Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Sistemas Parabólicos Singulares e o Fenômeno da Solidificação Irreversível

por

Luís Henrique de Miranda †

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Boldrini
Co-orientadora: Profa. Dra. Gabriela del Valle Planas

UNICAMP - Campinas
Fevereiro de 2011

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes e CNPq

Sistemas Parabólicos Singulares e o Fenômeno da Solidificação Irreversível

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Luís Henrique de Miranda** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 23 de fevereiro de 2011

Prof. Dr.: José Luiz Boldrini.
Orientador

Profª. Drª. : Gabriela del Valle Planas
Co-orientadora

Banca Examinadora:

Profª. Drª. Gabriela del Valle Planas
Profª. Drª.Cláudia Buttarello Gentile
Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki
Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos
Prof. Dr. Marcelo Montenegro

Tese apresentada ao **Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP,** como parte do requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

De Miranda, Luís Henrique

M672s Sistemas parabólicos singulares e o fenômeno da solidificação irreversível/Luís Henrique de Miranda-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.

Orientador : José Luiz Boldrini; Gabriela del Valle Planas

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Equações diferenciais parciais. 2.Solidificação - Modelos matemáticos. 3.Equações diferenciais parabólicas. 4.P-Laplaciano. I. Boldrini, José Luiz. II.Planas, Gabriela del Valle. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Singular parabolic systems and the irreversible solidification phenomenon

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1.Partial differential equations. 2.Solidification – Mathematical models. 3.Parabolic differential equations. 4.P-Laplacian.

Área de concentração: Análise

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Profª. Drª. Gabriela del Valle Planas (IMECC - UNICAMP)
Profª. Drª.Cláudia Buttarello Gentile (UFSCar)
Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki (UFJF)
Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Marcelo Montenegro (IMECC – UNICAMP)

Data da defesa: 23/02/2011

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 23 de fevereiro de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). GABRIELA DEL VALLE PLANAS

Prof(a). Dr(a). MARCELO DA SILVA MONTENEGRO

Prof(a). Dr(a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS

Prof(a). Dr(a). CLÁUDIA BUTTARELLO GENTILE

Prof(a). Dr(a). OLIMPIO HIROSHI MIYAGAKI

Agradecimentos

Essa tese é fruto de um projeto de longo prazo, foram mais de 10 anos investidos no objetivo de se tornar doutor em Matemática. Assim, a lista de pessoas que foram importantes para que esse trabalho ficasse pronto é extensa. Gostaria muito de não fazer injustiças mas é impossível citar a todos. De qualquer forma, agradeço muito aqueles que não estão citados aqui, mas que de uma maneira ou de outra contribuíram com o meu trabalho.

Em primeiro lugar, agradeço a minha família pelo apoio e incentivo ao projeto desde o início de tudo: meus pais Conceição e Onofre, minhas irmãs Dulce, Elaine, Gabi, Rose e Rosângela e aos meus sobrinhos Artur, Helena, Higor, Kadidja, Kaléu, Samuel, Sarah, Thaís e Thaynara. Parte da alegria pela conclusão dessa etapa, é poder servir de exemplo para eles.

Agradeço muito aos meus orientadores, prof. Boldrini e profa. Gabriela, pelas inúmeras contribuições que deram ao projeto. Seria injusto não mencionar que o trabalho atual é uma combinação de ideias minhas com as deles e que foi muito influenciado por trabalhos anteriores dos dois. Certamente as diversas reuniões que tivemos discutindo sobre a presente tese ajudaram a lapidar bastante a proposta inicial do trabalho de forma que ele se tornasse na atual tese.

Aos professores da Célius Magalhães, João Carlos e Liliane Maia, principalmente pelo incentivo que deram aos primórdios desse projeto desde os tempos da graduação e mestrado na UnB.

Aos meus amigos: Adilson Presotto, Adilton Guedes, Anderson Valença, Anne Bronzi, Beatriz Motta, Bruno Ribeiro, Cícero Natchgall, Cláudio Roberto Caiana, Danilo do Valle, Ebenézer dos Santos Jr., Edcarlos Domingos, Edson Teixeira, Elmar Ernani, Fábio Scherer, Fernando de Souza, Grasiele Jorge, Hécio Almeida, Henrique Vitório, Jamil Abreu Jr., Jhames Sampaio, José Antônio, Luiz Viana, Marcus Marrocos, Nelson Louza, Robson Oliveira, Rodrigo Lambert, Rogério Casagrande, Rogério Oliveira, Victor Santana, Paulo Vinícius dos Santos, Pedro Gustavo Gurgel, Wagner Menke, Wellington Assunção, dentre outros. Sua contribuição, nem sempre no âmbito profissional, com certeza foi importantíssima para o presente trabalho. Agradeço pelos momentos de diversão e por me ajudarem em muitos dos problemas que não conseguiria resolver sozinho.

Agradeço também aos membros da comissão examinadora, por aceitarem o convite em fazer parte da banca e por todas as sugestões, correções e comentários, que certamente melhoraram o trabalho.

Finalmente agradeço à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo do presente trabalho é a análise matemática da influência das correntes de convecção em um processo de solidificação irreversível. A análise será feita quanto ao aspecto da existência de soluções de certos modelos matemáticos para a situação. Consideraremos dois modelos para este fenômeno que pode ser observado em diversos tipos de polímeros. Como veremos, em um dos modelos teremos o acoplamento entre uma Equação de Navier-Stokes Singular, responsável pela movimentação macroscópica da parte não sólida e uma inclusão diferencial responsável pela transição líquido/sólido. No outro, analisaremos a interação entre uma Equação de Stokes Singular e uma inclusão diferencial quasilinear.

As dificuldades matemáticas em cada um desses casos são consideráveis pois ambos são problemas de fronteira livre relacionados com inclusões diferenciais não lineares, sendo que uma delas envolve operadores degenerados (p-laplacianos). Para que nossa análise fosse possível, foi necessário que aprimorássemos as ferramentas matemáticas disponíveis. Essencialmente nossa contribuição foi adaptar alguns resultados já existentes no contexto de equações mais simples para sistemas de equações mais complexos. Dentre as contribuições paralelas, destacamos resultados sobre teoria de regularidade para equações degeneradas, estimativas de termos de fronteira 'non-standard', algumas estimativas a priori e um pouco sobre espaços de Sobolev fracionários.

Abstract

The objective of this work is the mathematical analysis of the influence of convection currents in an irreversible solidification process. The analysis will be concentrated in the aspects of the existence of solutions of certain mathematical models for the situation. We will consider two models for this phenomenon which can be observed in several kinds of polymers. As we shall see, in one case we have a coupling between Singular Navier-Stokes Equations, which take into account for the macroscopic motion of the mushy region and a differential inclusion which is related to the liquid/solid transition. In the other, we analyze the interaction between a Singular Stokes equation and a quasilinear differential inclusion.

The mathematical difficulties in each of these cases are considerable since both consist of free boundary problems associated with nonlinear differential inclusions, one of which involves degenerated operators (p-laplacians). In order to make our analysis possible, some improvements of the available mathematical tools were necessary. Essentially, our contribution was to adapt the existent results for equations in a simpler context to more complex systems of equations. Amongst the contributions, we highlight results on regularity theory for degenerate equations, estimates of non-standard boundary terms, some a priori estimates and some results about fractional Sobolev spaces.

Sumário

Introdução

A ideia central de nosso trabalho está concentrada na proposição de um modelo 'coerente' para a solidificação de materiais 'especiais' e a sua análise estritamente matemática. Como veremos, tal fenômeno está associado ao estudo em conjunto (dito 'acoplamento') de algumas E.D.P's de evolução já conhecidas, acoplamento este que evoca dificuldades seríssimas e que expõe a falta de ferramentas matemáticas para análise de um fenômeno cotidiano (por exemplo a solidificação do ovo ou da cola). Na realidade, mesmo quando estudadas em separado, algumas das equações de nosso trabalho já trazem dificuldades relevantes e ainda não foram bem entendidas do ponto de vista puramente matemático. Como exemplo, citamos as Equações de Navier-Stokes ou E.D.P's com não linearidades nas derivadas de maior ordem, as quais naturalmente estão associadas ao fenômeno de solidificação. Estes desafios nos obrigam a trabalhar com algumas restrições severas que tornam esse fenômeno estimulante e desafiante, pois expõem algumas das falhas na teoria de dinâmica de fluidos, de equações de evolução ou até mesmo de teoria de regularidade para equações elípticas e portanto indicam caminhos interessantes para pesquisa nos próximos anos.

Ficará claro durante o texto que a grande dificuldade do estudo do fenômeno é a interrelação entre as equações do sistema considerado, o que restringe consideravelmente o tipo de técnica que pode ser empregada para sua análise matemática.

Solidificação Irreversível

Consideraremos um material do tipo polímero que se encontra no estado líquido. Após alguma evolução no tempo, este pode alterar seu estado físico de maneira em geral não uniforme. Os materiais aqui considerados foram chamados de especiais pois a solidificação destes é irreversível, i.e., após sua solidificação não há como transformá-los em líquidos novamente sem destruir algumas de suas propriedades físico-químicas. Este fenômeno acontece quando aquecemos os ditos polímeros *termorrígidos*, sendo que os exemplos clássicos desse processo são a solidificação do ovo ou da cola; evidente-

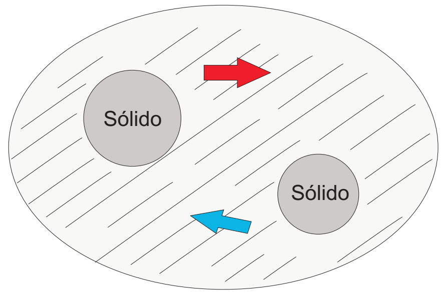

Figura 1: Material em Solidificação

mente, em todos esses casos, após a solidificação não podemos fazer com que o material retorne ao estado líquido novamente.

Em qualquer um dos casos, as variáveis em jogo serão: o estado físico (que de agora em diante será chamado de fase), a temperatura, a velocidade macroscópica e a região onde o material se encontra.

Do ponto de vista físico, o fenômeno é estudado usando teoria de Mecânica não Suave (cf. Frémond, [23]) combinada com ideias de Caginalp e Jones e Blanc *et al.* (veja [15] e [5]). A grosso modo é feita uma restrição no domínio dos famosos funcionais energia livre e de dissipação para, em um certo sentido, ’proibirmos’ que o material possa voltar ao estado líquido. Na realidade, na montagem das ditas ’leis constitutivas’, associa-se a eles o valor $+\infty$ nos casos fisicamente não desejáveis (reliquefação) de modo que o estado físico se altera em apenas um sentido: do líquido para o sólido.

Modelos Matemáticos

Nos últimos anos, o fenômeno da irreversibilidade para mudança de fase tem sido amplamente estudado por diversos matemáticos. Na realidade, a partir do ano 2000, conseguiu-se um progresso considerável no entendimento matemático do problema depois que Bonfanti *et al.* estabeleceram em [11] um modelo que descrevia esse processo de forma natural do ponto de vista físico e não apenas ’fenomenológico’. Daí em diante, outras questões matemáticas relacionadas com o trabalho original apareceram, como por exemplo, a existência de soluções fortes locais (globais) para o modelo completo ou versões simplificadas deste. Dentre os autores que ajudaram a estudar esse problema citamos Aso *et al.* em [1], Bonetti em [10], Colli *et al.* em [17], Laurençot *et al.* em [32] e Luterotti *et al.* [38]. Entretanto, nenhum destes trabalhos considerou a possibilidade de movimentação (fluxo) na parte não sólida do material. Como se sabe, as correntes de convecção em um processo de derretimento ou solidificação têm efeitos importantes para o comportamento final do material. Basta notar que o calor é transportado pelo fluxo do fluido. Consequentemente, tal fato adiciona novas medidas de tempo e espaço para o problema resultando em morfologias para o material que podem ser muito distintas daquelas geradas puramente pela difusão do calor. Mais ainda, além da convecção influenciar no padrão de solidificação, ela também pode alterar a microestrutura do material criando fenômenos inesperados e complicados. Por essas razões, os modelos que não consideram o fluxo da parte não sólida podem ter algumas limitações. Para mais detalhes, sugerimos ao leitor que veja [8], onde os efeitos desse fluxo em fenômenos de solidicação são discutidos.

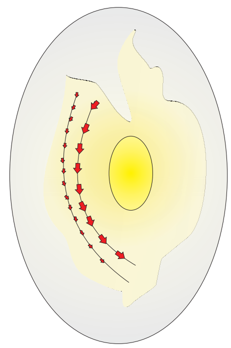

Figura 2: Efeito da Conveccção para Solidificação Irreversível

O cerne da motivação para nosso trabalho foi combinar as ideias de Planas e Boldrini(cf. [7], [8] e [42]) com as de Bonfanti *et al.* (cf. [11]) de maneira a considerarmos os efeitos da convecção no caso de uma solidificação irreversível. Assim, de forma natural consideraremos dois modelos que descrevem esse fenômeno.

O **primeiro** deles é dado pelo seguinte sistema de equações:

$$
\begin{aligned}
(F_A)\quad & u_t + u\cdot\nabla u - \Delta u + \nabla P + K(\omega)u = \zeta\theta \text{ em } Q_{ml},\\
(T_A)\quad & \theta_t + \omega_t - \Delta\theta + u\cdot\nabla\theta = g(x,t) \text{ em } Q,\\
(C_A)\quad & \omega_t + \alpha(\omega_t) - \Delta\omega + \beta(\omega) \ni \theta + f(\omega) \text{ em } Q,\\
& \nabla\cdot u = 0 \text{ em } Q_{ml},\\
& u = 0 \text{ em } Q_s.
\end{aligned}
$$

Por simplicidade, de agora em diante, as equações $(F_A) - (C_A)$ serão chamadas de problema **A**, ou modelo **A**.

Aqui as variáveis u, P, θ e ω são respectivamente a velocidade, pressão hidrostática, a temperatura e a proporção do material que encontra-se no estado sólido. Vale a pena ressaltar que $\omega(x,t)$ nos diz em qual estado físico o ponto (x,t) está. O vetor constante ζ é a aproximação de Boussinesq e está relacionado com as forças de flutuação no modelo, como veremos posteriormente. Por simplicidade de exposição, mas sem perda de generalidade do ponto de vista matemático, consideraremos as outras constantes físicas como calor latente ou viscosidade iguais a um nas equações do problema acima.

Vale dizer que Q_s e Q_{ml}, os quais serão definidos com precisão posteriomente, são respectivamente as regiões onde o material encontra-se no estado sólido e em um estado intermediário entre o líquido e o sólido. Aqui nos limitamos a dizer que ambas Q_s e Q_{ml} são determinadas pelos valores de ω, como veremos mais adiante, de forma que o problema acima é do tipo **fronteira livre**, i.e., o conjunto onde uma das equações vale também é desconhecido.

As inclusões aparecem pois $\alpha(.)$ e $\beta(.)$ denotam dois operadores monótonos maximais em $\mathbb{R}^2$ e uma restrição em seus domínios nos dará a interpretação física correta do parâmetro de fase ω e também, da irreversibilidade da mudança de estado físico. Para tanto, $\alpha(.)$ e $\beta(.)$ são escolhidos com os seguintes domínios:

$$D(\alpha) = [0, +\infty) \text{ e } D(\beta) = [0, 1]. \tag{1}$$

Assim, se encontrarmos ω satisfazendo a equação do campo de fases, necessariamente temos que $\omega_t \geq 0$ e então a transição do estado líquido para o sólido é irreversível. Além disso, pelo significado físico de ω, desejamos que $0 \leq \omega \leq 1$, afinal trata-se da fração sólida do material.

A função $K(.)$, geralmente chamada de termo de Carman-Kozeny, é responsável pelo controle do fluxo fluido na parte líquida; $K(.)$ propositalmente deve ter uma singularidade. De fato, escolheremos $K(.)$ de maneira que $K(x) \to +\infty$, se $x \to 1$. Entretanto, na região que $w(x,t) = 1$ o material está no estado sólido de modo que $K(\omega) = +\infty$ nessa parte (dita Q_s). Assim, a única maneira da equação de Navier-Stokes singular associada fazer sentido é a de que u, o qual multipla o termo de Carmam-Kozeny, seja igual a zero. Logo, forçamos que a velocidade macroscópica seja nula na parte sólida do material (veja por exemplo Blanc *et al.* em [5]).

A maior dificuldade que encontraremos para o primeiro modelo será equilibrar as abordagens inspiradoras de Boldrini e Planas com a de Bonfanti *et al.*. Em alguns momentos, a técnica padrão para o estudo de problemas de mudança de fase com movimentação na parte líquida precisou ser adaptada para o nosso contexto de inclusões diferenciais. Por um lado, temos uma equação difícil para a mudança de fase com não linearidades mais gerais e operadores multivalorados de forma que é necessária muita regularidade do parâmetro de fase. Por outro lado, agora precisamos cuidar de uma outra equação singular que descreve o fluxo do fluido que está relacionado com um problema de fronteira livre e como se sabe pouco sobre a interface sólida-pastosa, são esperadas apenas estimativas de menor ordem para a velocidade. Essas duas situações para as estimativas que esperamos se opõem e trazem diversas dificuldades matemáticas para a análise do problema. Diga-se que a contribuição relativa ao primeiro modelo dada pelo nosso trabalho está concentrada justamente nesse ponto.

O **segundo** modelo que estudaremos é dado por

$$
\begin{aligned}
(F_B) \quad & u_t - \Delta u + \nabla P + K(h(\omega))(\sigma u + u_t) = \zeta\theta \text{ em } Q_{ml},\\
(T_B) \quad & \theta_t + \omega_t - \Delta\theta - \Delta_p\theta + u \cdot \nabla\theta = g(x,t) \text{ em } Q,\\
(C_B) \quad & \omega_t + \alpha(\omega_t) - \mu\Delta\omega - \Delta_q\omega + \kappa u \cdot \nabla\omega \ni \theta + f(\omega) \text{ em } Q,\\
& \nabla \cdot u = 0 \text{ em } Q_{ml},\\
& \sigma u + u_t = 0 \text{ em } Q_s.
\end{aligned}
$$

Mais uma vez, a primeira equação diz respeito ao campo de velocidades, a segunda diz respeito a temperatura e a terceira sobre a solidificação do material. Exceto por ω que agora é um parâmetro auxiliar que nos ajuda a descrever a solidificação, o 'set up' básico é o mesmo; as incógnitas continuam a representar as mesmas variáveis físicas. Além disso, a singularidade $K(.)$ e o operador $\alpha(.)$ são exatamente como antes. Com relação as constantes, aqui κ é um número real não negativo o qual está associado a influência da convecção no modelo; $\sigma > 0$ é um parâmetro de relaxação e $\mu > 0$ é o comprimento da interface. Por fim, observamos que h é uma função que relaciona o campo de fases ω com a região do material que é sólida, de forma que $h(\omega)$ agora representa fração sólida do material.

No que segue, chamaremos as equações $(F_B) - (C_B)$, de problema **B** ou de modelo **B**.

As diferenças essenciais do modelo **B** para o **A** são a inserção do multiplicador $\sigma u + u_t$ junto ao termo de Carman-Kozeny e a consideração da convecção na equação do estado do material. Mais ainda, mudamos a maneira de introduzir a dissipação no modelo, através dos operadores do tipo p-laplaciano em duas equações, além de que em **B** não nos restringiremos mais ao caso bidimensional.

Em primeiro lugar, ressaltamos que a inclusão do termo $\sigma u + u_t$ diz respeito a um questionamento de qual seria a equação correta para u no estado sólido. Neste caso, não obrigamos mais o campo de velocidades a anular-se em parte da região Q. Na realidade, fazemos com que este campo tenha decaimento exponencial como taxa $\sigma > 0$ na região em questão. Veremos que, do ponto de vista matemático, com essa alteração da singularidade garantimos estimativas mais regulares para u_t o que nos permite trabalhar com um conceito de solução mais forte no tempo. Até então, o termo multiplicador da singularidade de Carman-Kozeny era dado apenas por u (veja [5], [7], [6], [42], etc) e portanto, parte da contribuição da tese diz respeito a essa mudança do termo u para $\sigma u + u_t$. Vale dizer que a inclusão do termo $\sigma u + u_t$ poderá ser utilizada no estudo de modelos de solidificação relacionados, nos fornecendo também um escoamento com maior regularidade no tempo o que, evidentemente, é de grande utilidade. Devido a tal troca conseguimos dar algum sentido, ainda que fraco, a convecção na equação da fase e principalmente, temos uma noção de escoamento com maior regularidade no tempo.

Em segundo lugar, observamos que tanto a equação da temperatura quando a da mudança de estado possuem operadores do tipo degenerados, o que por um lado nos ajudou no cálculo de estimativas a priori para o modelo e por outro, impôs dificuldades matemáticas consideráveis para a obtenção de algum tipo de solução para o problema.

Em particular, podemos dizer que é um desafio interessante lidar com a não linearidade $\alpha(\omega_t)$ e com $\Delta_q\omega$ ao mesmo tempo. Para estudarmos tal equação foi necessário que melhorássemos parte do instrumental matemático disponível atualmente, de forma que alguns resultados novos que não faziam parte do escopo inicial da tese precisaram ser provados. Nossas contribuições 'matemáticas' concentraram-se em um pouco sobre espaços de Sobolev fracionários e teoria de regularidade para operadores do tipo p-laplaciano. Esta última, envolveu algumas estimativas a priori diferentes e o controle de alguns termos de fronteira não usuais. Ressaltamos que tanto a técnica que usamos para provar tais resultados é diferente da já existente na literatura, quanto os resultados que provamos são evoluções dos já existentes, no sentido que se aplicam a equações do tipo estudado no presente trabalho, o que definitivamente não era possível com os resultados antigos.

Organização da tese

No primeiro capítulo, introduzimos os pré-requisitos básicos para um entendimento razoável do texto. Destacamos alguns resultados acerca de espaços fracionários (Nikol'skii e Slobodeckii), introduzimos rudimentos da teoria de operadores monótonos maximais (Análise convexa) e também enunciamos alguns teoremas que serão importantes no decorrer da tese. Además, é importante dizer que em parte o conteúdo do capítulo 1 não é simples de se encontrar na literatura padrão, sendo que acreditamos ser uma grande ajuda ao leitor compilarmos um resumo sobre eles no início da tese. Essencialmente, os resultados desta parte já existiam, com uma pequena excessão sobre uma imersão para espaços de Nikol'skii (sec. 1.3.5).

O segundo capítulo trata da análise do primeiro modelo aqui proposto, que descreve a solidificação irreversível através de uma equação de Navier-Stokes singular e uma inclusão diferencial. Provaremos a existência de solução global no tempo para o modelo sugerido através de técnicas de discretização no tempo, de análise convexa e compacidade.

Os resultados do terceiro capítulo são quase todos originais e fazem parte das principais contribuições matemáticas do trabalho aqui apresentado. Ressalta-se que esse capítulo foi feito com o objetivo de possibilitar o estudo do segundo modelo aqui proposto, e como fruto das equações 'pouco usuais' tratadas, foi necessário adaptar resultados sobre teoria de regularidade para equações degeneradas e obter novas estimativas de energia.

O quarto capítulo trata o segundo modelo que exibimos na introdução. Este descreve a solidificação irreversível através de uma Equação de Stokes singular e uma inclusão diferencial quasilinear. Provaremos um teorema de existência de soluções generalizadas globais no tempo e depois daremos um critério para que estas sejam soluções fracas usuais. Mais uma vez usaremos técnicas de discretização no tempo, de análise convexa, de compacidade, porém agora combinadas com o resultados do capítulo 3.

Para o Apêndice deixamos resultados que consideramos estar fora do espírito do capítulo 1, por serem 'pontuais'. Nesse sentido, achamos melhor descrevê-los apenas no final do trabalho.

Como comentário final, vale dizer que a tese foi escrita de maneira a deixar o mais independente possível o estudo dos dois modelos apresentados (capítulos 2 e 4). O capítulo 2 tem como pré-requisitos as seções 1.1, 1.2, 1.4 e 1.5 do capítulo 1. Já o capítulo 4 exige os resultados sobre espaços de Sobolev fracionários do capítulo 1 e os resultados sobre teoria de regularidade, de modo que tem como pré-requisitos os capítulos 1 e 3.

Capítulo 1

Notação e resultados preliminares

Nosso objetivo aqui será facilitar um pouco a leitura do texto listando alguns resultados muito difundidos e outros não tão bem conhecidos dentre os que trabalham com equações diferenciais parciais. Não exibiremos todas as desigualdades e teoremas citadas no trabalho, porém as escolhas foram feitas sempre no sentido de exibir os pré-requisitos mínimos para a leitura do texto ou então, para ao menos evitar confusões de nomenclatura entre resultados.

1.1 Notação para o texto

Recomendamos que o leitor consulte essa listagem na medida que a notação aparecer no texto.

- Se X e Y são espaços vetoriais então $X \times Y$ denotará o produto direto destes;
- um elemento do produto será denotado como $[x, y]$;
- E denotará um espaço de Banach;
- se E for reflexivo, seu dual topológico será denotado como E'. Para $f \in E'$ e $x \in E$, $\langle x, f \rangle$ será seu produto de dualidade;
- sejam E e F espaços de Banach. Denotaremos que a imersão de F em E é contínua por $F \hookrightarrow E$ e quando a imersão for compacta escreveremos apenas que $F \hookrightarrow\hookrightarrow E$;
- denotaremos por $\rightharpoonup$ a convergência fraca em E e $\to$ convergência forte. Caso E seja reflexivo $\overset{*}{\rightharpoonup}$ denotará a convergência fraco-estrela;
- $\mathcal{H}$ denotará um espaço de Hilbert;

- Ω denotará um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e $\partial\Omega$ sua fronteira que será ao menos de classe C^1. Quando necessário aumentaremos a regularidade de Ω;

- $Q = (0,T) \times \Omega$, $Q \subset \mathbb{R}^{N+1}$;

- se $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio então $C_0^\infty(\mathcal{O})$ são as funções suaves com suporte compacto em $\mathcal{O}$, $L^p(\mathcal{O})$, com $1 \leq p \leq +\infty$, é o espaço de Lebesgue usual, $W^{s,p}(\mathcal{O})$, onde $0 \leq s < +\infty$, o espaço de Sobolev-Slobodeckii e $\mathcal{N}^{s,p}(\mathcal{O})$ espaço de Nikol'skii (veja mais observações no final deste capítulo);

- $\mathcal{S}(\mathcal{O}) = \{\psi \in C_0^\infty(\mathcal{O}) : \text{ div } \psi = 0\}$ é o espaço de campos **solenoidais** suaves com suporte compacto em $\mathcal{O}$, $H_r(\mathcal{O})$ é o fecho dos campos solenoidais em $L^q(\mathcal{O})$ (no caso em que $q = 2$, escreveremos apenas H) e $V(\mathcal{O})$ é o fecho dos campos solenoidais em $W^{1,2}(\mathcal{O})$. Ressaltamos que todos os campos vetorias presentes em H_r ou V tem **divergência nula** e que ambos espaços são comuns no contexto de **Dinâmica de Fluidos** no estudo de **fluidos incompressíveis**;

- por simplicidade escreveremos $C_0^\infty(\Omega) = C_0^\infty$, $L^p(\Omega) = L^p$, $W^{s,p}(\Omega) = W^{s,p}$ e $\mathcal{N}^{s,p}(\Omega) = \mathcal{N}^{s,p}$, H=$H_2(\Omega)$ e V=$V(\Omega)$;

- $L^p(0,T;B)$ é o espaço de Lebesgue vetorial consistindo de todas as funções $\omega : [0,T] \mapsto B$ fortemente mensuráveis com norma
$$\|\omega\|_{L^p(0,T;B)} = \left(\int_0^T \|\omega(t)\|_B^p \right)^{1/p} < +\infty,$$
$$\|\omega\|_{L^\infty(0,T;B)} = ess \sup_{0 \leq t \leq T} \|\omega(t)\|_B < +\infty.$$
Definimos de forma análoga os espaços $W^{1,p}(0,T;B)$;

- $C > 0$ será nossa constante universal. Caso esta dependa de algum parâmetro o indicaremos entre parênteses;

- se p, q e r pertencem ao conjunto $[1,+\infty]$ e p', q' e r' denotarão seus correspondentes conjugados, i.e., p' satisfaz $1/p + 1/p' = 1$ e assim por diante;

- dado p, tal que $1 \leq p < +\infty$ consideramos o expoente crítico de Sobolev
$$p^* = \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p}, & \text{se } p < N \\ +\infty, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

- $\tau > 0$ denotará um parâmetro de discretização e $\epsilon > 0$ uma constante suficientemente pequena;

- durante o texto, para não deixarmos a leitura carregada, evitaremos distinguir entre notação escalar e vetorial. Em geral, a diferenciação do caso escalar para o vetorial ficará explícita no contexto.

1.2 Algumas desigualdades e densidade

Começamos com uma desigualdade trivial, porém importante. Decidimos incluí-la no trabalho para evitarmos confusões com nomenclatura.

Proposição 1.2.1. *(Desigualdade de Young) Sejam s_1 e s_2 reais positivos os quais*

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = 1.$$

Então, $\forall \sigma > 0$ e $\zeta > 0$ vale que

$$\sigma\zeta \leq \frac{\sigma^{s_1}}{s_1} + \frac{\zeta^{s_2}}{s_2}.$$

Usaremos bastante a seguinte versão da desigualdade de Young, para três termos

Corolário 1.2.2. *Considere os reais positivos s_1, s_2 e s_3. Suponha que*

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} = 1.$$

Então

$$\sigma\zeta\psi \leq \frac{\sigma^{s_1}}{s_1} + \frac{\zeta^{s_2}}{s_2} + \frac{\psi^{s_3}}{s_3},\ \forall \sigma, \zeta \text{ e } \psi > 0.$$

Em particular se

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \leq 1,$$

então existe $C \geq 0$ tal que

$$\sigma\zeta \leq \frac{\sigma^{s_1}}{s_1} + \frac{\zeta^{s_2}}{s_2} + C.$$

Agora, exibiremos uma desigualdade que será exaustivamente utilizada durante todo o texto, principalmente quando formos apelar a métodos de estimativas de energia. Esta pode ser encontrada em Ladyzhenskaya e Ural'tseva, [31] pág. 44 e, para conveniência do leitor, exibiremos uma demonstração.

Lema 1.2.3. *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave e $p \geq 2$. Então existe $C > 0$ tal que*

$$\|\phi\|_{W^{1,p}} \leq C(\|\phi\|_{L^2} + \|\nabla\phi\|_{L^p}), \forall \phi \in W^{1,p},$$

onde $C = C(p, \Omega, N)$.

Dem. Suponha s.p.g $p > 2$. Pelo teorema da imersão de Sobolev, existem $q > p$ e $C = C(p, \Omega, N)$ tais que

$$\|\phi\|_{L^q} \leq C\|\phi\|_{W^{1,p}}, \forall \phi \in W^{1,p}.$$

Por outro lado, uma consequência simples da desigualdade de Hölder nos garante que existe $0 < s < 1$ tal que
$$\|\phi\|_{L^p} \leq \|\phi\|_{L^2}^s \|\phi\|_{L^q}^{1-s}.$$
Dessa forma,
$$\|\phi\|_{L^p} \leq C\|\phi\|_{L^2}^s \|\phi\|_{W^{1,p}}^{1-s}. \tag{1.1}$$
Assim,

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{W^{1,p}} &\leq \|\phi\|_{L^p} + \|\nabla\phi\|_{L^p} \\
&\leq C\|\phi\|_{L^2}^s \|\phi\|_{L^q}^{1-s} + \|\nabla\phi\|_{L^p} \\
&\leq sC^{1/s}\|\phi\|_{L^2} + (1-s)\|\phi\|_{W^{1,p}} + \|\nabla\phi\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Portanto temos que
$$\|\phi\|_{W^{1,p}} \leq \frac{1}{s}(sC^{1/s}\|\phi\|_{L^2} + \|\nabla\phi\|_{L^p}).$$
□

Prosseguindo, vejamos duas desigualdades muito úteis para o estudo dos espaços de Sobolev fracionários. Elas podem ser encontradas em Ebmeyer *et al.*, [21]. Mais uma vez, para conveniência do leitor faremos uma prova delas.

Lema 1.2.4. *Seja $p \geq 2$. Então existe $C = C(N) > 0$ tal que*

$$|x-y|^p \leq C(|x|^2 + |y|^2)^{(p-2)/2}|x-y|^2. \tag{1.2}$$

Dem. De fato, como $|x-y|^2 \leq 2(|x|^2 + |y|^2)$ e $p \geq 2$ então elevando a potência $(p-2)/2$ dos dois lados e depois multiplicando por $|x-y|^2$ o resultado segue. □

Antes de provarmos a segunda precisamos do seguinte pré-requisito.

Lema 1.2.5. *Sejam a, b e $p \in \mathbb{R}$ os quais $a > 0$, $b > 0$ e $p \geq 0$. Então*

$$(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p).$$

Dem. Para $p \geq 1$ o leitor pode verificar em Brezis, [12], teorema IV.7. Provemos o caso

$$0 \leq p < 1.$$

Suponha sem perda de generalidade que $b = 1$. Basta mostrarmos que

$$f(x) = 2^p(x^p + 1) - (x+1)^p \geq 0, \ \forall x \geq 0.$$

Agora, note que $f(0) = -1 + 2^p > 0$ e

$$f'(x) = p2^p x^{p-1} - p(x+1)^{p-1}.$$

Entretanto, como $0 \leq p < 1$

$$2^p \geq (1+\frac{1}{x})^{p-1} \Rightarrow p2^p x^{p-1} \geq p(x+1)^{p-1} \tag{1.3}$$

e portanto f é crescente e o resultado segue. $\square$

Lema 1.2.6. *Seja $p \geq 2$. Então existe $C = C(N) > 0$ tal que*

$$(|x|^2+|y|^2)^{(p-2)/2}|x-y|^2 \leq C\big|x|x|^{(p-2)/2} - y|y|^{(p-2)/2}\big|^2. \tag{1.4}$$

Dem. De fato, como $p \geq 2$

$$(|x|^2+|y|^2)^{(p-2)/2} \leq 2^{(p-2)/2}(|x|^{p-2}+|y|^{p-2}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} & (|x|^2+|y|^2)^{(p-2)/2}|x-y|^2 \\ \leq\ & 2^{(p-2)/2}(|x|^{p-2}+|y|^{p-2})(|x|^2+|y|^2-2x\cdot y) \\ =\ & 2^{(p-2)/2}(|x|^p+|y|^p+|x|^{p-2}|y|^2+|y|^{p-2}|x|^2-2x\cdot y(|x|^{p-2}+|y|^{p-2})). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Perceba que

$$\big|x|x|^{(p-2)/2} - y|y|^{(p-2)/2}\big|^2 = |x|^p+|y|^p-2x\cdot y|x|^{p-2}|y|^{p-2} \tag{1.6}$$

e que

$$|x|^{p-2}|y|^2+|y|^{p-2}|x|^2 \leq |x|^p+|y|^p. \tag{1.7}$$

Suponha em primeiro lugar que $-x\cdot y \geq 0$. Nesse caso, temos que

$$\big|x|x|^{(p-2)/2} - y|y|^{(p-2)/2}\big|^2 \geq |x|^p+|y|^p. \tag{1.8}$$

Daí, observe que

$$-2x\cdot y(|x|^{p-2}+|y|^{p-2}) \leq 2|x||y|(|x|^{p-2}+|y|^{p-2}) \leq 2(|x|^p+|y|^p), \tag{1.9}$$

onde usamos seguidamente a desigualdade de Young para $p/2$ e $p/(p-2)$ e depois para p e $p/(p-1)$. Logo, por (1.5)-(1.9) segue que

$$(|x|^2+|y|^2)^{(p-2)/2}|x-y|^2 \leq 2^{(p+2)/2}\big|x|x|^{(p-2)/2} - y|y|^{(p-2)/2}\big|^2.$$

Caso $-x\cdot y \leq 0$ veja que pela desigualdade de Young

$$-2x\cdot y(|x|^{p-2}+|y|^{p-2}) \leq -4x\cdot y|x|^{p-2}|y|^{p-2}. \tag{1.10}$$

Logo, por (1.5), (1.7) e (1.10)

$$\begin{aligned}(|x|^2+|y|^2)^{(p-2)/2}|x-y|^2 &\leq 2^{(p-2)/2}(2|x|^p+2|y|^p-4x\cdot y(|x|^{p-2}+|y|^{p-2}))\\ &= 2^p\left|x|x|^{(p-2)/2}-y|y|^{(p-2)/2}\right|^2,\end{aligned}$$

onde para a última desigualdade usamos (1.6). □

A seguinte desigualdade é importante no estudo de operadores elípticos do tipo p-laplaciano. Uma prova elementar pode ser encontrada em DiBenedetto [19], lema 4.4, pág. 13.

Lema 1.2.7. *Seja $p \geq 2$. Então existe $C = C(p, N) > 0$ tal que*

$$(x|x|^{p-2} - y|y|^{p-2}) \cdot (x-y) \geq C|x-y|^p,$$

para qualquer x e y em $\mathbb{R}^N$.

Por fim, mostraremos um resultado de densidade que apesar de trivial, não está explicitamente escrito nas referências e será usado no decorrer da tese.

Proposição 1.2.8. *Seja $1 < p < +\infty$. Então*

$$\overline{W^{1,p}}^{L^p} = L^p.$$

Dem. Basta lembrar que como subconjuntos

$$C_0^\infty \subset W^{1,p} \subset L^p$$

e que

$$\overline{C_0^\infty}^{L^p} = L^p.$$

□

1.3 Espaços fracionários

Durante o trabalho precisaremos lidar com dois tipos de espaços fracionários: os de Nikol'skii e de Slobodeckii. Para conveniência do leitor, enunciaremos suas propriedades básicas e alguns resultados necessários para a leitura do texto. Vale a pena ressaltar que algumas referências relevantes para o tema são: Kufner *et al.* em [30], Nikol'skii *et al.* em [4]-[40] e Grisvard [26].

1.3.1 Espaços de Nikol'skii

No ano de 1951 S.M. Nikol'ski introduziu em [39] espaços que generalizam o conceito de aproximações de $\check{C}eby\check{s}ev$ para as classes $C^{0,\sigma}$. Esses espaços são caracterizados por uma espécie de condição de Hölder para as normas L^p das derivadas. Devido a uma determinada caracterização discreta, estes se mostraram muito úteis no estudo de equações do tipo p-laplaciano, como veremos posteriormente. Ressaltamos que como referência para esta seção o leitor pode consultar Kufner *et al.* [30] págs. 381-384.

Como notação básica, para $\delta > 0$ denotemos

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \delta\}.$$

Sejam $1 \leq p \leq +\infty$ e $k > 0$ e escrevamos k na forma

$$k = [k] + \sigma, \tag{1.11}$$

onde $[k]$ denota o maior inteiro menor do que k, $0 < \sigma \leq 1$.

Definição 1.3.1. *$\mathcal{N}^{k,p}$ denota o conjunto de todas as funçoes de L^p tais que as derivadas distribucionais de ordem $|\alpha| = [k]$ satisfazem as seguintes propriedades:*

$$\exists M > 0, M = M(u, \Omega) \text{ a qual}$$
$$\|D^\alpha u(x+h) - D^\alpha u(x)\|_{L^p(\Omega_{|h|})} \leq M|h|^\sigma. \tag{1.12}$$

Nesse caso,

$$\mathcal{N}_\alpha(u) = \inf\{M : M \text{ satisfaz } (1.12)\}. \tag{1.13}$$

Aqui $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$, denota um multi-índice, com $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

Evidentemente vale que:

Proposição 1.3.2. *O espaço de Nikol'skii $\mathcal{N}^{k,p}$ é um espaço de Banach munido com a norma*

$$\|u\|_{\mathcal{N}^{k,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{|\alpha|=[k]} \mathcal{N}_\alpha(u). \tag{1.14}$$

Veremos depois outra norma para $\mathcal{N}^{k,p}$.

Durante o texto usaremos a seguinte proposição sobre imersões e traços em espaços de Nikol'skii:

Proposição 1.3.3. *Sejam $k > 0$, $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, $1 \leq M \leq N$ e*

$$r = k - N/p + M/q > 0. \tag{1.15}$$

Então

$$\mathcal{N}^{k,p} \hookrightarrow W^{[k],p}, \text{ (imersão)} \tag{1.16}$$
$$\mathcal{N}^{k,p} \hookrightarrow \mathcal{N}^{r,q}(S_M), \text{ (traço)} \tag{1.17}$$

onde S_M é a intersecção de Ω com um hiperplano M dimensional.

Ressaltamos ainda que existe uma caracterização muito útil de $\mathcal{N}^{k,p}$ usando derivadas **discretas** a qual descreveremos a seguir. Por simplicidade, escreveremos

$$\Delta_h v(x) = v(x+h) - v(x).$$

Proposição 1.3.4. *Sejam $u \in L^p$, α e σ como na definição 1.3.1. Então $u \in \mathcal{N}^{k,p}$ se, e somente se,*

$$\sup_{h \neq 0} \frac{\|\Delta_h D^\alpha u\|_{L^p(\Omega_{|h|})}}{|h|^\sigma} < +\infty.$$

Mais ainda, vale que

$$\mathcal{N}_\alpha(u) = \sup_{h \neq 0} \frac{\|\Delta_h D^\alpha u\|_{L^p(\Omega_{|h|})}}{|h|^\sigma}.$$

1.3.2 Espaços de Slobodeckii

A necessidade de caracterizar-se o traço de funções em espaços de Sobolev usuais foi uma das motivações básicas para a introdução de espaços de Sobolev com derivadas fracionárias, i.e., espaços ainda denotados por $W^{k,p}$ porém com $k \geq 0$ arbitrário. Um dos responsáveis por tal generalização foi L.N. Slobodeckii com o artigo [46], de 1958. Muitas vezes denominados simplesmente como espaços de Sobolev fracionários ou espaços de Sobolev-Slobodeckii, a grosso modo, os espaços de Slobodeckii são aqueles os quais as derivadas inteiras de maior ordem de seus elementos satisfazem uma espécie de condição integral do tipo Hölder. Como referência para esta seção consulte Grisvard [26], teo. 1.4.3.2-3 pág.26, teo. 1.5.1.2 pág.38 e Kufner *et al.* [30], págs. 385-387.

Para definirmos tais espaços consideremos $1 \leq p < +\infty$ e $k > 0$. Além disso, sejam $[k]$ e σ como em (1.11).

Definição 1.3.5. *$W^{k,p}$ denota o conjunto de todas as funçoes de $W^{[k],p}$ tais que as derivadas distribucionais de ordem $|\alpha| = [k]$ satisfazem a seguinte propriedade:*

$$\mathcal{W}_{\alpha,k,p}(u) = \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{N+p\sigma}} dxdy \right)^{1/p} < +\infty. \tag{1.18}$$

Mais uma vez α denota um multi-índice.

Evidentemente, vale o seguinte resultado:

Proposição 1.3.6. *O espaço de Slobodeckii $W^{k,p}$ é um espaço de Banach munido com a norma*

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \|u\|_{W^{[k],p}} + \sum_{|\alpha|=[k]} \mathcal{W}_{\alpha,k,p}(u). \tag{1.19}$$

Posteriormente, descreveremos outra norma para $W^{k,p}$, mas por agora, enunciaremos alguns resultados que usaremos durante o texto. Por completude, colocaremos hipóteses mais gerais do que as assumidas em nosso trabalho.

Primeiramente vejamos algumas imersões importantes.

Proposição 1.3.7. *Considere Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$. Suponha que $\partial\Omega$ seja lipschitziana. Sejam $k_1 > k_2 > k_3 \geq 0$ e $1 \leq p \leq +\infty$. Então*

$$W^{k_1,p} \hookrightarrow\hookrightarrow W^{k_2,p} \hookrightarrow\hookrightarrow W^{k_3,p}. \tag{1.20}$$

Além disso, dado $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ a qual para cada $u \in W^{k_1,p}$

$$\|u\|^p_{W^{k_2,p}} \leq \epsilon \|u\|^p_{W^{k_1,p}} + C_\epsilon \|u\|^p_{W^{k_3,p}}, \tag{1.21}$$

onde $C_\epsilon = C_\epsilon(\Omega, k_1, k_2, k_3)$.

Proposição 1.3.8. *Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com $\partial\Omega$ lipschitziana. Suponha que*

$$1 < p < q < +\infty, k_1 > 0 \text{ e } k_2 = k_1 - N(1/p - 1/q) > 0.$$

Então

$$W^{k_1,p} \hookrightarrow W^{k_2,q}.$$

Vejamos agora a noção de traço para espaços de Slobodeckii.

Proposição 1.3.9. *Seja Ω um domínio limitado. Tome $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_3 \in \mathbb{N}$ e $1 < p < +\infty$. Suponha que $k_1 = k_2 + 1/p$, $k_2 \notin \mathbb{N}$, $k_1 \leq k_3 + 1$ e que $\partial\Omega$ seja de classe $C^{k_3,1}$. Então a aplicação*

$$u \mapsto \{\gamma u, \gamma\frac{\partial u}{\partial \nu}, ..., \gamma\frac{\partial^l u}{\partial \nu^l}\} \tag{1.22}$$

a qual está definida para $u \in C^{k_3,1}(\overline{\Omega})$, possui uma única extensão linear contínua de

$$W^{k_1,p} \text{ sobre } \prod_{j=0}^{l} W^{k_2-j,p}(\partial\Omega), \tag{1.23}$$

onde $l = [k_2]$, o maior inteiro menor do que k_2.

O leitor encontrará uma breve referência para espaços de Slobodeckii definidos em variedades em Grisvard [26], sec. 1.3.3. pág. 19.

O próximo corolário é uma consequência simples e importante da proposição 1.3.9.

Corolário 1.3.10. *Seja $0 < \eta < 1/p$ e considere Ω um domínio limitado com fronteira de classe C^2. Suponha que $1 + 1/p + \eta < 1 + 2/p - \eta$. Então dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que*

$$\|u\|^p_{W^{1,p}(\partial\Omega)} \leq \epsilon \|u\|^p_{W^{1+2/p-\eta,p}} + C_\epsilon \|u\|^p_{L^p}$$

para cada $u \in W^{1+2/p-\eta,p}$.

Dem. Pela proposição 1.3.9 aplicada para $k_1 = 1 + 1/p + \eta$ e $k_2 = 1 + \eta$ existe uma extensão linear contínua de $W^{1+1/p+\eta,p}$ em $W^{1+\eta,p}(\partial\Omega) \times W^{\eta,p}(\partial\Omega)$. Em particular, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{W^{1+\eta,p}(\partial\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1+\eta,p}(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1+1/p+\eta,p}}, \ \forall u \in W^{1+1/p+\eta,p}. \tag{1.24}$$

Agora lembremos da proposição 1.3.7. Pela equação (1.21) aplicada para $k_1 = 1+2/p-\eta$, $k_2 = 1 + 1/p + \eta$ e $k_3 = 0$ temos que

$$\|u\|^p_{W^{1+1/p+\eta,p}} \leq \epsilon\|u\|^p_{W^{1+2/p-\eta,p}} + C_\epsilon\|u\|^p_{L^p}. \tag{1.25}$$

Combinando-se (1.24) e (1.25) o resultado segue. □

Veja que o corolário 1.3.10 é uma generalização para espaços fracionários do teo. 1.5.1.10, pág. 41 em [26] e da desigualdade 2.25, pág. 49 em [31]. Também é válida a seguinte generalização para imersão de espaços de Slobodeckii em espaços de funções Hölder contínuas.

Proposição 1.3.11. *Considere Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$. Suponha que $\partial\Omega$ seja lipschitziana. Sejam $s > 0$, $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$ e $1 < p < +\infty$. Suponha que*

$$k < s - \frac{N}{p} < k + 1.$$

Então

$$W^{s,p} \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \tag{1.26}$$

onde $\alpha = s - k - N/p$.

Dem. Veja a definição 1.3.2.4, os teoremas 1.4.3.1 e 1.4.4.1 e a equação (1,4,4,6) no livro de Grisvard [26]. □

Observação 1.3.12. *Veja que em particular, se $N = 2$, $W^{3/2,2} \hookrightarrow C^{0,1/2}(\overline{\Omega})$.*

1.3.3 Normas equivalentes para espaços fracionários

Apresentaremos algumas normas que serão mais convenientes para a abordagem que adotaremos durante o texto, pois as normas para espaços de Nikol'skii e Slobodeckii definidas em Ebmeyer *et al.* [21] são distintas das definidas em Kufner *et al.* [30]. Assim, de maneira a deixar nosso trabalho mais completo decidimos exibir as provas das equivalências entre essas diversas normas.

