

DISTRIBUICAO EXATA PARA ESTRUTURA DE
SIMETRIA COMPOSTA DO TIPO II

LUIZ CARLOS BENINI



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

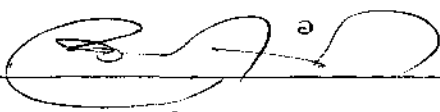
F/UNICAMP
3437d

5756

...DISTRIBUIÇÃO EXATA PARA ESTRUTURA DE
SIMETRIA COMPOSTA DO TIPO II

Este exemplar corresponde a redação da tese defendida pelo Sr. Luiz Carlos Benini e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, de de 1984.


Prof. Dr. JOSÉ ANTONIO CORDEIRO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

JUNHO/1984.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Aos meus pais

e à Joalice.

A G R A D E C I M E N T O S

Externo meus agradecimentos ao Prof. José A. Cordeiro, pela dedicada orientação durante o trabalho.

A CAPES pela Bolsa de Estudos a mim concedida, para a realização de meus estudos de Mestrado.

Aos meus pais Luiz e Maria, e à Joalice, pelo carinho, compreensão e dedicado amor que sempre me tiveram.

Ao Prof. Rathie pelas sugestões dadas durante a realização do trabalho.

Ao Paulo "Niterói", pelo encorajamento e auxílio que me tem dispensado.

Àqueles que me deram afetuosa acolhida em Campinas, e com os quais mantive uma convivência sempre alegre e agradável.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO I - A ESTRUTURA DE SIMETRIA COMPOSTA DO TIPO II.....	6
1.1. Introdução.....	6
1.2. O Problema, a Hipótese e os Momentos.....	10
CAPÍTULO II - DISTRIBUIÇÃO DE $\bar{L}(vc)$ EM TERMOS DA FUNÇÃO G-DE-MEIJER.....	14
2.1. Introdução.....	14
2.2. Função Densidade de $\bar{L}(vc)$ em Termos da Função - G.....	16
CAPÍTULO III - DISTRIBUIÇÃO EXATA DO CRITÉRIO $\bar{L}(vc)$ EM SÉRIES COMPUTÁVEIS..	22
3.1. Introdução.....	22
3.2. Distribuição Exata de $\bar{L}(vc)$ para $h=4$ e $n=2$	23
3.3. Distribuição Exata de $\bar{L}(vc)$ para $h=4$ e $n>2$	29
APÊNDICE	
A - A TRANSFORMADA DE MELLIN.....	58
B - FUNÇÕES ESPECIAIS.....	59
B.1. Função Gama.....	59
B.2. Função Psi.....	61
B.3. Função Zeta de Riemann Generalizada.....	62
C - A FUNÇÃO G-DE-MEIJER.....	63
REFERÊNCIAS.....	66

R E S U M O

Neste trabalho, utilizando as transformadas direta e inversa de Mellin e com a aplicação do teorema dos resíduos, determinamos a distribuição exata do critério de Wilks para o teste de hipótese de estrutura de simetria composta do tipo II para a matriz de covariâncias de uma população normal multivariada de t co-variáveis ($t = nh$, onde h é o número de características medidas na população de interesse e $n \geq 2$ é o número de vezes em que estas características são medidas ao longo do tempo), com base em uma amostra de qualquer tamanho, digamos, N .

Wilks (1946) determinou critérios amostrais para testar hipóteses de simetria completa em uma distribuição normal multivariada.

Votaw (1948) produziu o critério amostral para testar a hipótese de simetria composta, pelo desenvolvimento do método da razão da verossimilhança de Neymann-Pearson e, bem como o seu respectivo momento.

No capítulo I, é introduzido o conceito de simetria completa e o de simetria composta do tipo II.

No capítulo II, a partir dos momentos determinados por Votaw, escrevemos a função densidade do critério em termos da função G-de-Meijer, na forma geral, para o caso em que o número de característica é $h = 4$.

No capítulo III, tratamos em calcular a distribuição exata

do critério de Votaw para o teste de estrutura de simetria composta do tipo II (médias quaisquer) da matriz de covariâncias de uma população normal multivariada.

No final do trabalho, são apresentados três apêndices; um sobre a transformada de Mellin, outro sobre a função G-de-Meijer e um outro sobre funções especiais: gama, psi e zeta-deRiemann.

I N T R O D U Ç Ã O

No estudo de distribuições de probabilidade de variáveis aleatórias e bem como de suas transformações, diversas são as técnicas utilizadas dentre aquelas que se ocupam dessa área, e estas se complementam, servindo-se cada uma delas de melhor ou pior instrumento para a solução de problemas de um dado tipo específico.

Correntemente, na determinação de distribuições de transformações um-a-um de variáveis aleatórias contínuas, fazemos uso do método direto, isto é, pela determinação da transformada inversa e de seu jacobiano (vide Anderson, pg. 10). Na aplicação deste método, surge o problema de nos depararmos com integrais de difíceis resoluções e nem sempre é possível utilizarmos métodos numéricos para determiná-las.

Uma outra técnica, para se determinar a distribuição de probabilidade de variáveis aleatórias, é através da função geradora dos momentos, que é a transformada de Laplace bilateral. Esta é suficiente para o estudo de distribuições assintóticas, somas de variáveis aleatórias, como exemplo, para a classe de distribuições que a possuem. Porém, esta técnica, pode tornar-se inviável no estudo das distribuições de probabilidade, pois a transformada de Laplace apresenta a inconveniência de nem sempre existir.

Outra técnica, estreitamente relacionada com a função geradora de momentos, é a função característica, que é transformada de Fourier da função densidade de probabilidade. Como o núcleo desta

transformada é limitado, a integral da densidade converge absolutamente e então, esta sempre existe, o que a coloca em vantagem com relação à transformada de Laplace.

Em estudos de distribuições limites e exatas de somas de variáveis aleatórias independentes, a função característica é uma excelente ferramenta, pois a função característica da soma dessas é o produto das respectivas funções características (vide Lukacs (1970), pg. 37).

Vários são os pesquisadores que têm se ocupado no estudo de somas de variáveis aleatórias, e muito pouco destaque têm dado ao estudo de problemas de produtos dessas, e estes sempre aparecem com muita frequência em aplicações estatísticas, como por exemplo, em problemas de determinação de distribuições de determinantes de matrizes aleatórias com entradas independentes (vide Cordeiro (1980), pg. 2).

As técnicas da função característica ainda são aplicáveis, quando as variáveis-produtos são todas positivas, pois o logaritmo transforma o problema do produto no da soma, mas se as variáveis assumem valores negativos isso já não é possível, onde, então, a transformada de Mellin aparece com muita utilidade para a solução de problemas deste gênero.

Como a transformada de Laplace, a transformada de Mellin também é uma função complexa a argumentos complexos e tem, com a transformada de Fourier, a vantagem de possuir uma relação biunívoca entre ela e as distribuições que a definem.

A afirmação acima, decorre do resultado

I.1 - Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções densidade de probabilidade para $0 < x < \infty$, $F(s)$ e $G(s)$ transformadas de Mellin de $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente, e, Ω_f e Ω_g conjuntos de convergência de $F(s)$ e $G(s)$, respectivamente. Se $F(s) = G(s)$ em $\Omega_f \cap \Omega_g \neq \emptyset$, então as distribuições de probabilidade, com densidade f e g , coincidem (Cordeiro, 1980).

É sabido que os momentos não definem uma distribuição de probabilidade (vide p.e., Gnedenko (1978), pg. 189), contudo, esta dificuldade é superada com a existência da transformada de Mellin da densidade de uma variável aleatória X ,

$$M\{f(x)\}(s) = E(X^{s-1})$$

suposta antecipadamente em uma faixa paralela ao eixo imaginário, do plano complexo, $\sigma_1 < \text{Re}(s) < \sigma_2$, e, por I.1, esta transformada define a distribuição de probabilidade.

Com isso posto e mais a transformada inversa, podemos ver a importância da transformada de Mellin na Estatística para resolução de problemas na área das distribuições multivariadas.

Para o trabalho a que nos propusemos apresentar, utilizamos a transformada de Mellin e sua fórmula de inversão para, a partir dos momentos calculados por Votaw (1948) para o critério da razão da verossimilhança do teste para a simetria composta do tipo II da matriz de covariâncias de uma população normal multivariada, determinamos a função densidade de probabilidade do critério.

Dividimos o trabalho em três capítulos.

No capítulo I, apresentamos o conceito de simetria completa e de simetria composta do tipo II, a hipótese da qual nos ocuparemos; definimos a estrutura de simetria composta do tipo II para uma população normal multivariada e damos os momentos calculados por Votaw.

No capítulo II, usando a transformada de Mellin e sua fórmula de inversão, damos a função densidade de probabilidade do critério da razão da verossimilhança, e escrevêmo-la na forma da função G-de-Meijer, para o caso geral, quando o número de características é igual a quatro.

No capítulo III, calculamos, pela aplicação do teorema dos resíduos, a função densidade do critério, na forma de séries computáveis de funções logarítmicas com coeficientes em termos das funções ψ e zeta de Riemann. Este capítulo, foi dividido em duas secções, e os resultados principais são apresentados em forma de teoremas, que nos dão as funções densidade para os diversos casos em estudo e as suas respectivas funções distribuições dadas por uma integração imediata, comprovado pelo resultado (Mathai e Saxena (1973), pg. 191).

I.2 - Sejam $\alpha > 0$, k inteiro positivo e $0 < u < 1$. Então

$$\int_0^x u^\alpha (-\log u)^{k-1} du = x^{\alpha+1} \sum_{r=1}^k \{k(k-1)\dots(k-r+1)/(k(\alpha+1)^r\} \cdot (-\log x)^{k-r}.$$

Apresentamos também no final do trabalho três apêndices; um

sobre a transformada de Mellin na qual apresentamos a sua definição e da sua transformada inversa, outro sobre as funções especiais: gama, psi e zeta-de-Riemann, e a relação que as associam , e um outro sobre a função G-de-Meijer.

CAPÍTULO I

A ESTRUTURA DE SIMETRIA COMPOSTA DO TIPO II

Neste capítulo introduzimos o conceito de simetria completa e o de simetria composta do tipo II, e apresentamos o problema de que nos ocuparemos, a hipótese e os momentos calculados por Votaw.

1.1. INTRODUÇÃO

No estudo de testes psicométricos, ou outras formas de medidas, podemos estar desejosos em nos perguntar se as diversas formas de exame são intercambiáveis entre si na ordem de aplicação. Consideremos, por exemplo, o caso de três formas de testes, e suponhamos que os "scores" dos indivíduos nas três formas têm uma distribuição normal tri-variada. Deste modo, a hipótese de permutação é equivalente à de que, na distribuição normal, as médias sejam iguais, as variâncias sejam iguais e também as covariâncias sejam iguais. Quando a hipótese é verdadeira, a distribuição normal é invariante a todas as permutações e dizemos que ela é de simetria completa.

A hipótese de simetria completa pode aparecer em certos problemas concernentes à pesquisa médica. Como exemplo, suponhamos que uma certa medição (p.e., % de CO_2 no sangue) é efetuada em cada um dos três instantes de tempo (digamos T_1 , T_2 , T_3) em certo animal experimental e suponhamos ainda, que essas três medições

possuem uma distribuição normal tri-variada. Nós podemos, então, estar interessados em testar a hipótese de simetria completa, com base em medidas (considerada como uma amostra aleatória) em vários animais, dessas três medições, ou seja, se todas essas medições têm a mesma média, a mesma variância e se todas as covariâncias são iguais.

Mais geralmente, consideramos duas características, digamos U e W (p.e., % CO₂ e % O₂ no sangue), as quais são, ambas, medidas em cada um de dois instantes de tempo T₁ e T₂. Suponhamos que as quatro variáveis, que representaremos como UT₁, UT₂, WT₁ e WT₂, têm uma distribuição normal quadri-variada, então, podemos estar interessados em testar se as médias e as variâncias das duas primeiras são iguais, as médias e as variâncias das duas últimas são iguais e se a matriz de covariâncias tem a forma

$$\begin{bmatrix} E & F & K & L \\ F & E & L & K \\ K & L & G & J \\ L & K & J & G \end{bmatrix}$$

Quando a hipótese é verdadeira a distribuição quadri-variada é dita possuir SIMETRIA COMPOSTA DO TIPO II. Um caso mais geral de simetria composta do tipo II surge quando se tem h características ou atributos (p.e., medições) e n posições no tempo ($h, n \geq 2$).

Votaw (1948) determinou os momentos do teste de simetria composta do tipo II para a matriz de covariâncias de uma população com distribuição normal multivariada, do teste simultâneo para a igualdade das médias de cada característica nas várias medições e para a estrutura de simetria composta do tipo II da matriz de covariâncias, bem como do teste de igualdade das médias dado que a matriz de covariância possui simetria composta do tipo II de populações normais multivariadas.

Nesse mesmo artigo, Votaw determinou os momentos do critério da razão da verossimilhança para testes equivalentes aos acima, quando da comparação de k populações com estruturas de simetria composta do tipo II.

Mathai e Rathie (1970) determinaram a distribuição exata do critério de Votaw para o teste de simetria composta do tipo II da matriz de covariâncias de uma população normal multivariada (médias quaisquer), para o número de características igual a dois. Ambos (1971) para o número de características de $k = 1$, produziram a distribuição exata, não nula, para o mesmo teste.

