

MODELAGEM MATEMÁTICA  
PARA UMA POPULAÇÃO  
COM ESTRUTURA DE IDADE

ROSELI APARECIDA LEANDRO

Tese apresentada ao Instituto de  
Matemática, Estatística e Ciência da  
Computação IMECC - UNICAMP, para  
obtenção do título de Mestre  
em Matemática Aplicada.

CAMPINAS  
ESTADO DE SÃO PAULO - BRASIL  
MARÇO, 1990

L476m  
11916/BC

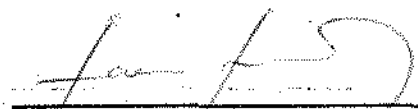
UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

MODELAGEM MATEMÁTICA PARA  
UMA POPULAÇÃO COM  
ESTRUTURA DE IDADE

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. ROSELI APARECIDA LEANDRO e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 02 de março de 1990.

Prof. Dr.

  
Laércio Luis Vendite  
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada, área de ANÁLISE APLICADA.

Aos meus pais

ORLANDO e JOSEPHINA

Ao meu irmão REGINALDO,

a ELAINE

e RAPHA

## AGRADECIMENTOS

Ao Dr. LAERCIO LUIS VENDITE , Professor no IMECC - UNICAMP , pela orientação ,apoio e incentivo.

Ao Dr. JOÃO FREDERICO A. MEYER ( JONI ), Professor no IMECC - UNICAMP , pela ajuda computacional.

Ao Prof. PETRÔNIO PULLINO e ao Dr. JOSÉ LUIZ BOLDRINI, Professores no IMECC - UNICAMP , pela discussão dos problemas.

Aos meus amigos DENISE E PEPO pela convivência, amizade, carinho e muito mais ...

Aos meus amigos de turma ANDREA, EDIVALDO, LUIS e REGINA por tudo ...

A todos que tornaram a passagem pela UNICAMP uma parte feliz da minha vida ...

A CAPES pelo apoio financeiro.

A Ana secretária do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ pelas opiniões ...sempre oportunas.

Enfim, a todos que colaboraram para a realização deste trabalho, a minha sincera gratidão.

## Os Estatutos do Homem

Artigo I . Fica decretado que agora vale a verdade,  
que agora vale a vida,  
e que de mãos dadas,  
trabalharemos todos pela vida verdadeira

Artigo II . Fica decretado que todos os dias da  
semana,  
inclusive as terças-feiras mais  
cinzentas, têm direito a converter-se em  
manhã de domingo.

Artigo III . Fica decretado que, a partir deste  
instante,  
haverá gurrassóis em todas as janelas,  
que os gurrassóis terão direito  
a abrir-se dentro da sombra;  
e que as janelas devem permanecer, o dia  
inteiro,

abertas para o verde onde cresce a  
esperança

Parágrafo Único . O homem confiará no homem  
como um menino confia em outro menino.

Parágrafo Único . Só uma coisa fica proibida:  
amar sem amor.

Thiago De Mello

## C O N T E Ú D O

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - DINÂMICA POPULACIONAL	5
1.1 - MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL	5
1.1.1 Modelo Malthusiano	5
1.1.2 Modelo Verhulstiano	8
1.1.3 Outros Modelos	12
1.2 - MODELOS DE INTERAÇÃO ENTRE DUAS ESPÉCIES	15
1.2.1 Competição	15
1.2.2 Predação	21
Presas-Predador ( LOTKA - VOLTERRA )	21
Presas-Predador ( KOLMOGOROV )	23
CAPÍTULO II - MODELAGEM MATEMÁTICA PARA UMA POPULAÇÃO COM ESTRUTURA DE IDADE	27
2.1 - O MODELO DE SHARPE-LOTKA SUA INTERPRETAÇÃO E RESOLUÇÃO	28
2.1.1 A equação Sharpe-Lotka	28
2.1.2 Algumas Considerações sobre a Equação Característica de Lotka	37



2.1.3	Solução da Equação de Sharpe-Lotka	41
2.2	- FORMULAÇÃO ALTERNATIVA DO MODELO	45
2.2.1	A Equação de Mckendrick	45
2.2.2	Solução da Equação de Mckendrick	49
2.3	- EQUIVALÊNCIA ENTRE AS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE SHARPE-LOTKA E DE MCKENDRICK	54
2.4	- DISTRIBUIÇÃO ESTÁVEL DE IDADE	60
CAPÍTULO III - ALGUMAS APLICAÇÕES DE POPULAÇÕES COM ESTRUTURA DE IDADE		68
EXEMPLO I	- Crescimento Celular	68
EXEMPLO II	- Doenças Horizontalmente e Verticalmente Transmissíveis	73
EXEMPLO III	- Predação com Estrutura de Idade	89
EXEMPLO IV	- Competição com Estrutura de Idade	96
CAPÍTULO IV - SIMULAÇÃO NUMÉRICA		101
CONCLUSÕES		121
REFERÊNCIAS		124
APÊNDICES		128

## I N T R O D U Ç Ã O

Teorias matemáticas de populações têm sido qualitativamente e efetivamente usadas em muitas situações nos últimos 200 anos. Elas têm aparecido em muitos estudos importantes de populações, tais como: População humana e populações de animais, células, viroses e bactérias.

Várias características das populações podem ser analisadas, dentre elas destacamos:

1º ) O crescimento e a estrutura de idade considerando-se a natalidade e a mortalidade.

2º ) A maneira como as várias características individuais se propagam de uma geração para a outra.

Além disso, a difusão de fenômenos contagiosos tais como doenças, moda e informação podem ser estudados por meio de análise matemática.

Finalmente, a dinâmica de várias populações interagindo pode ser analisada; teorias de interação têm se tornado úteis com o estudo recente de sistemas ecológicos e

estruturas econômicas e sociais.

No capítulo I deste trabalho, fizemos uma breve descrição dos modelos de crescimento populacional.

No capítulo II apresentamos uma modelagem matemática para uma população com estrutura de idade onde serão destacados os seguintes itens:

- (i) A equação de Sharpe-Lotka
- (ii) A equação de Mckendrick
- (iii) A existência de uma distribuição estável de idade ( que é importante quando estudamos o comportamento assintótico da população ).

No capítulo III apresentamos alguns exemplos de aplicações da teoria de dinâmica populacional estudada. No exemplo I descrevemos, primeiramente, o crescimento celular de uma cultura de micróbios, que apresenta crescimento malthusiano ou verhulstiano dependendo das condições de tempo e espaço consideradas. A seguir, estudamos um modelo onde outras características da população celular, como, por exemplo, volume, massa ou quantidade de DNA podem ser medidas quantitativamente através de seu número, e nesse momento é introduzido o fator idade.

