SOBRE ENTROPÍAS FUZZY

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. **Heriberto Eduardo Róman Flores** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, de dezembro de 1989

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezy

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

SOBRE ENTROPÍAS FUZZY

Heriberto Eduardo Román Flores

Orientador: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

DEZEMBRO – 1989

Para Graciela
e nossos filhos
Eduardo, Paula e Alejandra
por terem sido minha
constante fonte de inspiração.

Para meus pais
Eduardo e Maria
que me ensinaram
a acreditar em Deus.

INTRODUÇÃO

Esta dissertação é dedicada ao estudo de entropías fuzzy e seu principal objetivo é propor uma nova classe de entropías, as multiavaliadas, e estudar suas principais propriedades.

O trabalho constitui-se de três partes distintas:

A primeira parte, desenvolvida no Capítulo I, é dedicada a alguns preliminares e resultados básicos encontrados em [01] , [30] e [43], onde a ênfase é dada sobre a Teoria de Integração de multiaplicações, medida e integração fuzzy e integração de variáveis fuzzy aleatórias, respectivamente.

No segundo Capítulo, aplicamos os resultados anteriores à construção de entropías multiavaliadas. Desenvolvemos teoremas de existência de entropías a valores nas partes de $I\!\!R^n$ construídas a partir da integral de Aumann. Extendemos posteriormente tais resultados a uma classe mais ampla de entropías a valores nas partes fuzzy de $I\!\!R^n$ e cuja construção é feita via integral de variáveis fuzzy aleatórias. São mostradas algumas propriedades importantes para entropías, uma delas é que sejam valorizações do reticulado $\mathcal{F}(X)$.

No Capítulo II, estudamos o problema de convergência de entropías e obtivemos a equivalência da continuidade destas, definidas por integrais, em relação a alguns tipos de convergência, com a continuidade das funções normalizadoras.

Observamos finalmente que $\mathcal{F}(X)$ pode ser um espaço munido, de modo natural, de uma estrutura de Espaço de Possibilidade e sob esta perspectiva o estudo das entropías têm um significado especial.

ÍNDICE

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Rodney C. Bassanezi pela orientação e pela grande amizade com que sempre me distinguiu.

Ao Departamento de Matemática da Universidade de Tarapacá que com seu apoio tornou possível meu Doutoramento.

Ao IMECC e CNPq que propiciaram condições de tranqüilidade suficiente para minha permanência no Brasil.

A todos meus amigos que direta ou indiretamente contribuiram para o final desta etapa.

CAPÍTULO I

NOÇÕES PRELIMINARES SOBRE MEDIDAS E INTEGRAÇÃO

Neste capítulo, abordaremos os resultados principais necessários no desenvolvimento do nosso trabalho.

No §1, seguindo as idéias gerais dos trabalhos de Sugeno [38], Ralescu [33], [34], [28] e [29], Wang [41] e [42], consideramos as ferramentas básicas da teoria de medida e integração fuzzy.

No §2, seguindo as idéias de Aumann [01], Klein–Thompson [25] e Hiai–Umegaki [21], introduzimos os elementos essenciais de integração de multiaplicações.

Finalmente, no §3, são dados os conceitos básicos de integração de variáveis fuzzy aleatórias, seguindo as idéias de Puri–Ralescu [29], [30].

Procuramos, na medida do possível, sistematizar este Capítulo de maneira a tornar nosso trabalho auto–suficiente. Modificamos algumas demonstrações e inserimos vários exemplos ilustrativos.

1. Medidas e Integração Fuzzy

Introdução

O objetivo deste parágrafo é dar as definições e resultados básicos da teoria da medida e integração fuzzy. Em relação a esta última, mostramos que, ainda na ausência da aditividade no sentido usual, é possível obter excelentes resultados de convergência.

Definição 1.1.1. Sejam X um conjunto não vazio ($X \neq \phi$) e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X. Uma *medida fuzzy* sobre X é uma aplicação $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow I\!R^+$ tal que

i) $\mu(\phi) = 0$

ii) Se $A, B \in \mathcal{A}$ são tais que $A \subseteq B$ então $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonia)

iii) Se (A_n) é uma seqüência em $\mathcal{A}$ tal que $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n \in I\!N$, então

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \qquad \text{(continuidade superior)}$$

iv) Se (A_n) é uma seqüência em $\mathcal{A}$ tal que $A_{n+1} \subseteq A_n$, $\forall n \in I\!N$, e $\mu(A_{n_0}) < \infty$ para algum n_0, então

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \qquad \text{(continuidade inferior)}$$

Neste caso o trio $(X, \mathcal{A}, \mu)$ será chamado um *espaço de medida fuzzy.*

Observação: Esta definição é dada por Ralescu, em [33]. Sugeno, em [38], propôs originalmente uma versão finita de medida fuzzy como sendo uma aplicação $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ que verifica as propriedades ii), iii) e iv) e, além disso, com $\mu(\phi) = 0$ e $\mu(X) = 1$.

Exemplo 1.1.2. a) É claro que qualquer medida positiva σ-aditiva é uma medida fuzzy. Em particular, a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ é uma medida fuzzy.

b) Consideremos X um conjunto finito e $x_0 \in X$, fixo.

A aplicação $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,1]$ definida por

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x_0 \in A \\ \\ 0, & \text{se} \quad x_0 \notin A \end{cases} \quad , \quad \forall A \in \mathcal{P}(X)$$

é uma medida fuzzy, chamada *medida de Dirac concentrada em* x_0.

Mais detalhes sobre a classificação de medidas fuzzy sobre conjuntos finitos podem ser vistos em Banon [02].

Definição 1.1.3. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida fuzzy e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função μ-mensurável. Definimos a *integral fuzzy* (no sentido de Sugeno) de f sobre A, em relação a medida fuzzy μ, como sendo

$$(S)\!\!\!\!\!-\!\!\!\int_A f d\mu = \bigvee_{\alpha \geq 0} [\alpha \wedge \mu(A \cap \{f \geq \alpha\})] \qquad (A \in \mathcal{A})$$

onde $\bigvee$ e $\wedge$ denotam o supremo e o ínfimo, respectivamente, e

$$\{f \geq \alpha\} = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}.$$

Observação: Em [33], Ralescu–Adams introduziram as seguintes definições de integral fuzzy:

a) Consideremos uma função mensurável, positiva e simples $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, onde $A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j$ e χ_{A_i} denota a função característica de $A_i \in \mathcal{A}$, isto é, $\chi_{A_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in A_i \\ \\ 0, & \text{se} \quad x \notin A_i \end{cases}$.

Para cada $A \in \mathcal{A}$ definimos $Q_A(s) = \bigvee_{i=1}^{n} [\alpha_i \wedge \mu(A \cap A_i)]$.

Se $f : X \longrightarrow I\!R^+$ é uma função mensurável então sua integral fuzzy (no sentido de Ralescu) é dada por:

$$(R) \int f d\mu = \sup_{s \leq f} Q_A(s)$$

b) Também, em [33] encontra-se uma outra definição de integral fuzzy (no sentido de Ralescu–Adams) como sendo:

$$(R - A) \int f d\mu = \sup_{A \in \mathcal{A}} [\mu(A) \wedge \inf_{x \in A} f(x)].$$

O principal resultado em [33] é, justamente, provar a equivalência entre as três definições de integral fuzzy dadas anteriormente.

No seguinte resultado apresentamos algumas propriedades da integral fuzzy.

Proposição 1.1.4. (Propriedades da Integral Fuzzy)

P1) $\int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu$ $\quad (\chi_A$ é a função característica de $A)$

P2) $\int_A k d\mu = k \wedge \mu(A)$ $\quad , k$ qualquer constante não negativa.

P3) (i) Se $A \subseteq B$ então $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$

(ii) Se $f_1 \leq f_2$ sobre A, então $\int_A f_1 d\mu \leq \int_A f_2 d\mu$

P4) (i) Se $\mu(A) = 0$ então $\displaystyle\fint_A f d\mu = 0$

(ii) Se $\displaystyle\fint_A f d\mu = 0$ então $\mu(A \cap \{f > 0\}) = 0$

P5) $\displaystyle\fint_A (f + k) d\mu \leq \fint_A f d\mu + \fint_A k d\mu$, $\forall k \geq 0$ constante.

P6) Seja $a \geq 0$, se $|f_1 - f_2| \leq a$ sobre A então

$$\left|\fint_A f_1 d\mu - \fint_A f_2 d\mu\right| \leq a$$

Demonstração:

Ver Wang [41].

Notaremos com $L^1(\mu)$ o espaço de todas as funções positivas, μ-mensuráveis tais que $\displaystyle\fint_X f d\mu < \infty$.

Proposição 1.1.5. (Caracterização de $L^1(\mu)$). Seja $f : X \longrightarrow I\!R^+$ uma função μ-mensurável. Então, $f \in L^1(\mu)$ se, e somente se, o conjunto
$M = \{\alpha \geq 0 : \mu(\{f \geq \alpha\}) = \infty\}$ é limitado.

Demonstração:

Pode–se ver em Ralescu–Adams [33] e Wu–Ma [46].

Observação: Note que se $\mu(X) < \infty$ então qualquer função positiva e μ-mensurável é integrável. De fato, nesse caso acontece que o conjunto $\{\alpha \geq 0 : \mu(\{f \geq \alpha\}) = \infty\}$ é vazio e, como conseqüência, limitado.

No que se segue daremos uma coleção de resultados relativos aos principais teoremas de convergência da integral no contexto fuzzy.

Definição 1.1.6. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida fuzzy, f uma função μ-mensurável e (f_k) uma seqüência de funções μ-mensuráveis. Dizemos que:

a) f_k converge a f *quase sempre* (denotado por $f_k \xrightarrow{qs} f$) se

$$\mu(\{x \in X : f_k(x) \not\longrightarrow f(x)\}) = 0$$

b) f_k converge a f *em medida* μ ($f_k \xrightarrow{\mu} f$) se para cada $\varepsilon > 0$, se tem

$$\lim_{k \to \infty} \mu(\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

c) Para $p > 0$, f_k converge a f *em p-média* ($f_k \xrightarrow{p\text{-média}} f$) se

$$\lim_{k \to \infty} \fint |f_k - f|^p d\mu = 0$$

d) f_k converge a f *uniformemente sobre* A ($f_k \xrightarrow{d_0} f$) se $\forall \varepsilon > 0$, existir $k_0 \in I\!N$ tal que $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \;\; \forall k \geq k_0$, $\forall x \in A$.

(e) f_k converge a f *quase–uniformemente* ($f_k \xrightarrow{qu} f$) se $\forall \varepsilon > 0$ existir $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) < \varepsilon$ e $f_k \xrightarrow{d_0} f$ sobre A^c.

Definição 1.1.7. Sejam $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X e $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow I\!R^+$ uma aplicação. Dizemos que:

(a) μ é *o-aditiva* se $\mu(A \cup B) = \mu(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) = 0$.

(b) i) μ é *superiomente autocontínua* se $\forall A \in \mathcal{A}$ e $(B_n) \subset \mathcal{A}$ com $A \cap B_n = \phi$ e $\mu(B_n) \longrightarrow 0$ tem-se $\mu(A \cup B_n) \longrightarrow \mu(A)$

(ii) μ é é *inferiormente autocontínua* se $\forall A \in \mathcal{A}$ e $(B_n) \subset \mathcal{A}$ com $B_n \subseteq A$ e $\mu(B_n) \longrightarrow 0$ tem-se $\mu(A - B_n) \longrightarrow \mu(A)$.

(iii) μ é *autocontínua* se ela é superior e inferiormente autocontínua.

(c) μ é *subaditiva* se $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$.

Observação: Se μ é uma medida fuzzy então pode-se provar que μ é autocontínua se, e somente se μ satisfaz a condição:

$$\lim_{k \to \infty} \mu(A \Delta B_k) = \mu(A) \quad , \forall A \in \mathcal{A},\ (B_k) \subset \mathcal{A} \quad \text{tais que} \quad \lim_{k \to \infty} \mu(B_k) = 0$$

(Vide Wang [41], onde Δ denota a diferença simétrica: $A \Delta B_k = (A - B_k) \cup (B_k - A)$).

Um resultado simples de provar é o seguinte:

Proposição 1.1.8. (i) A subaditividade implica a autocontinuidade.

(ii) A autocontinuidade implica a o-aditividade.

Observação: Em [33] Ralescu consegue mostrar o Teorema da Convergência Monótona e o Teorema de Convergência Dominada no contexto fuzzy. Para o segundo resultado ele usa o conceito de subaditividade.

Os resultados contidos no Teorema seguinte foram obtidos por Wang [41]. Eles mostram condições sob as quais a integral fuzzy é contínua em relação à convergência qs e à convergência em medida.

Teorema 1.1.9. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida fuzzy finita. Se f e f_k definidas em X com valores em $\mathbb{R}^+$ $(k \geq 1)$, são funções μ-mensuráveis então, tem-se:

(1) μ é o-aditiva se, e somente se, a convergência $f_k \xrightarrow{qs} f$ implica a convergência $⨍ f_k d\mu \longrightarrow ⨍ f d\mu$.

(2) μ é autocontínua se, e somente se, a convergência $f_k \xrightarrow{\mu} f$ implica a convergência $⨍ f_k d\mu \longrightarrow ⨍ f d\mu$.

Observação: Como uma aplicação direta da propriedade P6, (Proposição 1.1.4). temos o seguinte resultado: Se $f_k \xrightarrow{do} f$ sobre A então $⨍_A f_k d\mu \longrightarrow ⨍_A f d\mu$, isto é, a integral fuzzy é contínua em relação à convergência uniforme.

Doravante, os nossos resultados serão restritos a espaços de medida finita. Neste contexto, Greco–Bassanezi [18] introduzem um conceito interessante para uma função de conjuntos, a saber, a F-continuidade.

Definição 1.1.10. Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos X. Uma aplicação monótona $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ tal que $\mu(\phi) = 0$ e $\mu(X) = 1$ é chamada uma *medida fuzzy fraca* ou *w-fuzzy medida.*

Uma w-fuzzy medida μ é dita *F-contínua* se $\forall A, A_n \in \mathcal{A}$ com $\mu(A \Delta A_n) \longrightarrow 0$ tem-se que $\mu(A_n) \longrightarrow \mu(A)$.

Conforme mostra o exemplo a seguir, nem toda w-fuzzy medida F-contínua é contínua por seqüências monótonas. Em particular, nem toda w-fuzzy medida F-contínua é uma medida fuzzy (no sentido de Sugeno, [38]).

Exemplo 1.1.11. Se $\mu : \mathcal{P}(I\!N) \longrightarrow [0,1]$ é a aplicação definida por

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } A \text{ é finito} \\ \\ 1 & , \quad \text{se } A \text{ é infinito} \end{cases}$$

então é claro que μ é uma w-fuzzy medida. Afirmamos que μ é F-contínua.

De fato, seja $(B_k) \subset \mathcal{P}(I\!N)$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(B \Delta B_k) = 0$. Neste caso, existe $k_0 \in I\!N$ tal que $\mu(B\Delta B_k) = 0$, $\forall k \geq k_0$ (i.e. $B \Delta B_k$ é finito $\forall k \geq k_0$).
Daí $\mu(B - B_k) = 0$ e $\mu(B_k - B) = 0$, $\forall k \geq k_0$. Mostraremos que

$$\lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \mu(B).$$

Caso $\mu(B) = 0$: Neste caso B é finito. Como $B_k - B$ é finito $\forall k \geq k_0$ então, necessariamente, B_k é finito $\forall k \geq k_0$ e, portanto,

$$\lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = 0 = \mu(B).$$

Caso $\mu(B) = 1$: Neste caso B é infinito. Mas $(B - B_k)$ é finito $\forall k \geq k_0$ logo, necessariamente, B_k é infinito $\forall k \geq k_0$ e, em conseqüência,

$$\lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = 1 = \mu(B).$$

Agora, se consideramos a seqüência monótona $A_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ $(k \geq 1)$ então $\bigcup\limits_{k\geq 1} A_k = I\!N$ e $\mu(A_k) = 0$ $\forall k \geq 1$. Assim

$$\mu(\bigcup_{k\geq 1} A_k) = \mu(I\!N) = 1 \neq 0 = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$$

Portanto μ não é contínua por seqüências monótonas.

Exemplo 1.1.12. Uma w-fuzzy medida μ sobre X é dita fuzzy–aditiva se $\forall A, B \in \mathcal{A}$ com $A \cap B = \phi$ tem–se $\mu(A \cup B) = \mu(A) \vee \mu(B)$. Seja μ uma w-fuzzy medida tal que μ é *fuzzy–aditiva.*Então μ é F-contínua. Com efeito, sejam $A, A_n \in \mathcal{A}$ tais que $\mu(A \Delta A_n) \longrightarrow 0$. Então
$\mu(A - A_n) \vee \mu(A_n - A) = \mu((A - A_n) \cup (A_n - A)) \longrightarrow 0$, pois $(A - A_n) \cap (A_n - A) = \phi$, de onde

$$\mu(A - A_n) \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \mu(A_n - A) \longrightarrow 0 \tag{*}$$

Sendo que $A = (A - A_n) \cup (A \cap A_n)$ com $(A - A_n) = \phi$ então,

$$\mu(A) = \mu(A - A_n) \vee \mu(A \cap A_n) \tag{**}$$

Vejamos que $\mu(A_n) \longrightarrow \mu(A)$.

Caso $\mu(A) = 0$: Neste caso, por (**) $\mu(A \cap A_n) = 0 \;\; \forall n$, logo de

$$A_n = (A_n - A) \cup (A_n \cap A) \quad \text{com} \quad (A_n - A) \cap (A_n \cap A) = \phi$$

tem–se que

$$\mu(A_n) = \mu(A_n - A) \vee \mu(A_n \cap A) = \mu(A_n - A)$$

Segue de $(*)$ que $\mu(A_n) = \mu(A_n - A) \longrightarrow 0 = \mu(A)$

Caso $\mu(A) = 1$: Neste caso $\mu(A - A_n) \vee \mu(A \cap A_n) = 1 \;\; \forall n$ (por $(**)$).

Mas, existe $n_0 \in I\!N$ tal que $\mu(A - A_n) = 0 \quad \forall n \geq n_0$ (por $(*)$), então $\mu(A \cap A_n) = 1 \quad \forall n \geq n_0$. Sendo que $\mu(A \cap A_n) \leq \mu(A_n) \leq 1 \quad \forall n$, então

$\mu(A_n) = 1 \ \ \forall n \geq n_0$, isto é $\mu(A_n) \longrightarrow 1 = \mu(A)$.

Caso $\mu(A) \in (0,1)$: Por $(*)$ temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in I\!N$ tal que

$$\mu(A - A_n) < \varepsilon \ \ , \forall n \geq n_0 \qquad (+)$$

Se consideramos $\varepsilon < \mu(A)$ e as relações (**) e (+) temos que

$$\mu(A) = \mu(A \cap A_n) \ \ , \forall n \geq n_0 \qquad (++)$$

então, se usamos mais uma vez o fato que, para todo n,

$$A_n = (A_n - A) \cup (A_n \cap A) \ \ , \ \ \text{com} \ \ (A_n - A) \cap (A_n \cap A) = \phi$$

obtemos que

$$\mu(A_n) = \mu(A_n - A) \vee \mu(A_n \cap A)$$

$$= \mu(A_n - A) \vee \mu(A) \quad \forall n \geq n_0 \qquad (\text{por } (++))$$

Disto, e do fato que dado $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon < \mu(A)$, existe $m_0 \in I\!N$ tal que

$$\mu(A_n - A) < \varepsilon < \mu(A) \quad \forall n \geq m_0 \qquad (\text{por } (^*))$$

temos que

$$\mu(A_n) = \mu(A) \quad \forall n \geq n_1 = \max\{n_0, m_0\},$$

isto é, $\mu(A_n) \longrightarrow \mu(A)$ o que completa a prova da F-continuidade de μ,

Seguindo Zadeh [51], Puri-Ralescu [28] e Kania [24], definimos uma *medida de possibilidade* sobre X como sendo uma aplicação $\pi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,1]$, satisfazendo:

(a) $\pi(\phi) = 0$

(b) Se $A \subseteq B \subseteq X$ então $\pi(A) \leq \pi(B)$

(c) $\pi(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sup_{i\in I} \pi(A_i)$, $\forall (A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$.

Exemplo 1.1.13. Para qualquer função $f : X \longrightarrow [0,1]$ fixa, a aplicação $\pi_f(A) : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,1]$ definida por

$$\pi_f(A) = \begin{cases} \sup_{x\in A} f(x), & \text{se} \quad A \neq \phi \\ \\ 0, & \text{se} \quad A = \phi \end{cases}$$

é uma medidada de possibilidade sobre X.

Observação: (a) Se $\sup_{x\in X} f(x) = 1$ então π_f é uma w-fuzzy medida.

(b) f é chamada *função de densidade* associada a π_f.

(c) Toda w-fuzzy medida de possibilidade é fuzzy–aditiva e, como consequência é F-contínua. Em particular, a medida de Dirac concentrada num ponto x_0 , é F-contínua.

De fato, sendo que

$$\pi_f(A) = \begin{cases} \sup_{x\in A} \chi_{\{x_0\}}, & \text{se} \quad A \neq \phi \\ 0, & \text{se} \quad A = \phi \end{cases}$$

(isto é, $\mu = \pi_f$, com $f = \chi_{\{x_0\}}$) então μ é uma w-fuzzy medida de possibilidade.

O seguinte resultado relaciona a autocontinuidade com a F-continuidade.

Proposição 1.1.14. Seja μ uma w-fuzzy medida sobre X. Se μ é autocontínua então μ é F-contínua.

Demonstração:

Seja $\mu(A\Delta A_n) \longrightarrow 0$, isto é, $\mu((A - A_n) \cup (A_n - A)) \longrightarrow 0$. Segue da monotonia de μ que

$$\mu(A - A_n) \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \mu(A_n - A) \longrightarrow 0 \tag{*}$$

Se para cada $n \geq 1$ fazemos $B_n = (A - A_n)$ então é claro que $B_n \subseteq A$ e $\mu(B_n) \longrightarrow 0$. Assim pela autocontinuidade inferior de μ temos que

$$\mu(A - B_n) \longrightarrow \mu(A) \text{ , isto é } , \mu(A \cap A_n) \longrightarrow \mu(A) \tag{**}$$

Por outro lado, se para cada n fazemos $C_n = A_n - A$ então $C_n \cap A = \phi$ e segue de (*) que $\mu(C_n) \longrightarrow 0$ logo, pela autocontinuidade superior de μ, temos que

$$\mu(A \cup C_n) \longrightarrow \mu(A) \quad \Rightarrow \quad \mu(A \cup A_n) \longrightarrow \mu(A) \tag{***}$$

Finalmente, porque $\mu(A \cup A_n) \geq \mu(A) \geq \mu(A \cap A_n)$ concluimos, usando (**) e (***) que $\mu(A_n) \longrightarrow \mu(A)$, o que prova que μ é F-contínua.

Proposição 1.1.15. Seja μ uma medida fuzzy. Então, μ é autocontínua se, e somente se μ é F-contínua.

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Proposição 1.1.14.

($\Longleftarrow$) Como μ é uma medida fuzzy então a autocontinuidade de μ equivale à condição $\mu(A\Delta B_n) \longrightarrow \mu(A)$ sempre que $\mu(B_n) \longrightarrow 0$ (ver observação depois da Definição 1.1.7).

Considerando (B_n) tal que $\mu(B_n) \longrightarrow 0$, isto é, $\mu(A\Delta(A\Delta B_n)) \longrightarrow 0$. Como μ é

F-contínua, então $\mu(A\Delta B_n) \longrightarrow \mu(A)$ e portanto μ é autocontínua .

A definição de integral fuzzy (no sentido de Sugeno, [38]) em relação a uma medida fuzzy pode–se estender, sem problemas, para uma w-fuzzy medida. Mais ainda, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.1.16. Sejam $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X e $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ uma w-fuzzy medida. A integral fuzzy associada a μ satisfaz as seguintes propriedades:

P1*) $\displaystyle ⨍_A f d\mu = ⨍_X f\chi_A d\mu$ $\quad$ (χ_A, função característica de A)

P2*) $\displaystyle ⨍_A k d\mu = k \wedge \mu(A)$ $\quad$, k qualquer constante não negativa.

