os espaços g.o. de dimensão menor ou igual a 5.

Não iremos tratar de espaços g.o. neste trabalho. Somente vamos enunciar um resultado recente que classifica quais variedades flag admitem uma métrica invariante (não homotética à métrica bi-invariante) que a torna um espaço g.o.

Teorema 3.1.5 ([1]). *Dentre todas as variedades flag $\mathbb{F}_\Theta$, as únicas que admitem métrica invariante g (não homotética à métrica normal) tal que $(\mathbb{F}_\Theta, g)$ seja um espaço g.o. são $SO(2l+1)/U(l)$ e $Sp(l)/U(1) \times Sp(l-1)$.*

3.2 Equigeodésicas em variedades flag

Nesta seção os espaços homogêneos considerados são as variedades flag generalizadas $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta = U/K_\Theta$. Utilizaremos a descrição do espaço tangente na origem oK em termos da decomposição da representação da isotropia e dos espaços de raízes de $\mathfrak{g}$ como na Seção 1.1.

Seja g uma métrica invariante na variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$ e $B(\cdot,\cdot) = -\langle \Lambda(\cdot), \cdot \rangle$ o produto escalar Ad-invariante associado à g. Considere em $\mathfrak{u}$ a base descrita em (1.7). A invariância de B é equivalente aos vetores A_α, S_α com $\alpha \in \Pi_M^+$ serem autovetores de Λ associados ao mesmo autovalor λ_α, veja [40].

Note que os vetores A_α, S_α são vetores geodésicos. De fato, como $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{k}_\Theta^\perp$ e $A_\alpha \in \mathfrak{m}_\Theta$, pelo Teorema 3.1.2 temos que

$$\begin{aligned} B((A_\alpha)_{\mathfrak{m}_\Theta}, [A_\alpha, Z]_{\mathfrak{m}_\Theta}) &= -\langle \Lambda(A_\alpha), [A_\alpha, Z]_{\mathfrak{m}_\Theta} \rangle = -\lambda_\alpha \langle A_\alpha, [A_\alpha, Z]_{\mathfrak{m}_\Theta} + [A_\alpha, Z]_{\mathfrak{k}} \rangle \\ &= -\lambda_\alpha \langle A_\alpha, [A_\alpha, Z] \rangle = \lambda_\alpha \langle [A_\alpha, A_\alpha], Z \rangle = 0, \end{aligned}$$

para todo $Z \in \mathfrak{g}$ (utilizamos a anti-simetria da adjunta em relação à forma de Cartan-Killing, cf. [39]). Analogamente vemos que S_α é um vetor geodésico.

Pelo fato dos vetores A_α e $S_\alpha, \alpha \in \Pi_M^+$ serem autovetores para *todos* os operadores Λ que determinam um produto interno invariante (e portanto uma métrica invariante) vemos que A_α, S_α são vetores geodésicos com respeito a *toda* métrica invariante na variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 3.2.1. *Uma curva γ numa variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$ é dita ser uma* equigeodésica *se ela for geodésica com respeito a toda métrica invariante em $\mathbb{F}_\Theta$. Se γ for da forma*

$$\gamma(t) = (\exp tX) \cdot o,$$

diremos que γ é uma equigeodésica homogênea *e o vetor X é chamado de* vetor equigeodésico*.*

Neste trabalho tratamos somente o caso de equigeodésicas homogêneas. A partir de agora, sempre que nos referirmos a equigeodésicas, estaremos pensando em equigeodésicas homogêneas (a menos que seja dito explicitamente o contrário). Nosso primeiro resultado é o seguinte:

Proposição 3.2.2. *Toda variedade flag generalizada admite equigeodésicas.*

Demonstração: De fato, pela discussão acima, os vetores $\{A_\alpha, S_\alpha\}, \alpha \in \Pi_M^+$ são vetores equigeodésicos. □

Uma vez garantida a existência de equigeodésicas em variedades flag generalizadas, nosso próximo passo é obter uma classificação de tais geodésicas. Tal caracterização será feita em termos dos vetores equigeodésicos. O próximo resultado fornece uma condição necessária e suficiente para um vetor ser equigeodésico.

Proposição 3.2.3. *Seja $\mathbb{F}_\Theta$ uma variedade flag generalizada, com $\mathfrak{m}_\Theta$ isomorfo a $T_o\mathbb{F}_\Theta$ onde $o = eK_\Theta$. Um vetor $X \in \mathfrak{m}_\Theta$ é equigeodésico se, e somente se,*

$$[X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}_\Theta} = 0, \tag{3.7}$$

para cada métrica invariante Λ.

Demonstração: Seja $B(\cdot,\cdot) = -\langle \Lambda\cdot, \cdot\rangle$ o produto escalar invariante determinado por Λ. Para $X, Y \in \mathfrak{m}_\Theta$ temos

$$B(X, [X,Y]_{\mathfrak{m}_\Theta}) \;=\; -\langle \Lambda X, [X,Y]_{\mathfrak{m}_\Theta}\rangle = -\langle \Lambda X, [X,Y]\rangle = -\langle [X,\Lambda X], Y\rangle,$$

pois a decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_\Theta \oplus \mathfrak{k}_\Theta$ é $<,>$-ortogonal e a forma de Cartan-Killing é $\mathrm{Ad}(G)$-invariante, i.e., $\mathrm{ad}(X)$ é skew-Hermitiana com respeito a $<,>$. Portanto, X é equigeodésico se, e somente se, $[X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}_\Theta} = 0$ para cada produto escalar invariante Λ. □

Observamos que resolver a equação (3.7) é equivalente a resolver um sistema algébrico não linear de equações cujas variáveis são os coeficientes do vetor X. Usando a decomposição $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{m}_k$ em componentes irredutíveis da representação da isotropia (real) e considerando a base $\{A_\alpha, S_\alpha; \alpha \in \Pi_M^+\}$ veremos que a estrutura de álgebra de Lie subjacente em $\mathfrak{m}_\Theta$ desempenha um importante papel.

De fato, analisando os colchetes de Lie da forma $[A_\alpha, S_\beta]$, $[A_\alpha, A_\beta]$ e $[S_\alpha, S_\beta]$ descritos em (1.9) é claro que se as constantes de estrutura $m_{\alpha,\beta}$, $m_{-\alpha,\beta}$, $m_{\alpha,-\beta}$ são zero então esses colchetes também são iguais a zero e o sistema algébrico pode ser simplificado. Iremos, portanto, dar ênfase às soluções de (3.7) que dependam exclusivamente da estrutura da álgebra de Lie de $\mathfrak{u}$.

Observamos ainda que como consequência da invariância da métrica Λ, temos $\Lambda|_{\mathfrak{m}_i} = \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathfrak{m}_i}$, para cada componente irredutível da representação da isotropia. Portanto, se $X \in \mathfrak{m}_i$ a equação (3.1) é trivialmente verificada.

Definição 3.2.4. *Um vetor equigeodésico $X \in \mathfrak{m}_\Theta$ é* trivial *se $X \in \mathfrak{m}_i$ para algum i; caso contrário dizemos que X é um vetor equigeodésico* não-trivial.

Numa variedade flag maximal, estas soluções triviais possuem a propriedade adicional: as equigeodésicas correspondentes são fechadas.

Proposição 3.2.5. *Seja $\mathbb{F} = \mathbb{F}_\Theta = U/T$ uma variedade flag maximal. Então todo vetor $X \in \mathfrak{u}_\alpha$ com $\alpha \in \Pi_M^+$ é equigeodésico e a correspondente equigeodésica $\gamma(t) = \exp(tX) \cdot o$ é fechada.*

Demonstração: O fato que X é equigeodésico segue da observação que no caso de uma variedade flag maximal, cada $\mathfrak{u}_\alpha$ é uma componente irredutível da representação da isotropia. Nossa prova de que a equigeodésica é fechada é baseada na prova de Helgason (ver [26] Ch. IV). O subespaço $\mathfrak{u}_\alpha$ é um sistema triplo na álgebra de Lie real $\mathfrak{u}$, isto é, se $X, Y, Z \in \mathfrak{u}_\alpha$ então $[X, [Y, Z]] \in \mathfrak{u}_\alpha$. Portanto, o subespaço $\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}_\alpha + [\mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\alpha]$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{u}$ que é isomorfa a $\mathfrak{su}(2)$.

Seja U' o subgrupo conexo de U com álgebra de Lie $\mathfrak{u}'$ e M' a órbita $U' \cdot o$. Podemos identificar M' com $U'/(U' \cap T)$ que é uma subvariedade de $\mathbb{F}$, com $T_o M' = \mathfrak{u}_\alpha$, veja [26] Ch II. Note que $M' = SU(2)/S(U(1) \times U(1)) = S^2$ e a métrica riemanniana induzida em M' é (a menos de escala) a métrica normal.

Assim, geodésicas em $\mathbb{F}$ com vetor velocidade inicial em $T_o M'$ são da forma $\exp(tX) \cdot o$ onde $X \in u_\alpha$, e portanto uma curva em M'. Desta forma, a imersão $M' \subset \mathbb{F}$ é geodésica em o, isto é, cada geodésica em $\mathbb{F}$ que é tangente a subvariedade M' em o ($X \in \mathfrak{u}_\alpha$) é uma curva em M'. Como U' age transitivamente em M', a imersão é totalmente geodésica, cf. [26]. Mas as geodésicas em S^2 são fechadas. □

Denote por $i_\alpha : S^2 \to \mathbb{F}$ a imersão totalmente geodésica descrita na prova da proposição anterior. Uma observação importante é que a imersão i_α é totalmente geodésica com respeito a toda métrica invariante em $\mathbb{F}$. Dessa forma cada i_α, $\alpha \in \Pi_M^+$ é uma aplicação equiharmônica. A seguir discutiremos uma relação que obtivemos entre estas aplicações equiharmônicas com a topologia de um flag maximal.

É um fato bem conhecido que as variedades flag generalizadas são simplesmente conexas, [9]. Com respeito ao segundo grupo de homotopia de uma variedade flag, temos o seguinte resultado que enunciamos somente no caso de flags maximais e cuja demonstração pode ser encontrada em [13].

Teorema 3.2.6. *Seja U/T uma variedade flag maximal e Σ um sistema simples de raízes para $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$, a álgebra de Lie complexificada de U. Então $\pi_2(U/T) = \mathbb{Z}^{|\Sigma|}$ é gerado pelas aplicações $i_\alpha : S^2 \to U/T$, com $\alpha \in \Sigma$.*

Como uma consequência imediata da Proposição 3.2.5 e do Teorema 3.2.6 temos o seguinte resultado:

Proposição 3.2.7. *O segundo grupo de homotopia de U/T é gerado por aplicações equiharmônicas.*

Para finalizar esta seção, vamos exibir uma família de vetores equigeodésicos em variedades flag maximais. Tais famílias dependem somente da estrutura de álgebra de Lie dos grupos de Lie U e G.

Proposição 3.2.8. *Seja $\mathbb{F}_\Theta = U/T$ uma variedade flag maximal e sejam $X \in \mathfrak{u}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{u}_\beta$ vetores não nulos. Se $\alpha \pm \beta$ não são raízes então $X + Y \in \mathfrak{m}_\Theta$ é um vetor equigeodésico.*

Demonstração: Seja Λ uma métrica invariante em $\mathbb{F}_\Theta$. Por hipótese, $\Lambda(X) = \lambda_\alpha X$ e $\Lambda(Y) = \lambda_\beta Y$. Escrevendo $X = a_1 A_\alpha + b_1 S_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha$, $Y = a_2 A_\beta + b_2 S_\beta \in \mathfrak{u}_\beta$, com $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned} [X+Y, \Lambda(X+Y)]_{\mathfrak{m}_\Theta} &= (\lambda_\alpha - \lambda_\beta)(a_1 a_2 [A_\alpha, A_\beta] + a_1 b_2 [A_\alpha, S_\beta] \\ &\quad + b_1 a_2 [S_\alpha, A_\beta] + b_1 b_2 [S_\alpha, S_\beta]). \end{aligned}$$

Agora, como $\alpha \pm \beta$ não são raízes, as constantes de estrutura $m_{\alpha,\beta}, m_{\alpha,-\beta}$ são iguais a zero e pelas equações (1.9) os colchetes $[A_\alpha, S_\alpha]$, $[A_\alpha, S_\beta]$, $[S_\alpha, A_\beta]$ e $[S_\alpha, S_\beta]$ também são iguais a zero.

Portanto, temos $[X+Y, \Lambda(X+Y)]_{\mathfrak{m}_\Theta} = 0$ para toda métrica invariante Λ e assim $X+Y$ é um vetor equigeodésico. □

Corolário 3.2.9. *Com as hipóteses da Proposição acima, seja $X = X_{\alpha_1} + \ldots + X_{\alpha_r}$ tal que $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{u}_{\alpha_i}$ para cada i. Se $\alpha_p \pm \alpha_q$ não são raízes para todos $p, q \in \{1, \ldots, r\}$ então X é um vetor equigeodésico.*

Demonstração: Basta aplicar a proposição acima juntamente com a linearidade do colchete de Lie. □

Exemplo 3.2.10. *Considere a variedade flag maximal G_2/T e seja $\alpha = \alpha_2$ and $\beta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$. Estas raízes satisfazem a condição que $\alpha \pm \beta$ não é raiz de $\mathfrak{g}_2$. Então todos os vetores no conjunto $\mathfrak{u}_\alpha \oplus \mathfrak{u}_\beta$ são vetores equigeodésicos.*

Nas próximas seções exibiremos famílias de vetores equigeodésicos em diversas variedades flag generalizadas.