No exemplo II estudamos um modelo de doenças verticalmente e horizontalmente transmissíveis que será expresso por um sistema não-linear de equações

integro-diferenciais cuja solução será obtida utilizando a teoria linear clássica da equação de Mckendrick.

No exemplo III começamos estudando, primeiramente, o canibalismo onde vamos supor que somente os recém nascidos estão sujeitos à predação; verificamos que se a taxa de natalidade é suficientemente grande, existe uma solução de equilíbrio; a seguir, estudamos predação entre duas espécies distintas onde a predação ocorre de maneira indiscriminada, ou seja, todos elementos da população têm a mesma chance de serem predados.

A teoria de duas espécies competindo pelos mesmos recursos desempenha um papel extremamente importante, atualmente, na ecologia aplicada e teórica. Assim, no exemplo IV apresentamos um modelo de competição entre duas espécies com estrutura de idade.

Finalmente, apresentamos uma simulação numérica para o problema de dinâmica populacional com estrutura de idade onde implementamos computacionalmente um método apresentado por LOPEZ e TRIGIANTE, o qual utiliza diferenças finitas atrasadas para a discretização da idade no intervalo considerado e fórmula de quadratura ( no nosso caso, a Regra de Simpson  $1/3$  ) para o cálculo numérico da integral dada pela condição de fronteira.

## CAPÍTULO I

### DINÂMICA POPULACIONAL

Embora o uso de matemática date pelo menos de Fibonacci, o qual em 1202 propôs sua famosa sequência de inteiros para modelar o crescimento da população de coelhos; umas das primeiras tentativas de usar matemática para descrever o crescimento de uma população humana vem desde o final do século XVIII, e um dos modelos mais familiares foi proposto pelo economista inglês T. R. MALTHUS.

A hipótese básica de Malthus era que a taxa instantânea de crescimento de uma população humana era proporcional ao tamanho da população, portanto a população humana cresceria exponencialmente, sem nenhum obstáculo, ou seja, seu modelo supunha a vida, sem fome, pragas, guerras e qualquer catástrofe.

## 1.1 MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL

### 1.1.1. MODELO MALTHUSIANO

O modelo sugerido por T. R. Malthus há mais de 200 anos, em 1798, supunha que a taxa de nascimento  $N$  e de morte  $M$  por unidade de população eram constantes. Então seja  $P(t)$  o tamanho de uma dada população no instante  $t$ .

Portanto,

$$P(t+\Delta t) = P(t) + N.P(t).\Delta t - M.P(t).\Delta t$$

ou

$$\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = (N - M) . P(t)$$

e quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , temos

$$\frac{d P(t)}{dt} = (N - M) . P(t) \quad [1.1]$$

A solução da Equação Diferencial Ordinária (E.D.O)

[1.1] é dada por:

$$P(t) = P(0) . e^{\alpha.t} \quad [1.2]$$

onde  $\alpha = N - M$  é chamado parâmetro malthusiano e  $P(0)$  é o tamanho da população no instante  $t=0$ , claramente, o comportamento de  $P(t)$  depende de  $\alpha$ .

Se  $N > M$  ( i.e.: , o índice de natalidade é maior que o de mortalidade ), a população cresce exponencialmente com o tempo. [ Ver figura 1.1 ]

Se  $N = M$  ( i.e.: , o índice de natalidade e mortalidade coincidem ),  $P(t) = P(0)$  e, portanto, a população não varia. [ Ver figura 1.2 ]

Se  $N < M$  a população diminui e tende à extinção à medida que  $t$  cresce. [ Ver figura 1.3 ] [1]

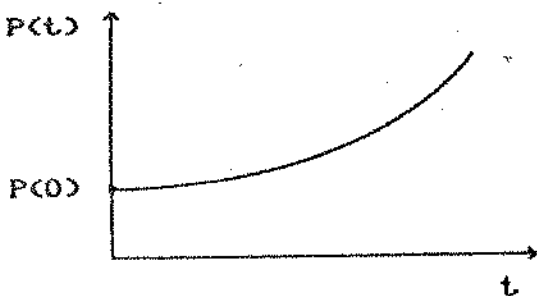


fig. 1.1

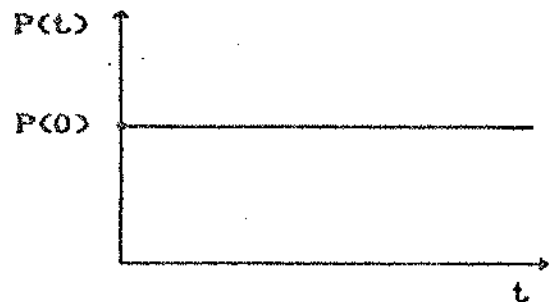


fig. 1.2

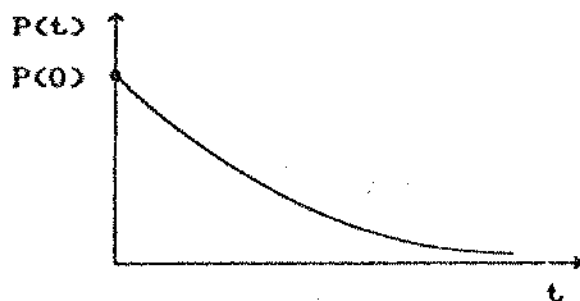


fig. 1.3

O modelo malthusiano acabou não se revelando eficiente para estimativas populacionais, a longo prazo, em países desenvolvidos. Entretanto, seu alerta continuou influenciando o pensamento econômico durante muito tempo. A lei de Malthus serve, no entanto, para estimativas populacionais a curto prazo em países do terceiro mundo, além de se mostrar apropriada para certas populações de microorganismos em períodos limitados de tempo.

No entanto, o modelo matemático da lei malthusiana falha pelo fato de prever crescimento populacional cada vez maior, se o parâmetro malthusiano for positivo, o que não representa a realidade.

Foram numerosas as modificações do modelo devido a Malthus, uma das mais importantes foi proposta pelo sociólogo belga P. F. VERHULST em 1838. Ele afirmava que uma população humana é sempre predisposta a uma série de obstáculos para o seu crescimento e que a sua quantidade tendia assintoticamente a um valor constante, à medida que o tempo crescia.



## 1.1.2

## M O D E L O   V E R H U L S T I A N O

Levando em conta os fatores inibidores tais como: fome, guerra, condições sanitárias, além de outros, como precárias situações de moradia, poluição ambiental os quais afetam de modo sistemático o crescimento populacional, Verhulst propôs uma modificação na equação original do Modelo Malthus.

Este modelo de Verhulst supõe que a população de uma certa espécie, vivendo num determinado meio, atinja um limite máximo sustentável, dado por:

$$P_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) \quad [1.3]$$

Considera ainda que a variação de população esteja sujeita a um fator inibidor de proporcionalidade. Ou seja, é preciso que a equação incorpore a queda de crescimento, à medida que a população cresça.