P3*) (i) Se $A \subseteq B$ então $\displaystyle ⨍_A f d\mu \leq ⨍_B f d\mu$

(ii) Se $f_1 \leq f_2$ sobre A , então $\displaystyle ⨍_A f_1 d\mu \leq ⨍_A f_2 d\mu$

P4*) (i) Se $\mu(A) = 0$ então $\displaystyle ⨍_A f d\mu = 0$

(ii) Se $\displaystyle ⨍_A f d\mu = 0$ e μ é contínua superiomente, então $\mu(A \cap \{f > 0\}) = 0$.

P5*) $\displaystyle ⨍_A (f+k) d\mu \leq ⨍_A f d\mu + ⨍_A k d\mu$ $\quad$, $\forall k \geq 0$ constante.

P6*) Se $|f_1 - f_2| \leq k$ sobre A então $\displaystyle |⨍_A f_1 d\mu - ⨍_A f_2 d\mu| \leq k$.

Demonstração:

Todos os resultados, menos P4*-(ii), são consequências da definição de integral fuzzy e da monotonia de μ.

Afim de provar P4*)-ii) tomamos $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{f \geq 1/n\}$. Se para cada $n \geq 1$ definimos $A_n = \{f \geq 1/n\}$ então temos que (A_n) é uma seqüência crescente. Sendo μ contínua superiomente temos:

$$\mu(A \cap \{f > 0\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap A_n)$$

Suponhamos que $\alpha_0 = \mu(A \cap \{f \geq 0\}) > 0$. Nesse caso, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in I\!N$ tal que $\mu(A \cap A_n) > \alpha_0 - \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

Logo

$$\int_A f d\mu \geq \int_{A\cap A_n} f d\mu \geq \int_{A\cap A_n} (1/n) d\mu = \frac{1}{n} \wedge \mu(A \cap A_n) > \frac{1}{n} \wedge (\alpha_0 - \varepsilon) > 0 \ , \ \forall n \geq n_0$$

que é uma contradição. Assim $\alpha_0 = \mu(A \cap \{f > 0\}) = 0$.

Observação: Pode-se provar que ainda continuam sendo verdadeiras as respectivas equivalências entre as integrais fuzzy no sentido de Sugeno, Ralescu e Ralescu-Adams, para as w-fuzzy medidas.

O seguinte resultado generaliza um dos resultados de Wang, [41].

Teorema 1.1.17. Sejam $[0,1]^X = \{f \mid f : X \longrightarrow [0,1]\}$ e μ uma w-fuzzy medida sobre X. São equivalentes:

(1) Se $f_n \xrightarrow{\mu} f$ então $\int_X f_n d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu$ (onde $f, f_n \in [0,1]^X$)

(2) μ é F-contínua.

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2): Suponhamos que $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n \Delta A) = 0$. É claro que $\{|\chi_{A_n}(x) - \chi_A(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq A_n \Delta A$, $\forall n \geq 1$. Então,

$$\mu(\{|\chi_{A_n}(x) - \chi_A(x)| \geq \varepsilon\} \leq \mu(A_n \Delta A)$$

e portanto $\mu(\{|\chi_{A_n}(x) - \chi_A(x)| \geq \varepsilon\} \longrightarrow 0$. Assim $\chi_{A_n} \xrightarrow{\mu} \chi_A$, portanto $⨍_X \chi_{A_n} d\mu \longrightarrow ⨍_X \chi_A d\mu$ (hipótese). Disto e usando a Proposição 1.1.16 partes P1*) e P2*) obtemos que $\mu(A_n) \longrightarrow \mu(A)$, isto é μ é F-contínua.

(2) $\Rightarrow$ (1) Reciprocamente, seja μ F-contínua. Se $f_n \xrightarrow{\mu} f$ então

$$[\{f \geq \alpha\} \cup \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}]\Delta\{f \geq \alpha\} \subseteq \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}$$

com $\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \longrightarrow 0$. Segue da F-continuidade de μ que

$$\mu(\{f \geq \alpha\} \cup \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \longrightarrow \mu(\{f \geq \alpha\}) \tag{1}$$

Por outro lado, para $\varepsilon > 0$, arbitrário, temos que

$$\{f_n \geq \alpha + \varepsilon\} \subseteq \{f \geq \alpha\} \cup \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}$$

então, disto e usando o fato (1), temos que $\exists n_0 \in I\!N$ tal que

$$\mu(\{f_n \geq \alpha + \varepsilon\}) \leq \mu(\{f \geq \alpha\} \cup \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq \mu(\{f \geq \alpha\}) + \varepsilon \ , \ \forall n \geq n_0$$

Se $\alpha > ⨍ f d\mu$ então $\mu(\{f \geq \alpha\}) + \varepsilon \leq ⨍ f d\mu + \varepsilon$, logo podemos afirmar que

$$\mu(\{f_n \geq \alpha + \varepsilon\}) \leq ⨍ f d\mu + \varepsilon \ , \ \forall n \geq n_0 \ \text{ e, } \ \alpha > ⨍ f d\mu.$$

Disto obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sup \fint f_n d\mu \leq \fint f d\mu + \varepsilon \tag{2}$$

Agora, considerando que

$$\{f \geq \alpha\} - \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \subseteq \{f_n \geq \alpha - \varepsilon\} \tag{3}$$

Sendo que

$$(\{f \geq \alpha\} - \{|f_n - f| \geq \varepsilon\})\Delta(\{f \geq \alpha\}) = \{f \geq \alpha\} \cap \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \subseteq \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}$$

Como $f_n \xrightarrow{\mu} f$ e μ é F-contínua, temos:

$$\mu(\{f \geq \alpha\} - \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \longrightarrow \mu(\{f \geq \alpha\}) \tag{4}$$

De (3) e (4) segue que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in I\!N$ tal que

$$\mu(\{f \geq \alpha - \varepsilon\}) \geq \mu(\{|f \geq \alpha\}) - \varepsilon \quad ,\forall n \geq n_1.$$

então, para $\alpha < \fint f d\mu$ deduzimos que

$$\mu(\{f \geq \alpha - \varepsilon\}) \geq \fint f d\mu - \varepsilon \qquad , \ \forall n \geq n_1$$

e, portanto

$$\liminf_n \fint f_n d\mu \geq \fint f d\mu - \varepsilon \tag{5}$$

Considerando (2) e (5) (com $n \geq \max\{n_0, n_1\}$) obtemos

$$\limsup_n \fint f_n d\mu - \varepsilon \leq \fint f d\mu \leq \liminf_n \fint f_n d\mu + \varepsilon$$

então, pela arbitrariedade de ε concluimos que $\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

Observação: O teorema anterior garante a continuidade da integral fuzzy em relação a qualquer w-fuzzy medida F-contínua. Em particular, a medida em consideração pode ser uma w-fuzzy medida de possibilidade ou uma medida w-fuzzy–aditiva.

§2. Sobre a Integral de Aumann

Introdução

Nesta seção, introduzimos rapidamente alguns dos conceitos fundamentais em relação a integração de multiaplicações. As referências básicas são R. Aumann [01], Hiai–Umegaki [21] e Klein–Thompson [25].

Definição 1.2.1. Seja (X, d) um espaço métrico e $(A_n)_{n\in \mathbb{N}}$ uma seqüência de subconjuntos de X.

a) Um ponto $x_0 \in X$ é um *ponto limite* de (A_n) se para toda vizinhança V de x_0 existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq n, A_m \cap V \neq \phi$.

b) Um ponto $x_0 \in X$ é um *ponto aderente* de (A_n) se para todo $n \in \mathbb{N}$ e para toda vizinhança V de x_0, existe um $m \geq n$ tal que $A_m \cap V \neq \phi$.

c) $\liminf A_n = \{x \in X \mid x$ *ponto limite* de $(A_n)\}$

d) $\limsup A_n = \{x \in X \mid x$ *ponto aderente* de $(A_n)\}$

e) Se $\liminf A_n = \limsup A_n = A$, então diz-se que A é o limite (no sentido de Kuratowski) da seqüência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Neste caso escrevemos, simplesmente, $\lim A_n = A$ (ou $A_n \xrightarrow{K} A$).

Observação: Pode-se provar que $\liminf A_n$ e $\limsup A_n$ são conjuntos fechados. Ainda mais:

i) $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$

ii) $\liminf A_n = \liminf \overline{A}_n$ e $\limsup A_n = \limsup \overline{A}_n$, onde $\overline{A}_n$ denota o fecho de A_n no espaço métrico X.

Definição 1.2.2. Seja (X, d) um espaço métrico e sejam K_1 e K_2 subconjuntos compactos não-vazios de X.

A distância de Hausdorff entre K_1 e K_2 é dada por:

$$H(K_1, K_2) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid K_1 \subseteq B_\varepsilon(K_2), K_2 \subseteq B_\varepsilon(K_1)\}$$

onde $B_\varepsilon(A) = \{x \in X \mid d(x, A) \leq \varepsilon\}$.

Pode-se provar que $H(K_1, K_2) = \max\{\sup_{x\in K_1} d(x, K_2), \sup_{y\in K_2} d(y, K_1)\}$.

É bem conhecido que H é uma métrica sobre a família $K(X)$ dos subconjuntos compactos não vazios de X.

A demonstração do fato pode ser vista em [25].

Teorema 1.2.3. Uma seqüência $(K_n)_n$ de compactos não vazios de X converge a um conjunto compacto $K \neq \phi$, com respeito a métrica de Hausdorff se, e somente se, os conjuntos compactos K_n estão contidos num mesmo compacto K^* de X e

$$\liminf K_n = \limsup K_n = K$$

Definição 1.2.4. Sejam X, Y conjuntos não vazios. Uma correspondência de X a Y é uma aplicação $\mathcal{G} : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ tal que $\mathcal{G}(x) \neq \phi$, $\forall x \in X$.

(Usaremos a notação: $\mathcal{G} : X \rightrightarrows Y$).

Definição 1.2.5. Se $\mathcal{G} : X \rightrightarrows Y$ então o gráfico de $\mathcal{G}$, é definido por:

$$Gr\mathcal{G} = \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in \mathcal{G}(x)\}$$

Definição 1.2.6. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e Y um espaço métrico. Se $\mathcal{G} : X \rightrightarrows Y$ então dizemos que $\mathcal{G}$ é $\mathcal{A}$-mensurável quando:

$$\mathcal{G}^w(B) = \{x \in X \mid \mathcal{G}(x) \cap B \neq \phi\} \in \mathcal{A}\ ,\ \ \forall B \subseteq Y\ ,\ B \ \text{ fechado.}$$

O seguinte resultado é dado em [25]):

Proposição 1.2.7. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida completo (i.e. $A \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$ e $\mu(A) = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{A}$) , Y um espaço métrico completo e separável e $\mathcal{G} : X \rightrightarrows Y$ tal que $\mathcal{G}(x)$ é fechado para todo $x \in X$.

Então são equivalentes:

i) $\mathcal{G}$ é $\mathcal{A}$-mensurável

(ii) $\mathcal{G}^w(A) \in \mathcal{A}$ para todo A aberto em Y

(iii) $Gr\mathcal{G} \in \mathcal{A} \bigotimes \mathcal{B}(Y)$ (onde $\mathcal{B}(Y)$ denota a σ-álgebra gerada pelos abertos de Y e $\mathcal{A} \bigotimes \mathcal{B}(Y)$ denota a σ-álgebra gerada pelos conjuntos da forma $A \times B$ com $A \in \mathcal{A}$ e

$B \in \mathcal{B}(Y)$).

Daqui por diante, indicaremos $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida completo.

Definição 1.2.8. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e Y um espaço métrico. Se $\mathcal{G} : X \rightrightarrows Y$ então dizemos $f : X \longrightarrow Y$ é uma *seleção* de $\mathcal{G}$ se $f(x) \in \mathcal{G}(x)$, $\forall x \in X$.

Teorema 1.2.9. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida ; Y um espaço métrico separável e $\mathcal{G} : X \rightrightarrows Y$ uma correspondência fechada (i.e. $\mathcal{G}(x)$ fechado $\forall x \in X$).
Se $\mathcal{G}$ é $\mathcal{A}$-mensurável, então existe uma seleção $\mathcal{A}$-mensurável de $\mathcal{G}$.

Prova: Seja $(y_n)_{n \in I\!N}$ uma seqüência densa em Y. Para $k, n \in I\!N$ seja $\overline{B}(y_n, 1/k)$ a bola fechada com centro em y_n é raio $1/k$. Vamos definir por indução uma seqüência de correspondências como segue:

$$\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \;\; ; \;\; \mathcal{G}_m(x) = \mathcal{G}_{m-1}(x) \cap \overline{B}(y_{k(m,x)}, 1/m)$$

onde $k(m, x) = \min\{i \in I\!N \mid \mathcal{G}_{m-1}(x) \cap \overline{B}(y_i, 1/m) \neq \phi\}$.

Por hipótese, $\mathcal{G}$ é $\mathcal{A}$-mensurável, logo $\mathcal{G}_0^w(B) \in \mathcal{A}$ para todo B fechado em Y.

Por indução, vamos provar que cada $\mathcal{G}_m$ é mensurável.

Suponha que $\mathcal{G}_{m-1}$ seja mensurável. Precisamos provar que $\mathcal{G}_m^w(B)$ é mensurável para todo B fechado em Y.

Pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_m^w(B) &= \{x \in X \mid \mathcal{G}_m(x) \cap B \neq \phi\} \\ &= \{x \in X \mid \mathcal{G}_{m-1}(x) \cap \overline{B}(y_{k(m,x)}, 1/m) \cap B \neq \phi\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} [\{x \in X \mid \mathcal{G}_{m-1}(x) \cap \overline{B}(y_i, 1/m) \cap B \neq \phi\} \cap \{x \in X \mid k(m, x) = i\}] \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty}[\mathcal{G}^w_{m-1}(\overline{B}(y_i,1/m)\cap B)\cap\{x\in X\mid k(m,x)=i\}]$$

Agora, $\mathcal{G}^w_{m-1}(\overline{B}(y_i,1/m)\cap B)\in\mathcal{A}$ pela hipótese de indução.

Por outro lado, observamos que:

$$\begin{aligned}\{x\in X\mid k(m,x)=i\} &= \bigcap_{j=1}^{i-1}[\{x\in X\mid \mathcal{G}_{m-1}(x)\cap\overline{B}(y_j,1/m)=\phi\}\\ &\cap\ \{x\in X\mid \mathcal{G}_{m-1}(x)\cap\overline{B}(y_i,1/m)\neq\phi\}]\end{aligned}$$

o qual pertence claramente a $\mathcal{A}$.

Assim, cada $\mathcal{G}_m$ é $\mathcal{A}$-mensurável.

Como $\mathcal{G}_m(x)$ é fechado e não vazio para todo $x\in X$ e, além disso:

i) $\mathcal{G}_m(x)\subseteq\mathcal{G}_{m-1}(x)$

ii) $diam(\mathcal{G}_m(x))\longrightarrow 0$ quando $m\to\infty$ (onde $diam\ B=\sup\{d(y,z)\mid y,z\in B\}$).

Tem–se que $\bigcap_{m=1}^{\infty}\mathcal{G}_m(x)$ é um singleton (i.e. contém um ponto só) para todo $x\in X$ pois Y é completo.

É claro que $f(x)=\bigcap_{m=1}^{\infty}\mathcal{G}_m(x)$ define uma seleção de $\mathcal{G}$.

Para provar que f é $\mathcal{A}$-mensurável notamos que se $B\subseteq Y$ é fechado então, usando a completitude de Y:

$$f^{-1}(B)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{x\in X\mid \mathcal{G}_k(x)\cap B\neq\phi\}$$

segue que $f^{-1}(B)\in\mathcal{A}$.

Um resultado útil é o seguinte:

Proposição 1.2.10. Seja $\mathcal{G}: X \rightrightarrows I\!R^n$ uma correspondência fechada. Então são equivalentes:

i) $\mathcal{G}$ é $\mathcal{A}$-mensurável.

ii) Existe uma seqüência (g_n) de seleções mensuráveis de $\mathcal{G}$ tais que

$$\mathcal{G}(x) = \mathbf{cl}\{g_n(x) \mid n \in I\!N\} \ , \ \ \forall x \in X \quad (\ \mathbf{cl} \ \text{ denota fecho})$$

Prova:

i) $\Rightarrow$ ii) Suponhamos que $\mathcal{G}$ seja $\mathcal{A}$-mensurável e $(y_n)_{n \in I\!N}$ uma seqüência densa em $I\!R^n$ e, seja $(\overline{B}(y_m, 2^{-n}))_{n \in I\!N}$ a família enumerável de bolas fechadas com centro em y_m e raio 2^{-n}.

Como $\mathcal{G}$ é $\mathcal{A}$-mensurável então $A_{m,n} = \{x \in X \mid \mathcal{G}(x) \cap \overline{B}(y_m, 2^{-n}) \neq \phi\}$ pertence a $\mathcal{A}$ para todo par $(m, n) \in I\!N \times I\!N$.

Construímos agora a seguinte família de correspondências fechadas

$$\mathcal{G}_{m,n}(x) = \begin{cases} \mathcal{G}(x) \cap \overline{B}(y_m, 2^{-n}) & \text{se } x \in A_{m,n} \\ \mathcal{G}(x) & \text{se } x \notin A_{m,n} \end{cases}$$

Notemos que se B é qualquer fechado em $I\!R^n$ então

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^w_{m,n}(B) &= \{x \in X \mid \mathcal{G}_{m,n}(x) \cap B \neq \phi\} \\ &= \{x \in X \mid \mathcal{G}(x) \cap (\overline{B}(y_m, 2^{-n}) \cap B) \neq \phi\} \cup \{x \in A_{m,n} \mid \mathcal{G}(x) \cap B \neq \phi\} \end{aligned}$$

os quais pertencem a $\mathcal{A}$.

Logo, cada $\mathcal{G}_{m,n}$ é mensurável.

Assim, pela Teorema 1.2.9, para todo (m, n) existe uma seleção mensurável $g_{m,n}$ de $\mathcal{G}_{n,n}$.

Agora vamos provar que a família enumerável $\{g_{m,n}(x) \mid (m, n) \in I\!N^2\}$ é densa em $\mathcal{G}(x)$, $\forall x \in X$.

Sejam $x \in X$ e $y \in \mathcal{G}(x)$. Então, para todo $n \in I\!N$ existe $y_m \in (y_m)_{m \in I\!N}$ tal que

$d(y, y_m) < 2^{-(n+1)}$.

Logo, pela construção de $\mathcal{G}_{m,n}$, existe (m, n) tal que $y \in \mathcal{G}_{m,n+1}(x)$.

Como $y \in \mathcal{G}(x) \cap \overline{B}(y_m, 2^{-(n+1)})$ então $x \in A_{m,n+1}$, assim $\mathcal{G}_{m,n+1}(x) = \mathcal{G}(x) \cap \overline{B}(y_m, 2^{-(n+1)})$ e $diam(\mathcal{G}_{m,n+1}(x)) \leq 2^{-(n+1)}$.

Se $g_{m,n+1}$ é seleção de $\mathcal{G}_{m,n+1}$ então $g_{m,n+1}(x) \in \mathcal{G}_{m,n+1}(x) \Rightarrow d(y, g_{m,n+1}(x)) \leq 2^{-n}$.

o que prova a primeira parte do nosso teorema.

ii) $\Rightarrow$ i) Agora vamos supor que exista uma seqüência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de seleções $\mathcal{A}$-mensuráveis de $\mathcal{G}$ satisfazendo (ii).

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo aberto A em $\mathbb{R}^n$ tem-se que $g_n^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.

Agora,

$$\mathcal{G}^w(A) = \{x \in X \mid \mathcal{G}(x) \cap A \neq \phi\} = \{x \in X \mid \mathbf{cl}\{g_n(x)\} \cap A \neq \phi\} = \bigcup_n g_n^{-1}(A)$$

Com efeito, se $x_0 \in \bigcup_n g_n^{-1}(A) \Rightarrow \exists n_0$ tal que $g_{n_0}(x_0) \in A \Rightarrow \mathbf{cl}\{g_n(x_0\} \cap A \neq \phi$.
Logo $,\bigcup_n g_n^{-1}(A) \subseteq \{x \mid \mathcal{G}(x) \cap A \neq \phi\}$.
Reciprocamente, se $\mathbf{cl}\{g_n(x)\} \cap A \neq \phi \Rightarrow \exists a \in A$ tal que $\lim_{k \to \infty} g_{n_k}(x) = a$.
Como A é aberto, existe $B(a, \varepsilon) \subset A$, para algum $\varepsilon > 0$.
Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, $\exists k_0$ tal que $g_{n_k}(x) \in B(a, \varepsilon)$ para todo $k \geq k_0$.
Assim, $x \in g_{n_k}^{-1}(A)$, $\forall k \geq k_0$.
Logo, $\{x \mid \mathbf{cl}\{g_n(x)\} \cap A \neq \phi\} \subseteq \bigcup_n g_n^{-1}(A)$.
Como $g_n^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ para todo n, segue que $\mathcal{G}^w(A) \in \mathcal{A}$.

Definição 1.2.11. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita e $\mathcal{G} : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ uma correspondência mensurável.

Sejam

$$\begin{aligned} L^1(X, I\!R^n, \mu) &= \{g : X \longrightarrow I\!R^n \mid g \text{ é } \mu\text{-integrável}\} \\ S(\mathcal{G}) &= \{g \in L^1(X, I\!R^n, \mu) \mid g(x) \in \mathcal{G}(x) \;\; qs\}, \end{aligned}$$

um elemento $g \in S(\mathcal{G})$ é chamado uma *seleção integrável* de $\mathcal{G}$.

A integral, no sentido de Aumann, de $\mathcal{G}$ é dada por:

$$(A)\int \mathcal{G} = \{\int_X g d\mu \text{ , com } g \in S(\mathcal{G})\}$$

$\mathcal{G}$ é *integrável* se $(A)\int \mathcal{G} \neq \phi$.

Desejamos agora mostrar algumas propriedades de $(A)\int \mathcal{G}$ e para isto precisamos de alguns resultados prévios.

Lema 1.2.12. Seja $\mathcal{G} : X \rightrightarrows I\!R^n$ mensurável e fechada. Se $S(\mathcal{G}) \neq \phi$, então existe uma seqüência (g_n) contida em $S(\mathcal{G})$ tal que

$$\mathcal{G}(x) = \mathbf{cl}\{g_n(x)\} \;\; , \;\; \forall x \in X.$$

Prova: Pela Proposição 1.2.10 existe uma seqüência (f_n) de seleções $\mathcal{A}$-mensuráveis de $\mathcal{G}$ tais que $\mathcal{G}(x) = \mathbf{cl}\{f_n(x)\}$, $\forall x \in X$.

Fazendo

$$A_{km} = \{x \in X \mid m - 1 \leq ||f_k(x)|| < m\}$$

e

$$g_{km} = \chi_{A_{km}} \cdot f_k + \chi_{X - A_{km}} f$$

tem–se que: $(g_{km}) \subset S(\mathcal{G})$.

Com efeito,

$$g_{km}(x) = \begin{cases} f_k(x) & \text{se } x \in A_{km} \\ \\ f(x) & \text{se } x \in X - A_{km} \end{cases}$$

Logo g_{km} é seleção mensurável de $\mathcal{G}$. Além disso, é claro que g_{km} é integrável, portanto $g_{km} \in S(\mathcal{G})$.

Agora, $\mathcal{G}(x) = \mathbf{cl}\{g_{km}(x)\}$, $\forall x \in X$.