3.3 Variedades flag generalizadas de $SU(n)$

Nesta seção trabalharemos com variedades flag generalizadas do grupo de Lie clássico $SU(n)$ (também chamadas de variedades flag do tipo A_l). Estas variedades são espaços homogêneos da forma

$$\mathbb{F}_\Theta = \mathbb{F}(n; n_1, \ldots, n_s) = SU(n) \ / \ S(U(n_1) \times \ldots \times U(n_s)), \tag{3.8}$$

onde $n = n_1 + \ldots + n_s$, veja por exemplo [3].

A principal motivação para trabalhar com esta família de variedades flag é que os componentes irredutíveis da representação da isotropia possuem uma boa descrição em termos matriciais. Iremos traduzir a equação (3.7) em termos de equações matriciais, e apresentaremos soluções que estão relacionadas com a estrutura de álgebra de Lie de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

Investigaremos no final desta seção o fato de uma equigeodésica ser fechada ou não. Nossa ideia é a seguinte: para cada $X \in \mathfrak{m}_\Theta$ podemos associar um campo de vetores X^* em $\mathbb{F}_\Theta$ chamado campo fundamental associado a X. Como o fluxo de tal campo é composto por isometrias de $\mathbb{F}_\Theta$, este é um campo de Killing. A estratégia será analisar as trajetórias de tais campos fundamentais. Note que uma equigeodésica é uma trajetória de um campo fundamental.

Vamos descrever os componentes irredutíveis da representação da isotropia, seguindo [6]. Fixamos um sistema de raízes de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ como no Exemplo 1.1.9.

As variedades da família (3.8) podem ser descrita em termos de raízes por:

$$\begin{array}{lcl} \langle\Theta\rangle & = & \{\varepsilon_a^i - \varepsilon_b^i : \ 1 \leq a \neq b \leq n_i\}, \\ \langle\Theta\rangle^+ & = & \{\varepsilon_a^i - \varepsilon_b^i : \ 1 \leq a < b \leq n_i\}, \\ \Pi^+ & = & \{\varepsilon_a^i - \varepsilon_b^j : \ i < j, 1 \leq a \leq n_i, 1 \leq b \leq n_j\}, \end{array}$$

onde usamos a notação $\varepsilon_a^i = \varepsilon_{n_1+\ldots+n_{i-1}+a}$.

Denote por E_{pq}^{ij}, $(1 \leq p \leq n_i, 1 \leq q \leq n_j)$ a matriz $n \times n$ com 1 na posição $(n_1 + \ldots + n_{i-1} + p, n_1 + \ldots + n_{j-1} + q)$ e zero nas outras entradas. O espaço de raiz $\mathfrak{g}_{\alpha_{pq}^{ij}}$ associado à raiz $\alpha_{pq}^{ij} := \varepsilon_p^i - \varepsilon_q^j$ é o subespaço gerado (sobre $\mathbb{C}$) por E_{pq}^{ij}.

Os componentes irredutíveis da representação da isotropia (real) são dados por:

$$\mathfrak{m}_{ij} = \sum_{1\leq p\leq n_i, 1\leq q\leq n_j} \mathfrak{u}_{\alpha_{pq}^{ij}}, \quad i < j, \tag{3.9}$$

e os componentes da isotropia complexa são dados por:

$$\mathfrak{m}_{ij}^{\mathbb{C}} = \sum_{1\leq p\leq n_i, 1\leq q\leq n_j} \mathfrak{g}_{\alpha_{pq}^{ij}}, \quad i \neq j. \tag{3.10}$$

Observamos que $\mathfrak{m}_{ij} = (\mathfrak{m}_{ij}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{m}_{ji}^{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{su}(n)$, onde $\mathfrak{su}(n)$ é a forma real compacta de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

Exemplo 3.3.1. *Considere a variedade flag $SU(10)/S(U(4) \times U(3) \times U(2) \times U(1))$. Abaixo apresentamos os componentes irredutíveis da representação da isotropia.*

$$\begin{array}{cccccccccc} * & * & * & * & a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_{11} & b_{12} & c_{11} \\ * & * & * & * & a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_{21} & b_{22} & c_{21} \\ * & * & * & * & a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_{31} & b_{32} & c_{31} \\ * & * & * & * & a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_{41} & b_{42} & c_{41} \\ -\bar{a}_{11} & -\bar{a}_{21} & -\bar{a}_{31} & -\bar{a}_{41} & * & * & * & d_{11} & d_{12} & e_{11} \\ -\bar{a}_{12} & -\bar{a}_{22} & -\bar{a}_{32} & -\bar{a}_{42} & * & * & * & d_{21} & d_{22} & e_{21} \\ -\bar{a}_{13} & -\bar{a}_{23} & -\bar{a}_{33} & -\bar{a}_{43} & * & * & * & d_{31} & d_{32} & e_{31} \\ -\bar{b}_{11} & -\bar{b}_{21} & -\bar{b}_{31} & -\bar{b}_{41} & -\bar{d}_{11} & -\bar{d}_{21} & -\bar{d}_{31} & * & * & f_{11} \\ -\bar{b}_{12} & -\bar{b}_{22} & -\bar{b}_{32} & -\bar{b}_{42} & -\bar{d}_{12} & -\bar{d}_{22} & -\bar{d}_{32} & * & * & f_{21} \\ -\bar{c}_{11} & -\bar{c}_{21} & -\bar{c}_{31} & -\bar{c}_{41} & -\bar{e}_{11} & -\bar{e}_{21} & -\bar{e}_{31} & -\bar{f}_{11} & -\bar{f}_{21} & * \end{array}$$

Agora iremos expressar as equações $[X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}_\Theta} = 0$ em termos de um conjunto de equações matriciais. Primeiramente vamos fazer algumas identificações entre os componentes irredutíveis e certos conjuntos de matrizes.

O subespaço das matrizes da forma

$$M^{ij} = \text{ span } \left\{E_{pq}^{ij}\right\}_{1\leq p\leq n_i,\, 1\leq q\leq n_j} \tag{3.11}$$

é isomorfo sobre $\mathbb{C}$ à componente $\mathfrak{m}_{ij}^{\mathbb{C}}$. Seja $A \in \mathfrak{m}_\Theta$ representado pela matriz $A = \sum A^{ij}$, $A^{ij} \in M^{ij}$. Para cada A^{ij} podemos associar uma matriz $a_{ij} \in M_{n_i,n_j}(\mathbb{C})$; mais especificamente, definimos

$$A^{ij} = \sum_{p,\,q} z_{pq}\, E_{pq}^{ij} \qquad \Rightarrow \qquad a_{ij} = \sum_{p,\,q} z_{pq} E_{pq},$$

onde a_{ij} é o único bloco não trivial em A^{ij} e $E_{pq} \in M_{n_i,n_j}(\mathbb{C})$. Como A é anti-Hermitiana, temos que $a_{ij} = -a_{ji}^*$.

Exemplo 3.3.2. *Voltando ao Exemplo 3.3.1, seja $A \in \mathfrak{m}_\Theta$ e considere a decomposição em componentes irredutíveis indicada no exemplo referido. Note que $n = 10$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$, $n_4 = 1$. Neste caso, a componente $A^{13} \in M^{13}$ é representada pela matriz*

$$A^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{41} & b_{42} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e a matriz $a_{13} \in M_{4,2}(\mathbb{C})$ é dada por

$$a_{13} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}.$$

Já o componente A^{31} de A é representada por

$$A^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{b}_{11} & -\bar{b}_{21} & -\bar{b}_{31} & -\bar{b}_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{b}_{12} & -\bar{b}_{22} & -\bar{b}_{32} & -\bar{b}_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e a matriz $a_{31} \in M_{2,4}(\mathbb{C})$ é dada por

$$a_{31} = \begin{pmatrix} -\bar{b}_{11} & -\bar{b}_{21} & -\bar{b}_{31} & -\bar{b}_{41} \\ -\bar{b}_{12} & -\bar{b}_{22} & -\bar{b}_{32} & -\bar{b}_{42} \end{pmatrix}.$$

□

Lema 3.3.3. *Sejam $1 \leq i, j, m \leq s$ distintos, onde s é determinado pela família (3.8). Se $X \in M^{ij}$ e $Y \in M^{jm}$ então $Z = [X, Y] \in M^{im}$. Além disso, se X, Y, Z são representados pelos blocos de matrizes $a \in M_{n_i,n_j}(\mathbb{C}), b \in M_{n_j,n_m}(\mathbb{C})$ e $c \in M_{n_i,n_m}(\mathbb{C})$, respectivamente, então $c = ab$.*

Demonstração: O resultado segue da observação que se $\alpha = \alpha^{i\,s_1}_{p\,q_1}$ e $\beta = \alpha^{s_2\,j}_{p_2\,q}$ então $\alpha + \beta$ é uma raiz exatamente quando $s_1 = s_2$ e $q_1 = p_2$,. Neste caso temos $\alpha + \beta = \alpha^{i\,j}_{p\,q}$. □

Podemos agora expressar as equações de equigeodésica em termos matriciais.

Teorema 3.3.4. *Seja $X = \sum_{i,j} X^{ij} \in \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}_{\Theta}$ representada pela matriz anti-Hermitiana em blocos A com blocos $a_{ij} \in M_{n_i,n_j}(\mathbb{C})$. Suponha que os blocos a_{ij} satisfaçam*

$$a_{ij}\, a_{jm} = 0 \qquad (i, j, m \quad \text{distintos com} \quad 1 \leq i, j, m \leq s). \tag{3.12}$$

Então X é um vetor equigeodésico.

Demonstração: Seja Λ_{ij} a matriz com entrada 1 nos blocos ij e ji, e 0 em todas outras entradas. Cada métrica invariante Λ possui a representação matricial $\Lambda = \sum \lambda_{ij}\Lambda_{ij}$ $(\lambda_{ij} > 0)$.

Quando escrevemos ΛX neste contexto matricial, estamos pensando no produto de Hadamard de matrizes(ou produto termo a termo), veja por exemplo [27]. Claramente, se $[X, \Lambda_{ij} X] = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq s$ $(i \neq j)$ então $[X, \Lambda X] = 0$. Desta forma, utilizando o Lema 3.3.3 temos que a representação matricial de $[X, \Lambda_{ij} X] = [A, \lambda_{ij}(A^{ij} + A^{ji})]$ é dada por

$$\begin{pmatrix} & & a_{1j}a_{ji} & & & \\ & & a_{2j}a_{ji} & & & \\ & & \vdots & & & \\ a_{ji}a_{i1} & a_{ji}a_{i2} & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & & & \\ & & \vdots & & & \end{pmatrix}.$$

Portanto, a j-ésima linha-bloco de $[X, \Lambda_{ij} X]$ consiste de entradas $a_{ji}a_{im}$ $(m \neq i, j)$. Portanto, se todos estes produtos são nulos, temos que X é equigeodésico. □

Exemplo 3.3.5. *Considere a variedade flag $\mathbb{F}_\Theta = SU(n)/S(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3))$, com $n = n_1 + n_2 + n_3$. De acordo com o Teorema 3.3.4 um vetor não-nulo $X \in \mathfrak{m}_\Theta$, representado pela matriz em blocos A é equigeodésico, se os blocos a_{12}, a_{13}, a_{23} satisfazem*

$$a_{12}\, a_{23} = 0, \qquad a_{13}^*\, a_{12} = 0, \qquad a_{23}\, a_{13}^* = 0.$$

Seja $\mathbb{U}(n)$ o grupo das matrizes unitárias de ordem n. Dado uma variedade flag $\mathbb{F}(n, n_1, \ldots, n_s)$ definimos o subgrupo $\hat{U}$ de $\mathbb{U}(n)$ por $\hat{U} := \oplus_{i=1}^{s} \mathbb{U}(n_i) \subset \mathbb{U}(n)$. Ou seja, se $X \in \hat{U}$ então X é uma matriz composta somente por blocos na diagonal principal, com cada bloco-diagonal sendo uma matriz unitária de ordem n_i, $i = 1, \ldots, s$.

A próxima proposição nos fornece uma família de vetores equigeodésicos.

Proposição 3.3.6. *Seja $\mathbb{F}_\Theta = \mathbb{F}(n, n_1, \ldots, n_s)$ uma variedade flag e $X \in \mathfrak{m}_\Theta$. Suponha que X é representada pela matriz em blocos A, composta pelos blocos a_{ij} e que estes blocos satisfazem as equações (3.12).*

Então $Y = DXD^{-1}$ é um vetor equigeodésico para cada $D \in \hat{U}$. Em outras palavras, a órbita de X pela ação de conjugação por elementos de $\hat{U}$ é composta de vetores equigeodésicos.

Demonstração: Seja $D \in \hat{U}$ uma matriz arbitrária. Escrevemos D e $D^{-1} = D^*$ como

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_s \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^* & & \\ & \ddots & \\ & & d_s^* \end{pmatrix},$$

onde $d_i \in \mathbb{U}(n_i)$, $i = 1, \dots, s$. Seja X como no enunciado da proposição e $Y = DXD^{-1}$. Na representação de Y por matrizes em blocos, os blocos ij e ji são dados por

$$y_{ij} = d_i a_{ij} d_j^* \quad \text{e } y_{ji} = -d_j a_{ij}^* d_i^*,$$

Portanto,

$$y_{ij} y_{jm} = d_i a_{ij} d_j^* d_j a_{jm} d_m^* = d_i a_{ij} a_{jm} d_m^* = 0, \quad (1 \leq i, j, m \leq s),$$

pois d_j é uma matriz unitária e os componentes a_{ij}, a_{jm} satisfazem as equações (3.12). □

Exemplo 3.3.7. *Podemos usar a proposição anterior para criar vetores equigeodésicos a partir de soluções particulares do sistema (3.12). Por exemplo, na variedade flag $\mathbb{F}(9; 3, 3, 3)$, iniciamos com o seguinte vetor equigeodésico*

$$X = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 \\ \hline -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 \\ \hline 0 & 0 & -\sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

onde $\sigma_i > 0$ para todo i é um número real. Agora, cada conjugação por um elemento de $\hat{U} := U \in \mathbb{U}(3) \oplus \mathbb{U}(3) \oplus \mathbb{U}(3)$ produz um novo vetor equigeodésico.