Rathie e Scrivastava (1979) produziram a distribuição exata do critério de Votaw para o teste de igualdade de médias de cada característica, em todas as medições, dado que a matriz de covariâncias é de simetria composta do tipo II, para uma população normal multivariada.

Cordeiro (1980) determinou a distribuição exata para uma população normal multivariada, do critério de Votaw, com médias quaisquer, para o teste de estrutura de simetria composta do tipo II para a matriz de covariâncias dessa população, quando o número h de características é igual a três.

Neste trabalho, determinamos a distribuição exata do critério de Votaw para o teste de estrutura de simetria composta do tipo II (médias quaisquer) da matriz de covariâncias de uma população normal multivariada, para o caso em que o número de características é igual a quatro.

1.2. O PROBLEMA, A HIPÓTESE E OS MOMENTOS

Consideremos P uma população normal t -variada e X_i ($i = 1, 2, \dots, t$) ($t = nh$, $n \geq 2$) a i -ésima variada em P .

Seja $X = (X_1, \dots, X_t)'$ um vetor aleatório com distribuição normal t -variada e suponhamos que as variáveis (ou características) $X_1, X_2, \dots, X_t$ sejam agrupadas em h grupos de n variáveis.

Então $X = (X_1, \dots, X_t)'$ tem como função densidade de probabilidade

$$(1.2.1) \quad f(x) = \pi^{-t/2} |G_{ij}|^{1/2} \exp \left\{ -\sum_{i,j=1}^t G_{ij} (X_i - m_i) (X_j - m_j) \right\}$$

onde

$$(1.2.2) \quad G_{ij} = (1/2) \Sigma_{ij}^{-1},$$

$\Sigma = (\Sigma_{ij})$: matriz de covariâncias de $X = (X_1, \dots, X_t)'$; positiva definida, e

$$(1.2.3) \quad m_i = EX_i$$

para $i, j = 1, 2, \dots, t$.

Dizemos que X tem matriz de covariâncias com estrutura de simetria composta do tipo II, se Σ for da forma

$$(1.2.4) \quad \begin{bmatrix} B_1 & D_{12} & D_{13} & D_{14} & \dots & D_{1h} \\ D_{21} & B_2 & D_{23} & D_{24} & \dots & D_{2h} \\ D_{31} & D_{32} & B_3 & D_{34} & \dots & D_{3h} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & B_4 & \dots & D_{4h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{h1} & D_{h2} & D_{h3} & D_{h4} & & B_h \end{bmatrix} : t \times t$$

onde as submatrizes têm as formas

$$(1.2.5) \quad B_a = (\text{Cov } (X_{i_a}, X_{j_a})) : n \times n, \quad i_a, j_a = \bar{n}_a + 1, \dots, \bar{n}_{a+1}$$

com

$$(1.2.6) \quad \bar{n}_a = (a-1)n, \quad \bar{n}_1 = 0$$

$$(1.2.7) \quad \text{Cov } (X_{i_a}, X_{i_a}) = \text{Cov } (X_{j_a}, X_{j_a}) \quad i_a \neq j_a$$

e

$$(1.2.8) \quad \text{Cov } (X_{i_a}, X_{j_a}) = \text{Cov } (X_{i'_a}, X_{j'_a}) \quad i_a \neq j_a, \quad i'_a \neq j'_a$$

para $a = 1, 2, \dots, h$.

$$(1.2.9) \quad D_{aa'} = (\text{Cov } (X_{i_a}, X_{i_{a'}})) : n \times n$$

com

$$(1.2.10) \quad \text{Cov} (X_{i_a}, X_{k_{a'}}) = \text{Cov} (X_{i_a}, X_{k_{a'}}) \quad k_{a'} = i_a + n(a'-a)$$

$$(1.2.11) \quad \text{Cov} (X_{i_a}, X_{h_{a'}}) = \text{Cov} (X_{i_a}, X_{h_{a'}}) \quad h_{a'} \neq k_{a'}$$

para $a \neq a'$, $a, a' = 1, 2, \dots, h$.

O problema de que vamos nos ocupar é o de testar a igualdade das variâncias e a igualdade das covariâncias das variáveis dentro de cada um dos grupos e a igualdade das covariâncias nas diagonais e a igualdade das covariâncias não diagonais entre dois grupos distintos das variáveis, isto é, de que Σ é de simetria composta do tipo II, dada em (1.2.4). Denotemos por $\bar{H}(vc)$, a hipótese de que, Σ possui esta estrutura.

Sejam $(X_{1\alpha}, X_{2\alpha}, \dots, X_{t\alpha})'$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$, uma amostra aleatória de $X = (X_1, \dots, X_t)$.

Se $\bar{\lambda}(vc)$ é o critério da razão da verossimilhança para testar a hipótese $\bar{H}(vc)$ contra a sua negação, então o $(s-1)$ -ésimo momento de $\bar{L}(vc) = \{\bar{\lambda}(vc)\}^{2/N}$ (Votaw (1948), pg. 465) é dado por

$$(1.2.12) \quad E(\bar{L}(vc)^{s-1}) = Q(n, h, N) \cdot \left\{ \prod_{i=h+1}^{nh} \Gamma\left(\frac{N-2-i}{2} + s\right) \right\} \div$$

$$\div \left\{ \prod_{a=1}^h \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{N-3}{2} + \frac{2j-a-1}{2(n-1)} + s\right) \right\}$$

onde

$$(1.2.13) \quad Q(n, h, N) = \left\{ \prod_{a=1}^h \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{N-1}{2} + \frac{2j-a-1}{2(n-1)}\right) \right\} \div \left\{ \prod_{j=h+1}^{nh} \Gamma\left(\frac{N-j}{2}\right) \right\}$$

e

$$(1.2.14) \quad s = y + it, \quad i^2 = -1, \quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

A função densidade de $\bar{L}(vc)$ e o seu desenvolvimento em séries computáveis serão dadas nos capítulos seguintes.

CAPÍTULO II

DISTRIBUIÇÃO DE $\bar{L}(vc)$ EM TERMOS DA FUNÇÃO G-DE-MEIJER

✕
A partir da expressão do $(s-1)$ -ésimo momento determinado por Votaw, a função densidade de probabilidade do critério $\bar{L}(vc)$ é dada em forma da função G-de-Meijer e é calculada e apresentada em forma computável para o caso em que o número de características é igual a quatro, com a utilização da transformada de Mellin e sua fórmula de inversão.

2.1. INTRODUÇÃO

A transformada de Mellin determina uma distribuição de probabilidade (Cordeiro (1980)) e, portanto, conhecendo-a, usando a fórmula de inversão dessa transformada, podemos determinar a densidade de distribuição.

Seja $f(x)$ a função densidade de probabilidade da distribuição contínua com suporte $(0, \infty)$, então o $(s-1)$ -ésimo momento de $\bar{L}(vc)$ é

$$(2.1.1) \quad E(\bar{L}(vc)^{s-1}) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx$$

para $s = y + it$, $i^2 = -1$ e a região de existência de $E(\bar{L}(vc)^{s-1})$ uma faixa $a < y < b$ do plano complexo.

Deste modo, podemos dizer que $E(\bar{L}(vc)^{s-1})$ é a transformada

de Mellin da função densidade $f(x)$ de $\bar{L}(vc)$.

Aplicando a transformada inversa de Mellin (Titchmarsh (1948), p. 46), obtemos a função densidade de probabilidade de $\bar{L}(vc)$:

$$(2.1.2) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L x^{-s} E(\bar{L}(vc)^{s-1}) ds; \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

onde L é um ciclo adequado englobando todos os polos do integrando e $0 < x < 1$ e $f(x) = 0$ em caso contrário.

Assim, para $h = 4$ e por (1.2.12) temos

$$(2.1.3) \quad E(\bar{L}(vc)^{s-1}) = Q(n, 4, N) \cdot \left\{ \prod_{j=1}^{4(n-1)} \Gamma\left(s + \frac{N-6-j}{2}\right) \right\} \div \\ \div \left\{ \prod_{a=1}^4 \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma\left(s + \frac{N-3}{2} + \frac{2j-a-1}{2(n-1)}\right) \right\}; \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

onde

$$(2.1.4) \quad Q(n, 4, N) = \left\{ \prod_{a=1}^4 \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{N-1}{2} + \frac{2j-a-1}{2(n-1)}\right) \right\} \div \left\{ \prod_{j=1}^{4(n-1)} \Gamma\left(\frac{N-4-j}{2}\right) \right\}$$

e, portanto, por (2.1.2) a densidade de $\bar{L}(vc)$, fica:

$$(2.1.5) \quad f(x) = Q(n, 4, N) \frac{1}{2\pi i} \int_L x^{-s} \left\{ \prod_{j=1}^{4(n-1)} \Gamma\left(s + \frac{N-6-j}{2}\right) \right\} \div \\ \div \left\{ \prod_{a=1}^4 \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma\left(s + \frac{N-3}{2} + \frac{2j-a-1}{2(n-1)}\right) \right\} ds$$

para $0 < x < 1$ e $f(x) = 0$ em caso contrário.

2.2. FUNÇÃO DENSIDADE DE $\bar{L}(vc)$ EM TERMOS DA FUNÇÃO - G

Na forma (2.1.5) a função $f(x)$ é uma função G-de-Meijer (apêndice C) com $g = 4(n-1)$,

$$(2.2.1) \quad f(x) = Q(n, 4, N) \cdot G_{g, g}^{g, 0} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_g \\ b_1, b_2, \dots, b_g \end{matrix} \right. \right), \quad 0 < x < 1$$

onde $Q(n, 4, N)$ é dado por (2.1.4); os parâmetros b_j são da forma

$$(2.2.2) \quad b_j = \frac{N-6-j}{2} \quad j = 1, 2, \dots, 4(n-1)$$

e os parâmetros a_j são da forma

$$\begin{aligned} (2.2.3) \quad a_j &= \frac{N-3}{2} + \frac{j-1}{n-1} & j &= 1, 2, \dots, n-1 \\ &= \frac{N-3}{2} + \frac{2(j+1-n)-3}{2(n-1)} & j &= n, n+1, \dots, 2(n-1) \\ &= \frac{N-3}{2} + \frac{(j-2n+2)-2}{n-1} & j &= 2n-1, 2n, \dots, 3(n-1) \\ &= \frac{N-3}{2} + \frac{2(j-3n+3)-5}{2(n-1)} & j &= 3n-2, 3n-1, \dots, 4(n-1) \end{aligned}$$

A forma (2.2.1) não é boa para cálculos de pontos percentuais de sua função de distribuição, sendo, portanto, para fins computacionais, representarmos $f(x)$ em séries computáveis de funções simples. Então o problema se resume em resolver a integral

$$(2.2.4) \quad I = \frac{1}{2\pi i} \int_L x^{-s} \cdot \left\{ \prod_{j=1}^{4(n-1)} \Gamma\left(s + \frac{N-6-j}{2}\right) \div \right. \\ \left. \div \prod_{a=1}^4 \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma\left(s + \frac{N-3}{2} + \frac{2j-a-1}{2(n-1)}\right) \right\} ds$$

onde L é um ciclo adequado englobando todos os polos do integrando (vide (2.1.2)).

Para o desenvolvimento dessas séries, necessitamos cancelar no numerador e no denominador do integrando em (2.1.5) os fatores comuns, a fim de determinarmos os polos para a aplicação do teorema dos resíduos. Esses cancelamentos dependem dos valores de n , que determinam a produção de densidade para cinco casos: $n=2$, $n=3$, $n=4$, $n=2k$, $k \geq 3$ e $n=2k+1$, $k=2,3,\dots$

Chamemos

$$(2.2.5) \quad NU = \prod_{j=1}^{4(n-1)} \Gamma\left(s + \frac{N-6-j}{2}\right)$$

o numerador do integrando, excluindo x^{-s} e

$$(2.2.6) \quad DN = \prod_{a=1}^4 \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma\left(s + \frac{N-3}{2} + \frac{2j-a-1}{2(n-1)}\right)$$

o seu denominador.

Esses cancelamentos ocorrerão somente quando

$$(2.2.7) \quad \frac{2j-a-1}{2(n-1)} = \frac{k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

pois

$$(2.2.8) \quad \frac{N-6-j}{2} = \frac{N-3}{2} - \frac{3+j}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, 4(n-1)$$

Devemos, então, analisar o problema para dois casos; (i) quando k é par e (ii) quando k é ímpar, $k \in \mathbb{Z}$.