Corolário 1.2.13. Sejam $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 : X \rightrightarrows I\!\!R^n$ mensuráveis e fechadas.
Se $S(\mathcal{G}_1) = S(\mathcal{G}_2) \neq \phi$, então $\mathcal{G}_1(x) = \mathcal{G}_2(x)$ qs

Prova: Pelo Lema 1.2.12 anterior, existem $(g_n^1) \subset S(\mathcal{G}_1)$ e $(g_n^2) \subset S(\mathcal{G}_2)$ tais que

$$\mathcal{G}_1(x) = \mathbf{cl}\{g_n^1(x)\} \ , \ \forall x \in X$$

$$\mathcal{G}_2(x) = \mathbf{cl}\{g_n^2(x)\} \ , \ \forall x \in X.$$

Assim,

$$S(\mathcal{G}_1) = S(\mathcal{G}_2) \Rightarrow (g_n^1) \subset S(\mathcal{G}_2) \quad \text{e} \quad (g_n^2) \subset S(\mathcal{G}_1)$$

Logo,

$$g_n^1(x) \in \mathcal{G}_2(x) = \mathbf{cl}\{g_n^2(x)\} \ \ qs$$

$$\Rightarrow \{g_n^1(x)\} \subseteq \mathbf{cl}\{g_n^2(x)\} \ \ qs$$

$$\Rightarrow \mathbf{cl}\{g_n^2(x)\} \subseteq \mathbf{cl}\{g_n^2(x)\} \ \ qs$$

$$\Rightarrow \mathcal{G}_1(x) \subseteq \mathcal{G}_2(x) \ \ qs$$

Analogamente

$$\mathcal{G}_2(x) \subseteq \mathcal{G}_1(x) \quad qs$$

Lema 1.2.14. Seja $\mathcal{G} : X \rightrightarrows I\!R^n$ uma correspondência mensurável fechada e (g_n) uma seqüência em $S(\mathcal{G})$ tal que $\mathcal{G}(x) = \mathbf{cl}\{g_n(x)\}$, $\forall x \in X$. Então, para todo $g \in S(\mathcal{G})$ e $\varepsilon > 0$, existe uma partição mensurável finita $\{A_1, \dots, A_m\}$ de X tal que

$$||g - \sum_{i=1}^{m} \chi_{A_i} g_i||_1 = \int_X ||g - \sum_{i=1}^{m} \chi_{A_i} g_i|| d\mu < \varepsilon$$

Prova: Vamos supor que $f(x) \in \mathcal{G}(x)$, $\forall x \in X$.

Seja $h \in L^1(X, I\!R, \mu)$ estritamente positiva tal que $\int_X h d\mu < \varepsilon/3$. Então, existe uma partição mensurável enumerável $\{B_i\}$ de X tal que:

$$||g(x) - g_i(x)|| < h(x) \quad \text{com } x \in B_i \ , \ i \geq 1.$$

Seja $m \in I\!N$ tal que

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \int_{B_i} ||g|| < \varepsilon/6 \ \text{ e } \ \sum_{i=m+1}^{\infty} \int_{B_i} ||g_1|| < \varepsilon/6$$

Definimos a seguinte partição mensurável finita $\{A_1, \dots, A_m\}$ como segue:

$$A_1 = B_1 \cup \left(\bigcup_{i=m+1}^{\infty} B_i \right) \ \text{ e } \ A_j = B_j \quad \text{para} \quad 2 \leq j \leq m$$

Então, temos que:

$$\begin{aligned} ||g - \sum_{i=m+1}^{\infty} \chi_{A_i} g_i||_1 &= \sum_{i=m+1}^{\infty} \int_{B_i} ||g - g_i|| d\mu + \sum_{i=m+1}^{\infty} \int_{B_i} ||g - g_1|| d\mu \\ &\leq \int_X h d\mu + \sum_{i=m+1}^{\infty} 2 \int_{B_i} ||g|| + ||g_1||) d\mu < \varepsilon \end{aligned}$$

O teorema seguinte é importante para mostrar a linearidade de $(A)\int \mathcal{G}$ para correspondências compactas.

Teorema 1.2.15. Sejam $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 : X \rightrightarrows I\!R^n$ mensuráveis fechadas e $\mathcal{G}(x) = \mathbf{cl}(\mathcal{G}_1(x) + \mathcal{G}_2(x))$ $\forall x \in X$. Então $\mathcal{G}$ é mensurável.
Ainda mais, se $S(\mathcal{G}_1)$ e $S(\mathcal{G}_2)$ são não vazios então $S(\mathcal{G}) = \mathbf{cl}(S(\mathcal{G}_1) + S(\mathcal{G}_2))$, em $L^1(X, I\!R^n, \mu)$.

Prova: Usando a Proposição 1.2.10 temos que existem seqüências $(g_n^1), (g_n^2)$ de $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ respectivamente, tais que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(x) &= \mathbf{cl}\{g_n^1(x)\} \ , \ \forall x \in X \\ \mathcal{G}_2(x) &= \mathbf{cl}\{g_n^2(x)\} \ , \ \forall x \in X \end{aligned}$$

Segue que

$$\mathcal{G}(x) = \mathbf{cl}(\mathcal{G}_1(x) + \mathcal{G}_2(x)) = \mathbf{cl}\{g_n^1(x) + g_n^2(x)\}$$

Assim, pela Proposição 1.2.10, $\mathcal{G}$ é mensurável.

Suponha agora que $S(\mathcal{G}_1) \neq \phi$ e $S(\mathcal{G}_2) \neq \phi$. Então, pelo Lema 1.2.12, existem seqüências $(g_n^1) \subset S(\mathcal{G}_1)$ e $(g_n^2) \subset S(\mathcal{G}_2)$ tais que

$$\mathcal{G}_1(x) = \mathbf{cl}(\{g_n^1(x)\} \text{ e } \mathcal{G}_2(x) = \mathbf{cl}\{g_n^2(x)\} \ , \ \forall x \in X.$$

Assim, $\mathcal{G}(x) = \mathbf{cl}\{g_n^1(x) + g_n^2(x)\}$, $\forall x \in X$.

Para todo $g \in S(\mathcal{G})$ e $\varepsilon > 0$, pelo Lema 1.2.14 existe uma partição mensurável finita $\{A_1, \ldots, A_m\}$ de X e inteiros $n_1, \ldots, n_m$ tais que

$$||g - \sum_{k=1}^{m} \chi_{A_k}(g_{n_k}^1 + g_{n_k}^2)||_1 < \varepsilon$$

portanto, $S(\mathcal{G}) \subseteq d(S(\mathcal{G}_1) + S(\mathcal{G}_2))$.

A inclusão contrária é imediata.

Pode-se provar (ver [24]) que:

Proposição 1.2.16. Se $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 : X \rightrightarrows I\!R^n$ são correspondências fechadas mensuráveis então a função $X \longmapsto H(\mathcal{G}_1(x), \mathcal{G}_2(x))$ é mensurável.

Prova:

$$\begin{aligned} H(\mathcal{G}_1(x), \mathcal{G}_2(x)) &= H(\mathrm{cl}\{g_n^1(x)\}, \mathrm{cl}\{g_n^2(x)\}) \ \text{ com } \ (g_n^1) \subset S(\mathcal{G}_1) \text{ e } (g_n^2) \subset S(\mathcal{G}_2) \\ &= \max\{\sup_i \inf_j ||g_i^1(x) - g_j^2(x)||, \sup_j \inf_i ||g_i^1(x) - g_j^2(x)||\} \end{aligned}$$

Isto implica que a função $x \longmapsto H(\mathcal{G}_1(x), \mathcal{G}_2(x))$ é mensurável.

Ainda mais, pode-se provar (ver [25]) que:

Proposição 1.2.17. Se $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 : X \rightrightarrows I\!R^n$ são correspondências mensuráveis fechadas, então

$$H\Big((A)\int \mathcal{G}_1, (A)\int G_2\Big) \leq \int_X H(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) d\mu$$

Definição 1.2.18. $\mathcal{G} : X \rightrightarrows I\!R^n$ é *integravelmente limitada* se existe $h \in L^1(X, I\!R, \mu)$ tal que:

$$||y|| \leq h(x) \quad , \quad \forall y \in \mathcal{G}(x)$$

É claro que se $\mathcal{G}$ é uma correspondência mensurável fechada então $\mathcal{G}$ é integravelmente limitada se, e somente, se a função $x \longmapsto ||\mathcal{G}(x)||$ pertence a $L^1(X, I\!R, \mu)$.

Proposição 1.2.19. Se $\mathcal{G} : X \rightrightarrows I\!R^n$ uma correspondência mensurável fechada. Se $\mathcal{G}$ é integravelmente limitada então $\mathcal{G}$ é integrável.

Prova: Pelo Teorema 1.2.9, $\mathcal{G}$ possui uma seleção mensurável g_0, e como $\mathcal{G}$ é integravelmente limitada então $g_0 \in S(\mathcal{G})$. Logo,

$$(A)\int \mathcal{G} = \{\int_X g \mid g \in S(\mathcal{G})\} \neq \phi$$

Lembremos que se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida então $A \in \mathcal{A}$ é um átomo para a medida μ, se $\mu(A) > 0$ e $B \subseteq A$ implica $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$. Dizemos que μ é *não–atômica* se não possui átomos.

Teorema 1.2.20. Seja $\mathcal{G} : X \rightrightarrows I\!\!R^n$. Se a medida μ é não–atômica sobre a σ-álgebra $\mathcal{A}$ de X, então $(A)\int \mathcal{G}$ é convexo.

Prova: Sejam $y_1, y_2 \in (A)\int \mathcal{G}$. Existem $g_1, g_2 \in S(\mathcal{G})$ tais que

$$y_1 = \int g_1 d\mu \ \text{ e } \ y_2 = \int g_2 d\mu.$$

Para $A \in \mathcal{A}$, seja

$$\overline{\mu}(A) = \left(\int_A g_1 d\mu, \int_A g_2 d\mu\right)$$

Então $\overline{\mu}$ é uma medida vetorial não atômica.

Um resultado devido a Liapunov estabelece que, em tais condições, o conjunto $\{\overline{\mu}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ é fechado e convexo (ver [25]).

Como $\overline{\mu}(\phi) = (0,0)$ e $\overline{\mu}(X) = (y_1, y_2)$, para todo $\lambda \in [0,1]$ existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $\overline{\mu} = (\lambda y_1, \lambda y_2)$. Segue que $\mu(X - E) = ((1-\lambda)y_1, (1-\lambda)y_2)$.

Agora definimos:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{se } x \in E \\ \\ g_2(x) & \text{se } x \in X - E \end{cases}$$

É claro que $g \in S(\mathcal{G})$ e, além disso $\int g d\mu = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$, logo,

$$(A)\int \mathcal{G} \ \text{ é convexo.}$$

Exemplo 1.2.21. Seja μ a medida de Lebesgue sobre $[0,1]$ e $\mathcal{M} : [0,1] \rightrightarrows I\!R$ definida por $\mathcal{M}(x) = \{2,3\}$, $\forall x \in [0,1]$. Notemos que $\mathcal{M}$ não é a valores convexos.

Se tomamos $g_1(x) = 2$, $\forall x \in [0,1]$ e $g_2(x) = 3$, $\forall x \in [0,1]$, então é claro que $g_1, g_2 \in S(\mathcal{M})$ e, além disso, suas integrais são: $\int g_1 d\mu = 2$ e $\int g_2 d\mu = 3$, respectivamente.

Consideremos todas as partições mensuráveis de $[0,1]$ da forma $\{A_1, A_2\}$. Então, fazendo $g = g_1\chi_{A_1} + g_2\psi_{X_2}$ tem-se que $g \in S(\mathcal{M})$ e, além disso, $\int g d\mu = 2\mu(A_1) + 3\mu(A_2) = 2\lambda + 3(1-\lambda)$ para $0 \leq \lambda \leq 1$. Assim, $(A)\int \mathcal{M} = [2,3]$.

Exemplo 1.2.22. Sobre $[0,1]$ vamos considerar a medida de Lebesgue μ com um átomo $A_0 = \{1\}$ tal que $\mu(A_0) = 5$, isto é

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{medida de Lebesgue de } A & \text{se} \quad 1 \notin A \\ \\ 5 + \mu(A - \{1\}) & \text{se} \quad 1 \in A \end{cases}$$

Vamos supor que $\mathcal{M}(x) = \{2,3\}$ $, \forall x \in X$ (como no exemplo anterior). Consideremos todas as partições de $X = [0,1]$ da forma $\{A_1, A_2, \{1\}\}$ e $g_1, g_2 \in S(\mathcal{M})$ também como no exemplo anterior. Então, qualquer seleção de $\mathcal{M}$ é da forma $g = g_1\chi_{A_1} + g_2\chi_{A_2} + g_1\chi_{\{1\}}$ ou $g = g_1\chi_{A_1} + g_2\chi_{A_2} + g_2\chi_{\{1\}}$.

No primeiro caso tem-se

$$\begin{aligned} \int g d\mu &= 2\mu(A_1) + 3\mu(A_2) + 10 \\ &= 2\lambda + 3(1-\lambda) + 10 \; ; \;\; 0 \leq \lambda \leq 1 \end{aligned}$$

No segundo caso,

$$\int g d\mu = 2\lambda + 3(1-\lambda) + 15 \;\; ; \; 0 \leq \lambda \leq 1$$

Assim, temos que $(A)\int \mathcal{M} = [12,13] \cup [17,18]$

Assim, a hipótese de não–atomicidade de μ é essencial na convexidade da integral.

Proposição 1.2.23. Seja $(\mathcal{M}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de correspondências mensuráveis do espaço X em $\mathbb{R}^n$ e, suponhamos que cada $\mathcal{M}_k$ é limitada pela mesma função $h \in L^1(X, \mathbb{R}^n, \mu)$ (isto é, $||y|| \leq h(x)$, $\forall y \in \mathcal{M}(x)$ para todo $x \in X$). Então:

i) $\limsup((A)\int \mathcal{M}_k) \subseteq (A)\int \limsup(\mathcal{M}_k)$

ii) $(A)\int \liminf(\mathcal{M}_k) \subseteq \liminf((A)\int \mathcal{M}_k)$.

Prova:

(Veja [25]).

Teorema 1.2.24. Seja $(\mathcal{M}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de correspondências mensuráveis do espaço $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{M}_k(x) \longrightarrow \mathcal{M}(x)$. Se cada $\mathcal{M}_k$ é limitada pela mesma função $h \in L^1(X, \mathbb{R}^n, \mu)$, então $\lim_k (A)\int \mathcal{M}_k = (A)\int \mathcal{M}$.

Prova: Se $\liminf(\mathcal{M}_k(x)) = \mathcal{M}(x) = \limsup(\mathcal{M}_k(x))$ então, pela proposição 1.2.23, tem-se que

$$\begin{aligned}(A)\int \mathcal{M} &= (A)\int \liminf(\mathcal{M}_k) \subseteq \liminf((A)\int \mathcal{M}_k) \subseteq \limsup((A)\int \mathcal{M}_k) \\ &\subseteq (A)\int \limsup(\mathcal{M}_k) = (A)\int \mathcal{M}.\end{aligned}$$

Observação: Este teorema é conhecido como Teorema de Convergência dominada para multiaplicações.

Teorema 1.2.25. Seja $\mathcal{M} : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ uma correspondência mensurável, fechada e integravelmente limitada.

Então, $(A)\int \mathcal{M}$ é um subconjunto compacto não vazio de $\mathbb{R}^n$.

Prova: Proposição 1.2.19 implica que $(A)\int \mathcal{M} \neq \phi$.

Seja $\mathcal{M}_k = \mathcal{M}$, $k \geq 1$.

Como $\mathcal{M}(x)$ é fechado $\forall x$, então,

$$\limsup(\mathcal{M}_k(x)) = \limsup(\overline{\mathcal{M}_k(x)}) = \limsup \overline{\mathcal{M}(x)} = \mathcal{M}(x).$$

Além disso, $\limsup((A)\int \mathcal{M}_k) = \limsup \overline{((A)\int \mathcal{M}_k)} = \limsup \overline{((A)\int \mathcal{M})} = \mathbf{cl}((A)\int \mathcal{M})$, portanto usando a Proposição 1.2.23, temos que:

$$\mathbf{cl}((A)\int \mathcal{M}) = \limsup((A)\int \mathcal{M}_k) \subseteq (A)\int \limsup(\mathcal{M}_k) = (A)\int \mathcal{M}$$

Logo, $(A)\int \mathcal{M}$ é fechado.

Por outro lado, como $\mathcal{M}$ é limitada por $h \in L^1(X, \mathbb{R}^n, \mu)$ no sentido que

$$||y|| \leq h(x) \quad , \quad \forall y \in \mathcal{M}(x) \quad , \quad \text{segue que } ||(A)\int \mathcal{M}|| \leq \int h d\mu.$$

Assim, $(A)\int \mathcal{M}$ é fechado e limitado, logo compacto em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 1.2.26. Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ correspondências mensuráveis, compactas e integravelmente limitadas. Então:

a) $\mathcal{M}_1(x) \subseteq \mathcal{M}_2(x)\ qs \Rightarrow (A)\int \mathcal{M}_1 \subseteq (A)\int \mathcal{M}_2$

b) Se $(\lambda\mathcal{M})(x) = \lambda\mathcal{M}(x) = \{\lambda y \mid y \in \mathcal{M}(x)\}\ \forall x$, então $(A)\int \lambda\mathcal{M} = \lambda(A)\int \mathcal{M}$

c) $(A)\int(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) = (A)\int \mathcal{M}_1 + (A)\int \mathcal{M}_2$.

Prova:

a) e b) são consequências imediatas da definição da integral de Aumann.

c) Pelo Teorema 1.2.15, fazendo $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ temos que

$$S(\mathcal{M}) = \mathbf{cl}(S(\mathcal{M}_1) + S(\mathcal{M}_2))$$

Seja $y \in \{(A)\int \mathcal{M}_1 + (A)\int \mathcal{M}_2\}$. Então existem $g_1 \in S(\mathcal{M}_1), g_2 \in S(\mathcal{M}_2)$ tais que

$$y = \int g_1 d\mu + g_2 d\mu = \int (g_1 + g_2) d\mu.$$

Como $(g_1 + g_2) \in S(\mathcal{M})$ tem-se que $y \in (A)\int \mathcal{M}$.

Assim, $(A)\int \mathcal{M}_1 + (A)\int \mathcal{M}_2 \subseteq (A)\int (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) = (A)\int \mathcal{M}$.

Por outro lado, $y_0 \in (A)\int \mathcal{M}$ implica $y_0 = \int g d\mu$ com $g \in S(\mathcal{M})$.

Portanto, $g \in \mathbf{cl}(S(\mathcal{M}_1) + S(\mathcal{M}_2))$. Assim, existem seqüências $(g_n^1) \subset S(\mathcal{M}_1)$ e $(g_n^2) \subset S(\mathcal{M}_2)$ tais que $g = \lim_n (g_n^1 + g_n^2)$.

Logo $y_0 = \int g d\mu = \lim(\int g_n^1 d\mu + \int g_n^2 d\mu)$. Como $\int g_n^1 d\mu \in (A)\int \mathcal{M}_1$ e $\int g_n^2 d\mu \in (A)\int \mathcal{M}_2$.

Segue que $y_0 \in \mathbf{cl}((A)\int \mathcal{M}_1 + (A)\int \mathcal{M}_2) = (A)\int \mathcal{M}_1 + (A)\int \mathcal{M}_2$ devido à compacidade de $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$, o que prova a afirmação c).

Observação: A hipótese de compacidade na parte c) anterior é importante pois se $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ são compactas então $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ é compacta e, portanto, fechada. Lembremos que, em geral a soma de fechados não é fechada.

§3. Integração de Variáveis Fuzzy Aleatórias

Introdução

Nesta seção introduzimos as idéias básicas sobre a convergência de certas famílias distinguidas de subconjuntos fuzzy de $\mathbb{R}^n$ seguindo os trabalhos de Greco [19], Kaleva [23] e Kloeden [26], e também estendemos alguns conceitos e resultados sobre integração de correspondência a uma classe mais geral de aplicações, usando como base os artigos de Puri–Ralescu [29], [30].

Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) = \{f \mid f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]\}$ a família de todos os subconjuntos fuzzy de $\mathbb{R}^n$.

Se $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in [0,1]$ definimos o nível α de f por:

$$L_\alpha f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq \alpha\}$$

Considerando ainda o conjunto $\mathcal{F}K(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1] \mid L_\alpha f$ é compacto, $0 < \alpha \leq 1$ e $L_1 f \neq \phi\}$ e o supporte de f $supp(f) = \mathbf{cl}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > 0\})$.

Definição 1.3.1. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita. Uma *variável fuzzy aleatória* sobre X é uma aplicação $F : X \longrightarrow \mathcal{F}K(\mathbb{R}^n)$ tal que cada $F_\alpha : X \overrightarrow{\longrightarrow} \mathbb{R}^n$ definida por $F_\alpha(x) = L_\alpha F(x)$ é mensurável para todo $\alpha \in [0,1]$. Além disso, vamos dizer que F é integravelmente limitada se F_α é integravelmente limitada para todo $\alpha \in (0,1]$.

Nosso objetivo imediato é definir a integral de variável fuzzy aleatória como uma extensão da integral de Aumann para multiaplicações. Mas antes, precisamos do seguinte lema:

Lema 1.3.2. Seja $(N_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ uma família de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tais que:

i) $N_0 = \mathbb{R}^n$

ii) $\alpha \leq \beta \Rightarrow N_\beta \subseteq N_\alpha$

iii) $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, então $N_\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} N_{\alpha_n}$.

Então, a função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ definida por

$$f(x) = \sup\{\alpha \in [0,1] \mid x \in N_\alpha\}$$

é tal que $L_\alpha f = N_\alpha$, $\forall \alpha \in [0,1]$.

Prova: Seja $\alpha_0 \in [0,1]$.

Se $y \in N_{\alpha_0}$ então $f(y) = \sup\{\alpha \mid y \in N_\alpha \geq \alpha_0\} \Rightarrow y \in L_{\alpha_0} f$.

Portanto, $N_{\alpha_0} \subseteq L_{\alpha_0} f$.

Suponha que exista

$$y \in (L_{\alpha_0} f - N_{\alpha_0}) \Rightarrow f(y) \geq \alpha_0. \qquad (*)$$

Como $y \notin N_{\alpha_0} \Rightarrow y \notin N_\alpha$, $\forall \alpha \geq \alpha_0$ por (ii).

Assim, se $y \in N_\alpha$ então $\alpha < \alpha_0$.

Portanto,

$$f(y) = \sup_\alpha\{\alpha \mid y \in N_\alpha]\} \leq \alpha_0 \Rightarrow f(y) = \alpha_0$$

Logo $y \in N_\alpha$, $\forall \alpha < \alpha_0$ (por (ii) e pela definição de supremo)

Seja $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ tal que $\lim \alpha_n = \alpha$.

Portanto, se $y \in N_{\alpha_n}$, $\forall n \Rightarrow y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\alpha_n} = N_\alpha$ (por (iii)), contradizendo (*).
Assim, $N_{\alpha_0} = L_{\alpha_0} f$, $\alpha_0 \in [0, 1]$.

Proposição 1.3.3. Seja $F : X \longrightarrow \mathcal{F}K(\mathbb{R}^n)$ uma variável aleatória integravelmente limitada. Então, existe um único conjunto fuzzy $f^* \in \mathcal{F}K(\mathbb{R}^n)$ tal que:

$$L_\alpha f^* = (A) \int F_\alpha \quad , \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Prova: Vamos provar que a família $N_\alpha = (A) \int F_\alpha$ verifica as condições da proposição 1.3.2 anterior. Como $F(x) \in \mathcal{F}K(\mathbb{R}^n)$, $\forall x \in X$, então tem-se que

$$L_\alpha F(x) \text{ é compacto não vazio, qualquer que seja } \alpha \in (0, 1].$$

Assim, $F_\alpha(x) = L_\alpha F(x)$ é uma correspondência compacta e integravelmente limitada $\forall \alpha \in (0, 1]$.