Vamos exibir agora uma classe de soluções que depende essencialmente da estrutura de álgebra de Lie e dos componentes irredutíveis da representação da isotropia.

Definição 3.3.8. *Dizemos que uma matriz A é* essencialmente diagonal *se A contém, no máximo, uma entrada não nula em cada linha e coluna.*

Analogamente, dizemos que uma A é essencialmente bloco-diagonal *se A contém, no máximo, um* bloco *$a_{ij} \in M_{n_i,n_j}(\mathbb{C})$ não nulo em cada linha-bloco de tamanho n_i e cada coluna-bloco de tamanho n_j.*

Proposição 3.3.9. *Considere a variedade flag $\mathbb{F}_\Theta = \mathbb{F}(n; n_1, \dots, n_s)$ e seja $X \in \mathfrak{m}_\Theta$ representado pela matriz A. Se A for essencialmente bloco diagonal então X será um vetor equigeodésico.*

Demonstração: De fato, se A é essencialmente bloco diagonal temos $a_{ij}a_{jm} = a^*_{ji}a_{jm} = 0$, pois a_{ji} e a_{jm} pertencem a mesma linha-bloco. □

Exemplo 3.3.10. *Considere a variedade flag* $\mathbb{F}(8; 2, 2, 2, 2)$. *O vetor* $X \in \mathfrak{m}_\Theta$ *representado pela matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{b}_{11} & -\bar{b}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{b}_{12} & -\bar{b}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{a}_{11} & -\bar{a}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{a}_{12} & -\bar{a}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é um vetor essencialmente bloco diagonal, logo é um vetor equigeodésico.

Exemplo 3.3.11. *Considere a variedade flag maximal* $\mathbb{F}(6; 1, 1, 1, 1, 1, 1) = SU(6)/T$. *O vetor* $X \in \mathfrak{m}_\Theta$ *representado pela matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{a}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{a}_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{a}_{56} & 0 \end{pmatrix}$$

é um vetor essencialmente diagonal, logo é um vetor equigeodésico.

Observação 3.3.12. *Gostaríamos de observar que, no caso de variedades flag maximais de* $SU(n)$, *as matrizes essencialmente diagonais são a representação matricial dos espaços de raízes descritos no Corolário 3.2.9. Por exemplo, a matriz A descrita no Exemplo 3.3.11 pertence ao espaço* $\mathfrak{u}_{\alpha_{12}} \oplus \mathfrak{u}_{\alpha_{34}} \oplus \mathfrak{u}_{\alpha_{56}}$. *Aqui, como usualmente fazemos, estamos considerando o sistema de raízes canônico de* $\mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$.

O próximo resultado será útil na análise do fato de uma equigeodésica ser fechada ou não.

Lema 3.3.13. *Considere a variedade flag $\mathbb{F}(n; n_1, \ldots, n_s)$ e suponha que $X \in \mathfrak{m}_\Theta$ é representado pela matriz anti-Hermitiana e essencialmente bloco diagonal A. Então A é $\hat{U}$-conjugada a uma matriz essencialmente diagonal J e os autovalores não-nulos de A são iguais a $\pm i$ vezes o valor absoluto das entradas de J.*

Demonstração: Seja $a_{ij} \in M_{n_i,n_j}(\mathbb{C})$ o único bloco não nulo na linha bloco i e coluna bloco j. A decomposição em valores singulares (SVD[1], veja por exemplo [27] p. 157) de a_{ij} (juntamente com a_{ji}) fornece matrizes $D_i \in \mathbb{U}(n_i)$ e $D_j \in \mathbb{U}(n_j)$ tal que

$$a_{ij} = D_i \Sigma D_j^*,$$

onde $\Sigma \in M_{n_i,n_j}$ é uma matriz "diagonal" (os elementos fora da posição ii são iguais a zero). Repetindo este procedimento para os outros blocos não-nulos, obtemos uma matriz diagonal em blocos D, cujos blocos são as matrizes D_k, com $k = 1, \ldots, s$, ou seja, $D \in \hat{U} = \mathbb{U}(n_1) \oplus \ldots \oplus U(n_s)$.

Finalmente, conjugando a matriz A por D obtemos a matriz essencialmente diagonal J desejada. Em outras palavras: o fato de A ser essencialmente bloco diagonal garante que podemos fazer o SVD em um bloco de cada vez e esse procedimento altera os outros blocos. Note que J ainda é uma matriz em blocos, cujos blocos não nulos são diagonais e as entradas são números reais. A relação $a_{ij} = -a_{ji}^*$ implica que $j_{ij} = -j_{ji}^*$.

Agora, como J é essencialmente diagonal temos que J é semelhante (via permutação de linhas e colunas) a uma soma direta de matrizes anti-Hemitianas 2×2 da forma

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & a_k \\ -a_k & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_k \geq 0 \tag{3.13}$$

com autovalores $\pm i|a_k|$. Como A e J são semelhantes, estes também são os autovalores de A. □

Passamos agora para a discussão sobre equigeodésicas fechadas. Trataremos do caso de equigeodésicas associadas aos vetores equigeodésicos cuja representação matricial é dada por uma matriz *essencialmente bloco diagonal*.

[1]Seja $M \in M_{n,m}(\mathbb{C})$. Então existe uma decomposição da forma $M = U\Sigma V^*$, onde $U \in \mathbb{U}(n)$, $V \in \mathbb{U}(m)$ e Σ é uma matriz diagonal (ie, as entradas ij são iguais a zero se $i \neq j$) com entradas reais não negativas.

Para tanto, analisaremos o campo de Killing associado com um vetor equigeodésico. Descreveremos uma família de vetores equigeodésicos cujas equigeodésicas associadas são necessariamente fechadas. Iniciamos com a seguinte definição:

Definição 3.3.14. *Seja M uma variedade diferenciável. Um campo de vetores $T \in \mathfrak{X}(M)$ é* fechado *se toda trajetória for fechada.*

Seja $\mathbb{F}_\Theta$ uma variedade flag. Dado um vetor $X \in \mathfrak{m}_\Theta$, podemos definir (cf. [3]) um campo de Killing X^* associado ao vetor X por

$$X^*(p) = \frac{d}{dt}((\exp tX) \cdot p)\Big|_{t=0}.$$

Se X é um vetor geodésico então a correspondente geodésica homogênea γ é a trajetória de X^* que passa pela origem o, isto é, $\gamma(t) = \phi_t(o)$ onde ϕ_t é o fluxo de X^*. Se X^* for fechado, então γ também será fechada.

Note que X^* é um campo de Killing com respeito a cada métrica $SU(n)$-invariante em $\mathbb{F}_\Theta$. De fato, o fluxo de X^* é dado por $\phi_t(\cdot) = L_{(\exp tX)}(\cdot)$ onde L_a ($a \in SU(n)$) é a translação à esquerda, que é uma isometria. Portanto o sub grupo a 1-parâmetro de transformações definido por $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subset SU(n)$ consiste somente de isometrias. Topologicamente, este grupo é aberto ou fechado se for ($\mathbb{R}$) ou (S^1), respectivamente.

Teorema 3.3.15. *(Flores et al, [20]) Seja T um campo de Killing em uma variedade riemanniana (M, g). Então T é fechado se, e somente se, o grupo a 1-parâmetro de isometrias $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subset Iso(M, g)$ for S^1.*

Teorema 3.3.16. *Seja $X \in \mathfrak{m}_\Theta$ um vetor equigeodésico na variedade flag $\mathbb{F}(n; n_1, \ldots, n_s)$ representada pela matriz ant-Hermitiana e essencialmente bloco diagonal A.*

Então o correspondente campo de Killing é fechado se, e somente se, os autovalores de A são comensuráveis. Isto, em particular, implica que a correspondente equigeodésica $\gamma(t) = \exp(tX) \cdot o$ é fechada.

Demonstração: De acordo com o Lema 3.3.13, sejam $i\theta_1, \ldots, i\theta_n$ os autovalores de A. O sub-grupo a 1-parâmetro de isometrias gerado por X^* é $\exp tA = U(\exp tD)U^*$, onde $U \in \mathbb{U}(n)$ e $D = diag(i\theta_1, \ldots, i\theta_n)$. Evidentemente este grupo é fechado (i.e. difeomorfo a S^1) se, e somente se, $\theta_1, \ldots, \theta_n$ são comensuráveis. Por outro lado, pelo Teorema 3.3.15 este grupo é fechado se, e somente se, o campo X^* é fechado. □

Observação 3.3.17. *Se no Teorema 3.3.16 os autovalores* não *são comensuráveis, o campo de Killing não é fechado e não sabemos se a equigeodésica γ é fechada ou não na variedade flag.*

Observação 3.3.18. *No caso de variedades flag maximais, este teorema estabelece uma conexão entre equigeodésicas e toros equiharmônicos descritos em [35]. De fato, analisando a construção de tais toros, vemos que estas curvas estão sobre tais toros equiharmônicos*

Exemplo 3.3.19. *Considere a variedade flag maximal $SU(4)/T$ e o vetor equigeodésico*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ -\bar{x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & -\bar{y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de X são $\pm i|x|$ e $\pm i|y|$. A equigeodésica determinada por X é fechada se x e y são comensuráveis, por exemplo, se $x = 2$ e $y = 3$.

3.4 Variedades flag generalizadas com dois somandos isotrópicos

Nesta seção exibiremos algumas famílias de vetores equigeodésicos em variedades flag generalizadas com dois somandos isotrópicos, isto é, a representação da isotropia se decompõe em exatamente duas componentes não equivalentes. A principal motivação para tratar esse caso é a possibilidade de simplificar os sistemas algébricos envolvidos, em algumas situações. Como fizemos anteriormente, daremos ênfase aos vetores equigeodésicos que podem ser obtidos a partir da estrutura de álgebra de Lie subjacente.

Iniciamos com a descrição de tais variedades flag e dos componentes irredutíveis da representação da isotropia em termos da teoria de Lie. Embora não tenhamos uma descrição matricial destes componentes irredutíveis como no caso de flags de $SU(n)$, sua descrição pode ser dada explicitamente.

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa e simples e Π um sistema de raízes e $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ um sistema simples de raízes. Seja $\mu = \sum_{i=1}^{l} m_i \alpha_i$ a raiz máxima de Π, isto é, a única raiz tal que para qualquer outra raiz $\alpha = \sum_{i=1}^{l} c_i \alpha_i$, temos que $c_i \leq m_i$ para todo i. Os coeficientes $m_i \in \mathbb{Z}$ são chamados de altura da raiz simples α_i.

Lembre que dado um sistema simples de raízes Σ para $\mathfrak{g}$, a variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$ é determinada por Θ, onde $\Theta \subset \Sigma$. De acordo com [1], uma variedade flag generalizada possui dois somandos isotrópicos se, e somente se, $\Theta = \Sigma - \{\alpha_{i_0}\}$ onde α_{i_0} é uma raiz simples de altura dois, ou seja, $m_{i_0} = 2$. Em outras palavras, o conjunto das raízes simples complementares Σ_M possui uma única raiz com altura 2, isto é, $\Sigma_M = \{\alpha_{i_0}\}$.

Seja α_{i_0} uma raiz simples de altura dois, $\Theta = \Sigma - \{\alpha_{i_0}\}$ e considere $\mathbb{F}_\Theta$ a variedade flag com dois somandos isotrópicos correspondente. Neste caso, temos $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, onde $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ são os componentes irredutíveis da representação da isotropia. Para descrever os componentes irredutíveis $\mathfrak{m}_i$, $i = 1, 2$ usaremos a construção dada em [29].

Para $n = 1, 2$ definimos

$$R^+(\alpha_{i_0}, n) = \{\alpha \in \Pi^+ : \alpha = \sum_{i=1}^{l} c_j\alpha_j,\ c_{i_0} = n\}, \tag{3.14}$$

e definimos os subespaços $\mathfrak{m}_n$ de $\mathfrak{u}$ por

$$\mathfrak{m}_n = \sum_{\alpha \in R^+(\alpha_{i_0}, n)} \mathfrak{u}_\alpha, \tag{3.15}$$

e obtemos a decomposição $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ e $R_M^+ = R^+(\alpha_{i_0}, 1) \cup R^+(\alpha_{i_0}, 2)$.

Teorema 3.4.1 ([29])**.** *Cada subespaço $\mathfrak{m}_n$, $n = 1, 2$ é uma componente irredutível da representação da isotropia. Além do mais, estes componentes são não-equivalentes.*

O próximo resultado nos fornece a relação entre os componentes irredutíveis via o colchete de Lie.

Lema 3.4.2 ([29])**.** *Seja $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta = U/K_\Theta$ uma variedade flag generalizada com dois somandos isotrópicos. Decomponha a álgebra de Lie de U como $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$. As seguintes relações valem:*

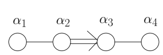
$$[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{m}_1,\ \ [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{k}_\Theta,\ \ [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}_\Theta.$$

As variedades flag generalizadas com dois somandos isotrópicos são listadas na Tabela 3.1. Para uma completa classificação de todas as variedades flag generalizadas usando *diagrama de Dynkin pintado*, veja [12].