(i) CASO EM QUE k É PAR

Se $a = 1$, então

$$(2.2.9) \quad 0 \leq \frac{j-1}{n-1} < 1$$

pois

$$(2.2.10) \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

portanto, somente ocorre

$$(2.2.11) \quad \frac{j-1}{n-1} = 0$$

quando $j = 1$, para qualquer $n \geq 2$;

$$\text{Se } a = 2, \text{ então } \frac{2j-3}{2(n-1)} = \frac{k}{2},$$

logo,

$$(2.2.12) \quad j = \frac{1}{2} (k(n-1) + 3)$$

que nunca é inteiro positivo, portanto, neste caso não há k par

que satisfaça a igualdade (2.2.7);

$$\text{Se } a = 3, \text{ então } \frac{j-2}{n-1} = \frac{k}{2},$$

que é equivalente a

$$(2.2.13) \quad j = \frac{k}{2} (n-1) + 2,$$

por (2.2.10), temos

$$(2.2.14) \quad -1 \leq \frac{-1}{n-1} \leq \frac{k}{2} \leq 1 - \frac{2}{n-1} < 1,$$

logo $\frac{k}{2} = -1, 0$, isto é, $\frac{k}{2} = 0$ ocorre quando $j = 2$, $\forall n \geq 3$
e $\frac{k}{2} = -1$ ocorre quando $j = 1$ só para $n = 2$ e somente nestes casos;

Se $a = 4$, então

$$(2.2.15) \quad j = \frac{1}{2} (k(n-1) + 5)$$

que nunca é inteiro positivo, logo, neste caso não há k par que satisfaça a igualdade (2.2.7);

(ii) CASO EM QUE k É ÍMPAR

Se $a = 1$, então

$$(2.2.16) \quad j = (k(n-1) + 2) / 2$$

o que implica que $k(n-1)$ é par, que é equivalente a n ímpar,

pois j é inteiro positivo não nulo; de (2.2.10) temos que

$$(2.2.17) \quad 0 \leq k \leq 2 - \frac{2}{n-1} < 2,$$

logo, $k = 1$ e, portanto, $j = 1 + (n-1)/2$ (cf. (2.2.16))

para $n \geq 3$ e n ímpar;

Se $a = 2$, então

$$(2.2.18) \quad \frac{2j-3}{2(n-1)} = \frac{k}{2} \leftrightarrow j = (k(n-1)+3)/2,$$

e sendo k ímpar, também $(n-1)$ deverá ser ímpar e, portanto, n é par e, assim, $k(n-1)+3$ é par, que dividido por 2 é um inteiro positivo não nulo. De (2.2.10), decorre que

$$(2.2.19) \quad -1 \leq -1/(n-1) \leq k \leq 2 - 3/(n-1) < 2$$

logo $k = -1$, quando e só quando $j = 1$ e $n = 2$, pois $1-n+3 > 0$ implica $n < 4$ (cf. 2.2.18)), e $k = 1$, quando $j = (n/2) + 1$, para $n \geq 4$, n par.

Se $a = 3$, então

$$(2.2.20) \quad \frac{j-2}{n-1} = \frac{k}{2} \leftrightarrow j = k(n-1)/2 + 2$$

como k é ímpar, então $(n-1)$ deverá ser par, o que implica que n é ímpar, pois j é inteiro positivo não nulo;

de (2.2.10) decorre que

$$(2.2.21) \quad -2 \leq -2/(n-1) \leq k \leq 2 - 4/(n-1) < 2$$

logo $k = -1$ para $j = 1$ só quando $n = 3$, pois $1 - n + 4 > 0$ implica $n < 5$ (cf. 2.2.20)) e $k = 1$, quando $j = (n-1)/2 + 2$, para $n > 5$ ímpar

Se $a = 4$, então

$$(2.2.22) \quad (2j-5)/2(n-1) = k/2 \leftrightarrow j = (k(n-1)+5)/2$$

que implica que $(n-1)$ seja ímpar e, portanto, n é par, pois j é inteiro positivo não nulo; de (2.2.10) temos

$$(2.2.23) \quad -3 \leq -3/(n-1) \leq k \leq 2 - 5/(n-1) < 2$$

logo $k = -3, -1, 1$, isto é, $k = -3$ quando e só quando $n = 2$ e $j = 1$, $k = -1$ quando e só quando $j = 1$ e $n = 4$, pois $1 - n + 5 > 0$ implica $n < 6$ (cf. (2.2.22)) e $k = 1$, quando $j = (n/2) + 2$, para $n \geq 6$, par.

Em virtude deste arrazoado, teremos cinco distribuições exatas, de $\bar{L}(vc)$, distintas, a saber; para os casos em que: $h = 4$ e $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 2k (k \geq 3)$ e $n = 2k + 1 (k = 2, 3, \dots)$. Não obstante, como para os valores de $n \geq 3$, n par ou ímpar, podem ser identificados em uma única expressão, podemos então encontrar as distribuições exatas do critério para os casos em que $n = 2$ e $n \geq 3$, com os quais nos ocuparemos em calculá-las no capítulo seguinte.

CAPÍTULO III

DISTRIBUIÇÃO EXATA DO CRITÉRIO $\bar{L}(vc)$

EM SÉRIES COMPUTÁVEIS

Serão apresentadas as expressões da função densidade de probabilidade exata do critério da razão da verossimilhança, $\bar{L}(vc)$, de Votaw, em séries, para os vários valores de n e, estas, serão calculadas com a utilização do teorema dos resíduos.

3.1. INTRODUÇÃO

Para obtermos a expressão da função densidade de probabilidade exata do critério $\bar{L}(vc)$ em séries, vamos determinar primeiramente os polos de $x^{-s} h(s)$ onde

$$(3.1.1) \quad h(s) = \frac{NU}{DN}$$

e, NU e DN são dados por (2.2.5) e (2.2.6) respectivamente e, portanto, uma vez que, já os temos determinados, passamos então ao cálculo dos resíduos em $x^{-s} h(s)$ nesses polos e, que de acordo com o teorema dos resíduos (Ahlfors (1966), p. 149) nos dá a expressão exata de $f(x)$, dada por

$$(3.1.2) \quad f(x) = Q(n, h, N) \cdot \left\{ \text{soma dos resíduos de } x^{-s} h(s) \text{ nos polos de } \frac{NU}{DN} \right\}$$

pois, os polos de $x^{-s} h(s)$ são os polos de

$$(3.1.3) \quad \frac{\prod_{j=h+1}^{nh} \Gamma\left(\frac{N-2-j}{2} + s\right)}{\prod_{a=1}^h \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma\left(s + \frac{N-3}{2} + \frac{2j-a-1}{2(n-1)}\right)}$$

3.2. DISTRIBUIÇÃO EXATA DE $\bar{L}(vc)$ PARA $h=4$ E $n=2$

Para $h=4$ e $n=2$, NU e DN definidos em (2.2.5) e (2.2.6) podem ser escritos como

$$(3.2.1) \quad NU = \Gamma\left(s + \frac{N-3}{2} - 2\right) \Gamma\left(s + \frac{N-3}{2} - \frac{5}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{N-3}{2} - 3\right) \Gamma\left(s + \frac{N-3}{2} - \frac{7}{2}\right)$$

e

$$(3.2.2.) \quad DN = \Gamma\left(s + \frac{N-3}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{N-3}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{N-3}{2} - 1\right) \Gamma\left(s + \frac{N-3}{2} - \frac{3}{2}\right) :$$

Aplicando a propriedade da Função Gama (Whittaker e Watson (1969))

$$(3.2.3) \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$$

aos fatores de DN , ficamos com o seguinte quociente

$$(3.2.4) \quad \frac{NU}{DN} = \frac{1}{\left\{ \prod_{j=5}^6 \left(s + \frac{N-j}{2}\right) \right\} \left\{ \prod_{j=7}^8 \left(s + \frac{N-j}{2}\right)^2 \right\} \left\{ \prod_{j=9}^{10} \left(s + \frac{N-j}{2}\right) \right\}}$$

e assim nossa $f(x)$ fica

$$(3.2.5) \quad f(x) = Q(2,4,N) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_L x^{-s} \cdot \frac{NU}{DU} ds, \quad 0 < x < 1$$

onde L começa em $-i\infty$ e vai até $+i\infty$ conservando todos os polos abaixo a sua esquerda e $f(x) = 0$ se $x \notin (0,1)$.

Os polos do integrando são $s = -(\frac{N-5}{2}), -(\frac{N-6}{2}), -(\frac{N-7}{2}), -(\frac{N-8}{2}), -(\frac{N-9}{2}), -(\frac{N-10}{2})$.

Portanto, os polos $\frac{NU}{DU}$ são os valores de s que anulam o produto

$$(3.2.6) \quad \left\{ \prod_{i=5}^{10} \left(s + \frac{N-i}{2} \right)^{\alpha_i} \right\}$$

onde

$$(3.2.7) \quad \alpha_i = \begin{cases} 1; & \text{se } i = 5, 6, 9, 10 \\ 2; & \text{se } i = 7, 8 \end{cases}$$

é a ordem do i -ésimo polo.

Uma vez, determinados esses polos, vamos calcular os resíduos para obtermos a expressão exata da função densidade de probabilidade de $\bar{L}(vc)$, $f(x)$, aplicando o teorema dos resíduos (Ahlfors (1966)) que nos dá

$$(3.2.8) \quad f(x) = Q(2,4,N) \cdot \left\{ \sum_{i=5}^{10} \operatorname{Res}_{s=a_i} (x^{-s} h(s)) \right\}$$

onde os a_i 's são anulantes do produto (3.2.6) e $h(s)$ é dado em (3.1.1).

Seja 0_i a ordem do polo a_i de $h(s)$, se para $i=1,2,3,\dots$ denotarmos

$$(3.2.9) \quad B_i = (s - a_i)^{0_i} h(s) \quad \text{e} \quad A_i = \frac{d}{ds} \ln B_i$$

temos a identidade

$$(3.2.10) \quad \frac{d}{ds} B_i = B_i \cdot \frac{d}{ds} \ln B_i = B_i A_i$$

e, portanto, de uma maneira geral temos

$$(3.2.11) \quad \frac{d^k}{ds^k} B_i = \sum_{t=0}^{k-1} \binom{k-1}{t} B_i^{(k-1-t)} A_i^{(t)}.$$

Assim, temos, também que

$$(3.2.12) \quad \frac{d^r}{ds^r} (x^{-s} B_i) = x^{-s} \sum_{t=0}^r \binom{r}{t} (-\ln x)^{r-t} B_i^{(t)},$$

$$r = 0, 1, \dots, 0_i - 1$$

e, a expressão do resíduo do integrando em (3.2.5) fica

$$(3.2.13) \quad \operatorname{Res}_{s=a_i} (x^{-s} h(s)) = x^{-a_i} \sum_{t=0}^{\alpha_i-1} (-\ln x)^{\alpha_i-1-t} B_{0_i}^{(t)}$$

onde

$$B_{0_i}^{(t)} = \lim_{s \rightarrow a_i} B_i^{(t)} \quad \text{e} \quad B_i^{(t)} = \frac{d^t}{ds^t} B_i.$$

A fórmula (3.2.11) nos dá uma relação de recorrência para o cálculo das derivadas de ordem t de B_i , a partir das anteriores

e das derivadas de A_i , isto é, esta expressão pode ser calculada de modo iterativo desde que seja conhecida $A_i^{(t)} = (d^t/ds^t)A_i$.

Nas expressões dos limites de $B_i^{(t)}$ e $A_i^{(t)}$ aparecem algumas funções especiais, quais sejam

- a função psi (ψ)
- a função zeta-de-Riemann (ζ)

que serão dadas no Apêndice B e, bem como a relação entre estas e com a função gama.

Passemos, então, ao cálculo dos resíduos de $x^{-s} h(s)$ nos polos $s = -(\frac{N-i}{2})$ de ordem α_i , $i = 5, 6, 7, 8, 9, 10$, que são os valores de s que anulam o produto (3.2.6).

De (3.1.1), (3.2.4) e (3.2.9) temos que

$$(3.2.14) \quad B_i = (s + \frac{N-i}{2})^{\alpha_i} \left\{ \prod_{j=5}^6 (s + \frac{N-j}{2}) \right\} \left\{ \prod_{j=7}^8 (s + \frac{N-j}{2})^2 \right\} \left\{ \prod_{j=9}^{10} (s + \frac{N-j}{2}) \right\}^{-1}$$

Assim, os B_i 's são dados por

$$(3.2.15) \quad B_5 = (Q^*(s) \cdot (s + \frac{N-6}{2}))^{-1}$$

$$(3.2.16) \quad B_6 = (Q^*(s) \cdot (s + \frac{N-5}{2}))^{-1}$$

$$(3.2.17) \quad B_7 = (Q^{**}(s) \cdot (s + \frac{N-8}{2})^2)^{-1}$$

$$(3.2.18) \quad B_8 = (Q^{**}(s) \cdot (s + \frac{N-7}{2})^2)^{-1}$$

$$(3.2.19) \quad B_9 = (Q^{**}(s) \cdot (s + \frac{N-10}{2}))^{-1}$$

$$(3.2.20) \quad B_{10} = (Q^{**}(s) \cdot (s + \frac{N-9}{2}))^{-1}$$

onde

$$(3.2.21) \quad Q^*(s) = \left\{ \prod_{j=7}^8 (s + \frac{N-j}{2})^2 \right\} \left\{ \prod_{j=9}^{10} (s + \frac{N-j}{2}) \right\}$$

$$(3.2.22) \quad Q^{**}(s) = \left\{ \prod_{j=5}^6 (s + \frac{N-j}{2}) \right\} \left\{ \prod_{j=9}^{10} (s + \frac{N-j}{2}) \right\}$$

$$(3.2.23) \quad Q^{***}(s) = \left\{ \prod_{j=5}^6 (s + \frac{N-j}{2}) \right\} \left\{ \prod_{j=7}^8 (s + \frac{N-j}{2})^2 \right\}$$