Espaços de Slobodeckii

Primeiramente vejamos o caso dos espaços de Slobodeckii, por este ser um pouco mais simples.

Proposição 1.3.13. *Sejam* $1 < k < 2$ *e* $1 \leq p < +\infty$. *Então o funcional*

$$|||.|||_{W^{k,p}} : W^{k,p} \to \mathbb{R},$$
$$|||u|||_{W^{k,p}} = \left(\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \int_\Omega \frac{\left|\partial_{x_i} u(x) - \partial_{x_i} u(y)\right|^p}{|x-y|^{N+\sigma p}} + \|u\|^p_{W^{[k],p}} \right)^{1/p}$$

é uma norma equivalente para $W^{k,p}$.

Dem. Recordando das equações (1.18) e (1.19) basta lembrar que para cada $a_i \geq 0$

$$\left(\sum_{i=1}^{N+1} a_i \right)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^{N+1} \left(a_i\right)^{1/p}$$

para obtermos que

$$|||u|||_{W^{k,p}} \leq \|u\|_{W^{k,p}}.$$

Por outro lado, como $p \geq 1$

$$\left(\sum_{i=1}^{N+1} a_i^{1/p} \right)^p \leq 2^{(N+1)^p} \sum_{i=1}^{N+1} a_i$$

o que prova que

$$\|u\|_{W^{k,p}} \leq C(N,p) |||u|||_{W^{k,p}}.$$

□

Daqui para frente usaremos como norma para $W^{k,p}$ a definida pela proposição 1.3.13 e **por simplicidade denotaremos** $|||.|||_{W^{k,p}}$ **por** $\|.\|_{W^{k,p}}$**.**

Espaços de Nikol'skii

Para espaços de Nikol'skii a prova de que a norma usada por Ebmeyer *et al.* em [21] é equivalente a usada por Kufner *et al.* em [30] é um pouco mais trabalhosa.

Proposição 1.3.14. *Sejam* $1 < k < 2$ *e* $1 \leq p < +\infty$. *Então o funcional*

$$|||.|||_{\mathcal{N}^{k,p}} : \mathcal{N}^{k,p} \to \mathbb{R},$$
$$|||u|||_{\mathcal{N}^{k,p}} = \left(\sum_{i=1}^{N} \sup_{h \neq 0} \int_{\Omega_{|h|}} \frac{\left|\partial_{x_i} u(x+h) - \partial_{x_i} u(x)\right|^p}{|h|^{\sigma p}} + \|u\|^p_{L^p} \right)^{1/p}$$

é uma norma equivalente para $\mathcal{N}^{k,p}$.

Dem. Em primeiro lugar, note que

$$\sup_{h\neq 0}\left(\int_{\Omega_{|h|}} \frac{\left|\partial_{x_i}u(x+h)-\partial_{x_i}u(x)\right|^p}{|h|^{\sigma p}}\right)^{1/p} = \left(\sup_{h\neq 0}\int_{\Omega_{|h|}} \frac{\left|\partial_{x_i}u(x+h)-\partial_{x_i}u(x)\right|^p}{|h|^{\sigma p}}\right)^{1/p}$$

De fato, para u fixada defina

$$\begin{aligned}
A &= \sup_{h\neq 0}\left(\int_{\Omega_{|h|}} \frac{\left|\partial_{x_i}u(x+h)-\partial_{x_i}u(x)\right|^p}{|h|^{\sigma p}}\right)^{1/p}, \\
B &= \left(\sup_{h\neq 0}\int_{\Omega_{|h|}} \frac{\left|\partial_{x_i}u(x+h)-\partial_{x_i}u(x)\right|^p}{|h|^{\sigma p}}\right)^{1/p}, \\
A(h) &= \int_{\Omega_{|h|}} \frac{\left|\partial_{x_i}u(x+h)-\partial_{x_i}u(x)\right|^p}{|h|^{\sigma p}} \text{ e} \\
B(h) &= (A(h))^p.
\end{aligned}$$

Veja que s.p.g. $A > 0$. Além disso, pela definição de supremo, para cada $\eta > 0$ existe $h \in \mathbb{R}^N$ o qual

$$0 < A - \eta < A(h) < A.$$

Considere $\epsilon > 0$ e fixe $\eta_\epsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
A - \eta_\epsilon > 0 \quad &, \quad A^p - \eta_\epsilon > 0, \\
\eta_\epsilon < \epsilon/2 \quad &\text{e} \quad |A^p - \eta_\epsilon - (A-\eta_\epsilon)^p| < \epsilon/2.
\end{aligned}$$

Em particular,

$$A^p - \epsilon < (A - \eta_\epsilon)^p.$$

Assim, seja $A(h)$ o qual

$$A - \eta_\epsilon < A(h) < A.$$

Temos que

$$(A-\eta_\epsilon)^p < A^p(h) = B(h) < A^p \Rightarrow A^p - \epsilon < B(h) < A^p.$$

Logo, pela definição de supremo

$$A = [\sup_{h\neq 0} B(h)]^{1/p} = B.$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned}
|||u|||_{\mathcal{N}^{k,p}} &\leq \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N}\left(\sup_{h\neq 0}\int_{\Omega_{|h|}} \frac{\left|\partial_{x_i}u(x+h)-\partial_{x_i}u(x)\right|^p}{|h|^{\sigma p}}\right)^{1/p} \\
&= \|u\|_{\mathcal{N}^{k,p}}.
\end{aligned}$$

Além disso, veja que

$$\begin{aligned}
\|u\|^p_{\mathcal{N}^{k,p}} &\leq 2^{(N+1)p}\left(\|u\|^p_{L^p} + \sum_{i=1}^{N}\left(\sup_{h\neq 0}\left(\int_{\Omega_{|h|}} \frac{\left|\partial_{x_i}u(x+h) - \partial_{x_i}u(x)\right|^p}{|h|^{\sigma p}}\right)^{1/p}\right)^p\right)\\
&= |||u|||^p_{\mathcal{N}^{k,p}}.
\end{aligned}$$

□

Analogamente ao que fizemos no caso dos espaços de Slobodeckii, usaremos como norma para $\mathcal{N}^{k,p}$ a definida pela proposição 1.3.14 e **por simplicidade denotaremos até o fim do texto $|||u|||_{\mathcal{N}^{k,p}}$ por $\|u\|_{\mathcal{N}^{k,p}}$.**

1.3.4 Relações entre espaços de Nikol'skii e Slobodeckii

Um resultado muito importante em nosso trabalho é o seguinte:

Proposição 1.3.15. *Considere Ω um domínio limitado. Suponha que $\partial\Omega$ seja lipschitziana. Sejam $k > 0$ e $1 < p < +\infty$ e $\epsilon > 0$. Então*

$$\mathcal{N}^{k+\epsilon,p} \hookrightarrow W^{k,p} \hookrightarrow \mathcal{N}^{k,p}. \tag{1.27}$$

Dem. Veja em Ebmeyer *et al.* em [21] eq. 2.1, [20] pág. 83 ou então Knees em [28], pág. 161 lema 2.1. □

Como consequência de (1.27), adaptamos a conclusão do corolário 1.3.10, pág. 17, para espaços de Nikol'skii. A versão aqui exibida é mais conveniente para os resultados dos capítulos 3 e 4. Apesar de ser um resultado simples, não pudemos encontrá-lo na literatura sobre o assunto.

Corolário 1.3.16. *Considere Ω um domínio limitado com fronteira de classe C^3. Então dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que*

$$\|u\|^p_{W^{1,p}(\partial\Omega)} \leq \epsilon\|u\|^p_{\mathcal{N}^{1+2/p,p}} + C_\epsilon\|u\|^p_{L^p}$$

para cada $u \in \mathcal{N}^{1+2/p,p}$.

1.3.5 Caracterização de espaços de Nikol'skii

Inspirados pelo trabalho de Ebmeyer *et al.* em [21] e [20] decidimos estudar melhor as propriedades dos espaços de Sobolev fracionários. De fato, explicitaremos uma espécie de imersão, que é relevante para a teoria de operadores elípticos degenerados. Na realidade, depois de lermos [21] e [20], percebemos que esta imersão faria todo sentido. Até onde sabemos, o resultado a seguir não está publicado em lugar algum.

Lema 1.3.17. *(Lema Fundamental) Seja $2 \leq p < +\infty$. Existe $C = C(\Omega, N, p) > 0$ tal que para cada $u \in W^{1,p}$ tal que D^2u exista q.t.p. em Ω e também*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}|D^2u|^2 < +\infty$$

vale que $u \in \mathcal{N}^{1+2/p,p}$ e

$$\|u\|^p_{\mathcal{N}^{1+2/p,p}} \leq C\bigg(\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}|D^2u|^2 + \int_\Omega |u|^p \bigg). \tag{1.28}$$

Dem. Primeiramente veja que $|\nabla u|^{(p-2)/2}\nabla u \in W^{1,2}$. De fato, temos que

$$\big||\nabla u|^{(p-2)/2}\nabla u\big|^2 \leq |\nabla u|^p \in L^1.$$

Mais ainda, segue que q.t.p. em Ω para i=1,..., N

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial x_i}|\nabla u|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right| &\leq |\nabla u|^{(p-2)/2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right| + \frac{p-2}{2}|\nabla u|^{(p-6)/2}\sum_{k=1}^N |\nabla u|^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}\right| \\ &\leq C|\nabla u|^{(p-2)/2}|D^2u| \in L^2(\Omega), \end{aligned} \tag{1.29}$$

por hipótese. Usaremos agora um resultado clássico sobre derivadas discretas veja por exemplo Evans em [22], teo. 5.8.3. De fato, para $h \in \mathbb{R}^N$, suficientemente pequeno, temos que existe $C > 0$ que não depende de h tal que

$$\int_{\Omega_{|h|}} |D^h(|\nabla u|^{(p-2)/2}\nabla u)|^2 \leq C\int_\Omega |\nabla(|\nabla u|^{(p-2)}\nabla u)|^2,$$

sendo que a notação D^hf significa $(f(x+h) - f(x))/h$. Assim, usando a desigualdade (1.29) segue que

$$\int_{\Omega_{|h|}} |D^h(|\nabla u|^{(p-2)/2}\nabla u)|^2 \leq C\int_\Omega |\nabla u|^{(p-2)}|D^2u|^2. \tag{1.30}$$

Lembremo-nos que dos lemas 1.2.4 e 1.2.6, pág. 12, existe $C > 0$ tal que para cada x e $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$|x-y|^p \leq C(|x|^2 + |y|^2)^{(p-2)/2}|x-y|^2$$

e

$$(|x|^2 + |y|^2)^{(p-2)/2}|x-y|^2 \leq C\big|x|x|^{(p-2)/2} - y|y|^{(p-2)/2}\big|^2$$

e então

$$|x-y|^p \leq C\big|x|x|^{(p-2)/2} - y|y|^{(p-2)/2}\big|^2.$$

Fixando-se $x = T^h \nabla u \stackrel{\text{def}}{=} \nabla u(x+h)$ e $y = \nabla u$ temos que

$$\begin{aligned}
&|T^h \nabla u - \nabla u|^p \\
&\leq C \big| T^h \nabla u |T^h \nabla u|^{(p-2)/2} - \nabla u |\nabla u|^{(p-2)/2} \big|^2 \\
&= |D^h(|\nabla u|^{(p-2)/2} \nabla u)|^2 h^2.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Dividindo-se por $|h|^2$ dos dois lados em (1.31) e integrando-se em $\Omega_{|h|}$ segue que

$$\int_{\Omega_{|h|}} \frac{|T^h \nabla u - \nabla u|^p}{|h|^2} \leq C \int_{\Omega_{|h|}} \big| D^h(\nabla u |\nabla u|^{(p-2)/2}) \big|^2. \tag{1.32}$$

Combinando-se (1.30) e (1.32) temos que

$$\int_{\Omega_{|h|}} \frac{|T^h \nabla u - \nabla u|^p}{|h|^2} \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^{(p-2)} |D^2 u|^2, \ \forall h \neq 0,$$

de onde $u \in \mathcal{N}^{1+2/p,p}$. Agora, tomando-se o supremo em h e somando-se a norma L^p de u dos dois lados, obtemos (1.28). □

1.4 Rudimentos de análise convexa

Introdução

Para conveniência do leitor faremos uma breve introdução sobre a teoria de operadores monótonos maximais em espaços de Banach reflexivos na tentativa de deixarmos a tese menos dependente de outros textos. Assim, o objetivo dessa seção é de apenas servir como referência para os resultados de análise convexa usados nos capítulos 2 e 4. De qualquer forma, duas boas referências no assunto são os livros de Brezis [13] e Barbu [2]. O primeiro trata apenas da teoria em espaços de Hilbert e apesar disso, é uma excelente introdução inclusive fazendo um paralelo entre grafos de $\mathbb{R}^2$ e operadores monótonos de L^2. No segundo, a teoria em espaços de Banach reflexivos é trabalhada com as generalizações esperadas. Também é um livro muito bem escrito com diversos exemplos de aplicações dos resultados sobre monotonicidade apresentados. Faremos a abordagem privilegiando a teoria em espaços de Banach reflexivos, sendo o caso dos espaços de Hilbert, um caso particular óbvio, onde trocamos o produto de dualidade pelo produto de $\mathcal{H}$. Fizemos tal escolha pois em alguns momentos no trabalho (no capítulo 4, mais exatamente) precisaremos de análise convexa tanto em espaços de Banach reflexivos, quanto para o caso particular dos espaços de Hilbert.

Observação 1.4.1. *Parte dos resultados que descreveremos aqui foram enunciados em [2] para espaços de Banach E reflexivos tais que E e E' são estritamente convexos. No entanto, como o próprio Barbu cita em seu livro, pelo teorema da renormalização de Asplund (veja [2] teo. 1.1 pág. 14) todo espaço de Banach reflexivo goza de tal propriedade, a menos de normas equivalentes. Mais ainda, em nosso trabalho tais resultados serão usados apenas quando considerarmos operadores definidos em espaços de Hilbert, de modo que, não nos preocuparemos com a questão da convexidade na discussão seguinte.*

Definições e conceitos fundamentais

Sejam X e Y dois espaços vetoriais reais. Um operador *multivalorado* A de X em Y será entendido como um subconjunto de $X \times Y$. Se $A \subset X \times Y$, definimos

$$\begin{aligned} Ax &= \{y \in Y : [x, y] \in A\}, \\ D(A) &= \{x \in X : Ax \neq \emptyset\}, \\ R(A) &= \bigcup_{x \in D(A)} Ax \text{ e} \\ A^{-1} &= \{[y, x] : [x, y] \in A\}. \end{aligned}$$

Se $A, B \subset X \times Y$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos

$$\begin{aligned} \lambda A &= \{[x, \lambda y] : [x, y] \in A\}, \\ A + B &= \{[x, y + z] : [x, y] \in A \text{ e } [x, z] \in B\} \\ AB &= \{[x, z] : \exists y \in Y \text{ o qual } [x, y] \in A \text{ e } [y, z] \in B\}. \end{aligned}$$

No que segue, os operadores de X em Y não serão diferenciados de seus grafos em $X \times Y$. Se A for "univalorado", i.e., uma função, Ax denotará $A(x)$ ou o conjunto $[x, A(x)]$. Introduziremos um pouco de notação, **exclusiva** para esta seção.

- Se E' for estritamente convexo $\mathcal{J} : E \to E'$ denotará a aplicação de dualidade que neste caso é uma função contínua de E, com a topologia forte, em E', com a topologia fraco-estrela.

Definição 1.4.2. *Seja E um espaço de Banach. Um operador (conjunto) $A \subset E \times E'$ é chamado de monótono se*

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0 \ \forall \ [x_i, y_i] \in A.$$

Definiremos agora os conceitos de monotonia e de maximalidade, ambos essenciais para nosso trabalho.

Definição 1.4.3. *Um operador monótono A será chamado de maximal se não estiver contido propriamente em nenhum outro operador monótono de $E \times E'$, i.e., para cada $[\bar{x}, \bar{y}]$ tal que*

$$\langle x - \bar{x}, y - \bar{y} \rangle \geq 0 \ \forall \ [x, y] \in A$$

então $[\bar{x}, \bar{y}] \in A$, ou seja, $\bar{y} \in A\bar{x}$.

Fica claro da definição acima que se $A \subset E \times E'$ for um operador monótono maximal, então $A^{-1} \subset E' \times E$ também será um operador monótono maximal. Para nós serão importantes os dois seguintes conceitos de continuidade de um operador monótono maximal.

Definição 1.4.4. *Seja A um operador univalorado definido de E em E'.*

i) Dizemos que A é hemicontínuo se $\forall\, x_1$ e $x_2 \in E$ tem-se

$$A(x_1 + tx_2) \overset{*}{\rightharpoonup} A(x) \text{ em } E' \text{ se } t \to 0;$$

ii) Dizemos que A é demicontínuo caso seja fortemente-fracamente contínuo de E em E', i.e.,

$$A(x_n) \overset{*}{\rightharpoonup} A(x) \text{ em } E' \text{ sempre que } x_n \to x \text{ em } E.$$

Vale o seguinte critério para caracterização de um operador monótono maximal:

Proposição 1.4.5. *Considere E um espaço de Banach reflexivo tal que E e E' sejam estritamente convexos. Sejam $\mathcal{J} : E \to E'$ a aplicação de dualidade e A um operador monótono em $E \times E'$. Então A é monótono maximal se, e somente se, para cada $\sigma > 0$*

$$R(A + \sigma\mathcal{J}) = E'.$$

Dem. Veja Barbu [2] pág. 39, teo. 1.2. □

O próximo corolário é importante pois frequentemente estaremos interessados em somas entre a identidade de um determinado espaço e um operador monótono maximal (veja por exemplo a equação (E), pág. 31, onde considerarmos $I + \alpha$)

Corolário 1.4.6. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo, A um operador monótono maximal (o.m.m.) em $E \times E'$ e B um operador (univalorado) hemicontínuo em $E \times E'$. Então $A + B$ é monótono maximal.*

Dem. Veja Barbu [2] pág. 39, cor. 1.1. □

A caracterização de um operador monótono maximal univalorado é muito mais simples. De fato, o próximo resultado é útil por exemplo na prova de que o p-laplaciano é um operador monótono maximal em $(W^{1,p})' \times W^{1,p}$:

Teorema 1.4.7. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e A um operador monótono univalorado de $E \times E'$. Se A for hemicontínuo então, A é maximal.*

Dem. Veja Barbu [2] teorema 1.3 pág. 40. □

Os operadores monótonos maximais possuem uma grande vantagem: podem ser aproximados 'bem' por uma família de funções lipschitziana. A seguir, vamos expor algumas das características gerais dessa regularização.

Regularizações de Yosida

Sejam E e E' espaços de Banach reflexivos (estritamente convexos) e A um operador monótono maximal (o.m.m.) em $E \times E'$ e $\mathcal{J}$ a aplicação de dualidade. Em virtude da proposição 1.4.5 a equação

$$\mathcal{J}(x_\lambda - x) + \lambda A x_\lambda \ni 0$$

possui uma solução $x_\lambda \in D(A)$ para cada $x \in E$ e $\lambda = \sigma^{-1} > 0$ (veja Barbu [2] pág. 41). Usando a monotocidade de $\mathcal{J}$ e de A mostra-se que essa solução é única. Definimos

$$x_\lambda = J_\lambda x, \tag{1.33}$$

$$A_\lambda x_\lambda = -\frac{1}{\lambda}\mathcal{J}(x_\lambda - x), \tag{1.34}$$

para cada $x \in E$ e $\lambda > 0$.

Definição 1.4.8. *Chamamos A_λ de* **regularização de Yosida** *do operador monótono maximal A.*

A seguir, enunciaremos as propriedades de J_λ e A_λ que serão usadas no texto.

Proposição 1.4.9. *Sejam E reflexivo e E' seu dual. Então*

i) *A_λ é um operador monótono e univalorado de E em E';*

ii) *A_λ e J_λ são limitados;*

iii) *A_λ é demicontínuo de E em E';*

iv) *para cada $x \in D(A)$, $\|A_\lambda x\|_{E'} \leq |Ax|$, onde $|Ax| = \inf_{y \in Ax}\{\|y\|_{E'}\}$;*

v) *para cada $x \in \overline{conv D(A)}$, $J_\lambda x \to x$ em E se $\lambda \to 0$;*

vi) *se $\lambda_n \to 0$, $x_n \rightharpoonup x$, $A_{\lambda_n} x_n \overset{*}{\rightharpoonup} y$ e*

$$\limsup_{n \to +\infty} \langle x_n, A_{\lambda_n} x_n \rangle \leq \langle x, y \rangle$$

então $[x, y] \in A$ e $\langle x_n, A_{\lambda_n} x_n \rangle \to \langle x, y \rangle$, se $n \to +\infty$;

vii) *Se adicionalmente $E = H$ for um espaço de Hilbert, então A_λ é lipschitziana com a constante associada dada por $1/\lambda$.*

Observação 1.4.10. *Em particular, note que por (iv), se $0 \in Ax$ então $A_\lambda x = 0$. Veja também que combinando o teorema 1.4.7 com (i) e (iii) segue que A_λ é um operador monótono maximal.*

Para uma prova consulte Barbu [2], pág. 42; veja também Brezis [13], págs. 27 e 28. Durante a demonstração, os dois autores usam o seguinte resultado um pouco mais geral:

Teorema 1.4.11. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e A um operador monótono maximal em $E \times E'$. Considere $[x_n, y_n] \in A$, $x \in E$, $y \in E'$, suponha que*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ e } y_n \overset{*}{\rightharpoonup} y \text{ e que}$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n \rangle \leq \langle x, y \rangle \text{ , se } n \to +\infty.$$

Então $y \in Ax$ e $\langle x_n, A_{\lambda_n} x_n \rangle \to \langle x, y \rangle$ se $n \to +\infty$.

Subdiferenciais

No estudo de operadores multivalorados surge naturalmente a necessidade de algum conceito de derivada ou de suavidade que evidentemente preserve as propriedades importantes de derivação. Chamaremos essa generalização de subdiferencial que é, a grosso modo, o conjunto dos elementos que satisfazem a desigualdade do valor médio. Veremos que esta propriedade será útil na obtenção de estimativas de energia para os problemas que estudaremos.

Considere $\phi : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função própria, convexa e semi-contínua inferiormente (s.c.i.), i.e.,

$$\liminf_{x\rightharpoonup y} \phi(y) \geq \phi(x),\ \forall x \in E,$$

e ϕ não é identicamente $+\infty$.

Definição 1.4.12. *Dada uma função própria, convexa e s.c.i. ϕ e $x \in E$ denotamos por $\partial\phi(x)$ o conjunto de todos os $y \in E'$ tais que*

$$\phi(x) \leq \phi(\bar{x}) + \langle x - \bar{x}, y \rangle \text{ , } \forall \bar{x} \in E.$$

Dizemos que $\partial\phi(x)$ é o subdiferencial de ϕ em x.

Vale a pena salientar que quando ϕ é Gâteaux diferenciável em x o conceito de subdiferencial e de derivada de Gâteaux coincidem.

Teorema 1.4.13. *Se ϕ for própria, convexa e s.c.i. então $\partial\phi$ é um operador monótono maximal de E em E'.*

Dem. Barbu [2] teo. 2.1. pág. 54. □

Consideraremos a seguinte regularização para funções s.c.i. .

Definição 1.4.14. *Para cada $\lambda > 0$ defina*

$$\phi_\lambda(x) = \inf_{u\in E}\{\|x - u\|_E^2/2\lambda + \phi(u)\}, x \in E.$$

Apresentaremos a seguir propriedades interessantes que serão muito exploradas durante o texto.

Proposição 1.4.15. *Sejam E espaço de Banach reflexivo, ϕ função própria, convexa e s.c.i. em E e $A = \partial\phi$. Então ϕ_λ é Gâteaux diferenciável em E, a regularização de Yosida de A coincide com a derivada de ϕ_λ, i.e., $A_\lambda = \partial\phi_\lambda$. Mais ainda,*

$$\phi_\lambda(x) = \|x - J_\lambda x\|/\lambda + \phi(J_\lambda x), \forall\lambda > 0 \text{ e } x \in E,$$
$$\lim_{\lambda\to 0} \phi_\lambda(x) = \phi(x), \forall x \in E,$$
$$\phi_\lambda(J_\lambda x) \le \phi_\lambda(x) \le \phi(x), \forall x \in E \text{ e } \lambda > 0.$$

Dem. Veja Barbu [2] teo. 2.2. pág. 57. Note que lá o resultado é provado para espaços E e E' estritamente convexos. Nos capítulos 2 e 4, essa propriedade só será usada no contexto de espaços de Hilbert. De qualquer modo, a proposição pode ser adaptada para o caso dos espaços de Banach reflexivos. □

Caso melhoremos a estrutura do espaço onde as funções estão definidas evidentemente as conclusões são mais fortes.

Corolário 1.4.16. *No teorema acima, suponha adicionalmente que $E = \mathcal{H}$, um espaço de Hilbert. Então ϕ_λ é Fréchet diferenciável em $\mathcal{H}$ e sua derivada de Fréchet $\partial\phi_\lambda = A_\lambda$ é lipschitziana em $\mathcal{H}$.*

Dem. Veja proposição 2.11, pág.39, de Brezis [13] para os detalhes. □

1.4.1 Estendendo um operador monótono maximal

No presente texto, trabalharemos quase sempre com operadores monótomos maximais (i.e. grafos) em $\mathbb{R}^2$, de modo a preservarmos a interpretação física do modelo. Entretanto, por razões técnicas, em alguns momentos fica mais confortável trabalharmos com operadores definidos em $L^2(0,T;L^2)$. Evidentemente, é necessário tomar o cuidado de que a extensão preserve as propriedades mais importantes para nossa análise. Veja que se perdermos a informação sobre o domínio do operador monótono maximal α em $\mathbb{R}$ (veja por exemplo (1), pág. 4), a interpretação física do modelo é comprometida.

Procederemos da seguinte maneira: no capítulo 2 consideraremos os operadores monótonos maximais $\alpha = \partial\Gamma$ e $\beta = \partial\Lambda$, ambos em $\mathbb{R}^2$. Porém, quando provarmos que $\eta \in \alpha(\omega_t)$ e $\xi \in \beta(\omega)$, estes operadores na realidade serão extensões $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ de α e β a $L^2(0,T;L^2) \times L^2(0,T;L^2)$. Para maiores detalhes veja por exemplo Brezis [13], ex. 2.1.3 pág. 21 e ex. 2.8.3 pág. 47. Tais extensões possuem propriedades muito interessantes que exploraremos exaustivamente durante nosso trabalho. Precisamente, dadas α_λ e β_λ, respectivamente regularizações de Yosida de α e β, vale que:

- $\forall\omega \in L^2(0,T;L^2), (\omega, \alpha_\lambda(\omega)) \in (\bar{\alpha})_\lambda$ e $(\omega, \beta_\lambda(\omega)) \in (\bar{\beta})_\lambda$;
- $D(\bar{\alpha}) \subset \{\omega : \omega \in L^2(0,T;L^2)$ e $\omega(x,t) \in D(\alpha)$ q.t.p. em $Q\}$;

- $\overline{(\alpha_\lambda)} = (\bar{\alpha})_\lambda$ (a extensão comuta com a regularização de Yosida);

o mesmo valendo para $D(\bar{\beta})$. Observe que nossa extensão transfere as propriedades relevantes daquelas em $\mathbb{R}^2$ aos espaços de Hilbert. Como abuso de notação, escreveremos apenas α e β no que segue.

Por último, enunciaremos o seguinte resultado, uma espécie de regra da cadeia para operadores monótonos maximais e funções convexas s.c.i.

Proposição 1.4.17. *Sejam $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ uma função convexa s.c.i. e A um operador monótono maximal em $L^2(0,T;\mathcal{H})$ tal que $\partial f = A$. Considere $u \in W^{1,2}(0,T;\mathcal{H})$ tal que $u(t) \in D(A)$ q.t.p. em $(0,T)$ e suponha que exista $g \in L^2(0,T;\mathcal{H})$ tal que $g(t) \in A(u(t))$ q.t.p. em $(0,T)$. Então a função $f(u(.))$ é absolutamente contínua em $[0,T]$ e mais ainda, vale que*

$$\frac{d}{dt}f(u(t)) = (h, \frac{d}{dt}u(t)),\ \text{q.t.p. em } (0,T)\ \forall h \in A(u(t)).$$

No capítulo 4, ainda consideraremos $\alpha = \partial\Gamma$ grafo de $\mathbb{R}^2$ com domínio convexo e faremos a mesma extensão para α.

1.5 Alguns teoremas importantes

Nesta seção enunciaremos três teoremas clássicos que serão muito utilizados durante o texto. Um deles é um lema do tipo Aubin-Lions, o outro é resultado sobre minimização de funcionais em conjuntos convexos e o último um teorema de ponto fixo.

1.5.1 Lema de Aubin-Lions

Trata-se de um resultado fundamental para a aplicação de métodos de compacidade no contexto de equações de evolução. Nossa versão segue os resultados de Simon em [45], que é uma ótima referência no assunto.

Teorema 1.5.1. *(Lema de Aubin-Lions) Sejam X, Y e B espaços de Banach tais que*

$$X \hookrightarrow\hookrightarrow B \hookrightarrow Y.$$

Considere $F \subset L^p(0,T;X)$.

- *Se F é limitado em $L^p(0,T;X)$, e F_t em $L^1(0,T;Y)$ e $1 \leq p < +\infty$ então F é relativamente compacto em $L^p(0,T;B)$;*
- *Se F é limitado em $L^\infty(0,T;X)$, e F_t em $L^r(0,T;Y)$ para $r > 1$ então F é relativamente compacto em $C([0,T];B)$;*

Para uma prova veja Simon em [45], cor. 4, pág. 85.

1.5.2 Minimização de funcionais

Usaremos este resultado quando formos estudar problemas que envolvem operadores do tipo p-laplaciano.

Teorema 1.5.2. *Sejam X um espaço de Banach reflexivo com norma $\|.\|_X$, $M \subset X$ um subconjunto fracamente fechado de X e $I : X \to \mathbb{R} \cup +\infty$ um funcional estendido. Suponha que*

- *se $\|u\|_X \to +\infty, u \in M$ então*

$$I(u) \to +\infty \text{ (coercividade).} \tag{1.35}$$

- *Para qualquer $u \in M$ e qualquer sequência $\{u_m\}$ em M tal que $u_m \rightharpoonup u$ fracamente em X vale que*

$$I(u) \leq \liminf_{m \to +\infty} I(u_m) \text{ (semicontinuidade inferior sequencial).} \tag{1.36}$$

Então I é limitado inferiormente em M e atinge seu ínfimo em M.

Para uma prova, veja Struwe em [48], teo. 1.1.2, pág. 4.

1.5.3 Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder

Esta é uma versão do teorema do ponto fixo de Leray-Schauder muito usada no contexto de equações diferenciais parciais de evolução.

Teorema 1.5.3. *Sejam B um espaço de Banach e $K \subset B$, B aberto, conexo e limitado. Considere $M > 0$ e suponha que a bola $B(0, M) \subset\subset K$. Considere também a família de operadores $T_\lambda : \bar{K} \to \bar{K}$, onde $\lambda \in [0, 1]$, tais que:*

1) *$T_\lambda(.)$ é contínua em $\bar{K}$ para todo $\lambda \in [0, 1]$;*

2) *$T_\lambda(.)$ é compacta em $\bar{K}$ para todo $\lambda \in [0, 1]$;*

3) *$T_\lambda(.)$ é uniformemente contínua com relação a λ em $[0, 1]$;*

4) *$\|T_\lambda(u)\| \leq M$ para todo $u \in \bar{K}$ tal que $T_\lambda(u) = u$ e para $\lambda \in [0, 1]$;*

5) *Existe um número ímpar de u_n's $\in \bar{K}$ tais que $T_0(u_n) = u_n$.*

Então existe $u \in \bar{K}$ o qual satisfaz $T_1(u) = u$.

Observe que a convexidade não é pedida para o conjunto K pois já sabemos que $T(K) \subset B(0, M)$, e este último é convexo. Para mais detalhes do teorema acima veja Ladyzhenskaya e Ural'tseva, [31] pág. 293, teo. 8.1 e também o terceiro parágrafo da pág. 296. Para a versão original veja Leray e Schauder, [33] págs. 64, teo. 1. Para as questões sobre teoria do grau envolvidas (definição de grau de Leray) sugerimos [41] págs. 4 e 31.

CAPÍTULO 2

O MODELO A: CAMPO DE FASES IRREVERSÍVEL COM FLUXO DE NAVIER-STOKES SINGULAR (CASO BIDIMENSIONAL)

Neste capítulo analisaremos o seguinte modelo

$$
\begin{array}{ll}
(F_A) & u_t + u \cdot \nabla u - \Delta u + \nabla P + K(\omega)u = \zeta\theta \text{ em } Q_{ml}, \\
(T_A) & \theta_t + \omega_t - \Delta\theta + u \cdot \nabla\theta = g(x,t) \text{ em } Q, \\
(C_A) & \omega_t + \alpha(\omega_t) - \Delta\omega + \beta(\omega) \ni \theta + f(\omega) \text{ em } Q, \\
& \nabla \cdot u = 0 \text{ em } Q_{ml}, \\
& u = 0 \text{ em } Q_s, \\
& u = 0,\ \partial\theta/\partial\nu = \partial\omega/\partial\nu = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0,T), \\
& \theta(.,0) = \theta_0,\ \omega(.,0) = \omega_0 \text{ em } \Omega, \\
& u(.,0) = u_0 \text{ em } \Omega.
\end{array}
$$

que está relacionado com uma mudança de estado irreversível do tipo líquido-sólido. Ela é dita irreversível pois caso o material se torne sólido, ele não pode retornar ao estado líquido, sem perda de propriedades físico-químicas, o que não é considerado no modelo. Tal fenômeno é comum em mudanças de fase de polímeros *termorrígidos* como matéria orgânica (uma vez que o ovo foi frito, não há como fazê-lo voltar a ser como antes) ou cola. Para mais detalhes veja Bonfanti *et al.* em [11].

As equações $(F_A) - (C_A)$ serão chamadas somente de problema **A**, ou modelo **A**.

Passaremos a explicar as variáveis e o diversos termos das equações do modelo. Como já foi dito na introdução, $0 < T < +\infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, porém, consideraremos apenas o caso bidimensional, isto é, $N = 2$. A razão para isso ficará mais clara posteriormente. Aqui ν denota o vetor normal unitário a $\partial\Omega$. As variáveis u, P, θ e ω são respectivamente a velocidade, pressão hidrostática, a temperatura e o chamado *campo de fase* que no caso do presente modelo é exatamente a fração do material que encontra-se no estado sólido; em outras palavras $\omega(x,t)$ nos diz em qual estado físico o ponto (x,t) está.

O termo $\zeta\theta$ na primeira equação está relacionada com as forças de empuxo através de uma aproximação de Boussinesq; ζ é um vetor constante associado ao coeficiente de expansão térmica do material e à aceleração da gravidade. $K(\omega)$ é chamado termo de Carman-Kozeny e está associado às forças de atrito interno no fluxo causadas pela solidificação do material.

Chamamos (F_A) de uma equação do tipo Navier-Stokes singular, pois $K(.)$ denota uma função real suave e crescente em $x \in (-\infty, 1)$ que 'explode' em $x = 1$. Assim, $K(.)$ é um termo que força o fluxo fluido a ser nulo na parte sólida do material. Consideraremos, por simplicidade de exposição mas sem perda de generalidade do ponto de vista matemático, as outras constantes físicas como calor latente ou viscosidade iguais a um nas equações do problema **A**.

A equação (T_A) é uma equação do calor alterada pela interação com o campo de fases e com os termos de movimentação da parte líquida do material. Além disso, $g(x,t)$ está associado com as fontes e sorvedouros de calor do sistema.

Na equação do campo de fases E, $\alpha(.)$ e $\beta(.)$ denotam dois operadores monótonos maximais em $\mathbb{R}^2$ e uma restrição em seus domínios nos indica a interpretação física correta do parâmetro de fase ω e também da irreversibilidade da mudança de estado físico. Escolheremos seus domínios da seguinte maneira:

$$D(\alpha) = [0, +\infty) \text{ e } D(\beta) = [0, 1].$$

Assim, garantimos que $\omega_t \geq 0$ e que $0 \leq \omega \leq 1$, sempre que ω satisfizer a equação (C_A).

Os conjuntos Q_s e Q_{ml} são respectivamente as regiões onde o material encontra-se no estado sólido e em um estado intermediário entre o líquido e sólido. Ambos dependem da variável ω de forma que o problema **A** é do tipo **fronteira livre**. Vale dizer que a região intermediária Q_{ml} pode ser vista com a união disjunta entre duas regiões: Q_m onde o material encontra-se no estado "pastoso"e Q_l onde encontra-se no estado líquido. Mais ainda, para darmos algum sentido à equação (F_A), precisamos garantir que Q_{ml} será ao menos um aberto de $\mathbb{R}^2 \times (0,T)$.

O objetivo deste capítulo é obter a existência de solução global para o modelo **A**, que inclui um campo de fases irreversível acoplado com uma equação de Navier-Stokes singular. Nossa abordagem à irreversibilidade segue as ideias gerais de Bonfanti *et al* [11] com as modificações necessárias para a inclusão do fluxo do material não sólido. Além da equação para o fluxo u, um termo de advecção foi incluído na equação do calor, o que nos força a obter de forma distinta algumas das estimativas a priori. Para lidarmos com o fluxo na parte não sólida, nossa abordagem segue Planas e Boldrini em [42], onde é estudado o caso de mudança da fase reversível, no entanto, para ligas binárias.

É importante salientar que a restrição na dimensão espacial é de natureza técnica. Na realidade, isto é feito para evitarmos problemas típicos da equação de Navier-Stokes em dimensões maiores como por exemplo, não unicidade de solução ou falta de regularidade para a velocidade do fluido, fatos que comprometeriam a técnica aqui empregada.

2.1 Hipóteses, definições básicas e teorema de existência para o modelo A

Primeiramente, fixaremos a notação básica para este capítulo. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 e $G \subset \Omega$ um conjunto aberto. Introduzimos os seguintes espaços de funções:

$$\mathcal{V}(G) = \{\phi \in (C_0^\infty(G))^2 : \nabla \cdot \phi = 0\},$$
$$H(G) = \overline{\mathcal{V}(G)}^{(L^2)^2},\ V(G) = \overline{\mathcal{V}(G)}^{(W^{1,2})^2},\ W(G) = \overline{\mathcal{V}(G)}^{(W^{2,2})^2}.$$

Caso $G = \Omega$ apenas escreveremos H, V e W. De agora em diante, como a diferença ficará clara no contexto, será usada a mesma notação para vetores em $\mathbb{R}^2$ e escalares. Denotaremos por $(.,.)$ o produto interno em L^2 ou $(L^2)^2$, por u um campo vetorial apesar de θ e ω denotarem funções escalares. Indicaremos por $\|.\|_{W^{s,p}}$ a norma em $(W^{s,p})^2$ e $W^{s,p}$. Além disso, $\langle .,. \rangle$ denota o produto de dualidade entre $W^{1,2}$ e $(W^{1,2})'$.

Mais ainda, para cada $t \in (0,T)$ nós definimos

$$\begin{aligned}
\Omega_s(t) &= \{x \in \Omega : \omega(x,t) = 1\}, \text{ a região sólida,}\\
\Omega_m(t) &= \{x \in \Omega : 0 < \omega(x,t) < 1\}, \text{ a região pastosa,}\\
\Omega_l(t) &= \{x \in \Omega : \omega(x,t) = 0\}, \text{a região líquida,}\\
\Omega_{ml}(t) &= \Omega_m(t) \cup \Omega_l(t), \text{ a região não sólida.}
\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever $Q_s = \{(x,t) \in Q : \omega(x,t) = 1\} = \{(x,t) : x \in \Omega_s(t)\}$ e $Q_{ml} = \{(x,t) \in Q : 0 \leq \omega(x,t) < 1\} = \{(x,t) : x \in \Omega_{ml}(t)\}$. Veja que dessa forma, se garantirmos a continuidade de ω em Q, então asseguramos que Q_{ml} será um conjunto aberto, o que é essencial para a interpretação do modelo. Como ficará mais claro posteriomente, escolheremos ω_0 regular o suficiente para que $\Omega_{ml}(0) = \{x \in \Omega : 0 \leq \omega_0(x) < 1\}$ seja também um **um conjunto aberto**.

Neste capítulo faremos as seguintes hipóteses básicas:

(A1) $\alpha \subset \mathbb{R}^2$ é um operador monótono maximal tal que $\alpha(0) \ni 0$ cujo domínio é $D(\alpha) = [0, +\infty)$;

(A2) $\beta \subset \mathbb{R}^2$ é um operador monótono maximal tal que $\beta(0) \ni 0$ e $D(\beta) = [0, 1]$.

Como condições iniciais tomaremos

(A3) $\theta_0 \in W^{1,2}$;

(A4) $\omega_0 \in W^{2,2}$;

(A5) $u_0 \in H$ e $u_0 = 0$ em $\Omega_s(0)$.

Em primeiro lugar, note que $\omega_0 \in C(\overline{\Omega})$, de modo que $\Omega_{ml}(0)$ é um **aberto** de $\mathbb{R}^2$. Mais ainda, valem aqui algumas observações sobre as condições iniciais para o campo de velocidades u; para nós além da usual $u_0 \in H$ pedimos que $u_0 = 0$ em $\Omega_s(0)$. Veja que a última restrição segue naturalmente da interpretação física que damos para o comportamento do campo de velocidades na região $\Omega_s(0)$. Em um certo sentido, esta é apenas uma condição de compatibilidade com o fato de que esperamos $u = 0$ em $\Omega_s(t)$.

Observação 2.1.1. *O leitor pode se perguntar por exemplos de campos não nulos u_0 satisfazendo $(\mathbf{A5})$, afinal a restrição $u_0 = 0$ em um subconjunto de Ω evidentemente não é trivial. Um caso simples segue de quando consideramos algum $\hat{u}_0 \in H(\Omega_{ml}(0))$ tal que $supp\ \hat{u}_0 \subset\subset \Omega_{ml}(0)$ de forma que*

$$u_0 = \begin{cases} \hat{u}_0, \ \textit{em}\ \Omega_{ml}(0) \\ 0, \ \textit{em}\ \Omega_s(0) \end{cases}$$

satifaz $(\mathbf{A5})$. Outros casos podem ser mais complicados de se obter pois em geral dependerão da geometria de $\Omega_{ml}(0)$.

Como condições adicionais consideramos

$(\mathbf{A6})$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f$ é lipschitziana;

$(\mathbf{A7})$ $g : Q \longrightarrow \mathbb{R}, g$ uma função que pertence a $L^2(0, T; L^2)$;

$(\mathbf{A8})$ $K : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, K \geq 0, K \in C^1([0, 1)), K(0) = 0, K'(x) \geq 0$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} K(x) = +\infty$;

$(\mathbf{A9})$ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. A fronteira $\partial\Omega$ é uma curva de classe C^1.

Recordamos também que nesse capítulo restringiremos a dimensão $N = 2$.

Introduzimos a seguir um operador auxiliar que nos ajudará a obter algumas estimativas de energia

$$\gamma = \alpha^{-1} \subset \mathbb{R}^2,$$

tal que γ é um operador monótono maximal com $\gamma(0) \ni 0$. Além disso, consideraremos $\Gamma : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ uma função própria, convexa e semi-contínua inferiormente (s.c.i.) tal que $\Gamma(0) = 0$ e γ é o subdiferencial de Γ, i.e.,

$$\partial\Gamma = \gamma. \tag{2.1}$$

Analogamente, consideramos $\Lambda : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ uma outra função própria e convexa s.c.i. com $\Lambda(0) = 0$ mas agora β é o subdiferencial de Λ, o que significa que $\partial\Lambda = \beta$. Então, assumiremos as seguintes hipóteses auxiliares que serão importantes para podermos regularizar convenientemente os dados iniciais do problema **A** (veja o lema 2.2.1)

$(\mathbf{A10})$ $\Lambda(\omega_0) \in L^1$;

$(\mathbf{A11})$ $\exists\, \eta_0 \in L^2$ tal que $\Gamma(\theta_0 + f(\omega_0) + \Delta\omega_0 - \eta_0) \in L^1$ e $\eta_0 \in \beta(\omega_0)$ q.t.p. em Ω.

Terminada esta breve introdução, podemos enunciar o resultado principal do capítulo.

Teorema 2.1.2. *(teorema A) Nas hipóteses* **(A1)-(A11)** *existe uma quíntupla* $(\theta, \omega, u, \eta, \xi)$ *tal que*

$$\theta \in L^\infty(0,T;W^{1,2}) \cap W^{1,2}(0,T;L^2) \cap L^2(0,T;W^{2,2}), \tag{2.2}$$
$$\omega \in L^\infty(0,T;W^{2,2}) \cap W^{1,2}(0,T;W^{1,2}),\ \omega_t \in L^\infty(0,T;L^2), \tag{2.3}$$
$$u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H), \tag{2.4}$$
$$\xi \in L^\infty(0,T;L^2) \text{ e } \eta \in L^\infty(0,T;L^2), \tag{2.5}$$

satisfazendo

$$\begin{aligned}(u(t),\phi(t)) - \int_0^t (u,\phi_t)\,ds + \int_0^t (u\cdot\nabla u,\phi)\,ds + \int_0^t \nabla u\cdot\nabla\phi\,ds \qquad (2.6)\\ + \int_0^t (K(\omega)u,\phi)\,ds = \int_0^t (\zeta\theta,\phi)\,ds + (u_0,\phi(0)) \text{ q.t.p. } t \in (0,T),\end{aligned}$$
$$\theta_t + \omega_t - \Delta\theta + u\cdot\nabla\theta = g(x,t) \text{ q.t.p. em } \quad Q, \tag{2.7}$$
$$\omega_t + \xi - \Delta\omega + \eta = \theta + f(\omega) \text{ q.t.p. em } \quad Q, \tag{2.8}$$

para cada $\phi \in L^2(0,T;V(\Omega_{ml}(t))) \cap W^{1,2}(0,T;H(\Omega_{ml}(t))$ *com suporte compacto contido em* $Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$. *Mais ainda,*

$$\xi \in \alpha(\omega_t) \qquad \text{q.t.p. em } Q, \tag{2.9}$$
$$\eta \in \beta(\omega) \qquad \text{q.t.p. em } Q, \tag{2.10}$$
$$u = 0, \partial\theta/\partial\nu = \partial\omega/\partial\nu = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \tag{2.11}$$
$$u = 0 \qquad \text{q.t.p. em } Q_s, \tag{2.12}$$
$$\theta(.,0) = \theta_0,\ \omega(.,0) = \omega_0 \qquad \text{q.t.p. em } \Omega, \tag{2.13}$$
$$u(0) = u_0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega_{ml}(0). \tag{2.14}$$

Observação 2.1.3. *Nos capítulos 2, 3 e 4, usaremos algumas vezes que se* $u \in H_r$ *(veja pág. 10) então*

$$\int_\Omega u\cdot\nabla\phi\phi = 0,\ \forall\phi \in W^{1,p},$$

desde que $1/r + 1/p + 1/p^* \leq 1$. *Esse fato é consequência de que div* $u = 0$ *e é absolutamente essencial no estudo de* **fluidos incompressíveis**. *Uma prova pode ser encontrada no apêndice (veja lema 5.2.1, pág. 125).*

2.2 Problema auxiliar

Nesta seção, consideraremos um problema auxiliar relacionado com o modelo **A**. Este consiste em apenas duas das três equações originais e não linearidades lipschitzianas ao invés dos grafos monótonos. Mais precisamente, dados $\delta > 0$ e $u \in L^2(0,T;V) \cap$

$L^\infty(0,T;H)$ consideramos o problema

$$\theta_t^\delta + \omega_t^\delta - \Delta\theta^\delta + u\cdot\nabla\theta^\delta = g(x,t) \qquad \text{q.t.p. em } Q, \tag{2.15}$$
$$\omega_t^\delta + \alpha_\delta(\omega_t^\delta) - \Delta\omega^\delta + \beta_\delta(\omega^\delta) = \theta^\delta + f(\omega^\delta) \qquad \text{q.t.p. em } Q, \tag{2.16}$$
$$\partial\theta^\delta/\partial\nu = \partial\omega^\delta/\partial\nu = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega\times(0,T), \tag{2.17}$$
$$\theta^\delta(.,0) = \theta_0^\delta,\ \omega^\delta(.,0) = \omega_0^\delta \qquad \text{q.t.p. em } \Omega. \tag{2.18}$$

Aqui α_δ, β_δ, θ_0^δ e ω_0^δ são "boas"aproximações de α, β, θ_0 e ω_0 respectivamente, as quais descreveremos agora. Em primeiro lugar, consideramos α_δ a seguinte aproximação monónota maximal e lipschitziana de α

$$\alpha_\delta = (\gamma_\delta + \delta I)^{-1}, \tag{2.19}$$

onde γ_δ é a aproximação de Yosida de γ e I é a identidade (veja as definições 1.4.3, pág. 24, 1.4.8, pág. 26 e o corolário 1.4.6, pág. 25)

É bem conhecido o fato de que existe uma função própria, convexa e s.c.i. Γ_δ naturalmente associada a γ_δ,

$$\begin{aligned}&\Gamma_\delta : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty),\ \text{tal que } \Gamma_\delta \text{ é Fréchet diferenciável,}\\ &\partial\Gamma_\delta = \gamma_\delta \text{ e } 0 \le \Gamma_\delta(x) \le \Gamma(x)\ \forall\, x\in\mathbb{R},\end{aligned} \tag{2.20}$$

(veja a definição de Γ, em (2.1) a proposição 1.4.15, pág. 28 e o corolário 1.4.16, pág. 28).