Ele assumia que a taxa de natalidade decrescia e a taxa de mortalidade crescia linearmente com o tamanho da população .

A taxa de natalidade  $N(t)$  era dada simplesmente pela equação

$$N(t) = N_0 - N_1 \cdot P(t) \quad [1.4]$$

e a taxa de mortalidade  $M(t)$  era da pela equação

$$M(t) = M_0 + M_1 \cdot P(t) \quad [1.5]$$

com  $N_0, N_1, M_0, M_1 > 0$  e  $N_0 > M_0$ .

Portanto,

$$\frac{d P(t)}{dt} = [N(t) - M(t)] \cdot P(t) \quad [1.6]$$

então

$$\frac{d P(t)}{dt} = (M_1 + N_1) \cdot \left[ \frac{N_0 - M_0}{N_1 + M_1} - P(t) \right] \cdot P(t) \quad [1.7]$$

Colocando

$$r = M_1 + N_1 \quad \text{e} \quad a = \frac{N_0 - M_0}{N_1 + M_1}$$

a equação [1.7] se reduz a

$$\frac{d P(t)}{dt} = r \cdot (a - P) \cdot P, \quad [1.8]$$

denominada EQUAÇÃO DE VERHULST.

Neste caso, o termo  $r.a.P(t)$  é a diferença entre a taxa de nascimento e a taxa de mortalidade;  $-r.P(t)^2$  pode ser visto como o fator inibidor do crescimento populacional.

Neste caso podemos observar que quando  $P(t) > a$ , a população decresce, pois com essa condição, a derivada de  $P(t)$  é negativa.

Resolvendo a equação [1.8] supondo que  $P(0) = P_0$ , o tamanho da população em  $t=0$ , teremos

$$P(t) = \frac{a.P_0}{P_0 + (a - P_0).e^{-a.r.t}} \quad [1.9]$$

Observação 1:

(i) Se

$$P_0 < a \longrightarrow P_0 < P_0 + (a - P_0).e^{-a.r.t}$$

então temos  $P(t) < a$ , assim  $P(t)$  nunca excederá a quando o tempo cresce indefinidamente. [ Ver figura 1.4 ]

(ii) Se  $a \gg P_0$ , então para valores pequenos de  $t$ ,  $a.e^{-a.r.t} \gg P_0$  e o termo

$$a.e^{-a.r.t} \approx P_0 + (a - P_0).e^{-a.r.t}$$

e portanto

$$P(t) = \frac{a \cdot P_0}{a + e^{-a \cdot r \cdot t}}$$

Logo

$$P(t) = P_0 \cdot e^{-a \cdot r \cdot t} \quad [1.10]$$

que é a EQUAÇÃO DE MALTHUS

(iii) Se  $P_0 > a$  então  $P(t) > a$  e se aproxima de  $a$  quando o tempo cresce indefinidamente.

[ Ver figura 1.5 ]

[1,22]

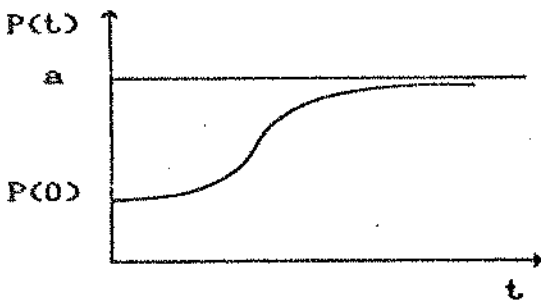


fig. 1.4

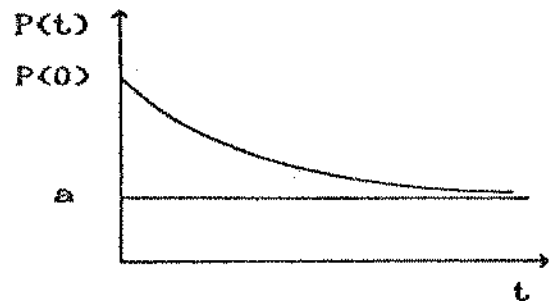


fig. 1.5

### 1.1.3 OUTROS MODELOS

A seguir serão apresentados alguns modelos importantes que foram propostos [1]

#### M.1 MODELO DE GOMPERTZ (1825)

$$\frac{dP}{dt} = \lambda \cdot P \cdot \ln ( P_{\infty} / P ), \lambda > 0 .$$

[ Ver figura 1.6 ]

#### M.2 MODELO DE SMITH (1963)

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\lambda \cdot P \cdot ( P_{\infty} - P )}{P_{\infty} + b \cdot P}$$

onde  $\lambda$  e  $b$  são constantes positivas

[Ver figura 1.7 ]

M.3 MODELO DE GOEL, MAITRA E MONTROLL (1971)