Calculando os limites quando $s \rightarrow -(\frac{N-i}{2})$, para $i = 5, 6, 7, 8, 9, 10$, temos

$$(3.2.24) \quad B_{0_5} = -(8/45)$$

$$(3.2.25) \quad B_{0_6} = 8/3$$

$$(3.2.26) \quad B_{0_7} = 16/3$$

$$(3.2.27) \quad B_{0_8} = 16/3$$

$$(3.2.28) \quad B_{0_9} = -(8/3)$$

$$(3.2.29) \quad B_{0_{10}} = 8/45$$

Ainda, na expressão dos resíduos, dada por (3.2.13), aparecem os termos $B_{07}^{(1)}$ e $B_{08}^{(2)}$; pois as ordens dos polos $s = -(\frac{N-i}{2})$, $i = 7, 8$, é igual a 2, que são dados por

$$B_{07}^{(1)} = \lim_{s \rightarrow -\frac{N-7}{2}} B_7^{(1)} \quad \text{e} \quad B_7^{(1)} = \frac{d}{ds} B_7$$

$$B_{08}^{(1)} = \lim_{s \rightarrow -\frac{N-8}{2}} B_8^{(1)} \quad \text{e} \quad B_8^{(1)} = \frac{d}{ds} B_8$$

e, então

$$(3.2.30) \quad B_{07}^{(1)} = 128/9$$

$$(3.2.31) \quad B_{08}^{(1)} = -(128/9)$$

e, portanto, pela aplicação do teorema dos resíduos e de (3.2.13)

$$(3.2.32) \quad f(x) = \prod_{j=1}^4 \left\{ \Gamma\left(\frac{N-j}{2}\right) \div \Gamma\left(\frac{N-4-j}{2}\right) \right\} (8/45) \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot x^{N/2} \{-x^{-5/2} + 15 x^{-3} + 10(8-3 \ln x) x^{-7/2} - \\ & - 10(8+3 \ln x) x^{-4} - 15 x^{-9/2} + x^{-5}\} \quad 1(0 < x < 1) \end{aligned}$$

e temos o resultado como o

TEOREMA 3.1: Para testar se a matriz de covariâncias de uma popu

lação normal 8-variada é da forma dada em (1.2.4), contra a sua negação, a função densidade do critério da razão da verossimilhança $\bar{L}(vc)$ de Votaw, para o caso em que o número de atributos é $h=4$, tem a forma dada em (3.2.32), e a sua função de distribuição é dada por

$$\begin{aligned}
 (3.2.33) \quad F(x) &= (16/45) \prod_{j=1}^4 \left\{ \Gamma\left(\frac{N-j}{2}\right) \div \Gamma\left(\frac{N-4-j}{2}\right) \right\} \cdot \\
 &\cdot x^{N/2} \left\{ -\frac{x^{-3/2}}{N-3} + 15 \frac{x^{-2}}{N-4} + 80 \frac{x^{-5/2}}{N-5} + \right. \\
 &+ 15 x^{-5/2} \sum_{r=1}^2 \frac{2^r}{(2-r)! (N-5)^r} (-\ln x)^{2-r} - \\
 &- 80 \frac{x^{-3}}{N-6} - 15 x^{-3} \sum_{r=1}^2 \frac{2^r}{(2-r)! (N-6)^r} (-\ln x)^{2-r} - \\
 &- 15 \frac{x^{-7/2}}{N-7} + \frac{x^{-4}}{N-8} \Big\} \quad \text{se } 0 < x < 1 \\
 &= 0 \quad \text{se } x \leq 0 \\
 &= 1 \quad \text{se } 1 \leq x
 \end{aligned}$$

3.3. DISTRIBUIÇÃO EXATA DE $\bar{L}(vc)$ PARA $h=4$ E $n>2$

Para o caso em que $h=4$ e $n=3,4,5,6,\dots$ e $f(x)$ tendo a forma da expressão dada em (2.1.5) decorre que, expandindo o numerador e o denominador e aplicando a propriedade (3.2.3), cancelamos as funções gama cujos argumentos diferem entre si por um número inteiro, ficamos com a integral

$$(3.3.1) \quad I = \frac{1}{2\pi i} \int_L x^{-s} \frac{NU}{DN} ds$$

onde L é um ciclo adequado escolhido contendo todos os polos do integrando, e

$$(3.2.2) \quad NU = \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma(s + \frac{N-9}{2} - j) \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma(s + \frac{N-10}{2} - j) \right\}$$

$$(3.3.3) \quad DN = Q_{(n)}(s) \cdot (s + \frac{N-4}{2})^{[3(n-1)/(n+1)]} \left\{ \prod_{j=5}^8 (s + \frac{N-j}{2})^2 \right\} \cdot \left\{ \prod_{j=9}^{10} (s + \frac{N-j}{2}) \right\}$$

onde para $n = 3, 4$

$$(3.3.4) \quad Q_{(n)}(s) = \left\{ \prod_{j=1}^{2n-6} \Gamma(s + \frac{N-3}{2} + \frac{j}{n-1}) \right\} \\ \left\{ \prod_{j=1}^{[(n+3)/3]} \Gamma(s + \frac{N-3}{2} + \frac{2j-3}{2(n-1)}) \right\} \\ \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, [n/2]}}^{2n-5} \Gamma(s + \frac{N-3}{2} + \frac{j-2}{n-1}) \right\} \\ \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq [(n-2)/2]}}^{[(n+5)/2]} \Gamma(s + \frac{N-3}{2} + \frac{2j-5}{2(n-1)}) \right\}$$

para $n = 5, 6, 7, \dots$

$$\begin{aligned}
 (3.3.5) \quad Q_{(n)}(s) = & \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq (n-1)/2}}^{n-2} \Gamma\left(s + \frac{N-3}{2} + \frac{j}{n-1}\right) \right\} \\
 & \cdot \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq (n+2)/2}}^{n-1} \Gamma\left(s + \frac{N-3}{2} + \frac{2j-3}{2(n-1)}\right) \right\} \\
 & \cdot \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, (n+3)/2}}^{n-1} \Gamma\left(s + \frac{N-3}{2} + \frac{j-2}{n-1}\right) \right\} \\
 & \cdot \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq (n+4)/2}}^{n-1} \Gamma\left(s + \frac{N-3}{2} + \frac{2j-5}{2(n-1)}\right) \right\}
 \end{aligned}$$

sendo que $[z]$ é o número maior inteiro menor ou igual a z .

Para a aplicação do teorema dos resíduos, necessário se faz agora, determinar os polos do integrando em (3.3.1).

Os polos são

$$s = -\left(\frac{N-4}{2}\right), -\left(\frac{N-5}{2}\right), -\left(\frac{N-6}{2}\right), -\left(\frac{N-7}{2}\right), -\left(\frac{N-8}{2}\right), -\left(\frac{N-9}{2}\right), -\left(\frac{N-10}{2}\right),$$

$$s = -\left(t + \frac{N-11}{2}\right), -\left(t + \frac{N-13}{2}\right), \dots, -\left(t + \frac{N-1}{2} - 2n\right)$$

$$s = -\left(t + \frac{N-12}{2}\right), -\left(t + \frac{N-14}{2}\right), \dots, -\left(t + \frac{N-2}{2} - 2n\right)$$

com $t = 0, 1, 2, \dots$, pois a função gama não possui zeros e os polos de $\Gamma(s)$ são os valores de $s = -t$, $t = 0, 1, 2, \dots$ (Whittaker e Watson (1966), p. 236).

Assim, os polos do integrando em (3.3.1) são os valores de s que anulam o produto

$$(3.3.6) \quad \left\{ \prod_{i=4}^{10} \left(s + \frac{N-i}{2} \right)^{\alpha_i''} \right\} \left\{ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2n-3, 2n-2, 2n-1}}^{\infty} \left(s + \frac{N-9}{2} + i - 2n + 3 \right)^{\alpha_i'} \right\} \\ \cdot \left\{ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2n-3, 2n-2, 2n-1, 2n}}^{\infty} \left(s + \frac{N-10}{2} + i - 2n + 3 \right)^{\alpha_i} \right\}$$

onde

$$(3.3.7) \quad \text{para } n = 3, 4, \quad \alpha_4'' = 2n-3 \text{ e para } n = 5, 6, 7, \dots, \alpha_4'' = 2n-2,$$

$$(3.3.8) \quad \alpha_i'' = \begin{cases} 2n-3; & \text{se } i = 9, 10 \\ 2n-2; & \text{se } i = 5, 6, 7, 8 \end{cases}$$

$$(3.3.9) \quad \alpha_i' = \begin{cases} i; & \text{se } i = 1, 2, \dots, 2n-5 \\ 2n-4; & \text{se } i = 2n-4, 2n, 2n+1, \dots \end{cases}$$

$$(3.3.10) \quad \alpha_i = \begin{cases} i; & \text{se } i = 1, 2, \dots, 2n-5 \\ 2n-4; & \text{se } i = 2n-4, 2n+1, 2n+2, \dots \end{cases}$$

são as ordens dos respectivos polos.

Denotando por B_i'' , B_i' e B_i os B 's a que nos referimos em (3.2.9) a (3.2.12), para o primeiro, segundo e terceiro produtos em (3.3.6), respectivamente, temos

$$(3.3.11) \quad B_i'' = \left(s + \frac{N-i}{2}\right)^{\alpha_i''} \cdot \frac{NU}{DN}; \quad i = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

$$(3.3.12) \quad B_i' = \left(s + \frac{N-9}{2} + i - 2n+3\right)^{\alpha_i'} \cdot \frac{NU}{DN};$$

$$i = 1, 2, \dots, 2n-5, 2n-4, 2n, 2n+1, \dots$$

$$(3.3.13) \quad B_i = \left(s + \frac{N-10}{2} + i - 2n+3\right)^{\alpha_i} \cdot \frac{NU}{DN};$$

$$i = 1, 2, \dots, 2n-5, 2n-4, 2n+1, \dots$$

que são as expressões em s que deverão ser derivadas para o cálculo dos resíduos.

Deste modo

$$(3.3.14) \quad B_9'' = \Gamma^{2n-4} \left(s + \frac{N-9}{2} + 1\right) \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma\left(s + \frac{N-10}{2} - j\right) \right\} \div$$

$$\div Q_{(n)}^*(s) \left(s + \frac{N-10}{2}\right) \left\{ \prod_{j=1}^{2n-4} \left(s + \frac{N-9}{2} - j\right)^{2n-3-j} \right\}$$

$$(3.3.15) \quad B_{10}'' = \Gamma^{2n-4} \left(s + \frac{N-10}{2} + 1\right) \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma\left(s + \frac{N-9}{2} - j\right) \right\} \div$$

$$\div Q_{(n)}^*(s) \left(s + \frac{N-9}{2}\right) \left\{ \prod_{j=1}^{2n-4} \left(s + \frac{N-10}{2} - j\right)^{2n-3-j} \right\}$$

$$(3.3.16) \quad B_4'' = \Gamma^{2n-4} \left(s + \frac{N-4}{2} + 1\right) \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma\left(s + \frac{N-9}{2} - j\right) \right\} \div$$

$$\div Q_{(n)}(s) \left\{ \prod_{j=5}^8 \left(s + \frac{N-j}{2} \right)^2 \right\} \left\{ \prod_{j=9}^{10} \left(s + \frac{N-j}{2} \right) \right\} \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^4 \left(s + \frac{N-4}{2} - j \right)^{2n-4-j} \left\{ \prod_{j=1}^{2n-5} \left(s + \frac{N-12}{2} - j \right)^{2n-4-j} \right\}$$

$$(3.3.17) \quad B_5'' = \Gamma^{2n-4} \left(s + \frac{N-5}{2} + 1 \right) \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma \left(s + \frac{N-10}{2} - j \right) \right\} \div$$

$$\div Q_{(n)}^{**}(s) \left\{ \prod_{j=6}^8 \left(s + \frac{N-j}{2} \right)^2 \right\} \left\{ \prod_{j=1}^3 \left(s + \frac{N-5}{2} - j \right)^{2n-4-j} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \prod_{j=1}^{2n-5} \left(s + \frac{N-11}{2} - j \right)^{2n-4-j} \right\} \cdot$$

$$(3.3.18) \quad B_6'' = \Gamma^{2n-4} \left(s + \frac{N-6}{2} + 1 \right) \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma \left(s + \frac{N-9}{2} - j \right) \right\} \div$$

$$\div Q_{(n)}^{**}(s) \left\{ \prod_{\substack{j=5 \\ j \neq 6}}^8 \left(s + \frac{N-j}{2} \right)^2 \right\} \left\{ \prod_{j=1}^3 \left(s + \frac{N-6}{2} - j \right)^{2n-4-j} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \prod_{j=1}^{2n-5} \left(s + \frac{N-12}{2} - j \right)^{2n-4-j} \right\} \cdot$$

$$(3.3.19) \quad B_7'' = \Gamma^{2n-4} \left(s + \frac{N-7}{2} + 1 \right) \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma \left(s + \frac{N-10}{2} - j \right) \right\} \div$$

$$\div Q_{(n)}^{**}(s) \left\{ \prod_{\substack{j=5 \\ j \neq 7}}^8 \left(s + \frac{N-j}{2} \right)^2 \right\} \left\{ \prod_{j=1}^2 \left(s + \frac{N-7}{2} - j \right)^{2n-4-j} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \prod_{j=1}^{2n-5} \left(s + \frac{N-11}{2} - j \right)^{2n-4-j} \right\} .$$

$$(3.3.20) \quad B_8'' = \Gamma^{2n-4} \left(s + \frac{N-8}{2} + 1 \right) \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma \left(s + \frac{N-9}{2} - j \right) \right\} \div$$

$$\div Q_{(n)}^{**}(s) \left\{ \prod_{j=5}^7 \left(s + \frac{N-j}{2} \right)^2 \right\} \left\{ \prod_{j=1}^2 \left(s + \frac{N-8}{2} - j \right)^{2n-4} \right\} .$$

$$\cdot \left\{ \prod_{j=1}^{2n-5} \left(s + \frac{N-12}{2} - j \right)^{2n-4-j} \right\}$$

onde

$$(3.3.21) \quad Q_{(n)}^*(s) = Q_{(n)}(s) \left(s + \frac{N-4}{2} \right)^{[3(n-1)/(n+1)]} \cdot \left\{ \prod_{j=5}^8 \left(s + \frac{N-j}{2} \right)^2 \right\}$$