Em segundo lugar, β_δ denotará a regularização de Yosida de β e Λ_δ a função própria e convexa s.c.i. correspondente com propriedades análogas as de (2.20). Observe que a aproximação para α é diferente das outras e um pouco mais complexa, no entanto, tal escolha nos permite obter mais estimativas de energia (veja o lema 2.4.5).

Precisamos ainda introduzir as seguintes aproximações para os dados iniciais.

Lema 2.2.1. *Sejam $\theta_0 \in W^{1,2}$, $\omega_0 \in W^{2,2}$ e $\xi_0 = \theta_0 + f(\omega_0) - \eta_0 + \Delta\omega_0$, onde $\eta_0 \in \beta(\omega_0)$ e $\Gamma(\xi_0) \in L^1$. Existem $\xi_0^\delta \in W^{2,2}$, $\theta_0^\delta \in W^{1,2}$ e $\omega_0^\delta \in W^{2,2}$ aproximações de ξ_0, θ_0, ω_0, respectivamente e $C>0$, o qual não depende de $0<\delta<1$, tais que, se $\delta\to 0$:*

$$\int_\Omega \Gamma_\delta(\xi_0^\delta) \le \int_\Omega \Gamma(\xi_0), \tag{2.21}$$
$$\int_\Omega \Lambda_\delta(\omega_0^\delta) \to \int_\Omega \Lambda(\omega_0), \tag{2.22}$$
$$\xi_0^\delta \to \xi_0 \text{ em } L^2, \tag{2.23}$$
$$\theta_0^\delta \to \theta_0 \text{ em } W^{1,2}, \tag{2.24}$$
$$\omega_0^\delta \to \omega_0 \text{ em } W^{1,2} \ \text{ e } \ \|\Delta\omega_0^\delta\|_{L^2} \le C, \tag{2.25}$$
$$\beta_\delta(\omega_0^\delta) \rightharpoonup \eta_0 \text{ em } L^2 \ \text{ e } \ \|\beta_\delta(\omega_0^\delta)\|_{L^2} \le C. \tag{2.26}$$

Dem. Para cada δ, seja $\xi_0^\delta \in W^{2,2}$ a única solução de

$$\begin{aligned}\xi_0^\delta - \delta\Delta\xi_0^\delta &= \xi_0 \qquad \text{em } \Omega,\\ \partial\xi_0^\delta/\partial\nu &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Facilmente prova-se que $\|\xi_0^\delta\|_{L^2}^2 + \delta\|\nabla\xi_0\|_{L^2}^2\| \leq \|\xi_0\|_{L^2}^2$ e obtemos a (2.23). De fato, veja que

$$\|\xi_0^\delta - \xi_0\|_{L^2}^2 + \delta\|\nabla\xi_0\|_{L^2}^2 = \int_\Omega \delta\nabla\xi_0^\delta \cdot \nabla\xi_0,$$

e a afirmação segue. Mais ainda, (2.21) segue de **(A11)**, da monotonicidade de γ_δ e da definição de Γ_δ, por exemplo, veja Barbu [2] pág. 281-282.

Agora, seja $\omega_0^\delta \in W^{2,2}$ a solução do seguinte problema.

$$\begin{aligned} \omega_0^\delta - \Delta\omega_0^\delta + \beta_\delta(\omega_0^\delta) = -\xi_0^\delta + \theta_0 + \omega_0 + f(\omega_0) \qquad &\text{em } \Omega, \\ \partial\omega_0^\delta/\partial\nu = 0 \quad &\text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

A existência de ω_0^δ segue de Barbu [2], corolário 1.3 pág. 48 e a unicidade segue da monotonicidade de β_δ (lembre-se de que $\beta_\delta(0) = 0$).

Observemos que a monotonicidade de β_δ nos garante que $\beta_\delta' \geq 0$. Dito isso, multiplicando a última equação por ω_0^δ, $-\Delta\omega_0^\delta$, $\beta_\delta(\omega_0^\delta)$ e integrando por partes, obtemos estimativas de energia as quais garantem a existência de $\tilde{\omega}_0 \in W^{2,2}$ e $\tilde{\eta}_0 \in L^2$ tais que $\omega_0^\delta \rightharpoonup \tilde{\omega}_0$ em $W^{2,2}$ e $\beta_\delta(\omega_0^\delta) \rightharpoonup \tilde{\eta}_0$ em L^2, se $\delta \to 0$.

Mais ainda, devido à unicidade de solução do problema (a unicidade vem do fato de β ser um operador monótono)

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_0 - \Delta\tilde{\omega}_0 + \tilde{\eta}_0 = -\xi_0 + \theta_0 + f(\omega_0) + \omega_0 \qquad &\text{em } \Omega, \\ \tilde{\eta}_0 \in \beta(\tilde{\omega}_0) \text{ e } \partial\tilde{\omega}_0/\partial\nu = 0 \quad &\text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

obtemos (2.25) e (2.26).

Para (2.24), basta definirmos $\theta_0^\delta = \theta_0 + \omega_0 - \omega_0^\delta$.

Por fim, temos que

$$\left| \int_\Omega \Lambda_\delta(\omega_0^\delta) - \Lambda_\delta(\omega_0) \right| \leq \int_\Omega \big(|\beta_\delta(\omega_0^\delta)| + |\beta_\delta(\omega_0)|\big)|\omega_0^\delta - \omega_0|$$

(veja a definição 1.4.12, pág. 27). Logo, temos que

$$\left| \int_\Omega \Lambda_\delta(\omega_0^\delta) - \Lambda(\omega_0) \right| \leq \int_\Omega \big(|\beta_\delta(\omega_0^\delta)| + |\beta_\delta(\omega_0)|\big)|\omega_0^\delta - \omega_0| + \int_\Omega |\Lambda_\delta(\omega_0) - \Lambda(\omega_0)|.$$

Então, a convergência (2.22) segue da definição de Λ_δ, **(A10)**, (2.25) e (2.26).

□

O resultado principal desta seção é o seguinte.

Proposição 2.2.2. *Dado $\delta > 0$, existe um único$(\theta^\delta, \omega^\delta)$ tal que*

$$\begin{aligned} &\theta^\delta \in L^\infty(0,T;W^{1,2}) \cap L^2(0,T;W^{2,2}) \cap W^{1,2}(0,T;L^2); \\ &\omega^\delta \in L^\infty(0,T;W^{2,2}) \cap W^{1,2}(0,T;W^{1,2}),\ \omega_t^\delta \in L^\infty(0,T;L^2) \end{aligned}$$

e a dupla $(\theta^\delta, \omega^\delta)$ satisfaz as equações (2.15)-(2.16) *q.t.p. em Ω e as condições* (2.17)-(2.18).

A prova será deixada para o fim da seção; antes enunciaremos e provaremos alguns resultados preliminares.

2.3 Problema auxiliar aproximado

Consideremos inicialmente o parâmetro de discretização τ, $0 < \tau < 1$ e $M \in \mathbb{N}$, os quais

$$M\tau = T. \tag{2.27}$$

Ao longo do trabalho escolheremos uma cota superior conveniente para $\tau > 0$ sendo

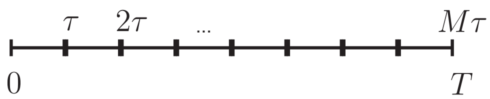

Figura 2.1: Discretização no tempo

que, por simplicidade de exposição, preferiremos não explicitá-la já que o objetivo será tomar o limite $\tau \to 0$.

Seja o seguinte esquema iterativo: dadas $\theta_{i-1} \in W^{1,2}$ e $\omega_{i-1} \in W^{1,2}$ encontrar

$$\theta_i \in W^{2,2} \text{ e } \omega_i \in W^{2,2}$$

os quais

$$\theta_0 = \theta_0^\delta, \text{ e } \omega_0 = \omega_0^\delta, \tag{2.28}$$

$$\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\tau} + \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} - \Delta\theta_i + u_i \cdot \nabla\theta_i = g_i, \tag{2.29}$$

$$\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} + \alpha_\delta\left(\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right) - \Delta\omega_i + \beta_\delta(\omega_i) = \theta_i + f(\omega_i), \tag{2.30}$$

$$\partial\theta_i/\partial\nu = \partial\omega_i/\partial\nu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \tag{2.31}$$

onde para u e g dadas definimos

$$\begin{aligned} g_i &= \frac{1}{\tau}\int_{\tau(i-1)}^{\tau i} g(x,s)\, ds, \\ u_i &= \frac{1}{\tau}\int_{\tau(i-1)}^{\tau i} u(x,s)\, ds. \end{aligned}$$

Ressaltamos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \tau\|g_i\|_{L^2}^2 &\leq \sum_{i=1}^{m}\left(\int_{\tau(i-1)}^{i\tau} \|g(.,s)\|_{L^2}\, ds\right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \tau\left(\int_{\tau(i-1)}^{i\tau} \|g(.,s)\|_{L^2}^2\, ds\right) \\ &\leq \|g\|_{L^2(0,T;L^2)}^2, \text{ se } \tau < 1. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Aqui, $\theta_0^\delta \in W^{1,2}$ e $\omega_0^\delta \in W^{2,2}$ são respectivamente aproximações de θ_0 e ω_0 dadas pelo lema 2.2.1, pág. 36.

Observação 2.3.1. *Observamos que para mostrar a existência de solução para este problema discretizado será necessário restringirmos em alguns momentos-chave o valor máximo de τ. Ressaltamos que, depois que alguma restrição for imposta, será assumido para o resto do capítulo que a restrição mais severa será a considerada.*

Vale o seguinte resultado preliminar:

Proposição 2.3.2. *Para $i = 1, ..., M$ sejam $\theta_{i-1} \in W^{1,2}$ e $\omega_{i-1} \in W^{2,2}$ dados. Se $\tau > 0$ for suficientemente pequeno, existem $\theta_i \in W^{2,2}$ e $\omega_i \in W^{3,2}$ satisfazendo* (2.28)-(2.31).

Para provarmos a proposição 2.3.2, precisaremos de dois simples porém importantes lemas. Suas provas seguem do teorema do ponto fixo de Leray-Schauder e de estimativas de energia básicas, análogas a outras proposições ao longo do texto. Ressaltamos que no lema 2.3.4, exploraremos o fato de que α_δ e β_δ são monótonas e lipschitzianas, o que será repetido exaustivamente em nosso trabalho.

Lema 2.3.3. *Dados v,g e $w \in L^2$, $u \in V$ e $\tau > 0$, existe uma única $\theta \in W^{2,2}$ tal que*

$$\frac{\theta - v}{\tau} + u \cdot \nabla\theta - \Delta\theta = g + \frac{\omega}{\tau} \quad \textit{q.t.p. em } \Omega,$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial\nu} = 0 \quad \textit{sobre } \partial\Omega,$$

para cada $\tau > 0$.

Dem.

Usaremos o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder. Considere $0 \leq \lambda \leq 1$ e defina a família de operadores $T_\lambda : W^{1,2} \longrightarrow W^{1,2}$ onde $T_\lambda(\theta) = \phi$ se, e somente se, ϕ é a solução da seguinte E.D.P.:

$$\frac{\phi - v}{\tau} + \lambda u \cdot \nabla\theta - \Delta\phi = g + \frac{\omega}{\tau} \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Observe que se definirmos $G_\lambda = g + \omega/\tau - \lambda u \cdot \nabla\theta + v/\tau$, então $G_\lambda \in L^q$, para cada $1 < q < 2$, pois $u \in V$. De fato, lembre que como $N = 2$, pelo teorema de imersão de Sobolev $W^{1,2} \hookrightarrow L^p$ se $1 \leq p < +\infty$. Considere então $1 < q < 2$ e r tais que $q^* = 2q/(2-q) \leq r < +\infty$. Assim,

$$\frac{q}{r} + \frac{q}{2} \leq 1.$$

Logo para cada $1 < q < 2$ temos

$$\int_\Omega |u \cdot \nabla\theta|^q \leq C\bigg(\int_\Omega |u|^r\bigg)^{q/r}\bigg(\int_\Omega |\nabla\theta|^2\bigg)^{q/2}.$$

Se fixarmos $1 < q < 2$, existe um único $\phi \in W^{2,q}$ solução da E.D.P. se $\tau > 0$ for suficientemente pequeno (veja Grisvard [26] teorema 2.4.1.3 pág.112), de forma que T_λ está bem definida.

Agora, para $\psi \in W^{2,q}$ tal que

$$\frac{\psi}{\tau} - \Delta\psi = -\lambda u \cdot \nabla\theta \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \qquad (2.33)$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

temos que

$$\|\psi\|_{W^{2,q}} \leq C(\tau)\|u \cdot \nabla\theta\|_{L^q} \leq C(\tau)\|u\|^q_{\frac{2q}{2-q}}\|\nabla\theta\|^q_{L^2},$$

então, o operador T_λ é contínuo. Entretanto, se escolhermos q de forma que $2 < q^*$, temos que a seguinte imersão é compacta $W^{2,q} \hookrightarrow\hookrightarrow W^{1,2}$. Assim, já que

$$T_\lambda(W^{1,2}) \hookrightarrow W^{2,q},$$

então T_λ é compacto.

Prosseguindo, da equação (2.33) vemos que a restrição de T_λ a um subconjunto limitado de $W^{1,2}$ é uniformemente contínua em λ e é trivial que a solução de $T_0(\theta) = \phi$ é única. Mais ainda, existe $C > 0$ tal que se $\phi \in W^{1,2}$ o qual $T_\lambda\phi = \phi$, então $\|\phi\|_{W^{1,2}} \leq C$. De fato, considerando

$$\frac{\phi - v}{\tau} + \lambda u \cdot \nabla\phi - \Delta\phi = g + \frac{\omega}{\tau} \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

e multiplicando por ϕ obtemos que

$$\|\phi\|_{W^{1,2}} \leq C(\tau)(\|g\|^2_{L^2} + \|\omega\|^2_{L^2} + \|v\|^2_{L^2}).$$

Segue então do teorema do ponto fixo de Leray-Schauder, que existe $\theta \in W^{1,q}$ tal que $T_1(\theta) = \theta$. Pela regularidade da equação, $\theta \in W^{2,q}$. A unicidade é consequência da linearidade da equação.

Por fim, como

$$W^{2,q} \hookrightarrow W^{1,p}, \forall p \geq 1,$$

então $u \cdot \nabla\theta \in L^2$ e por um argumento do tipo bootstraping $\theta \in W^{2,2}$. □

Lema 2.3.4. *Para cada $v \in W^{1,2}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f Lipschitz, existe uma única $\omega \in W^{3,2}$ tal que*

$$\frac{\omega - v}{\tau} + \alpha_\delta\left(\frac{\omega - v}{\tau}\right) - \Delta\omega + \beta_\delta(\omega) = f(\omega) \quad \textit{q.t.p. em } \Omega, \qquad (2.34)$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial\nu} = 0 \quad \textit{sobre } \partial\Omega.$$

Dem.

Seja $T_\lambda : L^2 \longrightarrow L^2$ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$ e $T_\lambda \omega = \phi$ se, e somente se,

$$-\Delta\phi + \frac{\phi - v}{\tau} = \lambda\left(f(\omega) - \beta_\delta(\omega) - \alpha_\delta\left(\frac{\omega - v}{\tau}\right)\right) \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \qquad (2.35)$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Primeiramente vejamos as hipóteses do teorema do ponto fixo de Leray-Schauder que nesse caso são mais simples de serem verificadas. Como $f(\omega)-\beta_\delta(\omega)-\alpha_\delta\big((\omega-v)/\tau\big)$ é lipschitziana e $\omega \in L^2$, segue que T_λ está bem definido, é contínuo com respeito a ω para $0 \leq \lambda \leq 1$, uniformemente contínuo com respeito a λ para $\omega \in A \subset L^2$, A limitado. Além disso, é claro que $T_0(\omega) = \phi$ tem uma única solução e que T_λ é compacto, pois $T(L^2) \hookrightarrow W^{2,2}$.

Agora, considere ω um ponto fixo de T_λ. Multiplique a equação (2.35) por $(\omega - v)/\tau$ e obtenha

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\tau}\|\nabla\omega\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\tau^2}\|\omega\|_{L^2}^2 \quad &\leq \quad \lambda\int_\Omega f(\omega)\left(\frac{\omega - v}{\tau}\right) - \lambda\int_\Omega \beta_\delta(\omega)\left(\frac{\omega - v}{\tau}\right)\\ &+ \quad \frac{1}{2\tau}\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\tau^2}\|v\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Entretanto, pela definição de β_δ e Λ_δ temos que

$$\frac{\lambda}{\tau}\Big(\Lambda_\delta(\omega) - \Lambda_\delta(v)\Big) \leq \lambda\beta_\delta(\omega)\left(\frac{\omega - v}{\tau}\right) \text{ e } \Lambda_\delta(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então, denotando por $C(f)$ a constante de Lipschitz associada a f, segue que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\tau}\|\nabla\omega\|_{L^2}^2 + \left(\frac{1}{2\tau^2} - \frac{3\lambda C(f)}{2\tau}\right)\|\omega\|_{L^2}^2 + \int_\Omega \frac{\lambda}{\tau}\Lambda_\delta(\omega)\\ \leq \quad &\frac{1}{2\tau}\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \left(\frac{2}{\tau^2} + \frac{\lambda C(f)}{2\tau}\right)\|v\|_{L^2}^2 + \int_\Omega \frac{\lambda}{\tau}\Lambda_\delta(v).\end{aligned}$$

Tomando $\tau > 0$ suficientemente pequeno,

$$\|\omega\|_{W^{1,2}}^2 \leq C(\tau)\|v\|_{W^{1,2}}^2 \leq C.$$

Dessa forma, mais uma vez pelo teorema do ponto fixo de Leray-Schauder, existe

$$\omega \in L^2 \text{ tal que } T_1(\omega) = \omega.$$

Mais ainda, pela regularidade elíptica da equação (2.35), segue que $\omega \in W^{3,2}$.

Para a unicidade, sejam ω_1 e ω_2 soluções de (2.34) e $\omega = \omega_1 - \omega_2$. Subtraindo-se a equação determinada por ω_1 daquela determinada por ω_2 obtemos que:

$$\begin{aligned}&-\Delta\omega + \frac{\omega}{\tau} + \alpha_\delta\left(\frac{\omega_1 - v}{\tau}\right) - \alpha_\delta\left(\frac{\omega_2 - v}{\tau}\right) + \beta_\delta(\omega_1) - \beta_\delta(\omega_2)\\ &= f(\omega_1) - f(\omega_2).\end{aligned}$$

Então multiplicando a última equação por ω,

$$\|\nabla\omega\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\tau}\|\omega\|_{L^2}^2 \leq \int_\Omega \big(f(\omega_1) - f(\omega_2)\big)\omega \leq C\|\omega\|_{L^2}^2,$$

De forma que para $\tau > 0$ suficientemente pequeno, concluímos que $\omega = 0$ q.t.p. em Ω. $\square$

Prova da proposição 2.3.2

A estratégia consistirá na escolha de um operador conveniente T e depois no estudo de seus pontos fixos. Primeiramente, considere $w_f \in L^2$ e fixe $\omega_i = \omega_f$, $\omega_f \in L^2$, em (2.29). Então, pelo lema (2.3.3), existe uma única $\theta_f \in W^{2,2}$ satisfazendo (2.29). Agora, tome $\theta_i = \theta_f$ na equação (2.30). Pelo lema (2.3.4), existe uma única $\bar{\omega}_f$ satisfazendo (2.30). Definimos então,

$$\begin{aligned} &T : L^2 \longrightarrow L^2;\\ &T(\omega_f) = \bar{\omega}_f. \end{aligned}$$

Afirmamos que T é uma contração. De fato, considere ω_{f_1} e ω_{f_2}, além dos θ_{f_i}'s associados. Sejam $\omega = \omega_{f_1} - \omega_{f_2}$ e $\theta = \theta_{f_1} - \theta_{f_2}$. Tomando as diferenças em (2.29) segue que

$$\frac{\theta}{\tau} + \frac{\omega}{\tau} - \Delta\theta + u_i \cdot \nabla\theta = 0.$$

Multiplicando por θ temos que

$$\|\theta\|_{L^2} \leq \|\omega\|_{L^2}. \tag{2.36}$$

Agora, considere $\bar{\omega}_{f_i}$ associado a ω_{f_i} e seja $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{f_1} - \bar{\omega}_{f_2}$. Tomando a diferença em (2.30) e multiplicando-a por $\bar{\omega}$ obtemos que

$$\begin{aligned} \|\nabla\bar{\omega}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\tau}\|\bar{\omega}\|_{L^2}^2 &\leq \int_\Omega \bar{\omega}(\theta + f(\bar{\omega}_{f_1}) - f(\bar{\omega}_{f_2})) \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + C\right)\|\bar{\omega}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\theta\|_{L^2}^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + C\right)\|\bar{\omega}\|_{L^2}^2 + \|\omega\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

onde usamos a desigualdade (2.36) e que

$$\left(\alpha_\delta\left(\frac{\bar{\omega}_{f_1} - \omega_{i-1}}{\tau}\right) - \alpha_\delta\left(\frac{\bar{\omega}_{f_2} - \omega_{i-1}}{\tau}\right)\right)(\bar{\omega}_{f_1} - \bar{\omega}_{f_2}) \geq 0,$$

e

$$\big(\beta_\delta(\bar{\omega}_{f_1}) - \beta_\delta(\bar{\omega}_{f_2})\big)(\bar{\omega}_{f_1} - \bar{\omega}_{f_2}) \geq 0$$

pois α_δ e β_δ são monótonas. Considerando $0 < \tau \leq 2/(5 + 2C)$, segue de (2.37) que

$$\|\bar{\omega}\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|\omega\|_{L^2}^2.$$

Portanto, T é uma contração e então pelo teorema do ponto fixo de Banach, existe uma única $\omega_i \in L^2$, a qual na realidade pertence a $W^{3,2}$ pela construção de T e $T(\omega_i) = \omega_i$. Por fim, consideramos θ_i como a única $\theta_f \in W^{2,2}$ associada à ω_i.

□

2.4 Funções auxiliares e estimativas de energia discretas

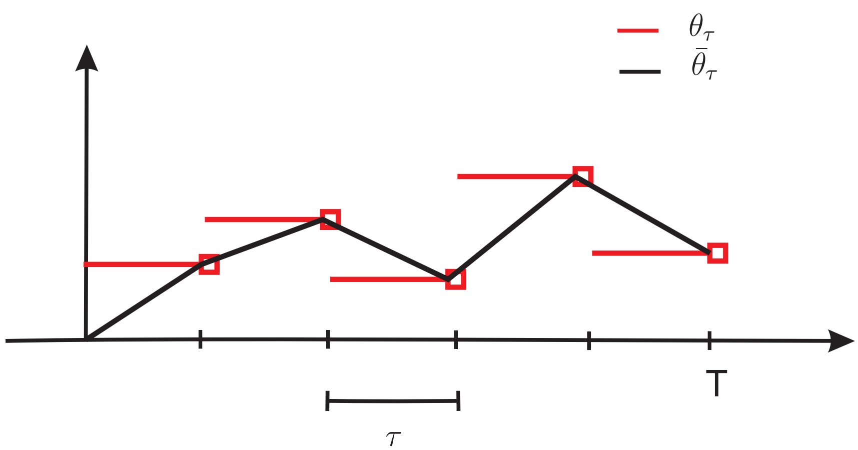

Figura 2.2: Gráfico de θ_τ e $\bar{\theta}_\tau$

Introduziremos um pouco de notação e estabeleceremos estimativas de energia discretas. Para cada $\tau > 0$ fixado, associamos aos elementos θ_0, θ_1, ..., θ_M dados pela proposição 2.3.2, as seguintes funções aproximadas:

Definição 2.4.1.

$$\begin{aligned}
&\theta_\tau : [0, T] \longrightarrow W^{2,2},\\
&\theta_\tau(t) = \theta_i, (i-1)\,\tau \leq t \leq i\tau, i = 0, ..., M,\\
&\bar{\theta}_\tau : [0, T] \longrightarrow W^{2,2},\\
&\bar{\theta}_\tau(t) = \left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\tau}\right)(t - (i-1)\tau) + \theta_{i-1},\ (i-1)\tau \leq t \leq i\tau, i = 1, ..., M.
\end{aligned}$$

A derivada temporal de $\bar{\theta}_\tau$ será denotada por $\bar{\theta}'_\tau$. Definimos analogamente ω_τ, $\bar{\omega}_\tau$ e $\bar{\omega}'_\tau$. Além disso, também definimos aproximações de g e u. Dadas as funções $g \in L^2(0, T; L^2)$ e $u \in$

$L^2(0,T;V)$, *escolhemos*

$$g_\tau(x,t) = g_i(t) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\tau}\int_{(i-1)\tau}^{i\tau} g(.,s)ds \text{ onde } (i-1)\tau \le t \le i\tau,$$

sendo que definimos u_τ *de forma análoga.*

Vale o seguinte resultado.

Lema 2.4.2. *Sejam* g, g_τ, u *e* u_τ *como antes. Então se* $\tau \to 0$, $g_\tau \to g$ *em* $L^2(0,T;L^2)$ *e* $u_\tau \to u$ *em* $L^2(0,T;V)$.

Dem. Suponha inicialmente que $g \in C([0,T];L^2)$. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ tal que para cada s e t os quais $|t-s| < \delta$ temos $\|g(t)-g(s)\|_{L^2}^2 < \epsilon$. Como

$$\|g(t)-g_\tau(t)\|_{L^2} \le \tau^{-1/2}\left(\int_{(i-1)\tau}^{i\tau} \|g(s)-g(t)\|_{L^2}^2 ds\right)^{1/2}$$

segue que para $\tau < \delta$

$$\int_{(i-1)\tau}^{i\tau} \|g(t)-g_\tau(t)\|_{L^2}^2\, dt \le \frac{1}{\tau}\int_{(i-1)\tau}^{i\tau}\int_{(i-1)\tau}^{i\tau} \|g(s)-g(t)\|_{L^2}^2\, dsdt \le \epsilon\tau.$$

Assim o resultado é válido para $g \in C([0,T];L^2)$. Seja então a sequência $\{g_n\} \subset C([0,T];L^2)$ tal que $g_n \to g$ em $L^2(0,T;L^2)$. Veja que $\|(g_n)_\tau - g_\tau\|_{L^2} \to 0$ se $n \to \infty$, uniformemente em $\tau > 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|(g_n)_\tau - g_\tau\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 &= \sum_{i=1}^{M} \tau \left\| \frac{1}{\tau}\int_{(i-1)\tau}^{i\tau} g_n(s)-g(s)ds\right\|_{L^2}^2 \\
&\le \sum_{i=1}^{M} \int_{(i-1)\tau}^{i\tau} \|g_n(s)-g(s)\|_{L^2}^2 ds \\
&= \|g_n - g\|_{L^2(0,T;L^2)}^2.
\end{aligned}$$

Prosseguindo, dado $\epsilon > 0$ seja n_0 tal que

$$\|g_{n_0} - g\|_{L^2(0,T;L^2)} + \|(g_{n_0})_\tau - g_\tau\|_{L^2(0,T;L^2)} < \epsilon/2.$$

Depois, considere $\delta_0 > 0$ tal que se $\tau < \delta_0$, então $\|g_{n_0} - (g_{n_0})_\tau\|_{L^2(0,T;L^2)} < \epsilon/2$. Segue que,

$$\begin{aligned}
\|g - g_\tau\|_{L^2(0,T;L^2)} &\le \|g_{n_0} - g\| + \|(g_{n_0})_\tau - g_\tau\| + \|g_{n_0} - (g_{n_0})_\tau\| \\
&< \epsilon,
\end{aligned}$$

onde na desigualdade acima $\|.\|$ denota $\|.\|_{L^2(0,T;L^2)}$.

A prova do resultado para u é análoga.

□

Com essas ferramentas obtemos as estimativas de energia que precisamos para encontrar uma solução para o problema **A**.

2.4.1 Estimativas de energia discretas

Provemos algumas estimativas a priori para θ_τ, $\bar{\theta}_\tau$, ω_τ e $\bar{\omega}_\tau$ as quais não dependem de τ e, em geral, nem de $\delta > 0$.

Lema 2.4.3. *Existe $C > 0$, a qual não depende de $\tau > 0$ e $\delta > 0$, tal que:*

$$\|\bar{\omega}_\tau'\|_{L^2(0,T;L^2)} \leq C, \tag{2.38}$$

$$\|\omega_\tau\|_{L^\infty(0,T;W^{1,2})} \leq C, \tag{2.39}$$

$$\|\theta_\tau\|_{L^2(0,T;W^{1,2})} \leq C, \tag{2.40}$$

$$\|\theta_\tau\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C. \tag{2.41}$$

Dem. Primeiramente, seja a soma ω_i dos dois lados de (2.30). Então, multipliquemos o resultado por $(\omega_i - \omega_{i-1})/\tau$, usemos a definição de Λ_δ (veja (2.20), pág. 36 e a definição 1.4.8, pág. 26) para obter

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\tau}(\|\omega_i\|_{L^2}^2 - \|\omega_{i-1}\|_{L^2}^2) + \left\|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\tau}\int_\Omega \nabla\omega_i \cdot (\nabla\omega_i - \nabla\omega_{i-1}) \\ + \;& \frac{1}{\tau}\int_\Omega \Lambda_\delta(\omega_i) - \Lambda_\delta(\omega_{i-1}) \leq \int_\Omega (\omega_i + \theta_i + f(\omega_i))\frac{(\omega_i - \omega_{i-1})}{\tau}, \end{aligned}$$

onde tambem usamos que $\alpha_\delta(0) = 0$ e a monotonicidade de α_δ (veja a definição 1.4.2, pág. 24 e a proposição 1.4.9 (i), pág. 26).

Logo, pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\tau}(\|\omega_i\|_{L^2}^2 - \|\omega_{i-1}\|_{L^2}^2) + (1-\epsilon)\left\|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\tau}(\|\nabla\omega_i\|_{L^2}^2 - \|\nabla\omega_{i-1})\|_{L^2}^2 \\ + \;& \frac{1}{\tau}\int_\Omega \Lambda_\delta(\omega_i) - \Lambda_\delta(\omega_{i-1}) \leq \frac{1}{2\epsilon}\|\theta_i\|_{L^2}^2 + \frac{C}{2\epsilon}\|\omega_i\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Somando a expressão acima para i de 1 até $m \leq M$, onde $M = T/\tau$ (veja a figura 3.1 pág. 38), obtemos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|\omega_m\|_{L^2}^2 + (1-\epsilon)\sum_1^m \tau\left\|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\omega_m\|_{L^2}^2 + \int_\Omega \Lambda_\delta(\omega_m) \\ &\leq \sum_1^m \tau\frac{1}{2\epsilon}\|\theta_i\|_{L^2}^2 + \sum_1^m \tau\frac{C}{2\epsilon}\|\omega_i\|_{L^2}^2 + \|\nabla\omega_0^\delta\|_{L^2}^2 + \int_\Omega \Lambda_\delta(\omega_0^\delta) + \|\omega_0^\delta\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Prosseguindo, lembre-se de que

$$\int_\Omega u \cdot \nabla\theta_i\theta_i = 0,$$

veja a observação 2.1.3, pág. 35.

Daí, multiplicando (2.29) por θ_i, usando a desigualdade de Young e somando as equações resultantes para i de 1 até $m \leq M$ (veja (2.27), pág. 38), $M = T/\tau$, segue que

$$\begin{aligned}
&\sum_1^m \tau\|\nabla\theta_i\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\theta_m\|_{L^2}^2 \leq \sum_1^m \frac{\tau}{2\epsilon}\|g_i\|_{L^2}^2 + \sum_1^m \frac{\tau}{2}\|\theta_i\|_{L^2}^2\left(\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\right) \\
&+\frac{\epsilon}{2}\sum_1^m \tau\left\|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\theta_0^\delta\|_{L^2}^2 \\
&\leq \sum_1^m \frac{\tau}{2}\|\theta_i\|_{L^2}^2\left(\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\right) + \frac{\epsilon}{2}\sum_1^m \tau\left\|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right\|_{L^2}^2 + C(g, \theta_0^\delta, \omega_0^\delta) \\
&\leq \sum_1^m \frac{\tau}{2}\|\theta_i\|_{L^2}^2\left(\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\right) + \frac{\epsilon}{2}\sum_1^m \tau\left\|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right\|_{L^2}^2 + C, \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

onde usamos a escolha de g_i (veja (2.32), pág. 38), mais o lema 2.2.1, pág. 36, para retirarmos a dependência de C dos dados iniciais aproximados.

Então fixando-se $\epsilon = 1/4$ em (2.42), $\epsilon = 1/2$ em (2.43) e somando as duas desigualdades

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_1^m \tau\left\|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\omega_m\|_{W^{1,2}}^2 + \sum_1^m \tau\|\nabla\theta_i\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\theta_m\|_{L^2}^2 \qquad (2.44) \\
&\leq C\sum_1^m \tau\|\omega_i\|_{W^{1,2}}^2 + C\sum_1^m \tau\|\theta_i\|_{L^2}^2 + C, \ \forall m \leq M = T/\tau.
\end{aligned}$$

Assim, para $\tau > 0$ suficientemente pequeno, porém independente de $\delta > 0$

$$\|\omega_\tau(t)\|_{W^{1,2}}^2 + \|\theta_\tau(t)\|_{L^2}^2 \leq C\int_0^t \|\omega_\tau\|_{W^{1,2}}^2 + C\int_0^t \|\theta_\tau\|_{L^2}^2 + C, \qquad (2.45)$$

Então (2.39) e (2.41) seguem da equação (2.45) e do lema de Gronwall (ver o lema 5.1.1, pág. 123). Por fim, (2.38) e (2.40) seguem de (2.44), (2.39) e (2.41). □

Lema 2.4.4. *Existe $C > 0$, o qual não depende de $\tau > 0$ nem de $\delta > 0$, tal que:*

$$\begin{aligned}
\|\theta_\tau\|_{L^2(0,T;W^{2,2})} &\leq C(u), \qquad (2.46) \\
\|\bar{\theta}_\tau'\|_{L^2(0,T;L^2)} &\leq C(u), \qquad (2.47) \\
\|\theta_\tau\|_{L^\infty(0,T;W^{1,2})} &\leq C(u). \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

onde $C(u) = C\big(\|u\|_{L^4(0,T;L^4)}^4\big)$.

Dem.

Multipicando (2.29) por $-\Delta\theta_i$, usando a desigualdade de Hölder e somando as equações resultantes para i de 1 até $m \leq M$ temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\nabla\theta_m\|_{L^2}^2 + (1-\epsilon)\sum_1^m \tau\|\Delta\theta_i\|_{L^2}^2 \quad &\leq \quad \frac{1}{2\epsilon}\sum_1^m \tau\|g_i\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\epsilon}\sum_1^m \tau\left\|\frac{\omega_i-\omega_{i-1}}{\tau}\right\|_{L^2}^2 \\ &+ \quad \sum_1^m \tau\|\Delta\theta_i\|_{L^2}\|\nabla\theta_i\|_{L^4}\|u_i\|_{L^4} + \frac{1}{2}\|\nabla\theta_0^\delta\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Então, pela estimativa (2.38), a definição de g_i, a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg em dimensão 2 e a desigualdade de Young, encontramos $C > 0$, o qual não depende de $\tau > 0$ nem de $\delta > 0$, tal que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\nabla\theta_m\|_{L^2}^2 + (1-\epsilon)\sum_1^m \tau\|\Delta\theta_i\|_{L^2}^2 \quad &\leq \quad C + \frac{C}{4\epsilon^4}\sum_1^m \tau\|u_i\|_{L^4}^4\|\theta_i\|_{W^{1,2}}^2 \\ &+ \quad \frac{3C\epsilon^{4/3}}{4}\sum_1^m \tau\|\theta_i\|_{W^{2,2}}^2,\end{aligned}$$

Observe que usamos mais uma vez o lema 2.2.1 para o controle do termo associado com a aproximação do dado inicial (θ_0^δ) e a definição de g_i (veja (2.32), pág. 38).

Assim, para qualquer $m \in \mathbb{N}$, o qual $m \leq M = T/\tau$ (veja (2.27), pág. 38), vale que

$$\|\theta_m\|_{W^{1,2}}^2 + \sum_1^m \tau\|\theta_i\|_{W^{2,2}}^2 \leq C + C\sum_1^m \tau\|u_i\|_{L^4}^4\|\theta_i\|_{W^{1,2}}^2,$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Entretanto, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$\sum_1^M \tau\|u_i\|_{L^4}^4 \leq \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2\|u\|_{L^2(0,T;W^{1,2})}^2 < +\infty. \tag{2.49}$$

Então, podemos escolher $\tau > 0$ suficientemente pequeno, independentemente de $\delta > 0$, de forma que pelo lema de Gronwall

$$\|\theta_\tau(t)\|_{W^{1,2}}^2 + \int_0^t \|\theta_\tau\|_{W^{2,2}}^2 \leq C, 0 \leq t \leq T,$$

$C > 0$ dependendo de $\|u\|_{L^4(0,T;L^4)}^4$ (ver o lema 5.1.2, pág. 124). Pela última desigualdade seguem (2.46) e (2.48).

Analogamente, multiplicando (2.29) por $(\theta_i - \theta_{i-1})/\tau$, somando as equações resultantes e usando as desigualdades de Gagliardo-Nirenberg, i.e.,

$$\int_\Omega u_i \cdot \nabla\theta_i \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\tau} \leq C\|u_i\|_{L^4}\|\nabla\theta_i\|_{L^2}^{1/2}\|\theta_i\|_{W^{2,2}}^{1/2}\|(\theta_i - \theta_{i-1})/\tau\|_{L^2},$$

mais as desigualdades de Hölder e Young obtemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\nabla\theta_m\|_{L^2}^2+(1-\epsilon)\sum_1^m \tau\left\|\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{\tau}\right\|_{L^2}^2\\
\le\;& C+C_\epsilon\sum_1^m \tau\|u_i\|_{L^4}^4\|\theta_i\|_{W^{1,2}}^2+C_\epsilon\sum_1^m \tau\|\theta_i\|_{W^{2,2}}^2+C_\epsilon\sum_1^m \tau\left\|\frac{\omega_i-\omega_{i-1}}{\tau}\right\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

e novamente para $\tau>0$ suficientemente pequeno, usando as últimas estimativas, obtemos (2.47). $\square$

Lema 2.4.5. *Existem $C>0$ e $C_1>0$, ambos independentes de $\tau>0$, os quais*

$$\|\bar{\omega}'_\tau\|_{L^2(0,T;W^{1,2})} \le C(u), \tag{2.50}$$

$$\|\bar{\omega}'_\tau\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le C(u), \tag{2.51}$$

$$\|\omega_\tau\|_{L^\infty(0,T;W^{2,2})} \le C_1(u,\delta). \tag{2.52}$$

onde $C(u)=C(\|u\|_{L^4(0,T;L^4)}^4)$ não depende de $\delta>0$ e $C_1(u,\delta)=C_1(\|u\|_{L^4(0,T;L^4)}^4,\delta)$.

Dem. Consideremos a equação (2.30) para o índice $i-1$, tomemos sua diferença da equação (2.30) para i e então multipliquemos a equação resultante por $(\omega_i-\omega_{i-1})/\tau$. Como f é lipschitziana e β_δ é monótona (veja a definição 1.4.2, pág. 24 e a proposição 1.4.9 (i), pág. 26), temos que

$$\begin{aligned}
&\tau\left\|\frac{\nabla\omega_i-\nabla\omega_{i-1}}{\tau}\right\|_{L^2}^2+\int_\Omega\frac{\omega_i-\omega_{i-1}}{\tau}\Bigg(\frac{\omega_i-\omega_{i-1}}{\tau}\\
&-\frac{\omega_{i-1}-\omega_{i-2}}{\tau}+\alpha_\delta\left(\frac{\omega_i-\omega_{i-1}}{\tau}\right)-\alpha_\delta\left(\frac{\omega_{i-1}-\omega_{i-2}}{\tau}\right)\Bigg)\\
&\le C\tau\left\|\frac{\omega_i-\omega_{i-1}}{\tau}\right\|_{L^2}^2+C\tau\left\|\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{\tau}\right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}\tag{2.53}$$

Por simplicidade, denotemos $\xi_i=\alpha_\delta((\omega_i-\omega_{i-1})/\tau)$ para $i\ge 1$ e $\xi_0=\xi_0^\delta$ como no lema 2.2.1, pág. 36. Segue de (2.19) pág. 36 que $\gamma_\delta(\xi_i)+\delta\xi_i=(\omega_i-\omega_{i-1})/\tau$ e então

$$\int_\Omega\Gamma_\delta(\xi_i)-\int_\Omega\Gamma_\delta(\xi_{i-1})\le\int_\Omega\left(\frac{\omega_i-\omega_{i-1}}{\tau}-\delta\xi_i\right)(\xi_i-\xi_{i-1}). \tag{2.54}$$

Dessa forma, combinando (2.53), (2.54) e somando as desigualdades resultantes para $i=2,...,m\le M$, segue que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\Gamma_\delta(\xi_m)+\sum_1^m\tau\left\|\frac{\nabla\omega_i-\nabla\omega_{i-1}}{\tau}\right\|_{L^2}^2+\frac{\delta}{2}\|\xi_m\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\frac{w_m-w_{m-1}}{\tau}\right\|_{L^2}^2\\
&\le\int_\Omega\Gamma_\delta(\xi_1)+\tau\left\|\frac{\nabla\omega_1-\nabla\omega_0^\delta}{\tau}\right\|_{L^2}^2+\frac{\delta}{2}\|\xi_1\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\frac{w_1-w_0}{\tau}\right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}\tag{2.55}$$

Para estimarmos o lado direito de (2.55), considere (2.30) para $i = 1$, some e subtraia θ_0^δ, $\Delta\omega_0^\delta$, $f(\omega_0)$ nesta equação e então multiplique o resultado por $(\omega_1 - \omega_0^\delta)/\tau$. Assim,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{\omega_1 - \omega_0^\delta}{\tau}\left(\frac{\omega_1 - \omega_0^\delta}{\tau} + \alpha_\delta\left(\frac{\omega_1 - \omega_0^\delta}{\tau}\right)\right) + \tau\left\|\frac{\nabla\omega_1 - \nabla\omega_0^\delta}{\tau}\right\|_{L^2}^2 \\ &+ \int_\Omega \frac{\omega_1 - \omega_0^\delta}{\tau}(-\Delta\omega_0^\delta + \beta_\delta(\omega_0^\delta) - f(\omega_0) - \theta_0^\delta) \leq \tau\left\|\frac{\theta_1 - \theta_0^\delta}{\tau}\right\|_{L^2}^2 + \tau C\left\|\frac{\omega_1 - \omega_0}{\tau}\right\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{2.56}$$

Pelas escolhas de ω_0^δ e θ_0^δ no lema 2.2.1, temos

$$\xi_0^\delta = \Delta\omega_0^\delta - \beta_\delta(\omega_0^\delta) + \theta_0^\delta + f(\omega_0).$$

Além disso,

$$\int_\Omega \Gamma_\delta(\xi_1) - \int_\Omega \Gamma_\delta(\xi_0^\delta) + \frac{\delta}{2}\|\xi_1\|_{L^2}^2 \leq \int_\Omega \frac{\omega_1 - \omega_0^\delta}{\tau}(\xi_1 - \xi_0^\delta) + \frac{\delta}{2}\|\xi_0^\delta\|_{L^2}^2, \tag{2.57}$$

então usando (2.56), (2.57), os lemas 2.4.3 e 2.4.4, segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|\omega_1 - \omega_0^\delta|^2}{\tau^2} + \int_\Omega \Gamma_\delta(\xi_1) + \tau\left\|\frac{\nabla\omega_1 - \nabla\omega_0^\delta}{\tau}\right\|_{L^2}^2 + \frac{\delta}{2}\|\xi_1\|_{L^2}^2 \\ \leq \int_\Omega \Gamma_\delta(\xi_0^\delta) + \frac{\delta}{2}\|\xi_0^\delta\|_{L^2}^2 + C.\end{aligned} \tag{2.58}$$

Dessa forma, por (2.55), (2.58) e pelo lema 2.2.1, obtemos que

$$\|\bar{\omega}_\tau'\|_{L^2(0,T;W^{1,2})} \leq C, \quad \|\bar{\omega}_\tau'\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C,$$

$$\int_\Omega \Gamma_\delta(\xi_i) \leq C, \quad \delta\|\xi_i\|_{L^2} \leq C, \quad \forall i = 1, ..., M, \tag{2.59}$$

onde mais uma vez C depende de u mas não de $\tau > 0$ nem de $\delta > 0$, o que prova (2.50)-(2.51). Usando estas desigualdades, a equação (2.30) e o fato de que α_δ e β_δ são lipschitzianas, temos que

$$\|\Delta\omega_\tau\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq \frac{C}{\delta}$$

e usando (2.39), provamos (2.52). □

Com os lemas 2.4.3, 2.4.4 e 2.4.5, estamos aptos a provar o próximo resultado sobre convergências das aproximações $\theta_\tau, \bar{\theta}_\tau, \omega_\tau$ e $\bar{\omega}_\tau$.

Proposição 2.4.6. *Dado $\delta > 0$, existem θ^δ e ω^δ tais que, a menos de subsequências, se $\tau \to 0$*

$$\begin{aligned}
\theta_\tau, \bar{\theta}_\tau \to \theta^\delta &\quad \textit{em} \quad C([0,T];L^2), && (2.60)\\
\bar{\theta}_\tau \to \theta^\delta &\quad \textit{em} \quad L^2(0,T;W^{1,2}), && (2.61)\\
\theta_\tau \rightharpoonup \theta^\delta &\quad \textit{em} \quad L^2(0,T;W^{2,2}), && (2.62)\\
\theta_\tau \overset{*}{\rightharpoonup} \theta^\delta &\quad \textit{em} \quad L^\infty(0,T;W^{1,2}), && (2.63)\\
\bar{\theta}'_\tau \rightharpoonup \theta^\delta_t &\quad \textit{em} \quad L^2(0,T;L^2), && (2.64)\\
\omega_\tau, \bar{\omega}_\tau \to \omega^\delta &\quad \textit{em} \quad C([0,T];W^{1,2}), && (2.65)\\
\omega_\tau \overset{*}{\rightharpoonup} \omega^\delta &\quad \textit{em} \quad L^\infty(0,T;W^{2,2}), && (2.66)\\
\bar{\omega}'_\tau \rightharpoonup \omega^\delta_t &\quad \textit{em} \quad L^2(0,T;W^{1,2}), && (2.67)\\
\bar{\omega}'_\tau \overset{*}{\rightharpoonup} \omega^\delta_t &\quad \textit{em} \quad L^\infty(0,T;L^2). && (2.68)
\end{aligned}$$

Dem. Primeiramente, afirmamos que:

$$\begin{aligned}
\theta_\tau - \bar{\theta}_\tau &\to 0, \text{ em } L^\infty(0,T;L^2) \text{ se } \tau \to 0, && (2.69)\\
\omega_\tau - \bar{\omega}_\tau &\to 0, \text{ em } L^\infty(0,T;W^{1,2}) \text{ se } \tau \to 0. && (2.70)
\end{aligned}$$

De fato, observe que segue diretamente da definição 2.4.1, pág. 43 que (veja a figura 2.4, pág. 43)

$$\|\omega_\tau - \bar{\omega}_\tau\|_{L^\infty(0,T;W^{1,2})} = \max_{1\le i\le M} \|\omega_i - \omega_{i-1}\|_{W^{1,2}}.$$

Note também que

$$\omega_i - \omega_{i-1} = \int_{(i-1)\tau}^{i\tau} (\omega_i - \omega_{i-1})/\tau$$

e então usando a desigualdade (2.50) mais a desigualdade de Hölder, obtemos (2.70). Para (2.69) basta procedermos de forma análoga via a desigualdade (2.47).