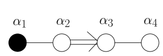
Tabela 3.1:

G/K	Dimensão
$SO(2l+1)/U(p) \times SO(2(l-p)+1)$	$4pl - 3p^2 + p$
$Sp(l)/U(p) \times Sp(l-p)$	$4pl - 3p^2 + p$
$SO(2l)/U(p) \times SO(2(l-p))$	$4pl - 3p^2 - p$
$E_6/SU(5) \times SU(2) \times U(1)$	50
$E_6/SU(6) \times U(1)$	42
$E_7/SO(10) \times SU(2) \times U(1)$	84
$E_7/SO(12) \times U(1)$	66
$E_7/SU(7) \times U(1)$	84
$E_8/E_7 \times U(1)$	114
$E_8/SO(14) \times U(1)$	156
$F_4/SO(7) \times U(1)$	30
$F_4/Sp(3) \times U(1)$	30
$G_2/U(2)$	10

Exemplo 3.4.3. *Vamos exibir as variedades flag do grupo excepcional F_4 com dois somandos isotrópicos. Seja $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ o conjunto de raízes simples da álgebra de Lie de F_4 tal que a raiz máxima é dada por $\mu = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$. O diagrama de Dynkin da álgebra de Lie de F_4 é*



Descreveremos a variedade flag associada com $\Theta = \Sigma - \{\alpha_1\}$. Pintamos de preto o nó correspondente araiz α_1, isto é,

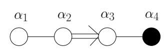


e seja $\mathfrak{k}'_\Theta = \langle\Theta\rangle$ a parte semi simples de $\mathfrak{k}_\Theta$. Observamos que o diagrama de Dynkin da parte semissimples é composta pelos nós de cor branca, no caso o diagrama de Dynkin da álgebra de Lie de $\mathfrak{sp}(3)$. Portanto,

$$\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{sp}(3),$$

onde $\mathfrak{u}(1)$ é representado pelo nó pintado de preto. Veja [12] para mais detalhes. A variedade flag generalizada correspondente é $F_4/Sp(3) \times U(1)$.

Se consideramos $\Theta = \Sigma - \{\alpha_4\}$, pintamos de preto o nó correspondente a raiz α_4. Temos então



e

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{so}(7).$$

A variedade flag generalizada correspondente é $F_4/SO(7) \times U(1)$.

O próximo resultado fornece uma versão da Proposição 3.2.3 para variedades flag com dois somandos isotrópicos. Como o número de parâmetros de uma métrica invariante numa variedade flag é igual ao número de componentes irredutíveis da representação isotrópica, denotaremos uma métrica invariante por $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$. Numa variedade flag com dois somandos isotrópicos, podemos escrever um vetor $X \in \mathfrak{m}_\Theta$ como $X = X_{\mathfrak{m}_1} + X_{\mathfrak{m}_2}$ com $X_{\mathfrak{m}_i} \in \mathfrak{m}_i$, $i = 1, 2$.

Proposição 3.4.4. *Seja $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ uma variedade flag com dois somandos isotrópicos. Um vetor $X = X_{\mathfrak{m}_1} + X_{\mathfrak{m}_2} \in \mathfrak{m}_\Theta$ é equigeodésico se, e somente se,*

$$[X_{\mathfrak{m}_1}, X_{\mathfrak{m}_2}] = 0. \tag{3.16}$$

Demonstração: Seja $\pi : \mathfrak{u} \to \mathfrak{m}_\Theta$ a projeção sobre $\mathfrak{m}_\Theta$. Então $[X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}_\Theta} = \pi([X, \Lambda X])$. Escrevendo $X = X_{\mathfrak{m}_1} + X_{\mathfrak{m}_2} \in \mathfrak{m}_\Theta$ temos:

$$\begin{aligned}
[X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}_\Theta} &= \pi([X, \Lambda X]) \\
&= \pi([X_{\mathfrak{m}_1} + X_{\mathfrak{m}_2}, \Lambda X_{\mathfrak{m}_1} + \Lambda X_{\mathfrak{m}_2}]) \\
&= \pi([X_{\mathfrak{m}_1} + X_{\mathfrak{m}_2}, \lambda_1 X_{\mathfrak{m}_1} + \lambda_2 X_{\mathfrak{m}_2}]) \\
&= (\lambda_2 - \lambda_1)\pi([X_{\mathfrak{m}_1}, X_{\mathfrak{m}_2}]) \\
&= (\lambda_2 - \lambda_1)[X_{\mathfrak{m}_1}, X_{\mathfrak{m}_2}],
\end{aligned}$$

pois, de acordo com o Lema 3.4.2 temos que $[X_{\mathfrak{m}_1}, X_{\mathfrak{m}_2}] \in \mathfrak{m}_1$. Mas, X é equigeodésico se, e somente se, $[X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}_\Theta} = 0$ para cada métrica invariante Λ e isso ocorre se, e somente se, $[X_{\mathfrak{m}_1}, X_{\mathfrak{m}_2}] = 0$. $\square$

Exemplo 3.4.5. *De acordo com o Exemplo 3.4.3, a variedade flag generalizada $\mathbb{F}_\Theta = F_4/SO(7) \times U(1)$ é associada com $\Theta = \Sigma - \{\alpha_4\}$, onde $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ é um sistema simples de raízes para a álgebra de Lie de F_4. Considere as raízes positivas $\beta_1 = \alpha_4$*

e $\gamma_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$. *Analisando os coeficientes de* α_4 *nas raízes* β_1 *e* γ_1, *vemos que* $\mathfrak{u}_{\beta_1} \subset \mathfrak{m}_1$ *e* $\mathfrak{u}_{\gamma_1} \subset \mathfrak{m}_2$. *Além do mais,* $\beta_1 \pm \gamma_1$ *não é uma raiz. Sejam* $X_1 \in \mathfrak{u}_{\beta_1}, X_2 \in \mathfrak{u}_{\gamma_1}$ *vetores arbitrários.*

Escrevendo os vetores X_1, X_2 *na base* $\{A_\alpha, S_\alpha\ , \alpha \in \Pi_M^+\}$ *de* $\mathfrak{m}_\Theta$ *obtemos* $X_1 = a_1 A_{\beta_1} + a_2 S_{\beta_1}$ *e* $X_2 = b_1 A_{\gamma_1} + b_2 S_{\gamma_1}$. *Portanto, temos*

$$[X_1, X_2] = a_1 b_1 [A_{\beta_1}, A_{\gamma_1}] + a_1 b_2 [A_{\beta_1}, S_{\gamma_1}] + a_2 b_1 [S_{\beta_1}, A_{\gamma_1}] + a_2 b_2 [S_{\beta_1}, S_{\gamma_1}].$$

Como $\beta_1 \pm \gamma_1$ *não é uma raiz, as constantes de estrutura são nulas, isto é,* $m_{\beta_1,\gamma_1} = m_{-\beta_1,\gamma_1} = m_{\beta_1,-\gamma_1} = 0$. *Usando as relações (1.9) podemos verificar que* $[A_{\beta_1}, A_{\gamma_1}] = [A_{\beta_1}, S_{\gamma_1}] = [S_{\beta_1}, A_{\gamma_1}] = [S_{\beta_1}, S_{\gamma_1}] = 0$ *e assim* $[X_1, X_2] = 0$ *independentemente dos coeficientes de* X_1 *e* X_2. *Portanto, qualquer vetor* $X = X_1 + X_2 \in \mathfrak{u}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_1}$ *é um vetor equigeodésico. Note que neste exemplo, os vetores equigeodésicos obtidos dependem somente da estrutura da álgebra de Lie de* F_4.

Exemplo 3.4.6. *Novamente considere a variedade flag generalizada* $F_4/SO(7) \times U(1)$ *como no exemplo anterior. Fixamos as raízes positivas* $\gamma_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$, $\gamma_2 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$, $\beta_3 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ *e* $\beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$.

Analisando os coeficientes da raiz simples α_4 *nas raízes* γ_1, γ_2, β_3, β_4 *podemos ver que* $\mathfrak{u}_{\beta_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_4} \subset \mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{u}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_2} \subset \mathfrak{m}_2$. *Temos que* $\beta_1 \pm \gamma_3$, $\beta_2 \pm \gamma_4$, $\gamma_1 + \beta_4$, $\gamma_2 + \beta_3$ *não são raízes e* $\gamma_1 - \beta_4$, $\gamma_2 - \beta_3$ *são raízes. Além do mais,* $\gamma_1 - \beta_4 = \gamma_2 - \beta_3$. *Denote a raiz* $\gamma_1 - \beta_4$ *por* β_8.

Sejam $X \in \mathfrak{u}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_2}$ *e* $Y \in \mathfrak{u}_{\beta_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_4}$. *Escrevemos*

$$X = a_1 A_{\gamma_1} + a_2 S_{\gamma_1} + a_3 A_{\gamma_2} + a_4 S_{\gamma_2} \tag{3.17}$$

$$Y = b_1 A_{\beta_3} + b_2 S_{\beta_3} + b_3 A_{\beta_4} + b_4 S_{\beta_4} \tag{3.18}$$

Usando as relações (1.9) obtemos

$$\begin{aligned} [X, Y] \;=\; & (m_{-\gamma_1,\beta_4}(a_1 b_3 + a_2 b_4) + m_{-\gamma_2,\beta_3}(a_3 b_1 + a_4 b_2)) A_{\beta_8} \\ & + (m_{\gamma_1,-\beta_4}(a_1 b_4 - a_2 b_3) + m_{\gamma_2,-\beta_3}(a_3 b_2 - a_4 b_1)) S_{\beta_8}, \end{aligned}$$

onde $m_{-\gamma_1,\beta_4} = -m_{\gamma_1,-\beta_4}$ *e* $m_{-\gamma_2,\beta_3} = -m_{\gamma_2,-\beta_3}$ *são constantes não-nulas. Denote por* $c_1 = m_{-\gamma_1,\beta_4}$ *e* $c_2 = m_{-\gamma_2,\beta_3}$. *Então* $[X, Y] = 0$ *se, e somente se, os coeficientes de* X *e* Y *satisfazem o sistema de equações:*

$$\begin{cases} c_1(a_1 b_3 + a_2 b_4) + c_2(a_3 b_1 + a_4 b_2) = 0 \\ -c_1(a_1 b_4 - a_2 b_3) - c_2(a_3 b_2 - a_4 b_1) = 0 \end{cases}$$

Uma solução não-trivial deste sistema é dado por

$$a_1 = \frac{-c_2(b_3a_3b_1 + b_3a_4b_2 + a_3b_2b_4 - a_4b_1b_4)}{(b_3^2 + b_4^2)c_1},$$

$$a_2 = \frac{c_2(b_3a_3b_2 - b_3a_4b_1 - a_3b_1b_4 - a_4b_2b_4)}{c_1(b_3^2 + b_4^2)},$$

$$b_3 \neq 0, b_4 \neq 0$$

e os outros coeficientes são livres. Portanto, considerando $X + Y$ podemos construir um vetor equigeodésco. Note que neste exemplo, somente a estrutura da álgebra de Lie não foi suficiente para determinar se um vetor era equigeodésico ou não. Também foi necessário resolver um sistema algébrico não linear.

A próxima proposição fornece uma família de vetores equigeodésicos em variedades flag $\mathbb{F}_\Theta$ com dois somandos isotrópicos. Tais famílias de vetores equigeodésicos dependem somente da estrutura de álgebra de Lie de $\mathfrak{u}$.

Proposição 3.4.7. *Seja $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ uma variedade flag generalizada com dois somandos isotrópicos determinada por $\Theta = \Sigma - \{\alpha_0\}$, com α_0 sendo uma raiz de altura dois. Considere raízes positivas $\beta_1, \ldots, \beta_k \in R^+(\alpha_0, 1)$ e $\gamma_1, \ldots, \gamma_p \in R^+(\alpha_0, 2)$. Se $\beta_i \pm \gamma_j$ não é uma raiz $(i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, p)$ então todos os vetores no subespaço $\mathfrak{u}_{\beta_1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{u}_{\beta_k} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_p}$ são vetores equigeodésicos.*

Demonstração: Seja $X = X_{\mathfrak{m}_1} + X_{\mathfrak{m}_2}$ onde $X_{\mathfrak{m}_1} = X_{\beta_1} + \ldots + X_{\beta_k}$ representa sua $\mathfrak{m}_1$-parte e $X_{\mathfrak{m}_2} = X_{\gamma_1} + \ldots + X_{\gamma_p}$ representa sua $\mathfrak{m}_2$-parte, com $X_{\beta_i} \in \mathfrak{u}_{\beta_i}$, $X_{\gamma_j} \in \mathfrak{u}_{\gamma_j}$. Agora,

$$\begin{aligned}
[X_{\mathfrak{m}_1}, X_{\mathfrak{m}_2}] &= [X_{\beta_1} + \ldots + X_{\beta_k}, X_{\gamma_1} + \ldots + X_{\gamma_p}] \\
&= [X_{\beta_1}, X_{\gamma_1}] + \ldots + [X_{\beta_1}, X_{\gamma_p}] + \ldots + [X_{\beta_k}, X_{\gamma_1}] + \ldots + [X_{\beta_k}, X_{\gamma_p}].
\end{aligned}$$

Desde que $\beta_i \pm \gamma_j$ temos $m_{\beta_i,\gamma_j} = m_{-\beta_i,\gamma_j} = m_{\beta_i,-\gamma_j} = 0$. Usando as relações (1.9) vemos que $[X_{\beta_i}, X_{\gamma_j}] = 0$, $i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, p$. Portanto, $[X_{\mathfrak{m}_1}, X_{\mathfrak{m}_2}] = 0$ e pela Proposição 3.4.4 temos que X é um vetor equigeodésico. $\square$

3.4.1 Variedades flag de grupos de Lie excepcionais

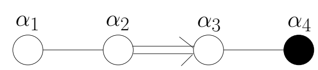
Nesta seção descreveremos famílias de vetores equigeodésicos em algumas variedades flag de grupos de Lie excepcionais. Classificaremos as raízes positivas que satisfazem as hipóteses da Proposição 3.4.7 analisando o conjunto de raízes de uma álgebra de Lie excepcional.