$$\frac{d P}{dt} = \lambda \cdot P \left[ 1 - (P/P_{\infty})^{\alpha} \right]$$

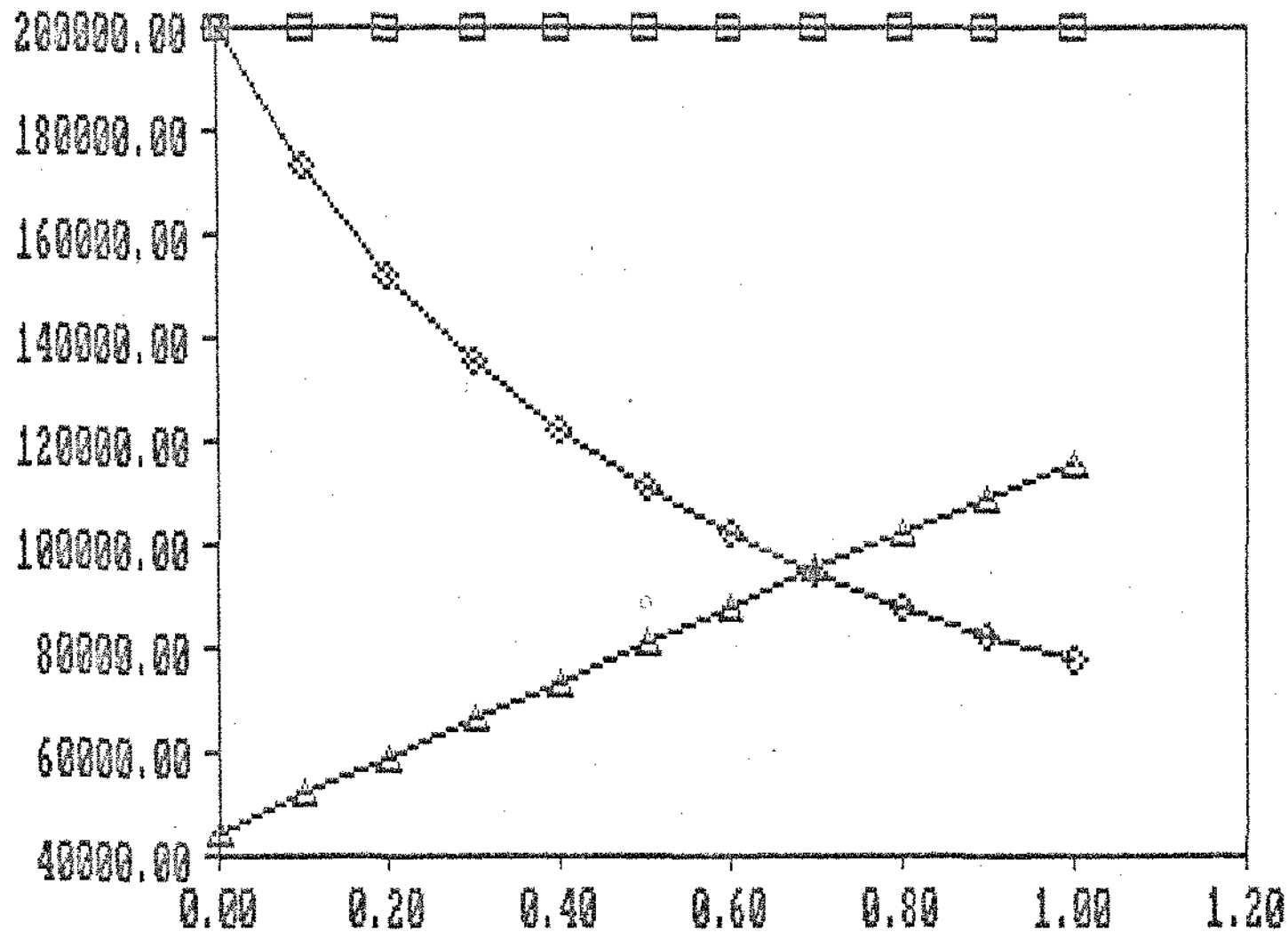
onde  $\lambda, \alpha > 0$

[ Ver figura 1.8 ]

M.4 MODELO DE AYALA, EHRENFELD, GILPIN (1973)

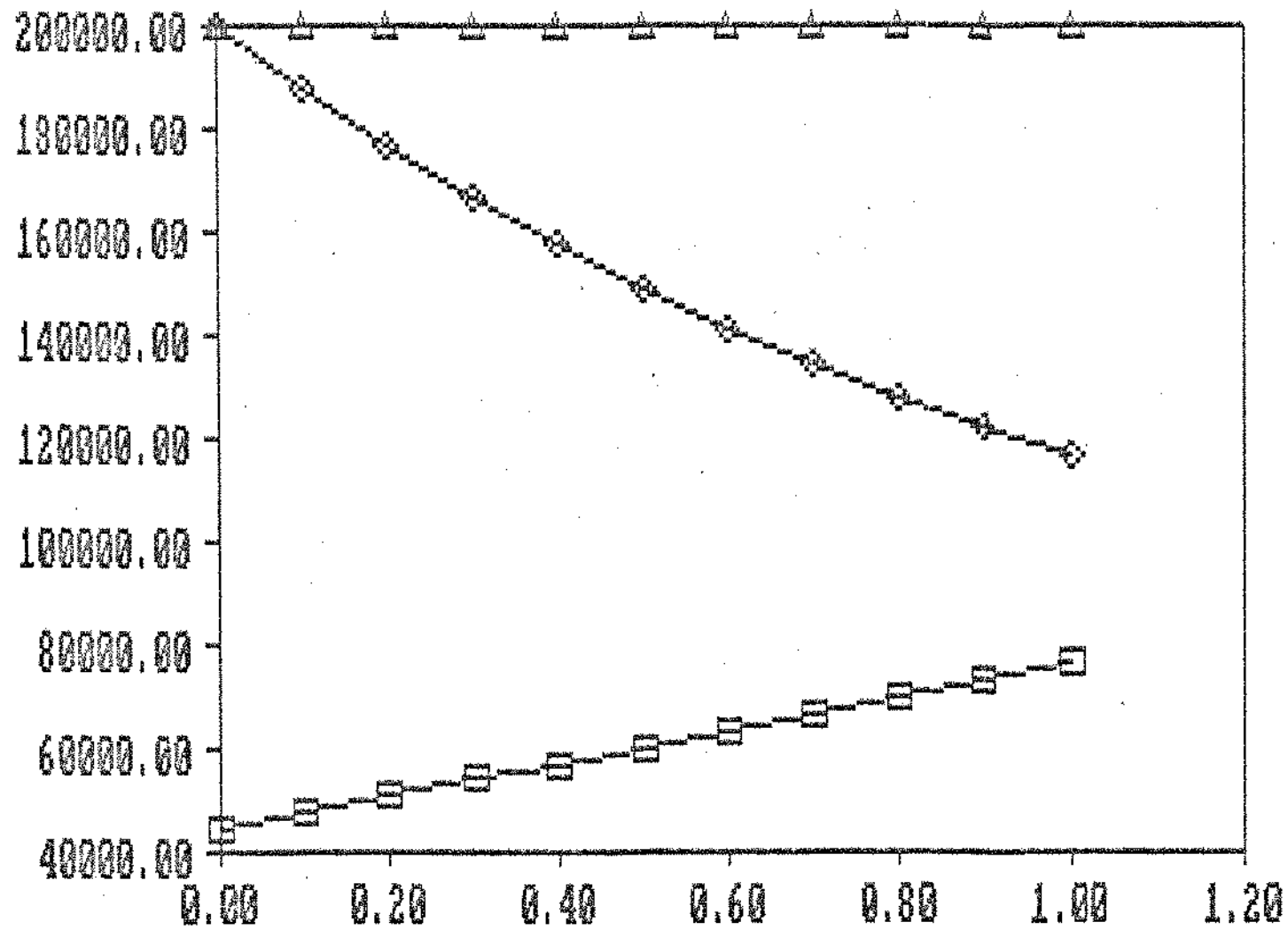
$$\frac{d P}{dt} = P ( \lambda - a \cdot P + b \cdot e^{-P} )$$

onde  $a, b, \lambda > 0$



□ PLIM=PI    △ PLIM>PI    ◇ PLIM<PI    (PLIM = POPULAÇÃO LIMITE)  
 (PI = POPULAÇÃO INICIAL)