Logo, pela Proposição 1.2.19, tem-se que $N_\alpha \neq \phi$, $\forall \alpha \in (0, 1]$.
Notamos que $N_0 = (A) \int F_0$, onde $F_0 : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ é tal que

$$F_0(x) = L_0 F(x) = \mathbb{R}^n \quad , \quad x \in X.$$

Logo

$$N_0 = (A) \int F_0 = \mathbb{R}^n.$$

Se $\alpha \leq \beta$, então

$$L_\alpha F(x) \supseteq L_\beta F(x) \quad , \quad \forall x \in X.$$

Portanto

$$F_\beta(x) \subseteq F_\alpha(x) \quad , \quad x \in X.$$

Assim

$$N_\beta = (A)\int F_\beta \subseteq (A)\int F_\alpha = N_\alpha$$

Seja finalmente $\alpha \in (0,1]$ e $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots, \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. É claro que $F_{\alpha_1}(x) \supseteq F_{\alpha_2}(x) \supseteq \dots\ , \forall x \in X$ e como F_{α_1} é integravelmente limitada tem-se que a seqüência (F_{α_n}) é limitada por uma mesma função $h \in L^1(X, \mathbb{R}, \mu)$.
Logo, pelo Teorema 1.2.24, $(A)\int F_{\alpha_n} \longrightarrow (A)\int F$ onde

$$F(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\alpha_n}(x) \quad , \ \forall x \in X.$$

é simples mostrar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\alpha_n}(x) = F_\alpha(x) \quad , \ \forall x \in X.$$

Assim,

$$(A)\int F_{\alpha_n} \xrightarrow{H} (A)\int F_\alpha$$

Como

$$F_{\alpha_1}(x) \supseteq F_{\alpha_2}(x) \supseteq \dots \ \text{então} \ (A)\int F_{\alpha_1} \supseteq (A)\int F_{\alpha_2} \supseteq \dots.$$

Portanto

$$(A)\int F_{\alpha_n} \xrightarrow{H} \bigcap_{n=1}^{\infty}(A)\int F_{\alpha_n}$$

Logo,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(A)\int F_{\alpha_n} = (A)\int F_\alpha$$

ou seja $N_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\alpha_n}$.

Finalmente, é claro que a família (N_α) define um único conjunto fuzzy $f^* \in \mathcal{F}K(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$L_\alpha f^* = N_\alpha = (A)\int F_\alpha \quad , \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

Observações:

a) A unicidade de f^* é, essencialmente devida ao fato de que dois conjuntos fuzzy f, g são iguais se, e somente se, $L_\alpha f = L_\alpha g \ , \ \forall \alpha \in [0,1]$, isto é, a família de níveis define univocamente o conjunto fuzzy.

b) $f^* \in \mathcal{F}K(\mathbb{R}^n)$ pois $L_\alpha f^* = (A)\int F_\alpha$ é compacto (1.2.24.) $\forall \alpha \in (0,1]$.

Por outro lado, $L_1 f^* = (A)\int F_1 \neq \phi$ (proposição 1.2.19).

Definição 1.3.4. Seja $F : X \longrightarrow \mathcal{F}K(\mathbb{R}^n)$ integravelmente limitada e $f^* \in \mathcal{F}K(\mathbb{R}^n)$ tal que $L_\alpha f^* = (A)\int F_\alpha$, definimos a *esperança* (ou integral) de $\mathcal{F}$ por:

$$\mathbb{E}(F) = (A-R)\int F = f^*$$

isto é,

$$L_\alpha(A-R)\int F = (A)\int F_\alpha \ , \ \forall \alpha \in [0,1].$$

Observação: $(A-R)\int F$ é também denominada integral de Aumann–Ralescu.

Sejam $f, g \in \mathcal{F}K(\mathbb{R}^n)$, então podemos generalizar a métrica de Hausdorff como segue:

$$H^*(f,g) = \sup_{\alpha>0} H(L_\alpha f, L_\alpha g)$$

onde H é a métrica de Hausdorff sobre a família de compactos de $\mathbb{R}^n$.

Pode–se provar (ver [30]) que:

Proposição 1.3.5. O espaço métrico $(\mathcal{F}K(\mathbb{R}^n), H^*)$ é completo.

Observação: Na demonstração do resultado anterior usa-se, essencialmente, o fato de que o espaço métrico $(K(\mathbb{R}^n), H)$ das partes compactas não vazias de $\mathbb{R}^n$, munido da métrica de Hausdorff, é completo e separável.

Definição 1.3.6. Um conjunto fuzzy $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ é chamado *fuzzy-convexo* se $L_\alpha f$ é convexo para todo $\alpha \in [0,1]$.

Além disso, f é chamado *fuzzy-compacto* se $L_\alpha f$ é compacto para todo $\alpha \in (0,1]$.

Observação: Uma definição equivalente de fuzzy-convexidade é a seguinte: $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \geq \min\{f(y_1), f(y_2)\}$$

com $f \in \mathcal{F}K(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.3.7. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita com μ não-atômica e $F : X \longrightarrow \mathcal{F}K(\mathbb{R}^n)$ integravelmente limitada. Então $(A-R)\int F$ é fuzzy-convexo.

Prova: Pelo Teorema 1.2.19,

$$L_\alpha(A-R)\int F = (A)\int F_\alpha$$

é convexo $\forall \alpha \in [0,1]$.

Logo $(A-R)\int F$ é fuzzy-convexo.

Teorema 1.3.8. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita e $F : X \longrightarrow \mathcal{F}K(\mathbb{R}^n)$ integravelmente limitada. Então $(A-R)\int F$ é fuzzy-compacto.

Prova: Pelo Teorema 1.2.25,

$$L_\alpha(A-R)\int F = (A)\int F_\alpha$$

é compacto $\forall \alpha \in (0,1]$.

Segue que $(A-R)\int f$ é fuzzy-compacto.

Teorema 1.3.9. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita com μ não-atômica e $(F_k)_{k\in \mathbb{N}}$ e F variáveis fuzzy aleatórias integravelmente limitadas tais que $F_k(x) \xrightarrow{H^*} F(x)$ $q.s.$, e existe $h \in L^1(X, \mathbb{R}, \mu)$ tal que

$$\sup_{y\in L_\alpha F_k(x)} ||y|| \leq h(x) \ , \ \forall k \geq 1 \ , \ \alpha > 0$$

Então,

$$(A-R)\int F_k \xrightarrow{H^*} (A-R)\int F$$

Prova: Para todo $\alpha > 0$ tem-se que

$$\begin{aligned} H\Big(L_\alpha(A-R)\int F_k \ , \ L_\alpha((A-R)\int F)\Big) &= H\Big((A)\int (F_k)_\alpha, (A)\int F_\alpha\Big) \\ &\leq \int H((F_k)_\alpha, F_\alpha)d\mu \ \text{(pela proposição 1.2.17)} \\ &= \int H^*(F_k, F)d\mu \end{aligned}$$

Segue que $H^*\Big((A-R)\int F_k, (A-R)\int F\Big) \leq \int H^*(F_k, F)d\mu$.

Agora, $H^*(F_k(x), F(x)) \longrightarrow 0$ qs.

Como

$$H^*(F_k(x),F(x)) \leq H^*(F_k(x),\chi_{\{\vec{o}\}}) + H^*(\chi_{\{\vec{o}\}},F(x))$$

segue que

$$\begin{aligned} H^*(F_k(x),\chi_{\{o\}}) &= \sup_{\alpha>0} H(L_\alpha F_k(x),\{\vec{o}\}) \\ &= \sup_{\alpha>0} \sup_{y\in L_\alpha F_k(x)} \|y\| \\ &\leq h(x) \quad , \quad h \in L^1(X,I\!R,\mu) \end{aligned}$$

Assim, usando o Teorema de Convergência Dominada Clássico, tem-se que

$$\int H^*(F_k,F) \longrightarrow 0$$

Logo, $(A-R)\int F_k \xrightarrow{H^*} (A-R)\int F.$ $\square$

Desejamos agora estudar a linearidade da integral $(A-R)\int F$. Para isso é necessário definir operações adequadas de soma e produto por escalar sobre $\mathcal{F}K(I\!R^n)$.

Sejam $f,g \in \mathcal{F}K(I\!R^n)$. Aproveitando a estrutura vetorial de $I\!R^n$, desejamos induzir operações sobre $\mathcal{F}K(I\!R^n)$ tais que:

$$L_\alpha(f+g) = L_\alpha f + L_\alpha g \quad , \qquad \forall\alpha \in [0,1]$$

$$L_\alpha(\lambda f) = \lambda L_\alpha f \quad , \qquad \forall\alpha \in [0,1]\,,\ \lambda \in I\!R^n$$

Se $\lambda = 0$ define-se $0 \cdot f = \chi_{\{\vec{o}\}}$.

Lema 1.3.10. Sejam $f, g \in \mathcal{F}K(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Então, as famílias

$$\begin{aligned} N_\alpha &= L_\alpha f + L_\alpha g \\ M_\alpha &= \lambda L_\alpha f \end{aligned}$$

são famílias de níveis (isto é, verificam condições do Lema 1.3.2).

Prova:

i) $N_0 = \mathbb{R}^n + \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$

$M_0 = \mathbb{R}^n + \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$

ii) $\alpha \leq \beta \Rightarrow L_\beta f \subseteq L_\alpha f \quad \text{e} \quad L_\beta g \subseteq L_\alpha g$

$\Rightarrow N_\beta = L_\beta f + L_\beta g \subseteq L_\alpha f + L_\alpha g = N_\alpha$

Além disso, $\lambda L_\beta g \subseteq \lambda L_\alpha g$. Portanto $M_\beta \subseteq M_\alpha$.

(iii) Seja $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ tal que $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha > 0$. Então

a) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}(L_{\alpha_k} f + L_{\alpha_k} g) = (\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}(L_{\alpha_k} f)) + (\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}(L_{\alpha_k} g))$.

De fato, se $y \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}(L_{\alpha_k} f + L_{\alpha_k} g)$ então existem seqüências (y_k) e (z_k) tais que $y_k \in L_{\alpha_k} f, z_k \in L_{\alpha_k} g$ e $y = y_k + z_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Como $L_{\alpha_k} f \subseteq L_{\alpha_1}(f)$ e $L_{\alpha_1} f$ é compacto, então existe uma subseqüência (y_{k_i}) tal que $y_{k_i} \longrightarrow y_0 \in L_{\alpha_1}(f)$. Desta forma, a subseqüência associada (z_{k_i}) é tal que $z_{k_i} \longrightarrow y - y_0 = z_0$. Agora ,

$$\begin{aligned} \|y - (y_0 + z_0)\| &\leq \|y - (y_{k_i} + z_{k_i})\| + \|y_{k_i} + z_{k_i} - (y_0 + z_0)\| \\ &\leq \|y_{k_i} - y_0\| + \|z_{k_i} - z_0\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

isto é, $y = y_0 + z_0$.

Por outro lado, $y_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} L_{\alpha_k} f = L_\alpha f$.

Com efeito, suponha $y_0 \notin L_\alpha f$,

então existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(y_0) < \alpha - \varepsilon$. Além disso, como $\alpha_{k_i} \longrightarrow \alpha$, existe $i_0 \in I\!N$ tal que

$$\alpha_{k_i} > \alpha - \varepsilon \quad , \quad \forall i \geq i_0$$

Por outro lado $\quad f(y_0) < \alpha - \varepsilon \Rightarrow$ existe $\delta > 0$ tal que

$$B(y_0, \delta) \cap L_{\alpha-\varepsilon} f = \phi$$

Como $y_{k_i} \longrightarrow y_0$, existe $k_0^* \in I\!N$ tal que $y_{k_i} \in B(y_0, \delta)$ $, \forall i \geq i_0^*$.

Assim, tomando $K_0 = \max\{i_0, i_0^*\}$ temos:

$$\alpha_{k_i} > \alpha - \varepsilon \quad \text{e} \quad f(y_{k_i}) < \alpha - \varepsilon \quad , \quad \forall i \geq K_0$$

$$\Rightarrow \qquad f(y_{k_i}) < \alpha - \varepsilon < \alpha_{k_i} \quad , \quad \forall i \geq K_0$$

contradizendo o fato de que $y_{k_i} \in L_{\alpha_{k_i}} f \quad , \forall i$.

Analogamente prova-se que $z_0 \in L_\alpha g$.

Logo, $y = y_0 + z_0 \in L_\alpha f + L_\alpha g = (\bigcap_{k=1}^{\infty} L_{\alpha_k} f = L_\alpha f) + (\bigcap_{k=1}^{\infty} L_{\alpha_k} f = L_\alpha g)$.

A inclusão contrária é clara.

b) Não é difícil mostrar que $\bigcap_{k=1}^{\infty} (\lambda L_{\alpha_k} f) = \lambda \bigcap_{k=1}^{\infty} L_{\alpha_k} f$.

Assim, de a) e b) segue-se que as famílias (N_α) e (M_α) são famílias de níveis.

Agora estamos em condições de dar a seguinte definição:

Definição 1.3.11. Sejam $f, g \in \mathcal{F}K(I\!R^n)$ e $\lambda, \in I\!R^n$, então:

$$\begin{aligned}
(f+g)(y) &= \sup\{\alpha \in [0,1] \mid y \in L_\alpha f + L_\alpha g\} \\
(\lambda f)(y) &= \sup\{\alpha \in [0,1] \mid y \in \lambda L_\alpha f\} \\
\text{com } 0 \cdot f &= \chi_{\{\bar{o}\}}
\end{aligned}$$

Observações:

a) Pode-se provar que a definição acima é equivalente a:

$$(f+g)(y) = \sup_{y_1+y_2=y} \min\{f(y_1), g(y_2)\}$$

$$(\lambda f)(y) = \begin{cases} f(\lambda^{-1}y) & \text{se } \lambda > 0 \\ \\ \chi_{\{\bar{o}\}} & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}$$

b) Se em $\mathcal{F}K(I\!R^n)$ consideramos a subfamília de conjuntos fuzzy com níveis $L_\alpha f$ convexos, denotada por $\mathcal{F}K_c(I\!R^n)$, então , usando o Teorema de Radström (ver [32]) pode-se mergulhar $\mathcal{F}K_c(I\!R^n)$ como cone convexo de um espaço vetorial normado real onde a norma sobre $\mathcal{F}K_c(I\!R^n)$ é H^*.

Proposição 1.3.12. Sejam $F, F_1, F_2 : X \longrightarrow \mathcal{F}K(I\!R^n)$ variáveis fuzzy aleatórias integravelmente limitadas. Então:

a) $F_1(x) \subseteq F_2(x)$ $q.s. \Rightarrow (A-R)\int F_1 \subseteq (A-R)\int F_2$ (contenção no sentido fuzzy).

b) Se $(\lambda F)(x) = \lambda F(x) \Rightarrow (A-R)\int \lambda F = \lambda(A-R)\int F$, $\lambda \geq 0$

c) Se $(F_1+F_2)(x) = F_1(x) + F_2(x)$, então

$$(A-R)\int(F_1+F_2) = (A-R)\int F_1 + (A-R)\int F_2$$

onde a soma e o produto por escalar em $\mathcal{F}K(\mathbb{R}^n)$ são no sentido da definição 1.3.11.

Prova:

a) $F_1(x) \subseteq F_2(x) \Rightarrow F_1(x)(y) \leq F_2(x)(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$.

Logo

$$L_\alpha F_1(x) \subseteq L_\alpha F_2(x),$$

isto é

$$(F_1)_\alpha(x) \subseteq (F_2)_\alpha(x).$$

Assim

$$\begin{aligned} F_1(x) \subseteq F_2(x)\ q.s. \quad &\Rightarrow \quad (F_1)_\alpha(x) \subseteq (F_2)_\alpha(x)\ q.s. \\ &\Rightarrow \quad (A)\int (F_1)_\alpha \subseteq (A)\int (F_2)_\alpha \text{ (pela proposição 1.2.26)} \\ &\Rightarrow \quad L_\alpha(A-R)\int F_1 \subseteq L_\alpha(A-R)\int F_2 \quad , \ \forall \alpha \in [0,1] \\ &\Rightarrow \quad (A-R)\int F_1 \subseteq (A-R)\int F_2 \end{aligned}$$

b) Se $\lambda > 0$ então

$$L_\alpha(A-R)\int \lambda F = (A)\int (\lambda F)_\alpha \quad \text{onde} \quad (\lambda F)_\alpha : X \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

tal que

$$(\lambda F)_\alpha(x) = L_\alpha(\lambda F)(x) = L_\alpha \lambda F(x) = \lambda L_\alpha F(x) \ \text{ (cf proposição 1.3.11)}$$

isto é, $(\lambda F)_\alpha = \lambda F_\alpha$.

Assim,

$$\begin{aligned} L_\alpha(A-R)\int \lambda F = (A)\int \lambda F_\alpha \quad &= \quad \lambda(A)\int F_\alpha \ \text{ (cf proposição 1.2.26)} \\ &= \quad \lambda L_\alpha(A-R)\int F \\ &= \quad L_\alpha \lambda(A-R)\int F \ \text{ (cf definição 1.3.11)} \end{aligned}$$

Portanto,

$$(A-R)\int \lambda F = \lambda(A-R)\int F$$

Para $\lambda = 0$ não é difícil provar que $(A-R)\int \lambda F = \chi_{\{\vec{o}\}} = \lambda(A-R)\int F$.

c) Como $(F_1+F_2)(x) = F_1(x)+F_2(x)$ tem-se que

$$\begin{aligned} L_\alpha(F_1+F_2)(x) &= L_\alpha(F_1(x)+F_2(x)) \ , \forall x \in X \\ &= L_\alpha F_1(x) + L_\alpha F_2(x) \quad \text{(cf definição 1.3.11)} \end{aligned}$$

isto é, $(F_1+F_2)_\alpha = (F_1)_\alpha + (F_2)_\alpha$.

Assim,

$$\begin{aligned} L_\alpha(A-R)\int(F_1+F_1) &= (A)\int(F_1+F_2)_\alpha = (A)\int(F_1)_\alpha + (F_2)_\alpha \\ &= (A)\int(F_1)_\alpha + (A)\int(F_2)_\alpha \quad \text{(cf proposição 1.2.26)} \\ &= L_\alpha(A-R)\int F_1 + L_\alpha(A-R)\int F_2 \end{aligned}$$

Portanto

$$(A-R)\int(F_1+F_2) = (A-R)\int F_1 + (A-R)\int F_2$$

Observação: Nas condições anteriores as multiaplicações $(F_i)_\alpha$ são compactas e integravelmente limitadas.

Convergência em $\mathcal{F}K(\mathbb{R}^n)$

Kaleva em [23] e, recentemente, Greco–Quelho–Moschen [19] estudam diversos tipos de convergência sobre a família de subconjuntos fuzzy de $\mathbb{R}^n$ semicontínuous superiormente e com suportes compactos não vazios. As relações entre H^*-convergência,

L-convergência e S-convergência são fundamentais para o estudo das convergências de entropías que fazemos no Capítulo III.

Definição 1.3.13. Sejam $f_k, f, g \in \mathcal{F}K(I\!R^n)$. Então

a) $H^*(f,g) = \sup_{\alpha>0} H(L_\alpha f, L_\alpha g)$ e H^*-convergência é a induzida pela métrica H^* sobre $\mathcal{F}K(I\!R^n)$.

b) $f_k \xrightarrow{L} f \iff \lim_{k\to\infty} H(L_\alpha f_k, L_\alpha f) = 0 \;\; , \;\; \forall \alpha \in (0,1]$.

c) Se consideramos sobre $I\!R^n \times [0,1]$ a métrica:

$$d((y,t),(z,s)) = \max\{||y-z||, |t-s|\}$$

então ela induz uma distância, no sentido de Hausdorff, sobre a família de subconjuntos compactos não vazios de $I\!R^n \times [0,1]$.

Seja

$$hipo(f) = \{(y,t) \in I\!R^n \times [0,1] \mid f(y) \geq t\} \;,\; \forall f \in \mathcal{F}K(I\!R^n).$$

Definimos

$$send(f) = hipo(f) \cap (supp(f) \times [0,1])$$

Fazendo agora

$$S(f,g) = H(send(f), send(g))$$

tem–se que S é uma métrica sobre $\mathcal{F}K(I\!R^n)$.

S-convergência refere–se a convergência induzida pela métrica S.

Vamos denotar por:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}S(I\!R^n) &= \{f : I\!R^n \longrightarrow [0,1] \left| \begin{array}{l} \text{i) } f \text{ semicontínua superiormente} \\ \text{ii) } supp(f) \text{ compacto não vazio} \\ \text{iii) } L_1 f \neq \phi \end{array} \right. \} \\
\mathcal{F}S_c(I\!R^n) &= \{f \in \mathcal{F}S(I\!R^n) \mid L_\alpha f \text{ é convexo } \forall \alpha \in [0,1]\} \\
\mathcal{F}S_c^1(I\!R^n) &= \{f \in \mathcal{F}S_c(I\!R^n) \mid L_1 f \text{ é um singleton}\} \\
\mathcal{F}S^1(I\!R^n) &= \{f \in \mathcal{F}S(I\!R^n) \mid L_1 f \text{ é um singleton}\} \\
\mathcal{F}\mathcal{C}(I\!R^n) &= \{f \in \mathcal{F}S(I\!R^n) \mid L_\alpha f \text{ é côncavo}\}
\end{aligned}
$$

onde

$$f \text{ côncavo } \Longleftrightarrow f(\lambda y + (1-\lambda)z) \geq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(z) \quad , \quad \forall y, z \in supp(f),\ \lambda \in [0,1]$$

Kaleva em [23] prova os seguintes resultados:

Teorema 1.3.14.

a) H^*-convergência $\Rightarrow$ L-convergência sobre $\mathcal{F}K_c(I\!R^n)$

b) H^*-convergência $\Rightarrow$ S-convergência sobre $\mathcal{F}K_c(I\!R^n)$

Teorema 1.3.15. L-convergência $\Rightarrow$ H^*-convergência sobre $\mathcal{F}\mathcal{C}(I\!R^n) \cap \mathcal{F}S_c(I\!R^n)$.

Teorema 1.3.16. H^*-convergência $\Rightarrow$ L-convergência sobre $\mathcal{F}\mathcal{C}(I\!R^n) \cap \mathcal{F}S_c^1(I\!R^n)$.

Teorema 1.3.17. H^*-convergência, L-convergência e S-convergência são equivalentes sobre $\mathcal{F}\mathcal{C}(I\!R^n) \cap \mathcal{F}S^1(I\!R^n)$.

Greco–Quelho–Moschen [19] relacionam os três tipos anteriores de convergência com a Γ-convergência num contexto mais amplo de espaços localmente compactos.

Definição 1.3.18. Sejam $f, f_k \in \mathcal{F}S(I\!R^n)$. Então,

$$f_k \xrightarrow{\mathcal{G}} f \iff \limsup\ hipo(f_k) \subseteq\ hipo(f) \subseteq \liminf(f_k)$$

Em [19] estão os seguintes resultados:

Teorema 1.3.19. Sejam $f, f_k \in \mathcal{F}S(I\!R^n)$. Então são equivalentes:

a) $f_k \xrightarrow{S} f$

b) i) $f_k \xrightarrow{\Gamma} f$

ii) $\limsup(f_k) \subseteq\ supp(f)$

iii) O suporte de cada f_k está contido num mesmo compacto K de $I\!R^n$.

Definição 1.3.20. Seja $f \in \mathcal{F}S(I\!R^n)$, dizemos que $y_0 \in I\!R^n$ é um *máximo local próprio* de f se $0 < f(y_0) < 1$ e existe uma bola $B(y_0, \varepsilon)$ tal que $f(y) \leq f(y_0)$, $\forall y \in B(y_0, \varepsilon)$.

O principal resultado de comparação entre as convergências em [19] é o seguinte:

Teorema 1.3.21. Sejam $f, f_k \in \mathcal{F}S(I\!R^n)$ tal que f não possui máximos locais próprios. Então são equivalentes:

(a) $f_k \xrightarrow{H^\bullet} f$

(b) i) $f_k \xrightarrow{\Gamma} f$

ii) $\bigcup_{k=1}^{\infty} supp(f_k)$ está contido num compacto K de $I\!R^n$ e $\limsup(supp\, f_k) \subseteq\ supp(f)$

iii) $L_1 f \subseteq \liminf(L_1 f_k)$

(c) $f_k \xrightarrow{S} f$ e propriedade (b)-iii)

(d) $f_k \xrightarrow{L} f$ e propriedade (b)–ii).