Tal classificação é feita nas variedades flag $F_4/SO(7)\times U(1)$, $E_6/SU(5)\times SU(2)\times U(1)$ e uma classificação parcial é fornecida na variedade flag $E_7/SO(10)\times SU(2)\times U(1)$. Classificaremos também as variedades flag de grupos excepcionais com dois somandos isotrópicos que só admitem vetores equigeodésicos triviais.

Primeiramente, classificaremos as raízes que satisfazem as hipóteses da Proposição 3.4.7.

a) $F_4/SO(7)\times U(1)$.

Seja $\Sigma=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ um sistema de raízes simples para a álgebra de Lie de F_4 tal que a raiz máxima é dada por $\mu=2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4$. A variedade flag $\mathbb{F}_\Theta=F_4/SO(7)\times U(1)$ é determinada por $\Theta=\Sigma-\{\alpha_4\}$. O diagrama de Dynkin pintado para $\mathbb{F}_\Theta$ é



Para simplificar a notação, denotamos uma raiz positiva somente pelos seus coeficientes, isto é, se $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$ é uma raiz positiva, então iremos escrever somente $\beta=(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

Note que o conjunto $R^+(\alpha_4,1)$ é o conjunto das raízes positivas cujo coeficiente da raiz α_4 é igual a 1 (e de forma análoga para $R^+(\alpha_4,2)$). Uma vez que podemos determinar todas as raízes positivas de F_4, estes conjuntos possuem uma descrição de explícita.

Considere as raízes positivas

$$\begin{array}{lll}
\beta_1=(0,0,0,1) & \beta_2=(0,0,1,1) & \beta_3=(0,1,1,1)\\
\beta_4=(1,1,1,1) & \beta_5=(0,1,2,1) & \beta_6=(1,1,2,1)\\
\beta_7=(1,2,2,1) & \beta_8=(1,2,3,1) & \gamma_1=(2,3,4,2)\\
\gamma_2=(1,3,4,2) & \gamma_3=(1,2,4,2) & \gamma_4=(1,2,2,2)\\
\gamma_5=(1,1,2,2) & \gamma_6=(0,1,2,2) & \gamma_7=(1,2,3,2).
\end{array}$$

Temos que $R^+(\alpha_4,1)=\{\beta_1\ldots\beta_8\}$, $R^+(\alpha_4,2)=\{\gamma_1,\ldots\gamma_7\}$ e segundo o Teorema 3.4.1 os componentes irredutíveis da decomposição $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_1\oplus\mathfrak{m}_2$ são dadas por

$$\mathfrak{m}_1=\sum_{\alpha\in R^+(\alpha_4,1)}\mathfrak{u}_\alpha,\qquad\qquad \mathfrak{m}_2=\sum_{\alpha\in R^+(\alpha_4,2)}\mathfrak{u}_\alpha.$$

Proposição 3.4.8. *Considere a variedade flag $\mathbb{F}_\Theta=F_4/SO(7)\times U(1)$. Os subespaços de $\mathfrak{m}_\Theta$ que satisfazem a hipótese da Proposição 3.4.7 são listados na Tabela 3.2. Em particular, todos os vetores nestes subespaços são vetores equigeodésicos.*

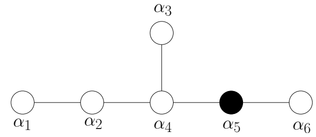
Demonstração: A demonstração consiste na análise do sistema de raízes da álgebra de Lie de F_4, juntamente com as raízes que compõe cada componente irredutível da representação da isotropia. □

Tabela 3.2:

$\mathfrak{u}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_2} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_1}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_1}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_2} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_1}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_2}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_7} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_1}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_3}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_8} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_2}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_4}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_7} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_3}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_5}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_8} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_7} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_4}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_6}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_7}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_8}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_2}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_3}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_2} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_5}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_5}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_4}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_2} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_6}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_6}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_7}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_7}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_8}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_8}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_7} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_8}$

b) $E_6/SU(5) \times SU(2) \times U(1)$.

Seja $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\, \alpha_5, \alpha_6\}$ um sistema simples de raízes para a álgebra de Lie de E_6 tal que a raiz máxima é dada por $\mu = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6$. A variedade flag $\mathbb{F}_\Theta = E_6/SU(5) \times SU(2) \times U(1)$ é determinada por $\Theta = \Sigma - \{\alpha_5\}$. O diagrama de Dynkin pintado para $\mathbb{F}_\Theta$ é



Como anteriormente, para simplificar a notação, denotamos uma raiz positiva somente pelos seus coeficientes. Uma vez determinada todas as raízes positivas de E_6, podemos determinar precisamente os conjuntos $R^+(\alpha_5, 1)$ e $R^+(\alpha_5, 2)$.

Considere as raízes positivas

$$
\begin{array}{lll}
\beta_1 = (0,0,0,0,1,0) & \beta_2 = (0,0,0,1,1,0) & \beta_3 = (0,0,0,0,1,1) \\
\beta_4 = (0,1,0,1,1,0) & \beta_5 = (0,0,1,1,1,0) & \beta_6 = (0,0,0,1,1,1) \\
\beta_7 = (1,0,1,1,1,0) & \beta_8 = (0,1,1,1,1,0) & \beta_9 = (0,1,0,1,1,1) \\
\beta_{10} = (0,0,1,1,1,1) & \beta_{11} = (1,1,1,1,1,0) & \beta_{12} = (1,0,1,1,1,1) \\
\beta_{13} = (0,1,1,2,1,0) & \beta_{14} = (0,1,1,1,1,1) & \beta_{15} = (1,1,1,2,1,0) \\
\beta_{16} = (1,1,1,1,1,1) & \beta_{17} = (0,1,1,2,1,1,1) & \beta_{18} = (1,1,2,2,1,0) \\
\beta_{19} = (1,1,1,2,1,1) & \beta_{20} = (1,1,2,2,1,1) & \gamma_1 = (1,2,2,3,2,1) \\
\gamma_2 = (1,1,2,3,2,1) & \gamma_3 = (1,1,2,2,2,1) & \gamma_4 = (1,1,1,2,2,1) \\
\gamma_5 = (0,1,1,2,2,1). & &
\end{array}
$$

Temos que $R^+(\alpha_5, 1) = \{\beta_1 \dots \beta_{20}\}$ e $R^+(\alpha_5, 2) = \{\gamma_1, \dots \gamma_7\}$.

Proposição 3.4.9. *Considere a variedade flag $\mathbb{F}_\Theta = E_6/SU(5) \times SU(2) \times U(1)$. Os subespaços de $\mathfrak{m}_\Theta$ que satisfazem a hipótese da Proposição 3.4.7 são listados nas Tabelas 3.3 e 3.4. Em particular, todos os vetores nestes subespaços são vetores equigeodésicos.*

Tabela 3.3:

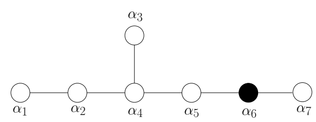
$\mathfrak{u}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{12}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{10}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_7} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_2} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_1}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{16}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{14}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{11}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_9} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_8} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_1}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{19}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{17}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{15}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{13}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_9} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_2}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{20}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{18}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{17}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{14}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{13}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{10}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_8} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_5}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{20}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{19}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{18}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{16}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{15}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{12}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{11}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_7}$	

Tabela 3.4:

$\mathfrak{u}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_3} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_2}$	$\mathfrak{u}_{\beta_2} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_6} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_3}$	$\mathfrak{u}_{\beta_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{10}} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_4}$
$\mathfrak{u}_{\beta_7} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{12}} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_5}$	$\mathfrak{u}_{\beta_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_9} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_3}$	$\mathfrak{u}_{\beta_8} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{14}} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_4}$
$\mathfrak{u}_{\beta_{11}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{16}} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_5}$	$\mathfrak{u}_{\beta_{13}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{17}} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_4}$	$\mathfrak{u}_{\beta_{15}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{19}} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_5}$
$\mathfrak{u}_{\beta_{18}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{20}} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_5}$		

c) $E_7/SO(10) \times SU(2) \times U(1)$.

Seja $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\, \alpha_5, \alpha_6\, \alpha_7\}$ um sistema simples de raízes para a álgebra de Lie de E_7 tal que a raiz máxima é dada por $\mu = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$. A variedade flag $\mathbb{F}_\Theta = E_7/SO(10) \times SU(2) \times U(1)$ é determinada por $\Theta = \Sigma - \{\alpha_6\}$. O diagrama de Dynkin pintado para $\mathbb{F}_\Theta$ é



Como antes, para simplificar a notação, denotamos uma raiz positiva somente pelos seus coeficientes. Uma vez determinada todas as raízes positivas de E_7, podemos determinar precisamente os conjuntos $R^+(\alpha_6, 1)$ e $R^+(\alpha_6, 2)$.

Considere as raízes positivas

$$\begin{array}{lll}
\beta_1 = (0,0,0,0,0,1,0) & \beta_2 = (0,0,0,0,1,1,0) & \beta_3 = (0,0,0,0,0,1,1) \\
\beta_4 = (0,0,0,1,1,1,0) & \beta_5 = (0,0,0,0,1,1,1) & \beta_6 = (0,1,0,1,1,1,0) \\
\beta_7 = (0,0,1,1,1,1,0) & \beta_8 = (0,0,0,1,1,1,1) & \beta_9 = (1,0,1,1,1,1,0) \\
\beta_{10} = (0,1,1,1,1,1,0) & \beta_{11} = (0,1,0,1,1,1,1) & \beta_{12} = (0,0,1,1,1,1,1) \\
\beta_{13} = (1,1,1,1,1,1,0) & \beta_{14} = (1,0,1,1,1,1,1) & \beta_{15} = (0,1,1,2,1,1,0) \\
\beta_{16} = (0,1,1,1,1,1,1) & \beta_{17} = (1,1,1,2,1,1,0) & \beta_{18} = (1,1,1,1,1,1,1) \\
\beta_{19} = (0,1,1,2,2,1,0) & \beta_{20} = (0,1,1,2,1,1,1) & \beta_{21} = (1,1,2,2,1,1,0) \\
\beta_{22} = (1,1,1,2,2,1,0) & \beta_{23} = (1,1,1,2,1,1,1) & \beta_{24} = (0,1,1,2,2,1,1) \\
\beta_{25} = (1,1,2,2,2,1,0) & \beta_{26} = (1,1,2,2,1,1,1) & \beta_{27} = (1,1,1,2,2,1,1) \\
\beta_{28} = (1,1,2,3,2,1,0) & \beta_{29} = (1,1,2,2,2,1,1) & \beta_{30} = (1,2,2,3,2,1,0) \\
\beta_{31} = (1,1,2,3,2,1,1) & \beta_{32} = (1,2,2,3,2,1,1) & \gamma_1 = (2,2,3,4,3,2,1) \\
\gamma_2 = (1,2,3,4,3,2,1) & \gamma_3 = (1,2,2,4,3,2,1) & \gamma_4 = (1,2,2,3,3,2,1) \\
\gamma_5 = (1,1,2,3,3,2,1) & \gamma_6 = (1,2,2,3,2,2,1) & \gamma_7 = (1,1,2,3,2,2,1) \\
\gamma_8 = (1,1,2,2,2,2,1) & \gamma_9 = (1,1,1,2,2,2,1) & \gamma_{10} = (0,1,1,2,2,2,1).
\end{array}$$

Temos que $R^+(\alpha_6, 1) = \{\beta_1 \ldots \beta_{32}\}$ e $R^+(\alpha_6, 2) = \{\gamma_1, \ldots \gamma_{10}\}$.

Proposição 3.4.10. *Considere a variedade flag $\mathbb{F}_\Theta = E_7/SO(10) \times SU(2) \times U(1)$. Uma classificação parcial dos espaços de raízes que satisfazem a Proposição 3.4.7 são listados nas tabelas 3.5, 3.7 e 3.6. Em particular, todos os vetores nestes subespaços são vetores geodésicos.*

Tabela 3.5:

$\mathfrak{u}_{\beta_1}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_3}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_1}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_2}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_3}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_4}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_5}$	$\mathfrak{u}_{\beta_2}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_5}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_1}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_2}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_3}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_6}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_7}$
$\mathfrak{u}_{\beta_4}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_8}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_1}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_2}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_4}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_6}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_8}$	$\mathfrak{u}_{\beta_6}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{11}}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_1}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_2}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_5}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_7}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_9}$
$\mathfrak{u}_{\beta_7}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{12}}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_1}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_3}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_4}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_6}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_9}$	$\mathfrak{u}_{\beta_9}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{14}}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_2}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_3}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_4}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_6}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_{10}}$
$\mathfrak{u}_{\beta_{10}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{16}}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_1}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_3}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_5}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_7}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_9}$	$\mathfrak{u}_{\beta_{13}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{18}}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_2}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_3}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_5}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_7}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_{10}}$
$\mathfrak{u}_{\beta_{15}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{20}}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_1}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_4}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_5}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_8}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_9}$	$\mathfrak{u}_{\beta_{17}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{23}}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_2}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_4}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_5}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_8}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_{10}}$
$\mathfrak{u}_{\beta_{19}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{24}}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_1}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_6}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_7}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_8}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_9}$	$\mathfrak{u}_{\beta_{21}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{26}}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_3}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_4}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_5}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_9}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_{10}}$
$\mathfrak{u}_{\beta_{22}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{27}}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_2}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_6}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_7}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_8}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_{10}}$	$\mathfrak{u}_{\beta_{25}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{29}}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_3}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_6}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_7}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_9}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_{10}}$
$\mathfrak{u}_{\beta_{28}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{31}}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_4}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_6}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_8}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_9}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_{10}}$	$\mathfrak{u}_{\beta_{30}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{32}}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_5}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_7}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_8}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_9}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_{10}}$

Tabela 3.6:

$\mathfrak{u}_{\gamma_1}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{24}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{20}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{19}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{16}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{15}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{12}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{11}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{10}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_8}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_7}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_6}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_5}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_4}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_3}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_2}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_1}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_2}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{27}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{23}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{22}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{18}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{17}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{14}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{13}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{11}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_9}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_8}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_6}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_5}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_4}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_3}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_2}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_1}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_3}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{29}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{26}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{25}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{21}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{18}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{13}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{16}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{14}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{11}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{10}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_9}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_7}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_5}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_3}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_2}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_1}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_4}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{32}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{28}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{26}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{23}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{21}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{20}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{17}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{15}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{18}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{12}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_9}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_8}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_7}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_4}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_3}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_1}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_5}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{32}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{30}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{26}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{23}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{21}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{20}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{18}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{17}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{16}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{15}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{13}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{11}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{10}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_6}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_3}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_1}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_6}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{31}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{29}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{28}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{27}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{25}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{24}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{22}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{19}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{14}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{12}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_9}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_8}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_7}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_5}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_4}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_2}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_7}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{32}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{30}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{29}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{27}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{25}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{24}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{22}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{19}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{18}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{16}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{13}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{11}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{10}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_6}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_5}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_2}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_8}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{32}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{31}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{30}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{28}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{27}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{22}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{21}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{23}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{20}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{19}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{17}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{15}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{11}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_8}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_6}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_4}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_9}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{32}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{31}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{30}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{29}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{28}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{26}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{25}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{24}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{21}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{20}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{19}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{16}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{15}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{12}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{10}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_7}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_{10}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{32}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{31}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{30}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{29}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{28}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{27}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{26}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{25}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{23}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{22}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{21}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{18}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{17}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{14}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{13}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_9}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_1}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_2}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_1}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_2}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_3}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_4}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_5}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_6}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_8}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{11}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_1}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_3}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_1}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_2}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_3}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_5}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_7}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{10}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{12}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{16}}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_1}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_4}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_1}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_3}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_4}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_7}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_8}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{12}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{15}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{20}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_1}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_5}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_1}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_3}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_6}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{10}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{11}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{15}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{16}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{20}}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_1}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_6}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_2}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_4}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_5}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_7}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_8}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{12}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{19}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{24}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_1}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_7}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_2}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_5}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_6}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{10}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{11}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{16}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{19}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{24}}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_1}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_8}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_4}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_6}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_8}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{11}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{15}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{19}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{20}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{24}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_1}\oplus\mathfrak{u}_{\gamma_9}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_7}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{10}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{12}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{15}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{16}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{19}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{20}}\oplus\mathfrak{u}_{\beta_{24}}$

Tabela 3.7:

$\mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_2} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{13}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{14}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{18}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_9}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_8} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_9} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{14}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{17}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{23}}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{11}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{13}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{17}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{18}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{23}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_2} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_8} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_9} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{14}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{22}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{27}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_5}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_7} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_2} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{11}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{13}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{18}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{22}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{27}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_8} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_8} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{11}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{17}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{22}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{27}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{23}}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_2} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_{10}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_9} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{13}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{14}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{17}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{18}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{22}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{23}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{27}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_7} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_9} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{12}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{14}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{21}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{26}}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{10}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{13}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{16}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{18}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{21}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{26}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_2} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_7} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_9} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{12}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{14}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{25}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{29}}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_7} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_2} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{10}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{13}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{16}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{18}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{25}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{29}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_9} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_7} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{10}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{12}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{16}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{21}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{25}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{26}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{29}}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_3} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_{10}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_9} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{13}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{14}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{18}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{21}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{25}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{29}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{26}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{15}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{20}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{21}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{23}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{26}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{17}}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_7} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_8} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_9} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{12}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{14}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{28}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{31}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_8} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_8} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{15}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{17}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{20}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{23}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{31}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{28}}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_9} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_7} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{12}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{15}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{20}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{21}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{26}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{28}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{31}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_{10}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_9} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{14}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{21}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{23}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{26}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{28}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{31}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{17}}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_7} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{10}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{11}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{13}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{16}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{18}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{30}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{32}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_8} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{11}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{15}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{17}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{20}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{23}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{30}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{32}}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_9} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{10}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{15}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{16}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{20}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{21}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{26}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{30}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{32}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_{10}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{13}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{17}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{18}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{21}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{23}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{26}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{30}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{32}}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_6} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_7} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_2} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{19}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{22}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{24}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{25}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{27}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{29}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_6} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_8} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_4} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_8} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{19}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{22}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{24}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{27}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{28}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{31}}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_6} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_9} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_7} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{12}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{19}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{24}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{25}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{28}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{29}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{31}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_6} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_{10}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_9} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{14}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{22}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{25}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{27}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{28}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{29}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{31}}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_7} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_8} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_6} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{11}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{22}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{24}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{27}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{30}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{32}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{19}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_7} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_9} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{10}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{16}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{24}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{29}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{30}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{32}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{25}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{19}}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_7} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_{10}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{13}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{18}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{22}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{25}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{27}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{29}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{30}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{32}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_4} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_5} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_1} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_3} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{15}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{20}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{21}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{23}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{26}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{17}}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_7} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_{10}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{13}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{18}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{22}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{25}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{27}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{29}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{30}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{32}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_8} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_9} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{15}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{19}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{20}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{24}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{28}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{30}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{31}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{32}}$
$\mathfrak{u}_{\gamma_8} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_{10}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{17}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{22}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{27}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{28}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{30}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{31}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{32}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{23}}$	$\mathfrak{u}_{\gamma_9} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma_{10}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{21}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{25}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{26}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{28}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{29}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{30}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{31}} \oplus \mathfrak{u}_{\beta_{32}}$

Uma interessante classe de variedades flag generalizadas $\mathbb{F}_\Theta$ com dois somandos isotrópicos são aquelas que na decomposição $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ temos $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{u}_\mu$, onde μ é a raiz máxima da álgebra de G. Veremos que estas variedades flag admitem somente vetores equigeodésicos triviais.

As variedades flag de grupos excepcionais com esta propriedade são:

$$F_4/Sp(3) \times U(1) \text{ com } \Theta = \Sigma - \{\alpha_1\},$$

$$E_6/SU(6) \times U(1) \text{ com } \Theta = \Sigma - \{\alpha_3\},$$

$$E_7/SO(12) \times U(1) \text{ com } \Theta = \Sigma - \{\alpha_1\},$$

$$E_8/E_7 \times U(1) \text{ com } \Theta = \Sigma - \{\alpha_8\},$$

$$G_2/U(2) \text{ com } \Theta = \Sigma - \{\alpha_1\},$$

onde o sistema de raízes simples e a raiz máxima μ para F_4, E_6, E_7 são dados acima. Para E_8 temos $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$ com $\mu = 2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+6\alpha_4+5\alpha_5+4\alpha_6+3\alpha_7+2\alpha_8$ e para G_2 temos $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ com $\mu = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$.

Estas variedades flag tem a seguinte descrição dos vetores equigeodésicos:

Proposição 3.4.11. *As variedades flag $G_2/U(2)$, $F_4/Sp(3) \times U(1)$, $E_6/SU(6) \times U(1)$, $E_7/SO(12) \times U(1)$, $E_8/E_7 \times U(1)$ admitem somente vetores equigeodésicos triviais.*

Demonstração: Provaremos esta proposição para a variedade flag $F_4/Sp(3)\times U(1)$. Cálculos análogos podem ser aplicados para as outras variedades. Seja $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ um sistema simples de raízes para F_4 com raiz máxima $\mu = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$. Como esta variedade flag é determinada por $\Theta = \Sigma - \{\alpha_1\}$ temos $R^+(\alpha_1, 2) = \{\mu\}$ e

$$\begin{aligned} R^+(\alpha_1, 1) = \{&\beta_1 = (1,0,0,0), \beta_2 = (1,1,0,0), \beta_3 = (1,1,1,0), \beta_4 = (1,1,2,0), \\ &\beta_5 = (1,1,1,1), \beta_6 = (1,2,2,0), \beta_7 = (1,1,2,1), \beta_8 = (1,2,2,1), \\ &\beta_9 = (1,1,2,2), \beta_{10} = (1,2,3,1), \beta_{11} = (1,2,2,2), \\ &\beta_{12} = (1,2,3,2), \beta_{13} = (1,2,4,2), \beta_{14} = (1,3,4,2)\}. \end{aligned}$$

Os componentes irredutíveis de $\mathfrak{m}_\Theta$ são $\mathfrak{m}_1 = \sum_{i=1}^{14} \mathfrak{u}_{\beta_i}$ e $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{u}_\mu$. Seja $X = X_{\beta_1} + \ldots + X_{\beta_{14}} + X_\mu \in \mathfrak{m}_\Theta$ um vetor não nulo, onde $X_\mu = xA_\mu + yS_\mu \in \mathfrak{u}_\mu$, $X_{\beta_i} = a_i A_{\beta_i} + b_i S_{\beta_i} \in \mathfrak{u}_{\beta_i}$, $i = 1, \ldots, 14$.

Não é difícil ver que para cada raiz β_i existe *uma única* raiz β_j tal que $\beta_i = \mu - \beta_j$. Usando este fato juntamente com as expressões do colchete de Lie dadas em (1.9), o sistema de equações associado com a equação (3.16) é:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1x + b_1y & = & 0 \\ a_1y - b_1x & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{14}x + b_{14}y & = & 0 \\ a_{14}y - b_{14}x & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.19}$$

Suponha que a $\mathfrak{m}_2$-parte de X seja não nula, isto é $x^2 + y^2 > 0$ (caso contrário, $X \in \mathfrak{m}_1$ e portanto X é um vetor equigeodésico trivial).

Considere agora as duas primeiras equações de 3.19, ou seja,

$$\begin{array}{rcl} a_1x + b_1y & = & 0 \\ a_1y - b_1x & = & 0 \end{array}. \tag{3.20}$$

Podemos pensar nas equações (3.20) como um sistema linear homogêneo 2×2 com variáveis a_1, b_1 e coeficientes x, y. Como o determinante da matriz dos coeficientes é igual a $-(x^2 + y^2) \neq 0$, pela regra de Cramer temos que $a_1 = b_1 = 0$. Repetindo este procedimento para os outros pares de equações, temos que $a_1 = b_1 = \ldots = a_{14} = b_{14} = 0$ e $X \in \mathfrak{m}_2$, ou seja, a $\mathfrak{m}_1$-parte de X é nula e X é um vetor equigeodésico trivial. $\square$

3.4.2 Variedades flag de grupos de Lie clássicos

Nesta seção trabalharemos com variedades flag de grupos de Lie clássicos com dois somandos isotrópicos. Focamos nossa atenção nas variedades flag $\mathbb{C}P^{2l-1} = Sp(l)/U(1) \times Sp(l-1)$, $SO(2l+1)/U(2) \times SO(2l-3)$ e $SO(2l)/U(2) \times SO(2l-4)$. Estas variedades tem a propriedade que na decomposição $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ temos $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{u}_\mu$, onde μ é a raiz máxima $\mathfrak{g}$.

Mostraremos que estas variedades flag admitem somente vetores equigeodésicos triviais. Inicialmente, vamos relembrar alguns conceitos básicos sobre álgebras de Lie.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples (complexa) com subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$. A restrição da forma de Cartan-Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\mathfrak{h}$ é não-degenerada, portanto, podemos definir um isomorfismo $\Phi : \mathfrak{h}^* \approx \mathfrak{h}$ via a forma de Cartan-Killing. Através deste isomorfismo induzimos uma forma bilinear em $\mathfrak{h}^*$ ainda denotada por $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Seja $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ uma raiz. Denotamos por $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ a imagem de α por Φ.

Lema 3.4.12 ([28]). *Sejam α, β raízes, com $\alpha \neq \pm\beta$. Se $\langle \alpha, \beta\rangle > 0$ então $\alpha - \beta$ é uma raiz.*

O seguinte resultado foi provado em [5] e fornece informações sobre as dimensões dos componentes irredutíveis $\mathfrak{m}_1$ e $\mathfrak{m}_2$.

Proposição 3.4.13. *As dimensões dos componentes irredutíveis $\mathfrak{m}_1$ e $\mathfrak{m}_2$ nas variedades flag $\mathbb{C}P^{2l-1} = Sp(l)/U(1)\times Sp(l-1)$, $SO(2l+1)/U(2)\times SO(2l-3)$ e $SO(2l)/U(2)\times SO(2l-4)$ são dadas na tabela abaixo:*

$\mathbb{F}_\Theta$	$\dim \mathfrak{m}_1$	$\dim \mathfrak{m}_2$
$Sp(l)/U(1)\times Sp(l-1)$	$4(l-1)$	2
$SO(2l+1)/U(2)\times SO(2l-3)$	$4(2l-3)$	2
$SO(2l)/U(2)\times SO(2l-4)$	$8(l-2)$	2

onde $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{u}_\mu$, com μ a raiz máxima de $\mathfrak{g}$.

Passamos agora ao principal resultado desta seção.

Proposição 3.4.14. *As variedades flag $\mathbb{C}P^{2l-1} = Sp(l)/U(1)\times Sp(l-1)$, $SO(2l+1)/U(2)\times SO(2l-3)$ e $SO(2l)/U(2)\times SO(2l-4)$ admitem somente vetores equigeodésicos triviais.*

Demonstração: Provaremos a proposição para $\mathbb{C}P^{2l-1} = Sp(l)/U(1)\times Sp(l-1)$. O resultado para as outras variedades são obtidos por um procedimento similar (veja observações 3.4.15 e 3.4.16). Começamos lembrando alguns fatos básicos sobre a álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(l,\mathbb{C})$. Seja $\Sigma = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$ um sistema simples de raízes para $\mathfrak{sp}(l,\mathbb{C})$ com raiz máxima $\mu = 2\alpha_1 + \ldots + 2\alpha_{l-1} + \alpha_l$. Uma subálgebra de Cartan para $\mathfrak{sp}(l,\mathbb{C})$ é dada por matrizes diagonais da forma

$$H = \begin{pmatrix} D & \\ & -D \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

onde $D = \mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_l)$. Definimos os funcionais

$$\varepsilon_j : D = \mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_l) \mapsto a_j.$$

Em termos destes funcionais as raízes simples são dadas por $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots, \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \alpha_l = 2\varepsilon_l$, veja [39]. A raiz máxima é representada pelo funcional $\mu = 2\varepsilon_1$.