Prosseguindo, de (2.52) e da definição de $\bar{\omega}_\tau$ temos que $\|\bar{\omega}_\tau\|_{L^\infty(0,T;W^{2,2})} \le C$. Combinando isto com (2.50), (2.70) e o teorema 1.5.1, pág. 29, provamos (2.65).

Analogamente, para mostrarmos a validade de (2.60) combinamos (2.47), (2.48) e (2.69) com o teorema 1.5.1. Para (2.61), combinamos (2.46) e (2.47) com o mesmo teorema.

Por fim, (2.62), segue de (2.46), pág. 46; (2.63), de (2.48), pág. 46; (2.64), de (2.47), pág. 46; (2.66), de (2.52), pág. 48; (2.67), de (2.50), pág. 48; (2.68), de (2.51), pág. 48. □

Com estas convergências, temos em mãos material suficiente para a prova da existência de solução para o problema auxiliar.

Prova da proposição 2.2.2

Observe que segue da proposição 2.3.2 e da definição 2.4.1 que podemos reescrever o problema **A** discretizado (2.29)-(2.31) na seguinte forma,

$$\bar{\theta}'_\tau + \bar{\omega}'_\tau - \Delta\theta_\tau + u_\tau \cdot \nabla\theta_\tau = g_\tau(x,t) \qquad \text{q.t.p. em } Q, \tag{2.71}$$

$$\bar{\omega}'_\tau + \alpha_\delta(\bar{\omega}'_\tau) - \Delta\omega_\tau + \beta_\delta(\omega_\tau) = \theta_\tau + f(\omega_\tau) \qquad \text{q.t.p. em } Q, \tag{2.72}$$

$$\partial\theta_\tau/\partial\nu = \partial\bar{\theta}_\tau/\partial\nu = \partial\bar{\omega}_\tau/\partial\nu = \partial\omega_\tau/\partial\nu = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T),$$

$$\theta^\delta(.,0) = \theta_0^\delta,\ \omega^\delta(.,0) = \omega_0^\delta \qquad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Provaremos primeiramente a existência de solução para o problema dado pelas equações (2.15)-(2.16). Lembre-se que α_δ é lipschitziana, de forma que por (2.51) existe $\xi^\delta \in L^\infty(0,T;L^2)$ tal que se $\tau \to 0$, $\alpha_\delta(\bar{\omega}'_\tau) \overset{*}{\rightharpoonup} \xi^\delta$ em $L^\infty(0,T;L^2)$. Então, pela proposição 2.4.6, fazendo $\tau \to 0$ em (2.71) e (2.72), temos que $(\theta^\delta, \omega^\delta)$ satisfaz as equações (2.15), (2.17), (2.18) e

$$\bar{\omega}'_\tau + \xi^\delta - \Delta\omega^\delta + \beta_\delta(\omega^\delta) = \theta^\delta + f(\omega^\delta) \text{ q.t.p. em } Q,$$

onde $\beta_\delta(\omega_\tau) \to \beta_\delta(\omega^\delta)$ em $L^\infty(0,T;L^2)$ se $\tau \to 0$.

A seguir usaremos argumentos de **monotonicidade**. Observe que combinando as convergências (2.60), (2.65) e (2.67) segue que

$$\limsup_{\tau\to 0} \int_0^T (\theta_\tau + f(\omega_\tau) - \bar{\omega}'_\tau + \Delta\omega_\tau - \beta_\delta(\omega_\tau), \bar{\omega}'_\tau) \leq \int_0^T (\xi_\delta, \omega_t^\delta)$$

onde é essencial observar que utilizamos as convergências de "ordem superior"(cf. a proposição 2.4.6). Então, pelo teorema 1.4.11, pág. 27 segue que $\xi^\delta = \alpha_\delta(\omega_t^\delta)$ q.t.p. em Q.

Vejamos agora, a unicidade. Sejam $(\theta_k^\delta, \omega_k^\delta)$ para $k = 1,2$ soluções do modelo auxiliar (2.15)-(2.18), pág. 36 e fixe $\theta^\delta = \theta_1^\delta - \theta_2^\delta$ e $\omega^\delta = \omega_1^\delta - \omega_2^\delta$. Tomando as diferenças entre (2.15) para $k = 1,2$ e multiplicando a igualdade resultante por θ^δ obtemos que

$$\frac{1}{2}\|\theta^\delta(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla\theta^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2 \leq \frac{1}{2\epsilon}\|\theta^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2 + \frac{\epsilon}{2}\|\omega_t^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2, \tag{2.73}$$

onde $\epsilon > 0$ será escolhido futuramente.

Prosseguindo, mais uma vez tome as diferenças em (2.15) para $k = 1,2$, mas agora multiplique o resultado por θ_t^δ. Então pelas desigualdades de Young e de Gagliardo-Nirenberg temos

$$\begin{aligned} &\frac{1-\epsilon}{2}\|\theta_t^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\theta^\delta(t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\|\omega_t^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2 + \frac{\epsilon}{4}\|\theta^\delta\|_{L^2(0,t;W^{2,2})}^2 + \frac{C}{\epsilon^4}\int_0^t \|u\|_{L^4}^4 \|\nabla\theta^\delta\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Prosseguindo, tomamos a diferença em (2.15) e multiplicamos o resultado por ω^δ para obter

$$\frac{1}{2}\|\omega^\delta(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{\epsilon}{2}\|\theta_t^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2 + \frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon}\|\omega^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\theta^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2 \tag{2.75}$$
$$+ \frac{1}{2}\|\nabla\omega^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2 + \frac{\epsilon}{4}\|\theta^\delta\|_{L^2(0,t;W^{2,2})}^2 + \frac{C}{\epsilon^4}\int_0^t \|u\|_{L^4}^4\|\nabla^\delta\theta\|_{L^2}^2.$$

Na sequência, tome a diferença em (2.16), pág. 36 e multiplique o resultado por ω_t de forma que

$$\begin{aligned}\|\omega_t^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\omega^\delta(t)\|_{L^2}^2 \quad &\leq \quad \frac{1}{2\epsilon}\|\theta^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2 + \frac{\epsilon}{2}\|\omega_t^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2 \\ &+ \quad \left(C + \frac{1}{\delta}\right)\int_0^t\int_\Omega |\omega^\delta||\omega_t^\delta|,\end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{C(\delta)\epsilon}{2}\right)\|\omega_t^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2 \quad &+ \quad \frac{1}{2}\|\nabla\omega^\delta(t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq \quad \frac{1}{2\epsilon}\|\theta^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2 + \frac{C(\delta)}{2\epsilon}\|\omega^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2.\end{aligned} \tag{2.76}$$

No entanto, devido a regularidade parabólica da equação (2.15) temos que

$$\|\theta^\delta\|_{L^2(0,t;W^{2,2})}^2 \leq C\|\omega_t^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2,\ C = C(\|u\|_{L^4(0,t;L^4)}^4) > 0.$$

Então, somando as desigualdades (2.73)-(2.76) obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\bigg(\|\theta^\delta(t)\|_{W^{1,2}}^2 + \|\omega^\delta(t)\|_{W^{1,2}}^2\bigg) + (\frac{1}{2} - \epsilon)\|\theta_t^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2 \\ +\left(1 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{C(\delta)\epsilon}{2}\right)\|\omega_t^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2 \\ \leq C\int_0^t (1 + \|u\|_{L^4}^4)(\|\theta^\delta\|_{W^{1,2}}^2 + \|\omega^\delta\|_{W^{1,2}}^2) + \frac{1+\epsilon+C(u)\epsilon}{2}\|\omega_t^\delta\|_{L^2(0,t;L^2)}^2.\end{aligned}$$

Portanto, se $\epsilon = \epsilon(u,\delta) > 0$ for suficientemente pequeno, pelo lema de Gronwall

$$\theta^\delta = \omega^\delta = 0 \text{ q.t.p. em } Q$$

completando a prova da proposição 2.2.2. □

2.5 Um problema aproximado

Nesta seção, consideraremos uma regularização conveniente do problema **A**. A ideia consiste em modificar a equação do campo de velocidades (F_A), pág. 31, de forma que ela seja válida em todo domínio Q e, ao mesmo tempo, considerar regularizações dos grafos monótonos $\alpha(.)$ e $\beta(.)$. Para tanto, introduzimos um pequeno parâmetro $\delta > 0$ e então substituímos o termo de Carman-Kozeny em (F_A) por uma família de funções suaves e limitadas K_δ, extensões de K e que convergem para K em algum sentido. Além disso, trocamos $\alpha(.)$ e $\beta(.)$ em (C_A) por suas regularizações de ordem $\delta > 0$, $\alpha_\delta(.)$ e $\beta_\delta(.)$, dadas na seção anterior. Desse modo, transformamos o problema de fronteira livre original com operadores monótonos maximais em uma família de problemas de contorno mais amigáveis, apesar de não tão simples, agora com funções lipschitzianas ao invés de operadores monotônicos. Mais precisamente, dado $\delta > 0$, procuramos por

$$\theta^\delta \in L^\infty(0,T;W^{1,2}) \cap L^2(0,T;W^{2,2}) \cap W^{1,2}(0,T;L^2), \tag{2.77}$$

$$\omega^\delta \in L^\infty(0,T;W^{2,2}) \cap W^{1,2}(0,T;W^{1,2}),\ \omega_t^\delta \in L^\infty(0,T;L^2), \tag{2.78}$$

$$u^\delta \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \cap W^{1,2}(0,T;V'), \tag{2.79}$$

tais que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(u^\delta,\phi) + (\nabla u^\delta, \nabla\phi) + (u^\delta\cdot\nabla u^\delta,\phi) + (K_\delta(\omega^\delta)u^\delta,\phi) && (2.80)\\
&\qquad\qquad = (\zeta\theta^\delta,\phi), \forall\phi\in V \quad 0<t<T, &&\\
&\theta_t^\delta + \omega_t^\delta - \Delta\theta^\delta + u^\delta\cdot\nabla\theta^\delta = g(x,t) \text{ q.t.p. em} \quad Q, && (2.81)\\
&\omega_t^\delta + \alpha_\delta(\omega_t^\delta) - \Delta\omega^\delta + \beta_\delta(\omega^\delta) = \theta^\delta + f(\omega^\delta) \text{ q.t.p. em} \quad Q, && (2.82)\\
&\partial\theta^\delta/\partial\nu = \partial\omega^\delta/\partial\nu = 0 \text{ sobre} \quad \partial\Omega\times(0,T), && (2.83)\\
&\theta^\delta(.,0) = \theta_0^\delta,\ \omega^\delta(.,0) = \omega_0^\delta \text{ q.t.p. em} \quad \Omega, && (2.84)\\
&u^\delta(.,0) = u_0 \text{ q.t.p. em} \quad \Omega, && (2.85)
\end{aligned}$$

onde $\theta_0^\delta \in W^{1,2}$, $\omega_0^\delta \in W^{2,2}$ são dados pelo lema 2.2.1 e $u_0 \in H$, $u_0 = 0$ em $\Omega_s(0)$.

Mais ainda, definimos $K_\delta(.) = K_{ext}(h(.) - \delta)$ onde

$$K_{ext}(x) = \begin{cases} K(x) & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, . \end{cases} \tag{2.86}$$

e

$$h(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -1, \\ x, & -1 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \tag{2.87}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
&h \text{ é uma função lipschitziana,}\\
&\|K_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(\delta) \text{ e para } A \subset\subset (-\infty,1), \|K_\delta\|_{L^\infty(A)} \leq C(A)\ \forall\delta>0\\
&\text{e } K_\delta(1) \to +\infty, \text{ se } \delta \to 0.
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Primeiramente, obteremos estimativas a priori para o sistema (2.80)-(2.85).

Lema 2.5.1. *(Estimativas a priori) Sejam* $(\theta^\delta, \omega^\delta, u^\delta)$ *satisfazendo* (2.77)-(2.79) *e* (2.80)-(2.85). *Então, existem* $C > 0$ *e* $C_1 > 0$*, ambas independentes de* $\delta > 0$*, tais que:*

$$\|\theta^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C,\ \|\theta^\delta\|_{L^2(0,T;W^{2,2})} \leq C_1,\ \|\theta^\delta\|_{L^\infty(0,T;W^{1,2})} \leq C_1, \tag{2.89}$$
$$\|\theta_t^\delta\|_{L^2(0,T;L^2)} \leq C_1, \tag{2.90}$$
$$\|\omega^\delta\|_{L^\infty(0,T;W^{2,2})} \leq C_1, \tag{2.91}$$
$$\|\omega_t^\delta\|_{L^2(0,T;W^{1,2})} \leq C_1, \tag{2.92}$$
$$\|\omega_t^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C_1, \tag{2.93}$$
$$\|\xi^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C_1, \|\beta_\delta(\omega^\delta)\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C_1, \tag{2.94}$$

onde $\xi^\delta = \alpha_\delta(\omega_t^\delta)$ *e* $C_1 = C_1(u)$ *é limitada por* $\|u^\delta\|_{L^4(0,T;L^4)}$.

Observação 2.5.2. *A primeira estimativa em* (2.89)*, que pode parecer redundante, será importante no lema 2.6.1 e no corolário 2.6.2 na obtenção de uma estimativa para* θ *a qual não dependa de* u.

Dem.

Tome $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Da proposição 2.4.6, pág. 49 combinada com os lemas 2.4.3-2.4.5, págs. 45-48, obtemos (2.89)-(2.90) e (2.92)-(2.93).

Prosseguindo, veja que pela própria equação (2.82),

$$(\beta_\delta(\omega^\delta) - \Delta\omega^\delta)_t \in L^2(0,T;(W^{1,2})'). \tag{2.95}$$

Assim,por um lado, temos que

$$\int_0^t \left\langle \beta_\delta'(\omega^\delta)\omega_t^\delta - \Delta\omega_t^\delta, \alpha_\delta(\omega_t^\delta) + \omega_t^\delta \right\rangle = \int_0^t (\beta_\delta'(\omega^\delta)\omega_t^\delta, \alpha_\delta^\delta(\omega_t^\delta) + \omega_t^\delta)$$
$$+ \int_0^t (\nabla\omega_t^\delta, \alpha_\delta'(\omega^\delta)\nabla\omega_t^\delta + \nabla\omega_t^\delta) \geq 0,$$

pois $\alpha_\delta(.)$ e $\beta_\delta(.)$ são monotônicos.

Por outro lado, multiplicando-se (2.82) por $(\beta_\delta(\omega^\delta) - \Delta\omega^\delta)_t$ e integrando-se por partes em t obtemos

$$\frac{1}{4}\|\beta_\delta(\omega^\delta(t)) - \Delta\omega^\delta(t)\|_{L^2}^2 \leq \|(\theta + f(\omega^\delta)\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + \int_0^t \frac{1}{2}\|\theta_t^\delta + f'(\omega^\delta)\omega_t^\delta\|_{L^2}^2$$
$$+ \int_0^t \frac{1}{2}\|\beta_\delta(\omega^\delta) - \Delta\omega^\delta)\|_{L^2}^2 + C_1 \leq \int_0^t \frac{1}{2}\|\beta(\omega^\delta) - \Delta\omega^\delta\|_{L^2}^2 + C_1,$$

onde usamos o lema 2.2.1, pág. 36, as estimativas (2.90) e (2.92), págs. 54 e 54. Então, pelo lema de Gronwall e pela monotocidade $\beta_\delta(.)$, segue que

$$\|\beta_\delta(\omega^\delta)\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + \|\Delta\omega^\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 \leq C_1. \tag{2.96}$$

Combinando (2.96) com a equação (2.82) prova-se (2.94).

Por fim, (2.91) segue de (2.39), pág. 45, e (2.96).

□

Assim, estamos aptos a provar o seguinte resultado.

Proposição 2.5.3. *Considere* $\theta_0^\delta \in W^{1,2}$, $\omega_0^\delta \in W^{2,2}$ *dados pelo lema 2.2.1 e* $u_0 \in H$. *Sejam* α_δ *a aproximação definida em* (2.19), *pág. 36,* $\beta_\delta(.)$ *a regularização de Yosida de* $\beta(.)$ *e* $K_\delta(.)$ *como em* (2.87). *Existe* $(\theta_\delta, \omega_\delta, u_\delta)$ *solução para o problema aproximado, i.e., satisfazendo as condições* (2.77)-(2.79) *e as equações* (2.80)-(2.85).

Prova da proposição 2.5.3

Aqui seguiremos as ideias básicas de Planas e Boldrini em [42], entretanto veremos que algumas novas complicações técnicas aparecerão devido ao fato de termos não linearidades mais difíceis de se tratar para a equação do campo de fase. Construiremos um operador conveniente T_λ de modo que seus pontos fixos, obtidos via o belíssimo teorema do ponto fixo de Leray-Schauder, serão as funções desejadas.

Sejam $0 \le \lambda \le 1$ e o espaço (de Hilbert) $E = L^2(0,T;H) \times L^2(0,T;L^2) \times L^2(0,T;L^2)$. Considere $\bar{u} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \cap W^{1,2}(0,T;V')$ a única solução de

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\bar{u},\phi) + (\nabla\bar{u},\nabla\phi) + (\bar{u}\cdot\nabla\bar{u},\phi) + \lambda(K_\delta(\omega)u,\phi) & \qquad (2.97) \\ = \lambda(\zeta\theta,\phi)\ \forall\ \phi \in V, \quad 0 < t < T, & \\ \bar{u}(.,0) = u_0 \ \text{em} \qquad \Omega, & \end{aligned}$$

onde $(\theta,\omega,u) \in E$ são dados.

Daí, seja $(\bar{\theta},\bar{\omega})$ a única solução de

$$\bar{\theta}_t + \bar{\omega}_t - \Delta\bar{\theta} + \bar{u}\cdot\nabla\bar{\theta} = g(x,t) \qquad \text{q.t.p. em } Q, \qquad (2.98)$$

$$\bar{\omega}_t + \alpha_\delta(\bar{\omega}_t) - \Delta\bar{\omega} + \beta_\delta(\bar{\omega}) = \bar{\theta} + f(\bar{\omega}) \qquad \text{q.t.p. em } Q, \qquad (2.99)$$

$$\partial\bar{\theta}/\partial\nu = \partial\bar{\omega}/\partial\nu = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T),$$

$$\bar{\theta}(.,0) = \theta_0^\delta,\ \bar{\omega}(.,0) = \omega_0^\delta \qquad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

de forma que pela proposição 2.2.2, $\bar{\theta} \in W^{1,2}(0,T;L^2)$ e $\bar{\omega} \in W^{1,2}(0,T;W^{1,2})$. Com esse processo, podemos definir $T_\lambda : E \longrightarrow E$ por $T_\lambda(\theta,\omega,u) = (\bar{\theta},\bar{\omega},\bar{u})$.

Como primeiro passo para o uso desse teorema do ponto fixo, obteremos estimativas de energia uniformes para os pontos fixos T_λ, i.e., provaremos que existe $C > 0$ a qual não depende de λ, θ, ω nem u, onde $\|(\theta,\omega,u)\|_E \le C$ para cada ponto fixo de T_λ em E. De fato, considere $(\theta,\omega,u) \in E$ tal que $T_\lambda(\theta,\omega,u) = (\theta,\omega,u)$. Fixando-se $\phi = u$ em (2.97), pág. 55, temos que

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(0,t;H)}^2 \le C\int_0^t \lambda\|\theta(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|u(t)\|_H^2 + C.$$

Então, usando a primeira desigualdade de (2.89) no lema 2.5.1 (veja a observação 2.5.2, pág. 54) e o lema de Gronwall segue que

$$\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H)} + \|u\|^2_{L^2(0,T;V)} \leq C.$$

A partir de (2.89) e (2.91) obtemos que $\|(\theta, \omega, u)\|_E \leq C$, como desejávamos.

A seguir, provaremos a continuidade e compacidade de T_λ em E, ambas com a ajuda do seguinte lema auxiliar.

Lema 2.5.4. *(Continuidade fraca do problema auxiliar) Sejam u e u_n em $L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ tais que*

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;V) \text{ se } n \to +\infty, \\ u_n &\overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;H) \text{ se } n \to +\infty. \end{aligned}$$

Considere (θ_n, ω_n) a única solução de

$$(\theta_n)_t + (\omega_n)_t - \Delta\theta_n + u_n \cdot \nabla\theta_n = g(x,t) \quad \text{em } Q, \tag{2.100}$$

$$(\omega_n)_t + \alpha_\delta((\omega_n)_t) - \Delta\omega_n + \beta_\delta(\omega_n) = \theta_n + f(\omega_n) \quad \text{em } Q, \tag{2.101}$$

$$\partial\theta_n/\partial\nu = \partial\omega_n/\partial\nu = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \tag{2.102}$$

$$\theta_n(.,0) = \theta_0^\delta, \ \omega_n(.,0) = \omega_0^\delta \quad \text{em } \Omega, \tag{2.103}$$

com (θ, ω) definida de forma análoga. Então, se $n \to +\infty$

$$\begin{aligned} \theta_n &\to \theta, \text{ em } C([0,T];L^2), \\ \omega_n &\to \omega, \text{ em } C([0,T];W^{1,2}). \end{aligned}$$

Dem.

Sabemos pelo lema 2.5.1, pág. 54, que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|\theta_n\|_{L^2(0,T;W^{2,2}) \cap L^\infty(0,T;W^{1,2}) \cap W^{1,2}(0,T;L^2)} &\leq C\big(\|u_n\|_{L^4(0,T;L^4)}\big), \\ \|(\omega_n)_t\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\omega_n\|_{L^\infty(0,T;W^{2,2}) \cap W^{1,2}(0,T;W^{1,2})} &\leq C\big(\|u_n\|_{L^4(0,T;L^4)}\big), \\ \|\alpha_\delta((\omega_n)_t)\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\beta_\delta(\omega_n)\|_{L^\infty(0,T;L^2)} &\leq C\big(\|u_n\|_{L^4(0,T;L^4)}\big). \end{aligned} \tag{2.104}$$

Além disso, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg para $N = 2$ temos

$$\begin{aligned} \|u_n\|^4_{L^4(0,T;L^4)} &= \int_0^T \|u_n\|^4_{L^4} \leq \int_0^T \|u_n\|^2_H \|\nabla u_n\|^2_{L^2} \\ &\leq \|u_n\|^2_{L^\infty(0,T;H)} \|u_n\|^2_{L^2(0,T;W^{1,2})} \leq C. \end{aligned} \tag{2.105}$$

Combinando as estimativas (2.104) e (2.105) com o lema de Aubin-Lions (teorema 1.5.1, pág. 29), concluímos que existe (θ, ω) tal que se $n \to +\infty$

$$
\begin{array}{rcl}
\theta_n & \to & \theta \text{ em } L^2(0,T;W^{1,2}) \text{ e } C([0,T];L^2), \\
(\theta_n)_t & \rightharpoonup & \theta_t \text{ em } L^2(0,T;L^2), \\
\omega_n & \to & \omega \text{ em } L^2(0,T;W^{2,2}) \text{ e } C([0,T];W^{1,2}), \\
(\omega_n)_t & \rightharpoonup & \omega_t \text{ em } L^2(0,T;W^{1,2}), \\
(\omega_n)_t & \overset{*}{\rightharpoonup} & \omega_t \text{ em } L^\infty(0,T;L^2), \\
\alpha_\delta((\omega_n)_t) & \overset{*}{\rightharpoonup} & \xi \text{ em } L^\infty(0,T;L^2),
\end{array}
\tag{2.106}
$$

a menos de subsequências.

Tomando o limite nas equações (2.100)-(2.103) temos que

$$
\begin{array}{rl}
\theta_t + \omega_t - \Delta\theta + u \cdot \nabla\theta = g(x,t) & \text{em } Q, \\
\omega_t + \xi - \Delta\omega + \beta_\delta(\omega) = \theta + f(\omega) & \text{em } Q, \\
\partial\theta/\partial\nu = \partial\omega/\partial\nu = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\
\theta(.,0) = \theta_0^\delta,\ \omega(.,0) = \omega_0^\delta & \text{em } \Omega.
\end{array}
$$

De forma inteiramente análoga a que fizemos na prova da proposição 2.2.2, na parte onde usamos argumentos de monotonicidade (veja o último parágrafo da pág. 51), concluímos que $\xi = \alpha_\delta(\omega_t)$ q.t.p. em Q.

□

Para provarmos a continuidade de T_λ suponhamos que $(\theta_n, \omega_n, u_n) \to (\theta, \omega, u)$ em E e denotemos $(\bar\theta_n, \bar\omega_n, \bar u_n) = T_\lambda(\theta_n, \omega_n, u_n)$, i.e., $(\bar\theta_n, \bar\omega_n, \bar u_n)$ satisfaz as equações (2.97)-(2.99), pág. 55, e as respectivas condições iniciais e de fronteira. Fixando $\phi = \bar u_n$ em (2.97) facilmente obtemos que

$$
\|\bar u_n\|^2_{L^\infty(0,T,H)} + \|\bar u_n\|^2_{L^2(0,T,V)} \le C(\|\theta_n\|_{L^2}, K_\delta(\omega_n), \|u_n\|_H, u_0) \le C(\delta), \tag{2.107}
$$

onde usamos que

$$
\int_\Omega (u_n \cdot \nabla) u_n \cdot u_n = 0, \text{ pois } u_n \in H \text{ (veja a observação 2.1.3, pág. 35).}
$$

Além disso, segue da equação (2.97), pág. 55, e pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg para $N = 2$, que

$$
\|(\bar u_n)_t\|_{L^2(0,T;V')} \le C(\delta). \tag{2.108}
$$

De fato,

$$
\begin{array}{rcl}
\big((\bar u_n)_t, \phi\big) & \le & \|\nabla u_n\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^2} - \big(u_n \cdot \nabla u_n, \phi\big) + C(\delta)\|u_n\|_H\|\phi\|_{L^2} + C\|\theta_n\|_{L^2}\|\phi\|_H \\
& = & \|\nabla u_n\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^2} + \big(u_n \cdot \nabla\phi, u_n\big) + C(\delta)\|u_n\|_H\|\phi\|_H + C\|\theta_n\|_{L^2}\|\phi\|_H,
\end{array}
\tag{2.109}
$$

pelo corolário 5.2.2, pág. 125.

Agora, por Gagliardo-Nirenberg, temos que

$$\int_\Omega (u_n \cdot \nabla)\phi \cdot u_n \leq \|u_n\|_{L^4}^2 \|\nabla\phi\|_{L^2} \leq \|u_n\|_H \|\nabla u_n\|_{L^2} \|\nabla\phi\|_{L^2} \leq C\|\nabla\phi\|_{L^2}. \tag{2.110}$$

À partir de (2.109) e (2.110), integrando-se em t, (2.108) segue.

Combinando-se (2.107), (2.108) e o teorema 1.5.1, pág. 29, obtemos que se $n \to +\infty$

$$\begin{aligned} \bar{u}_n &\rightharpoonup \hat{u} \text{ em } L^2(0,T;V), \bar{u}_n \overset{*}{\rightharpoonup} \hat{u} \text{ em } L^\infty(0,T;H) \text{ e} && (2.111)\\ \bar{u}_n &\to \hat{u} \text{ em } L^2(0,T;H), (\bar{u}_n)_t \rightharpoonup \hat{u}_t, \text{ em } L^2(0,T;V'), && (2.112) \end{aligned}$$

a menos de subsequências.

Por um lado, como $(\theta_n, \omega_n, u_n) \to (\theta, \omega, u)$ em E, por (2.111)-(2.114), passando o limite na equação (2.97), vemos que para $0 < t < T$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\hat{u}, \phi) + (\nabla\hat{u}, \nabla\phi) + (\hat{u}\cdot\nabla\hat{u}, \phi) + \lambda(K_\delta(\omega)u, \phi) = \lambda(\zeta\theta, \phi), \quad \forall\phi \in V,\\ \hat{u}(.,0) = u_0 \quad \text{em } \Omega. \end{aligned}$$

Por outro lado, considere as equações (2.98) e (2.99) associadas à $\bar{\theta}_n$ e $\bar{\omega}_n$. Combinando (2.111) com o lema 2.5.4 (veja (2.106)), temos que $(\bar{\theta}_n, \bar{\omega}_n) \to (\hat{\theta}, \hat{\omega})$ em E onde

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_t + \hat{\omega}_t - \Delta\hat{\theta} + \hat{u}\cdot\nabla\hat{\theta} &= g(x,t) \quad \text{q.t.p. em } Q,\\ \hat{\omega}_t + \alpha_\delta(\hat{\omega}_t) - \Delta\hat{\omega} + \beta_\delta(\hat{\omega}) &= \hat{\theta} + f(\hat{\omega}) \quad \text{q.t.p. em } Q, \end{aligned}$$

com $(\hat{\theta}, \hat{\omega})$ satisfazendo as condições iniciais e de fronteira naturalmente associadas. Dessa forma, por sua própria definição segue que $T_\lambda(\theta, \omega, u) = (\hat{\theta}, \hat{\omega}, \hat{u})$ de modo que $(\hat{\theta}, \hat{\omega}, \hat{u}) = (\bar{\theta}, \bar{\omega}, \bar{u})$.

Por fim, como $(\bar{\theta}_n, \bar{\omega}_n) \to (\bar{\theta}, \bar{\omega})$ em E, vale que $T_\lambda(\theta_n, \omega_n, u_n) = (\bar{\theta}_n, \bar{\omega}_n, \bar{u}_n) \to (\bar{\theta}, \bar{\omega}, \bar{u})$ em E, por (2.112), o que prova a continuidade de T_λ.

Provemos agora a compacidade T_λ. Sejam $(\theta_n, \omega_n, u_n) \in E$ e $(\bar{\theta}_n, \bar{\omega}_n, \bar{u}_n) = T_\lambda(\theta_n, \omega_n, u_n)$, onde $(\theta_n, \omega_n, u_n) \rightharpoonup (\theta, \omega, u)$ fracamente em E. Como vimos em (2.107), pág. 57, temos que

$$\|\bar{u}_n\|_{L^\infty(0,T,H)}^2 + \|\bar{u}_n\|_{L^2(0,T,V)}^2 \leq C(\|\theta_n\|_{L^2}, K_\delta(\omega_n), \|u_n\|_H, u_0) \leq C(\delta),$$

pois $(\theta_n, \omega_n, u_n)$ é limitado em E. Além disso, de forma análoga a que fizemos em (2.109) e (2.110), vale que

$$\|(\bar{u}_n)_t\|_{L^2(0,T;V')} \leq C(\delta).$$

Assim, temos mais uma vez que existe $\bar{u} \in L^2(0,T;H)$ tal que se $n \to +\infty$,

$$\bar{u}_n \to \bar{u} \text{ em } L^2(0,T;H), \tag{2.113}$$

a menos de subsequências. Mais ainda, por (2.111) e pelo lema 2.5.4, pág. 56, existem $\bar{\theta}$ e $\bar{\omega}$ tais que

$$\bar{\theta}_n \to \bar{\theta} \text{ em } L^2(0,T;L^2) \tag{2.114}$$

$$\bar{\omega}_n \to \bar{\omega} \text{ em } L^2(0,T;L^2), \tag{2.115}$$

a menos de subsequências. Assim por (2.113)-(2.115), o operador T_λ é compacto.

A seguir, provaremos que T_λ é uniformemente contínuo com respeito a λ para subconjuntos limitados de E. Vale a pena ressaltar que o argumento usual para provar tal continuidade uniforme de T_λ (por exemplo veja Planas e Boldrini [42], Boldrini e Planas [7] ou Hoffmann e Jiang [27]), é na realidade provar o resultado mais forte de que T_λ é localmente lipschitziana com respeito a λ usando teoria de regularidade L^p clássica para equações parabólicas. Entretanto, a presença de $\alpha_\delta(\omega_t)$ na equação do campo de fases, comprometeria esse tipo de argumento. Alternativamente, usaremos uma técnica diferente e original dentro do contexto, a qual provará apenas a continuidade uniforme.

Para tanto, primeiramente provaremos o seguinte resultado.

Lema 2.5.5. *(Continuidade uniforme com respeito ao campo de velocidades) Seja B a bola fechada em $L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para cada u e v em B os quais*

$$\|u-v\|_{L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)} < \delta$$

temos

$$\|\theta_u - \theta_v\|_{C([0,T];L^2)} + \|\omega_u - \omega_v\|_{C([0,T];W^{1,2})} < \epsilon,$$

onde (θ_u,ω_u) e (θ_v,ω_v) são dados pela proposição 2.2.2.

Dem.

Suponha que isto seja falso. Então, existem $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ em B e $\epsilon > 0$ tais que

$$\|u_n - v_n\|_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)} < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e} \tag{2.116}$$

$$\|\theta_{u_n} - \theta_{v_n}\|_{C([0,T];L^2)} + \|\omega_{u_n} - \omega_{v_n}\|_{C([0,T];W^{1,2})} \geq \epsilon. \tag{2.117}$$

Entretanto, existe $u \in B$ tal que

$$\begin{aligned} u_{n_k} &\rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;V),\\ u_{n_k} &\overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;H). \end{aligned}$$

Observe que a mesma convergência vale para v_{n_k} via (2.116). Assim, teríamos por (2.117)

$$\|\theta_{u_{n_k}} - \theta_{v_{n_k}}\|_{C([0,T];L^2)} + \|\omega_{u_n} - \omega_{v_n}\|_{C([0,T];W^{1,2})} \geq \epsilon$$

o que contradiz o lema 2.5.4.

$\square$

Agora estamos prontos para provar a continuidade uniforme a qual precisamos. Seja B um subconjunto limitado em E e considere $T_{\lambda_i}(\theta,\omega,u) = (\bar{\theta}_i, \bar{\omega}_i, \bar{u}_i)$, para $i = 1,2$, onde $(\theta,\omega,u) \in B$.

Em primeiro lugar lembre-se de que pela própria equação (2.97) vale que

$$\|\bar{u}_i\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\bar{u}_i\|^2_{L^2(0,T;V)} \leq C,$$

onde C depende de δ, do conjunto B, dos dados iniciais mas não de λ_i (veja (2.107)).

Paralelamente, denotando-se $\bar{u} = \bar{u}_1 - \bar{u}_2$, é fácil ver que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\bar{u},\phi) + (\nabla\bar{u},\nabla\phi) + (\bar{u}_1\cdot\nabla\bar{u},\phi) - (\bar{u}\cdot\nabla\bar{u}_2,\phi) + (\lambda_1-\lambda_2)(K_\delta(\omega)u,\phi)\\ = (\lambda_1-\lambda_2)(\zeta\theta,\phi),\ \forall\phi\in V,\ 0<t<T.\end{aligned}$$

Então, para $\phi = \bar{u}$ aplicando as desigualdades de Hölder, Young e de Gagliardo-Nirenberg, depois integrando com respeito a t e usando o lema de Gronwall, obtemos $C = C(B,\delta) > 0$ o qual

$$\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)} \leq |\lambda_1-\lambda_2|C.$$

Então, dado $\epsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 = \delta_1(\epsilon_1) > 0$ tal que, se $|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta_1$ então

$$\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)} < \epsilon_1.$$

Entretanto, sabemos pelo último lema que dado $\epsilon > 0$, existe $\hat{\delta} = \hat{\delta}(\epsilon) > 0$ o qual se $\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)} < \hat{\delta}$ então $\|\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2\|_{C([0,T];L^2)} + \|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2\|_{C([0,T];W^{1,2})} < \epsilon/2$. Sendo assim, seja $\epsilon_1 = \min\{\hat{\delta}, \epsilon/2\}$ e $\delta = \delta_1(\epsilon_1) = \delta(\epsilon) > 0$. Logo, quando $|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$, segue que

$$\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|_{L^2(0,T;H)} + \|\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2\|_{L^2(0,T;L^2)} + \|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2\|_{L^2(0,T;L^2)} < \epsilon,$$

de modo que T_λ é de fato uniformemente contínuo com respeito a λ em subconjuntos limitados de E. Por fim, observe que $T_0(\theta,\omega,u) = (\theta,\omega,u)$ possui uma única solução em E.

Portanto, o teorema de ponto fixo de Leray-Schauder pode ser aplicado provando a existência de $(\theta,\omega,u) \in E$ com $T_1(\theta,\omega,u) = (\theta,\omega,u)$, que por construção satisfaz as equações (2.80)-(2.85), concluindo a prova da proposição 2.5.3. □

Observação 2.5.6. *Como o leitor deve ter percebido, na construção da solução aproximada usamos o fato de que $u_0 = 0$ em $\Omega_s(0)$ pois não foi necessário aqui, não precisamos de 'condição de compatibilidade' pois a equação do fluido é válida em todo o Ω. Entretanto, evidentemente os resultados continuam válidos com esta restrição, de modo que consideraremos até o final desse capítulo $v_0 = u_0$, conforme o pedido na hipótese* **(A5)** *(veja a observação 2.1.1, pág. 34).*

2.6 Prova do teorema de existência

Primeiramente estabeleceremos alguns resultados sobre convergência para θ^δ, ω^δ e u^δ.

Lema 2.6.1. *(Estimativas de energia) Seja $(\theta^\delta, \omega^\delta, u^\delta)$ dado pela proposição 2.5.3. Então, existe $C > 0$, o qual não depende de $\delta > 0$, tal que*

$$\|u^\delta\|_{L^2(0,T;V)} \leq C, \ \ \|u^\delta\|_{L^\infty(0,T;H)} \ \leq \ C, \tag{2.118}$$

$$\int_0^T \int_\Omega K_\delta(\omega^\delta)|u^\delta|^2 \ \leq \ C. \tag{2.119}$$

Dem.

Tome $\phi = u^\delta$ na equação (2.80). Segue por integração em t que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u^\delta(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u^\delta\|_{L^2}^2 + \int_0^t \int_\Omega K_\delta(\omega^\delta)|u^\delta|^2 \\ \leq C \int_0^t \|\theta^\delta\|_{L^2}^2 + C \int_0^t \|u^\delta\|_{L^2}^2 + C. \end{aligned}$$

Usando (2.89) e o lema de Gronwall provamos as estimativas (2.118) e (2.119).

□

Combinando os lemas 2.5.1 e 2.6.1, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.6.2. *Existe $(\theta, \omega, \eta, \xi)$ o qual, a menos de subsequências, se $\delta \to 0$*

$$\begin{aligned}
\theta^\delta &\rightharpoonup \theta \text{ em } L^2(0,T;W^{2,2}), \\
\theta^\delta &\overset{*}{\rightharpoonup} \theta \text{ em } L^\infty(0,T;W^{1,2}), \\
\theta_t^\delta &\rightharpoonup \theta_t \text{ em } L^2(0,T;L^2), \\
\theta^\delta &\to \theta \text{ em } C([0,T];L^2), && (2.120) \\
\omega^\delta &\overset{*}{\rightharpoonup} \omega \text{ em } L^\infty(0,T;W^{2,2}), \\
\omega_t^\delta &\rightharpoonup \omega_t \text{ em } L^2(0,T;W^{1,2}), && (2.121) \\
\omega_t^\delta &\overset{*}{\rightharpoonup} \omega_t \text{ em } L^\infty(0,T;L^2), \\
\omega^\delta &\to \omega \text{ em } C([0,T];W^{1,2}) \cap C([0,T];C(\overline{\Omega})), && (2.122) \\
\beta_\delta(\omega^\delta) &\overset{*}{\rightharpoonup} \eta \text{ em } L^\infty(0,T;L^2), && (2.123) \\
\alpha_\delta(\omega_t^\delta) &\overset{*}{\rightharpoonup} \xi \text{ em } L^\infty(0,T;L^2). && (2.124)
\end{aligned}$$

Dem. Como a prova de quase todas convergências é padrão seguindo diretamente das estimativas dos lemas 2.5.1 e 2.6.1, nós as omitiremos aqui. Vale lembrar que na proposição 4.3.3 serão provados com detalhes resultados inteiramente análogos. Vejamos então (2.122), a única convergência diferente. Como $W^{2,2} \hookrightarrow W^{3/2,2} \hookrightarrow\hookrightarrow W^{1,2}$

combinando as estimativas (2.91), (2.92), (2.118), e o teorema (1.5.1), pág. 29 do capítulo 1, nós obtemos que $\omega^\delta \to \omega$ em $C([0,T]; W^{3/2,2})$. Em particular, a primeira convergência em (2.122) é válida. Para a segunda, usamos apenas que $W^{3/2,2} \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ (cf. a observação 1.3.12, pág. 18).

$\square$

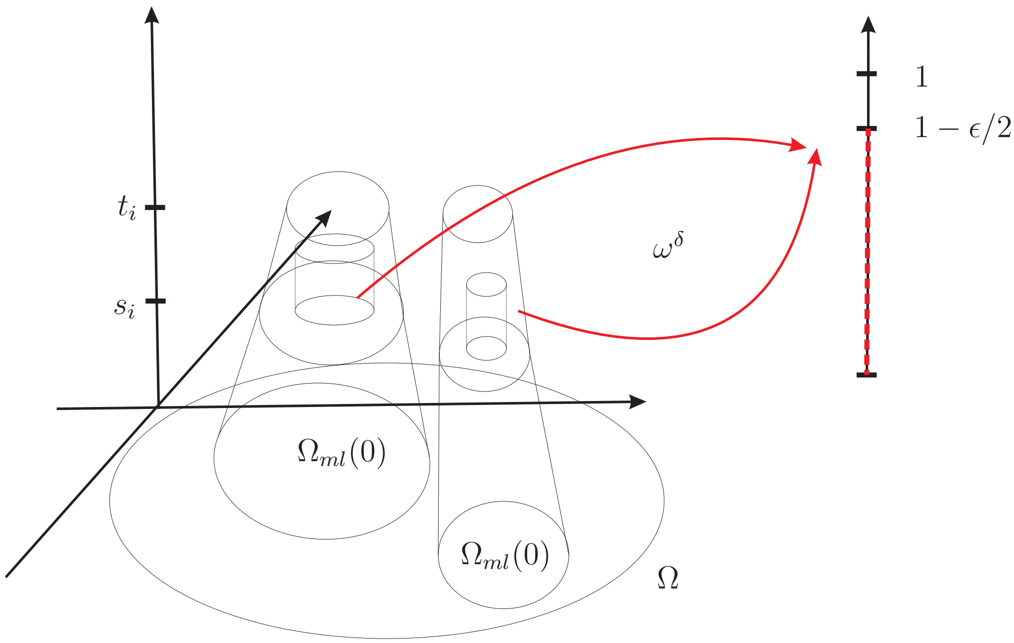

Figura 2.3:

Lema 2.6.3. *Seja* $U \times [t_1, t_2] \subset\subset Q_{ml}$. *Existem* $\hat{\delta} = \hat{\delta}(U, t_1, t_2) > 0$ *e* $C = C(U, t_1, t_2) > 0$ *tais que, para todo* $0 < \delta < \hat{\delta}$

$$\|u_t^\delta\|_{L^2(t_1,t_2;V(U)')} \leq C.$$

Dem. Aqui seguimos Planas e Boldrini [42]. Em primeiro lugar, como $0 \leq \omega < 1$ em Q_{ml}, $\omega \in C([0,T]; C(\overline{\Omega}))$ e $U \times [t_1, t_2] \subset\subset Q_{ml}$, então existe $\epsilon = \epsilon(U, t_1, t_2) > 0$ a qual $0 \leq \omega \leq 1 - \epsilon < 1$ em $U \times [t_1, t_2]$ (veja a figura 2.3). Assim, seja $\hat{\delta} = \hat{\delta}(\epsilon)$ tal que se, $0 < \delta < \hat{\delta}$, então $|\omega^\delta - \omega| < \epsilon/2$ em $\overline{Q}$. Dessa forma $-\epsilon/2 < \omega^\delta < 1 - \epsilon/2$ em $[t_1, t_2] \times U$. Logo, de (2.87), pág. 53, $h(\omega^\delta) \leq 1 - \epsilon/2$ de forma que pela hipótese **(A8)**, pág. 34 e (2.88), pág. 53, $K_\delta(\omega^\delta) \leq C(\epsilon)$. Usando a equação (2.80), as desigualdades de Hölder e de Gagliardo-Nirenberg, temos que

$$\begin{aligned}(u_t^\delta, \phi) \leq & \|u^\delta\|_H^{3/2} \|u^\delta\|_V^{1/2} \|\nabla\phi\|_{L^2} + C(\epsilon)\|u^\delta\|_H \|\phi\|_{L^2} + \|u^\delta\|_V \|\nabla\phi\|_{L^2} \\ & + C\|\theta^\delta\|_{L^2}\|\phi\|_{L^2},\end{aligned}$$

de onde deduzimos a estimativa desejada.

□

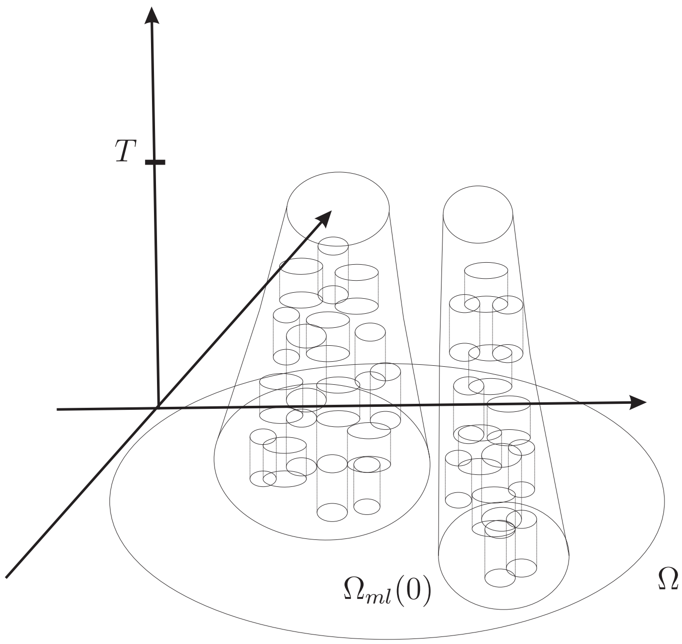

Figura 2.4:

Lema 2.6.4. *Existe* $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ *tal que, se* $\delta \to 0$

$$u^\delta \to u, \text{ em } L^2_{loc}(Q_{ml}), \tag{2.125}$$
$$u^\delta \rightharpoonup u, \text{ em } L^2(0,T;V), \tag{2.126}$$
$$u^\delta \overset{*}{\rightharpoonup} u, \text{ em } L^\infty(0,T;H). \tag{2.127}$$

Dem.

De (2.118), pág. 61, obtemos (2.126) e (2.127). Como Q_{ml} é aberto, segue que existe Q_i tal que

$$Q_i = [t_i, s_i] \times \Omega_i \subset\subset Q_{ml} \text{ e } Q_{ml} = \cup_{i=1}^\infty Q_i,$$

onde $\Omega_i \subset \Omega_{ml}$ é um aberto (veja a figura 2.4, pág. 63). Assim, pelo lema 2.6.3, existe $C = C(i) > 0$ tal que $\|u_t^\delta\|_{L^2(t_i,s_i;V(\Omega_i)')} \leq C_i$. Dessa estimativa, de (2.118) e mais uma vez pelo teorema 1.5.1, pág. 29, existe u_i e uma subsequência u^{δ_i} a qual $u^{\delta_i} \to u_i$ em $L^2(t_i, s_i; H(\Omega_i))$. Através de um argumento diagonal, obtemos então uma subsequência de $\{u^\delta\}$, a qual ainda denotamos por $\{u^\delta\}$, tal que $u^\delta \to u_i$ em $L^2(t_i, s_i; H(\Omega_i))$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Dessa forma, por (2.126) $u = u_i$, em Q_i e mais ainda $u_\delta \to u,$ em $L^2_{loc}(Q_{ml})$.

$\square$

Com esses resultados estamos prontos para provar o resultado principal do capítulo.

Demonstração do teorema 2.1.2

A ideia aqui é considerar as funções $(\theta^\delta, \omega^\delta, u^\delta)$ dadas pela proposição 2.5.3, pág.55, as quais satisfazem as equações (2.77)-(2.85), pág. 53, e tomarmos o limite com $\delta \to 0.$ Pelo lema 2.6.4 e pelo corolário 2.6.2, $(\theta, \omega, u, \eta, \xi)$ satisfazem (2.2)-(2.5), (2.7) e (2.11). Mais ainda, temos que

$$\omega_t + \xi - \Delta\omega + \eta = \theta + f(\omega), \text{ q.t.p. em } Q. \tag{2.128}$$

Das convergências (2.122)-(2.123), pág. 61, e da proposição 1.4.9 (v) pág. 26 segue que $\eta \in \beta(\omega)$, pois

$$\limsup_{\delta\to 0} \int_0^t \left(\beta_\delta(\omega^\delta), \omega^\delta\right) \leq \int_0^t (\eta, \omega)$$

e β é um operador monótono maximal. Assim, (2.10) é satisfeita.