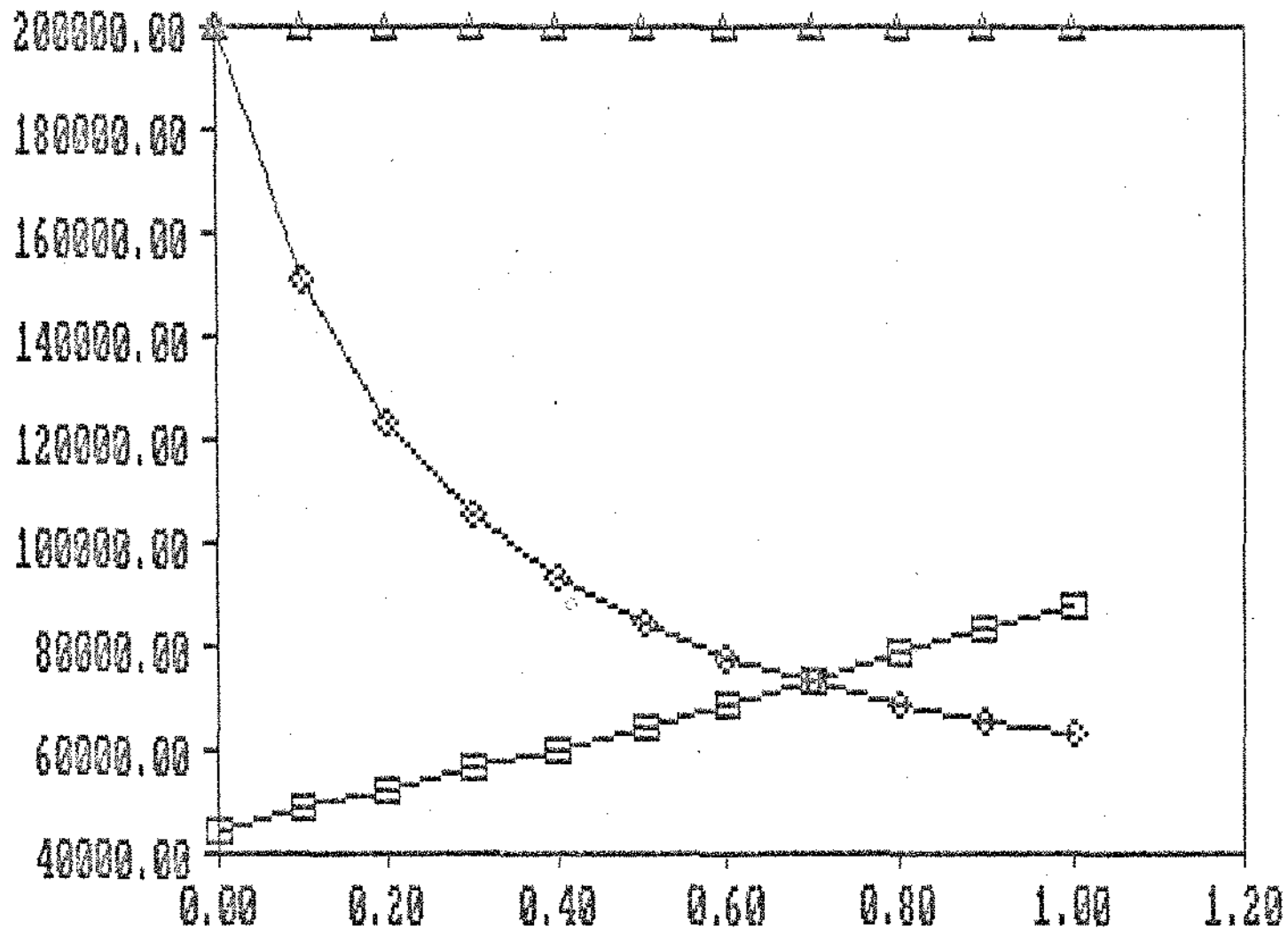
fig. 1.6



$\square$  PLIM > PI     $\triangle$  PLIM = PI     $\diamond$  PLIM < PI    (PLIM = POPULAÇÃO LIMITE)  
 (PI = POPULAÇÃO INICIAL)

fig. 1.7





□ PLIM > PI    △ PLIM = PI    ◇ PLIM < PI    (PLIM = POLULAÇÃO LIMITE)  
 (PI = POLUPAÇÃO INICIAL)

fig. 1.8

"Entretanto, ao examinarmos o crescimento populacional na Terra, vemos um comportamento diferente dos modelos que indicam uma população limite. Ocorre que  $P_{\infty}$  é constante ao longo de determinados períodos da História, aumentando seu valor com o progresso da população. Assim, antes do advento das ferramentas (até aproximadamente 10.000 anos atrás),  $P_{\infty} \approx 10^7$ , passando a  $P_{\infty} = 10^8$  com a Revolução Agrícola e a  $P_{\infty} = 10^9$  com a Revolução Industrial. E agora, com o esgotamento dos recursos renováveis principais, qual será o valor de  $P_{\infty}$ ? [ ver figura 1.9 ]" [1]