Sejam α, β duas raízes e sejam H_α, H_β os respectivos duais das raízes, determinados pelas matrizes diagonais $D_\alpha = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_l)$ e $D_\beta = \mathrm{diag}(a_1', \ldots, a_l')$ como em (3.21). A forma de Cartan-Killing restrita a $\mathfrak{h}^*$ é dada por

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle = 4(l+1) \sum_{i=1}^{l} a_i a_i'. \tag{3.22}$$

O dual H_α de uma raiz positiva α determinado por D_α é dado por

$$D_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \frac{1}{4(l+1)} \mathrm{diag}(0, \ldots, 1_i, \ldots, -1_j, \ldots, 0), \tag{3.23}$$

$$D_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} = \frac{1}{4(l+1)} \mathrm{diag}(0, \ldots, 1_i, \ldots, 1_j, \ldots, 0), i \neq j, \tag{3.24}$$

$$D_{2\varepsilon_i} = \frac{1}{2(l+1)} \mathrm{diag}(0, \ldots, 1_i, \ldots, 0). \tag{3.25}$$

A variedade flag $Sp(l)/U(1) \times Sp(l-1)$ é determinada por $\Theta = \Sigma - \{\alpha_1\}$. Analisando o sistema de raízes de $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{C})$ vemos que $R^+(\alpha_1, 2) = \{\mu\}$ e

$$R^+(\alpha_1, 1) = \{\beta = c_1\alpha_1 + \ldots + c_l\alpha_l \in \Pi^+ : c_1 = 1\},$$

e escrevemos $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{u}_\mu$ com $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}_2 = 2$ e $\mathfrak{m}_1 = \sum_{\alpha \in R^+(\alpha_1,1)} \mathfrak{u}_\alpha$ com $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}_1 = 4(l-1)$.

Defina $k = 2(l-1)$ e seja $X = X_{\beta_1} + \ldots + X_{\beta_k} + X_\mu \in \mathfrak{m}_\Theta$ um vetor não nulo, onde $X_\mu = xA_\mu + yS_\mu \in \mathfrak{u}_\mu$, $X_{\beta_i} = a_i A_{\beta_i} + b_i S_{\beta_i} \in \mathfrak{u}_{\beta_i}$,$\beta_i \in R^+(\alpha_1, 1)$, $i = 1, \ldots, k$.

Seja $\gamma = 1.\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_l\alpha_l \in R^+(\alpha_1, 1)$ uma raiz arbitrária. Usando as equações (3.22)-(3.25) temos

$$\begin{aligned} \langle \mu, \gamma \rangle &= \langle \mu, \alpha_1 \rangle + c_2 \langle \mu, \alpha_2 \rangle \ldots + c_l \langle \mu, \alpha_l \rangle \\ &= \langle H_\mu, H_{\alpha_1} \rangle + c_2 \langle H_\mu, H_{\alpha_2} \rangle + \ldots + c_l \langle H_\mu, H_{\alpha_l} \rangle \\ &= \langle H_\mu, H_{\alpha_1} \rangle > 0, \end{aligned}$$

e pelo Lema 3.4.12 podemos concluir que $\mu - \gamma$ é uma raiz e esta raiz pertence a $R^+(\alpha_1, 1)$. Se $\gamma_1, \gamma_2 \in R^+(\alpha_1, 1)$ são tais que $\mu - \gamma_1 = \mu - \gamma_2$ então $\gamma_1 = \gamma_2$. Portanto, para cada raiz $\beta_i \in R^+(\alpha_1, 1)$ existe *uma única* raiz $\beta_j \in R^+(\alpha_1, 1)$ tal que $\beta_i = \mu - \beta_j$.

Usando este último fato juntamente com os colchetes de Lie dado em (1.9) o sistema de equações associado com a equação (3.16) é:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= 0 \\ a_1y - b_1x &= 0 \\ \vdots & \vdots \ \vdots \\ a_kx + b_ky &= 0 \\ a_ky - b_kx &= 0 \end{cases}$$

Suponha que a $\mathfrak{m}_2$-parte de X é não nula, isto é, $x^2 + y^2 > 0$ (caso contrário, $X \in \mathfrak{m}_1$ e portanto X é um vetor equigeodésico trivial). Com esta última condição, a solução do sistema de equações acima é $a_1 = b_1 = \ldots = a_k = b_k = 0$ e $X \in \mathfrak{m}_2$, ou seja, X é um vetor equigeodésico trivial. $\square$

As observações a seguir fornecem as informações a respeito das álgebras de Lie de $SO(2l)$ e $SO(2l+1)$ que foram utilizadas na demonstração da Proposição 3.4.14.

Observação 3.4.15 (Álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2l, \mathbb{C})$)**.** Seja $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ um sistema simples de raízes para $\mathfrak{so}(2l, \mathbb{C})$ com raiz máxima $\mu = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l$. Uma subálgebra de Cartan para $\mathfrak{so}(2l, \mathbb{C})$ é dada por matrizes diagonais da forma

$$H = \begin{pmatrix} D & \\ & -D \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

onde $D = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_l)$. Definimos os funcionais

$$\varepsilon_j : D = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_l) \mapsto a_j.$$

Em termos destes funcionais as raízes simples são dadas por $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots, \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \alpha_l = \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l$, veja [39]. A raiz máxima é representada pelo funcional $\mu = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Sejam α, β duas raízes e sejam H_α, H_β os respectivos duais das raízes, determinados pelas matrizes diagonais $D_\alpha = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_l)$ e $D_\beta = \mathrm{diag}(a'_1, \ldots, a'_l)$ como em (3.26). A forma de Cartan-Killing restrita a $\mathfrak{h}^*$ é dada por

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle = 4(l-1) \sum_{i=1}^{l} a_i a'_i. \tag{3.27}$$

O dual H_α de uma raiz positiva α determinado por D_α é dado por

$$D_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \frac{1}{4(l-1)} \mathrm{diag}(0, \ldots, 1_i, \ldots, -1_j, \ldots, 0), \tag{3.28}$$

$$D_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} = \frac{1}{4(l-1)}\mathrm{diag}(0,\ldots,1_i,\ldots,1_j,\ldots,0), i \neq j. \tag{3.29}$$

A variedade flag $SO(2l)/U(2) \times SO(2l-4)$ é determinada por $\Theta = \Sigma - \{\alpha_2\}$.

Observação 3.4.16 (Álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2l+1,\mathbb{C})$). Seja $\Sigma = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$ um sistema simples de raízes para $\mathfrak{so}(2l+1,\mathbb{C})$ com raiz máxima $\mu = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + 2\alpha_l$. Uma subálgebra de Cartan para $\mathfrak{so}(2l+1,\mathbb{C})$ é dada por matrizes diagonais da forma

$$H = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & D & \\ & & -D \end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

onde $D = \mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_l)$. Definimos os funcionais

$$\varepsilon_j : D = \mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_l) \mapsto a_j.$$

Em termos destes funcionais as raízes simples são dadas por $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots, \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \alpha_l = \varepsilon_l$, veja [39]. A raiz máxima é representada pelo funcional $\mu = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Sejam α, β duas raízes e sejam H_α, H_β os respectivos duais das raízes, determinados pelas matrizes diagonais $D_\alpha = \mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_l)$ e $D_\beta = \mathrm{diag}(a'_1,\ldots,a'_l)$ como em (3.30). A forma de Cartan-Killing restrita a $\mathfrak{h}^*$ é dada por

$$\langle\alpha,\beta\rangle = \langle H_\alpha, H_\beta\rangle = 2(2l-1)\sum_{i=1}^{l} a_i a'_i. \tag{3.31}$$

O dual H_α de uma raiz positiva α determinado por D_α é dado por

$$D_{\varepsilon_i} = \frac{1}{2(2l-1)}\mathrm{diag}(0,\ldots,1_i,\ldots,0), \tag{3.32}$$

$$D_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} = \frac{1}{2(2l-1)}\mathrm{diag}(0,\ldots,1_i,\ldots,-1_j,\ldots,0), \tag{3.33}$$

$$D_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} = \frac{1}{2(2l-1)}\mathrm{diag}(0,\ldots,1_i,\ldots,1_j,\ldots,0). \tag{3.34}$$

A variedade flag $SO(2l+1)/U(2) \times SO(2l-3)$ é determinada por $\Theta = \Sigma - \{\alpha_2\}$.

Apêndice: Raízes positivas das álgebras de Lie excepcionais

Neste apêndice vamos listar as raízes positivas para as álgebras de Lie excepcionais E_6, E_7, E_8, F_4 e G_2. Um método para se obter as raízes de uma álgebra de Lie é através de α-sequências juntamente com a matriz de Cartan da álgebra de Lie (veja [39]). Listaremos o conjunto de raízes simples juntamente com a raiz máxima. Para simplificar a notação, vamos escrever somente o coeficiente das raízes em relação a base do sistema simples de raízes. Desta forma, se $\alpha = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n$ é uma raiz simples, escreveremos simplesmente $(x_1, \ldots, x_n)$.

$\mathfrak{g}$	Sistema simples Σ	Raiz máxima μ
E_6	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$	$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_2 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6$
E_7	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$	$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_2 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$
E_8	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$	$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_2 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8$
F_4	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$	$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$
G_2	α_1, α_2	$2\alpha_1 + 3\alpha_2$

Álgebra de Lie de E_6

$(1,0,0,0,0,0)$	$(0,1,0,0,0,0)$	$(0,0,1,0,0,0)$	$(0,0,0,1,0,0)$
$(0,0,0,0,1,0)$	$(0,0,0,0,0,1)$	$(1,0,1,0,0,0)$	$(0,1,0,1,0,0)$
$(0,0,1,1,0,0)$	$(0,0,0,1,1,0)$	$(0,0,0,0,1,1)$	$(1,0,1,1,0,0)$
$(0,1,1,1,0,0)$	$(0,1,0,1,1,0)$	$(0,0,1,1,1,0)$	$(0,0,0,1,1,1)$
$(1,1,1,1,0,0)$	$(1,0,1,1,1,0)$	$(0,1,1,1,1,0)$	$(0,1,0,1,1,1)$
$(0,0,1,1,1,1)$	$(1,1,1,1,1,0)$	$(1,0,1,1,1,1)$	$(0,1,1,2,1,0)$
$(0,1,1,1,1,1)$	$(1,1,1,2,1,0)$	$(1,1,1,1,1,1)$	$(0,1,1,2,1,1)$
$(1,1,2,2,1,0)$	$(1,1,1,2,1,1)$	$(0,1,1,2,2,1)$	$(1,1,2,2,1,1)$
$(1,1,1,2,2,1)$	$(1,1,2,2,2,1)$	$(1,1,2,3,2,1)$	$(1,2,2,3,2,1)$

Álgebra de Lie de E_7

$(1,0,0,0,0,0,0)$	$(0,1,0,0,0,0,0)$	$(0,0,1,0,0,0,0)$	$(0,0,0,1,0,0,0)$
$(0,0,0,0,1,0,0)$	$(0,0,0,0,0,1,0)$	$(0,0,0,0,0,0,1)$	$(1,0,1,0,0,0,0)$
$(0,1,0,1,0,0,0)$	$(0,0,1,1,0,0,0)$	$(0,0,0,1,1,0,0)$	$(0,0,0,0,1,1,0)$
$(0,0,0,0,0,1,1)$	$(1,0,1,1,0,0,0)$	$(0,1,1,1,0,0,0)$	$(0,1,0,1,1,0,0)$
$(0,0,1,1,1,0,0)$	$(0,0,0,1,1,1,0)$	$(0,0,0,0,1,1,1)$	$(1,1,1,1,0,0,0)$
$(1,0,1,1,1,0,0)$	$(0,1,1,1,1,0,0)$	$(0,1,0,1,1,1,0)$	$(0,0,1,1,1,1,0)$
$(0,0,0,1,1,1,1)$	$(1,1,1,1,1,0,0)$	$(1,0,1,1,1,1,0)$	$(0,1,1,2,1,0,0)$
$(0,1,1,1,1,1,0)$	$(0,1,0,1,1,1,1)$	$(0,0,1,1,1,1,1)$	$(1,1,1,2,1,0,0)$
$(1,1,1,1,1,1,0)$	$(1,0,1,1,1,1,1)$	$(0,1,1,2,1,1,0)$	$(0,1,1,1,1,1,1)$
$(1,1,2,2,1,0,0)$	$(1,1,1,2,1,1,0)$	$(1,1,1,1,1,1,1)$	$(0,1,1,2,2,1,0)$
$(0,1,1,2,1,1,1)$	$(1,1,2,2,1,1,0)$	$(1,1,1,2,2,1,0)$	$(1,1,1,2,1,1,1)$
$(0,1,1,2,2,1,1)$	$(1,1,2,2,2,1,0)$	$(1,1,2,2,1,1,1)$	$(1,1,1,2,2,1,1)$
$(0,1,1,2,2,2,1)$	$(1,1,2,3,2,1,0)$	$(1,1,2,2,2,1,1)$	$(1,1,1,2,2,2,1)$
$(1,2,2,3,2,1,0)$	$(1,1,2,3,2,1,1)$	$(1,1,2,2,2,2,1)$	$(1,2,2,3,2,1,1)$
$(1,1,2,3,2,2,1)$	$(1,2,2,3,2,2,1)$	$(1,1,2,3,3,2,1)$	$(1,2,2,3,3,2,1)$
$(1,2,2,4,3,2,1)$	$(1,2,3,4,3,2,1)$	$(2,2,3,4,3,2,1)$	