(Vide (3.3.4) e (3.3.5))

e

$$(3.3.22) \quad Q_{(n)}^{**}(s) = Q_{(n)}(s) \left(s + \frac{N-4}{2} \right)^{[3(n-1)/(n+1)]} \cdot \left\{ \prod_{j=9}^{10} \left(s + \frac{N-j}{2} \right) \right\}$$

para $i = 1, 2, \dots, 2n-5$

$$(3.3.23) \quad B_i' = \Gamma^{i+1} \left(s + \frac{N-9}{2} + i - 2n + 4 \right) \left\{ \prod_{j=1}^{2n-5-i} \Gamma \left(s + \frac{N-9}{2} - j \right) \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma \left(s + \frac{N-10}{2} - j \right) \right\} \div Q_{(n)}^{**}(s) .$$

$$\cdot \left\{ \prod_{j=1}^{i-1} \left(s + \frac{N-9}{2} - 2n + 3 + j \right)^j \right\}$$

para $i = 2n-4, 2n, 2n+1, \dots$

$$(3.3.24) \quad B_i^1 = \Gamma^{2n-4} \left(s + \frac{N-9}{2} + i - 2n - 4 \right) \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma \left(s + \frac{N-10}{2} - j \right) \right\} \div$$

$$\div Q_{(n)}^{**}(s) \left\{ \prod_{j=1}^{2n-5} \left(s + \frac{N-9}{2} - 2n + 3 + j \right)^j \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \prod_{j=1}^{i-2n-4} \left(s + \frac{N-9}{2} + j - 2 \right)^{2n-4} \right\}$$

para $i = 1, 2, \dots, 2n-5$

$$(3.3.25) \quad B_i = \Gamma^{i+1} \left(s + \frac{N-10}{2} + i - 2n + 4 \right) \left\{ \prod_{j=1}^{2n-5-i} \Gamma \left(s + \frac{N-10}{2} - j \right) \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma \left(s + \frac{N-9}{2} - j \right) \right\} \div Q_{(n)}^{**}(s) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \prod_{j=1}^{i-1} \left(s + \frac{N-10}{2} - 2n + 3 + j \right)^j \right\}$$

para $i = 2n-4, 2n+1, 2n+2, \dots$

$$(3.3.26) \quad B_i = \Gamma^{2n-4} \left(s + \frac{N-10}{2} + i - 2n + 4 \right) \cdot$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma\left(s + \frac{N-9}{2} - j\right) \right\} \div Q_{(n)}^{**}(s) \cdot \\
 & \cdot \left\{ \prod_{j=1}^{2n-4} \left(s + \frac{N-10}{2} - 2n+3+j\right)^j \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{i-2n+3} \left(s + \frac{N-10}{2} + j-1\right)^{2n-4} \right\}
 \end{aligned}$$

onde

$$(3.3.27) \quad Q_{(n)}^{**}(s) = Q_n(s) \left(s + \frac{N-4}{2}\right)^{[3(n-1)/(n+1)]}.$$

$$\cdot \left\{ \prod_{j=5}^8 \left(s + \frac{N-j}{2}\right)^2 \right\} \left\{ \prod_{j=9}^{10} \left(s + \frac{N-j}{2}\right) \right\}$$

(vide (3.3.4) e (3.3.5)).

Calculando os limites das expressões de (3.3.14) a (3.3.27) e respectivas derivadas dos logaritmos quando $s \rightarrow s_0$, ficamos com

para $s_0 = (i-N)/2$, $i = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

$$(3.3.28) \quad B_{O_9}'' = (-2) \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma\left(-\frac{1}{2} - j\right) \right\} \div Q_{(n)}^* \left(\frac{9-N}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \prod_{j=1}^{2n-4} (-j)^{2n-3-j} \right\}$$

$$(3.3.29) \quad B_{O_{10}}'' = (2) \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma\left(\frac{1}{2} - j\right) \right\} \div Q_{(n)}^* \left(\frac{10-N}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \prod_{j=1}^{2n-4} (-j)^{2n-3-j} \right\} \cdot$$

$$(3.3.30) \quad B_{O_4}'' = (8/135) \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma\left(-\frac{5}{2} - j\right) \right\} \div Q_{(n)} \left(\frac{4-N}{2}\right) \cdot \\ \cdot \left\{ \prod_{j=1}^4 (-j)^{2n-4} \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{2n-5} (-4-j)^{2n-4-j} \right\}.$$

$$(3.3.31) \quad B_{O_5}'' = (16/9) \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma\left(-\frac{5}{2} - j\right) \right\} \div Q_{(n)}^{**} \left(\frac{5-N}{2}\right) \cdot \\ \cdot \left\{ \prod_{j=1}^3 (-j)^{2n-4} \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{2n-5} (-3-j)^{2n-4-j} \right\}.$$

$$(3.3.32) \quad B_{O_6}'' = (16) \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma\left(-\frac{3}{2} - j\right) \right\} \div Q_{(n)}^{**} \left(\frac{6-N}{2}\right) \cdot \\ \cdot \left\{ \prod_{j=1}^3 (-j)^{2n-4} \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{2n-5} (-3-j)^{2n-4-j} \right\}.$$

$$(3.3.33) \quad B_{O_7}'' = (16) \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma\left(-\frac{3}{2} - j\right) \right\} \div Q_{(n)}^{**} \left(\frac{7-N}{2}\right) \cdot \\ \cdot \left\{ \prod_{j=1}^2 (-j)^{2n-4} \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{2n-5} (-2-j)^{2n-4-j} \right\}.$$

$$(3.3.34) \quad B_{O_8}'' = (16/9) \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma\left(-\frac{1}{2} - j\right) \right\} \div Q_{(n)}^{**} \left(\frac{8-N}{2}\right) \cdot \\ \cdot \left\{ \prod_{j=1}^2 (-j)^{2n-4} \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{2n-5} (-2-j)^{2n-4-j} \right\}$$

onde

para $i = 9, 10$

$$(3.3.35) \quad Q_{(n)}^* \left(\frac{i-N}{2} \right) = Q_{(n)} \left(\frac{i-N}{2} \right) \left(\frac{i-4}{2} \right)^{[3(n-1)/(n+1)]} \cdot \left\{ \prod_{j=5}^8 \left(\frac{i-j}{2} \right)^2 \right\}$$

e

para $i = 5, 6, 7, 8$

$$(3.3.36) \quad Q_{(n)}^{**} \left(\frac{i-N}{2} \right) = Q_{(n)} \left(\frac{i-N}{2} \right) \left(\frac{i-4}{2} \right)^{[3(n-1)/(n+1)]} \cdot \left\{ \prod_{j=9}^{10} \left(\frac{i-j}{2} \right) \right\}$$

com

$$(3.3.37) \quad Q_{(n)} \left(\frac{i-N}{2} \right) = \left\{ \prod_{j=1}^{2n-6} \Gamma \left(\frac{i-3}{2} + \frac{j}{n-1} \right) \right\} \cdot \left\{ \prod_{j=1}^{[(n+3)/3]} \Gamma \left(\frac{i-3}{2} + \frac{2j-3}{2(n-1)} \right) \right\} \cdot \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, [n/2]}}^{2n-5} \Gamma \left(\frac{i-3}{2} + \frac{j-2}{n-1} \right) \right\} \cdot \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq [(n-2)/2]}}^{[(n+5)/3]} \Gamma \left(\frac{i-3}{2} + \frac{2j-5}{2(n-1)} \right) \right\}, \quad \text{para } n=3, 4.$$

$$(3.3.38) \quad Q_{(n)} \left(\frac{i-N}{2} \right) = \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq (n-1)/2}}^{n-2} \Gamma \left(\frac{i-3}{2} + \frac{j}{n-1} \right) \right\} \cdot \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq (n+2)/2}}^{n-1} \Gamma \left(\frac{i-3}{2} + \frac{2j-3}{2(n-1)} \right) \right\}$$

$$\left\{ \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{i-3}{2} + \frac{j-2}{n-1}\right) \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{i-3}{2} + \frac{2j-5}{2(n-1)}\right) \right\}$$

$$j \neq 2, (n+3)/2 \quad j \neq (n+4)/2$$

para $n = 5, 6, 7, \dots$

para $\ell = 1, 2, \dots, 2n-5$

$$(3.3.39) \quad A_{O_9}'' = -(2n-4)\gamma + \sum_{j=1}^{2(n-2)} \psi\left(-\frac{1}{2} - j\right) - D_{O_i}'' -$$

$$- (2/5) \left([3(n-1)/(n+1)]\right) - \sum_{j=1}^{2n-4} (2n-3-j)/(-j) - \frac{19}{3}.$$

$$(3.3.40) \quad A_{O_9}^{(\ell)} = (-)^{\ell+1} \ell! \left\{ (2n-4) \zeta(\ell+1, 1) + \sum_{j=1}^{2n-4} \zeta(\ell+1, -\frac{1}{2} - j) - \right.$$

$$- S_{O_{i\ell}}'' + \sum_{j=1}^{2n-4} (2n-3-j)/(-j)^{\ell+1} + (-2)^{\ell+1} +$$

$$\left. + (2/5)^{\ell+1} \left([3(n-1)/(n+1)]\right) + 2^{\ell+2} \sum_{j=5}^8 1/(9-j)^{\ell+1} \right\}.$$

$$(3.3.41) \quad A_{O_{10}}'' = -(2n-4)\gamma + \sum_{j=1}^{2(n-2)} \psi\left(\frac{1}{2} - j\right) - D_{O_i}'' -$$

$$- (1/3) \left([3(n-1)/(n+1)]\right) - \sum_{j=1}^{2n-4} (2n-3-j)/(-j) - \frac{107}{15}.$$

$$(3.3.42) \quad A_{O_{10}}^{(\ell)} = (-)^{\ell+1} \ell! \left\{ (2n-4) \zeta(\ell+1, 1) + \sum_{j=1}^{2(n-2)} \zeta(\ell+1, \frac{1}{2} - j) - \right.$$

$$- S_{i\ell}'' + \sum_{j=1}^{2n-4} (2n-3-j)/(-j)^{\ell+1} + (1/3)^{\ell+1} ([3(n-1)/(n+1)]) + \\ + 2^{\ell+2} \sum_{j=5}^8 1/(10-j)^{\ell+1} + 2^{\ell+1} \}$$

para $\ell = 1, 2, \dots, 2n-5$, se $n = 3, 4$ e

para $\ell = 1, 2, \dots, 2n-4$, se $n = 5, 6, 7, 8, \dots$

$$(3.3.43) \quad A_{O_4}'' = -(2n-4)\gamma + \sum_{j=1}^{2(n-2)} \psi(-\frac{5}{2} - j) - D_{O_i}'' - \\ - \sum_{j=1}^{2n-5} (2n-4-j)/(-4-j) + \frac{125n+22}{30}.$$

$$(3.3.44) \quad A_{O_4}''^{(\ell)} = (-)^{\ell+1} \ell! \{ (2n-4) \zeta(\ell+1, 1) + \sum_{j=1}^{2(n-2)} \zeta(\ell+1, -\frac{5}{2} - j) - \\ - S_{i\ell}'' + \sum_{j=1}^{2n-5} (2n-4-j)/(-4-j)^{\ell+1} + (2n-4) \sum_{j=1}^4 1/(-j)^{\ell+1} + \\ + 2^{\ell+2} \sum_{j=5}^8 1/(4-j)^{\ell+1} + 2^{\ell+1} \sum_{j=9}^{10} 1/(4-j)^{\ell+1} \}$$

para $\ell = 1, 2, \dots, 2n-4$

$$(3.3.45) \quad A_{O_5}'' = -(2n-4)\gamma + \sum_{j=1}^{2(n-2)} \psi(-\frac{5}{2} - j) - D_{O_i}'' - \\ - 2([3(n-1)/(n+1)]) - \sum_{j=1}^{2n-5} (2n-4-j)/(-3-j) + \frac{110n+27}{30}.$$

$$\begin{aligned}
 (3.3.46) \quad A_{O_5}^{''(\ell)} &= (-)^{\ell+1} \ell! \left\{ (2n-4) \zeta(\ell+1, 1) + \sum_{j=1}^{2(n-2)} \zeta(\ell+1, -\frac{5}{2}-j) - \right. \\
 &\quad - S_{O_{i\ell}}^{''} + 2^{\ell+1} ([3(n-1)/(n+1)]) + 2^{\ell+2} \sum_{j=6}^8 1/(5-j)^{\ell+1} + \\
 &\quad + 2^{\ell+1} \sum_{j=9}^{10} 1/(5-j)^{\ell+1} + (2n-4) \sum_{j=1}^3 1/(-j)^{\ell+1} + \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^{2n-5} (2n-4-j)/(-3-j)^{\ell+1} \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.3.47) \quad A_{O_6}^{''} &= -(2n-4)\gamma + \sum_{j=1}^{2n-2} \psi(-\frac{3}{2}-j) - D_{O_i}^{''} - \\
 &\quad - \sum_{j=1}^{2n-5} (2n-4-j)/(-3-j) - ([3(n-1)/(n+1)]) + \frac{22n-25}{6}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.3.48) \quad A_{O_6}^{''(\ell)} &= (-)^{\ell+1} \ell! \left\{ (2n-4) \zeta(\ell+1, 1) + \sum_{j=1}^{2(n-2)} \zeta(\ell+1, -\frac{3}{2}-j) - \right. \\
 &\quad - S_{O_{i\ell}}^{''} + \sum_{j=1}^{2n-5} (2n-4-j)/(-3-j)^{\ell+1} + [3(n-1)/(n+1)] + \\
 &\quad + 2^{\ell+2} \sum_{\substack{j=5 \\ j \neq 6}}^8 1/(6-j)^{\ell+1} + 2^{\ell+1} \sum_{j=9}^{10} 1/(6-j)^{\ell+1} + \\
 &\quad \left. + (2n-4) \sum_{j=1}^3 1/(-j)^{\ell+1} \right\}.
 \end{aligned}$$