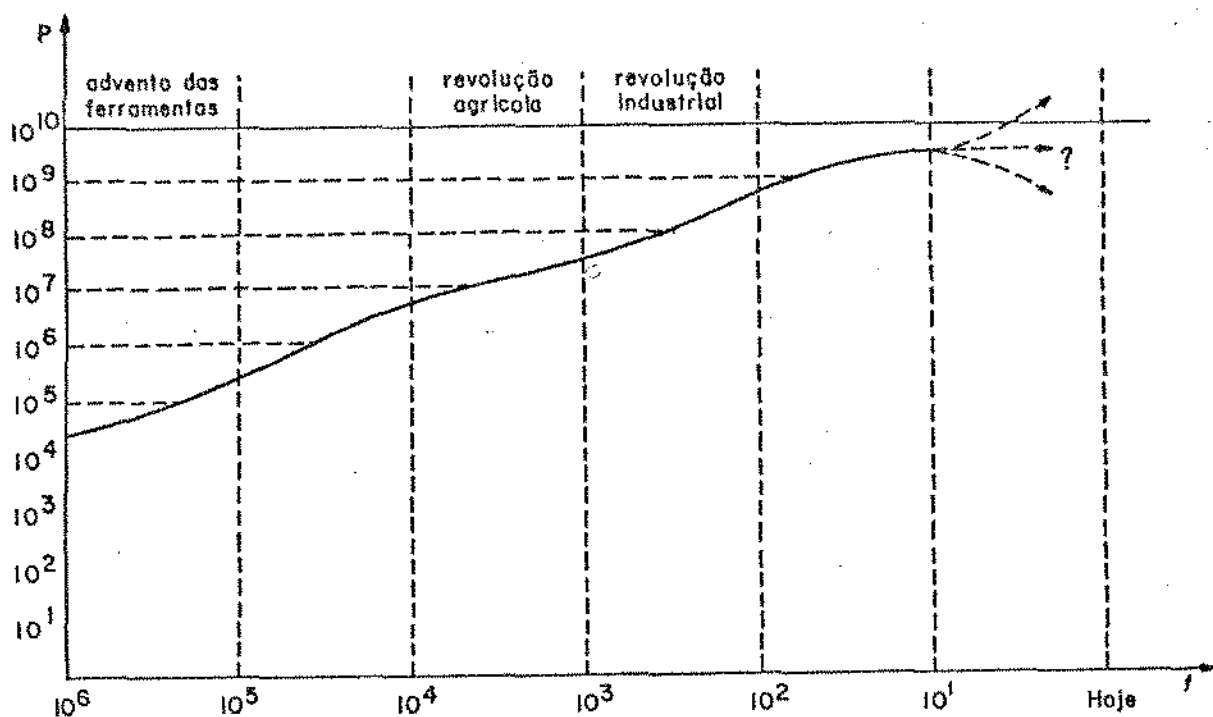


fig. 1.9

## 1.2 MODELOS DE INTERAÇÃO ENTRE ESPÉCIES

### 1.2.1 C O M P E T I Ç Ã O

Vamos assumir que exista duas espécies vivendo no mesmo habitat e denotemos por  $P_1$  e  $P_2$  o número de indivíduos da espécie 1 e 2 respectivamente quando a quantidade de recursos é amplamente suficiente para ambas as populações.

Então podemos escrever que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d P_1}{d t} = r_1 \cdot P_1 \\ \\ \frac{d P_2}{d t} = r_2 P_2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} [1.11] \\ \\ r_1, r_2 > 0 \end{array}$$

Porém como as populações sempre crescem e a disponibilidade de recursos decresce então as equações do sistema [1.11] devem ser alteradas por não corresponder à realidade.

A hipótese que faremos é de assumir que os recursos

decrecem proporcionalmente às populações, i.e.:

$h_1 \cdot P_1$  devido à população  $P_1$  e

$h_2 \cdot P_2$  devido à população  $P_2$ .

Portanto,  $h_1 \cdot P_1 + h_2 \cdot P_2$  representa o decréscimo dos recursos devido a  $P_1$  e  $P_2$ .

Este decréscimo afeta cada espécie diferentemente, assim sua taxa de crescimento pode ser reduzida a:

$$r_1 - s_1 \cdot (h_1 \cdot P_1 + h_2 \cdot P_2)$$

$$r_2 - s_2 \cdot (h_1 \cdot P_1 + h_2 \cdot P_2)$$

$$r_1, r_2, s_1, s_2, h_1, h_2 > 0$$

Teremos assim o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d P_1 (t)}{d t} = \left[ r_1 - s_1 \cdot (h_1 \cdot P_1 + h_2 \cdot P_2) \right] \cdot P_1 \\ \frac{d P_2 (t)}{d t} = \left[ r_2 - s_2 \cdot (h_1 \cdot P_1 + h_2 \cdot P_2) \right] \cdot P_2 \\ P_1(0), P_2(0) \neq 0 \end{array} \right. \quad [1.12]$$

Utilizando as equações do sistema [1.12] podemos

estabelecer uma relação entre  $P_1$  e  $P_2$ , a saber,

$$\frac{P_1(t)^{s_2}}{P_2(t)^{s_1}} = K.e^{(r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1) \cdot t}$$

onde 
$$K = \frac{P_1(0)^{s_2}}{P_2(0)^{s_1}}$$

Observação 2:

(i) Se  $r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1 > 0$   $\longrightarrow$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_1(t)^{s_2}}{P_2(t)^{s_1}} = \infty$$

De [1.12] podemos observar que se

$$s_1 \cdot h_1 \cdot P_1(t) \geq r_1 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty \quad \text{então} \quad \frac{d P_1(t)}{d t} < 0$$

portanto  $P_1(t)$  é limitada e concluímos que  $P_2(t) \rightarrow 0$

quando  $t \rightarrow \infty$ .

Então, a primeira equação do sistema [1.12] será reescrita como

$$\frac{d P_1(t)}{d t} = \left[ r_1 - s_1 \cdot h_1 \cdot P_1(t) \right] \cdot P_1(t) \quad [1.13]$$

e resolvendo encontramos

$$P_1(t) = \frac{P_1^I(0) \cdot r_1}{e^{-r_1 \cdot t} \cdot \left( r_1 - s_1 \cdot h_1 \cdot P_1(0) \right) + s_1 \cdot h_1 \cdot P_1(0)} \quad [1.14]$$

então, quando  $t \rightarrow \infty$

$$P_1(t) \longrightarrow \frac{r_1}{h_1 \cdot s_1}$$

Assim, podemos concluir que se:

$$r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1 > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{r_1}{s_1} > \frac{r_2}{s_2}$$

então  $P_2$  vai à extinção e  $P_1$  converge assintoticamente a

$$\frac{r_1}{h_1 \cdot s_1}$$

(ii) Se  $r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1 < 0$

Usando raciocínio análogo a (i) chegaríamos à seguinte conclusão:

Se

$$r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1}{s_1} < \frac{r_2}{s_2}$$

então  $P_1$  vai à extinção e  $P_2$  converge assintoticamente a

$$\frac{r_2}{s_2 \cdot h_2}$$

(iii) Se  $r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1 = 0$  então

$$\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{P_1^{s_2}}{P_2^{s_1}} = K$$

Neste caso podemos analisar três situações :

$$(a) \quad \text{Se } \alpha = \frac{r_1}{s_1} > h_1 \cdot P_1(t) + h_2 \cdot P_2(t)$$

para  $t \rightarrow \infty$  então  $r_1 > s_1 \cdot \left( h_1 \cdot P_1 + h_2 \cdot P_2 \right)$ .

Como  $r_1 > 0$  e

$$s_1 \cdot \left( h_1 \cdot P_1 + h_2 \cdot P_2 \right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d P_1}{dt} > 0 \quad \text{e}$$

analogamente  $\frac{d P_2}{dt} > 0$ . Portanto  $P_1(t)$  e  $P_2(t)$

serão sempre crescentes e limitadas e preservarão a relação :

$$P_1 = K \cdot P_2$$

$$(b) \quad \text{Se } \alpha = \frac{r_1}{s_1} = h_1 \cdot P_1(t) + h_2 \cdot P_2(t)$$

para  $t \rightarrow \infty$  então  $\frac{d P_1}{dt} = \frac{d P_2}{dt} = 0$  e

concluimos que  $P_1$  e  $P_2$  são constantes.



$$(c) \quad \text{Se } \alpha = \frac{r_1}{s_1} < h_1 \cdot P_1(t) + h_2 \cdot P_2(t)$$

para  $t \rightarrow \infty$  então  $\frac{dP_1}{dt} < 0$  e  $\frac{dP_2}{dt} < 0$ .