Em seguida, perceba que fixando $\xi^\delta = \alpha_\delta(\omega^\delta_t)$ na equação (2.82), temos

$$\begin{aligned} \int_0^t (\xi^\delta, \omega^\delta_t) &= \int_0^t (\theta^\delta + f(\omega^\delta), \omega^\delta_t) - \int_0^t (\nabla\omega^\delta, \nabla\omega^\delta_t) \\ &- \int_0^t (\omega^\delta_t, \omega^\delta_t) - \int_\Omega \Lambda^\delta(\omega^\delta(x,t)) + \int_\Omega \Lambda^\delta(\omega^\delta(x,0)), \end{aligned} \tag{2.129}$$

onde Λ^δ é a regularização de Yosida de Λ, a função própria e convexa cujo o subdiferencial é o operador monótono e maximal β (veja (2.20), pág. 36 e os comentários subsequentes). Entretanto, segue do lema de Fatou que para $\delta_0 > 0$ fixado,

$$-\int_\Omega \Lambda_{\delta_0}(\omega(x,t)) \geq \limsup_{\delta\to 0} -\int_\Omega \Lambda_{\delta_0}(\omega^\delta(x,t)),$$

e como $\Lambda_{\delta_0}(x) \leq \Lambda_\delta(x)$ para todo $0 < \delta \leq \delta_0$, segue que

$$\limsup_{\delta\to 0} -\int_\Omega \Lambda_{\delta_0}(\omega^\delta(x,t)) \geq \limsup_{\delta\to 0} -\int_\Omega \Lambda_\delta(\omega^\delta(x,t)).$$

Assim, pela proposição 1.4.15, pág. 28, temos

$$-\int_\Omega \Lambda(\omega(x,t)) = \limsup_{\delta_0\to 0} -\int_\Omega \Lambda_{\delta_0}(\omega(x,t)) \geq \limsup_{\delta\to 0} -\int_\Omega \Lambda_\delta(\omega^\delta(x,t)). \tag{2.130}$$

Combinando (2.129), (2.130), (2.22), pág.36 e o corolário 2.6.2, pág.61, vale que

$$\begin{aligned}\limsup_{\delta\to 0}\int_0^t(\xi^\delta,\omega_t^\delta) &\le \int_0^t(\theta+f(\omega),\omega_t)-\int_0^t(\omega_t,\omega_t)-\int_0^t(\nabla\omega,\nabla\omega_t)\\ -\int_\Omega\Lambda(\omega(x,t))+\int_\Omega\Lambda(\omega_0(x)) &= \int_0^t(\theta+f(\omega)-\omega_t-\eta,\omega_t)-\int_0^t(\nabla\omega,\nabla\omega_t),\\ &= \int_0^t(\xi,\omega_t),\end{aligned} \tag{2.131}$$

onde para a última igualdade, usamos a proposição 1.4.17, pág. 29, aplicada a Λ e η (veja (2.1) e os comentários subsequentes, pág. 34).

Agora fica claro a necessidade de estimativas de ordem tão alta para o parâmetro de fase como em (2.91)-(2.93) ou mesmo em (2.50)-(2.52) e foi nesse sentido que mencionamos na introdução que o problema **A** (e também o **B** como veremos) exige muita regularidade.

Prosseguindo, pela própria definição de α_δ (veja (2.19), pág. 36) e ξ^δ, temos que

$$\gamma_\delta(\xi^\delta)+\delta\xi^\delta=\omega_t^\delta. \tag{2.132}$$

Mais ainda, sabemos de (2.94), pág. 54, que $\int_0^t(\xi^\delta,\delta\xi^\delta)\le C\delta$ de maneira que

$$\limsup_{\delta\to 0}\int_0^t(\gamma_\delta(\xi^\delta),\xi^\delta)\le\int_0^t(\xi,\omega_t),$$

onde usamos (2.129) e (2.131). Porém observe que da estimativa (2.94), pág. 54 e da convergência (2.121), pág. 61, segue que $\gamma_\delta(\xi^\delta)\rightharpoonup\omega_t$ em $L^2(0,T;L^2)$. Além disso, por (2.124) vale que $\xi^\delta\rightharpoonup\xi$ em $L^2(0,T;L^2)$, de modo que mais uma vez pela proposição 1.4.9 (v) pág. 26, $\omega_t\in\gamma(\xi)$, ou equivalentemente $\xi\in\alpha(\omega_t)$, de forma que (2.8) e (2.9) também são satisfeitas.

Agora, seja $\phi\in L^2(0,T;V(\Omega_{ml}(t)))\cap W^{1,2}(0,T;H(\Omega_{ml}(t)))$ com $supp\,\phi\subset\subset Q_{ml}$; segue diretamente de (2.80), pág. 53, que para t q.t.p. em $[0,T]$

$$\begin{aligned}(u^\delta(t),\phi(t))-\int_0^t(u^\delta,\phi_t)+\int_0^t(\nabla u^\delta,\nabla\phi)+\int_0^t\int_\Omega u^\delta\cdot\nabla u^\delta\phi\\ +\int_0^t(K_\delta(\omega^\delta)u^\delta,\phi)=(u^\delta(0),\phi(0))+\int_0^t(\zeta\theta^\delta,\phi).\end{aligned}$$

Como $supp\,\phi\subset\subset Q_{ml}$, se $\delta\to 0$ para t q.t.p. em $[0,T]$

$$\begin{aligned}(u^\delta(t),\phi(t)) &\to (u(t),\phi(t)),\ \text{usando (2.127)},\\ \int_0^t(u^\delta,\phi_t) &\to \int_0^t(u,\phi_t),\ \text{usando (2.125)},\\ \int_0^t(\nabla u^\delta,\nabla\phi) &\to \int_0^t(\nabla u,\nabla\phi),\ \text{usando (2.126)},\\ \int_0^t\int_\Omega u^\delta\cdot\nabla u^\delta\phi &\to \int_0^t\int_\Omega u\cdot\nabla u\phi,\ \text{usando (2.125) e (2.126)}.\end{aligned}$$

Mais ainda, tomando $\hat{\delta} > 0$ e $\epsilon > 0$ como no lema 2.6.4, notamos que $h(\omega^\delta) \to \omega$ uniformemente em $supp\ \phi$, pois h é uniformemente contínua em $[-\epsilon/2, 1-\epsilon/2]$. Analogamente, se $0 < \delta < \hat{\delta}$, então $K(h(\omega^\delta) - \delta) \to K(\omega)$ uniformemente em $supp\ \phi$, pois K é uniformemente contínua em $[-1-\hat{\delta}, 1-\epsilon/2]$. Dessa forma,

$$\int_0^t (K_\delta(\omega^\delta)u^\delta, \phi) \to \int_0^t (K(\omega)u, \phi).$$

Então a equação (2.6) é satisfeita.

Prosseguindo, como $\omega^\delta \to 1$ em Q_s, segue de (2.88) que dado $n \in \mathbb{N}$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, vale que $K_\delta(\omega^\delta) \geq n$. Então, por (2.119), $\displaystyle\int_{Q_s} |u^\delta|^2 \leq C/n$ e assim, por (2.127),

$$u = 0 \text{ q.t.p. em } Q_s \tag{2.133}$$

a equação (2.12) também é satisfeita.

Por fim, falta verificarmos que os dados iniciais são satisfeitos. Veja que para (2.13), pág. 35, usamos as convergências (2.120) em conjunto com (2.24), do lema 2.2.1, pág. 36, e (2.122) em conjunto com (2.25), também do lema (2.2.1). Já a prova de que para algum sentido $u(0) = u_0$ não é direta devido a pouca informação que temos sobre u_t^δ - note que não possuímos estimativas em $Q = \Omega \times (0,T)$ - o que não nos permite concluir sobre a continuidade de u em H, o campo de velocidades limite, em $t = 0$, muito menos dar algum sentido a $u(0) = u_0$ em H. Entretanto, através da seguinte seguinte afirmação, provaremos (2.14).

Afirmação 2.6.5. *Para cada $V_0 \subset\subset \Omega_{ml}(0)$ existe t_0 tal que $u^\delta \to u$ em $C(0, t_0; H(V_0))$. Em particular, $u(0) = u_0$ em $H(V_0)$*

Veja que se a afirmação for verdadeira segue que $u(0) = u_0$ q.t.p. em V_0, para todo $V_0 \subset\subset \Omega_{ml}(0)$ de modo que naturalmente (2.14) será satisfeita. Provemos então a afirmação. Em primeiro lugar, lembre que $\Omega_{ml}(0)$ é um aberto pois $\omega_0 \in W^{2,2}$. Agora, já que $V_0 \subset\subset \Omega_{ml}(0)$ existe K_0 compacto de $\mathbb{R}^2$ tal que $V_0 \subset K_0 \subset \Omega_{ml}(0)$. Observe que, como $\omega \in C([0,T]; C(\overline{\Omega}))$ existem $t_0, \epsilon > 0$ tais que

$$0 \leq \omega(x,t) < 1 - \epsilon,\ \forall\ (x,t) \in K_0 \times [0, t_0].$$

Assim, procedendo de forma análoga a que fizemos na prova do lema (2.6.3), pág. 62, encontramos $C(K) > 0$ tal que

$$\|u_t^\delta\|_{L^2(0,t_0;(V(K_0))')} \leq C(K).$$

Logo, pela segunda estimativa de (2.118), pág. (2.118), e pelo lema de Aubin-Lions (teorema (1.5.1), pág. 29), segue que $u^\delta \to u$ em $C([0,t_0]; H(K_0))$

$\square$

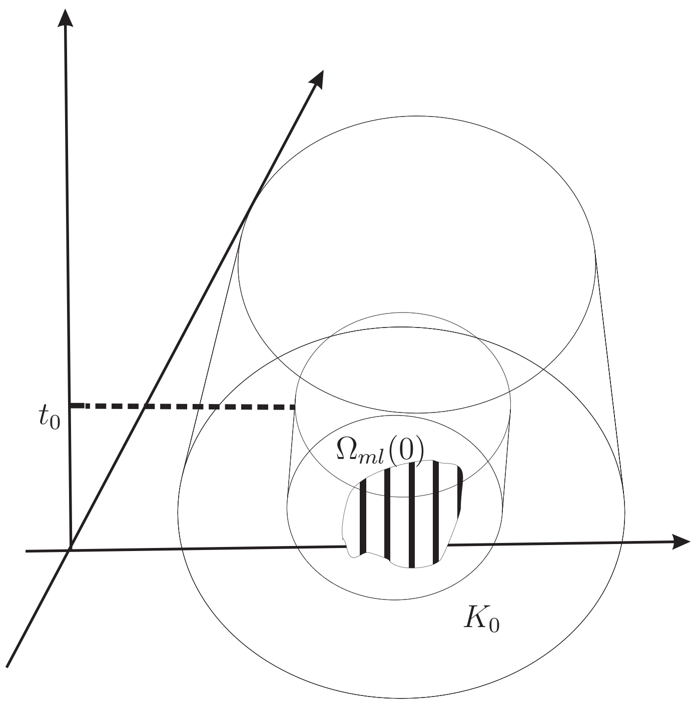

Figura 2.5: Usamos a continuidade de ω para obtermos tais regiões.

CAPÍTULO 3

RESULTADOS ABSTRATOS

Neste capítulo exibiremos as ferramentas matemáticas que precisaram ser desenvolvidas para a análise do modelo **B** no capítulo 4. Na realidade, nenhum dos resultados que serão aqui introduzidos faziam parte do escopo inicial da tese, todos surgiram da necessidade de aprimorarmos o instrumental existente para o estudo de equações diferenciais parciais degeneradas. Até onde sabemos, as conclusões que serão exibidas são originais sendo que, ressaltamos o corolário 3.1.3, a proposição 3.2.3, o lema 3.2.6 e a proposição 3.2.10. Os resultados aqui discutidos serão importantíssimos para o capítulo 4.

3.1 Estimativas de energia na fronteira

Estabeleceremos estimativas de energia para termos de fronteira não usuais que surgem em decorrência da presença dos p-laplacianos. Na realidade, trata-se de uma generalização das estimativas feitas para obtenção da chamada segunda desigualdade fundamental (veja Ladyzhenskaya [31], págs. 175-179 ou Brezis e Evans em [14]), importante no estudo de operadores uniformemente elípticos de segunda ordem, o que não é o caso do p-laplaciano. Nossa abordagem foi inspirada pela feita por Grisvard em [26], págs. 133-138, na medida em que apesar de usarmos uma técnica similar, foram necessárias algumas adaptações para aplicarmos nos casos específicos que surgiram como consequência do estudo do modelo **B**, como veremos no capítulo 4.

Durante nosso trabalho aparecem termos de fronteira do tipo

$$-\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\nu_j d\sigma.$$

O controle desse tipo de termo é em geral delicado. De fato, nenhum teorema de traço nos ajuda diretamente, pois aumentaríamos assim a ordem das derivadas e consequentemente não conseguiríamos compensar essas derivadas de ordem superior com os outros elementos da equação diferential parcial. Em Ladyzhenskaya [31] e Grisvard [26], são considerados termos parecidos (veja [31] lema 3.8.1, pág. 175 ou [26] teo. 3.1.1.2, pág. 138). Infelizmente, não podemos aplicar de forma direta nenhum desses dois resultados, porém, com algumas mudanças da técnica usada por Grisvard em [26] conseguimos as estimativas desejadas para uma das equações de interesse neste trabalho, a qual envolve um p-laplaciano e um operador multivalorado (veja a pág. 5, o segundo modelo).

Observação 3.1.1. *De maneira independente, Ciachi e Maz'ya usaram uma técnica semelhante a aqui exibida para o controle de termos de fronteira provenientes de operadoes degenerados. Entretanto, eles usam tal resultado para o estudo de outras questões relacionadas a estes operadores.*

Um pouco sobre geometria

Consideraremos nesta seção Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira de classe C^3. Nessas condições, dado $P \in \partial\Omega$, existem $N-1$ curvas de classe C^3, contidas em uma vizinhança de P na hipersuperfíce $\partial\Omega$, ortogonais nesse ponto. Denotemos estas por ζ_1,...., ζ_{N-1}, por τ_1,..., τ_{N-1} seus respectivos vetores tangentes unitários e por s_1,..., s_{N-1} seus comprimentos de arco. Denotaremos por ν o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$. É importante salientar que τ_1,...,τ_{N-1} e ν formam um sistema de coordenadas para $\mathbb{R}^N$. Além disso, podemos parametrizar $\partial\Omega$ com relação a s_1,..., s_{N-1}, localmente em P. Em particular, para cada $v \in \left(C^2(\overline{\Omega})\right)^N$

$$\begin{aligned} v &= v_T + v_\nu \nu, \text{ onde} \\ v_T &= \sum_{i=1}^{N-1} v_i \tau_i, \\ v_i &= v \cdot \tau_i \text{ e} \\ v_\nu &= v \cdot \nu. \end{aligned}$$

Desse modo, para cada $\phi \in C^3(\overline{\Omega})$

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \nabla_T \phi + \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\nu, \\ \nabla_T \phi &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial \phi}{\partial s_i}\tau_i, \end{aligned}$$

onde ∇_T denota derivada tangencial a $\partial\Omega$.

Igualdades importantes

Como veremos, será muito útil escrevermos $(v\cdot\nabla)v\cdot\nu$ e v_ν div v nesse sistema de coordenadas. Em primeiro lugar, observamos que

$$(v\cdot\nabla)v = \sum_{i=1}^{N-1} v_i\frac{\partial v}{\partial s_i} + v_\nu\frac{\partial v}{\partial \nu}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s_i} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial s_i}\big(v_j\tau_j\big) + \frac{\partial}{\partial s_i}\big(v_\nu\nu\big) \text{ e} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial \nu}\big(v_j\tau_j\big) + \frac{\partial}{\partial \nu}\big(v_\nu\nu\big). \tag{3.3}$$

Assim, segue de (3.1)-(3.3) que

$$(v\cdot\nabla)v\cdot\nu = \sum_{i,j=1}^{N-1} v_iv_j\frac{\partial \tau_j}{\partial s_i}\cdot\nu + \sum_{i=1}^{N-1} v_i\frac{\partial v_\nu}{\partial s_i} + \sum_{j=1}^{N-1} v_\nu v_j\frac{\partial \tau_j}{\partial \nu}\cdot\nu + v_\nu\frac{\partial v_\nu}{\partial \nu} + v_\nu^2\frac{\partial \nu}{\partial \nu}\cdot\nu. \tag{3.4}$$

Prosseguindo, temos que

$$\begin{aligned}
\text{div } v &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial v}{\partial s_i}\cdot\tau_i + \frac{\partial v}{\partial \nu}\cdot\nu \\
&= \sum_{i,j=1}^{N-1}\left[\frac{\partial v_j}{\partial s_i}\tau_j + v_j\frac{\partial \tau_j}{\partial s_i}\right]\cdot\tau_i + \sum_{i=1}^{N-1}\left[\frac{\partial v_\nu}{\partial s_i}\nu + v_\nu\frac{\partial \nu}{\partial s_i}\right]\cdot\tau_i \\
&+ \sum_{j=1}^{N-1}\left[\frac{\partial v_j}{\partial \nu}\tau_j + v_j\frac{\partial \tau_j}{\partial \nu}\right]\cdot\nu + \left[\frac{\partial v_\nu}{\partial \nu}\nu + v_\nu\frac{\partial \nu}{\partial \nu}\right]\cdot\nu.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
v_\nu \text{ div } v &= v_\nu\Bigg\{\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial v_i}{\partial s_i} + \sum_{i,j=1}^{N-1} v_j\frac{\partial \tau_j}{\partial s_i}\cdot\tau_i + v_\nu\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial \nu}{\partial s_i}\cdot\tau_i \\
&+ \sum_{j=1}^{N-1} v_j\frac{\partial \tau_j}{\partial \nu}\cdot\nu + \frac{\partial v_\nu}{\partial \nu} + v_\nu\frac{\partial \nu}{\partial \nu}\cdot\nu\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Como consequência de (3.4) e (3.5) temos que

$$\begin{aligned}
v_\nu \text{ div } v - (v\cdot\nabla)v\cdot\nu &= v_\nu\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial v_i}{\partial s_i} + v_\nu\sum_{i,j=1}^{N-1} v_j\frac{\partial \tau_j}{\partial s_i}\cdot\tau_i + v_\nu^2\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial \nu}{\partial s_i}\cdot\tau_i \\
&- \sum_{i,j=1}^{N-1} v_iv_j\frac{\partial \tau_j}{\partial s_i}\cdot\nu - \sum_{i=1}^{N-1} v_i\frac{\partial v_\nu}{\partial s_i}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

A identidade (3.6) pode ser encontrada em Grisvard [26] pág. 136 eq. 3.1.1.5. Contudo, a forma de usarmos tal equação aqui será distinta. De fato, em [26] a partir da equação (3.6) combinada com a seguinte identidade (veja [26] eq. 3.1.1.2. pág. 135)

$$\int_{\Omega} |\operatorname{div} v|^2 = \int_{\partial\Omega} v_\nu \operatorname{div} v d\sigma - \int_{\partial\Omega} (v \cdot \nabla) v \cdot v d\sigma + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \tag{3.7}$$

tomando-se $v = \nabla u$, em conjunto com as condições de fronteira para u ou com a convexidade para Ω, obtém-se a estimativa desejada, no caso, a segunda desiqualdade fundamental.

Aqui, procederemos de outro modo. Em primeiro lugar, (3.7) não nos ajuda diretamente, até porque nosso objetivo é obter estimativas compatíveis com o p-laplaciano e assim, as estimativas em $W^{2,2}$ podem não ser suficientes para lidarmos com esse tipo de operador. Por fim, em nosso caso precisamos de uma desigualdade de interpolação para termos de fronteira que envolvam espaços de Nikol'skii e não apenas espaços de Sobolev.

Estimativas na Fronteira

Estamos prontos para a prova da estimativa desejada.

Proposição 3.1.2. *Seja $u \in C^3(\overline{\Omega})$. Suponha que $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ em $\partial\Omega$. Então*

$$\left| - \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \nu_j d\sigma \right| \leq C(\partial\Omega) \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^p d\sigma. \tag{3.8}$$

Dem. Em primeiro lugar observe que

$$- \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \nu_j d\sigma = - \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2} (\nabla u \cdot \nabla) \nabla u \cdot \nu d\sigma.$$

Logo, basta que provemos

$$|(\nabla u \cdot \nabla) \nabla u \cdot \nu| \leq C(\partial\Omega) |\nabla u|^2 \text{ em } \partial\Omega. \tag{3.9}$$

Sendo $\partial u/\partial \nu = 0$ em $\partial\Omega$, tomando $v = \nabla u$ em (3.6) segue que

$$-(\nabla u \cdot \nabla) \nabla u \cdot \nu = - \sum_{i,j=1}^{N-1} \frac{\partial u}{\partial s_i} \frac{\partial u}{\partial s_j} \frac{\partial \tau_j}{\partial s_i} \cdot \nu - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial u}{\partial s_i} \frac{\partial}{\partial s_i} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \text{ em } \partial\Omega. \tag{3.10}$$

Agora, já que $\partial u/\partial\nu = 0$ em $\partial\Omega$ então $\nabla_T \partial u/\partial\nu$=0 em $\partial\Omega$. Consequentemente, para $i = 1, ..., N-1$

$$\frac{\partial}{\partial s_i}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) = 0, \text{ em } \partial\Omega \tag{3.11}$$

(veja a prova do teo. 3.1.2.1 em [26]). Combinando-se (3.10) e (3.11) segue (3.9). □

Corolário 3.1.3. *Considere Ω um domínio limitado com fronteira de classe C^3. Então dado $\epsilon > 0$ existe $C(\epsilon) > 0$ tal que*

$$\left| -\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \nu_j d\sigma \right| \leq \epsilon \|u\|^p_{\mathcal{N}^{1+2/p,p}} + C(\epsilon)\|u\|^p_{L^p},$$

para toda $u \in C^3(\overline{\Omega})$ a qual $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$.

Dem. Segue diretamente do corolário 1.3.16, pág. 21 e da proposição 3.1.2. □

O resultado acima é **fundamental** para a adaptação do lema 3.8.1 em [31], pág. 175 e dos teoremas 3.1.2.1 e 3.1.2.3 de [26], de forma a obtermos 'estimativas fortes' para as equações que envolvem o p-laplaciano no modelo **B**. Na realidade, o corolário 3.1.3 foi uma pequena generalização de resultados conhecidos que precisamos construir.

3.2 Problemas auxiliares e teoria de regularidade

Um teorema de representação de Riesz

Geralmente quando trabalhamos com o dual de $W^{1,p}$ ou $W_0^{1,p}$ costumamos usar uma idenficação padrão com um subespaço de $L^p \times L^p$ (veja por exemplo Kufner *et al.* [30] teo. 5.9.2, pág. 294). Contudo, existe uma outra identificação que é, em geral, menos utilizada e pode ser muito vantajosa em certos casos, como o nosso.

Lema 3.2.1. *Considere Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira de classe C^∞. Sejam $1 < p < +\infty$ e $w \in W^{1,p'}$, onde p' denota o conjugado de p. Então existe uma correspondência biunívoca entre $W^{1,p'}$ e $(W^{1,p})'$ tal que dado $f \in (W^{1,p})'$ existe um único $v \in W^{1,p'}$ o qual satisfaz*

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u + vu = \langle f, u \rangle, \forall u \in W^{1,p}.$$

Dem. Veja Kufner *et al.* [30] teo. 5.9.3 pág. 295, o livro de Simader [44] teo. 4.6 pág. 90, os artigos de Lions e Magenes [35] (observação (b), pág. 27), [37] (teor. 6.1, pág.33) e de Schechter [43] (cor. 5.1, pág. 11). □

Uma base especial para $W^{1,p}$

Até meados da década de 70 a existência de bases de Schauder para o espaço $W^{1,p}$ com $p > 2$ era uma questão em aberto. Em 1972, Fucik *et al.* (veja [24]) obtiveram uma prova para tal fato no entanto sem exibir explicitamente qual base seria essa. Posteriormente surgiram bases explícitas para $W^{1,p}$, geralmente com hipóteses muito restritivas sobre o domínio Ω e sempre sem a propriedade da ortogonalidade em L^2. Uma discussão interessante sobre essa questão pode ser vista em Bellout [3], pág. 187, e em Kufner *et al.* [30], pág. 296.

Vale ressaltar que a existência de uma base de Schauder para $W^{1,p}$ com tais propriedades foi proposta como um problema em aberto em 1995 (veja a introdução de [3]), e que até onde sabemos, este ainda é um problema não resolvido. No que segue, obtemos uma resposta parcial, ainda que com restrições no parâmetro p e na regularidade de $\partial\Omega$, resposta essa que para nossos fins será suficiente. Exibiremos um subconjunto enumerável que é ortogonal em L^2 e cujo conjunto das combinações lineares é denso em $W^{1,p}$.

Observação 3.2.2. *Por simplicidade de notação denotaremos para um conjunto dado $\mathcal{V}$, o subespaço gerado pelas combinações lineares dos elementos de $\mathcal{V}$ apenas por $span\mathcal{V}$.*

Proposição 3.2.3. *Considere Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira de classe C^∞ e $p \geq 2$. Suponha que*

$$p \leq 2N/(N-4), \text{ se } N > 4. \tag{3.12}$$

Então, existe um subconjunto $\mathcal{V} \subset W^{1,p}$, ortogonal em L^2 tal que $span\mathcal{V}$ é denso em $W^{1,p}$.

Dem. Em primeiro lugar, queremos mostrar que

$$\frac{1}{2^*} + \frac{1}{(p')^*} \leq 1. \tag{3.13}$$

Podemos supor sem perda de generalidade que $N > 2$ e $N > p'$, pois se $N = 2$ ou $N \leq p'$, (3.13) é trivial. Observemos que

$$\frac{1}{2^*} + \frac{1}{(p')^*} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{2}{N} \leq \frac{1}{p}. \tag{3.14}$$

De fato, basta ver que

$$\frac{1}{2^*} + \frac{1}{(p')^*} = \frac{3}{2} - \frac{2}{N} - \frac{1}{p}$$

de modo que a equivalência (3.14) é válida.

Caso $N \leq 4$, notemos que (3.13) segue trivialmente de (3.14). Caso $N > 4$, como

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{N} = \frac{N-4}{2N}$$

então por (3.12) e (3.14), segue (3.13).

Em segundo lugar, considere o operador $\Lambda = (-\Delta + I)^{-1}$, i.e., $\Lambda : W^{1,2} \to W^{1,2}$ tal que $\Lambda f = u$ se, e somente se, u é solução fraca de

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \text{ em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

É fácil ver que existe $\mathcal{V} = \{\phi_i\}_{\mathbb{N}}$ o qual para cada $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} -\Delta \phi_i + \phi_i &= \lambda_i \phi_i \text{ em } \Omega, \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \nu} &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde $\lambda_i > 0$, $\mathcal{V}$ é ortogonal em L^2, ortonormal em $W^{1,2}$ e $\mathcal{V}$ é uma base de Schauder para $W^{1,2}$.

De fato, evidentemente Λ está bem definido e é contínuo. Mais ainda, como pela teoria de regularidade elíptica clássica

$$\Lambda f = u \in W^{3,2} \hookrightarrow\hookrightarrow W^{1,2},$$

na realidade ele é compacto. Agora, dados f, g em $W^{1,2}$, $u = \Lambda f$ e $v = \Lambda g$ temos que

$$\begin{aligned} (\Lambda f, g)_{W^{1,2}} &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla g + ug = \int_\Omega (-\Delta u + u) g \\ &= \int_\Omega fg = \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla v + fv = (f, \Lambda g)_{W^{1,2}} \end{aligned}$$

de forma que Λ é auto-adjunto. Mais ainda, veja que

$$(\Lambda f, f)_{W^{1,2}} \geq 0.$$

Então as propriedades que desejamos seguem da teoria espectral para operadores auto-adjuntos em espaços de Hilbert.

Prosseguindo, seja $f \in (W^{1,p})'$ tal que $\langle f, \phi \rangle = 0$, para todo $\phi \in \mathcal{V}$. Pelo lema 3.2.1 existe $v \in W^{1,p'}$ tal que

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \phi_i + v\phi_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}.$$

pois evidentemente $\phi_i \in W^{2,p}$. Consequentemente

$$\int_\Omega (-\Delta \phi_i + \phi_i) v = \int_\Omega \lambda_i \phi_i v = 0 \Rightarrow \int_\Omega \phi_i v = 0, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Tome $u \in W^{1,2}$ e $u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,2}$. Temos que

$$\left| \int_\Omega vu \right| = \left| \int_\Omega v(u_n - u) \right| \leq C \|v\|_{L^{(p')^*}} \|u_n - u\|_{L^{2^*}} \text{ por (3.13).}$$

Logo,

$$\int_\Omega vu = 0\; \forall u \in W^{1,2}.$$

Em particular o resultado vale para cada $u \in C^\infty$ e então

$$\int_\Omega vu = 0,\; \forall u \in L^p,$$

pois C^∞ é denso em L^p. Dessa forma $v = 0$ q.t.p. em Ω de modo que $\langle f, u\rangle = 0$, para todo $u \in W^{1,p}$ e portanto, $\overline{span\mathcal{V}}^{W^{1,p}} = W^{1,p}$. □

Teoria de regularidade para equações degeneradas

Durante nosso trabalho surgiu a necessidade de obtermos soluções mais fortes para equações envolvendo o p-laplaciano. Infelizmente, a literatura nessa área é relativamente escassa e restritiva e por isso não encontramos nela as ferramentas exatas que precisamos durante o texto. De fato, até alguns anos atrás, os melhores resultados sobre a regularidade de tais soluções eram os obtidos por Tolksdorf em 1983 (veja [50]), onde prova-se que as soluções de

$$-\Delta_p u = f \tag{3.16}$$

estão em $C^{1,\alpha}$, evidentemente com condições sobre $\partial\Omega$ e para α dependendo de N e p. Tal resultado não nos é suficiente pois necessitamos de estimativas para as derivadas de ordem maior do que 1. Nesse espírito, descobrimos os trabalhos de Ebmeyer *et al.* (veja [21] e [20]) onde é estudada a regularidade para u solução de (3.16) em espaços de Sobolev fracionários, i.e., para derivadas de ordem maior do que 1 e menor do que 2, o que para nós seria suficiente. Contudo, nossas equações são muito diferentes do protótipo (3.16) e a técnica usada nesses dois artigos é muito dura, sendo de difícil adaptação para um sistema de equações como o do modelo **B**, em particular para uma equação que combine um p-laplaciano com um operador monótono maximal (veja o sistema de equações da pág. 5).

Dessa forma, no que segue aplicaremos uma técnica distinta daquela aplicada em [21] e [20] para obtermos a regularidade desejada para equações adequadas ao nosso problema. Supondo mais suavidade para a fronteira, obtemos a mesma regularidade de [20], de uma forma muito mais simples, porém com algumas **restrições para o parâmetro** p como iremos ressaltar posteriormente. Agora, nos restringimos a salientar que tal problema está relacionado com a base especial para os espaços de Sobolev $W^{1,p}$, exibida em nossa discussão anterior.

3.2.1 Problemas auxiliares

Além da regularidade, a existência de soluções para problemas que envolvem o p-laplaciano está longe de poder ser considerada consolidada. Nesse sentido, durante a resolução dos problemas aproximados relacionados ao modelo **B** (veja o cap. 4) foi necessário que provássemos provar a existência de solução para certos tipos de equações.

Precisaremos provar a existência de solução 'forte' para problemas do tipo

$$\frac{\omega}{\tau} - \Delta_p \omega - \mu \Delta \omega = f,$$

onde a condição de fronteira é de Dirichlet ou de Neumann, $\mu \geq 0$ e $\tau > 0$ são parâmetros dados. Primeiramente estudaremos versões simplificadas desta equação, sendo que utilizaremos o método de Galerkin, o qual se mostrou bastante simplificador e adequado para os objetivos desse trabalho.

Nesta seção $\mathcal{W} = \{\phi_i\}_{\mathbb{N}}$ denotará uma base qualquer associada a $W^{1,p}$, i.e., $W^{1,p} = \overline{span\, \langle \phi_i \rangle}$. Quando conveniente, tomaremos $\mathcal{W} = \mathcal{V}$ (veja a proposição 3.2.3, pág. 74). Usaremos também a notação $\mathcal{W}_n = \{\phi_1, ..., \phi_n\}$.

Lema 3.2.4. *Considere Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira de classe C^1 e seja $\mathcal{B}$ um subespaço de dimensão finita de $W^{1,p}$, onde $2 < p < +\infty$. Sejam $f \in L^2$, $\mu \geq 0$ e $0 < \tau < 1/2$. Então para cada n existe um único $\omega \in \mathcal{B}$ tal que*

$$\int_\Omega \frac{\omega v}{\tau} + |\nabla \omega|^{p-2} \nabla \omega \cdot \nabla v + \mu \nabla \omega \cdot \nabla v \;\; = \;\; \int_\Omega f v,$$

para todo $v \in \mathcal{B}$.

Dem. Considere o espaço de Hilbert de dimensão finita $\mathcal{H} = (\mathcal{B}, \|.\|_{W^{1,2}})$ e o funcional $I : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(\omega) = \int_\Omega \frac{\omega^2}{2\tau} + \frac{|\nabla \omega|^p}{p} + \mu \frac{|\nabla \omega|^2}{2} - f\omega.$$

Em primeiro lugar note que para $\tau < 1/2$

$$I(\omega) \geq C \int_\Omega w^2 + \mu |\nabla \omega|^2 - f^2,$$

logo I é coercivo. Provaremos agora que I é fracamente contínuo em $\mathcal{H}$ e em particular, semi-contínuo inferiormente. De fato, consideremos $\{\omega_n\}$ tal que $\omega_n \rightharpoonup \omega$ em $\mathcal{H}$. Como $dim\mathcal{H} < +\infty$ todas as normas em $\mathcal{H}$ são equivalentes e a topologia fraca coincide com a topologia da norma. Então $\omega_n \to w$ em $\mathcal{H}$, e assim $\|\omega_n - \omega\|_{W^{1,p}} \to 0$ se $n \to +\infty$. Dessa forma,

$$\lim_{n \to +\infty} I(\omega_n) = I(\omega).$$

Logo, I é coercivo e fracamente s.c.i. em $\mathcal{H}$ de modo que pelo teorema 1.5.2, pág. 30, existe $\omega \in \mathcal{H}$ o qual

$$I(\omega) = \min_{v \in \mathcal{H}} I(v) \tag{3.17}$$

Por outro lado, dado $v \in \mathcal{H}$, definimos $i : (-1,1) \to \mathbb{R}$ onde $i(h) = I(\omega + hv)$. É fácil ver que $i'(h)$ existe para $h \in (-1,1)$ e que por (3.17) $i'(0) = 0$. Dessa forma,

$$\int_\Omega \frac{\omega v}{\tau} + |\nabla\omega|^{p-2}\nabla\omega \cdot \nabla v + \mu\nabla\omega \cdot \nabla v - fv = 0. \tag{3.18}$$

A unicidade é consequência da monotonicidade do p-laplaciano. Na realidade, suponha que para ω_1 e $\omega_2 \in \mathcal{B}$

$$\int_\Omega \frac{\omega_i v}{\tau} + |\nabla\omega_i|^{p-2}\nabla\omega_i \cdot \nabla v + \mu\nabla\omega_i \cdot \nabla v \;\;=\;\; \int_\Omega fv,$$

para todo $v \in \mathcal{B}$. Considerando $\omega = \omega_1 - \omega_2$ segue que

$$\int_\Omega \frac{\omega v}{\tau} + \Big(|\nabla\omega_1|^{p-2}\nabla\omega_1 - |\nabla\omega_2|^{p-2}\nabla\omega_2\Big) \cdot \nabla v + \mu\nabla\omega \cdot \nabla v \;\;=\;\; 0,$$

para todo $v \in \mathcal{B}$.

Tomando $v = \omega$ e usando o lema 1.2.7, pág. 14, obtemos que $\omega = 0$.

□

De forma inteiramente análoga provamos o resultado para espaços $W_0^{1,p}$. Consideremos $\mathcal{W}_0 = \{\phi_1, ..., \phi_n, ...\}$ e $\mathcal{W}_{n,0} = \{\phi_1, ..., \phi_n\}$ onde $\overline{span\mathcal{W}_0} = W_0^{1,q}$ e para cada i, $\phi_i = 0$ em $\partial\Omega$. Vale o seguinte:

Lema 3.2.5. *Considere Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira de classe C^1. Sejam $\mathcal{B}_0$ um subespaço de dimensão finita de $W_0^{1,p}$, $2 < p < +\infty$, $f \in L^2$, $\mu \geq 0$ e $0 < \tau < 1/2$. Então existe $\omega \in \mathcal{B}_0$ tal que*

$$\int_\Omega \frac{\omega v}{\tau} + |\nabla\omega|^{p-2}\nabla\omega \cdot \nabla v + \mu\nabla\omega \cdot \nabla v \;\;=\;\; \int_\Omega fv,$$

para todo $v \in span\mathcal{W}_{n,0}$.

Naturalmente, desejamos estender o lema 3.2.4 para o espaço $W^{1,p}$ todo.

Lema 3.2.6. *a) Considere Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira de classe C^1. Sejam $f \in L^2$, $2 < p < +\infty$, $\mu \geq 0$ e $0 < \tau < 1/2$. Então existe um único $\omega \in W^{1,p}$ tal que*

$$\int_\Omega \frac{\omega v}{\tau} + |\nabla\omega|^{p-2}\nabla\omega \cdot \nabla v + \mu\nabla\omega \cdot \nabla v \;\;=\;\; \int_\Omega fv, \tag{3.19}$$

para todo $v \in W^{1,p}$.

b) Se além disso, $\partial\Omega \in C^\infty$, $\mu > 0$ e caso $N > 4$ tenhamos que $2 < p \leq 2N/(N-4)$, então $\omega \in \mathcal{N}^{1+2/p,p} \cap W^{2,2}$. Além disso, dado ϵ tal que $0 < \epsilon < \min\{1/C_1, \mu\}$, existe $C(\epsilon) > 0$ tal que

$$\int_\Omega (\mu - \epsilon)|\Delta\omega|^2 + \left(\frac{1}{C_1} - \epsilon\right)\|\omega\|^p_{\mathcal{N}^{1+2/p,p}} \leq C(\epsilon)\int_\Omega \left(\frac{\omega}{\tau} - f\right)\Delta\omega + \|\omega\|^p_{L^p}, \tag{3.20}$$

onde $C_1 > 0$ é a constante dada pelo lema 1.3.17, pág. 22.

Mais ainda,

$$\frac{\partial\omega}{\partial\nu} = 0 \text{ em } \partial\Omega. \tag{3.21}$$

c) Se $\mu = 0$, supondo que $f \in W^{1,p'}$, $\partial\Omega \in C^\infty$, e caso $N > 4$ tenhamos que $2 < p \leq 2N/(N-4)$, então $\omega \in \mathcal{N}^{1+2/p,p}$. Além disso, dado ϵ, $0 < \epsilon < 1/C_1$, existe $C(\epsilon) > 0$ tal que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla\omega|^2}{\tau} + \left(\frac{1}{C_1} - \epsilon\right)\|\omega\|^{p'}_{\mathcal{N}^{1+2/p,p}} \leq C(\epsilon)\|f\|^p_{W^{1,p'}} + \|\omega\|^p_{L^p}, \tag{3.22}$$

onde $C_1 > 0$ é a mesma constante do item (b).

Mais ainda,

$$\frac{\partial\omega}{\partial\nu} = 0 \text{ em } \partial\Omega. \tag{3.23}$$

Observação 3.2.7. *No caso (a), temos que ω é a solução fraca de*

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\tau} - \Delta_p\omega - \mu\Delta\omega &= f, \\ \frac{\partial\omega}{\partial\nu} &= 0. \end{aligned}$$

Veja que não fazemos menção a como a condição de fronteira poderia ser satisfeita, fato que é contornado para o caso (b).

Observação 3.2.8. *Fizemos questão em deixar a equação* (3.20) *no formato que está para que possamos aplicá-la diretamente ao problema que será estudado no capítulo 4. Evidentemente, poderíamos deixá-la do modo mais condensado como no caso (c) da versão degenerada da equação.*

Dem. Em primeiro lugar, pelo lema 3.2.4, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\omega_n \in span\mathcal{W}_n$ tal que

$$\int_\Omega \frac{\omega_n v}{\tau} + |\nabla\omega_n|^{p-2}\nabla\omega_n \cdot \nabla v + \mu\nabla\omega_n \cdot \nabla v = \int_\Omega fv. \tag{3.24}$$

para todo $v \in span\mathcal{W}_n$. Tomando $v = \omega_n$ temos que

$$\int_\Omega \frac{\omega_n^2}{2} + |\nabla\omega_n|^p + \mu|\nabla\omega_n|^2 \leq \int_\Omega f^2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicando o lema 1.2.3, pág. 11 segue que

$$\|\omega_n\|_{W^{1,p}} \leq C, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.25}$$

Da monotonicidade maximal do p-laplaciano e do teorema 1.4.11, pág. 27, obtemos o resultado do item (a). De fato, basta considerarmos $E = W^{1,p}$ no teorema 1.4.11 e notarmos que

$$\langle -\Delta_p \omega_n, v\rangle_{(W^{1,p})', W^{1,p}} = \int_\Omega |\nabla \omega_n|^{p-2} \nabla \omega_n \cdot \nabla v$$

de modo que

$$\| - \Delta_p \omega_n\|_{(W^{1,p})'} \leq \|\omega_n\|^{p-1}_{W^{1,p}} \leq C.$$

Logo existem $\omega \in W^{1,p}$ e $y \in (W^{1,p})'$ tais que

$$\omega_n \rightharpoonup \omega \text{ em } W^{1,p} \text{ e } -\Delta_p \omega_n \rightharpoonup y \text{ em } (W^{1,p})'.$$

Claramente,

$$\langle -\Delta_p \omega_n, v\rangle_{(W^{1,p})', W^{1,p}} \to \langle y, v\rangle_{(W^{1,p})', W^{1,p}}$$

E assim

$$\langle y, v\rangle_{(W^{1,p})', W^{1,p}} = \int_\Omega fv - \frac{\omega v}{\tau} - \mu \nabla \omega \cdot \nabla v, \forall v \in W^{1,p}$$

e em particular

$$\langle y, w\rangle_{(W^{1,p})', W^{1,p}} = \int_\Omega f\omega - \frac{\omega^2}{\tau} - \mu |\nabla \omega|^2.$$

Mais ainda, segue que

$$\begin{aligned}
\limsup_n \langle -\Delta_p \omega_n, \omega_n\rangle_{(W^{1,p})', W^{1,p}} &= \int_\Omega f\omega - \liminf_n \int_\Omega \frac{\omega_n^2}{\tau} + \mu |\nabla \omega_n|^2 \\
&\leq \int_\Omega f\omega - \int_\Omega \frac{\omega^2}{\tau} + \mu |\nabla \omega|^2 \\
&= \langle y, w\rangle_{(W^{1,p})', W^{1,p}}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, pelo teorema 1.4.11, pág. 27

$$-\Delta_p \omega = y. \tag{3.26}$$

Mais uma vez a unicidade é consequência da monotonicidade do p-laplaciano e assim(a) é satisfeito.

Prosseguindo, para a prova de (b) consideraremos a base dada pela proposição 3.2.3 (agora $\mathcal{W} = \mathcal{V}$). Note que, dado $\phi_i \in \mathcal{W}_n = \{\phi_1, ..., \phi_n\}$ temos

$$-\Delta \phi_i = (\lambda_i - 1)\phi_i \text{ em } \Omega \Rightarrow \Delta \phi_i \in span \mathcal{W}_n.$$

Logo, podemos tomar $v = -\Delta\omega_n = -\sum_{i=1}^n \rho_i \Delta\omega_i$. Dessa forma,

$$\int_\Omega -\frac{\omega_n \Delta\omega_n}{\tau} + |\nabla\omega_n|^{p-2}\nabla\omega_n \cdot \nabla(-\Delta\omega_n) + \mu\nabla\omega_n \cdot \nabla(-\Delta\omega_n)$$
$$= \int_\Omega -f\Delta\omega_n. \tag{3.27}$$

Contudo, por integração por partes

$$\int_\Omega |\nabla\omega_n|^{p-2}\nabla\omega_n \cdot \nabla(-\Delta\omega_n) = \sum_{j,k=1}^N \int_\Omega |\nabla\omega_n|^{p-2}\frac{\partial\omega_n}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial^2\omega_n}{\partial x_j \partial x_k}$$
$$= \sum_{j,k=1}^N \int_\Omega |\nabla\omega_n|^{p-2}\left|\frac{\partial^2\omega_n}{\partial x_j\partial x_k}\right|^2 + \sum_{j,k,l=1}^n \int_\Omega (p-2)|\nabla\omega_n|^{p-4}\frac{\partial^2\omega_n}{\partial x_l\partial x_k}\frac{\partial\omega_n}{\partial x_l}\frac{\partial^2\omega_n}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial\omega_n}{\partial x_j}$$
$$-\sum_{j,k=1}^N \int_{\partial\Omega} |\nabla\omega_n|^{p-2}\frac{\partial\omega_n}{\partial x_j}\frac{\partial^2\omega_n}{\partial x_j\partial x_k}\nu_k. \tag{3.28}$$

Agora, observemos que

$$\sum_{j,k,l=1}^N \int_\Omega (p-2)|\nabla\omega_n|^{p-4}\frac{\partial^2\omega_n}{\partial x_l\partial x_k}\frac{\partial\omega_n}{\partial x_l}\frac{\partial^2\omega_n}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial\omega_n}{\partial x_j} \tag{3.29}$$
$$= \int_\Omega (p-2)|\nabla\omega_n|^{p-4}\sum_{k=1}^N\left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2\omega_n}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial\omega_n}{\partial x_j}\right)^2 \geq 0.$$

Seja ϵ, tal que $0 < \epsilon < \min\{1/C_1, \mu\}$. Obtemos por (3.27)-(3.29) e pelo corolário 3.1.3, pág. 73, que

$$\int_\Omega \frac{\omega_n\Delta\omega_n}{\tau} + \int_\Omega |\nabla\omega_n|^{p-2}|D^2\omega_n|^2 + \int_\Omega \mu|\Delta\omega_n|^2$$
$$\int_\Omega \frac{|\nabla\omega_n|^2}{\tau} + \int_\Omega |\nabla\omega_n|^{p-2}|D^2\omega_n|^2 + \int_\Omega \mu|\Delta\omega_n|^2$$
$$\leq \int_\Omega -f\Delta\omega_n + \sum_{j,k=1}^N \int_{\partial\Omega} |\nabla\omega_n|^{p-2}\frac{\partial\omega_n}{\partial x_j}\frac{\partial^2\omega_n}{\partial x_j\partial x_k}\nu_k.$$
$$\leq \int_\Omega -f\Delta\omega_n + \epsilon\|\omega_n\|^p_{\mathcal{N}^{1+2/p,p}} + C(\epsilon)\|\omega_n\|^p_{L^p}, \tag{3.30}$$

lembrando que $\omega_n \in C^3(\overline{\Omega})$ pois $\mathcal{W} \subset C^3(\overline{\Omega})$.

Agora combinando-se (3.30) e o lema 1.3.17, pág. 22, temos que

$$\int_\Omega \frac{-\omega_n\Delta\omega_n}{\tau} + \mu|\Delta\omega_n|^2 + \left(\frac{1}{C_1} - \epsilon\right)\|\omega_n\|^p_{\mathcal{N}^{1+2/p,p}} \leq \int_\Omega -f\Delta\omega_n + C(\epsilon)\|\omega_n\|^p_{L^p}, \tag{3.31}$$

onde nesse caso C_1 é a constante dada pelo lema 1.3.17.