Corolário 1.3.22. Sejam $f, f_k \in \mathcal{F}S(I\!R^n)$. Se f não possui máximos locais próprios e $L_1 f$ é um singleton, então $f_k \xrightarrow{H^*} f$ se, e somente se $f_k \xrightarrow{S} f$.

Corolário 1.3.23. Sejam $f, f_k \in \mathcal{F}S(I\!R^n)$. Se $send(f_k)$ é convexo $\forall k \geq 1$, e $L_1 f$ é um singleton, então: $f_k \xrightarrow{H^*} f \iff f_k \xrightarrow{\Gamma} f$.

Destes resultados segue-se que H^*, L, S e Γ-convergência são equivalentes sobre a família $\mathcal{G}_1 = \{f \in \mathcal{F}S(I\!R^n) |\ send(f)$ é convexo e $L_1 f$ é um singleton $\}$.

Observações:

a) Na realidade em [19], os autores trabalham no contexto mais geral de espaços métricos localmentes compactos. Entretanto, nosso interesse é usar a estrutura linear do espaço para poder falar nos capitulos seguintes, por exemplo, de *valorização*. Sendo assim ficamos restritos em dimensão finita pois qualquer espaço vetorial localmente compacto é de dimensão finita.

Fica em aberto, por enquanto, extender equivalências destas convergências a espaços normados arbitrários.

b) Se $f \in \mathcal{G}_1$, então f não possui máximos locais próprios, e portanto o Teorema 1.3.21 ([19]) é mais forte que o Corolário 1.3.23 ([23]).

c) Os Teoremas 1.3.7 e 1.3.8 mostram que, sob condições adequadas, a integral de uma variável fuzzy aleatória pertence a $\mathcal{F}K(I\!R^n) \cap \mathcal{F}K_c(I\!R^n)$, isto é, tem níveis compactos convexos.

Assim, podemos considerar a continuidade da integral $(A - R) \int F$ em relação às convergências anteriores.

CAPÍTULO II

SOBRE ENTROPÍAS FUZZY A MULTIVALORES

INTRODUÇÃO:

O conceito de Entropía Fuzzy está associado ao grau de incerteza ou indefinição envolvida numa situação dada.

Desde que Zadeh [50] introduziu, na década de 60, a noção de subconjunto fuzzy de um universo não vazio X, tornou-se possível desenvolver, paralelamente, o conceito de Entropía Fuzzy como uma medida de incerteza, juntamente com diversas aplicações práticas, especialmente no que se refere à manipulação de processos relacionados com informações e tomada de decisões [04] e [47].

A entropía, do ponto de vista clássico, funciona como uma medida de "quantidade de incerteza" ou uma "medida de diversidade", que opera sobre conjuntos de distribuições de probabilidade. Por exemplo, se $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ é uma distribuição de probabilidade finita, isto é, $p_k \geq 0$, $1 \leq k \leq n$ e $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, então a entropía (no sentido de Schannon) é definida por $H(p) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ell n(p_k$, considerando $0 \cdot \ell n(0) = 0$. A entropía H com suas respectivas interpretações tem várias propriedades interessantes [20]. Aplicações importantes do operador H estão relacionadas com o Princípio de Máxima Entropía o qual, como critério natural de seleção sobre conjuntos de distribuições de probabilidade, revela ser uma ferramenta eficáz já que, de fato, muitas distribuições de probabilidade importantes e de frequente uso, aparecem como soluções deste tipo de problemas variacionais [20].

No §1 deste Capítulo faremos um rápido resumo dos trabalhos pioneiros de alguns matemáticos que relacionam o significado clássico de entropía com a moderna teoria fuzzy. Entre os mais importantes podemos mencionar De Luca–Termini [08] que introduzem o conceito de entropía fuzzy como uma medida de incerteza; Trillas–Riera [40] que classificam diversos tipos de entropías sobre conjuntos finitos; Knopfmacher [27] que estende as idéias anteriores e constrói entropias sobre espaços de medida finita $(X, \mathcal{A}, \mu)$ via integral usual, associada à medida μ; Batle–Trillas [03] que conseguem resultados análogos aqueles de Knopfmacher usando elementos de medida e integração fuzzy.

No §2 propomos uma axiomática que permite introduzir o conceito de *entropía fuzzy multiavaliada* (M-entropía). Construimos exemplos de tais entropías multiavaliadas sobre um conjunto finito, generalizando as idéias de Trillas–Riera [40]. Construímos também M-entropías sobre um espaço de medida finita via a integral de Aumann [01] para multiplicações, generalizando o trabalho de Knopfmacher [27]. Além disso, mostramos algumas propriedades interessantes destas entropías, como por exemplo que a uma M-entropía é uma valorização do reticulado $\mathcal{F}(X)$.

Finalmente, no §3, estendemos as idéias anteriores e propomos o conceito de *entropía multi–fuzzy–avaliada* (MF-entropía) e construimos exemplos de MF-entropías a partir da integral generalizada de Puri–Ralescu [30] para variáveis fuzzy aleatórias. Também mostramos que, sob condições adequadas, as MF-entropías são valorizações do reticulado $\mathcal{F}(X)$.

§1. Entropías Fuzzy

Lembremos que, no contexto proposto por Zadeh [50], um *subconjunto fuzzy* de X é qualquer aplicação $f : X \longrightarrow [0,1]$, e seu complemento $\overline{f}$ é dado por $\overline{f}(x) = 1 - f(x)$,

$\forall x \in X$. Neste contexto, o conjunto fuzzy "mais raro" é dado por $f(x) = 1/2$, $\forall x \in X$, desde que, $\overline{f} = f$.

Segundo estas considerações De Luca–Termini [08] introduziram os seguintes axiomas para uma entropía fuzzy:

Definição 2.1.1. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{F}(X)$ a classe de todos os subconjuntos fuzzy de X. Uma ***entropía fuzzy*** sobre X é uma aplicação $E : F(X) \longrightarrow I\!R^{+}$ verificando:

E1) $E(f) = 0$ se, e somente se, f é clássico (i.e. $f(x) \in \{0,1\}$, $\forall x \in X$).

E2) $E(f)$ é máximo se, e somente se $f(x) = 1/2$, $\forall x \in X$.

E3) $E(f^*) \leq E(f)$ para qualquer f^* **vs** f (f^* "versão scharpened" de f), isto é, $f^*(x) \leq f(x)$ se $f(x) < 1/2$, e $f^*(x) \geq f(x)$ se $f(x) > 1/2$.

Trillas–Riera não impõem a condição de unicidade dada no axioma E2) e geram diversos tipos de entropías sobre conjuntos finitos, [40], conforme podemos ver no exemplo seguinte:

Exemplo 2.1.2. Consideremos uma aplicação $\Delta : [0,1] \longrightarrow I\!R^{+}$ satisfazendo:

1) $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$.

2) Δ crescente em $[0, 1/2)$ e decrescente em $(1/2]$.

3) Δ tem um máximo em $t = 1/2$.

(uma tal função é chamada uma função normalizadora). Sejam $\uplus$ e $*$ operações binárias sobre $I\!R^{+}$ tais que:

i) $\uplus$ é associativa, comutativa e

$$x \biguplus y = 0 \text{ se, e somente se, } x = 0 \text{ e } y = 0$$

ii) $\biguplus$ e $*$ são isótonas em relação à ordem " $\leq$ " em $I\!R^+$, isto é

$$a \leq b \quad \text{implica} \quad a \biguplus c \leq b \biguplus c \ , \ \forall c \in I\!R^+$$

$$a \leq b \quad \text{implica} \quad a * c \leq b * c \ , \ \forall c \in I\!R^+$$

iii) $x * y = 0$ se, e somente se, $x = 0$ ou $y = 0$.

Se $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ é um conjunto finito então a aplicação $E : \mathcal{F}(X) \longrightarrow I\!R^+$ definida por

$$E(f) = \biguplus_{i=1}^{k} [a_i * \Delta(f(x_i)] \quad \text{onde } a_i > 0 \text{ são fixos,}$$

define uma entropía sobre X. Em particular, se considerarmos

$$\biguplus \ \text{a soma usual } (\textstyle\sum) \text{ em } I\!R^+ \ \text{ e } \ * \ \text{ o produto em } I\!R^+ \text{ , com}$$

$$\Delta(t) = -t\ell nt - (1-t)\ell n(1-t), a_i = 1 \ , \ 1 \leq i \leq k$$

obtemos:

$$E(f) = -\sum_{i=1}^{k} f(x_i)\ell n(f(x_i)) - \sum_{i=1}^{k} \overline{f}(x_i)\ell n(\overline{f}(x_i)) = H(f) + H(\overline{f})$$

onde H é, justamente, a entropía clássica de Schannon para uma distribuição de probabilidade finita.

Em [27], Knopfmacher considera um espaço de medida finita $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e reformula a axiomática de Luca–Termini da seguinte forma:

E1*) $E(f) = 0$ se, e somente se, f é clássico qs (i.e. $\mu\{x \in X : f(x) \neq 0$ ou $f(x) \neq 1\} = 0$).

E2*) $E(f)$ é máximo se, e somente se, $f(x) = 1/2 \ qs$.

E3*) $E(f^*) \leq E(f)$ para qualquer f^* vs f qs.

Exemplo 2.1.3. Em [27], considerando uma função normalizadora contínua Δ tal que $\Delta(t) = \Delta(1-t)\ \forall t \in [0,1]$, Knopfmacher define

$$E(f) = \int_X \Delta(f) \quad , \quad \forall f \in \mathcal{F}(X)\ \mathcal{A}\text{-mensurável}$$

Tal entropía E verifica os axiomas E1*)–E3*) e, além disso valem:

E4*) $E(f) = E(\overline{f})$ (pela simetria de Δ).

E5*) E é contínua em relação à métrica uniforme sobre $\mathcal{F}(X)$.

E6*) $E(f \vee g) + E(f \wedge g) = E(f) + E(g)$, ou seja,

E é uma ***valorização do reticulado*** $(\mathcal{F}(X), \vee = \max\ ,\ \wedge = \min)$.

Observação: Em [03], Batle–Trillas considerando um espaço de medida fuzzy finita, obtiveram um resultado essencialmente análogo ao anterior, definindo

$$E(f) = \oint_X \Delta(f)$$

onde a integral associada à medida fuzzy é a integral fuzzy de Sugeno (ver Cap. I, [41], [38], [33], [34] e [45].

§2. Entropías Multiavaliadas (M-Entropías)

Sendo originalmente a entropía uma medida de incerteza, achamos natural pensar em certos "graus de tolerância" associados a ela. Nesse sentido, ao invés de associar um número real a tal medida, porque não associar, por exemplo, um subconjunto de $I\!R$? Pensamos então que, neste contexto, seria útil introduzir a noção de entropía multiavaliada. O propósito destre Parágrafo é dar a axiomática básica para tais entropías, estabelecer prévias considerações que sustentam tal axiomática, e mostrar que é possível generalizar, de maneira natural, os resultados de [40] assim como os de [27] via a integral de Aumann para multiaplicações [01], [25] e [21]. Finalmente, provamos que, sob condições adequadas, as M-entropías são valorizações do reticulado $\mathcal{F}(X)$.

M-Entropías

Desejamos definir uma entropía multiavaliada sobre X como sendo uma aplicação $E : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ (ou nas partes de qualquer espaço vetorial finito-dimensional) tal que se tenha uma relação natural entre elas e aquelas anteriormente estudadas.

Antes de propor uma axiomática fazemos algumas considerações.

Em primeiro lugar, notamos que qualquer conjunto fuzzy sobre X tem uma "versão scharpened" clássica. De fato, se para $f \in \mathcal{F}(X)$ dado definimos

$$f_c^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad f(x) \leq 1/2 \\ \\ 1 & \text{se} \quad f(x) > 1/2 \end{cases}$$

então é claro que f_c^* **vs** f e, além disso, f_c^* é clássico. Com isto em mente e observando que parece natural pedir que: f^* **vs** $f \Rightarrow E(f^*) \subseteq E(f)$, definimos:

f é clássico se, e somente se $E(f) = \{\vec{o}\}$, obtendo que $\vec{o} \in E(f)$, $\forall f \in \mathcal{F}(X)$.

Por outro lado, é claro que a condição E3) implica que $E(f_{1/2})$ deve ser máxima (onde $f_{1/2} = 1/2$, $\forall x \in X$) pois é fácil ver que f **vs** $f_{1/2}$, $\forall f \in \mathcal{F}(X)$. Assim resolvemos, no contexto de [40] considerar supérflua a condição E2), uma vez que não é utilizada.

Com estas considerações, propomos as seguintes condições para uma entropía multiavaliada:

Definição 2.2.1. Seja $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) = \{A \subseteq \mathbb{R}^n : \vec{o} \in A\}$. Uma *entropía multiavaliada* ou

M-*entropía* sobre X é uma aplicação $E : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{P}_0(I\!R^n)$ tal que:

EM1) $E(f) = \{\vec{0}\}$ se, e somente se f é clássico

EM2) Se g **vs** f então $E(g) \subseteq E(f)$.

Exemplos 2.2.2. Seja E uma entropía (usual) sobre X, então

$E_1(f) = [0, E(f)]^n = [0, E(f)] \times \cdots \times [0, E(f)]$ (n vezes)

$E_2(f) = [-E(f), E(f)]^n$

$E_3(f) = \overline{B}(\vec{o}, E(f))$ (a bola fechada com centro na origem e raio $E(f)$)

são M-entropías sobre X.

O resultado a seguir permite obter, de forma natural, entropías (no sentido usual) a partir das M-entropías.

Proposição 2.2.3. Se E é uma M-entropía sobre X então $||E||$ é uma entropía sobre X, onde $||E||$ é a composição da M-entropía E com a norma (qualquer que seja) sobre $I\!R^n$.

Demonstração:

Temos que $||E(f)|| = 0 \iff E(f) = \{\vec{o}\} \iff f$ é clássico, e portanto vale EM1). Por outro lado, se f^* **vs** f então $E(f^*) \subseteq E(f)$,
logo $||E(f^*)|| \leq ||E(f)||$, o que verifica EM2).

Podemos também gerar M-entropías a partir de outras M-entropías dadas.

Proposição 2.2.4. Seja $\varphi : (\mathcal{P}_0(I\!R^n))^k \longrightarrow \mathcal{P}_0(I\!R^n)$ tal que

(i) φ é não decrescente em cada variável

(ii) $\varphi(A_1, \ldots, A_k) = \{\vec{o}\}$ se, e somente se, $A_i = \{\vec{o}\}$, $1 \leq i \leq k$.

Se $E_1, \ldots, E_k$ são M-entropías sobre X então $E = \varphi(E_1, \ldots, E_k)$ é uma M-entropía sobre X.

Demonstração:

Direta a partir das propriedades de φ.

Exemplo 2.2.5. As aplicações $\varphi_1 A_1, \ldots, A_k) = \sum_{i=1}^{k} A_i$ e $\varphi_2(A_1, \ldots A_k) = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ satisfazem as condições da Proposição anterior e, portanto nos permitem gerar M-entropías.

Definição 2.2.6. Uma *função normalizadora multiavaliada* ou *M-normalizadora* é uma aplicação $\Delta : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ tal que

1) $\Delta(0) = \Delta(1) = \{\vec{o}\}$

2) Δ é crescente em $[0, 1/2]$ (no sentido que se $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1/2$, então $\Delta(t_1) \subseteq \Delta(t_2)$) e Δ é decrescente em $[1/2, 1]$.

Exemplo 2.2.7. A aplicação $\Delta : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\Delta(t) = \begin{cases} \overline{B}(\vec{o}, t), & \text{se } \ 0 \leq t \leq 1/2 \\ \overline{B}(\vec{o}, 1-t), & \text{se } \ 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é uma função M-normalizadora.

O Teorema seguinte estabelece a existência de M-entropías sobre um conjunto finito X (não vazio) dado.

Teorema 2.2.8. (Existência de M-entropías sobre um conjunto finito).

Sejam $\biguplus$ e $*$ operações binárias sobre $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ tais que:

i) $\biguplus$ é associativa, comutativa e satisfaz:

$$A \biguplus B = \{\vec{o}\} \text{ se, e somente se, } A = B = \{\vec{o}\}$$

ii) $\biguplus$ e $*$ são isótomas sobre o reticulado $(\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n), \subseteq)$, isto é,

Se

$$A_1 \subseteq A_2 \text{ então } \begin{cases} A_1 \biguplus B \subseteq A_2 \biguplus B & ,\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \\ \\ A_1 * B \subseteq A_2 * B & ,\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

(iii) $A * B = \{\vec{o}\}$ se, e somente se $A = \{\vec{o}\}$ ou $B = \{\vec{o}\}$.

Sejam $A_i \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ tais que $||A_i|| > 0$, $i \leq 1 \leq k$ e Δ uma função M-normalizadora.

Se $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ é um conjunto finito e $E : F(X) \longrightarrow \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ é definida por

$$E(f) = \biguplus_{i=1}^{k} [A_i * \Delta(f(x_i))]$$

então E é uma M-entropía sobre X.

Demonstração:

$$E(f) = \{\vec{o}\} \Leftrightarrow \biguplus_{i=1}^{k} [A_i * \Delta(f(x))] = \{\vec{o}\}$$

$\Leftrightarrow A_i * \Delta(f(x_i)) = \{\vec{o}\}$, $1 \leq i \leq k$ (por (i))

$\Leftrightarrow \Delta(f(x_i)) = \{\vec{o}\}$, $1 \leq i \leq k$ (por ii))

$\Leftrightarrow$ f é clássico.

Também, se g **vs** f então $\Delta(g(x_i)) \subseteq \Delta(f(x_i))$, $1 \leq i \leq k$, logo $A_i * \Delta(g(x_i)) \subseteq A_i * \Delta(f(x_i))$ $\forall 1 \leq i \leq k$ por (iii).

Segue de (ii) que $\biguplus_{i=1}^{k} [A_i * g(x_i)] \subseteq \biguplus_{i=1}^{k} [A_i * f(x_i)]$, isto é $E(g) \subseteq E(f)$.

Exemplo 2.2.9. No Teorema acima podemos considerar, por exemplo

$A * B = \overline{B}(\vec{o}, ||A||||B||)$ e

$\biguplus = \sum$ (soma) ou $\biguplus = \cup$ (união).

O seguinte resultado estabelece condições necessárias e suficientes para que uma entropía multiavaliada do tipo $\biguplus - *$ provenha de uma função M-normalizadora, como no Teorema anterior.

Proposição 2.2.10. Seja X um conjunto finito. Se $\biguplus$ e $*$ satisfazem as condições do Teorema 2.2.8 e as condições adicionais:

a) $$(A \biguplus B) * C = (A * C) \biguplus (B * C) \qquad \text{(Distributividade)}$$

b) Se $A_1 \not\subset A_2$ então $B * A_1 \not\subset B * A_2$, $\forall B$, com $||B|| > 0$

então, $E = \biguplus\limits_{i=1}^{k} [A_i * \Delta(f(x_i))]$ é uma M-entropía se, e somente se, Δ é uma função M-normalizadora.

Demonstração: $(\rightarrow)$ Suponhamos que existam t_1, t_2 tais que $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1/2$ e $\Delta(t_2) \not\subset \Delta(t_1)$ então $A_1 * \Delta(t_2) \not\subset A_1 * \Delta(t_1)$.

Mas $g = (t_1, 0, \ldots, 0)$ vs $(t_2, 0, \ldots, 0)$ então $A_1 * \Delta(t_1) = E(g) \subseteq E(f) = A_1 * \Delta(t_2)$, que é uma contradição.

Analogamente $1/2 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1 \Rightarrow \Delta(t_2) \subseteq \Delta(t_1)$.

Isto prova a condição 2) para Δ.

Suponhamos agora que $\Delta(0) \neq \{\vec{o}\}$. Se considerarmos $f_0 = (0, \ldots, 0)$ então $E(f_0) = \biguplus\limits_{i=1}^{k} [A_i * \Delta(0)] = \{\vec{o}\}$. Logo usando b) obtemos $(\biguplus\limits_{i=1}^{k} A_i) * \Delta(0) = \{\vec{o}\}$ e por (iii) $\biguplus\limits_{i=1}^{k} A_i = \{\vec{o}\}$.

Segue da condição i) que $A_i = \{\vec{o}\}$, $1 \leq i \leq k$, que conduz a uma contradição.

Assim, $\Delta(0) = \{\vec{o}\}$. Analogamente, considerando $f_1 = (1, \ldots, 1)$ se tem

$$E(f_1) = \left(\biguplus_{i=1}^{k} A_i\right) * \Delta(1) = \{\vec{o}\}$$

o que garante que $\Delta(1) = \{\vec{o}\}$ e portanto, Δ verifica a condição 1).

($\leftarrow$) Segue do Teorema 2.2.8.

Definição 2.2.11. Uma função M-normalizadora Δ é dita *simétrica* se

$$\Delta(t) = \Delta(1-t) \quad , \quad \forall t \in [0,1]$$

Uma M-entropía E é dita *simétrica* se

$$E(f) = E(\overline{f}) \qquad \forall f \in F(X)$$

Em relação à simetria temos os seguintes resultados:

Proposição 2.2.12. Se a função M-normalizadora Δ é simétrica, então a M-entropía $E = \biguplus_{i=1}^{k}[A_i * \Delta(\cdot)]$ também é simétrica.

Demonstração:

Direta a partir da simetria de Δ.

Proposição 2.2.13. Seja $*$ cancelativa (i.e. $A * B = A * C \Rightarrow B = C$) e distributiva sobre $\biguplus$. A M-entropía $E = \biguplus_{i=1}^{k}[A_i * \Delta(\cdot)]$ é simétrica se, e somente se, a função M-normalizadora Δ é simétrica.

Demonstração:

$(\rightarrow)$ Seja E simétrica. Se para $t \in [0,1]$ consideramos a aplicação $f_t(x) = t$, $\forall x \in X$, então $E(f_t) = E(\overline{f}_t) = E(f_{1-t})$. Assim

$$\left(\biguplus_{i=1}^{k} A_i\right) * \Delta(t) = \left(\biguplus_{i=1}^{k} A_i\right) * \Delta(1-t)$$

logo $\Delta(t) = \Delta(1-t)$. Sendo t arbitrário, então Δ é simétrica.

$(\leftarrow)$ Segue da Proposição 2.2.12.

No seguinte resultado estabelece-se quando as nossas $\biguplus$ $-*$-entropías são valorizações do reticulado $\mathcal{F}(X)$.

Teorema 2.2.14. Sejam X um conjunto finito e $\oplus$ uma operação binária, comutativa sobre $\mathcal{P}_0(I\!R^n)$ tal que $\biguplus$ verifica a seguinte equação funcional:

$$\biguplus(A \oplus B, A' \oplus B') = \biguplus(A, A') \oplus \biguplus(B, B').$$

Se E é uma $\biguplus$ $-*$-entropía multiavaliada sobre X então E é uma $\oplus$-valorização do reticulado $\mathcal{F}(X)$, no sentido que $E(f \vee g) \oplus E(f \wedge g) = E(f) \oplus E(g)$, $\forall f, g \in F(X)$.

Demonstração:

$$E(f \vee g) \oplus E(f \wedge g) = \biguplus_{i=1}^{k} [A_i * \Delta[(f \vee g)(x_i)]] \oplus \biguplus_{i=1}^{k} [A_i * \Delta([(f \wedge g)(x_i)]]$$

Agora, basta notar que:

$$A_i * \Delta(f \vee g)(x_i)) = A_i * \Delta(f(x_i)) \Longleftrightarrow A_i * \Delta((f \wedge g)(x_i)) = A_i * \Delta(g(x_i))$$

Usando este fato, a comutatividade de $\biguplus$ e $\oplus$ e a relação funcional entre elas segue o resultado.

Exemplo 2.2.15. No Teorema anterior podemos considerar $\uplus = \oplus = \sum$ (soma), ou $\uplus = \oplus = \cup$ (união).

Observação: É importante salientar que os resultados anteriores generalizam o trabalho de Trillas–Riera [40].

Nosso objetivo imediato é generalizar os resultados de Knoipfmacher [27]. Para tal utilizaremos alguns elementos da teoria de integração de multiaplicações ([01], [25], [21], [42] e [51].