$$(3.3.49) \quad A_{O_7}^{''} = -(2n-4)\gamma + \sum_{j=1}^{2(n-2)} \psi(-\frac{3}{2}-j) - D_{O_i}^{''} -$$

$$= (2/3) ([3(n-1)/(n+1)]) - \sum_{j=1}^{2n-5} (2n-4-j)/(-2-j) + \frac{9n-19}{3}.$$

$$\begin{aligned} (3.3.50) \quad A_{O_7}^{''(\ell)} &= (-)^{\ell+1} \ell! \{ (2n-4) \zeta(\ell+1, 1) + \sum_{j=1}^{2(n-2)} \zeta(\ell+1, -\frac{3}{2}-j) - \\ &- S_{O_{1\ell}}'' + (2n-4) \sum_{j=1}^2 1/(-j)^{\ell+1} + \sum_{j=1}^{2n-5} (2n-4-j)/(-2-j)^{\ell+1} + \\ &+ (2/3)^{\ell+1} ([3(n-1)/(n+1)]) + 2^{\ell+2} \sum_{\substack{j=5 \\ j \neq 7}}^8 1/(7-j)^{\ell+1} + \\ &+ 2^{\ell+1} \sum_{j=9}^{10} 1/(7-j)^{\ell+1} \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3.3.51) \quad A_{O_8}'' &= -(2n-4)\gamma - \sum_{j=1}^{2(n-2)} \psi(-\frac{1}{2}-j) - D_{O_i}'' - \\ &- \sum_{j=1}^{2n-5} (2n-4-j)/(-2-j) - (1/2) ([3(n-1)/(n+1)]) + \frac{9n-20}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3.3.52) \quad A_{O_8}^{''(\ell)} &= (-)^{\ell+1} \ell! \{ (2n-4) \zeta(\ell+1, 1) + \sum_{j=1}^{2(n-2)} \zeta(\ell+1, -\frac{1}{2}-j) - \\ &- S_{O_{1\ell}}'' + (2n-4) \sum_{j=1}^2 1/(-j)^{\ell+1} + \sum_{j=1}^{2n-5} (2n-4-j)/(-2-j)^{\ell+1} + \\ &+ (1/2)^{\ell+1} ([3(n-1)/(n+1)]) + 2^{\ell+2} \sum_{j=5}^8 1/(8-j)^{\ell+1} + \end{aligned}$$

$$+ 2^{\ell+1} \sum_{j=9}^{10} 1/(8-j)^{\ell+1}$$

onde

para $n = 3, 4$

$$(3.3.53) \quad D''_{O_i} = \sum_{j=1}^{2n-6} \psi\left(\frac{i-3}{2} + \frac{j}{n-1}\right) + \sum_{j=1}^{[(n+3)/3]} \psi\left(\frac{i-3}{2} + \frac{2j-3}{2(n-1)}\right) + \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, [n/2]}}^{2n-5} \psi\left(\frac{i-3}{2} + \frac{j-2}{n-1}\right) + \sum_{j=1}^{[(n+5)/3]} \psi\left(\frac{i-3}{2} + \frac{2j-5}{2(n-1)}\right).$$

$$(3.3.54) \quad S''_{O_{i\ell}} = \prod_{j=1}^{2n-6} \zeta(\ell+1, \frac{i-3}{2} + \frac{j}{n-1}) + \sum_{j=1}^{[(n+3)/3]} \zeta(\ell+1, \frac{i-3}{2} + \frac{2j-3}{2(n-1)}) + \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, [n/2]}}^{2n-5} \zeta(\ell+1, \frac{i-3}{2} + \frac{j-2}{n-1}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq [(n-2)/2]}}^{[(n+5)/3]} \zeta(\ell+1, \frac{i-3}{2} + \frac{2j-5}{2(n-1)}).$$

para $n = 5, 6, 7, \dots$

$$(3.3.55) \quad D''_{O_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (n-1)/2}}^{n-2} \psi\left(\frac{i-3}{2} + \frac{j}{n-1}\right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (n+2)/2}}^{n-1} \psi\left(\frac{i-3}{2} + \frac{2j-3}{2(n-1)}\right) + \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, (n+3)/2}}^{n-1} \psi\left(\frac{i-3}{2} + \frac{j-2}{n-1}\right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (n+4)/2}}^{n-1} \psi\left(\frac{i-3}{2} + \frac{2j-5}{2(n-1)}\right).$$

$$(3.3.56) \quad S''_{O_{i\ell}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (n-1)/2}}^{n-2} \zeta(\ell+1, \frac{i-3}{2} + \frac{j}{n-1}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (n-2)/2}}^{n-1} \zeta(\ell+1, \frac{i-3}{2} + \frac{2j-3}{2(n-1)}) + \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, (n+3)/2}}^{n-1} \zeta(\ell+1, \frac{i-3}{2} + \frac{j-2}{n-1}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (n+4)/2}}^{n-1} \zeta(\ell+1, \frac{i-3}{2} + \frac{2j-5}{2(n-1)})$$

para $s_O = \frac{9-N}{2} - i + 2n-3$, $i = 1, 2, \dots, 2n-5$ e $\ell = 1, 2, \dots, i-2$

$$(3.3.57) \quad B''_{O_i} = \left\{ \prod_{j=1}^{2n-5-i} \Gamma(2n-3-i-j) \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma(2n - \frac{7}{2} - i - j) \right\} \div \\ \div Q^{**} \left(\frac{9-N}{2} - i + 2n-3 \right) \left\{ \prod_{j=1}^{i-1} (j-i)^j \right\}.$$

$$(3.3.58) \quad A'_{O_i} = -(i+1)\gamma + \sum_{j=1}^{2n-5-i} (2n-3-i-j) + \sum_{j=1}^{2(n-2)} \psi(2n - \frac{7}{2} - i - j) - \\ - D^{**}_{O_i} - \sum_{j=1}^{i-1} j/(j-i).$$

$$(3.3.59) \quad A'^{(\ell)}_{O_i} = (-)^{\ell+1} \ell! \{ (i+1) \zeta(\ell+1, 1) \} + \sum_{j=1}^{2n-5-i} \zeta(\ell+1, 2n-3-i-j) + \\ + \sum_{j=1}^{2(n-2)} \zeta(\ell+1, 2n - \frac{7}{2} - i - j) - S^{**}_{O_{i\ell}} + \sum_{j=1}^{i-1} j/(j-1)^{\ell+1} \}$$

para $i = 2n-4, 2n, 2n+1, \dots$ e $\ell = 1, 2, \dots, 2n-6$

$$(3.3.60) \quad B'_{O_i} = \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma\left(2n - \frac{7}{2} - i - j\right) \right\} \div Q^{**} \left(\frac{9-N}{2} - i + 2n - 3\right) .$$

$$\cdot \left\{ \prod_{j=1}^{2n-5} (j-i)^j \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{i-2n+4} (2n-5-i+j)^{2n-4} \right\} .$$

$$(3.3.61) \quad A'_{O_i} = -(2n-4)\gamma + \sum_{j=1}^{2(n-2)} \psi\left(2n - \frac{7}{2} - i - j\right) - D^{**}_{O_i} -$$

$$- \sum_{j=1}^{2n-5} j/(j-i) - (2n-4) \sum_{j=1}^{i-2n+4} 1/(2n-5-i+j) .$$

$$(3.3.62) \quad A'^{(\ell)}_{O_i} = (-)^{\ell+1} \ell! \left\{ (2n-4)\zeta(\ell+1, 1) + \sum_{j=1}^{2(n-2)} \zeta(\ell+1, 2n - \frac{7}{2} - i - j) - \right.$$

$$\left. - S^{**}_{O_{i\ell}} + \sum_{j=1}^{2n-5} j/(j-i)^{\ell+1} + (2n-4) \sum_{j=1}^{i-2n+4} 1/(2n-5-i+j)^{\ell+1} \right\}$$

com

$$(3.3.63) \quad Q^{**}_{(n)} \left(\frac{9-n}{2} - i + 2n - 3\right) = Q_{(n)} \left(\frac{9-N}{2} - i + 2n - 3\right) .$$

$$\cdot \left(2n - \frac{1}{2} - i\right) [3(n-1)/(n+1)] \cdot \left\{ \prod_{j=5}^8 \left(\frac{3-j}{2} + 2n - i\right)^2 \right\} .$$

$$\cdot \left\{ \prod_{j=9}^{10} \left(\frac{3-j}{2} + 2n - i\right) \right\} .$$

$$(3.3.64) \quad D_{O_i}^{**} = D_{O_i}' + (1/(2n - \frac{1}{2} - 1)) ([3(n-1)/(n+1)]) + \\ + 2 \sum_{j=5}^8 1/(\frac{3-j}{2} + 2n-i) + \sum_{j=9}^{10} 1/(\frac{3-j}{2} + 2n-i).$$

$$(3.3.65) \quad S_{O_{i\ell}}^{**} = S_{O_i}'^{(\ell)} - (1/2n - \frac{1}{2} - i)^{\ell+1} ([3(n-1)/(n+1)]) - \\ - 2 \sum_{j=5}^8 1/(\frac{3-j}{2} + 2n-i)^{\ell+1} - \sum_{j=9}^{10} 1/(\frac{3-j}{2} + 2n-i)^{\ell+1}.$$

onde

para $n = 3, 4,$

$$(3.3.66) \quad Q_{(n)}(\frac{9-N}{2} - i + 2n-3) = \{ \prod_{j=1}^{2n-6} \Gamma(2n-i + \frac{j}{n-1}) \} \cdot \\ \cdot \{ \prod_{j=1}^{[(n+3)/3]} \Gamma(2n-i + \frac{2j-3}{2(n-1)}) \} \cdot \{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, [n/2]}}^{2n-5} \Gamma(2n-i + \frac{j-2}{n-1}) \} \cdot \\ \cdot \{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq [(n-2)/2]}}^{[(n+5)/3]} \Gamma(2n-i + \frac{2j-5}{2(n-1)}) \}.$$

$$(3.3.67) \quad D_{O_i}' = \sum_{j=1}^{2n-6} \psi(2n-i + \frac{j}{n-1}) + \sum_{j=1}^{[(n+3)/3]} \psi(2n-i + \frac{2j-3}{2(n-1)}) + \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, [n/2]}}^{2n-5} \psi(2n-i + \frac{j-2}{n-1}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq [(n-2)/2]}}^{[(n+5)/3]} \psi(2n-i + \frac{2j-5}{2(n-1)}).$$

$$(3.3.68) \quad S'_{O_i}(\ell) = \sum_{j=1}^{2n-6} \zeta(\ell+1, 2n-i + \frac{j}{n-1}) + \sum_{j=1}^{[(n+3)/3]} \zeta(\ell+1, 2n-i + \frac{2j-3}{2(n-1)}) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, [n/2]}}^{2n-5} \zeta(\ell+1, 2n-i + \frac{j-2}{n-1}) + \sum_{j=1}^{[(n+5)/3]} \zeta(\ell+1, 2n-i + \frac{2j-5}{2(n-1)})$$

$$j \neq [(n-2)/2]$$

para $n = 5, 6, 7 \dots$

$$(3.3.69) \quad Q_{(n)}(\frac{9-N}{2} - i + 2n-3) = \{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq (n-1)/2}}^{n-2} \Gamma(2n-i + \frac{j}{n-1}) \} \cdot$$

$$\cdot \{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq (n+2)/2}}^{n-1} \Gamma(2n-i + \frac{2j-3}{2(n-1)}) \} \cdot \{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, (n+3)/2}}^{n-1} \Gamma(2n-i + \frac{j-2}{n-1}) \} \cdot$$

$$\cdot \{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq (n+4)/2}}^{n-1} \Gamma(2n-i + \frac{2j-5}{2(n-1)}) \} \cdot$$

$$(3.3.70) \quad D'_{O_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (n-1)/2}}^{n-2} \psi(2n-i + \frac{j}{n-1}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (n+2)/2}}^{n-1} \psi(2n-i + \frac{2j-3}{2(n-1)}) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, (n+3)/2}}^{n-1} \psi(2n-i + \frac{j-2}{n-1}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (n+4)/2}}^{n-1} \psi(2n-i + \frac{2j-5}{2(n-1)}) \cdot$$