Assim, por (3.25) e (3.31)

$$\int_\Omega \frac{|\nabla\omega_n|^2}{\tau} + (\mu - \epsilon)|\Delta\omega_n|^2 + \left(\frac{1}{C_1} - \epsilon\right)\|\omega_n\|^p_{\mathcal{N}^{1+2/p,p}} \leq C(f, \epsilon). \tag{3.32}$$

Lembremo-nos de que pelas proposições 1.3.7 e 1.3.15 (págs. 17 e 21) temos que

$$\mathcal{N}^{1+2/p,p} \hookrightarrow W^{1+1/p,p} \hookrightarrow\hookrightarrow W^{1,p}. \tag{3.33}$$

Dessa forma, existe $w \in \mathcal{N}^{1+2/p,p} \cap W^{2,2}$ tal que, a menos de subsequências,

$$\begin{aligned} w_n &\rightarrow w, \text{ em } W^{1,p}, &(3.34)\\ w_n &\rightharpoonup w, \text{ em } \mathcal{N}^{1+2/p,p}, &(3.35)\\ w_n &\rightharpoonup w, \text{ em } W^{2,2}. &(3.36)\end{aligned}$$

Em particular, por (3.31), temos que

$$\int_\Omega (\mu - \epsilon)|\Delta\omega|^2 + \left(\frac{1}{C_1} - \epsilon\right)\|\omega\|^p_{\mathcal{N}^{1+2/p,p}} \leq \int_\Omega \left(\frac{\omega}{\tau} - f\right)\Delta\omega + C(\epsilon)\|\omega\|^p_{L^p},$$

e então (3.20) é válida.

Mais ainda, (3.21) segue de (3.35), bastando que nos lembremos que pela construção de $\mathcal{W}$, $\partial\omega_n/\partial\nu = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Para a prova de (c), basta reconsiderarmos a equação (3.31) e recordarmos que

$$\int_\Omega -f\Delta\omega_n = \int_\Omega \nabla f \nabla\omega_n \leq \|f\|_{W^{1,p'}}\|\omega_n\|_{W^{1,p}}$$

e aplicarmos as desigualdades de Hölder e Young, lembrando que

$$\mathcal{N}^{1+2/p,p} \hookrightarrow W^{1,p}.$$

□

Evidentemente também vale o seguinte resultado.

Lema 3.2.9. *Considere Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira de classe C^1. Sejam $f \in L^2$, $2 < p < +\infty$ e $0 < \tau < 1/2$. Então existe um único $\omega \in W_0^{1,p}$ tal que*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\omega v}{\tau} + |\nabla\omega|^{p-2}\nabla\omega \cdot \nabla v + \mu\nabla\omega \cdot \nabla v &= \int_\Omega fv, \qquad (3.37)\\ \omega &= 0 \text{ em } \partial\Omega,\end{aligned}$$

para todo $v \in W_0^{1,p}$.

Estamos prontos para a prova dos resultados desejados. Combinaremos os lemas anteriores que usam o método de Galerkin com uma adaptação de uma técnica que pode ser encontrada em Koshelev (veja [29], págs. 5-12), chamada de processo iterativo universal.

Proposição 3.2.10. *a) Considere* $f \in L^2$, $\mu \geq 0$, $0 < \tau < 1/2$, $\partial\Omega \in C^1$ *e* $p > 2$. *Seja* $r > 2$ *tal que*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \leq 1 \tag{3.38}$$

e $u \in H_r$ *(veja a definição dos espaços solenoidais na pág. 10). Então existe um único* $w \in W^{1,p}$ *tal que*

$$\int_\Omega \frac{\omega v}{\tau} + |\nabla\omega|^{p-2}\nabla\omega \cdot \nabla v + \mu\nabla\omega\cdot\nabla v + u\cdot\nabla\omega v \;=\; \int_\Omega fv, \tag{3.39}$$

para todo $v \in W^{1,p}$.

b) Suponha adicionalmente que $\mu > 0$, $\partial\Omega \in C^\infty$*e que* $2 < p \leq 2N/(N-4)$, *se* $N > 4$. *Então* $w \in W^{2,2} \cap \mathcal{N}^{1+2/p,p}$. *Mais ainda, dado* $\epsilon > 0$ *tal que* $0 < \epsilon < \min\{1/C_1, \mu\}$, *existe* $C(\epsilon) > 0$ *o qual*

$$\int_\Omega (\mu-\epsilon)|\Delta\omega|^2 + \left(\frac{1}{C_1} - \epsilon\right)\|\omega\|^p_{\mathcal{N}^{1+2/p,p}} \leq C(\epsilon)\int_\Omega \left(\frac{\omega}{\tau} - f\right)\Delta\omega + |u|^r. \tag{3.40}$$

Além disso,

$$\frac{\partial\omega}{\partial\nu} = 0 \text{ em } \partial\Omega. \tag{3.41}$$

Dem. Fixemos $\omega_0 \in W^{1,p}$ qualquer. Consideremos o seguinte esquema iterativo: dado $\omega_{n-1} \in W^{1,p}$, encontrar $\omega_n \in W^{1,p}$ tal que para todo $v \in W^{1,p}$

$$\int_\Omega \frac{\omega_n v}{\tau} + |\nabla\omega_n|^{p-2}\nabla\omega_n\cdot\nabla v + \mu\nabla\omega_n\cdot\nabla v \;=\; \int_\Omega fv - u\cdot\nabla\omega_{n-1}v, \tag{3.42}$$

Como

$$\int_\Omega |u\cdot\nabla\omega_{n-1}|^2 \leq C + \left(\int_\Omega |u|^r\right)^{2/r} + \left(\int_\Omega |\nabla\omega_{n-1}|^p\right)^{2/p} < +\infty$$

de forma que $u\cdot\nabla\omega_{n-1} \in L^2$ e assim pelo lema 3.2.6 o esquema está bem definido. Como veremos a escolha de ω_0 é irrelevante.

Vejamos agora algumas estimativas de energia. Tomando-se $v = \omega_n$ e $\epsilon > 0$ temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\omega_n^2}{\tau} + |\nabla\omega_n|^p + \mu|\nabla\omega_n|^2 \;&=\; \int_\Omega f\omega_n - u\cdot\nabla\omega_{n-1}\omega_n \\ &\leq \int_\Omega C(\epsilon)f^2 + \epsilon|\omega_n|^2 + C(\epsilon)|u|^r + \epsilon|\nabla\omega_{n-1}|^p + \epsilon|\omega_n|^2.\end{aligned} \tag{3.43}$$

onde $C(\epsilon) > 0$ é consequência da interpolação que fizemos acima. Se $0 < \epsilon < 1/8$ então

$$\int_\Omega |\nabla \omega_n|^p \leq C(f)(1 + \int_\Omega |u|^r) + \frac{1}{8}\int_\Omega |\nabla \omega_{n-1}|^p, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Usando somas geométricas temos que

$$\int_\Omega |\nabla \omega_n|^p \leq \frac{8}{7}C(f)(1 + \int_\Omega |u|^r) + \frac{1}{8^n}\int_\Omega |\nabla \omega_0|^p, \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.44}$$

Logo, por (3.43), (3.44) e pelo lema 1.2.3, pág. 11, segue que

$$\|\omega_n\|_{W^{1,p}} \leq C(f, u, \omega_0). \tag{3.45}$$

Dessa forma, de maneira análoga a que fizemos na prova do lema 3.2.6, o item a) segue de (3.45), pela monotonicidade maximal do p-laplaciano e do teorema 1.4.11, pág. 27.

De fato, em primeiro lugar por (3.45) existem $\omega \in W^{1,p}$ e $y \in (W^{1,p})'$ tais que

$$\begin{aligned} \omega_n &\rightharpoonup \omega \text{ em } W^{1,p}, \\ -\Delta_p \omega_n &\overset{*}{\rightharpoonup} y \text{ em } (W^{1,p})'. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Em segundo lugar, notemos que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u \cdot \nabla \omega_{n-1}\omega_n - \int_\Omega u \cdot \nabla \omega\omega \\ = &\int_\Omega u \cdot \nabla \omega_{n-1}(\omega_n - \omega) + \int_\Omega u \cdot \nabla(\omega_{n-1} - \omega)\omega \\ = &\int_\Omega u \cdot \nabla \omega_{n-1}(\omega_n - \omega) + \int_\Omega u \cdot \nabla \omega(\omega - \omega_{n-1}) \\ \leq &\|u\|_{H_r}\Big(\|\nabla \omega_{n-1}\|_{L^p}\|\omega_n - \omega\|_{L^2} + \|\nabla \omega\|_{L^p}\|\omega_n - \omega\|_{L^2}\Big), \end{aligned} \tag{3.47}$$

onde usamos o corolário 5.2.2, pág. 125 e a hipótese (3.38), combinada com a desigualdade de Hölder. Logo, usando (3.45) e (3.47) segue que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega u \cdot \nabla \omega_{n-1}\omega_n = \int_\Omega u \cdot \nabla \omega\omega = 0, \tag{3.48}$$

pelo lema 5.2.1, pág. 125.

Combinando-se (3.46) e (3.48), de maneira inteiramente análoga a que fizemos em (3.25)-(3.26), pág. 80, segue que $-\Delta_p \omega = y$.

Para a prova da unicidade, usamos a monotonicidade do p-laplaciano em conjunto com o fato de que

$$\int_\Omega u \cdot \nabla \phi\phi = 0,\ \forall \phi \in W^{1,p} \text{ (veja o lema 5.2.1, pág. 125).}$$

De fato, sejam ω_1 e ω_2 satisfazendo (3.39) com $\omega = \omega_1 - \omega_2$. Considere a equação definida tomando a diferença entre (3.39) para ω_1 e ω_2 e depois faça $v = \omega$. Daí,

$$\int_\Omega \frac{|\omega|^2}{\tau} + \frac{|\nabla\omega|^p}{p} + \mu\frac{|\nabla\omega|^2}{2} + u\cdot\nabla\omega\omega = 0.$$

Como $u \in H_r$, então $\omega = 0$.

Prosseguindo, vejamos a prova de (b). Com as hipóteses adicionais podemos usar o lema 3.2.6 e portanto definir nosso esquema iterativo em $W^{2,2}\cap\mathcal{N}^{1+2/p,p}$. Observe que pela desigualdade (3.20), pág. 79, temos

$$\int_\Omega \mu|\Delta\omega_n|^2 + \left(\frac{1}{C_1} - \epsilon\right)\|\omega_n\|^p_{\mathcal{N}^{1+2/p,p}} \le C(\epsilon)\int_\Omega \left(\frac{\omega_n}{\tau} - f\right)\Delta\omega_n + u\cdot\nabla\omega_{n-1}\Delta\omega_n + |\omega_n|^p. \quad (3.49)$$

Assim, usando Young e (3.38) temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\mu-\epsilon)|\Delta\omega_n|^2 + \left(\frac{1}{C_1} - \epsilon\right)\|\omega_n\|^p_{\mathcal{N}^{1+2/p,p}} &\le C(\epsilon)\int_\Omega f^2 + \omega_n^2 + |u|^r + |\nabla\omega_{n-1}|^p + |\omega_n|^p \\ &\le C(\epsilon)\int_\Omega f^2 + |u|^r. \qquad (3.50)\end{aligned}$$

Combinando-se (3.45)-(3.50) temos

$$\|\omega_n\|_{W^{2,2}} + \|\omega_n\|_{\mathcal{N}^{1+2/p,p}} \le C(f,\epsilon,\mu)(1 + \int_\Omega |u|^r), \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Assim, lembrando de (3.33), pág. 82, existe $\omega \in W^{2,2}\cap\mathcal{N}^{1+2/p,p}$ tal que

$$\begin{aligned} w_n &\to w \text{ em } W^{1,p}, && (3.51)\\ w_n &\rightharpoonup w \text{ em } \mathcal{N}^{1+2/p,p}, && (3.52)\\ w_n &\rightharpoonup w \text{ em } W^{2,2}. && (3.53)\end{aligned}$$

Provamos (3.39) por (3.42) e (3.51)-(3.53). Já (3.40) segue de (3.49) e (3.51)-(3.53).

Por fim, (3.41) é consequência de (3.52), pois que pela construção de $\mathcal{W}$,

$$\partial\omega_n/\partial\nu = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Como sempre, podemos provar de forma análoga o seguinte resultado.

Proposição 3.2.11. *Considere $f \in L^2$, $0 < \tau < 1/2$, $\partial\Omega \in C^1$, $\mu \ge 0$ e $p > 2$. Seja $r > 2$, tal que*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \le 1$$

e $u \in H_r$. Então existe um único $w \in W_0^{1,p}$ tal que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\omega v}{\tau} + |\nabla\omega|^{p-2}\nabla\omega\cdot\nabla v + \mu\nabla\omega\cdot\nabla v + u\cdot\nabla\omega v &= \int_\Omega fv, \qquad (3.54)\\ \omega &= 0 \text{ em } \partial\Omega,\end{aligned}$$

para todo $v \in W_0^{1,p}$.

CAPÍTULO 4

O MODELO B: CAMPO DE FASES IRREVERSÍVEL QUASILINEAR COM FLUXO DE STOKES SUAVE E SINGULAR

Neste capítulo trataremos do seguinte modelo

$$
\begin{aligned}
(F_B) \quad & u_t - \Delta u + \nabla P + K(h(\omega))(\sigma u + u_t) = \zeta\theta \text{ em } Q_{ml},\\
(T_B) \quad & \theta_t + \omega_t - \Delta\theta - \Delta_p\theta + u \cdot \nabla\theta = g(x,t) \text{ em } Q,\\
(C_B) \quad & \omega_t + \alpha(\omega_t) - \mu\Delta\omega - \Delta_q\omega + \kappa u \cdot \nabla\omega \ni \theta + f(\omega) \text{ em } Q,\\
& \theta = \frac{\partial\omega}{\partial\nu} = 0, u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T),\\
& \nabla \cdot u = 0 \text{ em } Q_{ml},\\
& \sigma u + u_t = 0 \text{ em } Q_s,\\
& \theta(.,0) = \theta_0,\ \omega(.,0) = \omega_0 \text{ em } \Omega,\\
& u(.,0) = u_0 \text{ em } \Omega.
\end{aligned}
$$

o qual assim como o modelo **A**, descreve uma mudança de fase irreversível do tipo líquido-sólido.

Mais uma vez, por simplicidade nos referimos às equações $(F_B)-(C_B)$ como modelo **B**, ou problema **B**.

Como antes, $0 < T < +\infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, mas aqui não nos restringiremos ao caso bidimensional; ν ainda denotará o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$. Quanto as variáveis, mais uma vez u denota o campo de velocidades do escoamento do material, P é a pressão hidrostática, θ sua temperatura e ω denota *campo de fases* associado ao estado físico do material, sendo que no modelo **B** não necessariamente ω representará a fração sólida do material. No presente modelo, consideramos h, uma função do campo de fases que é dada, a qual depende do material e seu valor em um determinado ponto (x,t) nos fornece a fração sólida do material neste ponto. Como desejamos uma solidificação irreversível, tomamos h como função crescente de ω; veremos que h relaciona o campo de fases ω com a fração do material que é sólida.

Como já foi dito antes, as diferenças essenciais do modelo **B** para o **A** são a introdução do peso $\sigma u + u_t$ junto ao termo de Carman-Kozeny, a possibilidade de convecção na equação da fase, mas em um sentido fraco como ficará claro posteriormente. Além disso, no modelo **B** introduzimos operadores do tipo p-laplaciano em duas equações, o escoamento do fluido é regido por uma equação do tipo Stokes e a condição de fronteira para a temperatura agora é do tipo Dirichlet. A mudança na condição de fronteira para a equação da temperatura é de razão técnica, necessária para a obtenção de estimativas de energia importantes para o presente caso.

No presente capítulo, chamamos (F_B) de uma equação do tipo Stokes suave e singular. A justificativa para tal nomenclatura vem da interpretação do termo

$$K(h(w))(\sigma u + u_t)$$

na equação de Stokes. $K(h(\omega))$ ainda representa o termo de Carman-Kozeny, o qual está associado às forças de atrito interno no fluxo causadas pela solidificação do material e, como $K(.)$ denota uma função crescente em $x \in (-\infty, 1)$ que 'explode' em $x = 1$, dizemos que o escoamento é 'singular'. Contudo, agora incluímos o termo $\sigma u + u_t$ junto ao termo de Carman-Kozeny, onde $\sigma > 0$ é um parâmetro de relaxação. Esta inclusão diz respeito ao questionamento de qual seria a equação correta para u no estado sólido. No modelo a ser estudado neste capítulo, não obrigamos mais o campo de velocidades a anular-se imediatamente em parte da região Q. Como veremos, a equação de movimento a ser satisfeita na parte sólida será $\sigma u + u_t = 0$, o que implica que o campo de velocidades na parte sólida tenha decaimento exponencial com taxa σ. Isto é, a velocidade na parte sólida vai a zero de forma mais suave do que o modelo do capítulo 2. Essa alteração da singularidade , que é parte da contribuição da tese, nos garante estimativas mais regulares para u_t o que nos permite trabalhar com um conceito de solução mais forte no tempo, por isso dizemos que o fluxo é 'suave'. Novamente, $\zeta\theta$ na equação (F_B) é a aproximação Boussinesq relacionada às forças de empuxo, com ζ um vetor constante ligado à gravidade e ao coeficiente de expansão térmica do material. Por simplicidade, tomamos a viscosidade igual a um.

A equação (T_B) é uma equação do calor quasilinear, pois foi incluído um p-laplaciano o que modifica a introdução da dissipação no problema **B**. Além disso, (T_B) foi alterada pela interação com o campo de fases e com os termos de movimentação da parte líquida do material. A função $g(x,t)$ representa as fontes e sorvedouros de calor do sistema. Consideraremos, para maior clareza de exposição mas sem perda de generalidade do ponto de vista matemático, o calor específico e o calor latente iguais a um.

Quanto a equação do campo de fases (C_B), $\alpha(.)$ ainda denota um gráfico monótono maximal em $\mathbb{R}^2$ e uma restrição em seu domínio nos indica a interpretação física correta da irreversibilidade da mudança de estado físico. Escolheremos seu domínio da seguinte maneira:

$$D(\alpha) = [0, +\infty).$$

Assim, assegura-se que $\omega_t \geq 0$, sempre que ω satisfizer a equação (C_B). Dessa forma, como h é crescente e representa a fração sólida do material, garantimos que a transição de fase do material acontece de maneira irreversível apenas do estado líquido para o estado sólido.

Ainda sobre (C_B), introduzimos um operador q-laplaciano de maneira a obtermos, a grosso modo, mais dissipação no fenômeno. O parâmetro κ, com $0 \leq \kappa \leq 1$, está associado a influência da convecção no modelo e $\mu \geq 0$ a largura da interface líquida-sólida. Como veremos a introdução do operador degenerado $-\Delta_q$, combinada com a presença do operador monótono maximal α, nos trará diversas dificuldades matemáticas para o estudo do modelo **B**. Precisaremos de severas restrições de natureza técnica para estabelecermos um conceito de solução forte para o problema e a principal razão disso é a falta de resultados sobre teoria de regularidade para sistemas parabólicos que envolvem não linearidades na derivadas temporal, em particular a ausência de resultados sobre estimativas L^∞ para o gradiente de equações do tipo (C_B).

Os conjuntos Q_s e Q_{ml} são respectivamente as regiões onde o material encontra-se no estado sólido e em um estado intermediário entre o líquido e sólido. Ambos dependem da variável ω de forma que o problema **B** é do tipo **fronteira livre**. Vale dizer que a região intermediária Q_{ml} pode ser vista com a união disjunta entre duas regiões: Q_m onde o material encontra-se no estado 'pastoso' e Q_l onde encontra-se no estado líquido. Mais ainda, para darmos algum sentido à equação (F_B), precisamos garantir que Q_{ml} será ao menos um aberto de $\mathbb{R}^N \times (0, T)$.

Nossa estratégia de estudo para o problema **B** será a seguinte: primeiramente, daremos uma definição precisa de solução para o problema acima exposto; faremos também as hipóteses básicas e enunciaremos um teorema de existência de solução para o modelo **B**. Depois estudaremos uma versão discreta do problema e obteremos algumas estimativas (discretas) de energia para então, usando técnicas de compacidade e monotonicidade, obtermos uma solução para o sistema inicial. Para aplicarmos argumentos de compacidade na equação da fase precisaremos lidar com um conceito de solução mais forte do que o usual para equações do tipo p-laplaciano. Aqui, a grande inspiração para o nosso argumento foram os trabalhos de Ebmeyer *et al.* [21] e [20], onde é estudada teoria de regularidade elíptica para o p-laplaciano em equações estacionárias. Como o tipo de equação trabalhada por ele é diferente, seus resultados não se aplicavam diretamente ao nosso caso. Porém, devido aos resultados do capítulo 3, felizmente conseguimos adaptar a técnica à equação que nos interessa aqui, além de que simplificamos substancialmente o argumento de Ebmeyer *et al.* para obter tal regularidade.

Apesar de semelhante, a técnica que será empregada neste capítulo é diferente da aplicada no capítulo 2, e dentro do contexto do modelo é pouco usual. De fato, no capítulo anterior estudamos um problema auxiliar usando discretização no tempo para depois trabalharmos com o modelo completo empregando uma técnica de ponto fixo. Tal estratégia é inspirada nos trabalhos de Boldrini e Planas [42], [7] e Hoffmann e Jiang [27] e apesar de eficiente, ela se mostra relativamente longa, principalmente nas estimativas de energia. Nesse sentido, optamos por um método diferente que pudesse atacar o modelo completo sem a utilização de problemas auxiliares com o intuito de fazermos uma abordagem matemática mais concisa.

4.1 Hipóteses, definições básicas e teorema de existência para o modelo B

Neste capítulo, usaremos a seguinte notação

$$\begin{aligned} p^{\#} &= \frac{pN}{N-p} \text{ se } p < N, \\ p^{\#} &= 2N \text{ se } p \geq N, \text{ e em particular } 2^{\#} = 4 \text{ se } N = 2, \end{aligned} \tag{4.1}$$

que é uma adaptação natural do expoente crítico de Sobolev ao nosso problema, no sentido de que queremos evitar que $p^{\#} = +\infty$.

Consideraremos as seguintes hipóteses

($\mathbf{B1}$) p e $q \in \mathbb{R}$ onde $p > \max\{N, 2^{\#}\}$, $q > \max\{N, 2^{\#}\}$ e $N \geq 1$ (veja (4.1) acima);

($\mathbf{B2}$) $\alpha \subset \mathbb{R}^2,$ é um grafo monótono maximal o qual $\alpha(0) \ni 0$ cujo domínio é dado por $D(\alpha) = [0, +\infty)$;

($\mathbf{B3}$) $u_0 \in V(\Omega)$;

($\mathbf{B4}$) $\theta_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$;

($\mathbf{B5}$) $\omega_0 \in W^{2,q}(\Omega)$;

($\mathbf{B6}$) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f$ é Lipschitz em $\mathbb{R}$;

($\mathbf{B7}$) $g : Q \longrightarrow \mathbb{R}, g$ é uma função de $L^2(0, T; L^2(\Omega))$;

($\mathbf{B8}$) $K : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, K \geq 0, K(0) = 0, K \in C^1([0, 1)), K'(x) \geq 0$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} K(x) = +\infty$;

($\mathbf{B9}$) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, h$ é uma função crescente de classe $C^1(\mathbb{R}),$ tal que $0 \leq h(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$;

($\mathbf{B10}$) $\partial\Omega$ é uma variedade de classe C^1. Contudo, para parte dos resultados precisaremos pedir regularidade extra para $\partial\Omega$;

($\mathbf{B11}$) $\mu > 0; 0 \leq \kappa \leq 1$. Contudo, para parte dos resultados precisaremos pedir que $\kappa = 0$.

Durante nossa discussão sobre o modelo, **tomaremos por simplicidade** $\sigma = 1$. Como veremos, tal alteração não nos traz perda alguma de generalidade matemática.

Como fizemos anteriomente, consideraremos um grafo monótono maximal auxiliar dado por

$$\gamma = \alpha^{-1} \subset \mathbb{R}^2,$$

o qual satisfaz $\gamma(0) \ni 0$. Vale a pena relembrar que o papel deste operador auxiliar ficará claro quando estudarmos as estimativas de energia (veja o lema 4.3.2). Seguindo a estratégia do segundo capítulo, ainda consideramos a função $\Gamma : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ própria, convexa e semi contínua inferiormente (s.c.i) tal que $\Gamma(0) = 0$ e γ é seu subdiferencial, i.e.,

$$\partial\Gamma = \gamma. \tag{4.2}$$

Mais uma vez consideraremos a hipótese adicional

$$(\mathbf{B12})\ \Gamma(\theta_0 + f(\omega_0) + \mu\Delta\omega_0 + \Delta_q\omega_0 - u_0 \cdot \nabla\omega_0) \in L^1(\Omega).$$

No entanto, dessa vez não tomaremos a regularização de Yosida dos demais operadores e consequentemente não será necessário aproximarmos os dados iniciais como feito anteriormente(veja o lema 2.2.1, pág. 36).

Precisamos fazer uma pequena adaptação na definição de Q_{ml} e Q_s nesse capítulo, pois neste modelo ω não mais representa diretamente a fração sólida do material e assim, não temos mais a garantia de que $0 \leq \omega \leq 1$. De fato, aqui para cada $t \in (0, T)$ definimos

$$\begin{aligned}
\Omega_s(t) &= \{x \in \Omega : h(\omega(x,t)) = 1\}, \text{ a região sólida},\\
\Omega_m(t) &= \{x \in \Omega : 0 < h(\omega(x,t)) < 1\}, \text{ a região pastosa},\\
\Omega_l(t) &= \{x \in \Omega : h(\omega(x,t)) = 0\}, \text{a região líquida},\\
\Omega_{ml}(t) &= \Omega_m(t) \cup \Omega_l(t), \text{ a região não sólida}.
\end{aligned}$$

onde h é a função dada na hipótese **(B9)**. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
Q_s &= \{(x,t) \in Q : h(\omega(x,t)) = 1\} = \{(x,t) : x \in \Omega_s(t)\} \text{ e}\\
Q_{ml} &= \{(x,t) \in Q : 0 \leq h(\omega(x,t)) < 1\} = \{(x,t) : x \in \Omega_{ml}(t)\}.
\end{aligned}$$

Façamos alguns breves comentários sobre as hipóteses. Em primeiro lugar, adiantamos que **(B1)** tem papel duplo. Por um lado, nos assegura que tenhamos estimativas de energia finitas, como ficará claro por exemplo na prova do lema 4.3.1. Por outro lado, **(B1)** está associada com a 'compatibilidade' de algumas ferramentas que serão utilizadas. De fato, veja que em particular por **(B1)**, $p > 2$ e $q > 2$ de modo que existe $r > 0$ tal que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \leq 1 \text{ e } \frac{1}{2} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1. \tag{4.3}$$

Como veremos, precisaremos de que

$$r < 2^{\#}. \tag{4.4}$$

Isso é necessário de modo a garantirmos que $V \hookrightarrow\hookrightarrow H_r$, onde V e H_r são espaços de campos vetorias com divergência nula (veja pág. 10). Note que, (4.3) implica que

$$\frac{1}{r} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \Rightarrow r \geq \frac{2p}{p-2}. \tag{4.5}$$

Analogamente devemos ter que $r \geq 2q/(q-2)$. Portanto, de (4.4) e (4.5) devemos requerer:

$$\frac{2p}{p-2} < 2^{\#} \text{ e } \frac{2q}{q-2} < 2^{\#}.$$

Deste resultado, se $N > 2$ vem

$$\frac{2p}{p-2} < \frac{2N}{N-2} \Leftrightarrow p > N,$$
$$\frac{2q}{q-2} < \frac{2N}{N-2} \Leftrightarrow q > N.$$

Se $N = 2$ então

$$\frac{2p}{p-2} < 4 = 2^{\#} \Leftrightarrow p > 4 = 2^{\#}, \tag{4.6}$$
$$\frac{2q}{q-2} < 4 = 2^{\#} \Leftrightarrow q > 4 = 2^{\#}.$$

Nesse sentido, dizemos que parte das restrições tomadas em **(B1)** são feitas por uma questão de compatibilidade.

Até o fim do capítulo deixaremos este $r > 0$ fixado de acordo com a seguinte definição:

Definição 4.1.1. *Consideraremos $r > 0$ tal que $2 < r < 2^{\#}$ e que satisfaça*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \leq 1 \text{ e } \frac{1}{2} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1,$$

onde $2^{\#}$ foi definido em (4.1), *pág. 90.*

A hipótese **(B5)** é importante para que $\Delta_q \omega_0$ seja definido q.t.p , o que aconteçe caso esteja em algum espaço de Lebesgue conveniente. Isto ficará mais claro na prova do lema 4.3.2.

Evidentemente é necessário precisar o conceito de solução para o problema **B**. Como pode ser notado, neste caso obteremos uma regularidade maior no tempo comparativamente àquela obtida para o modelo **A**, apesar de que, a regularidade espacial obtida será menor devido à presença dos p-laplacianos .

Definição 4.1.2. *Considere o campo vetorial u e as funções θ, ω e η. Dizemos que $(u, \theta, \omega, \eta)$ é uma solução generalizada para o problema* **B** *desde que:*

- $u \in C([0,T]; H) \cap L^{\infty}(0,T; V) \cap W^{1,2}(0,T; H)$;
- $\theta \in C([0,T]; L^p) \cap L^{\infty}(0,T; W_0^{1,p}) \cap W^{1,2}(0,T; L^2)$;
- $\omega \in C([0,T]; C(\overline{\Omega})) \cap L^{\infty}(0,T; W^{1,q}) \cap W^{1,2}(0,T; W^{1,2}) \cap W^{1,\infty}(0,T; L^2)$;

- $\eta \in L^{q'}(0,T;(W^{1,q})')$;

$$\int_0^T \int_\Omega u_t \cdot \phi + \nabla u \cdot \nabla \phi + K(h(\omega))(u+u_t)\cdot \phi = \int_0^T \int_\Omega \zeta\theta\cdot\phi, \tag{4.7}$$
$$\int_0^T \int_\Omega (\theta_t+\omega_t)\psi + (1+|\nabla\theta|^{p-2})\nabla\theta\cdot\nabla\psi + u\cdot\nabla\theta\psi = \int_0^T\int_\Omega g\psi, \tag{4.8}$$
$$\int_0^T \langle\eta,\xi\rangle + \int_0^T\int_\Omega \omega_t\xi + (\mu+|\nabla\omega|^{q-2})\nabla\omega\cdot\nabla\xi + \kappa u\cdot\nabla\omega\xi \tag{4.9}$$
$$= \int_0^T\int_\Omega (\theta+f(\omega))\xi,$$

para cada $\phi \in L^2(0,T;V(\Omega_{ml}(t)))$ *com suporte compacto em* $Q_{ml}\cup\Omega_{ml}(0)\cup\Omega_{ml}(T)$, $\psi \in L^p(0,T;W_0^{1,p})$ *e* $\xi \in L^q(0,T;W^{1,q})$ *. Além disso,*

$$u+u_t = 0 \text{ q.t.p em } \quad Q_s, \tag{4.10}$$
$$u(.,0)=u_0,\ \theta(.,0)=\theta_0,\ \omega(.,0)=\omega_0 \text{ q.t.p. em } \quad \Omega. \tag{4.11}$$

Observe que nesta definição de solução não pedimos de forma explícita que $\eta \in \alpha(\omega_t)$ e por isso dizemos que tal solução *é generalizada*. A dificuldade deste problema é que os métodos conhecidos para uma possível identificação de η não podem ser aplicados neste nível de regularidade da solução. Isto é devido à não linearidade total do problema, principalmente, à presença do termo $\alpha(\omega_t)$ e a sua interação com um operador degenerado em conjunto com um acoplamento com uma equação singular.

Entretanto, justifica-se o uso do conceito de solução generalizada porque com mais regularidade é possível provar a identificação desejada, i.e., $\eta\in\alpha(\omega_t)$ e assim, o conceito de solução generalizada coincide com o de solução usual. A ideia de solução *generalizada*, é influenciada pelo trabalho de Boldrini e Planas em [7].

O principal resultado do capítulo é o seguinte:

Teorema 4.1.3. ***(teorema B)*** *Suponha que* ***(B1)-(B12)*** *sejam satisfeitas. Então existe uma quadra* (u,θ,ω,η) *solução generalizada para o problema* **B**. *Suponha adicionalmente que* $\kappa=0$, $\partial\Omega$ *seja de classe* C^∞, $2\le N\le 4$ *ou se* $N=5$, $5<q\le 6$. *Então*

$$\begin{aligned} \eta &\in \alpha(\omega_t)\subset L^2(0,T;L^2); \\ \omega &\in L^2(0,T;W^{2,2})\cap L^q(0,T;\mathcal{N}^{1+2/q;q}). \end{aligned} \tag{4.12}$$

É importante fazer algumas observações sobre as hipóteses adicionais para o teorema **B**. De fato, em um certo sentido elas mostram a disparidade entre a regularidade que precisaríamos para a identificação da solução do modelo e a regularidade que obtemos fazendo severas restrições nas equações estudadas. Mesmo nesse caso 'simplificado' as dificuldades matemáticas são grandes, de forma que o tempo todo tem-se a impressão que faltam ferramentas matemáticas para uma análise mais profunda para o tipo de problema que trabalhamos. De fato, parte do instrumental matemático que usamos é baseado em resultados muito recentes (Ebmeyer *et al.*, [21] e [20]) e em técnicas incomuns para espaços de Sobolev fracionários. O motivo de restringirmos a dimensão é devido a dependência que temos na validade da imersão

$$W^{1+2/q-\epsilon,q} \hookrightarrow W^{1,2q-2}$$

para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e a compatibilidade desta com a restrição $q > \max\{N, 2^\#\}$. Na realidade, tal imersão é necessária para a técnica que usamos na identificação de η com algum elemento de $\alpha(\omega_t)$ (veja a prova do teorema **B** na pág. 116 e o lema 4.3.4). O espaço $W^{1+2/q-\epsilon,q}$ que, em primeiro momento, pode parecer estranho, nos garante em um certo sentido que $\Delta_q\omega$ esteja em L^2, como ficará claro mais adiante.

Para provarmos o teorema **B**, mais uma vez estudaremos um modelo aproximado que consiste em uma discretização no tempo do problema original e na obtenção de algumas estimativas de energia, as quais em conjunto com técnicas de monotonicidade nos permitirão fazer a passagem do limite de forma a encontrarmos uma solução para o problema original. Diferentemente do que foi feito no capítulo 2, aqui o problema aproximado não terá retirada uma das equações; lidaremos com todas elas ao mesmo tempo.

Vejamos primeiramente a versão discretizada do problema **B**.

4.2 Problema B aproximado

Sejam os parâmetros de discretização τ, $0 < \tau < 1$ e $M \in \mathbb{N}$ tais que (veja (2.27), pág. 38)

$$M\tau = T. \tag{4.13}$$

Novamente, tomaremos uma cota superior conveniente para $\tau > 0$ sendo que, ainda para uma maior simplicidade de exposição, preferiremos não explicitá-la pois afinal, mais uma vez o objetivo será tomar o limite $\tau \to 0$.

Considere o seguinte esquema iterativo: dadas $u_{i-1} \in V$, $\theta_{i-1} \in W_0^{1,p}$ e $\omega_{i-1} \in W^{1,q}$ encontrar $u_i \in V$, $\theta_i \in W_0^{1,p}$ e $\omega_i \in W^{1,q}$ as quais

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{\tau} - \Delta u_i + K_\tau(h(\omega_i))\left(u_i + \frac{u_i - u_{i-1}}{\tau}\right) = \zeta\theta_i, \text{ em } V', \tag{4.14}$$

$$\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\tau} + \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} - \Delta\theta_i - \Delta_p\theta_i + u_i \cdot \nabla\theta_i = g_i \text{ em } W^{-1,p'}, \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} + \alpha_\tau\left(\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right) - \mu\Delta\omega_i - \Delta_q\omega_i + \kappa u_i \cdot \nabla\omega_i& \qquad (4.16)\\ = \theta_i + f(\omega_i) \text{ em } (W^{1,q})',& \\ u_i = 0, \theta_i = \frac{\partial\omega_i}{\partial\nu} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T),& \end{aligned}$$

onde u_0, θ_0 e ω_0 são dados por **(B3)-(B5)**, g_i é como no capítulo 2. Além disso,

$$K_\tau(x) = K_{ext}(h(x) - \tau), x \in \mathbb{R} \tag{4.17}$$

e aqui K_{ext} é a extensão de K a $(-\infty, 0)$, tomando $K_{ext}(x) = 0$, se $x < 0$.

Mais uma vez consideramos uma aproximação especial para o operador α.

Lembremos que γ_τ denota a regularização de Yosida de $\gamma = \alpha^{-1}$ (como foi definido na pág. 90) e que tomamos

$$\alpha_\tau = (\gamma_\tau + \tau I)^{-1}.$$

Essa aproximação, que é Lipschitz, mostrará sua necessidade nas estimativas de energia (veja o lema 4.3.2, pag. 105).

Lembremos também que existe uma função s.c.i Γ_τ a qual

$$\begin{aligned} \Gamma_\tau : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty], &\ \text{Fréchet diferenciável}, \\ \partial\Gamma_\tau = \gamma_\tau \text{ e } 0 \le \Gamma_\tau(x) &\le \Gamma(x)\ \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

i.e, γ_τ é o subdiferencial de Γ_τ, conforme também observamos nos capítulos 1 e 2.

Nestas condições, temos que:

Proposição 4.2.1. *Dadas $u_{i-1} \in V$, $\theta_{i-1} \in W_0^{1,p}$ e $\omega_{i-1} \in W^{1,q}$, para $\tau > 0$ suficientemente pequeno, existem $u_i \in V$, $\theta_i \in W_0^{1,p}$ e $\omega_i \in W^{1,q}$ satisfazendo* (4.14), (4.15) *e* (4.16).

Observação 4.2.2. *A unicidade de tal solução não é esperada devido às ainda fortes não linearidades.*

Dem. Usaremos o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder. Lembremos que em todo o capítulo consideraremos $r > 0$ dado pela definição 4.1.2, pág. 92. Seja então o espaço de Banach $\mathcal{B} = H_r \times L^p \times L^q$ e definamos

$$\begin{aligned} &T_\lambda : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} \\ &T_\lambda(u, \theta, \omega) = (\bar{u}, \bar{\theta}, \bar{\omega}), \end{aligned}$$

onde $0 \le \lambda \le 1$ e $\bar{u}$, $\bar{\theta}$ e $\bar{\omega}$ são dados por

$$\lambda\frac{u}{\tau} - \Delta\bar{u} + \lambda\left[K_\tau(\omega)\left(u + \frac{u - u_{i-1}}{\tau}\right)\right] = \lambda\zeta\theta + \frac{u_{i-1}}{\tau} \qquad \text{em} \qquad V', \tag{4.19}$$

$$\frac{\bar{\theta}}{\tau} + \lambda\frac{\omega}{\tau} - \Delta\bar{\theta} - \Delta_p\bar{\theta} + u \cdot \nabla\bar{\theta} = \lambda\left[g_i + \frac{\theta_{i-1}}{\tau} + h'(w)\frac{\omega_{i-1}}{\tau}\right] \qquad \text{em} \qquad (W_0^{1,p})', \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\omega}}{\tau} + \lambda\alpha_\tau\left(\frac{\omega - \omega_{i-1}}{\tau}\right) - \mu\Delta\bar{\omega} - \Delta_q\bar{\omega} + \kappa u \cdot \nabla\bar{\omega} & \\ = \lambda\left[\theta + f(\omega) + \frac{\omega_{i-1}}{\tau}\right] & \qquad \text{em} \qquad (W^{1,q})', \\ \bar{u} = 0, \bar{\theta} = \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\nu} = 0 & \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Observe que os operadores T_λ estão bem definidos para $0 \leq \lambda \leq 1$ de acordo com a teoria básica para equação Stokes (veja Girault e Raviart [25], teorema 5.1, pág. 80) e com as proposições 3.2.10 a), pág. 83 e e 3.2.11, pág. 85. De fato, basta notar que

- $\lambda\Big[-\lambda\dfrac{u}{\tau}-K_\tau(\omega)\Big(u+\dfrac{u-u_{i-1}}{\tau}\Big)+\zeta\theta\Big]+\dfrac{u_{i-1}}{\tau}\in L^2$;
- $\lambda\Big[\dfrac{\omega_{i-1}}{\tau}-\dfrac{\omega}{\tau}+g_i+\dfrac{\theta_{i-1}}{\tau}\Big]\in L^2$;
- $\lambda\Big[-\alpha_\tau\Big(\dfrac{\omega-\omega_{i-1}}{\tau}\Big)+\theta+f(\omega)+\dfrac{\omega_{i-1}}{\tau}\Big]\in L^2$.

Assim, existem únicos $\bar{u}\in V$, $\bar{\theta}\in W_0^{1,p}$ e $\bar{\omega}\in W^{1,q}$ respectivamente satifazendo (4.19), (4.20) e (4.21). Verificaremos agora as hipóteses do teorema do ponto fixo de Leray-Schauder.

1. Seja $\lambda=0$. Conforme à teoria padrão para equação de Stokes e com as proposições 3.2.10 item (a) e 3.2.11 existem únicos $u\in V$, $\theta\in W_0^{1,p}$ e $\omega\in W^{1,q}$ os quais

$$T_0(u,\theta,\omega)=(u,\theta,\omega).$$

Na realidade, consideramos u a única solução de (4.19) para $\lambda=0$ e a substituímos em (4.20) e (4.21) para encontrarmos θ e ω.

2. Vejamos que T_λ é contínuo em $\mathcal{B}$ para cada $\lambda\in[0,1]$ fixado. Suponha que $(u^n,\theta^n,\omega^n)\to(u,\theta,\omega)$ em $\mathcal{B}$. Sejam

$$(\bar{u}^n,\bar{\theta}^n,\bar{\omega}^n)=T_\lambda(u^n,\theta^n,\omega^n) \text{ e } (\bar{u},\bar{\theta},\bar{\omega})=T_\lambda(u,\theta,\omega).$$

Consideremos a diferença entre os sistemas associados a $(\bar{u}^n,\bar{\theta}^n,\bar{\omega}^n)$ e $(\bar{u},\bar{\theta},\bar{\omega})$. Multiplicando a primeira equação por $\bar{u}^n-\bar{u}$ e integrando em Ω obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\nabla\bar{u}^n-\nabla\bar{u}|^2 &\leq C(\epsilon)\frac{\|u^n-u\|_H^2}{\tau^2}+\epsilon\frac{\|\bar{u}^n-\bar{u}\|_H^2}{2}+\int_\Omega\lambda\Big[K_\tau(\omega)\Big(u+\frac{u-u_{i-1}}{\tau}\Big)\\ &+\zeta(\theta^n-\theta)\Big]\cdot(\bar{u}^n-\bar{u})-\int_\Omega\lambda K_\tau(\omega^n)\Big(u^n+\frac{u^n-u_{i-1}}{\tau}\Big)\cdot(\bar{u}^n-\bar{u}),\end{aligned} \tag{4.22}$$

onde $\epsilon>0$ ainda vai ser fixado. No entanto,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\Bigg(\lambda K_\tau(\omega)(u+\frac{u-u_{i-1}}{\tau})-\lambda K_\tau(\omega^n)\Big(u^n+\frac{u^n-u_{i-1}}{\tau}\Big)\\ &+\zeta(\theta^n-\theta)\Bigg)\cdot(\bar{u}^n-\bar{u})\leq\frac{\epsilon}{2}\|\bar{u}^n-\bar{u}\|_H^2+C(\epsilon)\Bigg(\|\theta^n-\theta\|_{L^2}^2\\ &+\Big\|K_\tau(\omega)\Big(u-u^n+\frac{u-u^n}{\tau}\Big)\Big\|_{L^2}^2+\Big\|(K_\tau(\omega^n)-K_\tau(\omega))\Big(u^n+\frac{u^n-u_{i-1}}{\tau}\Big)\Big\|_{L^2}^2\Bigg),\end{aligned} \tag{4.23}$$

onde somamos e subtraímos $K_\tau(\omega)(u^n + u^n/\tau) \cdot (\bar{u}^n - \bar{u})$.

Como K_τ é Lipschitz

$$\begin{aligned}
&\left\|(K_\tau(\omega^n) - K_\tau(\omega))\left(u^n + \frac{u^n - u_{i-1}}{\tau}\right)\right\|_{L^2}^2 \\
&\leq C(\tau)\left\|(\omega^n - \omega)\left(u^n + \frac{u^n - u_{i-1}}{\tau}\right)\right\|_{L^2}^2 \\
&\leq C(\tau)\|\omega^n - \omega\|_{L^q}^2 \left\|u^n + \frac{u^n - u_{i-1}}{\tau}\right\|_{H_r}^2 \leq C(\tau)\|\omega^n - \omega\|_{L^q}^2,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

onde usamos que $1/q + 1/r < 1/2$ e que u^n é limitada em H_r.

Tome em (4.22) e (4.23), $\epsilon < 1/2\sqrt{C}$, onde $C > 0$ é dada pela desigualdade de Poincaré. Assim, segue por (4.22), (4.23), do fato de K_τ ser limitada e de (4.24) que

$$\frac{1}{2}\|\nabla\bar{u}^n - \nabla\bar{u}\|_{L^2}^2 \leq C(N, \tau, \Omega)\big(\|u^n - u\|_{H_r}^2 + \|\theta^n - \theta\|_{L^2}^2 + \|\omega^n - \omega\|_{L^q}^2\big). \tag{4.25}$$

que converge a zero se $n \to 0$.

Analogamente, consideremos a equação obtida pela subtração das equações da temperatura relativas a $\bar{\theta}_n$ e $\bar{\theta}$. Multipliquemos esta equação por $\bar{\theta}^n - \bar{\theta}$ para obter usando a monotonicidade do q-laplaciano que(veja lema 1.2.7, pág. 14)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\int_\Omega |\bar{\theta}^n - \bar{\theta}|^2 + C\int_\Omega |\nabla\bar{\theta}^n - \nabla\bar{\theta}|^p \leq \frac{\lambda}{\tau}\int_\Omega |\omega^n - \omega||\bar{\theta}^n - \bar{\theta}| \\
&+ \int_\Omega u^n \cdot \nabla\bar{\theta}^n(\bar{\theta}^n - \bar{\theta}) - u \cdot \nabla\bar{\theta}(\bar{\theta}^n - \bar{\theta}) \\
&\leq C(\tau, \epsilon)\|\omega^n - \omega\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon}{2}\|\bar{\theta}^n - \bar{\theta}\|_{L^2}^2 + \int_\Omega |(u^n - u) \cdot \nabla(\bar{\theta}^n - \bar{\theta})\bar{\theta}| \\
&\leq C(\tau, \epsilon)\|\omega^n - \omega\|_{L^2}^2 + \epsilon\|\nabla\bar{\theta}^n - \nabla\bar{\theta}\|_{L^p}^p + C(\epsilon, q)\|u^n - u\|_{H_r}^{p'}\|\bar{\theta}\|_{L^2}^{p'},
\end{aligned}$$

onde usamos que $1/q + 1/r + 1/2 < 1$ e que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u_n \cdot \nabla(\bar{\theta}_n - \theta_n)(\bar{\theta}_n - \theta_n) = 0 \text{ e} \\
&\int_\Omega u_n \cdot \nabla\bar{\theta}(\bar{\theta}_n - \theta_n) = -\int_\Omega u_n \cdot \nabla(\bar{\theta}_n - \theta_n)\bar{\theta};
\end{aligned}$$

veja o lema 5.2.1 e o corolário 5.2.2, pág. 125.