No que se segue, afim de garantir a convexidade da integral de Aumann, consideraremos $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita não atômica.

Teorema 2.2.16. (Existência de M-entropías sobre um espaço de medida finita).

Seja $\Delta : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}_0(I\!R^n)$ uma função M-normalizadora compacta e não negativa. Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida finita não atômica então

$$E(f) = (A)\int \Delta(f) \quad , \quad \forall f \in F(X)$$

define uma M-entropía sobre X satisfazendo:

EM*1) $E(f) = \{\vec{o}\}$ se, e somente se, f clássico qs

EM*2) Se g vs f qs então $E(g) \leq E(f)$.

Demonstração:

Seja $f \in \mathcal{F}(X)$ tal que $E(f) = \{\vec{o}\}$, isto é $(A)\int \Delta(f) = \{\vec{o}\}$.
Se $h \in S(\Delta(f))$ é qualquer seleção de $\Delta(f)$ então $\int h = \{\vec{o}\}$, mas Δ é não negativa, então h é não negativa qs logo $h = \vec{o}\ qs$. Como conseqüência $S(\Delta(f)) = S$ (aplicação nula qs), logo $\Delta(f) = \vec{o}\ qs$ (Corolário 1.2.13). Daí $f(x) \in \{0,1\}$ qs e portanto f é clássico qs.

Reciprocamente, se f é clássico qs então $\Delta(f) = \{\vec{o}\}$ qs o que implica que $E(f) = \{\vec{o}\}$. Assim a propriedade EM*1) é verificada.

A propriedade EM*2) é conseqüência da monotonia da integral de Aumann (i.e. se $G_1(x) \subseteq G_2(x)$ qs então $(A)\int G_1 \subseteq (A)\int G_2$ o que implica que se $G_1 = G_2$ qs então $(A)\int G_1 = (A)\int G_2$; ver Capítulo I).

Corolário 2.2.17. Nas condições do Teorema 2.2.16 anterior, a M-entropía E também verifica as seguintes propriedades:

EM*3) $E(f)$ é máximo quando $f(x) = \frac{1}{2}$ qs.

EM*4) $E(f) = E(\overline{f})$ se $\Delta(t) = \Delta(1-t)$ qs.

EM*5) E é uma valorização do reticulado $\mathcal{F}(X)$ no sentido que

$$E(f \vee g) + E(f \wedge g) = E(f) + E(g) \quad , \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X)$$

(onde a soma + é a usual de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ induzida pela estrutura vetorial).

Demonstração:

EM*3) é conseqüência direta de EM*2), e EM*4) se deduz da simetria de Δ.

Sejam $f, g \in \mathcal{F}(X)$. Consideremos os conjuntos disjuntos

$$A = \{x | (f-g)(x) \geq 0\} \quad (\text{i.e.} f \geq g \ \text{ sobre } A)$$

$$B = \{x | (f-g)(x) < 0 \quad (\text{i.e.} f < g \ \text{ sobre } B)$$

É claro que $X = A \cup B$ e A e B são mensuráveis se f e g o são.

Usando a linearidade da integral de Aumann sobre compactos (Cap. I) obtemos

$$(A)\int_X \Delta(f \vee g) \ = \ (A)\int_A \Delta(f) + (A)\int_B \Delta(g)$$

$$(A)\int_X \Delta(f \wedge g) \ = \ (A)\int_A \Delta(g) + (A)\int_B \Delta(f)$$

Com isto

$$
\begin{aligned}
E(f \vee g) + E(f \wedge g) &= (A)\int_X \Delta(f \vee g) + (A)\int_X \Delta(f \wedge g) \\
&= (A)\int_A \Delta(f) + (A)\int_B \Delta(g) + (A)\int_A \Delta(g) + (A)\int_B \Delta(f) \\
&= [(A)\int_A \Delta(f) + (A)\int_B \Delta(f)] + [(A)\int_A \Delta(g) + (A)\int_B \Delta(g)] \\
&= (A)\int_X \Delta(f) + (A)\int_X \Delta(g) = E(f) + E(g)
\end{aligned}
$$

o que prova EM*5).

Observações: (1) Sabemos que a soma de dois conjuntos fechados não é necessariamente fechado, mas a soma de dois conjuntos compactos é um conjunto compacto e portanto fechado. É por causa disso que achamos importante considerar, no teorema anterior, Δ a valores compactos pois dessa forma conseguimos garantir a linearidade da integral (maiores detalhes são vistos no Capítulo I). Notemos também que, pelas propriedades da integral de Aumann, a M-entropía obtida é a valores compacto–convexos.

(2) Também é possível provar que a M-entropía construída a partir da integral de Aumann é H-contínua em relação à métrica uniforme quando Δ é contínua e a valores fechados. Este resultado é provado no Capítulo III quando se estuda o problema referente à continuidade das entropías.

(3) O Teorema 2.2.16 e o Corolário 2.2.17 generalizam os resultados de Knopfmacher [27].

No que se segue, nosso objetivo será generalizar as M-entropías a uma classe mais geral de medidas de incerteza que chamaremos de MF-entropías. Como será visto, elas estendem de forma natural o conceito de M-entropía.

Particularmente, pensamos que a forma ideal de medir incerteza de um conjunto fuzzy é associando a este conjunto um outro conjunto fuzzy que seja, em geral, melhor comportado (por exemplo, com níveis compacto-convexos, ou com suporte compacto, etc.)

MF-Entropías

Sejam
$$\mathcal{F}_0(I\!R^n) = \{f \in \mathcal{F}(I\!R^n) | f(\vec{o}) = 1\} \text{ e}$$
$$\mathcal{F}K_0(I\!R^n) = \{f \in \mathcal{F}K(I\!R^n) | f(\vec{o}) = 1\}$$

Definição 2.2.18. Uma função $\Delta : [0,1] \longrightarrow \mathcal{F}_0(I\!R^n)$ é chamada em multifuzzy-normalizadora ou *MF-normalizadora* se

1) $\Delta(0) = \Delta(1) = \chi_{\{\vec{o}\}}$ (a função característica de $\{\vec{o}\}$)

2) Δ é crescente em $[0, 1/2]$ (i.e. se $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1/2$ então $\forall \vec{x} \in I\!R^n$ tem-se $\Delta(t_1)(\vec{x}) \leq \Delta(t_2)(\vec{x})$) e decrescente em $[1/2, 1]$.

Se Δ é uma função MF-normalizadora então Δ_α é M-normalizadora. Uma espécie de recíproca deste resultado é considerado no seguinte:

Exemplo 2.2.19. Se $\Delta : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}_0(I\!R^n)$ é uma função M-normalizadora, então $\overline{\Delta} : [0,1] \longrightarrow \mathcal{F}_0(I\!R^n)$ definida por: $\overline{\Delta}(t) = \chi_{\Delta(t)}$, é uma função MF-normalizadora.

Definição 2.2.20. Uma *entropía multi-fuzzy-avaliada* ou *MF-entropía* sobre X é uma aplicação $E : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}_0(I\!R^n)$ que verifica:

EMF1) $E(f) = \chi_{\{\vec{0}\}}$ se, e somente se f é clássico.

EMF2) Se g vs f então $E(g) \subseteq E(f)$.

É importante notar que, realmente, as M-entropías são um caso particular das M-entropías. Isto é o que afirma a

Proposição 2.2.21. Seja $E : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{P}_0(I\!R^n)$ uma M-entropía sobre X. Se $\overline{E} : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}_0(I\!R^n)$ é definida por: $\overline{E}(f) = \chi_{E(f)}$, então $\overline{E}$ é uma MF-entropía sobre X.

Demonstração:

É conseqüência direta da definição de M-entropía e das propriedades elementares das funções características.

O nosso próximo resultado nos permitirá construir, via a integral de Aumann-Ralescu generalizada, MF-entropías para variáveis fuzzy aleatórias.

Teorema 2.2.22. (Construção de MF-entropías via a integral de Aumann-Ralescu generalizada).

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita e seja Δ uma função MF-normalizadora a valores fuzzy-compactos e não negativa (no sentido que cada Δ_α é não negativa). A aplicação $E : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}K_0(\mathbb{R}^n)$ dada por:

$$E(f) = (A-R)\int \Delta(f)$$

define uma M-entropía sobre X satisfazendo:

EMF*1) $E(f) = \chi_{\{\vec{o}\}}$ se, e somente se f clássico qs

EMF*2) se g vs f qs , então $E(g) \subseteq E(f)$.

Demonstração:

Seja $f \in \mathcal{F}(X)$ tal que $E(f) = \chi_{\{\vec{o}\}}$.

Logo

$$(A)\int(\Delta(f))_\alpha = L_\alpha(A-R)\int \Delta(f) = L_\alpha\chi_{\{\vec{o}\}} = \begin{cases} \mathbb{R}^n & \text{se} \quad \alpha = 0 \\ \\ \{\vec{o}\} & \text{se} \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

portanto $(A)\int(\Delta(f))_\alpha = \{\vec{o}\}$, $\forall\alpha > 0$. Sendo que Δ_α é não negativa temos que

$$(\Delta(f))_\alpha = \{\vec{o}\}\ qs\ ,\ \forall\alpha > 0\ ,\text{então}\Delta(f) = \chi_{\{\vec{o}\}}\ qs,\ \text{i.e. } f \text{ é clássico } qs.$$

Reciprocamente, se f é clássico qs então $\Delta(f) = \chi_{\{\vec{o}\}}$ qs. Assim, $(\Delta(f))_\alpha : X \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é tal que

$$(\Delta(f))_\alpha(x) = \{\vec{p} \in \mathbb{R}^n : (\Delta(f))(x)(\vec{p}) \geq \alpha\} = L_\alpha(\Delta(f))(x) = \begin{cases} \mathbb{R}^n & \text{se} \quad \alpha = 0 \\ \\ \{\vec{o}\} & \text{se} \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

Logo

$$L_\alpha(A-R)\int \Delta(f) = (A)\int(\Delta(f))_\alpha = \begin{cases} \mathbb{R}^n & \text{se} \quad \alpha = 0\ , \\ \\ \{\vec{o}\} & \text{se} \quad \alpha > 0\ , \quad \text{e portanto,} \end{cases}$$

$E(f) = (A-R)\int \Delta(f) = \chi_{\{\vec{o}\}}$, o que prova a validade de EMF*1.

A propriedade EMF*2) é consequência direta da monotonia da integral usada.

Corolário 2.2.23. Nas condições do teorema anterior a MF-entropía E também verifica as propriedades:

EMF*3) $E(f)$ é máximo quando $f(x) = 1/2$ qs

EMF*4) $E(f) = E(\overline{f})$ se $\Delta(t) = \Delta(1-t)$ qs.

EMF*5) E é uma valorização do reticulado $\mathcal{F}(X)$ no sentido que

$$E(f \vee g) + E(f \wedge g) = E(f) + E(g)$$

onde a soma em $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ é tal que $L_\alpha(u+v) = L_\alpha u + L_\alpha v$. (ver definição 1.3.11).

Demonstração:

EMF*3) é conseqüência direta de EMF*2); EMF*4) segue da simetria de Δ.

Para provar EMF*5) basta provar que para cada α:

$$L_\alpha(E(f \vee g) + E(f \wedge g)) = L_\alpha(E(f) + E(g))$$

isto é, $L_\alpha E(f \vee g) + L_\alpha E(f \wedge g) = L_\alpha E(f) + L_\alpha E(g)$ ou equivalentemente

$$(A)\int \Delta(f \vee g)_\alpha + (A)\int \Delta(f \wedge g)_\alpha = (A)\int \Delta(f)_\alpha + (A)\int \Delta(g)_\alpha \qquad [*]$$

Sendo cada Δ_α uma função M-normalizadora, compacta e não negativa (pela escolha de Δ), então cada $E_\alpha = (A)\int \Delta_\alpha$ é uma M-entropía.

Tendo provado que as M-entropías assim construídas são valorizações, então [*] é válido.

Observações: (1) No Capítulo III provaremos que a MF-entropía construída anteriormente, a partir da $(A-R)$-integral, é L-contínua em relação à métrica uniforme sobre $\mathcal{F}(X)$.

(2) É claro que os resultados 2.2.8 e 2.2.14 podem ser estendidos no contexto das MF-entropías, pois sobre $\mathcal{F}_0(I\!R^*)$ as possibilidades de se definir operações $\uplus$ e $*$, com as propriedades requeridas são maiores.

(3) Na Proposição 2.2.3 mostramos que se E é uma M-entropía então $||E||$ é uma entropía.

Pode–se extender este resultado ao contexto das MF-entropías do seguinte modo:

Seja E uma MF-entropía, então a aplicação $E^* : \mathcal{F}(X) \longrightarrow I\!R^+$ definida por

$$E^*(f) = H^*(E(f), \chi_{\{\vec{o}\}})$$

é uma entropía.

Comentário: Aceita–se como axioma em Ecologia que a estabilidade de uma comunidade esteja diretamente relacionada com o *grau de diversidade*, avaliado geralmente de maneira subjetiva. Podemos agora pensar em nossas entropías multiavaliadas como ferramenta para avaliar a estabilidade de uma comunidade levando em conta, não somente o grau de diversidade entre as espécies, mas as diferentes características existente em cada espécie. Isto por si só poderia ser um fator de motivação para a continuação deste estudo, outro seria a quantidade de *problemas em aberto* que aparecem naturalmente quando se relaciona a Teoria Fuzzy com as propriedades conhecidas da Teoria de Correspondências. Para exemplificar, citaremos aqui um desses problemas:

P_1) Trabalhos recentes de Ebanks [16], Emptoz [17] e Sander [37] estabelecem condições mínimas que garantem a unicidade da Entropía Fuzzy. A propriedade de Valorização é fundamental em todos esses trabalhos. Sendo que, nossas M-Entropías e MF-Entropías, sob condições adequadas, são valorizações, pensamos que existem boas perspectivas para se trabalhar no problema de unicidade das entropías multiavaliadas.

CAPÍTULO III

CONVERGÊNCIA DE ENTROPIAS FUZZY.

Introdução

O principal objetivo deste Capítulo é , essencialmente, analisar e resolver os seguintes problemas:

(a) Continuidade de uma entropía, isto é, dada uma entropía E sobre X é uma seqüência (f_n) em $F(X)$ com $f_n \longrightarrow f$, estabelecer condições que garantam a convergência $E(f_n) \longrightarrow E(f)$.

(b) Convergência de entropías, isto é, dada uma seqüência de entropías (E_n) sobre X, achar condições de forma que $E_n \longrightarrow E$, sendo E alguma entropía sobre X.

Estudar tais problemas implicam, evidentemente, dotar aos correspondentes espaços de um certo tipo de estrutura métrica e/ou de medida.

No §1 do presente capítulo estudamos entropías fuzzy a valores em $I\!R^+$ e provamos três teoremas que dão condições necessárias e suficientes para obter continuidade em relação a convergência uniforme de entropías dos tipos Trillas–Riera [40], Knopfmacher [27] e, Batle–Trillas [03], respectivamente.

Posteriormente, mostramos que se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida finita, então as entropías no sentido de Knopfmacher têm um comportamento satisfatório em relação aos diferentes tipos de convergências de conjuntos fuzzy, induzidas pela estrutura de espaço de medida finita sobre X, mais precisamente, provamos a continuidade de tais entropías com respeito à qs-convergência, qu-convergência, μ-convergência e, (p-média)-convergência, sempre que a função normalizadora Δ seja contínua. Analogamente, mostramos o bom comportamento das entropías tipo Batle–Trillas sobre um espaço de medida fuzzy finita em relação a todos estes diferentes tipos de convergência, considerando Δ contínua e uma medida fuzzy μ que seja razoavelmente boa (no mínimo σ-aditiva para alguns casos e, auto-contínua ou F-contínua para outros casos).

No §2 analisamos entropías multivaliadas à valores nas partes de $I\!R^n$, as quais, construímos a partir da integral de Aumann [01] para multiaplicações. Além disso, são dadas condições suficientes para obter a continuidade de tais entropías em relação a alguns tipos de convergência.

No §3 apresentamos alguns resultados sobre continuidade para entropías a valores em $\mathcal{F}K_0(I\!R^n)$ que são constituídas a partir da integral generalizada de Aumann–Ralescu para variáveis aleatórias fuzzy [30] e, estabelecemos condições adequadas para que estas entropías sejam contínuas em relação aos tipos de convergência sobre $\mathcal{F}K_0(I\!R^n)$.

Até este ponto, as idéias e resultados básicos referentes ao problema (a) foram globalizados. A partir do §4, abordamos o problema (b) acima proposto. Dotamos o conjunto $\mathcal{F}(X)$ de uma conveniente estrutura de espaço de possibilidade (considerando que X tenha estrutura de espaço de medida) e então, usando a teoria da medida e integração fuzzy junto com as nossas idéias do Capítulo I, analisamos a convergência do tipo $E_n \longrightarrow E$, onde E_n e E são entropías sobre X a valores em $I\!R^+$.

É importante notar que as entropías a valores em $\mathcal{P}_0(I\!R^n)$ podem ser vistas como uma sub–classe das entropías a valores em $\mathcal{F}_0(I\!R^n)$, via a inclusão $A \hookrightarrow \chi_A$. Deste ponto de vista, estes tipos de entropías são mais interessantes e, em relação a elas, são apresentados alguns problemas em aberto que envolvem possíveis extensões de integrais do tipo Aumann–Ralescu para aplicações a valores em reticulados.

Como a entropía de um conjunto fuzzy é uma medida de incerteza, pensamos em avaliá-las, associando-as a um conjunto fuzzy que seja razoavelmente bem comportado (por exemplo, com suporte compacto, de níveis compacto-convexos, etc.). Assim, achamos plenamente justificado continuar pesquisando, com maior profundidade, as entropías a valores em $\mathcal{F}K_0(I\!R^n)$, dado que existem importantes ligações com outras novas e produtivas ramificações da matemática, tais como a teoria das multiaplicações.

§1. Continuidade de Entropías $E : \mathcal{F}(X) \longrightarrow I\!R^+$

Introdução

Propomos estudar aqui a continuidade das entropías a valores em $I\!R^+$ e, para isto iniciamos com o comportamento de tais entropías em relação à convergência uniforme. Mostramos que as entropías tipo Trillas-Riera [40], Knopfmacher [27] e Batle-Trillas [03] são contínuas em relação à métrica uniforme se, e somente se, a função normalizadora Δ é contínua.

A seguir, extendemos a nossa análise da continuidade das entropías em relação a outros tipos de convergência (convergência quase-sempre, convergência em medida, etc.), e mostramos, sob condições razoáveis, que a continuidade é preservada também nestes casos.

O resultado a seguir caracteriza a continuidade das entropías algébricas (tipo soma-produto e máximo-produto) de Trillas-Riera [40] sobre conjuntos finitos em relação à convergência uniforme de conjuntos fuzzy.

Para um conjunto X não vazio, consideramos em $\mathcal{F}(X)$ a métrica (uniforme) definida por

$$d_0(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Teorema 3.1.1. Seja $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ um conjunto finito e E uma $\uplus - *$ entropía (cf. exemplo 2.1.2) com $\uplus = \sum$ ou $\vee$ e $*$ produto. Se E é a entropia definida por $E(f) = \biguplus_{i=1}^{k} [a_i * \Delta(f(x_i))]$ (onde $a_i \in I\!R^+$ são elementos fixos e Δ é uma função normalizadora) então, são equivalentes:

1) E é contínua segundo a métrica d_0 (ou simplesmente d_0-contínua)

2) Δ é contínua.

Demonstração:

(1) $\rightarrow$ (2) Seja E d_0-contínua e supomos que $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ é uma seqüência em $[0,1]$ tal que $\alpha_n \longrightarrow \alpha_0$ para algum $\alpha_0 \in [0,1]$. Se para cada $n \geq 0$ definimos

$$f_n(x) = \alpha_n \qquad \forall x \in X$$

então é claro que $f_n \xrightarrow{d_0} f_0$. Mas, por hipótese, E é d_0-contínua, então $E(f_n) \longrightarrow E(f_0)$, isto é, $\biguplus_{i=1}^{k} [a_i * \Delta(\alpha_n) \longrightarrow \biguplus_{i=1}^{k} [a_i * \Delta(\alpha_0]$.
Agora, usando identidades elementares prova-se para ambos os casos, $\uplus = \sum$ ou $\uplus = \vee$, que $\Delta(\alpha_n) \longrightarrow \Delta(\alpha_0)$. Logo, Δ é contínua.

(2) $\rightarrow$ (1) Consideremos Δ contínua (sobre $[0,1]$). Neste caso, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ temos que $a_i * \Delta$ é uniformemente contínua sobre $[0,1]$. Como conseqüência, dado $\varepsilon > 0$ temos que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, existe $\delta_i > 0$ tal que se $a, b \in [0,1]$ com $|a - b| < \delta_i$ então

$$|a_i * \Delta(a) - a_i * \Delta(b)| < \varepsilon / k$$

Se $\delta = \min\{\delta_i : 1 \leq i \leq k\}$ então para cada $a, b \in [0,1]$ com $|a - b| < \delta$ tem-se

$$|a_i * \Delta(a) - a_i * \Delta(b)| < \varepsilon/k \qquad \forall 1 \leq i \leq n \tag{3.1}$$

Agora, se $(f_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência em $\mathcal{F}(X)$ e $f \in \mathcal{F}(X)$ são tais que $f_n \xrightarrow{d_0} f$, então f_n converge a f uniformemente. Logo, para $\delta = \delta(\varepsilon)$ existe $N_0 = N_0(\delta) \in I\!N$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta \qquad \forall n \geq N_0 \ , \ \forall x \in X$$

Por (3.1) segue que

$$|a_i * \Delta(f_n(x)) - a_i * \Delta(f(x))| < \varepsilon/k \quad , \forall n \geq N_0 \ , \ \forall x \in X$$

Daí

$$\left|\biguplus_{i=1}^{k} a_i * \Delta(f_n(x_i)) - \biguplus_{i=1}^{k} a_i * \Delta(f(x_i)\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_0$$

(no caso que $\uplus = \sum$) e

$$\left|\biguplus_{i=1}^{k} a_i * \Delta(f_n(x_i)) - \biguplus_{i=1}^{k} a_i * \Delta(f(x_i)\right| < \varepsilon/k \quad \forall n \geq N_0$$

(se $\uplus =$ máximo). Sendo que $N_0 = N_0(\delta(\varepsilon))$, então E é d_0-contínua.

Com o seguinte Teorema vamos caracterizar a continuidade das entropías de Knopfmacher [27] em relação à convergência uniforme de conjuntos fuzzy.

Teorema 3.1.2. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita e $\Delta : [0,1] \longrightarrow I\!R^+$ uma função normalizadora. Se E é a entropía definida por

$$E(f) = \int \Delta(f) d\mu \qquad \text{(onde } f \text{ é } \mu\text{-mensurável)}$$

então E é d_0-contínua se, e somente se, Δ é contínua.

Demonstração.

($\rightarrow$) Seja E d_0-contínua e consideremos $\alpha_n \longrightarrow \alpha_0$ em $[0,1]$. Se definimos

$$f_n(x) = \alpha_n \quad \forall x \in X \quad (n \geq 1),$$

e

$$f_0(x) = \alpha_0 \quad \forall x \in X$$

então é claro que $f_n \xrightarrow{d_0} Ef_0$, logo $E(f_n) \longrightarrow E(f_0)$, isto é,

$$\int \Delta(f_n)d\mu \longrightarrow \int \Delta(f_0)d\mu.$$

Como conseqüência $\Delta(\alpha_n)\mu(X) \longrightarrow \Delta(\alpha_0)\mu(X)$, então $\Delta(\alpha_n) \longrightarrow \Delta(\alpha_0)$ $\Rightarrow \Delta$ é contínua.