$$(3.3.71) \quad S'_{O_i}(\ell) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (n-1)/2}}^{n-2} \zeta(\ell+1, 2n-i + \frac{j}{n-1}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (n+2)/2}}^{n-1} \zeta(\ell+1, 2n-i + \frac{2j-3}{2(n-1)}) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, (n+3)/2}}^{n-1} \zeta(\ell+1, 2n-i + \frac{j-2}{n-1}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (n+4)/2}}^{n-1} \zeta(\ell+1, 2n-i + \frac{2j-5}{2(n-1)}).$$

para $s_o = \frac{10-N}{2} - i + 2n-3, \quad i = 1, 2, \dots, 2n-5 \quad e$
 $\ell = 1, 2, \dots, i-2.$

$$(3.3.72) \quad B_{O_i} = \left\{ \prod_{j=1}^{2n-5-i} \Gamma(2n-3-i-j) \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma(2n - \frac{5}{2} - i-j) \right\} \div$$

$$\div Q_{(n)}^{**} \left(\frac{10-N}{2} - i + 2n-3 \right) \left\{ \prod_{j=1}^{i-1} (j-i)^j \right\}.$$

$$(3.3.73) \quad A_{O_i} = -(i+1)\gamma + \sum_{j=1}^{2n-5-i} \psi(2n-3-i-j) + \sum_{j=1}^{2(n-2)} \psi(2n - \frac{5}{2} - i-j) -$$

$$- D_{O_i}^* - \prod_{j=1}^{i-1} j/(j-i).$$

$$(3.3.74) \quad A_{O_i}^{(\ell)} = (-)^{\ell+1} \ell! \left\{ (i+1) \zeta(\ell+1, 1) + \sum_{j=1}^{2n-5-i} \zeta(\ell+1, 2n-3-i-j) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{2(n-2)} \zeta(\ell+1, 2n - \frac{5}{2} - i-j) - S_{O_{i\ell}}^* + \sum_{j=1}^{i-1} j/(j-i)^{\ell+1} \right\}.$$

para $i = 2n-4, 2n+1, 2n+2, \dots \quad e$
 $\ell = 1, 2, \dots, 2n-6$

$$(3.3.75) \quad B_{O_i} = \left\{ \prod_{j=1}^{2(n-2)} \Gamma\left(2n - \frac{5}{2} - i - j\right) \right\} \div Q_{(n)}^{**} \left(\frac{10-N}{2} - i + 2n-3\right) \cdot \\ \cdot \left\{ \prod_{j=1}^{2n-4} (j-i)^j \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{i-2n+3} (2n-4-i+j)^{2n-4} \right\} \cdot$$

$$(3.3.76) \quad A_{O_i} = -(2n-4) \gamma \sum_{j=1}^{2(n-2)} \psi\left(2n - \frac{5}{2} - i - j\right) - D_{O_i}^* - \\ - \sum_{j=1}^{2n-4} j/(j-i) - (2n-4) \sum_{j=1}^{i-2n+3} 1/(2n-4-i+j) \cdot$$

$$(3.3.77) \quad A_{O_i}^{(\ell)} = (-)^{\ell+1} \ell! \left\{ (2n-4) \zeta(\ell+1, 1) + \right. \\ + \sum_{j=1}^{2(n-2)} \zeta(\ell+1, 2n - \frac{5}{2} - i - j) - S_{O_{i\ell}}^* + \sum_{j=1}^{2n-4} j/(j-i)^{\ell+1} + \\ \left. + (2n-4) \sum_{j=1}^{i-2n+3} 1/(2n-4-i+j)^{\ell+1} \right\}$$

com

$$(3.3.78) \quad Q_{(n)}^{**} \left(\frac{10-N}{2} - i + 2n-3\right) = Q_{(n)} \left(\frac{10-N}{2} - i + 2n-3\right) \cdot \\ \cdot (2n-i)^{[3(n-1)/(n+1)]} \left\{ \prod_{j=5}^8 \left(\frac{4-j}{2} + 2n-i\right)^2 \right\} \cdot \\ \cdot \left\{ \prod_{j=9}^{10} \left(\frac{4-j}{2} + 2n-i\right) \right\} \cdot$$

$$(3.3.79) \quad D_{O_i}^* = D_{O_i} + (1/(2n-i)) \cdot ([3(n-1)/(n+1)]) + \\ + 2 \sum_{j=5}^8 1/(\frac{4-j}{2} + 2n-i) + \sum_{j=9}^{10} 1/(\frac{4-j}{2} + 2n-i) .$$

$$(3.3.80) \quad S_{O_{i\ell}}^* = S_{O_i}^{(\ell)} - (1/(2n-i))^{\ell+1} ([3(n-1)/(n+1)]) - \\ - 2 \sum_{j=5}^8 1/(\frac{4-j}{2} + 2n-i)^{\ell+1} - \sum_{j=9}^{10} 1/(\frac{4-j}{2} + 2n-i)^{\ell+1} .$$

onde

para $n = 3, 4,$

$$(3.3.81) \quad Q_{(n)} \left(\frac{10-N}{2} - i + 2n-3 \right) = \left\{ \prod_{j=1}^{2n-6} \Gamma \left(2n + \frac{1}{2} - i + \frac{j}{n-1} \right) \right\} \cdot \\ \cdot \prod_{j=1}^{[(n-3)/3]} \Gamma \left(2n + \frac{1}{2} - i + \frac{2j-3}{2(n-1)} \right) \cdot \\ \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, [n/2]}}^{2n-5} \Gamma \left(2n + \frac{1}{2} - i + \frac{j-2}{n-1} \right) \cdot \\ \cdot \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq [(n-2)/2]}}^{[(n+5)/3]} \Gamma \left(2n + \frac{1}{2} - i + \frac{2j-5}{2(n-1)} \right) \right\} .$$

$$(3.3.82) \quad D_{O_i} = \sum_{j=1}^{2n-6} \psi \left(2n + \frac{1}{2} - i + \frac{j}{n-1} \right) + \sum_{j=1}^{[(n+3)/3]} \psi \left(2n + \frac{1}{2} - i + \frac{2j-3}{2(n-1)} \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, [n/2]}}^{2n-5} \psi(2n + \frac{1}{2} - i + \frac{j-2}{n-1}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq [(n-2)/2]}}^{[(n+5)/3]} \psi(2n + \frac{1}{2} - i + \frac{2j-5}{2(n-1)}).$$

$$(3.3.83) \quad S_{o_i}^{(\ell)} = \sum_{j=1}^{2n-6} \zeta(\ell+1, 2n + \frac{1}{2} - i + \frac{j}{n-1}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{[(n+3)/3]} \zeta(\ell+1, 2n + \frac{1}{2} - i + \frac{2j-3}{2(n-1)}) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, [n/2]}}^{2n-5} \zeta(\ell+1, 2n + \frac{1}{2} - i + \frac{j-2}{n-1}) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq [(n-2)/2]}}^{[(n+5)/2]} \zeta(\ell+1, 2n + \frac{1}{2} - i + \frac{2j-5}{2(n-1)})$$

para $n = 5, 6, 7, \dots$

$$(3.3.84) \quad Q_{(n)}(\frac{10-N}{2} - i + 2n-3) = \{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq (n-1)/2}}^{n-2} \Gamma(2n + \frac{1}{2} - i + \frac{j}{n-1}) \}$$

$$\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq (n+2)/2}}^{n-1} \Gamma(2n + \frac{1}{2} - i + \frac{2j-3}{2(n-1)}) \}$$

$$\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, (n+3)/2}}^{n-1} \Gamma(2n + \frac{1}{2} - i + \frac{j-2}{n-1}) \}.$$

$$\cdot \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq (n+4)/2}}^{n-1} \Gamma \left(2n + \frac{1}{2} - i + \frac{2j-5}{2(n+1)} \right) \right\} \cdot$$

$$(3.3.85) \quad D_{O_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (n-1)/2}}^{n-2} \psi \left(2n + \frac{1}{2} - i + \frac{j}{n-1} \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (n+2)/2}}^{n-1} \psi \left(2n + \frac{1}{2} - i + \frac{2j-3}{2(n-1)} \right) + \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, (n+3)/2}}^{n-1} \psi \left(2n + \frac{1}{2} - i + \frac{j-2}{n-1} \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (n+4)/2}}^{n-1} \psi \left(2n + \frac{1}{2} - i + \frac{2j-5}{2(n-1)} \right).$$

$$(3.3.86) \quad S_{O_i}^{(\ell)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (n-1)/2}}^{n-2} \zeta(\ell+1, 2n + \frac{1}{2} - i + \frac{j}{n-1}) + \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (n+2)/2}}^{n-1} \zeta(\ell+1, 2n + \frac{1}{2} - i + \frac{2j-3}{2(n-1)}) + \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2, (n+3)/2}}^{n-1} \zeta(\ell+1, 2n + \frac{1}{2} - i + \frac{j-2}{n-1}) + \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (n+4)/2}}^{n-1} \zeta(\ell+1, 2n + \frac{1}{2} - i + \frac{2j-5}{2(n-1)}).$$

Portanto, uma vez obtidas as expressões de (3.3.28) a (3.3.86), podemos expressar a função densidade de $\bar{L}(vc)$, $f(x)$, pela aplicação do teorema dos resíduos e por (3.2.13), como

$$\begin{aligned}
 (3.3.87) \quad f(x) &= \left\{ \prod_{a=1}^4 \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{N-1}{2} + \frac{2j-a-1}{2(n-1)}\right) \right\} \div \left\{ \prod_{j=1}^{4(n-1)} \Gamma\left(\frac{N-4-j}{2}\right) \right\} \cdot \\
 &\cdot x^{N/2} \left\{ \frac{1}{(2n-4)!} \sum_{t=0}^{2n-4} \binom{2n-4}{t} (-\ell_n x)^{2n-4-t} (x^{-9/2} B_{O_9}''(t)) + \right. \\
 &+ x^{-10/2} B_{O_{10}}''(t) + R_{(n)}^* (x^{-4/2} B_{O_4}''(t)) + \\
 &+ \frac{1}{(2n-3)!} \sum_{t=0}^{2n-3} \binom{2n-3}{t} (-\ell_n x)^{2n-3-t} (x^{-5/2} B_{O_6}''(t)) + \\
 &+ x^{-6/2} B_{O_6}''(t) + x^{-7/2} B_{O_7}''(t) + x^{-8/2} B_{O_8}''(t) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{2n-5} \frac{x^{i-2n}}{(i-1)!} \sum_{t=0}^{i-1} \binom{i-1}{t} (-\ell_n x)^{i-1-t} (x^{-3/2} B_{O_i}'(t)) + \\
 &+ x^{-4/2} B_{O_i}'(t) + \frac{1}{(2n-5)!} \sum_{t=0}^{2n-5} \binom{2n-5}{t} (-\ell_n x)^{2n-5-t} \\
 &\left(\sum_{\substack{i=2n-4 \\ i \neq 2n-3, 2n-2, 2n-1}}^{\infty} x^{-3/2+i-2n} B_{O_i}'(t) + \right. \\
 &+ \left. \sum_{\substack{i=2n-4 \\ i \neq 2n-3, 2n-2, 2n-1, 2n}}^{\infty} x^{-4/2+i-2n} B_{O_i}(t) \right\}.
 \end{aligned}$$

1 (0 < x < 1)

onde

para $n = 3, 4$

$$(3.3.88) \quad R_{(n)}^* = \frac{1}{(2n-4)!} \sum_{t=0}^{2n-4} \binom{2n-4}{t} (-\ln x)^{2n-4-t}$$

e

para $n = 5, 6, 7, \dots$

$$(3.3.89) \quad R_{(n)}^* = \frac{1}{(2n-3)!} \sum_{t=0}^{2n-3} \binom{2n-3}{t} (-\ln x)^{2n-3-t}$$

e onde os coeficientes $B_{o_i}''(t)$, $B_{o_i}'(t)$ e $B_{o_i}(t)$ e as suas respectivas derivadas do logaritmo são dados pelos itens de (3.3.28) a (3.3.86), e por (3.2.11), a fórmula de recorrência para o cálculo dos $B^{(t)}_i$.