Portanto  $P_1$  e  $P_2$  serão decrescentes e tenderão assintoticamente aos valores constantes  $\bar{P}_1$  e  $\bar{P}_2$  tais que:

$$\bar{P}_1^{s_2} = K \cdot \bar{P}_2^{s_1}$$

[22]

### 1.2.2 P R E D A C Ã O

#### PRESA - PREDADOR ( LOTKA - VOLTERRA)

Sejam  $P_1$  e  $P_2$  o número de indivíduos da espécie 1 (presa) e da espécie 2 (predadores) respectivamente.

Se a segunda espécie não estiver presente, a primeira cresce a uma taxa  $r_1 > 0$ . Vamos supor, agora, que a primeira espécie não esteja presente então a segunda morre por falta de alimento. Nesse caso, podemos supor que a taxa de crescimento é negativa, e vale  $-r_2$ .

Assim, se cada espécie for considerada

separadamente, teremos:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{d P_1}{dt} = r_1 \cdot P_1 \\ \frac{d P_2}{dt} = - r_2 \cdot P_2 \end{array} \right. \quad [1.15]$$

Consideremos o caso no qual ambas espécies vivem no mesmo habitat e que a espécie 2 se alimenta da espécie 1. Nesse caso,  $r_1$  decresce e  $-r_2$  cresce. Se a espécie 2 é mais abundante então  $-r_2$  cresce mais rapidamente. A fim de representar estas relações de uma maneira mais simples podemos supor que  $r_1$  decresce em proporção a  $P_2$ , por uma quantia  $\gamma_1 \cdot P_2$ , e que  $-r_2$  cresce em proporção a  $P_1$ , pela quantia  $\gamma_2 \cdot P_1$ . Então teremos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{dP_1}{dt} = \left( r_1 - \gamma_1 \cdot P_2 \right) \cdot P_1 \\ \frac{dP_2}{dt} = \left( - r_2 + \gamma_2 \cdot P_1 \right) \cdot P_2 \end{array} \right. \quad [1.16]$$

As constantes  $r_1$  e  $r_2$  representam as taxas de nascimento e mortalidade das espécies 1 e 2 respectivamente, quanto  $\gamma_1$  mede a susceptibilidade da espécie 1 à predação e  $\gamma_2$  mede a habilidade de predação da espécie 2. O modelo descrito pelo sistema [1.16] é conhecido por: MODELO PRESA - PREDADOR ( LOTKA - VOLTERRA ).

PRESA - PREDADOR ( KOLMOGOROV )

( UM MODELO GENERALIZADO )

A. N. KOLMOGOROV generaliza o sistema de LOTKA - VOLTERRA, abolindo completamente as formas explícitas das características das espécies e das relações funcionais de suas interações e usando hipóteses qualitativas. O modelo geral é dado por

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{d P_1}{dt} = A ( P_1 ) \cdot P_1 - V ( P_1 ) \cdot P_2 \\ \frac{d P_2}{dt} = B ( P_1 ) \cdot P_2 \end{array} \right.$$

No modelo de KOLMOGOROV não são feitas, a priori, suposições acerca das formas particulares de  $A$ ,  $V$  e  $B$ . Para estas funções são consideradas essencialmente suas características biológicas:

a )  $A ( P_1 )$  é decrescente:  $A(0) > 0 > A(\infty)$ . Estas restrições podem ser interpretadas da seguinte forma: na ausência do predador ( $P_2 = 0$ ), o coeficiente de natalidade da presa diminui com o aumento da população ( população inibida ), indo de valores positivos para valores negativos; isto significa que a população das presas assume características de uma competição para recursos limitados. Assim, esta população é estabilizada num nível dado por

$$A ( \bar{P}_1 ) = 0 \quad ( P_2 = 0 )$$

b )  $B ( P_1 )$  é crescente com  $P_1$ ;  $B(0) < 0 < B(\infty)$ . A taxa de crescimento da população dos predadores vai de valores negativos ( com a falta de alimentos ) a valores positivos.

c)  $V ( P_1 ) > 0$  para  $P_1 > 0$  e  $V(0)=0$  (*trophic function* ou resposta funcional dos predadores à densidade da população de presas). Alguns tipos mais frequentes para funções *trophic* em sistemas do tipo presa-predador clássico

são dados na figura 1.10.

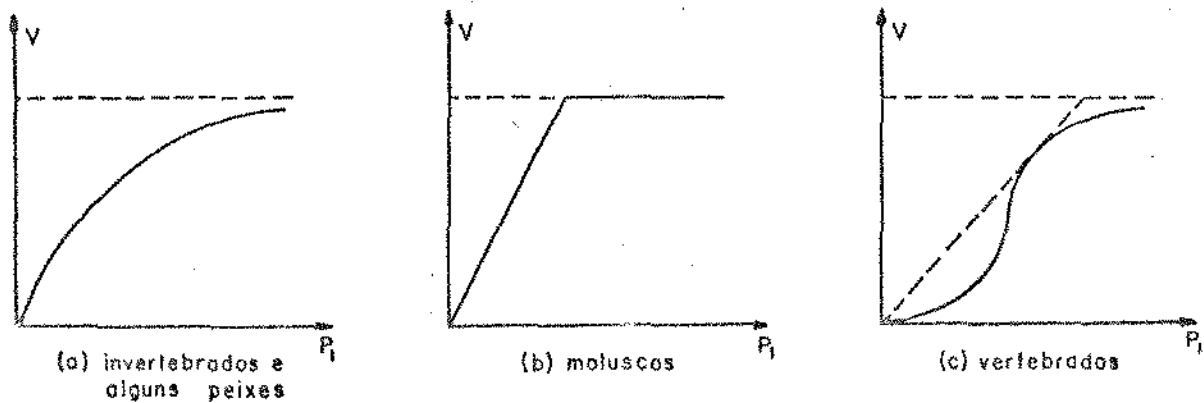


fig.1.10

Nos modelos de dinâmica populacional apresentados, até o presente momento, a variação da população era considerada unicamente como função do tempo, o que nos fornecia equações diferenciais ordinárias.

Vamos, agora, construir um modelo de crescimento da população dependente também da idade.

## C A P Í T U L O    I I

### MODELAGEM MATEMÁTICA PARA UMA POPULAÇÃO COM DEPENDÊNCIA DE IDADE

Modelos matemáticos descrevendo a evolução de populações com estrutura de idade têm recebido crescente atenção nos últimos anos por parte de biólogos e matemáticos. De fato, as taxas de fertilidade e mortalidade estão entre os parâmetros básicos na teoria da dinâmica populacional e demografia e os problemas matemáticos que surgem são interessantes e desafiantes.

Neste capítulo vamos considerar o problema da determinação do tamanho futuro e a distribuição de idade de uma população. Embora populações possam ser vistas de maneiras diferentes, para os propósitos deste capítulo uma população será considerada como uma coleção de indivíduos subdivididos em grupos de idades distintas.