($\leftarrow$) Sejam Δ contínua e $(f_n) \subseteq \mathcal{F}(X)$ uma sequência de conjuntos fuzzy tal que $f_n \xrightarrow{d_0} f$ para algum $f \in F(X)$. Sendo que Δ é uniformemente contínua sobre $[0,1]$ então para $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que se $a, b \in [0,1]$ são tais que $|a-b| < \delta$, então $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$. Mas, para $\delta > 0$ existe um $N_0 \in I\!N$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta \qquad \forall n \geq N_0 \;,\; \forall x \in X.$$

Logo,

$$|\Delta(f_n(x)) - \Delta(f(x))| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_0 \;,\; \forall x \in X,$$

isto é,

$$\Delta(f(x)) - \varepsilon < \Delta(f_n(x)) < \Delta(f(x)) + \varepsilon \quad \forall n \geq N_0 \;,\; \forall x \in X.$$

Segue daí que

$$\int \Delta(f(x))d\mu - \varepsilon\mu(X) < \int \Delta(f_n(x))d\mu < \int \Delta(f(x))d\mu + \varepsilon\mu(X) \quad \forall n \geq N_0$$

Assim,

$$\left|\int \Delta(f_n(x))d\mu - \int \Delta(f(x))d\mu\right| < \varepsilon\mu(X) \quad \forall n \geq N_0$$

isto é,

$$|E(f_n) - E(f)| < \varepsilon\mu(X) \quad \forall n \geq N_0$$

$$\Rightarrow E \quad \text{é} \quad d_0\text{-contínua.}$$

Análogo ao resultado anterior temos o seguinte:

Teorema 3.1.3. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida fuzzy finita e $\Delta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função normalizadora. Se E é a entropía definida por

$$E(f) = \,⨍\, \Delta(f)d\mu \quad , \quad \text{onde, } f \in \mathcal{F}(X) \text{ é } \mu\text{-mensurável}$$

então E é d_0-contínua se, e somente se Δ é contínua.

Demonstração.

$(\rightarrow)$ Análoga à prova do Teorema anterior.

$(\leftarrow)$ Resulta do fato que a integral fuzzy tem a seguinte propriedade:
Se $|f - g| < \varepsilon$ sobre A então $|⨍_A f d\mu - ⨍_A g d\mu| < \varepsilon$ (ver Capítulo I).

No que se segue, abordamos o problema de analisar o comportamento das entropías de Knopfmacher [27] e Batte–Trillas [03] em relação aos diversos tipos clássicos de convergência de funções reais definidas sobre um espaço de medida.

Iniciamos com o seguinte resultado:

Teorema 3..1.4. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita e consideramos a entropía E definida por

$$E(f) = \int \Delta(f) \quad , \quad \forall f \in \mathcal{F}(X) \ \mu\text{-mensurável}$$

Se a função normalizadora Δ é contínua, então:

(i) E é qs-contínua

(ii) E é qu-contínua

(iii) E é μ-contínua

(iv) E é (p-média)-contínua.

Demonstração.

(i) Se $f_{1/2}$ é definida por $f_{1/2}(x) = 1/2 \ \ \forall x \in X$, então temos que $\Delta(f_{1/2}) = \Delta(1/2)$ (é constante). Como $\mu(X) < \infty$, então $\Delta(1/2) \in L^1(X, \mu)$. Se $f_n \xrightarrow{qs} f$ então $\Delta(f_n) \xrightarrow{qs} \Delta(f)$, pois Δ é contínua. Sendo $|\Delta(f_n)| \leq \Delta(1/2) \quad \forall n \geq 1$ segue-se, usando o Teorema de Convergência Dominada, que $\int \Delta(f_n) \longrightarrow \int \Delta(f)$ o que garante a qs-continuidade de E.

(ii) É consequência de (i) e usando o fato que a qu-convergência implica a qs-convergência (ver [05]).

(iii) Afirmamos que, se $f_n \longrightarrow f$ em medida, então $\Delta(f_n) \longrightarrow \Delta(f)$ em medida. De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\Delta(f_n(x)) - \Delta(f(x))| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad |f_n(x) - f(x)| < \delta$$

(pois Δ é uniformemente contínua). Então temos,

$$\{x : |\Delta(f_n(x)) - \Delta f(x))| \geq \varepsilon\} \subseteq \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}$$

e portanto $0 \leq \mu\{x : |\Delta(f_n(x)) - \Delta f(x))| \geq \varepsilon\} \leq \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}$. Sendo a convergência $f_n \longrightarrow f$ em medida, obtemos:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \mu\{x : |\Delta(f_n(x)) - \Delta f(x))| \geq \varepsilon\} \leq \lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\} = 0$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x : |\Delta(f_n(x)) - \Delta f(x))| \geq \varepsilon\} = 0 \text{ e } \Delta(f_n) \longrightarrow \Delta(f) \text{ em medida.}$$

Agora, como (f_n) é uma seqüência de funções mensuráveis com $f_n \longrightarrow f$ em medida e $|f_n| \leq g$ (para algum $g \in L^1(X)$), então f é mensurável e:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$$

(ver diagrama de convergências em [05]. Assim, pela afirmação acima podemos aplicar este fato à seqüência $(\Delta(f_n))$ obtendo

$$\int \Delta(f_n) d\mu \longrightarrow \int \Delta(f) d\mu$$

que garante a μ-continuidade de E.

(iv) Usando mais uma vez fatos clássicos de convergências (Ver [05] vemos que nas atuais condições ($\mu(X) < \infty$ e $|\Delta(f_n| \leq \Delta(f_{1/2}))$ tem–se:

(a) a convergência em medida é equivalente à convergência em média, e

(b) a convergência em p-média implica a convergência em medida. Assim, se $f_n \xrightarrow{p\text{-média}} f$, então $f_n \longrightarrow f$ em medida (por (b)), logo $\Delta(f_n) \longrightarrow \Delta(f)$ em medida (usando a afirmação da parte (iii)) e portanto, por, (iii) $\int \Delta(f_n) d\mu \longrightarrow \int \Delta(f) d\mu$ o que prova a (p-média)-continuidade de E e completa a prova do Teorema. $\square$

No caso de entropías fuzzy tipo Batle-Trillas [03] obtivemos o seguinte resultado análogo ao anterior:

Teorema 3.1.5. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida fuzzy finita e consideremos a entropía E definida por:

$$E(f) = \fint \Delta(f) d\mu \quad , \quad \forall f \in \mathcal{F}(X) \ \mu\text{-mensurável}$$

Se a função normalizadora Δ é contínua, então:

(i) E é qs-contínua (com u o-aditiva)

(ii) E é qu-contínua (com u o-aditiva)

(iii) E é μ-contínua (com u autocontínua)

(iv) E é (p-média)-contínua (com u autocontínua).

Demonstração.

(i) Temos que : μ é o-aditiva se, e somente se, a convergência $f_n \xrightarrow{qs} f$ implica a convergência $\fint f_n d\mu \longrightarrow \fint f d\mu$ [41]. Assim, considerando μ o-aditiva e usando a continuidade de Δ temos que E é qs-contínua.

(ii) Conseqüência de i) e do fato que se no contexto fuzzy é válido também que qu-convergência implica a qs-convergência

(iii) Tem–se que : μ é autocontínua se, e somente se, a convergência $f_n \xrightarrow{\mu} f$ implica a convergência $\fint f_n d\mu \longrightarrow \fint f d\mu$ [41]. Então considerando μ autocontínua e usando a continuidade de Δ segue a μ-continuidade de E.

(iv) É consequência de iii) e do fato que, no contexto fuzzy,

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \quad \text{se, e somente se} \quad f_n \overset{p\text{-média}}{\longrightarrow} f \ , \quad \text{(ver [46]).}$$

Observação: Achamos importante salientar que, na verdade, os resultados (iii) e (iv) do Teorema anterior são ainda válidos num contexto mais geral, já que Bassanezi–Greco, em [18] provaram um resultado mais geral do que o resultado de Wang [41], citado em (iii), a saber:

μ é F-contínua se, e somente se, a convergência $f_n \xrightarrow{\mu} f$ implica a convergência $⨍ f_n d\mu \longrightarrow ⨍ f d\mu$.

§2. Continuidade de Entropías $E : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{P}_0(I\!R^n)$

Introdução

Neste parágrafo daremos condições suficientes para garantir a continuidade das entropías a valores em $\mathcal{P}_0(I\!R^n)$ em relação a alguns tipos de convergência. Em particular, estamos interessados nas entropías multiavaliadas construídas a partir da integral de Aumann [01] já que nesse contexto (conforme vimos no Capítulo anterior) elas têm um melhor comportamento quando as multiaplicações são a valores fechados. Também temos neste caso que a convergência de Kuratowski coincide com a convergência métrica de Hausdorff, sempre que os conjuntos em consideração estejam contidos num subconjunto compacto de $I\!R^n$ [25], [31]. Além disso, se Δ é fechada e a medida μ é não–atômica então segue, usando as propriedades da integral de Aumann, que as nossas entropías são a valores compacto–convexos (ver Cap. II).

No que segue, a menos que diga outra coisa, as medidas consideradas serão não atômicas.

O nosso primeiro resultado deste parágrafo dá uma relação entre a continuidade das entropías e a convergência uniforme.

Teorema 3.2.1. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita e $\Delta : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}_0(I\!R^n)$ uma função M-normalizadora, não negativa a valores compactos. Se Δ é H-contínua então a entropía E definida por

$$E(f) = (A) \int \Delta(f)$$

é d_0-H-contínua (i.e. $f_n \xrightarrow{d_0} f \Rightarrow E(f_n) \xrightarrow{H} E_f)$). Além disso, se Δ é convexa então a recíproca também vale, isto é a d_0-H-continuidade de E implica a H-continuidade de Δ.

Demonstração.

A d_0-H-continuidade de E é provada diretamente usando o resultado de Hiai-Umegaki [21]: $H((A)\int \Delta(f), (A)\int \Delta(g)) \leq \int H(\Delta(f)(x), \Delta(g(x)))$ e a H-continuidade de Δ.

Suponhamos que Δ tome valores compacto–convexos e que E seja d_0-H-contínua. Afirmamos que Δ é H-contínua. De fato, seja (α_n) uma sequência em $[0,1]$ tal que $\alpha_n \longrightarrow \alpha_0$ (para algum $\alpha_0 \in [0,1]$).

Se definimos

$$f_n(x) = \alpha_n \quad \forall x \in X \quad (n \geq 1) \quad \text{,e}$$

$$f_0(x) = \alpha_0$$

então temos $f_n \xrightarrow{d_0} f_0$, logo $E(f_n) \xrightarrow{H} E(f_0)$, isto é

$$(A) \int \Delta(f_n) \xrightarrow{H} (A) \int \Delta(f_0)$$

e daí

$$(A)\int \Delta(\alpha_n) \xrightarrow{H} (A)\int \Delta(\alpha_0)$$

Como conseqüência, (ver Capítulo I, §2) se C_0B denota a envolvente convexa de B então

$$C_0\Delta(\alpha_n) \xrightarrow{H} C_0\Delta(\alpha_0)$$

logo

$$\Delta(\alpha_n) \xrightarrow{H} \Delta(\alpha_0) \quad \text{(pois } \Delta \text{ é convexa)}$$

portanto Δ é H-contínua.

O resultado a seguir relaciona continuidade das entropías multiavaliadas com a qs-convergência.

Teorema 3.2.2. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita e Δ uma função M-normalizadora, não–negativa a valores compactos. Se Δ é contínua então a entropía E definida por $E(f) = (A)\int \Delta(f)$ é $qs - H$-contínua.

Demonstração.

Seja (f_k) uma seqüência em $F(X)$ de conjuntos fuzzy mensuráveis tal que $f_k \xrightarrow{qs} f$ (para algum $f \in \mathcal{F}(X)$). Desde que para cada $k \geq 1$,

$$||\Delta(f_k(x)|| \leq ||\Delta(f_{1/2}(x)|| = ||\Delta(1/2)||$$

então, usando o Teorema 1.2.24,

$$(A)\int \Delta(f_k) \xrightarrow{H} (A)\int \Delta(f).$$

Logo,

$$E(f_k) \xrightarrow{H} E(f) \quad \text{e portanto} \quad E \text{ é } qs\text{-}H\text{-contínua.}$$

Corolário 3.2.3. Nas condições do Teorema anterior tem-se que a entropía E, definida por $E(f) = (A)\int \Delta(f)$ é qu-H-contínua.

Demonstração:

É simplesmente conseqüência do Teorema de Egorov:

em medida finita a qs-convergência equivale a qu-convergência,

Observamos que os Teoremas 3.2.2 e 3.2.3 continuam válidos se, ao invés de considerarmos Δ a valores compactos, tomarmos Δ somente a valores fechados.

§3. Continuidade das Entropías $E : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}_0(I\!R^n)$

Introdução

Achamos importante considerar as entropías $E : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}_0(I\!R^n)$ devido ao fato de serem uma extensão natural daquelas vistas no Parágrafo anterior. Por outro lado, quando consideramos a entropía como uma medida de incerteza tentamos avaliá–la com a associação de algum tipo de ente determinístico (por exemplo, um número real ou um conjunto clássico) e desta forma, podemos estar simplificando drastiscamente uma situação real se não levarmos em conta a própria "fuzziness" envolvida no fenômeno em consideração. Por causa disto é que achamos importante estudar com maior profundidade este tipo de entropía, tentando assim manipular matematicamente, problemas que envolvem um alto grau de "fuzziness", mas sem que isso afete a sua natureza intrinsicamente fuzzy.

Consideraremos em $\mathcal{F}_0(I\!R^n)$ as métricas usadas no Capítulo I, as quais estendem a métrica de Hausdorff sobre as partes compactas de $\mathcal{P}(I\!R^n)$. Como anteriormente, d_0 denota a métrica uniforme sobre $\mathcal{F}(X)$ e X é munido da estrutura de espaço de medida finita.

Antes de analisar a continuidade das entropías a valores em $\mathcal{F}_0(I\!R^n)$ consideramos o seguinte:

Lema 3.3.1. Seja c qualquer tipo de convergência sobre $\mathcal{F}(X)$. Se
$E : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}K_0(I\!R^n)$ é uma aplicação então tem-se que E é c-L-contínua (i.e. $f_n \xrightarrow{c} f \Rightarrow E(f_n) \xrightarrow{L} E(f)$) se, e somente se,
$E_\alpha : F(X) \longrightarrow \mathcal{P}_0(I\!R^n)$ é c-H-contínua para cada $\alpha \in (0,1]$.

Demonstração:
($\rightarrow$) Seja E c-L-contínua. Se $f_n \xrightarrow{c} f$ então temos que $E(f_n) \xrightarrow{L} E(f)$.
Logo $\lim_{n\to\infty} H(L_\alpha E(f_n), L_\alpha E(f)) = 0 \quad \forall\alpha \in (0,1]$.
Portanto
$\lim_{n\to\infty} H(E_\alpha(f_n), E_\alpha(f)) = 0 \quad \forall\alpha \in (0,1]$, e como conseqüência
$E_\alpha(f_n) \xrightarrow{H} E_\alpha(f) \quad ,\forall\alpha \in (0,1]$, isto é E_α é, c-H-contínua $\forall\alpha \in (0,1]$.

($\leftarrow$) Seja E_α c-H-contínua, $\forall\alpha \in (0,1]$. Se $f_n \xrightarrow{c} f$ então $E_\alpha(f_n) \longrightarrow E_\alpha(f)$, $\forall\alpha \in (0,1]$. Logo, $\lim_{n\to\infty} H(E_\alpha(f_n), E_\alpha(f)) = 0$, $\forall\alpha \in (0,1]$. Portanto, $\lim_{n\to\infty} H(L_\alpha E(f_n), L_\alpha E(f)) = 0$, $\forall\alpha(0,1]$. Então, $E(f_n) \xrightarrow{L} E(f)$ e portanto E é c-L-contínua.

Salientamos que o essencial, na demonstração do resultado acima, não é o tipo particular de convergência sobre $\mathcal{F}(X)$, senão o fato de poder traduzir a c-L-continuidade via a c-H-continuidade em cada nível. Com isto em mente podemos agora estabelecer condições necessárias e suficientes para continuidade de entropías a valores em $\mathcal{F}_0(I\!R^n)$ construídas a partir da integral de Aumann–Ralescu para variáveis fuzzy aleatórias.

Teorema 3.3.2. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita e $\Delta : [0,1] \longrightarrow \mathcal{F}K_0(I\!R^n)$ uma função MF-normalizadora não–negativa (no sentido que cada Δ_α , $\alpha \in (0,1]$ é não negativa). Se Δ é d_0-L-contínua então a entropía E definida por:
$E(f) = (A-R) \int \Delta(f)$, com $f \in \mathcal{F}(X)$ μ-mensurável, é d_0-L-contínua. Além disso, a recíproca é verdadeira sempre que Δ seja a valores fuzzy convexos.

Demonstração.

Pelo Lema 3.3.1 anterior, é claro que basta provar que cada $E_\alpha : F(X) \longrightarrow \mathcal{P}_0(I\!R^n)$ é d_0-H-contínua, $\alpha \in (0,1]$.
Como $E_\alpha(f) = L_\alpha E(f) = (A) \int (\Delta f)_\alpha$, então temos

$$\begin{aligned} H(E_\alpha(f), E_\alpha(g)) &= H\Big((A) \int (\Delta f)_\alpha,\ (A) \int (\Delta g)_\alpha\Big) \\ &\leq \int H((\Delta f)_\alpha,\ (\Delta g)_\alpha) \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $(\Delta f)_\alpha : X \longrightarrow \mathcal{P}(I\!R^n)$ é definida por $(\Delta f)_\alpha(x) = \Delta_\alpha(f(x))$.

A desigualdade aparecendo em (3.2) é obtida usando Proposição 1.2.17. Sendo Δ d_0-L-contínua, então Δ_α é d_0-H-contínua, $\forall \alpha \in (0,1]$. Por isso e por (3.2) conclui-se que E_α é d_0-H-contínua $\forall \alpha \in (0,1]$, e assim E é d_0-L-contínua.

Suponhamos agora que Δ seja a valores fuzzy convexos, isto é, $\Delta(t)$ é fuzzy convexo $\forall t \in [0,1]$. Neste caso $(\Delta t)_\alpha$ é a valores convexos, $\forall \alpha \in (0,1]$ e portanto Δ é d_0-L-

contínua (Teorema 3.2.1).

Uma pergunta natural que surge é saber quando uma entropía, a valores em $\mathcal{F}_0(I\!R^n)$, é d_0-H^*-contínua. Usando o Teorema 1, podemos estabelecer condições para a d_0-H^*-continuidade das entropías que são construídas a partir da integral de Aumann-Ralescu, sendo o nosso resultado o seguinte:

Teorema 3.3.3. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita e $\Delta : [0,1] \longrightarrow \mathcal{F}K_0(I\!R^n)$ uma função MF-normalizadora com $supp\ \Delta(1/2)$ compacto. Se Δ é d_0-H^*-contínua então a entropía $E : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}K_0(I\!R^n)$ definida por

$$E(f) = (A\!-\!R) \int \Delta(f) \;\text{ com }\; f \in \mathcal{F}(X)\ \mu\text{-mensurável}$$

é d_0-H^*-contínua.

Demonstração: Primeiramente notemos que se (f_k) é uma seqüência em $\mathcal{F}(X)$ tal que

$$f_k \xrightarrow{d_0} f \;\text{ (para algum }\; f \in \mathcal{F}(X)) \;\text{ então }\; \Delta(f_k) \xrightarrow{H^*} \Delta(f) \tag{3.3}$$

Por outro lado, como $\Delta(f_k(x)) \leq \Delta(f_{1/2})(x) = \Delta(1/2)\ \ \forall x \in X$, então, para cada $\alpha \in (0,1]$ tem-se

$$L_\alpha \Delta(f_k)(x) \subseteq L_\alpha \Delta(1/2) \subseteq \ supp\ \Delta(1/2)$$

com $supp\ \Delta(1/2)$ compacto. Logo,

$$\sup_{y \in L_\alpha \Delta(f_k)(x)} ||y|| \leq ||supp\ \Delta(1/2)|| \quad \forall \alpha \in (0,1]\ ,\ \forall x \in X.$$

Usando (3.3) e o fato que $h(x) = ||supp\ \Delta(1/2)||$, é integrável podemos concluir, pelo Teorema 1.3.9, que $(A\!-\!R) \int \Delta(f_k) \xrightarrow{H^*} (A\!-\!R) \int \Delta(f)$ e portanto, E é d_0-H^*-contínua.

Vimos no Capítulo I, sobre $\mathcal{F}K_0(\mathbb{R}^n)$, temos diversos tipos de convergência. Por exemplo, em [40], Kaleva prova que, sobre a subfamília $\mathcal{F}S_c(\mathbb{R}^n)$ de $\mathcal{F}K_0(\mathbb{R}^n)$ formada pelos conjuntos fuzzy superiormente semicontínuos e com níveis convexos, valem os seguintes resultados:

(i) H^*-convergência implica L-convergência.

(ii) H^*-convergência implica S-convergência.

Se em particular, nos restringimos a subfamília $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}S_c(\mathbb{R}^n)$ de elementos côncavos de $\mathcal{F}S_c(\mathbb{R}^n)$ vale o resultado recíproco de (i). Além disso, sobre $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}S_c^{(1)}(\mathbb{R}^n)$ vale o resultado recíproco de (ii) [42].
Assim, H^*, S e L são equivalentes sobre $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}S_c^{(1)}(\mathbb{R}^n)$.

Num trabalho recente [52], Quelho introduz a noção de Γ-convergência de De Giorgi e dá condições sob as quais estes quatro tipos de convergência são equivalentes. Em nosso caso a Γ-convergência é traduzida na convergência dos hipografos no sentido de Kuratowski e, tal convergência, coincide com a convergência na métrica de Hausdorff para seqüências de conjuntos compactos sempre que o espaço seja compacto ou que o espaço seja localmente compacto e a sequência estando contida num compacto.

Estamos interessados no estudo de entropías construídas a partir da integral de Aumann–Ralescu para variáveis fuzzy aleatórias via uma função MF-normalizadora $\Delta : [0,1] \longrightarrow \mathcal{F}K_0(\mathbb{R}^n)$. Assim, para cada $f \in \mathcal{F}(X)$ temos

$$\Delta(f(x)) \subset \Delta(1/2) \quad , \quad \forall x \in X.$$

Se $supp\,\Delta(1/2)$ é compacto então para seqüências (f_k) de $\mathcal{F}(X)$ temos

$$\cup_k \, supp\, \Delta(f_k) \subset supp\, \Delta(1/2).$$

Se, além disso, $\Delta(t) \in \mathcal{G}_1$ então são equivalentes:
$\Delta(f_k) \xrightarrow{H^*} \Delta(f)$, $\Delta(f_k) \xrightarrow{L} \Delta(f)$, $\Delta(f_k) \xrightarrow{S} \Delta(f)$, $\Delta(f_k) \xrightarrow{\Gamma} \Delta(f)$, [31]. Assim,

é interessante, estabelecer condições para que nossa entropía $E(f) = (A-R)\int \Delta(f)$ seja a valores côncavos pois, nesse caso, podemos usar a equivalência entre as convergências. Afim de conseguir isto estabelecemos o seguinte:

Teorema 3.3.4. Seja $F : X \longrightarrow \mathcal{F}K_0(\mathbb{R}^n)$ uma variável fuzzy aleatória. Se para cada $x \in X$, $F(x)$ é côncavo então $(A-R)\int F$ é côncavo. Além disso, se $F(x) \in \mathcal{G}_1(\vec{o})$, $\forall x \in X$, então $(A-R)\int F \in \mathcal{G}_1(\vec{o})$, onde $\mathcal{G}_1(\vec{o}) = \{f \in \mathcal{G}_1 : L_1 f = \{\vec{o}\}\}$.