Assim, temos obtido o seguinte

TEOREMA 3.2: Para testar se a matriz de covariâncias de uma distribuição normal (nh)-variada é da forma dada em (1.2.4), contra a sua negação, a função densidade do critério da razão da verossimilhança $\bar{L}(vc)$ de Votaw, para o caso em que o número de atributos é $h=4$ e o número de repetições do experimento aleatório é $n = 3, 4, 5, \dots$, é dada em (3.3.87), e a sua função distribuição acumulada é

$$(3.3.90) \quad F(x) = \left\{ \prod_{a=1}^4 \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{N-1}{2} + \frac{2j-a-1}{2(n-1)}\right) \right\} \div \left\{ \prod_{j=1}^{4n-1} \Gamma\left(\frac{N-4-j}{2}\right) \right\} \cdot x^{N/2} \left\{ \frac{1}{(2n-4)!} \sum_{t=0}^{2n-4} \binom{2n-4}{t} \sum_{r=1}^{2n-3-t} \frac{2^r (2n-4-t)!}{(2n-3-t-r)!} (-\ln x)^{2n-3-t-r} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & (x^{-7/2} \frac{B''_{O_9}(t)}{(N-7)^r} + x^{-8/2} \frac{B''_{O_{10}}(t)}{(N-8)^r} + I^*_{(n)} (2^r x^{-1} \frac{B''_{O_4}(t)}{(N-2)^r} + \\
 & + \frac{1}{(2n-3)!} \sum_{t=0}^{2n-3} \binom{2n-3}{t} \sum_{r=1}^{2n-2-t} \frac{2^r (2n-3-t)!}{(2n-2-t-r)!} (-\ell_n x)^{2n-2-t-r} \\
 & (x^{-3/2} \frac{B''_{O_5}(t)}{(N-3)^r} + x^{-2} \frac{B''_{O_6}(t)}{(N-4)^r} + x^{-5/2} \frac{B''_{O_7}(t)}{(N-5)^r} + \\
 & + x^{-3} \frac{B''_{O_8}(t)}{(N-6)^r} + \sum_{i=1}^{2n-5} \frac{x^{i-2n}}{(i-1)!} \sum_{t=0}^{i-1} \binom{i-1}{t} \\
 & \sum_{r=1}^{i-t} \frac{2^r (i-1-t)!}{(i-t-r)!} (-\ell_n x)^{i-t-r} \\
 & (x^{-1/2} \frac{B'_{O_i}(t)}{(N-1+2i-4n)^r} + x^{-1} \frac{B_{O_i}(t)}{(N-2+2i-4n)^r} + \\
 & + \frac{1}{(2n-5)!} \sum_{t=0}^{2n-5} \binom{2n-5}{t} \sum_{r=1}^{2n-4-t} \frac{2^r (2n-5-t)!}{(2n-4-t-r)!} (-\ell_n x)^{2n-4-t-r} \\
 & (\sum_{\substack{i=2n-4 \\ i \neq 2n-3, 2n-2, 2n-1}}^{\infty} x^{-1/2+i-2n} \frac{B'_{O_i}(t)}{(N-1+2i-4n)^r} +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\substack{i=2n-4 \\ i \neq 2n-3, 2n-2, 2n-1, 2n}}^{\infty} x^{-1+i-2n} \cdot \frac{B_{0i}^{(t)}}{(N-2+2i-4n)^x} \} \\ \text{se } 0 < x < 1$$

e $F(x) = 0$ se $x \leq 0$

e $F(x) = 1$ se $x \geq 1$

onde

para $n = 3, 4$

$$(3.3.91) \quad I_{(n)}^* = \frac{1}{(2n-4)!} \sum_{t=0}^{2n-4} \binom{2n-4}{t} \sum_{r=1}^{2n-3-t} \frac{(2n-4-t)!}{(2n-3-t-r)!}$$

e

para $n = 5, 6, 7, \dots$

$$(3.3.92) \quad I_{(n)}^* = \frac{1}{(2n-3)!} \sum_{t=0}^{2n-3} \binom{2n-3}{t} \sum_{r=1}^{2n-2-t} \frac{(2n-3-t)!}{(2n-2-t-r)!} \dots$$

A P Ê N D I C E

A - A TRANSFORMADA DE MELLIN

A transformada de Mellin, segundo o mesmo (Mellin (1910)) , apareceu pela primeira vez em 1896, e nos últimos anos tem sido muito utilizada, com sucesso, para soluções de problemas, em áreas como Física e Estatística. Na área de Estatística, a transformada de Mellin, tem-se destacado como uma ferramenta útil, em problemas como o de determinação de distribuições exatas de produtos e quocientes de variáveis aleatórias independentes e de testes de hipóteses.

A transformada de Mellin, posteriormente, serviu de motivação para estudos como em trabalhos de Nair (1938), Epstein (1948), Levy (1959), Zalotarev (1962), Springer e Thompson (1966), Rathie e Kaufmann (1977), Cordeiro e Rathie (1979). Uma listagem sobre estes trabalhos e o uso da transformada na Estatística pode ser visto em Cordeiro (1980).

Por definição, a transformada de Mellin, correspondente a uma função $f(x)$, $x \geq 0$, é dada por

$$F(s) = M \{f(x)\}(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx$$

para $s = \sigma + i\tau$, $i^2 = -1$ e a região de existência de $F(s)$ uma faixa $a < \text{Re}(s) < b$ do plano complexo, paralela ao eixo imaginário.

Sob certas condições de regularidade em $f(x)$, a fórmula de inversão da transformada de Mellin $(F(s))$, por definição é dada como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{-s} F(s) ds .$$

A existência da fórmula de inversão da transformada, é dada pelo

TEOREMA (vide Titchmarsh (1948), p. 46): Se $y^{\sigma-1} f(y)$ for Lebesgue-integrável em $(0, \infty)$ e $f(y)$ é de variação limitada numa vizinhança de $y = x$, então

$$\frac{1}{2} (f(x+) + f(x-)) = (2\pi i)^{-1} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) x^{-s} ds \quad (s = \sigma + i\infty)$$

B - FUNÇÕES ESPECIAIS

B.1 - FUNÇÃO GAMA

A função gama é definida na forma integral pela fórmula

$$B.1.1. \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0$$

e como produto infinito

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha e^{\gamma\alpha} \{ \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha/n) e^{-\alpha/n} \})^{-1} \quad \alpha \neq 0, -1, -2, \dots$$

onde

$$B.1.2. \quad \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n)$$

é a constante de Euler, e seu valor aproximado é 0,5772.

Algumas propriedades da função gama que utilizamos neste trabalho:

$$B.1.3. \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha), \quad \Gamma(1) = 1$$

B.1.4. Se $\alpha = n$ é inteiro positivo, então

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$B.1.5. \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$B.1.6. \quad \Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha) = (\alpha+n-1)(\alpha+n-2) \dots (\alpha)$$

B.1.7. (Fórmula de multiplicação de gamas)

Para $m = 1, 2, 3, \dots$

$$\prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(\alpha + \frac{k}{m}\right) = m^{1/2-m\alpha} (2\pi)^{(m-1)/2} \Gamma(m\alpha).$$

Em particular, se $m = 2$

$$\text{B.1.8.} \quad \Gamma(\alpha) \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2\alpha} \sqrt{\pi} \Gamma(2\alpha)$$

esta é chamada de fórmula de duplicação (de Legendre) para a função gama.

B.2. FUNÇÃO PSI

A derivada do logaritmo natural da função gama é dita ser a função psi.

Formalmente, a função psi, é definida como

$$\text{B.2.1.} \quad \psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}, \quad \Gamma'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \Gamma(\alpha)$$

onde $\Gamma(\alpha)$ é dada por B.1.1. e ainda

$$\psi(\alpha) = -\gamma + (\alpha-1) \sum_{j=0}^{\infty} [(j+1)(\alpha+j)]^{-1}, \quad \alpha \neq 0, -1, -2, \dots$$

onde $\gamma = 0,57721566\dots$, é como em B.1.2.

Damos a seguir algumas propriedades da função psi:

$$\text{B.2.2.} \quad \psi(1) = -\gamma$$

$$\begin{aligned} \text{B.2.3.} \quad \psi(\alpha+n) &= \alpha^{-1} + (\alpha+1)^{-1} + (\alpha+2)^{-1} + \dots + (\alpha+n-1)^{-1} + \psi(\alpha) \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Em particular, se $n = 1$

$$\text{B.2.4.} \quad \psi(\alpha+1) = \alpha^{-1} + \psi(\alpha)$$

e, se $\alpha = 1$

$$\text{B.2.5.} \quad \psi(1+n) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma$$

$$\text{B.2.6.} \quad \psi(\alpha) - \psi(1-\alpha) = -\pi \cotg(\pi\alpha)$$

$$\text{B.2.7.} \quad \psi(\alpha) - \psi(-\alpha) = -\pi \cotg(\pi\alpha) - \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{B.2.8.} \quad \psi\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = \pi \tg(\pi\alpha)$$

B.2.9. (Fórmula de multiplicação de Psi's)

$$\psi(m\alpha) = m^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} \psi\left(\alpha + \frac{k}{m}\right) + \ell n m \quad m = 1, 2, \dots$$

Em particular, se $m = 2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\text{B.2.10.} \quad \psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ell n 2.$$

B.3. FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN GENERALIZADA

A função zeta de Riemann é dada por

$$\text{B.3.1.} \quad \zeta(\alpha, \ell) = \sum_{j=0}^{\infty} (\ell+j)^{-\alpha} \quad \ell \neq 0, -1, -2, \dots, \operatorname{Re}(\alpha) > 0$$

A função psi está associada à função zeta pelo seguinte resultado:

para $\ell \geq 1$

$$B.3.2. \quad \frac{d^\ell}{d\alpha^\ell} \ln \left\{ \prod_{j=1}^m \Gamma(a_j + \alpha) \right\} = \begin{cases} \sum_{j=1}^m \psi(a_j + \alpha) & \text{se } \ell = 1 \\ (-1)^\ell (\ell+1)! \sum_{j=1}^m \zeta(\ell+1, a_j + \alpha) & \text{se } \ell \geq 2 \end{cases}$$

ou equivalentemente

para $\ell = 1, 2, 3, \dots$

$$B.3.3. \quad \frac{d^\ell}{d\alpha^\ell} \psi(a + \alpha) = (-1)^{\ell+1} \ell! \psi(\ell+1, a + \alpha)$$

A única singularidade da função zeta é um polo simples em $\alpha = 1$, com resíduo valendo a unidade.

C - A FUNÇÃO G-DE-MEIJER

A função G é definida como integral de Mellin-Barnes

$$C.1. \quad G_{p,q}^{m,n} \left(z \left| \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_p \end{matrix} \right. \right) = G_{p,q}^{m,n} \left(z \left| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right. \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L z^s \left\{ \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \right\} \left\{ \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s) \right\} ds$$

$$= \left\{ \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1-b_j+s) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j-s) \right\} ds$$

onde

$$0 \leq m \leq p, \quad 0 \leq n \leq q, \quad z \neq 0, \quad z \neq \infty,$$

o produto vazio vale a unidade,

os parâmetros complexos a_h e b_k são tais que nenhum polo de $\Gamma(b_j-s)$, $j = 1, 2, \dots, m$, coincide com qualquer polo de $\Gamma(1-a_j+s)$, $j = 1, 2, \dots, n$, isto é, isso equivale a dizer que $a_h - b_k \neq 1, 2, 3, \dots$, para $h = 1, 2, \dots, m$ e $k = 1, 2, \dots, n$.

Existem três possibilidades diferentes para o caminho de integração L :

- i) L vai de $-i\infty$ a $+i\infty$, com alguns desvios, se se fizerem necessários, de modo que todos os polos de $\Gamma(b_j-s)$, $j = 1, 2, \dots, m$, estejam do lado direito do caminho, e todos os polos de $\Gamma(1-a_j+s)$, $j = 1, 2, \dots, n$, estejam à sua esquerda. Para que a integral convirja é necessário que $p+q < 2(m+n)$ e $|\arg z| < (m+n-(p+q)/2)\pi$.
- ii) L é um ciclo começando e terminando em $+\infty$, no sentido negativo, englobando todos os polos de $\Gamma(b_j-s)$, $j = 1, 2, \dots, m$, mas nenhum polo de $\Gamma(1-a_j+s)$, $j = 1, 2, \dots, n$. A integral converge se $q \geq 1$ e, ou $p < q$ ou $q = p$ e $|z| < 1$.

iii) L é um ciclo começando e terminando em $-\infty$, no sentido positivo, englobando todos os polos de $\Gamma(1-a_j+s)$, $j = 1, 2, \dots, n$, mas nenhum polo de $\Gamma(b_j-s)$ $j = 1, 2, \dots, m$. A integral converge se $p \geq 1$ e, ou $p > q$ ou $p = q$ e $|z| > 1$.

Mais detalhes sobre a função G-de-Meijer, e a demonstração das afirmações acima, podem ser vistas em Luke (1969).

R E F E R Ê N C I A S

- [1] ANDERSON, T.W. (1958) - *An Introduction to Multivariate Analysis*; John Wiley and Sons, Inc., N.Y.
- [2] AHLFORS, L.V. (1966) - *Complex Analysis*; McGraw-Hill, N.Y.
- [3] CORDEIRO, J.A. (1980) - *Distribuição Exata de Testes de Hipóteses Multivariados*; Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas.
- [4] GNEDENKO, B.V. (1978) - *The Theory of Probability* (translated from the Russian); Mir Publishers, Moscow.
- [5] KENDALL, M.G. e STUART, A.C. (1969) Vol. I - *The Advanced Theory of Statistics*; Hafner Publishing Company, N.Y.
- [6] LUKACS, E. (1970) - *Characteristic Functions*; Griffin, London.
- [7] LUKE, Y.L. (1969) Vol. I - *The Special Functions and their Approximations*; Ac. Press, N.Y.
- [8] MATHAI, A.M. e SAXENA, R.K. (1973) - *Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences*; Springer Verlag, N.Y.
- [9] MELLIN, H. (1910) - *Abriss einer einheitlichen Theorie der Gamma- und der Hypergeometrischen Functionen*; Math. Annalen 68, 305-337.

- [10] RAO, C.R. (1973) (2nd edition) - *Linear Statistical Inference and its Applications*; John Wiley and Sons, Inc., N.Y.
- [11] SNEDDON, I.N. (1972) - *The Use of Integral Transforms*; McGraw Hill, N.Y.
- [12] TITCHMARSH, E.C. (1948) - *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*; Oxford Univ. Press, London.
- [13] VOTAW, JR. D.F. (1948) - *Testing Compound Symmetry in a Normal Multivariate Distribution*; Ann. Math. Statist., 19, 473.
- [14] WHITTAKER, E.T. e WATSON, G.N. (1969) - *A Course of Modern Analysis*; Cambridge Univ. Press, London.
- [15] ZEMANIAN, A.H. (1968) - *Generalized Integral Transforms*; Interscience, N.Y.