Consequentemente fixando algum $\epsilon > 0$ no intervalo$(0, \min\{\tau/2, C/2\})$, temos que

$$\frac{1}{2\tau}\int_\Omega |\bar{\theta}^n - \bar{\theta}|^2 + \frac{C}{2}\int_\Omega |\nabla\bar{\theta}^n - \nabla\bar{\theta}|^p \leq C(\tau)\|\omega^n - \omega\|_{L^2}^2 + C(q)\|u^n - u\|_{H_r}^{p'}\|\bar{\theta}\|_{L^p}^{p'}.$$

Em particular, pelo lema 1.2.3 da pág. 11 segue que

$$\|\bar{\theta}^n - \bar{\theta}\|_{L^p} \to 0 \text{ se } n \to +\infty. \tag{4.26}$$

Por fim, multipliquemos por $\bar{\omega}^n - \bar{\omega}$ a equação obtida pela subtração da equação do estado determinada por ω daquela determinada por ω^n e depois integremos em Ω para obtermos

$$\frac{1}{\tau}\int_\Omega |\bar{\omega}^n - \bar{\omega}|^2 + C\int_\Omega |\nabla\bar{\omega}^n - \nabla\bar{\omega}|^q \leq C(f,\tau)\int_\Omega (|\omega^n - \omega|$$
$$+|\theta^n - \theta|)|\bar{\omega}^n - \bar{\omega}| - \kappa\int_\Omega u\cdot\nabla(\bar{\omega}^n - \bar{\omega})\bar{\omega} - u^n\cdot\nabla(\bar{\omega}^n - \bar{\omega})\bar{\omega}^n,$$

onde usamos que

$$\left|\left(\alpha_\tau\left(\frac{\omega_n - \omega_{i-1}}{\tau}\right) - \alpha_\tau\left(\frac{\omega - \omega_{i-1}}{\tau}\right)\right)(\bar{\omega}^n - \bar{\omega})\right| \leq C(\tau)|\omega_n - \omega||\bar{\omega}_n - \bar{\omega}|$$

pois α_τ é Lipschitz. Logo, procedendo como fizemos no caso da equação da temperatura

$$\frac{1}{2\tau}\|\bar{\omega}^n - \bar{\omega}\|_{L^2}^2 + \left(\frac{C}{2} - \epsilon\right)\|\nabla\bar{\omega}^n - \nabla\bar{\omega}\|_{L^q}^q \leq C(\kappa,\tau)\Bigg(\|\omega^n - \omega\|_{L^2}^2$$
$$+\|\theta_n - \theta\|_{L^2}^2 + \|u^n - u\|_{H_r}^{q'}\|\bar{\omega}\|_{L^q}^{q'}\Bigg). \tag{4.27}$$

Assim, por (4.25), (4.26) e (4.27) segue que T_λ é contínuo em $\mathcal{B}$.

3. Prosseguindo, vejamos agora a compacidade do operador T_λ para $\lambda \in [0,1]$ fixado. Vale ressaltar que **aqui usamos que** $r < 2^{\#}$, de modo a garantirmos que $V \hookrightarrow\hookrightarrow H_r$.

   Consideremos a sequência $\{(u^n, \theta^n, \omega^n)\} \subset \mathcal{B}$ a qual

   $$\|(u^n, \theta^n, \omega^n)\|_{\mathcal{B}} \leq C$$

   para cada $n \in \mathbb{N}$.

   Além disso, consideremos $(\bar{u}^n, \bar{\theta}^n, \bar{\omega}^n) = T_\lambda(u^n, \theta^n, \omega^n)$ e as equações (4.19), (4.20) e (4.21) associadas.

   Multiplicando a equação (4.19) referente ao trio $(u^n, \theta^n, \omega^n)$ por $\bar{u}^n$ e integrando e Ω, obtemos que

   $$\int_\Omega |\nabla\bar{u}^n|^2 \leq \frac{\epsilon}{2}\|\bar{u}^n\|_H^2 + C(\tau,\epsilon)(\|u^n\|_{L^2}^2 + \|\theta^n\|_{L^2}^2 + \|u_{i-1}\|_{L^2}^2) \leq C(\tau).$$

De modo que, tomando $\epsilon < 1/\sqrt{C}$, C dado pela desigualdade de Poincaré, temos

$$\|\bar{u}^n\|_V \leq C(N,\tau,\Omega), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, usando-se o lema 1.2.3, pág. 11, prova-se que

$$\begin{aligned}
\|\bar{\theta}^n\|_{W_0^{1,p}} &\leq C(\tau), \forall n \in \mathbb{N}, \\
\|\bar{\omega}^n\|_{W^{1,q}} &\leq C(\tau), \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Logo, existe $(\bar{u},\bar{\theta},\bar{\omega}) \in V \times W_0^{1,p} \times W^{1,q}$ tal que $(\bar{u}^n,\bar{\theta}^n,\bar{\omega}^n) \to (\bar{u},\bar{\theta},\bar{\omega})$ em $\mathcal{B}$, a menos de subsequências, e assim concluímos que T_λ é compacto.

4. Vejamos agora que T_λ é uniformemente contínuo com relação a λ em subconjuntos limitados do espaço de Banach $\mathcal{B}$.

   Sejam $A \subset \mathcal{B}$, A limitado , $\lambda_l \in [0,1]$, $l = 1$ ou 2 e $(u,\theta,\omega) \in \mathcal{A}$. Fixemos

   $$(\bar{u}^l,\bar{\theta}^l,\bar{\omega}^l) = T_{\lambda_l}(u,\theta,\omega)$$

   e também $\bar{u} = \bar{u}^2 - \bar{u}^1$, $\bar{\theta} = \bar{\theta}^2 - \bar{\theta}^1$ e $\bar{\omega} = \bar{\omega}^2 - \bar{\omega}^1$.

   Daí, consideremos a equação (4.19) determinada por $l = 1$ e 2 e depois, a equação obtida através da diferença entre essas duas últimas equações. Multipliquemos a equação resultante por $\bar{u}$ e integremos em Ω, obtendo então:

   $$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla\bar{u}|^2 &\leq C|\lambda_1-\lambda_2|\left(\|u_{i-1}\|_H^2 + \|u\|_H^2 + \int_\Omega K_\tau(\omega)\left|u + \frac{u-u_{i-1}}{\tau}\right| + \int_\Omega |\zeta\theta|^2\right) \\
&\leq |\lambda_1-\lambda_2| C(N,\mathcal{A},\tau,\Omega), \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

   onde usamos mais uma vez as desigudades de Young e de Poincaré para tomarmos conta dos termos do tipo $\|\bar{u}\|_H^2$.

   De forma inteiramente análoga e sem maiores dificuldades, obtemos que

   $$\int_\Omega \frac{1}{\tau}|\bar{\theta}|^2 + C|\nabla\bar{\theta}|^p \leq |\lambda_1-\lambda_2| C(\mathcal{A},\tau), \qquad (4.29)$$
   $$\int_\Omega \frac{1}{\tau}|\bar{\omega}|^2 + C|\nabla\bar{\omega}|^q \leq |\lambda_1-\lambda_2| C(\mathcal{A},\tau), \qquad (4.30)$$

   onde $C > 0$ é a constante dada pelo lema 1.2.7, pág. 14.

   Concluímos, pelo lema 1.2.3 da pág. 11 e pelas estimativas (4.28), (4.29) e (4.30), que T_λ é uniformemente contínuo com relação a λ em $\mathcal{A}$.

5. Por fim, vejamos as estimativas a priori para os pontos fixos de T_λ.

Consideremos $(u,\theta,\omega)=T_1(u,\theta,\omega)$ e as equações associadas (4.19), (4.20) e (4.21), devidamente modificadas. Multiplicando (4.19) por u e integrando em Ω segue, usando a positividade de $K_\tau(.)$ garantida por **(B8)**, que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\lambda}{\tau}|u|^2+|\nabla u|^2 &\leq C(\tau,\epsilon)\Big(\big(1+\|K_\tau(\omega)\|^2_{L^\infty}\big)\|u_{i-1}\|^2_H+\|\theta\|^2_{L^2}\Big)\\ &+ \frac{\epsilon}{\tau}\|u\|^2_H \end{aligned} \tag{4.31}$$

onde $\epsilon>0$. Assim, para $\epsilon>0$ suficientemente pequeno, usando a desigualdade de Poincaré temos que

$$\int_\Omega \lambda|u|^2+|\nabla u|^2 \leq C(\tau,N,\Omega)(1+\|\theta\|^2_{L^2}), \tag{4.32}$$

pois por **(B8)** e por (4.17) segue que $\|K_\tau(.)\|_{L^\infty}\leq C(\tau)$.

Multiplicando (4.20) por θ, (4.21) por ω/τ, integrando em Ω e somando os resultados temos que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{1}{4\tau}|\theta|^2+\frac{1}{\tau^2}|\omega|^2+|\nabla\theta|^p+\frac{1}{\tau}|\nabla\omega|^q\\ &\leq C(\tau)+C(f)\int_\Omega\frac{1}{\tau}|\omega|^2-\int_\Omega\frac{1}{\tau}\alpha_\tau\Big(\frac{\omega-\omega_{i-1}}{\tau}\Big)\omega.\end{aligned}$$

Somando e subtraindo $1/\tau\int_\Omega\alpha_\tau((\omega-\omega_{i-1})/\tau)\omega_{i-1}$, usando que

$$\begin{aligned}\alpha_\tau(x)x &\geq 0 \text{ (veja a observação 1.4.10, pág. 26) e}\\ |\alpha_\tau(x)| &\leq C|x|/\tau \text{ (veja a proposição 1.4.9 item } (vii)\text{, pág. 26)}\end{aligned}$$

obtemos que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{1}{4\tau}|\theta|^2+\frac{1}{\tau^2}|\omega|^2+|\nabla\theta|^p+\frac{1}{\tau}|\nabla\omega|^q\\ &\leq C(\tau)+C(f)\int_\Omega\frac{1}{\tau}|\omega|^2-\frac{\lambda}{\tau}\int_\Omega\alpha_\tau\Big(\frac{\omega-\omega_{i-1}}{\tau}\Big)\omega_{i-1}\\ &\leq C(\tau)+C(f)\int_\Omega\frac{1}{\tau}|\omega|^2+\frac{\lambda}{\tau^3}\int_\Omega|\omega||\omega_{i-1}|\\ &\leq C(\tau)+C(f)\int_\Omega\frac{1}{\tau}|\omega|^2+\frac{\lambda^2}{2\tau^6}\int_\Omega|\omega_{i-1}|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega|\omega|^2\\ &\leq C(\tau)+\int_\Omega\frac{C(f)}{\tau}|\omega|^2,\end{aligned} \tag{4.33}$$

pois $\alpha_\tau(.)$ é Lipschitz e $\alpha_\tau(0)=0$. Logo, por (4.32) e (4.33) segue que

$$\|u\|^2_V+\|\theta\|^p_{L^p}+\|\omega\|^q_{L^q}\leq C_\tau$$

Portanto, usando as afirmações 1. a 5. concluímos pelo teorema do ponto fixo de Leray Schauder que existe $(u,\theta,\omega) \in V \times W_0^{1,p} \times W^{1,q}$ tal que $T_1(u,\theta,\omega) = (u,\theta,\omega)$. Tomando $u_i = u$, $\theta_i = \theta$ e $\omega_i = \omega$ o resultado segue. $\square$

4.3 Funções auxiliares e estimativas de energia discretas

Seja $\tau > 0$ satisfazendo a proposição 4.2.1 e considere as funções auxiliares u_τ, $\bar{u}_\tau$, θ_τ, $\bar{\theta}_\tau$, ω_τ, $\bar{\theta}_\tau$, g_τ definidas de acordo com a definição 2.4.1 na pág. 43.

Segue então da proposição 4.2.1 e das equações (4.14)-(4.16) que são satisfeitas:

$$\int_\Omega \bar{u}_\tau' \cdot \phi + \nabla u_\tau \cdot \nabla \phi + K_\tau(\omega_\tau)(u_\tau + \bar{u}_\tau') \cdot \phi = \int_\Omega \zeta \theta_\tau \cdot \phi, \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\bar{\theta}_\tau' + \bar{\omega}_\tau')\psi + (1 + |\nabla\theta_\tau|^{p-2})\nabla\theta_\tau \cdot \nabla\psi &+ \int_\Omega u_\tau \cdot \nabla\theta_\tau \psi \\ &= \int_\Omega g_\tau \psi, \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \bar{\omega}_\tau' \xi + \alpha_\tau(\bar{\omega}_\tau')\xi + (\mu + |\nabla\omega_\tau|^{q-2})\nabla\omega_\tau \cdot \nabla\xi &+ \int_\Omega \kappa u_\tau \cdot \nabla\omega_\tau \xi \\ &= \int_\Omega (\theta_\tau + f(\omega_\tau))\xi, \end{aligned} \tag{4.36}$$

para cada $\phi \in V$, $\psi \in W_0^{1,p}$ e $\xi \in W^{1,q}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot u_\tau = \nabla \cdot \bar{u}_\tau &= 0 \text{ em } Q, \\ u_\tau(.,0) = \bar{u}_\tau(.,0) &= u_0 \text{ q.t.p. em } \Omega. \\ \theta_\tau(.,0) = \bar{\theta}_\tau(.,0) &= \theta_0 \text{ em } \Omega. \\ \omega_\tau(.,0) = \bar{\omega}_\tau(.,0) &= \omega_0 \text{ em } \Omega. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Evidentemente, desejamos obter estimativas de energia independentes de $\tau > 0$ de forma fazermos $\tau \to 0$ em (4.34)-(4.36). É o que faremos nos próximos dois lemas.

Lema 4.3.1. *Existe $C > 0$, que não depende de $\tau > 0$, a qual*

$$\|\bar{u}_\tau'\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|u_\tau\|^2_{L^\infty(0,T;V)} \leq C, \tag{4.38}$$

$$\|\bar{\theta}_\tau'\|^2_{L^2(0,T;L^2)} + \|\theta_\tau\|^p_{L^\infty(0,T;W_0^{1,p})} \leq C, \tag{4.39}$$

$$\|\bar{\omega}_\tau'\|^2_{L^2(0,T;L^2)} + \|\omega_\tau\|^q_{L^\infty(0,T;W^{1,q})} \leq C, \tag{4.40}$$

$$\int_0^T \int_\Omega K_\tau(\omega_\tau)|u_\tau + \bar{u}_\tau'|^2 \leq C. \tag{4.41}$$

Dem. Multipliquemos a equação (4.15) por θ_i, a equação (4.16)$+\omega_i$ por $(\omega_i - \omega_{i-1})/\tau$ integre em Ω e some o resultado total para obter que:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{|\theta_i|^2 - |\theta_{i-1}|^2}{2\tau} + |\nabla\theta_i|^p + \frac{|\omega_i|^2 - |\omega_{i-1}|^2}{2\tau} + \left|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right|^2 \\
&+ \int_\Omega (\mu + |\nabla\omega_i|^{q-2})\nabla\omega_i \cdot \frac{\nabla\omega_i - \nabla\omega_{i-1}}{\tau} + \kappa u_i \cdot \nabla\omega_i \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} \\
&\qquad \le C \int_\Omega \frac{1}{2}|\theta_i|^2 + \frac{1}{2}|g_i|^2 + \omega_i \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau},
\end{aligned} \tag{4.42}$$

onde usamos que

$$\begin{aligned}
\frac{|\theta_i|^2 - |\theta_{i-1}|^2}{2\tau} &\le \theta_i \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\tau}, \\
\frac{|\omega_i|^2 - |\omega_{i-1}|^2}{2\tau} &\le \omega_i \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}
\end{aligned}$$

e

$$\alpha_\tau\left(\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right)\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} \ \ge \ 0.$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla\omega_i|^{q-2}\nabla\omega_i \cdot \frac{\nabla\omega_i - \nabla\omega_{i-1}}{\tau} \\
&\ge \frac{1}{\tau}\left[\int_\Omega |\nabla\omega_i|^q - \left(\int_\Omega |\nabla\omega_i|^q\right)^{(q-1)/q}\left(\int_\Omega |\nabla\omega_{i-1}|^q\right)^{1/q}\right] \\
&\ge \frac{1}{\tau}\left(\int_\Omega |\nabla\omega_i|^q - \frac{q-1}{q}\int_\Omega |\nabla\omega_i|^q - \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla\omega_{i-1}|^q\right) \\
&= \frac{1}{\tau}\int_\Omega \frac{|\nabla\omega_i|^q}{q} - \frac{|\nabla\omega_{i-1}|^q}{q}.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Usaremos agora a hipótese **(B1)**. Se $N > 2$, como $q > N$, segue de **(B1)** que

$$1/2 + 1/q + 1/2^\# < 1. \tag{4.44}$$

Caso $N = 2$, como $q > 2^\# = 4$, então mais uma vez (4.44) é válida. Vale ressaltar que **o fato de termos escolhido** $2^\# = 4$ **foi motivado por esse ser o menor valor o qual poderia satisfazer** $1/2 + 2/2^\# \le 1$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u_i \cdot \nabla\omega_i \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} \\
\le\ & C\left(\int_\Omega |u_i|^{2^\#}\right)^{1/2^\#}\left(\int_\Omega |\nabla\omega_i|^q\right)^{1/q}\left(\int_\Omega \frac{|\omega_i - \omega_{i-1}|^2}{\tau}\right)^{1/2} \\
\le\ & C\left(\int_\Omega |u_i|^{2^\#} + |\nabla\omega_i|^q\right) + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right|^2 + C,
\end{aligned} \tag{4.45}$$

onde usamos a desigualdade de Hölder e a última constante provém da desigualdade de Young.

Segue por (4.42), (4.43) e (4.45) que

$$\int_\Omega \frac{|\theta_i|^2 - |\theta_{i-1}|^2}{2\tau} + |\nabla\theta_i|^p + \frac{|\omega_i|^2 - |\omega_{i-1}|^2}{2\tau} + \frac{1}{4}\left|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right|^2 \tag{4.46}$$
$$+\frac{\mu}{\tau}\int_\Omega \frac{|\nabla\omega_i|^2}{2} - \frac{|\nabla\omega_{i-1}|^2}{2} + \frac{1}{\tau}\int_\Omega \frac{|\nabla\omega_i|^q}{q} - \frac{|\nabla\omega_{i-1}|^q}{q}$$
$$\leq C\left(1 + \int_\Omega |u_i|^{2^\#} + |\theta_i|^2 + |g_i|^2 + |\omega_i|^2 + |\nabla\omega_i|^q\right).$$

Recordemos que M é o parâmetro de discretização tal que $M\tau = T$ (veja a equação (4.13), pág. 94). Multiplicando (4.46) por τ e somando o resultado de $i = 1$ até $m \leq M$ obtemos que

$$\int_\Omega |\theta_m|^2 + |\omega_m|^2 + |\nabla\omega_m|^q + \sum_{i=1}^m \tau|\nabla\theta_i|^p + \sum_{i=1}^m \tau\left|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right|^2 \tag{4.47}$$
$$\leq C\left(1 + \int_\Omega \sum_{i=1}^m \tau(|\theta_i|^2 + |g_i|^2 + |\omega_i|^2 + |u_i|^{2^\#} + |\nabla\omega_i|^q)\right).$$

Equivalentemente, definindo θ_τ, ω_τ e u_τ analogamente à definição 2.4.1, pág. 43, com $0 < \tau < 1/2$, obtemos

$$\|\theta_\tau(t)\|_{L^2}^2 + \|\omega_\tau(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla\omega_\tau(t)\|_{L^p}^p$$
$$\leq C\left(1 + \|\theta_\tau\|^2_{L^2(0,t;L^2)} + \|\omega_\tau\|^2_{L^2(0,t;L^2)} + \|\nabla\omega_\tau\|^p_{L^p(0,t;L^p)} + \|u_\tau\|^{2^\#}_{L^{2^\#}(0,t;L^{2^\#})}\right),$$

para t q.t.p em $[0, T]$. Logo, pelo lema de Gronwall

$$\|\theta_\tau(t)\|_{L^2}^2 + \|\omega_\tau(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla\omega_\tau(t)\|_{L^p}^p \tag{4.48}$$
$$\leq C\left(1 + \|u_\tau\|^{2^\#}_{L^{2^\#}(0,t;L^{2^\#})}\right)$$

onde $C = C(T, g, u_0, \theta_0, \omega_0) > 0$.

Analogamente, obtemos por (4.47) e (4.48)

$$\|\nabla\theta_\tau\|^p_{L^p(0,t;L^p)} + \|\bar{\omega}'_\tau\|^2_{L^2(0,t;L^2)} \leq C\left(1 + \|u_\tau\|^{2^\#}_{L^{2^\#}(0,T;L^{2^\#})}\right). \tag{4.49}$$

Consideremos agora (4.14) $\times(u_i + (u_i - u_{i-1})/\tau)$ e integremos em Ω, obtendo

$$\int_\Omega \frac{|u_i|^2 - |u_{i-1}|^2}{2\tau} + \nabla u_i \cdot \frac{\nabla u_i - \nabla u_{i-1}}{\tau} + \left|\frac{u_i - u_{i-1}}{\tau}\right|^2 + |\nabla u_i|^2 + \tag{4.50}$$
$$\int_\Omega K(\omega_i)\left|u_i + \frac{u_i - u_{i-1}}{\tau}\right|^2 \leq \int_\Omega C|\theta_i|^2 + \frac{1}{2}|u_i|^2 + \frac{|u_i - u_{i-1}|^2}{4\tau^2},$$

onde vale lembrar da positividade do termo de Carman-Kozeny garantida por **(B8)**.

Mais ainda, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \nabla u_i \cdot \frac{\nabla u_i - \nabla u_{i-1}}{\tau} \\ \geq \;& \frac{1}{2\tau} \int_\Omega \frac{|\nabla u_i|^2}{2} - \frac{|\nabla u_{i-1}|^2}{2}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Combinando (4.50) e (4.51) segue que

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \frac{|u_i|^2 - |u_{i-1}|^2}{2\tau} + \left|\frac{u_i - u_{i-1}}{2\tau}\right|^2 + |\nabla u_i|^2 + \frac{|\nabla u_i|^2 - |\nabla u_{i-1}|^2}{2\tau} \\ & + \int_\Omega K(\omega_i)\left|u_i + \frac{u_i - u_{i-1}}{\tau}\right|^2 \leq C\Big(1 + \int_\Omega |\theta_i|^2 + |u_i|^2\Big). \end{aligned}$$

Multiplicando por τ e somando de $i = 1$ até $m \leq M$ (onde M é um parâmetro de discretização, veja (4.13), pág. 94) descobrimos que

$$\begin{aligned} & \int_\Omega |u_m|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u_m|^2 + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\tau}{4}\left|\frac{u_i - u_{i-1}}{\tau}\right|^2 + \tau|\nabla u_i|^2\right) \\ & + \sum_{i=1}^m \tau \int_\Omega K(\omega_i)\left|u_i + \frac{u_i - u_{i-1}}{\tau}\right|^2 \leq C\Big(1 + \int_\Omega \sum_{i=1}^m (\tau|u_i|^2 + \tau|\theta_i|^2)\Big). \end{aligned}$$

Analogamente ao que fizemos para (4.48) e (4.49) concluímos que

$$\|u_\tau(t)\|^2_{L^2} + \|\nabla u_\tau(t)\|^2_{L^2} \leq C(1 + \|\theta_\tau\|^2_{L^2(0,t;L^2)}) \tag{4.52}$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} & \|\bar{u}'_\tau(t)\|^2_{L^2(0,t;L^2)} + \|\nabla u_\tau\|^2_{L^2(0,t;L^2)} + \int_0^t \int_\Omega K_\tau(\omega_\tau)|u_\tau + \bar{u}'_\tau|^2 \\ & \leq C(1 + \|\theta_\tau\|^2_{L^2(0,T;L^2)}). \end{aligned} \tag{4.53}$$

Consideremos agora (4.15) $\times(\theta_i - \theta_{i-1})/\tau$ e integremos em Ω para obter, argumentando de forma análoga a (4.43)-(4.45) e (4.51), que

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left|\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\tau}\right|^2 + \frac{|\nabla\theta_i|^2 - |\nabla\theta_{i-1}|^2}{2\tau} + \frac{|\nabla\theta_i|^p - |\nabla\theta_{i-1}|^p}{p\tau} \leq C + C\int_\Omega |g_i|^2 \\ & + \left|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right|^2 + \int_\Omega C|u_i|^{2^\#} + C|\nabla\theta_i|^p + \frac{3}{4}\left|\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\tau}\right|^2. \end{aligned}$$

Multiplicando por $\tau > 0$ e somando de $i = 1$ até $m \leq M$ temos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \tau \int_\Omega \frac{1}{4}\left|\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\tau}\right|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\theta_m\|^2_{L^2} + \frac{1}{p}\|\nabla\theta_m\|^p_{L^p} \\ & \leq C\Big(1 + \sum_{i=1}^m \tau(|u_i|^{2^\#} + |\nabla\theta_i|^p)\Big). \end{aligned} \tag{4.54}$$

Logo, pela definição 2.4.1, pág. 43, temos que

$$\|\nabla\theta_\tau(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla\theta_\tau(t)\|_{L^p}^p \le C\big(1 + \|u_\tau\|_{L^{2^\#}(0,t;L^{2^\#})}^{2^\#} + \|\nabla\theta_\tau\|_{L^p(0,t;L^p)}^p\big),$$

para t q.t.p em $[0,T]$. Pelo lema de Gronwall

$$\|\nabla\theta_\tau(t)\|_{L^p}^p \le C\big(1 + \|u_\tau\|_{L^{2^\#}(0,t;L^{2^\#})}^{2^\#}\big). \tag{4.55}$$

Consequentemente, por (4.54) e (4.55) segue que

$$\|\bar{\theta}_\tau'\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 \le C\big(1 + \|u_\tau\|_{L^{2^\#}(0,T;L^{2^\#})}^{2^\#}\big). \tag{4.56}$$

Além disso, segue de (4.55) e da desigualdade de Poincaré que

$$\|\nabla\theta_\tau(t)\|_{L^p}^p \le C\big(1 + \|\nabla u_\tau\|_{L^\infty(0,t;L^2)}^{2^\#}\big),$$

e em conjunto com (4.52) implica que

$$\|\nabla\theta_\tau(t)\|_{L^2}^p \le C\big(1 + \|\theta_\tau\|_{L^2(0,t;L^2)}^{2^\#}\big).$$

Agora pela hipótese **(B1)** temos que $p \ge 2^\#$ logo aplicando novamente a desigualdade de Poincaré segue que

$$\|\nabla\theta_\tau(t)\|_{L^2}^2 \le C\big(1 + \|\nabla\theta_\tau\|_{L^2(0,t;L^2)}^2\big),$$

e pelo lema de Gronwall segue que para t q.t.p. em $[0,T]$

$$\|\nabla\theta_\tau(t)\|_{L^2}^2 \le C, \tag{4.57}$$

onde $C = C(T, u_0, \theta_0, \omega_0, g) > 0$. Vale ressaltar que aqui é o ponto exato o qual nós usamos a hipótese de que a condição de fronteira para θ é do tipo Dirichlet.

Veja que (4.38) e (4.41) seguem da desigualdade de Poincaré e das desigualdades (4.52), (4.53) e (4.57). Prosseguindo, (4.39) segue de (4.38), (4.55) e (4.56). Por fim, observe que por (4.38), (4.48) e (4.49) temos que

$$\|\omega_\tau(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla\omega_\tau(t)\|_{L^p}^q + \|\bar{\omega}_\tau'(t)\|_{L^2}^2 \le C. \tag{4.58}$$

Combinando (4.58) e o lema 1.2.3 da pág. 11 segue (4.40). □

Com o próximo lema conseguimos as estimativas de energia mais relevantes para o modelo **B**.

Lema 4.3.2. *Existe $C > 0$, que não depende de $\tau > 0$, tal que*

$$\|\alpha_\tau(\bar{\omega}_\tau')\|_{L^\infty(0,T;(W^{1,q})')} \le C, \tag{4.59}$$

$$\|\bar{\omega}_\tau'\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \mu\|\nabla\bar{\omega}_\tau'\|_{L^2(0,T;L^2)} \le C, \tag{4.60}$$

$$\sum_{i=1}^{M}\int_\Omega \frac{|\nabla\omega_i - \nabla\omega_{i-1}|^q}{\tau} \le C, \tag{4.61}$$

$$\|\Delta_p\theta_\tau\|_{L^\infty(0,T;(W_0^{1,p})')} \le C, \tag{4.62}$$

$$\|\Delta_q\omega_\tau\|_{L^\infty(0,T;(W^{1,q})')} \le C. \tag{4.63}$$

Dem. Nos concentraremos apenas nas provas de (4.60) e (4.61), pois (4.62) e (4.63) são consequências imediatas de (4.39) e (4.40).

Para $i \geq 2$ consideremos a diferença entre a equação (4.16) para i da equação (4.16) para $i-1$. Depois multipliquemos o resultado por $(\omega_i - \omega_{i-1})/\tau$ e integremos em Ω para obter que

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \left(\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} + \alpha_\tau \left(\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} \right) - \frac{\omega_{i-1} - \omega_{i-2}}{\tau} \right) \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} \\
& \int_\Omega -\alpha_\tau \left(\frac{\omega_{i-1} - \omega_{i-2}}{\tau} \right) \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} + \mu \frac{|\nabla \omega_i - \nabla \omega_{i-1}|^2}{\tau} \\
+ \quad & \int_\Omega (|\nabla \omega_i|^{q-2} \nabla \omega_i - |\nabla \omega_{i-1}|^{q-2} \nabla \omega_{i-1}) \cdot \left(\frac{\nabla \omega_i - \nabla \omega_{i-1}}{\tau} \right) \\
+ \quad & \kappa \int_\Omega u_i \cdot \nabla \omega_i \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} - u_{i-1} \cdot \nabla \omega_{i-1} \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} \\
\leq \quad & C \int_\Omega \frac{|\theta_i - \theta_{i-1}|^2}{\tau} + \frac{|\omega_i - \omega_{i-1}|^2}{\tau}.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Contudo, pelo lema 1.2.7, pág. 14, existe $C_2 = C_2(q, N)$ tal que

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega (|\nabla \omega_i|^{q-2} \nabla \omega_i - |\nabla \omega_{i-1}|^{q-2} \nabla \omega_{i-1}) \cdot \left(\frac{\nabla \omega_i - \nabla \omega_{i-1}}{\tau} \right) \\
& \geq \int_\Omega C_2 \frac{|\nabla \omega_i - \nabla \omega_{i-1}|^q}{\tau}.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Além disso, somando e subtraindo $u_{i-1} \cdot \nabla \omega_i (\omega_i - \omega_{i-1})/\tau$ obtemos que

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega u_i \cdot \nabla \omega_i \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} - u_{i-1} \cdot \nabla \omega_{i-1} \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} \\
& = \int_\Omega (u_i - u_{i-1}) \cdot \nabla \omega_i \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} \\
& \leq \frac{C}{\tau} \left(\int_\Omega |u_i - u_{i-1}|^2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla \omega_i|^q \right)^{1/q} \left(\int_\Omega |\omega_i - \omega_{i-1}|^{2^\#} \right)^{1/2^\#}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

onde usamos a desigualdade de Hölder, que $1/q + 1/2^\# + 1/2 < 1$ e o lema 5.2.1, pág. 125.

Por outro lado, veja que por (4.47) existe $C > 0$, que não depende de $\tau > 0$, tal que para todo i,

$$\int_\Omega |\nabla \omega_i|^q \leq C. \tag{4.67}$$

Assim, combinando (4.66), (4.67), usando que $W^{1,q} \hookrightarrow W^{1,2} \hookrightarrow L^{2^\#}$ e a desigualdade de

Hölder, é fácil ver que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u_i \cdot \nabla\omega_i \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} - u_{i-1} \cdot \nabla\omega_{i-1} \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} \\
&\leq \frac{C}{\tau}\bigg(\int_\Omega |u_i - u_{i-1}|^2\bigg)^{1/2}\bigg(\int_\Omega |\omega_i - \omega_{i-1}|^{2^\#}\bigg)^{1/2^\#} \\
&\leq \int_\Omega C_\epsilon \frac{|u_i - u_{i-1}|^2}{\tau} + \epsilon\frac{|\omega_i - \omega_{i-1}|^2}{\tau} + \epsilon\frac{|\nabla\omega_i - \nabla\omega_{i-1}|^2}{\tau}.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Para que as expressões não se tornem muitos grandes, a seguir denotaremos

$$\xi_i = \alpha_\tau\bigg(\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\bigg) \text{ para } i \geq 1. \tag{4.69}$$

Logo, da definição de α_τ na pág. 95, concluímos que

$$\gamma_\tau(\xi_i) + \tau\xi_i = \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}. \tag{4.70}$$

Mais ainda usando a definição de Γ_τ na pág. 95 temos que

$$\int_\Omega \Gamma_\tau(\xi_i) - \Gamma_\tau(\xi_{i-1}) \leq \int_\Omega \gamma_\tau(\xi_i)(\xi_i - \xi_{i-1}). \tag{4.71}$$

Dessa forma, segue de (4.69)-(4.71) que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Gamma_\tau(\xi_i) - \Gamma_\tau(\xi_{i-1}) + \frac{\tau}{2}|\xi_i|^2 - \frac{\tau}{2}|\xi_{i-1}|^2 \\
&\leq \int_\Omega \bigg(\alpha_\tau\bigg(\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\bigg) - \alpha_\tau\bigg(\frac{\omega_{i-1} - \omega_{i-2}}{\tau}\bigg)\bigg)\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} \text{ para } i \geq 2.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Combinando (4.64), (4.65), (4.68), (4.72) e fixando $0 < \epsilon < \mu/2$ obtemos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Gamma_\tau(\xi_i) - \Gamma_\tau(\xi_{i-1}) + \tau|\xi_i|^2 - \tau|\xi_{i-1}|^2 + \frac{|\omega_i - \omega_{i-1}|^2}{2\tau} - \frac{|\omega_{i-1} - \omega_{i-2}|^2}{2\tau} \\
&+ \int_\Omega \mu\frac{|\nabla\omega_i - \nabla\omega_{i-1}|^2}{2\tau} + C_2\frac{|\nabla\omega_i - \nabla\omega_{i-1}|^q}{\tau} \leq C\int_\Omega \frac{|u_i - u_{i-1}|^2}{\tau} + \frac{|\theta_i - \theta_{i-1}|^2}{\tau} \\
&+ C\int_\Omega \frac{|\omega_i - \omega_{i-1}|^2}{\tau}.
\end{aligned}$$

Somando-se de $i = 2$ a $m \leq M$ e usando as estimativas (4.38), (4.39) e (4.40) obtemos

$$\int_\Omega \Gamma_\tau(\xi_m) + \tau|\xi_m|^2 + \left|\frac{\omega_m - \omega_{m-1}}{\tau}\right|^2 + \mu \sum_{i=1}^m \tau \int_\Omega \left|\frac{\nabla\omega_i - \nabla\omega_{i-1}}{\tau}\right|^2$$

$$+C_2 \sum_{i=1}^m \int_\Omega \frac{|\nabla\omega_i - \nabla\omega_{i-1}|^q}{\tau} \tag{4.73}$$

$$\leq C\bigg(1 + \int_\Omega \Gamma_\tau(\xi_1) + \tau|\xi_1|^2 + \mu\tau\left|\frac{\nabla\omega_1 - \nabla\omega_0}{\tau}\right|^2 + \left|\frac{\omega_1 - \omega_0}{\tau}\right|^2$$

$$+ \int_\Omega C_2 \frac{|\nabla\omega_1 - \nabla\omega_0|^q}{\tau}\bigg).$$

Vejamos agora o que acontece para $i = 1$. Para tanto, definamos

$$\xi_0 = \theta_0 + f(\omega_0) + \mu\Delta\omega_0 + \Delta_q\omega_0 - u_0 \cdot \nabla\omega_0,$$

e lembremos que $\xi_0 \in L^2$ pelas hipóteses **(B3)-(B5)** e pela escolha de r. De fato, note que pela definição (4.1.1), pág. 92 $1/q + 1/r < 1/2$. Logo, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_\Omega |u_0 \cdot \nabla\xi_0|^2 \leq C\bigg(\int_\Omega |u_0|^r\bigg)^{2/r}\bigg(\int_\Omega |\nabla\xi_0|^q\bigg)^{2/q} < +\infty.$$

Consideremos a equação (4.16) para $i = 1$; depois multiplicando-a por $(\omega_1 - \omega_0)/\tau$ e integrando em Ω, vem

$$\int_\Omega \bigg(\frac{\omega_1 - \omega_0}{\tau} + \alpha_\tau\bigg(\frac{\omega_1 - \omega_0}{\tau}\bigg)\bigg)\frac{\omega_1 - \omega_0}{\tau} + (\mu + |\nabla\omega_1|^{q-2})\nabla\omega_1 \cdot \frac{\nabla\omega_1 - \nabla\omega_0}{\tau}$$

$$+ \int_\Omega \kappa u_1 \cdot \nabla\omega_1 \frac{\omega_1 - \omega_0}{\tau} \leq \int_\Omega (\theta_1 + f(\omega_1))\frac{\omega_1 - \omega_0}{\tau}.$$

Somando e subtraindo $\int_\Omega \xi_0(\omega_1 - \omega_0)/\tau$ segue que

$$\int_\Omega (\xi_1 - \xi_0) \cdot \frac{\omega_1 - \omega_0}{\tau} + \left|\frac{\omega_1 - \omega_0}{\tau}\right|^2 + \mu\frac{|\nabla\omega_1 - \nabla\omega_0|^2}{\tau} + C_2\frac{|\nabla\omega_1 - \nabla\omega_0|^q}{\tau} \tag{4.74}$$

$$\leq \int_\Omega \frac{|\theta_1 - \theta_0|^2}{\tau} + \frac{|\omega_1 - \omega_0|^2}{\tau} - (u_1 - u_0) \cdot \nabla\omega_0 \frac{\omega_1 - \omega_0}{\tau},$$

onde ressaltamos que $\int_\Omega u_1 \cdot \nabla(\omega_1 - \omega_0)(\omega_1 - \omega_0) = 0$ e que $\int_\Omega \xi_0(\omega_1 - \omega_0)/\tau$ está bem definido pela escolha de ξ_0 e pelo fato de que $\omega_1 - \omega_0 \in L^\infty$.

Mais ainda, como $q > N$ e $\omega_0 \in W^{2,q}$ temos pelo teorema de imersão de Sobolev que $\nabla\omega_0 \in L^\infty$. Dessa forma, pela desigualdade de Hölder obtemos que

$$\int_\Omega \frac{|\theta_1 - \theta_0|^2}{\tau} + \frac{|\omega_1 - \omega_0|^2}{\tau} - \kappa(u_1 - u_0) \cdot \nabla\omega_0 \frac{\omega_1 - \omega_0}{\tau}$$

$$\leq \int_\Omega \frac{|\theta_1 - \theta_0|^2}{\tau} + \frac{|\omega_1 - \omega_0|^2}{\tau}$$

$$+\frac{C}{\tau}\bigg(\int_\Omega |u_1 - u_0|^2\bigg)^{1/2}\bigg(\int_\Omega |\omega_1 - \omega_0|^2\bigg)^{1/2} \leq C, \tag{4.75}$$

onde usamos as desigualdades (4.38)-(4.40), lembrando das expressões de $\bar{u}'_\tau, \bar{\theta}'_\tau$ e $\bar{\omega}'_\tau$.

Prosseguindo, como $\gamma_\tau(\xi_1) + \tau\xi_1 = (\omega_1 - \omega_0)/\tau$ segue diretamente da escolha de Γ que (veja (4.2), pág. 91)

$$\int_\Omega \Gamma_\tau(\xi_1) - \Gamma_\tau(\xi_0) \leq \int_\Omega \left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{\tau} - \tau\xi_1\right)(\xi_1 - \xi_0),$$

ou, equivalentemente,

$$\int_\Omega \Gamma_\tau(\xi_1) + \frac{\tau}{2}|\xi_1|^2 \leq \int_\Omega \Gamma_\tau(\xi_0) + \frac{\tau}{2}|\xi_0|^2 + \left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{\tau}\right)(\xi_1 - \xi_0). \tag{4.76}$$

Então, segue de (4.74), (4.75) e (4.76) que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Gamma_\tau(\xi_1) + \frac{\tau}{2}|\xi_1|^2 + \left|\frac{\omega_1 - \omega_0}{\tau}\right|^2 + \frac{|\nabla\omega_1 - \nabla\omega_0|^2}{2\tau} + \frac{|\nabla\omega_1 - \nabla\omega_0|^q}{r\tau} \\ &\leq C\left(1 + \int_\Omega \Gamma_\tau(\xi_0) + \frac{\tau}{2}|\xi_0|^2\right) \\ &\leq C\left(1 + \int_\Omega \Gamma(\xi_0) + \frac{\tau}{2}|\xi_0|^2\right), \end{aligned} \tag{4.77}$$

onde usamos (4.18), pág. 95, para a última desigualdade. Note que a última expressão da desigualdade acima é finita pela hipótese **(B12)** da pág. 91. Dessa forma, por (4.73) e (4.77) provamos (4.60) e (4.61).

Para provarmos (4.59), consideremos a equação (4.36) da pág. 101. Temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \alpha_\tau(\bar{\omega}'_\tau)\xi = &-\int_\Omega \bar{\omega}'_\tau\xi + (\mu + |\nabla\omega_\tau|^{q-2})\nabla\omega_\tau \cdot \nabla\xi \\ &-\kappa\int_\Omega u_\tau \cdot \nabla\omega_\tau\xi + \int_\Omega (\theta_\tau + f(\omega_\tau))\xi. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Agora, por **(B1)**, $2/q + 1/2^\# \leq 1$ e então pela desigualdade de Hölder

$$-\int_\Omega u_\tau \cdot \nabla\omega_\tau\xi \leq \|u_\tau\|_{L^{2^\#}}\|\omega_\tau\|_{W^{1,q}}\|\xi\|_{W^{1,q}}\forall t \in [0,T], \tag{4.79}$$

onde também usamos a imersão óbvia $W^{1,q} \hookrightarrow L^q$.

Analogamente temos que

$$\begin{aligned} &-\int_\Omega (\mu + |\nabla\omega_\tau|^{q-2})\nabla\omega_\tau \cdot \nabla\xi + \int_\Omega (\theta_\tau + f(\omega_\tau))\xi \\ \leq\ &\|\omega_\tau\|_{W^{1,q}}^{1-1/q}\|\xi\|_{W^{1,q}} + C\|\omega_\tau\|_{W^{1,q}}\|\xi\|_{W^{1,q}} + \|\theta_\tau\|_{L^2}\|\xi\|_{W^{1,q}}, \forall t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{4.80}$$

Combinando (4.38)-(4.40), pág. 101, com (4.78)-(4.80) obtemos que

$$\|\alpha_\tau(\bar{\omega}'_\tau)\|_{(W^{1,q})'} \leq C, \forall t \in [0,T].$$

$\square$

Como consequência direta dos lemas 4.3.1 e 4.3.2 conseguimos as seguintes convergências que em conjunto com técnicas de monotonicidade serão suficientes para provarmos a existência de solução para o problema **B**.

Proposição 4.3.3. *Existem u, θ, ω e η tais que, a menos de subsequências, se $\tau \to 0$*

$$
\begin{aligned}
u_\tau \to u \quad & em \quad C([0,T];H) \text{ e } \bar{u}_\tau \to u \text{ em } C([0,T];H), && (4.81)\\
\theta_\tau \to \theta \quad & em \quad C([0,T];L^2) \text{ e } \bar{\theta}_\tau \to \theta \text{ em } C([0,T];L^p), && (4.82)\\
\omega_\tau, \bar{\omega}_\tau \to \omega \quad & em \quad C([0,T];C(\overline{\Omega})) \cap C([0,T];W^{1,q-\epsilon}), && (4.83)\\
u_\tau \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad & em \quad L^\infty(0,T;V), && (4.84)\\
\theta_\tau \overset{*}{\rightharpoonup} \theta \quad & em \quad L^\infty(0,T;W_0^{1,p}), && (4.85)\\
\omega_\tau \overset{*}{\rightharpoonup} \omega \quad & em \quad L^\infty(0,T;W^{1,q}), && (4.86)\\
\bar{u}'_\tau \rightharpoonup u_t \quad & em \quad L^2(0,T;H), && (4.87)\\
\bar{\theta}'_\tau \rightharpoonup \theta_t \quad & em \quad L^2(0,T;L^2), && (4.88)\\
\bar{\omega}'_\tau \overset{*}{\rightharpoonup} \omega_t \quad & em \quad L^\infty(0,T;L^2), && (4.89)\\
\bar{\omega}'_\tau \rightharpoonup \omega_t \quad & em \quad L^2(0,T;W^{1,2}) \text{ se } \mu > 0, && (4.90)\\
\alpha_\tau(\bar{\omega}'_\tau) \overset{*}{\rightharpoonup} \eta \quad & em \quad L^\infty(0,T;(W^{1,q})'). && (4.91)
\end{aligned}
$$

Dem. Em primeiro lugar, veremos que se $\tau \to 0$ então

$$
\begin{aligned}
u_\tau - \bar{u}_\tau \to 0 \quad & \text{em} \quad L^\infty(0,T;H), && (4.92)\\
\theta_\tau - \bar{\theta}_\tau \to 0 \quad & \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2), && (4.93)\\
\omega_\tau - \bar{\omega}_\tau \to 0 \quad & \text{em} \quad L^\infty(0,T;W^{1,q}). && (4.94)
\end{aligned}
$$

De fato, para $(i-1)\tau \leq t \leq i\tau$ usando a definição 2.4.1, pág. 43, temos

$$\omega_\tau - \bar{\omega}_\tau = (\omega_i - \omega_{i-1})\left(\frac{i\tau - t}{\tau}\right)$$

então

$$\|\omega_\tau - \bar{\omega}_\tau\|_{W^{1,q}} \leq \|\omega_i - \omega_{i-1}\|_{W^{1,q}}. \tag{4.95}$$

Além disso,

$$\omega_i - \omega_{i-1} = \int_{(i-1)\tau}^{i\tau} \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} ds$$

a igualdade valendo em $W^{1,q}$. Dessa forma, pelo lema 1.2.3, pág. 11,

$$\begin{aligned}
\|\omega_i-\omega_{i-1}\|_{W^{1,q}} &\leq \int_{(i-1)\tau}^{i\tau}\frac{1}{\tau}\|\omega_i-\omega_{i-1}\|_{W^{1,q}}\\
&\leq \frac{C}{\tau}\int_{(i-1)\tau}^{i\tau}\|\omega_i-\omega_{i-1}\|_{L^2}+\|\nabla\omega_i-\nabla\omega_{i-1}\|_{L^q} \qquad (4.96)\\
&\leq C\Big(\int_{(i-1)\tau}^{i\tau}1\Big)^{1/2}\Big(\int_{(i-1)\tau}^{i\tau}\Big\|\frac{\omega_i-\omega_{i-1}}{\tau}\Big\|_{L^2}^2\Big)^{1/2}\\
&+ \frac{C}{\tau}\Big(\int_{(i-1)\tau}^{i\tau}1\Big)^{1/q'}\Big(\int_{(i-1)\tau}^{i\tau}\|\nabla\omega_i-\nabla\omega_{i-1}\|_{L^q}^q\Big)^{1/q}\\
&= C\tau^{1/2}\Big(\int_{(i-1)\tau}^{i\tau}\Big\|\frac{\omega_i-\omega_{i-1}}{\tau}\Big\|_{L^2}^2\Big)^{1/2}\\
&+ \frac{1}{\tau^{1/q}}\Big(\int_{(i-1)\tau}^{i\tau}\|\nabla\omega_i-\nabla\omega_{i-1}\|_{L^q}^q\Big)^{1/q}\\
&\leq C\tau^{1/2}\Big(\int_0^T\|\bar{\omega}_\tau'\|_{L^2}^2\Big)^{1/2}\\
&+ \tau^{1/q}\Big(\int_{(i-1)\tau}^{i\tau}\frac{\|\nabla\omega_i-\nabla\omega_{i-1}\|_{L^q}^q}{\tau^2}\Big)^{1/q}.
\end{aligned}$$

No entanto, observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^M\int_\Omega\frac{|\nabla\omega_i-\nabla\omega_{i-1}|^q}{\tau} &= \sum_{i=1}^M\int_{(i-1)\tau}^{\tau}\int_\Omega\frac{|\nabla\omega_i-\nabla\omega_{i-1}|^q}{\tau^2} \qquad (4.97)\\
&= \sum_{i=1}^M\int_{(i-1)\tau}^{i\tau}\frac{\|\nabla\omega_i-\nabla\omega_{i-1}\|_{L^q}^q}{\tau^2}.
\end{aligned}$$

Por (4.96)-(4.97), (4.60) e (4.61), pág. 105, provamos (4.94). Analogamente provamos (4.92) e (4.93).

Agora provaremos que $\bar{\omega}_\tau\to\omega$ em $C([0,T];C(\overline{\Omega}))$ de forma que (4.83) será consequência direta de (4.94). Segue das definições de $\bar{\omega}_\tau$ e ω_τ, pág. 43 e da desigualdade (4.40), pág. 101, que

$$\|\bar{\omega}_\tau\|_{L^\infty(0,T;W^{1,q})}\leq C,\ \text{onde } C \text{ não depende de } \tau>0. \qquad (4.98)$$

Pelas proposições 1.3.7, pág. 17 e 1.3.11, pág. 18, como $1-\epsilon-N/q>0$ se consideramos $\epsilon>0$ suficientemente pequeno, então temos que

$$W^{1,q}\hookrightarrow\hookrightarrow W^{1-\epsilon,q}\hookrightarrow C(\overline{\Omega})\hookrightarrow L^2. \qquad (4.99)$$

Além disso, pela estimativa (4.40), pág. 101, temos

$$\|\bar{\omega}_\tau'\|_{L^2(0,T;L^2)}\leq C \text{ onde } C \text{ não depende de } \tau>0. \qquad (4.100)$$

Logo, para $\epsilon > 0$ tal que $N < q - \epsilon < q$ combinando (4.98)-(4.100) com o lema de Aubin-Lions (teorema 1.5.1, pág. 29), onde tomamos $X = W^{1,q}$, $B = C(\overline{\Omega})$ e $Y = L^2$ segue que existe $\omega \in C([0,T]; C(\overline{\Omega})) \cap L^\infty(0,T; W^{1,q})$ o qual $\bar{\omega}_\tau \to \omega$ em $C([0,T]; C(\overline{\Omega}))$, a menos de subsequências. Assim, (4.83) segue.