Álgebra de Lie de E_8

$(1,0,0,0,0,0,0,0)$	$(0,1,0,0,0,0,0,0)$	$(0,0,1,0,0,0,0,0)$	$(0,0,0,1,0,0,0,0)$
$(0,0,0,0,1,0,0,0)$	$(0,0,0,0,0,1,0,0)$	$(0,0,0,0,0,0,1,0)$	$(0,0,0,0,0,0,0,1)$
$(1,0,1,0,0,0,0,0)$	$(0,1,0,1,0,0,0,0)$	$(0,0,1,1,0,0,0,0)$	$(0,0,0,1,1,0,0,0)$
$(0,0,0,0,1,1,0,0)$	$(0,0,0,0,0,1,1,0)$	$(0,0,0,0,0,0,1,1)$	$(1,0,1,1,0,0,0,0)$
$(0,1,1,1,0,0,0,0)$	$(0,1,0,1,1,0,0,0)$	$(0,0,1,1,1,0,0,0)$	$(0,0,0,1,1,1,0,0)$
$(0,0,0,0,1,1,1,0)$	$(0,0,0,0,0,1,1,1)$	$(1,1,1,1,0,0,0,0)$	$(1,0,1,1,1,0,0,0)$
$(0,1,1,1,1,0,0,0)$	$(0,1,0,1,1,1,0,0)$	$(0,0,1,1,1,1,0,0)$	$(0,0,0,1,1,1,1,0)$
$(0,0,0,0,1,1,1,1)$	$(1,1,1,1,1,0,0,0)$	$(1,0,1,1,1,1,0,0)$	$(0,1,1,2,1,0,0,0)$
$(0,1,1,1,1,1,0,0)$	$(0,1,0,1,1,1,1,0)$	$(0,0,1,1,1,1,1,0)$	$(0,0,0,1,1,1,1,1)$
$(1,1,1,2,1,0,0,0)$	$(1,1,1,1,1,1,0,0)$	$(1,0,1,1,1,1,1,0)$	$(0,1,1,2,1,1,0,0)$
$(0,1,1,1,1,1,1,0)$	$(0,1,0,1,1,1,1,1)$	$(0,0,1,1,1,1,1,1)$	$(1,1,2,2,1,0,0,0)$
$(1,1,1,2,1,1,0,0)$	$(1,1,1,1,1,1,1,0)$	$(1,0,1,1,1,1,1,1)$	$(0,1,1,2,2,1,0,0)$
$(0,1,1,2,1,1,1,0)$	$(0,1,1,1,1,1,1,1)$	$(1,1,2,2,1,1,0,0)$	$(1,1,1,2,2,1,0,0)$
$(1,1,1,2,1,1,1,0)$	$(1,1,1,1,1,1,1,1)$	$(0,1,1,2,2,1,1,0)$	$(0,1,1,2,1,1,1,1)$
$(1,1,2,2,2,1,0,0)$	$(1,1,2,2,1,1,1,0)$	$(1,1,1,2,2,1,1,0)$	$(1,1,1,2,1,1,1,1)$
$(0,1,1,2,2,2,1,0)$	$(0,1,1,2,2,1,1,1)$	$(1,1,2,3,2,1,0,0)$	$(1,1,2,2,2,1,1,0)$
$(1,1,2,2,1,1,1,1)$	$(1,1,1,2,2,2,1,0)$	$(1,1,1,2,2,1,1,1)$	$(0,1,1,2,2,2,1,1)$
$(1,2,2,3,2,1,0,0)$	$(1,1,2,3,2,1,1,0)$	$(1,1,2,2,2,2,1,0)$	$(1,1,2,2,2,1,1,1)$
$(1,1,1,2,2,2,1,1)$	$(0,1,1,2,2,2,2,1)$	$(1,2,2,3,2,1,1,0)$	$(1,1,2,3,2,2,1,0)$
$(1,1,2,3,2,1,1,1)$	$(1,1,2,2,2,2,1,1)$	$(1,1,1,2,2,2,2,1)$	$(1,2,2,3,2,2,1,0)$
$(1,2,2,3,2,1,1,1)$	$(1,1,2,3,3,2,1,0)$	$(1,1,2,3,2,2,1,1)$	$(1,1,2,2,2,2,2,1)$
$(1,2,2,3,3,2,1,0)$	$(1,2,2,3,2,2,1,1)$	$(1,1,2,3,3,2,1,1)$	$(1,1,2,3,2,2,2,1)$
$(1,2,2,4,3,2,1,0)$	$(1,2,2,3,3,2,1,1)$	$(1,2,2,3,2,2,2,1)$	$(1,1,2,3,3,2,2,1)$
$(1,2,3,4,3,2,1,0)$	$(1,2,2,4,3,2,1,1)$	$(1,2,2,3,3,2,2,1)$	$(1,1,2,3,3,3,2,1)$
$(2,2,3,4,3,2,1,0)$	$(1,2,3,4,3,2,1,1)$	$(1,2,2,4,3,2,2,1)$	$(1,2,2,3,3,3,2,1)$
$(2,2,3,4,3,2,1,1)$	$(1,2,3,4,3,2,2,1)$	$(1,2,2,4,3,3,2,1)$	$(2,2,3,4,3,2,2,1)$
$(1,2,3,4,3,3,2,1)$	$(1,2,2,4,4,3,2,1)$	$(2,2,3,4,3,3,2,1)$	$(1,2,3,4,4,3,2,1)$
$(2,2,3,4,4,3,2,1)$	$(1,2,3,5,4,3,2,1)$	$(2,2,3,5,4,3,2,1)$	$(1,3,3,5,4,3,2,1)$
$(2,3,3,5,4,3,2,1)$	$(2,2,4,5,4,3,2,1)$	$(2,3,4,5,4,3,2,1)$	$(2,3,4,6,4,3,2,1)$
$(2,3,4,6,5,3,2,1)$	$(2,3,4,6,5,4,2,1)$	$(2,3,4,6,5,4,3,1)$	$(2,3,4,6,5,4,3,2)$

Álgebra de Lie de F_4

$(1,0,0,0)$	$(0,1,0,0)$	$(0,0,1,0)$	$(0,0,0,1)$
$(1,1,0,0)$	$(0,1,1,0)$	$(0,0,1,1)$	$(1,1,1,0)$
$(0,1,2,0)$	$(0,1,1,1)$	$(1,1,2,0)$	$(1,1,1,1)$
$(0,1,2,1)$	$(1,2,2,0)$	$(1,1,2,1)$	$(0,1,2,2)$
$(1,2,2,1)$	$(1,1,2,2)$	$(1,2,3,1)$	$(1,2,2,2)$
$(1,2,3,2)$	$(1,2,4,2)$	$(1,3,4,2)$	$(2,3,4,2)$

Álgebra de Lie de G_2

$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$

Referências Bibliográficas

[1] D. Alekseevsky and A. Arvanitoyeorgos; Riemannian flag manifolds with homogeneous geodesics. *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), 1117–1126.

[2] D. Alekseevsky; Isotropy representation of flag manifolds. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.* **54** (1998), 13–24.

[3] A. Arvanitoyeorgos; Geometry of flag manifolds. *Int.J.Geom. Methods Mod. Phys.* **3** (2006), 957–974.

[4] A.Arvanitoyeorgos and I.Chrysikos; Invariant Einstein metrics on flag manifolds with four isotropy summands. *Ann. Global Anal. Geom.* **37** (2010), no. 2, 185–219.

[5] A.Arvanitoyeorgos and I.Chrysikos; Invariant Einstein metrics on flag manifolds with two isotropy summands, to appear in *J. Aust. Math. Soc.* (2010).

[6] A. Arvanitoyeorgos; New invariant Einstein metrics on generalized flag manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.* **337** (1993), 981–995.

[7] P.Baird and J.C.Wood; Harmonic morphisms between Riemannian manifolds, London Mathematical Society Monographs **29**, Oxford University Press (2003).

[8] M. Black; Harmonic maps into homogeneous space. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 255. Longman, Harlow and Wiley, New York (1991).

[9] A.Borel; Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **40** (1954), 1147–1151.

[10] A.Borel and F.Hirzebruch; Characteristic classes and homogeneous spaces. I. *Amer. J. Math.* **80** (1958) 458–538.

[11] R.Bryant; Lie groups and twistor spaces. *Duke Math.* **52** (1985), 223-261.

[12] M. Bordemann, M. Forger and H. Romer; Homogeneous Kähler manifolds:Paving the way towards supersymmetric sigma-models, *Comm. Math. Physics*,102 (1986), 605–647.

[13] F.Burstall and Rawsley; Twistor theory for riemannian symmetric spaces. Lect. Notes in Math 1424.

[14] E.Calabi; Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres, *J.Diff. Geometry* **1** (1967), 111-125.

[15] N.Cohen, L.Grama and C.J.C.Negreiros; Equigeodesics on flag manifolds, *Houston Math. Journal* **37** No.1 (2011) 113–125.

[16] J.Cheeger and D.G.Ebin; Comparison theorems in Riemannian geometry, North-Holland Publishing Company (1975).

[17] J.Eells and L.Lemaire; Selected topics in harmonic maps, C.B.M.S. Region. Conf. Ser. **50** Am. Math. Soc. (1983).

[18] J.Eells and J.C.Wood; Harmonic maps from surfaces into complex projective spaces, *Adv. in Math.* **49** (1983), 217-263.

[19] M.Fels and P.Olver; Moving coframes: II. Regularization and theoretical foundations, *Acta App. Math.* **55** (1999), 127-208.

[20] J.L.Flores, M.A.Javaloyes and P.Piccione; Periodic geodesic and geometry of compact Lorentzian manifolds with a Killing vector field, *Mathematische Zeitschrift*, 1432-1823 (2009).

[21] L.Grama and R.Martins; The Ricci flow of left invariant metrics on full flag manifold $SU(3)/T$ from a dynamical systems point of view. *Bull. Sci. math.* **133** (2009), 463–469.

[22] L.Grama and R.Martins; Global behaviour of the Ricci flow on homogeneous manifolds with two isotropy summands. *preprint* arXiv:0911.3781 (2009).

[23] L.Grama and C.J.C.Negreiros; Equigeodesics on generalized flag manifolds with two isotropy summands, to appear in *Results in Math.* (2011).

[24] L.Grama, C.J.C.Negreiros and L.A.B. San Martin; Equiharmonic maps and Plücker formulae for holomorphic-horizontal curves on flag manifolds, *preprint* (2010).

[25] P.Grifiths and J.Harris; Principles of algebraic geometry, Wiley Intescience, 1978.

[26] S. Helgason; *Differential geometry and symmetric spaces.* Academic Press, New York-London 1962.

[27] R. Horn, C.R. Johnson.; *Matrix analysis*. Cambridge University Press, 1985.

[28] J.Humphreys; Introduction to Lie algebras and representation theory. Graduate Texts in Mathematics, Springer.

[29] M. Itoh; Curvature properties of Kähler C-space. *J. Math. Soc. Japan* **30** (1978), 39-71.

[30] M.Kimura; Homogeneous Einstein metrics on certain Kähler C-spaces. Recent topics in differential and analytic geometry, 303–320, Adv. Stud. Pure Math., 18–I, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[31] S.Kobayashi and K.Nomizu; *Foundations of differential geometry, Vol. II.* Interscience Publishers John Wiley and Sons, Inc., New York-London-Sydney (1969).

[32] O.Kowalski and J.Szenthe; On the existence of homogeneous geodesics in homogeneous riemannian manifolds, *Geo.Dedicata* **81**(2000), 209-214.

[33] O.Kowalski and L.Vanhecke; Riemannian manifolds with homogeneous geodesics, *Bolletino U.M.I* **7**(5-B)(1991), 189-246.

[34] C.J.C.Negreiros; Some remarks about harmonic maps into flag manifolds, *Indiana Univ. Math. J.* **37** (1988), 617-636.

[35] C.J.C.Negreiros; Equivariant harmonic maps into homogeneous spaces, *J. Math. Phys.*, **31**, (7)(1990), 1635–1642.

[36] C.J.C.Negreiros, L.Grama and L.A.B.San Martin; Invariant Hermitian structures and variational aspects of a family of holomorphic curves on flag manifolds, to appear in *Ann. Global Anal. Geom.* (2010).

[37] J.Ramanathan; Harmonic maps from S^2 to $G_2(\mathbb{C}^4)$, *J. Diff. Geometry* **19** (1984), 207-219.

[38] J. Rawnsley; f-structures, f-twistor spaces and harmonic maps, *in* Geometry Seminar "Luigi Bianchi", II, 1984, Lecture Notes in Math., vol. 1164 (1985).

[39] L.A.B.San Martin; Álgebras de Lie. Ed. Unicamp (1999).

[40] L.A.B.San Martin and C.J.C.Negreiros; Invariant almost Hermitian structures on flag manifolds. *Adv. Math.* **178** (2003), 277–310.

[41] S.Sternberg; Lectures on Differential Geometry, Prentice-Hall.

[42] K.Uhlenbeck; Harmonic maps into Lie groups (classical solutions of the chiral model), *J. Diff. Geometry* **30** (1989), 1-50.

[43] K.Yang; Plücker formulae for the orthogonal group, *Bull. Autral. Math. Soc.* **40** (1989), 447-456.

[44] K.Yang; Horizontal holomorphic curves in $Sp(n)$-flag manifolds, *Proc. AMS.* **103** (1988), 265-273.

[45] K.Yang; Almost complex homogeneous space and their submanifolds, World Scientific Publishing, Singapure-New Jersey, 1987.

[46] K. Yano; On a structure defined by a tensor field of type $(1,1)$ satisfying $F^3+F=0$, *Tensor* **14** (1963), 99–109.