Demonstração:

Sejam $f^* = (A-R)\int F$ e $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Se $f^*(\vec{x}) = \alpha_0$ e $f^*(\vec{y}) = \beta_0$ então $\vec{x} \in L_{\alpha_0} f^*$ e $\vec{y} \in L_{\beta_0} f^*$, mas $L_{\alpha_0} f^* = (A)\int F_{\alpha_0}$ e $L_{\beta_0} f^* = (A)\int F_{\beta_0}$ logo $\vec{x} \in (A)\int F_{\alpha_0}$ e $\vec{y} \in (A)\int F_{\beta_0}$. Usando a linearidade sobre multiplicações compactas temos que para cada $\lambda \in [0,1]$.

$$\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y} \in (A)\int \lambda F_{\alpha_0} + (1-\lambda)F_{\beta_0}. \tag{3.4}$$

De outro lado afirmamos que

$$(A)\int \lambda F_{\alpha_0} + (1-\lambda)F_{\beta_0} \subseteq \int F_{\lambda\alpha_0(1-\lambda)\beta_0} \tag{3.5}$$

De fato; se $\vec{a} \in F_{\alpha_0}(x) = L_{\alpha_0}F(x)$ e $\vec{b} \in F_{\beta_0}(x) = L_{\beta_0}F(x)$ então $F(x)(\vec{a}) \geq \alpha_0$ e $F(x)(\vec{b}) \geq \beta_0$ logo

$$F(x)(\lambda\vec{a} + (1-\lambda)\vec{b}) \geq \lambda F(x)(\vec{a}) + (1-\lambda)F(x)(\vec{b}) \quad (F(x) \text{ é côncavo, } \forall x \in X)$$

i.e.

$$F(x)(\lambda\vec{a} + (1-\lambda)\vec{b}) \geq \lambda\alpha_0 + (1-\lambda)\beta_0.$$

Daí $\lambda\vec{a} + (1-\lambda)\vec{b} \in L_{\lambda\alpha_0+(1-\lambda)\beta_0}F(x) = F_{\lambda\alpha_0+(1-\lambda)\beta_0}(x)$ e temos provado que

$$\lambda F_{\alpha_0}(x) + (1-\lambda)F_{\beta_0}(x) \subseteq F_{\lambda\alpha_0+(1-\lambda)\beta_0}(x)$$

Com isto é claro que a afirmação (3.5) vale.

Juntando (3.4) e (3.5) obtemos

$\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y} \in (A)\int F_{\lambda\alpha_0+(1-\lambda)\beta_0}$ o qual significa que $\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y} \in L_{\lambda\alpha_0+(1-\lambda)\beta_0}f^*$, isto é

$$f^*(\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y}) \geq \lambda\alpha_0 + (1-\lambda)\beta_0 = \lambda f^*(x) + (1-\lambda)f^*(y)$$

o que prova que $f^* = (A\!-\!R)\int F$ é côncavo.

Se temos, adicionalmente, que $F(x) \in \mathcal{G}_1(\vec{o})$, $\forall x \in X$ então $L_1 f^* = (A)\int F_1$, onde $F_1(x) = L_1 F(x) = \{\vec{0}\}$ $\forall x$, tendo assim que $L_1 f^* = \{\vec{o}\}$ o que implica que $(A\!-\!R)\int F \in \mathcal{G}_1(\vec{o})$.

Como conseqüência dos resultados obtidos acima podemos enunciar o seguinte:

Corolário 3.3.5. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita e E a entropía definida por

$$E(f) = (A\!-\!R)\int \Delta(f)$$

onde $\Delta : [0,1] \longrightarrow \mathcal{G}_1(\vec{o}) \subseteq \mathcal{F}K_0(I\!R^n)$ é uma função normalizadora não negativa. São equivalentes:

(i) E é d_0-H^*-contínua

(ii) E é d_0-S-contínua

(iii) E é d_0-L-contínua

(iv) E é d_0-Γ-contínua

(v) Δ é d_0-L-contínua.

§4. Convergência de Entropías

Introdução

O objetivo deste Parágrafo é dar as idéias e resultados básicos relativos aos problemas de convergência de entropías, mencionado no início deste Capítulo).

Em primeiro lugar, estabelecemos condições para obter convergência de entropías do tipo Knopfmacher [27] e Batle–Trillas [40]. Depois estendemos os resultados para as entropías multiavaliadas que foram introduzidas no Capítulo anterior as quais foram contruídas a partir de integrais e funções normalizadoras adequadas.

Continuamos o nosso trabalho, observando que $\mathcal{F}(X)$ pode ser munido de uma estrutura de espaço de possibilidade (ver Capítulo I) obtendo assim uma extensão natural da estrutura de espaço de medida sobre X. Com isto podemos utilizar a integral de Sugeno associada a uma medida de possibilidade como uma ferramenta para a análise da convergência das nossas entropías.

O nosso primeiro resultado mostra que, para as entropías de tipo Knopfmacher [27], a convergência pontual de entropías é, essencialmente, equivalente à convergência pontual das funções normalizadoras que as definem:

Teorema 3.4.1. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita e $\Delta, \Delta_k : [0,1] \longrightarrow I\!R^+$ $(k \geq 1)$ uma seqüência de funções normalizadoras tal que $\Delta_k(1/2) \leq K \quad \forall k \geq 1$ (onde K é uma seqüência de funções normalizadoras tal que $\Delta_k(1/2) \leq K$ $\forall k \geq 1$ (onde K é uma constante positiva).

Se para cada $k \geq 1, E_k(f) = \int \Delta_k(f)d\mu$ define a entropía associada a Δ_k então, $E_k(f) \longrightarrow E(f) = \int \Delta(f)d\mu$, $\forall f \in \mathcal{F}(X)$ μ-mensurável se, e somente se $\Delta_k(t) \xrightarrow{qs} \Delta(t)$, $\forall t \in [0,1]$.

Demonstração:

($\rightarrow$) Seja $E_k(f) \longrightarrow E(f)$, $\forall f \in \mathcal{F}(X)$ μ-mensurável. Dado $t_0 \in [0,1]$ consideremos $f_0(x) = t_0$, $\forall x \in X$. É claro que f_0 é μ-mensurável,

$$
\begin{aligned}
E_k(f_0) &= \int \Delta_k(f_0)d\mu = \Delta_k(t_0)\mu(X) \quad \forall k \geq 1, \text{ e} \\
E(f_0) &= \int \Delta(f_0)d\mu = \Delta(t_0\mu(X)
\end{aligned}
$$

Usando a hipótese temos que $\Delta_k(t_0)\mu(X) \longrightarrow \Delta(t_0)\mu(X)$ e conseqüência $\Delta_k(t_0) \longrightarrow \Delta(t_0)$.

($\leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que $\Delta_k(t) \xrightarrow{qs} \Delta(t)$, $\forall t \in [0,1]$. Consideremos qualquer $f \in \mathcal{F}(X)$ μ-mensurável. É claro que

$$\Delta_k(f)(x) \xrightarrow{qs} \Delta(f)(x) \ , \ \forall t \in [0,1].$$

Além disso,

$$|\Delta_k(f)| \leq |\Delta_k(f_{1/2})| = |\Delta_k(1/2)| \leq K \ , \ \forall k \geq 1.$$

Sendo que o espaço X é de medida finita então podemos usar o Teorema de Convergência dominada e obter que

$$E_k(f) = \int \Delta_k(f)d\mu \longrightarrow \int \Delta(f)d\mu = E(f)$$

Usando o Teorema 1.1.17 podemos provar, no contexto fuzzy Batle–Trillas, um resultado análogo ao Teorema 3.4.1. Obtemos assim, neste contexto, que a convergência de entropía é, essencialmente, equivalente à convergência das funções normalizadoras que as definem.

Teorema 3.4.2. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida fuzzy finita e $\Delta, \Delta_k : [0,1] \longrightarrow I\!R^+$ $(k \geq 1)$ uma seqüência de funções normalizadoras mensuráveis tal que $\Delta_k(1/2) \leq \mu(X)$, $\forall k \geq 1$.
Se a medida μ é F-contínua, então são equivalentes:

(1) $E_k(f) = \int\!\!\!\!- \Delta_k(f)d\mu \longrightarrow E(f) = \int\!\!\!\!- \Delta(f)d\mu$, $f \in \mathcal{F}(X)$ μ-mensurável.

(2) $\Delta_k(t) \longrightarrow \Delta(t)$, $\forall t \in [0,1]$.

Demonstração:

(1) $\rightarrow$ (2): Para $t_0 \in [0,1]$ definimos $f_0(x) = t_0$, $\forall x \in X$. Então, por hipótese

$$E_k(f_0) = \int\!\!\!\!- \Delta_k(f_0)d\mu \longrightarrow \int\!\!\!\!- \Delta(f_0)d\mu = E(f_0)$$

isto é,

$$\int\!\!\!\!- \Delta_k(t_0)d\mu \longrightarrow \int\!\!\!\!- \Delta(t_0)d\mu.$$

Logo,

$$\Delta_k(t_0) \wedge \mu(X) \longrightarrow \Delta(t_0) \wedge \mu(X) \qquad \text{(por 1.1.4)}$$

Portanto $\Delta_k(t_0 \longrightarrow \Delta(t_0)$.

(2) $\to$ (1) Se $f \in \mathcal{F}(X)$ então

$$\Delta_k(f)(x) \longrightarrow \Delta(f)(x) \quad q.s.$$

$$\Longrightarrow \Delta_k(f) \xrightarrow{\mu} \Delta(f) \quad (\text{pois } \mu(X) < \infty)$$

Então, pelo Teorema 1.1.17,

$$⨍ \Delta_k(f)d\mu = E_k(f) \longrightarrow E(f) = ⨍ \Delta(f)d\mu$$

Vejamos agora como estes resultados podem-se extender a entropías multiavaliadas.

Teorema 3.4.3. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida fuzzy finita e $\Delta, \Delta_k : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}_0(I\!R^n)$ uma seqüência de funções M-normalizadoras, mensuráveis, não-negativas, com valores compacto-convexos e tais que $||\Delta_k(1/2)|| \leq K \;\; , \;\; \forall k \geq 1$ (K constante positiva).

Então são equivalentes:

(1) $E_k(f) = (A) \int \Delta_k(f) \xrightarrow{H} E(f) = (A) \int \Delta(f) \;\; , \;\; f \in \mathcal{F}(X)$ μ-mensurável.

(2) $\Delta_k(t) \xrightarrow{H} \Delta(t) \;\; , \;\; \forall t \in [0,1]$.

Demonstração:

(1) $\to$ (2): Dado $t_0 \in [0,1]$ define-se $f_0(x) = t_0 \;\; , \;\; \forall x \in X$. Logo,

$$E_k(f_0) = (A) \int \Delta_k(f_0) \xrightarrow{H} (A) \int \Delta(f_0) = E(f_0)$$

isto é,

$$\Delta_k(t_0) \xrightarrow{H} \Delta(t_0).$$

por serem Δ, Δ_k a valores compacto–convexos.

(2) $\rightarrow$ (1) Dado $f \in \mathcal{F}(X)$ μ-mensurável, então

$$\Delta_k(f)(x) \xrightarrow{H} \Delta(f)(x) \qquad \text{por (2).}$$

Além disso,

$$||\Delta_k(f)(x)|| \leq K \quad \forall k \geq 1.$$

Do Teorema 1.2.24 de convergência dominada para correspondências, se segue o resultado.

Finalmente, vejamos a extensão destes resultados a MF-entropías.

Teorema 3.4.4. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita e $\Delta, \Delta_k : [0,1] \longrightarrow \mathcal{F}K_0(\mathbb{R}^n)$ uma seqüência de funções MF-normalizadoras, não–negativas, com valores fuzzy–compactos e fuzzy–convexos (ou simplesmente, fuzzy–compacto–convexo) tais que

$$\sup_{\alpha} ||L_\alpha \Delta_k(1/2)|| \leq K \;\; , \;\; \forall k \geq 1 \;\; (K \text{constante positiva}).$$

Então são equivalentes:

(1) $E_k(f) = (A-R) \int \Delta_k(f) \xrightarrow{L} E(f) = (A-R) \int \Delta(f)$

(2) $\Delta_k(t) \xrightarrow{L} \Delta(t)$, $\forall t \in [0,1]$.

Demonstração:

(1) $\rightarrow$ (2): Dado $t_0 \in [0,1]$ e seja $f_0(x) = t_0$, $\forall x \in X$. Logo,

$$E_k(f_0) = (A-R) \int \Delta_k(f_0) \xrightarrow{H} (A-R) \int \Delta(f_0) = E(f_0)$$

Portanto, pelo Lema 3.3.1,

$$L_\alpha E_k(f_0) = (A)\int(\Delta_k f_0)_\alpha \xrightarrow{H} (A)\int(\Delta f_0)_\alpha E(f_0) \quad \forall\alpha \in (0,1]$$

Assim,

$$(A)\int(\Delta_k t_0)_\alpha \xrightarrow{H} (A)\int(\Delta(t_0))_\alpha \quad \forall\alpha \in (0,1]$$

Logo

$$L_\alpha\Delta_k(t_0) \xrightarrow{H} L_\alpha\Delta(t_0) \;\; \forall\alpha \in (0,1],$$

pela fuzzy-compacto-convexidade de Δ, Δ_k.

Segue que

$$\Delta_k(f_0) \xrightarrow{L} \Delta(t_0)$$

(2) $\to$ (1) Reciprocamente, se $\Delta_k(f) \xrightarrow{L} \Delta(f) \quad \forall t \in [0,1]$, então dado $f \in \mathcal{F}(X)$, tem-se que:

$$\Delta_k(f)(x) \xrightarrow{L} \Delta(f)(x) \quad \forall x \in X.$$

Logo

$$(\Delta_k f)_\alpha \xrightarrow{H} (\Delta f)_\alpha \;\; , \;\; \alpha \in (0,1] \qquad \text{(pelo lema 3.3.1)}$$

Agora, como $\sup\limits_\alpha ||L_\alpha\Delta_k(1/2)|| \leq K \quad \forall k \geq 1$, usando o Teorema 1.2.24 de convergência dominada para correspondências, tem-se que

$$(A)\int(\Delta_k f)_\alpha \xrightarrow{H} (A)\int(\Delta f)_\alpha \quad \forall\alpha \in (0,1]$$

ou seja que

$$L_\alpha(A-R)\int\Delta_k(f) \xrightarrow{H} L_\alpha(A-R)\int(\Delta f) \quad \forall\alpha \in (0,1]$$

Portanto

$$E_k(f) = (A-R)\int\Delta_k(f) \xrightarrow{L} E(f) = (A-R)\int(\Delta f)$$

Um teorema análogo ao último obtemos para convergência em relação a H^*.

Teorema 3.4.5. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita e $\Delta, \Delta_k : [0,1] \longrightarrow \mathcal{F}K_0(\mathbb{R}^n)$ uma seqüência de funções MF-normalizadoras, não–negativas, com valores fuzzy–compactos e tal que

$$\sup_\alpha ||L_\alpha \Delta_k(1/2)|| \leq K \quad , \quad \forall k \geq 1 \ \ (K \text{constante positiva}).$$

Então

$$\Delta_k(t) \xrightarrow{H^*} \Delta(t) \quad \forall t \in [0,1] \Longrightarrow E_k(f) = (A-R) \int \Delta_k(f) \xrightarrow{H^*} E(f) = (A-R) \int \Delta(f)$$

Prova: Conseqüência direta do Teorema 1.3.9.

Observações:

a) Até aqui temos uma visão de convergência de entropías reais em relação a convergência das funções normalizadoras.

Agora, pode–se abordar o problema de modo diferente, por exemplo, tentar munir ao espaço $\mathcal{F}(X)$ de uma estrutura de possibilidade.

Por exemplo, se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida finita, para $A \subsetneq \mathcal{P}(\mathcal{F}(X))$ definimos:

$$\overline{\mu}(A) = \begin{cases} \sup_{f \in A}\{\int f d\mu\} & \text{se} \quad A \neq \phi \\ 0 & \text{se} \quad A = \phi \end{cases}$$

i) É claro que $\overline{\mu}$ é uma medida de possibilidade sobre $\mathcal{F}(X)$.

ii) $\overline{\mu}$ é extensão natural de μ no sentido que:

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \chi_A \in \mathcal{F}(\mathcal{X}) \ \text{ e } \ \chi_A \ \mu\text{-mensurável}$$

Tomando $\overline{A} = \{\chi_A\} \subseteq \mathcal{F}(X)$ temos que

$$\overline{\mu}(\overline{A}) = \int \chi_A d\mu = \mu(A).$$

b) No contexto das medidas de possibilidade, podemos provar que:

i) $q\mu$-convergência $\Rightarrow$ qs-convergência

ii) $q\mu$-convergência $\Rightarrow$ μ-convergência

iii) μ-convergência $\Leftrightarrow$ (p-média)-convergência (ver [46]).

c) Outro exemplo de medida de possibilidade sobre $\mathcal{F}(X)$ é considerar uma medida concentrada em algum subconjunto A_0 de $\mathcal{F}(X)$, i.e.

$$\pi(A) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad A \cap A_0 = \phi \\ \\ 1 & \text{se} \quad A \cap A_0 \neq \phi \end{cases}$$

Neste caso, analisar a convergência $E_k \longrightarrow E$ equivale a analisar o que acontece sobre A_0, localizando assim o problema.

Poderia ser interessante esta última observação já que na prática, seria equivalente a fixar certos critérios.

Comentário: Outras generalizações poderiam ter sido analisadas e muitas outras perguntas poderiam ter sido feitas, mas tudo deve ter um ponto de parada e escolhemos este para nossa dissertação. Poderíamos dizer que tal escolha tenha sido subjetiva se outros fatores não fossem tão objetivamente implacáveis.

De qualquer forma o ponto de parada desta estapa será o ponto inicial de outras etapas e *problemas em aberto* como o que se segue serão posteriormente analisados.

P_2) A extensão de M-entropías e MF-entropías a valores em $\mathcal{P}_0(\mathcal{X})$ e $\mathcal{F}_0(\mathcal{X})$, respectivamente, sendo $\mathcal{X}$ um espaço normado de dimensão arbitrária pode ser realizável, uma vez que trabalhos recentes de Greco fornecem pistas para a equivalência da Γ-convergência e H^*-convergência em espaços mais gerais.

Em particular, podemos tentar extender nossas entropías a espaços de Banach via integral de Bochner.

Bibliografia

[1] R. Aumann, Integrals of set-valued functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications **12** (1965), 1-12.

[2] G. Banon, Distinction between several subsets of fuzzy measures, Fuzzy sets and Systems **5** (1981), 291–305.

[3] N. Batle, E. Trillas, Entropy and fuzzy integral, Journal of Mathematical Analysis and Applications **69** (1979), 469–474.

[4] R.M. Capocelli, A. De Luca, Fuzzy sets and decision theory, Information and Control **23**, 446–473.

[5] G. De Barra, Introduction to measure theory, Van Nostrand Reinhold Company, 1981.

[6] A. De Luca, Entropy and dispersion for a fuzzy sets (to appear).

[7] A. De Luca, Dispersion measures of fuzzy sets (to appear)

[8] A. De Luca, S. Termini, A definition of nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory, Information and Control **20** (1972), 301–312.

[9] A. De Luca, S. Termini, On the convergence of entropy measures of a fuzzy sets, Kybernetes **6** (1977), 219–227.

[10] A. De Luca, S. Termini, Entropy and energy measures of a fuzzy sets, Advances in Fuzzy set Theory and Applications, North–Holland Publishing Company, 1979.

[11] A. De Luca, S. termini, Entropy measures in the theory of fuzzy sets (to appear).

[12] A. Di Nola, A. Ventre, On fuzzy integral inequalities and fuzzy expectation, Journal of Mathematical Analysis and Applications **125** (1987), 589–599.

[13] J. Drewniak, Convex and strongly convex fuzzy sets, Journal of Mathematical Analysis and Applicatrions **126** (1987), 292–300.

[14] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy sets and systems: theory and applications, Academic Press N.Y., 1981.

[15] C. Dujet, Separation and measures of fuzziness, Fuzzy Sets and Systems **28** (1988), 245–262.

[16] B. Ebanks, On measures of fuzziness and their representations, Journal of Mathematical Analysis and Applications **94** (1983), 24–37.

[17] H. Emptoz, Nonprobabilistic entropies and indetermination measures in the setting of fuzzy sets theory, Fuzzy and Systems **5** (1981), 307–327.

[18] G. Greco, R. Bassanezi, Continuidade das fuzzy integrais, Atas do 28º Seminário Brasileiro de Análise (1985), 457–465.

[19] G. Greco, E. Quelho, M. Moschen, On the variational convergence of fuzzy sets (to appear).

[20] S. Guiasu, A. Shenitzer, The principle of maximum entropy, The Mathematical Intelligencer **7** (1985), 42–48.

[21] F. Hiai, H. Umegaki, Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions, Journal of Multivariate Analysis **7** (1977), 149–182.

[22] M. Higashi, G. Klir, On measures of fuzziness and fuzzy complements, International Journal General Systems **8** (1932), 169–180.

[23] O. Kaleva, On the convergence of fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems **17** (1985), 53–65.

[24] A. Kania, Fuzzy transformation in terms of possibilistic measures, Inst. Appl. Mech. Math., Univ. Kielde **7** (1982), 25–31.

[25] E. Klein, A. Thompson, Theory of correspondences, Canadian Mathematical Society (series of monographs), Wiley–Interscience Publiscation, 1984.

[26] P. Kloeden, Compact supported endographs and fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems **4** (1980), 193–201.

[27] K. Knopfmacher, On measures of fuzziness, Journal of Mathematical Analysis and Applications **45** (1975), 529–534.

[28] M. Puri, D. Ralescu, A possibility measure is not a fuzzy measure, Fuzzy Sets and Systems 7 (1982), 311–313.

[29] M. Puri, D. Ralescu, The concept of normality for fuzzy random variables, The Annals of Probability **13** (1985), 1373–1379.

[30] M. Puri, D. Ralescu, Fuzzy random variables, Journal of Mathematical Analysis and Applications **114** (1986), 409–422.

[31] E. Quelho, Sobre Γ-convergência, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 1989.

[32] H. Radström, An embedding theorem for spaces of convex sets, Proceeding American Mathematical Society **3** (1952), 165–169.

[33] D. Ralescu, G. Adams, The fuzzy integral, Journal of Mathematical Analysis and Applications **75** (1980), 562–570.

[34] D. Ralescu, Toward a general theory of fuzzy variables, Journal of Mathematical Analysis and Applications **86** (1982), 176–193.

[35] H. Roman, R. Bassanezi, Sobre entropias , medidas e integrais fuzzy, Atas do 28º Brasileiro de Análise (1988), 283–289.

[36] H. Roman, R. Bassanezi, Sobre entropias fuzzy a multivalores, Atas do 29º Brasileiro de Análise (1989), 293–303.

[37] W. Sander, On measures of fuzziness, Fuzzy Sets and Systems **29** (1989), 49–55.

[38] M. Sugeno, Fuzzy measures and fuzzy integrais - A survey, Fuzzy Automata and Decision Processes, North–Holland Publishing Company (1977), 89–102.

[39] M. Squillante, A. Ventre, Fuzzy measures and convergence, Fuzzy Sets and Systems **25** (1988), 251–257.

[40] E. Trillas, T. Riera, Entropies in finite fuzzy sets, Information Sciences **15** (1978), 159–168.

[41] Z. Wang, Autocontinuity of set function and the fuzzy integral, Journal of Mathematical Analysis and Application **99** (1984), 195–218.

[42] Z. X. Wang, Asymptotic structural characteristics of fuzzy measures and their applications, Fuzzy Sets and Systems **16** (1985), 277–290.

[43] Z.X. Wang, The structure of fuzzy Lebesgue measure, Fuzzy Inf. Decision Proc., North–Holland Publishing Company (1982), 71–78.

[44] Z.X. Wang, Fuzzy measures and measures of fuzziness, Journal of Mathematical Analysis and Applications **104** (1984), 589–601.

[45] S.T. Wierzchon, On fuzzy measure and fuzzy integral, Fuzzy Information and Decision Processes, North–Holland Publishing Company (1982), 79–86.

[46] C. Wu., M. Ma., Some properties of fuzzy integrable function space $L^1(\mu)$, Fuzzy Sets and Systems **31** (1989), 397–400.

[47] W.X. Xie, S.D. Bedrosian, An information measure for fuzzy sets, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. SMC–14 (1984), 151–156.

[48] R. Yager, On the measure of fuzziness and negation (part I), International Journal General System **5** (1979), 221–229.

[49] R. Yager, On the measure of fuzziness and negation (part II), Information and Control 44 (1980), 236–260.

[50] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control **8** (1965), 338–353.

[51] L.A. Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems **1** (1978), 3–28.