Prosseguindo de forma análoga, por (4.39), pág. 101, temos que

$$\|\bar{u}_\tau\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq C, \text{ onde } C \text{ não depende de } \tau > 0. \tag{4.101}$$

Mais ainda, pelo teorema de Rellich-Kondrachov

$$V \hookrightarrow\hookrightarrow H. \tag{4.102}$$

Pelas estimativas (4.38) e (4.101), por (4.102) e pelo teorema 1.5.1, escolhendo $X = V$, $B = H$ e $Y = H$ segue que existe $u \in C([0,T]; H) \cap L^\infty(0,T; V)$ tal que a menos de subsequências $\bar{u}_\tau \to u$ em $C([0,T]; H)$, o que em conjunto com (4.92) prova (4.81).

De forma inteiramente análoga provamos (4.82).

Vejamos agora a convergência (4.84).

Segue da estimativa (4.38) que existe $\tilde{u} \in L^\infty(0,T; V)$ tal que $\bar{u}_\tau \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{u}$ em $L^\infty(0,T; V)$. Isto quer dizer que para cada $\phi \in L^1(0,T; V')$

$$\int_0^T \langle \bar{u}_\tau - \tilde{u}, \phi \rangle \to 0, \text{ se } \tau \to 0, \tag{4.103}$$

onde aqui $\langle \, , \rangle$ denota o produto de dualidade entre V e V'. Lembremos que $H \hookrightarrow V'$ pois, para cada $\phi \in H$ e cada $\psi \in V$ o produto

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_\Omega \phi \cdot \psi$$

define um elemento de V'. Dessa forma, para cada $\phi \in L^2(0,T; H)$ temos que

$$\int_0^T \int_\Omega (\bar{u}_\tau - \tilde{u}) \cdot \phi \to 0, \text{ se } \tau \to 0.$$

Em particular, como

$$\int_0^T \int_\Omega (u - \tilde{u}) \cdot \phi = \int_0^T \int_\Omega (u - \bar{u}_\tau) \cdot \phi + \int_0^T \int_\Omega (\bar{u}_\tau - \tilde{u}) \cdot \phi$$

então por (4.81) e (4.103) obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega (u - \tilde{u}) \cdot \phi = 0, \forall \phi \in L^2(0,T; L^2)$$

e assim $u = \tilde{u}$ q.t.p em $(0,T) \times \Omega$ e assim (4.84) realmente é válida.

Da mesma forma, provamos as convergências (4.85) e (4.86).

Agora, mostraremos as convergências (4.87)-(4.89).

Primeiramente, observamos que por (4.40), pág. 101, e (4.60), pág. 105, existe $w \in L^2(0,T;W^{1,2}) \cap L^\infty(0,T;L^2)$ tal que

$$\bar{\omega}'_\tau \rightharpoonup w \text{ em } L^2(0,T;W^{1,2}), \text{ se } \mu > 0 \text{ e } \bar{\omega}'_\tau \overset{*}{\rightharpoonup} w \text{ em } L^\infty(0,T;L^2). \tag{4.104}$$

Usaremos agora teoria elementar de Distribuições Vetoriais (cf. Lions e Magenes [34] cap.1.2 págs.6-7 ou Temam [49] cap.3.1 págs.169-170 lema 1.1). Temos que para cada $\psi \in L^2 \cup (W^{1,2})'$ e $\phi \in C_c^\infty(0,T)$

$$\int_0^T \langle \bar{\omega}'_\tau, \psi \rangle \phi ds = -\int_0^T \langle \bar{\omega}_\tau, \psi \rangle \phi_t ds.$$

Mais ainda, como para cada s fixado $\phi(s)$ é um número real, então

$$\int_0^T \langle \bar{\omega}'_\tau, \phi\psi \rangle ds = -\int_0^T \langle \bar{\omega}_\tau, \phi_t\psi \rangle ds. \tag{4.105}$$

Como evidentemente $\phi\psi$ e $\phi_t\psi$ pertencem a $L^2(0,T;(W^{1,2})')$, se $\psi \in (W^{1,2})'$, e a $L^2(0,T;L^2)$ se $\psi \in L^2$ então segue de (4.86), pág. 110, (4.104) e (4.105) que

$$\int_0^T \langle \omega, \psi \rangle \phi ds = -\int_0^T \langle w, \psi \rangle \phi_t ds$$

e assim $\omega_t = w$ no sentido das distribuições de $(0,T)$ em $W^{1,2}$ ou L^2. Como $w \in L^2(0,T;W^{1,2}) \cap L^\infty(0,T;L^2)$, (4.89) e (4.90) estão provadas.

As provas de (4.87) e (4.88) são análogas, bastando que troquemos as ditribuições de $(0,T)$ em $W^{1,2}$ por H e L^2, respectivamente.

Para concluirmos, basta notarmos que (4.91) segue diretamente de (4.59), pág. 105.

□

Com a proposição 4.3.3 em mãos, temos o instrumental necessário para provarmos o teorema **B**. Para maior conveniência do leitor, dividemos sua prova em duas partes.

Prova do teorema B: existência de solução generalizada

Sejam u, θ, ω e η dados pela proposição 4.3.3. Observe que as regularidades estabelecidas pela definição 4.1.2, pág. 92, são trivialmente satisfeitas.

Consideremos então a equação (4.34) pág. 101 e seja $\phi \in L^2(0,T;V(\Omega_{ml})(t))$ tal que

$supp\,\phi \subset\subset Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T)$. Se $\tau \to 0$, por (4.82), (4.84) e (4.87) temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \bar{u}'_\tau \cdot \phi &\to \int_0^T \int_\Omega u_t \cdot \phi, \\ \int_0^T \int_\Omega \nabla u_\tau \cdot \nabla \phi &\to \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi, \\ \int_0^T \int_\Omega \zeta\theta_\tau \cdot \phi &\to \int_0^T \int_\Omega \zeta\theta \cdot \phi. \end{aligned} \tag{4.106}$$

Além disso, lembrando que

$$Q_{ml} = \{(x,t) : 0 \leq h(\omega(x,t)) < 1\} \text{ e } \Omega_{ml}(t) = \{x \in \Omega : 0 \leq h(\omega(x,t)) < 1\}$$

e que $supp\,\phi \subset\subset Q_{ml} \cap \Omega_{ml}(0) \cap \Omega_{ml}(T)$ temos que, se $\tau \to 0$

$$K_\tau(h(\omega_\tau)) = K_{ext}(h(\omega_\tau) - \tau) \to K(h(\omega)), \text{ uniformemente em } supp\,\phi. \tag{4.107}$$

De fato, tome $\delta > 0$ tal que $h(\omega(x,t)) \leq 1 - 2\delta$, para cada $(x,t) \in supp\,\phi$. Segue de (2.82), pág. 53, que

$$\omega_\tau \to \omega \text{ uniformemente em } (0,T) \times \overline{\Omega}.$$

Logo,por **(B9)** temos que

$$h(\omega_\tau) \to h(\omega) \text{ uniformemente em } (0,T) \times \overline{\Omega}. \tag{4.108}$$

Então, escolha τ_1 o qual $0 < \tau_1 < \delta/2$, de modo que, para cada $0 < \tau \leq \tau_1$,

$$h(\omega_\tau(x,t)) \leq 1 - \delta/2.$$

Agora, por **(B8), (B9)** e pela escolha de K_{ext}, $K_{ext}(.)$ é uniformemente contínua em $[0, 1-\delta]$, logo (4.107) segue usando (4.108).

Dessa forma, por (4.84), (4.87) e (4.107)

$$\int_0^T \int_\Omega K_\tau(h(\omega_\tau))(u_\tau + \bar{u}'_\tau) \cdot \phi \to \int_0^T \int_\Omega K(h(\omega))(u + u_t) \cdot \phi. \tag{4.109}$$

Assim, segue da equação (4.34), pág. 101, de (4.106) e (4.109) que a equação (4.7) é satifeita.

Analogamente, consideremos a equação (4.35) pág. 101 e seja $\psi \in L^p(0,T; W_0^{1,p})$. Se $\tau \to 0$ então por (4.85) , (4.88) e (4.89) e pelo lema 2.4.2, pág. 44, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega (\bar{\theta}'_\tau + \bar{\omega}'_\tau)\psi &\to \int_0^T \int_\Omega (\theta_t + \omega_t)\psi, \\ \int_0^T \int_\Omega \nabla\theta_\tau \cdot \nabla\psi &\to \int_0^T \int_\Omega \nabla\theta \cdot \nabla\psi, \\ \int_0^T \int_\Omega g_\tau \psi &\to \int_0^T \int_\Omega g\psi. \end{aligned} \tag{4.110}$$

Agora, por (4.81)-(4.82) segue que

$$\int_0^T \int_\Omega u_\tau \cdot \nabla\theta_\tau\psi = -\int_0^T \int_\Omega u_\tau \cdot \nabla\psi\theta_\tau \quad \to \quad -\int_0^T \int_\Omega u \cdot \nabla\psi\theta = \int_0^T \int_\Omega u \cdot \nabla\theta\psi. \tag{4.111}$$

Veja que por (4.59), pág. 105, existe $\Psi \in L^2(0,T;(W_0^{1,p})')$ o qual, se $\tau \to 0$

$$\int_0^T \langle -\Delta_p\theta_\tau, \psi\rangle = \int_0^T \int_\Omega |\nabla\theta_\tau|^{p-2}\nabla\theta_\tau \cdot \nabla\psi \quad \to \quad \int_0^T \langle \Psi, \psi\rangle \,,$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ denota a dualidade entre $W_0^{1,p}$ e $W^{-1,p}$.

Mais ainda, observe que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega (\bar\theta_\tau' + \bar\omega_\tau')\theta_\tau \quad &\to \quad \int_0^T \int_\Omega (\theta_t + \omega_t)\theta \text{ por (4.82), (4.88) e (4.89),} \\ \int_0^T \int_\Omega g_\tau\theta_\tau \quad &\to \quad \int_0^T \int_\Omega g\theta \text{ por (4.82) e pelo lema 2.4.2 e} \\ \limsup_{\tau\to 0} -\int_0^T \int_\Omega |\nabla\theta_\tau|^2 \quad &\leq \quad -\int_0^T \int_\Omega |\nabla\theta|^2 \text{ por (4.85).} \end{aligned} \tag{4.112}$$

Dessa forma, segue da equação (4.35), pág. 101, e de (4.110)-(4.112) que

$$\limsup_{\tau\to 0} \int_0^T \langle -\Delta_p\theta_\tau, \theta_\tau\rangle \leq \int_0^T \langle \Psi, \theta\rangle \,.$$

Logo, pelo teorema 1.4.11, pág. 27, concluímos que

$$\Psi = -\Delta_p\theta. \tag{4.113}$$

Combinando (4.110)-(4.113) com (4.35), obtemos que a equação (4.8) é satisfeita.

Vejamos agora a equação (4.9). Para $\xi \in L^q(0,T;W^{1,q})$, se $\tau \to 0$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega (\alpha_\tau(\bar\omega_\tau') + \bar\omega_\tau')\xi \quad &\to \quad \int_0^T \langle \eta, \xi\rangle + \int_0^T \int_\Omega \omega_t\xi \text{ por (4.89) e (4.91),} \\ \int_0^T \int_\Omega \mu\nabla\omega_\tau \cdot \nabla\xi + \kappa u_\tau \cdot \nabla\omega_\tau\xi \quad &\to \quad \int_0^T \int_\Omega \nabla\omega \cdot \nabla\xi + \kappa u \cdot \nabla\omega\xi \text{ por (4.81) e (4.83),} \\ \int_0^T \int_\Omega (\theta_\tau + f(\omega_\tau))\xi \quad &\to \quad \int_0^T \int_\Omega (\theta + f(\omega))\xi \text{ por (4.82) e (4.83),} \end{aligned} \tag{4.114}$$

onde vale lembrar que $f(.)$ é Lipschitz pela hipótese **(B6)** e que $\langle\ ,\ \rangle$ representa agora a dualidade entre $W^{1,q}$ e $(W^{1,q})'$.

Procedendo de forma análoga a que fizemos em (4.112)-(4.113), provamos que

$$-\Delta_q\omega_\tau \overset{*}{\rightharpoonup} -\Delta_q\omega \text{ em } L^\infty(0,T;(W^{1,q})')$$

e em particular,

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla \omega_\tau|^{q-2} \nabla \omega_\tau \cdot \nabla \xi \to \int_0^T < -\Delta_q \omega, \xi > . \tag{4.115}$$

Fazendo uso de (4.114) e (4.115) obtemos que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \eta, \xi \rangle + \int_0^T \int_\Omega \omega_t \xi + (\mu + |\nabla \omega|^{q-2}) \nabla \omega \cdot \nabla \xi + \kappa u \cdot \nabla \omega \xi \qquad (4.116) \\ = & \int_0^T \int_\Omega (\theta + f(\omega)) \xi. \end{aligned}$$

Vejamos agora a obtenção de (4.10). Observe que, como $\omega_\tau \to \omega$ uniformemente em Q, então por **(B9)**, $h(\omega_\tau) \to 1$ uniformemente em Q_s. Logo, pela hipótese **(B8)** e pela escolha de K_τ segue que $K_\tau(h(\omega_\tau)) \to +\infty$ uniformemente em Q_s. Assim, pela desigualdade (4.41), pág. 101, pelas convergências (4.81) e (4.87) segue

$$u + u_t = 0 \text{ q.t.p. em } Q_s.$$

Para as condições iniciais (4.11) basta lembrar da escolha de u_τ, θ_τ e ω_τ (veja (4.37) pág. 101) e das convergências (4.81)-(4.83), o que encerra a primeira parte da prova do teorema **B**.

Prova do teorema B: identificação da solução

Faremos agora a identificação da solução para a equação do campo de fases, i.e., provaremos agora que $\eta \in \alpha(\omega_t)$ de acordo com as hipóteses adicionais do teorema **B**. A diferença é que aqui explicitaremos a constante κ de modo que para cairmos nas hipóteses adicionais, bastará supormos $\kappa = 0$. Como pode ser notado, nenhuma das estimativas de energia ou convergências provadas anteriormente dependem de κ. De fato, caso $0 < \kappa \leq 1$ as provas que foram exibidas continuam válidas e se $\kappa = 0$, algumas das demonstrações que fizemos tornam-se até mais simples. A maior diferença entre os dois casos é que em um deles não precisamos nos preocupar com a interação entre o grafo α e a convecção.

Quanto as restrições no parâmetro q associado ao operador degenerado da equação da fase, temos observado que as estimativas anteriores obtidas são insuficientes para aplicarmos as técnicas de monotonia conhecidas para obtermos solução com identificação.

A grande dificuldade aqui é a de ampliar a classe das funções teste das equações aproximadas de $W^{1,q}$ para $W^{1,2}$, pois precisaremos multiplicar a equação do campo de fases por ω_t, que em princípio não possui a regularidade necessária. Observemos que nas equações (4.16), pág. 94 e (4.36), pág. 101, as únicas dificuldades para tal extensão seriam os q-laplacianos, mais precisamente o grau de integrabilidade de $|\nabla \omega_i|^{q-2} \nabla \omega_i$ e

$|\nabla\omega_\tau|^{q-2}\nabla\omega_\tau$. Basicamente é aqui que serão usadas as hipóteses sobre N, q e que estão relacionadas com a imersão

$$W^{1+2/q-\epsilon,q} \hookrightarrow\hookrightarrow W^{1,2q-2},$$

para algum $\epsilon > 0$ pequeno.

Mais ainda, a presença do q-laplaciano na equação do campo de fases complica substancialmente a obtenção de estimativas de energia para α_τ que sejam independentes de τ, necessárias para a identificação da solução. Mesmo sem a convecção, não podemos proceder como no capítulo 2. Não vale o argumento usado em (2.95)-(2.96), pág. 54, pois não temos uma propriedade do tipo $-(\Delta_q\omega + \Delta\omega)_t \in L^2(0,T;(W^{1,2})')$. Uma forma de contornarmos esse problema é que em algum sentido $\alpha(\omega_t) + \omega_t$ seja um 'bom multiplicador' para esta equação, o que **fez necessário considerarmos o caso** $\mu > 0$. Fazendo assim, conseguimos contornar essa dificuldade e obter uma identificação global no tempo no caso sem convecção ($\kappa = 0$).

Primeiramente vejamos que as hipóteses adicionais sobre q são suficientes para que tenhamos a imersão a qual nos referimos acima.

Lema 4.3.4. *Suponha que $2 \leq N \leq 4$ ou que $N = 5$ e $q < 6$. Então existe $\epsilon = \epsilon(N,q) > 0$ o qual*

$$W^{1+2/q-\epsilon,q} \hookrightarrow W^{1,2q-2}. \tag{4.117}$$

Dem. Pela proposição 1.3.8, pág. 17, temos

$$W^{1+2/q,q} \hookrightarrow W^{s_\epsilon,2q-2}.$$

para $s_\epsilon = 1 + 2/q - \epsilon - N(1/q - 1/(2q-2))$. Então basta encontrarmos $\epsilon > 0$ tal que $s_\epsilon \geq 1$, o que é equivalente a $N/(2q-2) \geq N/q - 2/q + \epsilon$. Dessa forma, é suficiente que

$$\frac{N}{2q-2} > \frac{N-2}{q},$$

ou equivalentemente

$$2N - 4 > q(N-4).$$

Assim, vemos que para $2 \leq N \leq 4$ não precisamos de restrições adicionais para que (4.117) seja válida e se $N = 5$, basta que $q < 6$ $\square$

Observação 4.3.5. *A razão para não considerarmos $N \geq 6$ é que nesse caso* (4.117) *só valeria para $q \leq N$, o que entra em conflito com a hipótese* **(B1)**.

Prosseguindo com a demonstração do teorema **B**, vejamos algumas estimativas de energia que ainda nos faltam.

Lema 4.3.6. *(Estimativas adicionais) Existe $C > 0$, que não depende de $\tau > 0$, o qual*

$$\|\alpha_\tau(\bar{\omega}'_\tau)\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C, \text{ se } \kappa = 0. \tag{4.118}$$

Dem. Consideremos o esquema discretizado da equação (4.15), pág. 94. Procedendo de forma análoga a que fizemos na prova do lema 4.3.2, pág. 105, consideraremos $i \geq 2$ e a diferença entre as equações (4.15) para i e $i-1$. No entanto, dessa vez o multiplicador escolhido será $\alpha_\tau(\omega_i/\tau - \omega_{i-1}/\tau) + (\omega_i - \omega_{i-1})/\tau$. Obtemos assim,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{1}{2}\left|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} + \alpha_\tau\left(\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right)\right|^2 - \frac{1}{2}\left|\frac{\omega_{i-1} - \omega_{i-2}}{\tau} + \alpha_\tau\left(\frac{\omega_{i-1} - \omega_{i-2}}{\tau}\right)\right|^2 \\
&+ \int_\Omega \left((\mu + |\nabla\omega_i|^{q-2})\nabla\omega_i - (\mu + |\nabla\omega_{i-1}|^{q-2})\nabla\omega_{i-1}\right) \cdot \left(\frac{\nabla\omega_i - \nabla\omega_{i-1}}{\tau}\right. \\
&\left. + \alpha'_\tau\left(\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right)\frac{\nabla\omega_i - \nabla\omega_{i-1}}{\tau}\right) \leq C\left(\tau\int_\Omega \left|\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\tau}\right|^2 + \left|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right|^2\right. \\
&\left. + \tau\int_\Omega \left|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} + \alpha_\tau\left(\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right)\right|^2\right)
\end{aligned} \tag{4.119}$$

Combinando (4.119) com o lema 1.2.7, pág. 14, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{1}{2}\left|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} + \alpha_\tau\left(\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right)\right|^2 - \frac{1}{2}\left|\frac{\omega_{i-1} - \omega_{i-2}}{\tau} + \alpha_\tau\left(\frac{\omega_{i-1} - \omega_{i-2}}{\tau}\right)\right|^2 \\
&+ \int_\Omega C\left(1 + \alpha'_\tau\left(\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right)\right)\frac{1}{\tau}\left|\nabla\omega_i - \nabla\omega_{i-1}\right|^q + \frac{1}{\tau}\left|\nabla\omega_i - \nabla\omega_{i-1}\right|^2 \\
&\leq C\left(\tau\int_\Omega \left|\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\tau}\right|^2 + \left|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right|^2 + \tau\int_\Omega \left|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} + \alpha_\tau\left(\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right)\right|^2\right)
\end{aligned}$$

Dessa forma, lembrando que $\alpha'_\lambda(.) \geq 0$, pois α_λ é monótona crescente e Lipschitz, e somando de $i = 2$ até $m \leq M$, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left|\frac{\omega_m - \omega_{m-1}}{\tau} + \alpha_\tau\left(\frac{\omega_m - \omega_{m-1}}{\tau}\right)\right|^2 \leq C + \int_\Omega \left|\frac{\omega_1 - \omega_0}{\tau} + \alpha_\tau\left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{\tau}\right)\right|^2 \\
&+ C\sum_{i=1}^m \tau\int_\Omega \left|\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} + \alpha_\tau\left(\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right)\right|^2,
\end{aligned} \tag{4.120}$$

onde usamos as desigualdades (4.38)-(4.40), pág. 101.

Paralelamente, de (4.16) para i=1, temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{\omega_1 - \omega_0}{\tau} + \alpha_\tau\left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{\tau}\right) - \mu\Delta\omega_1 + \mu\Delta\omega_0 - \Delta_q\omega_1 + \Delta_q\omega_0 \\
&= \theta_1 + f(\omega_1) + \mu\Delta\omega_0 + \Delta_q\omega_0 \text{ em } (W^{1,q})'.
\end{aligned}$$

Multiplicando a expressão acima por $(\omega_1-\omega_0)/\tau+\alpha_\tau(\omega_1/\tau-\omega_0/\tau)$, segue que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left|\frac{\omega_1-\omega_0}{\tau}+\alpha_\tau\left(\frac{\omega_1-\omega_0}{\tau}\right)\right|^2\le\int_\Omega\left[\left(\theta_1+f(\omega_1)+\mu\Delta\omega_0+\Delta_q\omega_0\right)\right.\\&\left.\left(\frac{\omega_1-\omega_0}{\tau}+\alpha_\tau\left(\frac{\omega_1-\omega_0}{\tau}\right)\right)\right].\end{aligned}\tag{4.121}$$

Para obtermos a desigualdade (4.121), usamos que $\alpha'_\tau(.)\ge 0$ e que

$$\begin{aligned}&\left\langle-\mu\Delta\omega_1+\mu\Delta\omega_0-\Delta_q\omega_1+\Delta_q\omega_0,\frac{\omega_1-\omega_0}{\tau}+\alpha_\tau\left(\frac{\omega_1-\omega_0}{\tau}\right)\right\rangle\\&=\int_\Omega\left(\left(1+|\nabla\omega_1|^{q-2}\right)\nabla\omega_1-\left(1+|\nabla\omega_0|^{q-2}\right)\nabla\omega_0\right)\cdot\left(\frac{\nabla\omega_1-\nabla\omega_0}{\tau}+\right.\\&\left.\alpha'_\tau\left(\frac{\omega_1-\omega_0}{\tau}\right)\frac{\nabla\omega_1-\nabla\omega_0}{\tau}\right)\\&\ge C\int_\Omega\frac{|\nabla\omega_1-\nabla\omega_0|^2}{\tau}+\frac{|\nabla\omega_1-\nabla\omega_0|^q}{\tau}\ge 0,\end{aligned}$$

pelo lema 1.2.7, pág. 14.

Para controlarmos os termos da direita em (4.121), basta notarmos que

$$-\mu\Delta\omega_0+\Delta_q\omega_0\in L^2,$$

pela hipótese **(B5)** e pelo fato de que $q>N$ e daí, usarmos a desigualdade de Hölder mais a hipótese **(B1)**. Assim, segue de (4.121) que para $\epsilon>0$ suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left|\frac{\omega_1-\omega_0}{\tau}+\alpha_\tau\left(\frac{\omega_1-\omega_0}{\tau}\right)\right|^2&\le C\int_\Omega|\theta_1|^2+|\omega_1|^2+C\|\omega_0\|^q_{W^{2,q}}+C\\&\le C,\end{aligned}\tag{4.122}$$

pelas desigualdades (4.47), pág. 103 e (4.38), pág. 101 (nessa ordem).

Obtemos por (4.120)-(4.122) que

$$\|\bar\omega'_\tau+\alpha_\tau(\bar\omega'_\tau)\|^2_{L^2}\le C\left(1+\int_0^t\|\bar\omega'_\tau+\alpha_\tau(\bar\omega'_\tau)\|^2_{L^2}\right),$$

de modo que pelo lema de Gronwall

$$\|\bar\omega'_\tau+\alpha_\tau(\bar\omega'_\tau)\|_{L^\infty(0,T;L^2)}\le C.\tag{4.123}$$

Agora, observa-se que da monotonicidade de α_τ e de (4.123) segue que

$$\|\alpha_\tau(\bar\omega'_\tau)\|_{L^\infty(0,T;L^2)}\le C,$$

pois $\alpha_\tau(\bar\omega'_\tau)\bar\omega'_\tau\ge 0$. $\square$

Observação 4.3.7. *Aqui cabe uma observação importante. A forma com que obtemos a estimativa* (4.118) *é original e difere em dois sentidos da obtida por Bonfanti et al. em [11]. De fato, além darmos justificativas precisas (compare com Bonfanti et al. [11], pág. 18, eqs. (4.20)-(4.24)), como já fizemos no capítulo 2, tivemos que mudar mais um pouco a forma de obtermos estimativas uniformes para $\alpha_\tau(\bar{\omega}'_\tau)$ devido a presença do operador q-laplaciano na equação do campo de fases.*

Continuando, vejamos mais algumas estivativas necessárias.

Lema 4.3.8. *Existe $C > 0$, que não depende de $\tau > 0$, o qual*

$$\|\omega_\tau\|^q_{L^p(0,T;\mathcal{N}^{1+2/q,q})} + \|\omega_\tau\|^2_{L^2(0,T;W^{2,2})} \leq C \tag{4.124}$$

Dem.

Observe que da equação (4.16), temos que ω_i para $i = 1...M$, satisfaz

$$\omega_i - \mu\Delta\omega_i - \Delta_q\omega_i + \kappa u_i \cdot \nabla\omega_i = \tilde{f}_i,$$

onde M é tal que $M\tau = T$ e

$$\tilde{f}_i = \omega_i + \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau} + \alpha_\tau\left(\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\tau}\right) + \theta_i + f(\omega_i).$$

Segue do lema 3.2.6 item b), pág. 78 que $\omega_i \in \mathcal{N}^{1+2/q,q}$ e que

$$\|\omega_\tau\|^q_{W^{1,q}} + \|\omega_\tau\|^2_{W^{2,2}} + \|\omega_\tau\|^q_{\mathcal{N}^{1+2/r,r}} \leq \|\tilde{f}_i\|^2_{L^2}. \tag{4.125}$$

Então, combinando-se (4.118) e (4.125) obtemos as estimativas

$$\begin{aligned} \|\omega_\tau\|^q_{\mathcal{N}^{1+2/q,q}} + \|\omega_\tau\|^2_{W^{2,2}} &\leq C \text{ em } [0,T] \text{ e então,} \\ \|\omega_\tau\|^q_{L^p(0,T;\mathcal{N}^{1+2/q,q})} + \|\omega_\tau\|^2_{L^2(0,T;W^{2,2})} &\leq C \end{aligned}$$

onde $C > 0$ não depende de $\tau > 0$. □

Com os lemas 4.3.6 e 4.3.8, conseguiremos as convergências, necessárias para a identificação da solução.

Corolário 4.3.9. *Sejam ω e η dados pela proposição 4.3.3, pág. 110. Nas hipóteses adicionais do teorema* **B** *vale que*

$$\omega \in L^q(0,T;\mathcal{N}^{1+2/q,q}) \cap L^2(0,T;W^{2,2}) \text{ e } \eta \in L^\infty(0,T;L^2).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \alpha_\tau(\bar{\omega}'_\tau) &\overset{*}{\rightharpoonup} \eta \text{ em } L^\infty(0,T;L^2) \text{ se } \tau \to 0, &(4.126)\\ \omega_\tau &\to \omega \text{ em } L^q(0,T;W^{1,q}) \text{ se } \tau \to 0, &(4.127)\\ \omega_\tau &\rightharpoonup \omega \text{ em } L^2(0,T;W^{2,2}) \text{ se } \tau \to 0,\\ \omega_\tau &\rightharpoonup \omega \text{ em } L^q(0,T;W^{1,2q-2}) \text{ se } \tau \to 0. \end{aligned}$$

Em particular, na equação (4.116) *podemos tomar $\xi \in L^2(0,T;W^{1,2})$.*

Dem.

Claramente, (4.126) é consequência direta do lema (4.3.6).

Prosseguindo, note que da desigualdade (4.124) segue que

$$\omega_\tau \rightharpoonup \omega \text{ em } L^2(0,T;W^{2,2}) \cap L^q(0,T;\mathcal{N}^{1+2/q,q}); \tag{4.128}$$

Mais ainda, como $\mathcal{N}^{1+2/q,q} \hookrightarrow\hookrightarrow W^{1,q} \hookrightarrow W^{1,2}$, usando (4.90) e o lema de Aubin-Lions (teorema 1.5.1, pág. 29) temos que

$$\begin{aligned} \omega_\tau &\to \omega \text{ em } L^q(0,T;\mathcal{N}^{1+2/q,q}) \text{ se } \tau \to 0, \\ \omega_\tau &\rightharpoonup \omega \text{ em } L^2(0,T;W^{2,2}) \text{ se } \tau \to 0. \end{aligned}$$

Pela proposição 1.3.8, pág. 17 temos que

$$\mathcal{N}^{1+2/q,q} \hookrightarrow W^{1+2/q-\epsilon,q}, \tag{4.129}$$

para todo $\epsilon > 0$. Então combinando o lema 4.3.4 com (4.129) temos que

$$\mathcal{N}^{1+2/q,q} \hookrightarrow W^{1,2q-2}. \tag{4.130}$$

Assim, provamos (4.127).

Agora, em virtude de (4.130) temos que $|\nabla\omega_i|^{q-1} \in L^2$ e que $|\nabla\omega_\tau|^{q-1} \in L^2(0,T;L^2)$. Em particular o mesmo vale para $|\nabla\omega_i|^{q-2}\nabla\omega_i$ e $|\nabla\omega_\tau|^{q-2}\nabla\omega_\tau$. Dessa forma, nas equações (4.16) e (4.36) **podemos trocar** $(W^{1,q})'$ **por** $(W^{1,2})'$, como queríamos.

Assim, usando (4.127) provamos que

$$\omega \in L^q(0,T;W^{1,2q-2}) \Rightarrow |\nabla\omega|^{q-2}\nabla\omega \in L^2(0,T;L^2).$$

Dessa forma, argumentando-se por densidade prova-se que a equação (4.116) vale para $\xi \in L^2(0,T;W^{1,2})$. □

Faremos agora a parte final da prova da identificação; mostraremos enfim que

$$\eta \in \alpha(\omega_t) \quad \subset \quad L^2(0,T;L^2).$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \limsup_{\tau\to 0} -\int_0^T \int_\Omega |\bar{\omega}_\tau'|^2 &\leq -\int_0^T \int_\Omega \omega_t^2 \text{ por (4.89)} \\ \int_0^T \int_\Omega \mu\nabla\omega_\tau \cdot \nabla\bar{\omega}_\tau' &\to \int_0^T \int_\Omega \mu\nabla\omega \cdot \nabla\omega_t \text{ por (4.83) e (4.89), pág. 110.} \end{aligned} \tag{4.131}$$

Mais ainda, usando-se novamente (4.89) e (4.127) prova-se que

$$\limsup_{\tau\to 0} -\int_0^T \int_\Omega |\nabla\omega_\tau|^{q-2}\nabla\omega_\tau \cdot \nabla\bar{\omega}_\tau' = \int_0^T \int_\Omega |\nabla\omega|^{q-2}\nabla\omega \cdot \nabla\omega_t \tag{4.132}$$

Combinado-se (4.131)-(4.132) temos que

$$\limsup_{\tau\to 0}\int_0^T\int_\Omega \alpha_\tau(\bar{\omega}'_\tau)\bar{\omega}'_\tau \leq \int_0^T\int_\Omega (f(\omega)+\theta)\omega_t - \int_0^T\int_\Omega \omega_t^2 \tag{4.133}$$
$$-\int_0^T\int_\Omega \nabla\omega\cdot\nabla\omega_t - \int_0^T\int_\Omega |\nabla\omega|^{q-2}\nabla\omega\cdot\nabla\omega_t.$$

Entretanto, como vimos, a equação (4.116) vale para $\xi \in L^2(0,T;W^{1,2})$ e assim fixando mais uma vez $\xi = \omega_t$ temos que

$$\int_0^T\int_\Omega \eta\omega_t = \int_0^T\int_\Omega (f(\omega)+\theta)\omega_t - \int_0^T\int_\Omega \omega_t^2 - \int_0^T\int_\Omega \nabla\omega\cdot\nabla\omega_t \tag{4.134}$$
$$-\int_0^T\int_\Omega |\nabla\omega|^{q-2}\nabla\omega\cdot\nabla\omega_t.$$

Dessa forma, por (4.133) e (4.134) concluímos que

$$\limsup_{\tau\to 0}\int_0^T\int_\Omega \alpha_\tau(\bar{\omega}'_\tau)\bar{\omega}'_\tau \leq \int_0^T\int_\Omega \eta\omega_t. \tag{4.135}$$

Agora, considerando $\gamma_\tau(.)$ e $\gamma(.)$ exatamente como fizemos no final da prova do teorema A mostra-se que $\omega_t \in \gamma(\eta)$ em $L^2(0,T;L^2)$ e portanto

$$\eta \in \alpha(\omega_t) \text{ em } L^2(0,T;L^2).$$

$\square$

CAPÍTULO 5

APÊNDICE

Para a conveniência do leitor, mostraremos aqui alguns resultados corriqueiros que usamos durante o texto os quais não achamos compatíveis com o espírito do capítulo de preliminares.

5.1 Desigualdades Discretas

Exibiremos aqui duas variantes de uma desigualdade muito conhecida e utilizada no contexto de equações diferenciais: o lema de Gronwall. Salientamos que o primeiro resultado é encontrado na literatura, enquanto não conseguimos encontar o segundo, embora seja bem provável que ele não seja inédito. Entretando, as duas demonstrações que faremos são originais.

Lema 5.1.1. *Sejam $\tau > 0$, $M \in \mathbb{N}$ e $1 \leq m \leq M$, tais que $M\tau = T$ e $0 < \tau < 1/2$. Considere $f_1, ..., f_M \in E$ e defina $f : [0, T] \to E$ onde $f(t) = f_m$ se $(m-1)\tau \leq t \leq m\tau$. Suponha que exista $C > 0$ tal que para cada $m \leq M$*

$$\|f_m\|_E^p \leq C + \sum_{i=1}^{m} \tau \|f_i\|_E^p$$

para $1 \leq p < +\infty$. Então

$$\|f(t)\|_E^p \leq 2C(e^{2T}), 0 \leq t \leq T.$$

Dem. Veja que dado $t \in [0, T]$ existe m tal que $(m-1)\tau \leq t \leq m\tau$. Então,

$$\begin{aligned} \|f(t)\|_E^p = \|f_m\|_E^p &\leq C + \sum_{i=1}^{m} \tau \|f_m\|_E^p \\ &= C + \int_0^t \|f(s)\|_E^p ds + \frac{1}{2}\|f_m\|_E^p, \end{aligned}$$

pois

$$\int_t^{m\tau} \|f(s)\|_E^p ds \leq \tau \|f_m\|_E^p \leq \frac{1}{2}\|f_m\|_E^p.$$

Dessa forma,

$$\|f(t)\|_E^p \leq 2C + 2\int_0^t \|f(s)\|_E^p ds$$

e o resultado segue pelo lema de Gronwall usual. □

Lema 5.1.2. *Nas mesmas condições do lema anterior, considere B um espaço de Banach, elementos $a_1, ..., a_M \in B$. Suponha que exista $C > 0$ tal que $\sum_{m=1}^M a_i \leq C < +\infty$ e que para cada $m \leq M$*

$$\|f_m\|_E^p \leq C_1 + \sum_{i=1}^m \tau \|a_i\|_B^q \|f_i\|_E^p$$

para $1 \leq p, q < +\infty$.

Então existe $\hat{\delta} = \hat{\delta}(a) > 0$ tal que se $0 < \tau < \hat{\delta}$ segue que

$$\|f(t)\|_E^p \leq 2C_1 e^{2C}, 0 \leq t \leq T.$$

Dem. Em primeiro lugar, defina $a : [0, T] \to B$ onde $a(t) = a_m$ se $(m-1)\tau < t \leq m\tau$. Então, segue que

$$\int_0^T \|a(s)\|_B^q ds = \sum_{m=1}^M a_i \leq C < +\infty$$

Por outro lado, um resultado básico da teoria de medida nos fornece $\hat{\delta} = \hat{\delta}(a) > 0$ tal que se $I \subset [0, T]$ e $|I| < \hat{\delta}$ então

$$\int_I \|a(s)\|_B^q ds < \frac{1}{2}.$$

Agora, seja $0 < \delta < \hat{\delta}$. Temos para $t \in \big((m-1)\tau, m\tau\big)$ que

$$\begin{aligned}
\|f(t)\|_E^p = \|f_m\|_E^p &\leq C_1 + \int_0^t \|a(s)\|_B^q \|f(s)\|_E^p + \int_t^{m\tau} \|a(s)\|_B^q \|f(s)\|_E^p \\
&\leq C_1 + \int_0^t \|a(s)\|_B^q \|f(s)\|_E^p + \|f_m\|_B^p \int_t^{m\tau} \|a(s)\|_B^q ds \\
&\leq C_1 + \int_0^t \|a(s)\|_B^q \|f(s)\|_E^p + \frac{1}{2}\|f_m\|_B^p,
\end{aligned}$$

pois $|[t, m\tau]| < \hat{\delta}$. Consequentemente, já que $\|f(t)\|_E^p = \|f_m\|_E^p$ segue que

$$\|f(t)\|_E^p \leq 2C_1 + 2\int_0^t \|a(s)\|_B^q \|f(s)\|_E^p$$

e o resultado segue pelo lema de Gronwall usual. □

5.2 Funcões solenoidais

Por completude da tese e para facilitarmos o entendimento do leitor, decidimos fazer uma breve discussão sobre os espaços de funções com divergência nula. Definimos $\mathcal{S}$, espaço das funcões solenoidais suaves com suporte compacto em Ω, como

$$\mathcal{S} = \{\psi \in C_0^\infty : div\psi = 0\}.$$

Considerando o fecho de $\mathcal{S}$ nas topologias 'corretas', definimos outros dois espaços:

- H_q, fecho das funções solenoidais em L^q, onde denotamos por H se $q = 2$;
- V, fecho das funções solenoidais em $W^{1,2}$.

A seguir, provaremos uma propriedade importante que foi explorada de forma direta e indireta durante nosso trabalho.

Lema 5.2.1. *Suponha que* $u \in H_r$, $\phi \in (W^{1,p})^N$ *com*

$$2 \leq r < +\infty, 2 \leq p \leq +\infty \text{ e } \frac{1}{r} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} \leq 1. \tag{5.1}$$

Então

$$\int_\Omega (u \cdot \nabla)\phi \cdot \phi = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega u_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \phi_j = 0.$$

Em particular, se $\omega \in W^{1,p}$ *então*

$$\int_\Omega u \cdot \nabla \omega \omega = 0.$$

Dem. Suponha inicialmente que $u \in \mathcal{S}$. Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega u_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \phi_j &= \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega u_i \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_j^2}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i \phi_j^2) - \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \phi_j^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2}(u_i \phi_j^2)\nu_i = 0.
\end{aligned}$$

Para o caso em que $u \in H_r$ basta usar (5.1) e a densidade de $\mathcal{S}$ nesse espaço. □

Uma consequência direta do lema acima é a seguinte fórmula de integração por partes:

Corolário 5.2.2. *Nas mesmas hipóteses do lema 5.2.1 vale que*

$$\int_\Omega (u \cdot \nabla)\phi \cdot \psi = -\int_\Omega (u \cdot \nabla)\psi \cdot \phi, \ \forall \phi \text{ e } \psi \in (W^{1,p})^N. \tag{5.2}$$

Referências Bibliográficas

[1] ASO M., FRÉMOND, M. E KENMOCHI, N., *Parabolic systems with the unknown dependent constraints arising in ph. trans.*, Inter.Ser.Num.Math., vol **154**, 45-50 (2007).

[2] BARBU, V., *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces.*, Noordhoff, Leyden (1976).

[3] BELLOUT, H. *On a special Schauder basis for the Sobolev spaces $W_0^{1,p}$* Ill. Jour. Math., **39**(2), 187-195 (1995).

[4] BESOV, O.V., IL'IN, V.P. E NIKOL'SKII, S.M., *Integral representations of functions and imbedding Theorems: vol. 1 e 2*, John Wiley& Sons , New York (1978).

[5] BLANC, PH., GASSER, L. E RAPPAZ, J., *Existence for a stationary model of binary alloy solidification*, Math.Mod. and Num. Anal., **29**(6), 687-699 (1995).

[6] BOLDRINI, J.L., DE MIRANDA, L.H. E PLANAS, G., *On singular Navier-Stokes equations and irreversible phase-transitions*, Preprint(2010).

[7] BOLDRINI, J.L. E PLANAS, G., *A tridimensional phase-field model with convection for change phase of an alloy*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **13**(2), 429-450 (2005).

[8] BOLDRINI, J.L. E PLANAS, G., *Some thoughts on mathematical modeling of solidification and melting*, Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, **41**, 77-90 (2007).

[9] BOLDRINI, J.L., L.H., DE MIRANDA, LPLANAS, G., *On the regularity of quasilinear inclusion*, Preprint(2011).

[10] E. BONETTI, *Global solution to a nonlinear phase transition model with dissipation*, Adv. Math. Sci. Appl. **12** (2002) 355–376.

[11] BONFANTI, G., FRÉMOND, M. E LUTEROTTI, F., *Global solution to a nonlinear system for irreversible phase changes*, Adv. Math. sci. Appl., **10**, 1-24 (2000).

[12] BREZIS, H., *Analyse fonctionnelle: Théorie et applications*, Massom, Paris (1987).

[13] BREZIS, H., *Opératours maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Math. Studies, **5**, Amsterdan (1973).

[14] BREZIS, H. E EVANS, L.C., *A variational inequality approach to the Belmann-Dirichlet equation for two elliptic operators*, ARMA , **71**, 1-13 (1979).

[15] CAGINALP, G. E XIE, W., *Phase-field and sharp-interface alloys models*, Phys. Rev. E, **48**, 1897-1909 (1993).

[16] CIANCHI, A. E MAZ'YA, V.G., *Global Lipschitz Regularity for a Class of Quasilinear Elliptic Equations*, Comm. Partial Differential Equations **36**, 1, 100-133 (2011).

[17] COLLI, P., LUTEROTTI, F., SCHIMPERNA, G. E STEFANELLI, U., *Global existence for a class of generalized systems for irreversible phase changes*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 9 (2002), 255–276.

[18] DE MIRANDA, L.H., *On the eigenfunctions of the laplacian, Sobolev spaces and fractional regularity for degenerate equations*, preprint (2011).

[19] DIBENEDETTO, E., *Degenerate parabolic equations*, Springer-Verlag, New York (1993).

[20] EBMEYER, C., *Global regularity in Sobolev spaces for elliptic problems with p-structure on bounded domains*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **61**, 81-89 (2005).

[21] EBMEYER, C., LIU, WB. E STEINHAUER, M., *Global regularity in fractional order Sobolev spaces for the p-Laplace equation on polyhedral domains*, Zeit. Anal. Anwend., **24**, 353-374 (2005).

[22] EVANS, L.C., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, 2002.

[23] FRÉMOND, M., *Non-Smooth Thermo-Mechanics*, Springer-Verlag , Berlin (2002).

[24] FUČIK, S., JOHN, O. E NEČAS, J., *On the existence of Schauder basis in Sobolev spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin., **13**, 163-175 (1972).

[25] GIRAULT, V. E RAVIART, P.-A., *Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms.* Springer-Verlag, **5**, Berlin (1986).

[26] GRISVARD, P., *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman Advanced Pub. Program, Boston(1985).

[27] HOFFMANN, K.-H. E JIANG, L., *Optimal control of a phase field model for solidification*, Numer. Funct. Anal. and Optim., **13**, 11-27 (1992).

[28] KNEES, D., *Global stress regularity of convex and some nonconvex variational problems*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, **187**, 157-184 (2008).

[29] KOSHELEV, A., *Regularity problem for quasilinear elliptic and parabolic systems* Springer, Lecture notes in mathematics, **1614**, Berlin (1995).

[30] KUFNER, A., JOHN, O. E FUČIK, S., *Function Spaces*, Noordhoff, Academia, Leyden (1977).

[31] LADYZHENSKAYA, O.A. E URAL'TSEVA, N., *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York (1968).

[32] LAURENÇOT, P., SCHIMPERMA, G. E STEFANELLI, U., *Global existence of a strong solution to the one-dimensional full model for irreversible phase transitions*, J. Math. Anal. Appl. **271** (2002) 426–442.

[33] LERAY J. E SCHAUDER J., *Topologie et èquations fonctionelles*, Ann. Ec. N. Sup., 51, 45-78(1934).

[34] LIONS, J.L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaries*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1969).

[35] LIONS, J.L. E MAGENES, R., *Problemi ai limiti non omogenei (III)* , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **15** 1, 41-103 (1961).

[36] LIONS, J.L. E MAGENES, R., *Problèmes aux limites non homogènes (IV)*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **15** 4, 311-326 (1961).

[37] LIONS, J.L. E MAGENES, R., *Problemi ai limiti non omogenei (V)*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **15** 4, 1-44 (1962).

[38] LUTEROTTI, F., SCHIMPERMA, G. E STEFANELLI, U., *Global solution to a phase field model with irreversible and constrained phase evolution*, Quart. Appl. Math. **60**(2002) 301–316.

[39] NIKOL'SKII, S.M., *Inequalities for entire functions of finite degree and their application to the theory of differentiable functions of several variables*, Trudy Mat. Inst. Steklov, **38**, 244-278 (1951). Transl. Amer. Math. Soc. Transl. ser 2, **80**, 38-118 (1969).

[40] NIKOL'SKII, S.M., *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, Springer-Verlag, New York (1975).

[41] O'REGAN, D., Y.J., CHO E CHEN, Y.Q., *Topological degree theory and applications*, Series in Mathematical Analysis and Applications, vol.10, Taylor & Francis Group, LLC(2006).

[42] PLANAS, G. E BOLDRINI, J.L., *A bidimensional phase-field model with convection for change phase of an alloy*, J. Math. Anal. Appl., **302**(2), 669-687 (2005).

[43] SCHECHTER, M., *On L^P estimates and regularity*, Amer. J. Math, **85** , 1-13 (1963).

[44] SIMADER, C.G., *On Dirichlet's Boundary Value Problem*, Springer-Verlag, Berlin (1972).

[45] SIMON, J., *Compact sets in the space $L^p(0,t;B)$*, Ann. Mat. Pura Appl., **146**, 65-96 (1987).

[46] SLOBODECKII, L.N., *Sobolev's spaces of fractional order and their application to boundary problems for partial differential equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **118** (2), 243-246 (1958)(em Russo).

[47] STAMPACHIA, G., *Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Seminaire de Mathematiques Superieures, no. 16, Presses de l'Université de Montréal (1966).

[48] STRUWE, M., *Variational methods: applications to nonlinear analysis and Hamiltonian systems*, Springer, Berlin, 4 ed. (2008).

[49] TEMAM, R., *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*, AMS Chelsea Publishing, Rhode Island (2001).

[50] TOLKSDORF, P., *Everywhere regularity for some quasilinear systems with lack of ellipticity*, Ann. Mat. Pura Appl., **134**, 241-266 (1983).