A estimativa do tamanho e composição de idade de várias populações biológicas é um assunto significativo. Por exemplo, tais informações são necessárias no planejamento do uso de recursos naturais renováveis; políticas econômicas e educacionais a longo prazo; alimentação, saúde, habitação.

Como vimos nos modelos anteriores não é considerada a influência da composição de idade da população no seu desenvolvimento. Esta será uma primeira preocupação deste capítulo.

Consideraremos também o tempo como sendo uma variável contínua .

Um dos primeiros modelos de tempo contínuo sobre teoria do crescimento populacional com estrutura de idade foi introduzido por A. J. Lotka em 1922 e subsequentemente refinado por muitos pesquisadores. O modelo de Lotka tem servido como ponto de partida para muitas pesquisas em dinâmica populacional. [5, 14, 20]

## 2.1 O MODELO DE SHARPE - LOTKA SUA INTERPRETAÇÃO E RESOLUÇÃO

Vamos analisar a dinâmica de uma população considerando não apenas o número total de indivíduos, mas

também a sua distribuição por meio da função  $U(a,t)$  onde  $U(a,t)$  é uma função suave de  $a$  e  $t$ , não negativa definida para  $a, t \geq 0$ .

### 2.1.1 A EQUAÇÃO DE SHARPE - LOTKA

Com a função  $U(a,t)$  queremos expressar a densidade (ou distribuição) de indivíduos de idade  $a$  no tempo  $t$ . Então

$$\int_{a_1}^{a_2} U(a,t) da \quad [2.1]$$

representa o número de indivíduos com idade entre  $a_1$  e  $a_2$  ( $a_1 < a_2$ ) no instante  $t$  e

$$P(t) = \int_0^L U(a,t) da \quad [2.2]$$

representa o número total de indivíduos da população. ( Vamos supor que  $L \in [0, \infty)$  ).

O número

$$B(t) = U(0,t) \quad [2.3]$$



representa a taxa de fertilidade no tempo  $t$ ; i.e: o número de nascimentos por unidade de tempo.

Assumimos que a taxa de fertilidade seja governada pela lei de nascimento

$$\int_0^L \lambda(a) \cdot U(a,t) \, da$$

ou seja,

$$B(t) = \int_0^L \lambda(a) \cdot U(a,t) \, da \quad [2.4]$$

onde  $\lambda(a)$  é o número esperado de nascimentos para indivíduos de idade  $a$ , por unidade de tempo. A equação [2.4] é chamada EQUAÇÃO DE RENOVACÃO. [11,14]

Chamamos

$$\lambda : [0, L) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

de função fertilidade ou coeficiente específico de natalidade.

Como iremos ver o comportamento evolutivo da população será completamente governado pela função  $\lambda$ , pela "life table"  $\Pi$  [11], e pela distribuição de idade inicial  $U_0$ , onde

$$U(a,0) = U_0(a)$$

i.e:  $\lambda$ ,  $\Pi$  e  $U_0$  determinam  $U(a,t)$  para todos os tempos subsequentes.

Uma das idéias centrais em dinâmica populacional é a "life table",  $\Pi$ . Para uma dada espécie,  $\Pi(a)$  é a probabilidade de sobrevivência para a idade  $a$ ,  $0 \leq a < L$ , com  $L$  a máxima esperança de vida,  $L \in [0, \infty)$ .

Mais precisamente, a "life table"  $\Pi$  é uma função suave, monótona decrescente sobre  $[0,L)$  com

$$\Pi(a) > 0, \quad \Pi(0) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{a \rightarrow L} \Pi(a) = 0$$

Por conveniência, podemos permitir que  $L = \infty$ , e em tal caso, exigimos que  $\Pi$  seja integrável.

O número

$$\Pi(a,\tau) = \frac{\Pi(a)}{\Pi(\tau)}, \quad 0 \leq a \leq \tau < L,$$

é a probabilidade de um indivíduo com idade  $a$  sobreviver até a idade  $\tau$ , e assim

$$1 - \Pi(a,\tau)$$

é a probabilidade de um indivíduo morrer no intervalo  $(a, \tau)$ .

A função  $\mu$  definida em  $[0, L)$  por

$$\mu(a) = - \frac{\Pi'(a)}{\Pi(a)}$$

é chamada função mortalidade.

Claramente,

$$1 - \Pi(a, a+h) = \mu(a) \cdot h + o(h^2)$$

ou seja,  $\mu(a) \cdot h$  dá a probabilidade de um indivíduo com idade  $a$  morrer no intervalo de idade  $(a, a+h)$  com um erro da ordem de  $h$ .

Expressamos este comportamento assintótico dizendo que:  $\mu(a)$  da é a probabilidade de um indivíduo com idade  $a$  morrer no intervalo de idade  $(a, a+da)$ .

Podemos escrever  $\Pi$  em termos de  $\mu$ . O resultado será:

$$\Pi(a) = \exp \left[ - \int_0^a \mu(\lambda) d\lambda \right]$$

Ainda,

$$\Pi(a, \tau) = \exp \left[ - \int_0^L \mu(\lambda) d\lambda \right]$$

A probabilidade de sobrevivência para a idade  $a$  e então morrer durante  $(a, a+da)$  é  $\Pi(a) \cdot \mu(a) da$  ; com isto em mente, definimos a esperança de vida ,  $l$  , por:

$$l = \frac{\int_0^L a \cdot \Pi(a) \cdot \mu(a) da}{\int_0^L \Pi(a) \cdot \mu(a) da}$$

Temos que

$$\int_0^L \Pi(a) \cdot \mu(a) da = 1$$

e que

$$\int_0^L a \cdot \Pi(a) \cdot \mu(a) da = \int_0^L \Pi(a) da$$

Logo, teremos a seguinte fórmula para a esperança de vida

$$I = \int_0^L \Pi(a) da$$

Assim, a hipótese de  $\Pi$  ser integrável quando  $L = \infty$  é simplesmente para exigir que  $I$  seja finita.

Para motivar a dedução da equação de evolução fundamental, consideremos os indivíduos de idade 70 no tempo 10, temos que:

$$U(70, 10) = U(60, 0) \cdot \Pi(60, 70) \quad [2.5]$$

Em outras palavras:

O número de indivíduos de idade 70 no tempo 10 é igual ao número de indivíduos que tinham idade 60 no tempo zero multiplicado pela probabilidade de sobrevivência da idade 60 a 70.

As considerações acima são válidas quando  $t \leq a$ .

Assim,

$$U(a, t) = \Pi(a-t) \cdot U_0(a-t) \quad \text{para } t \leq a \quad [2.6]$$

Quando  $t \leq a$  a taxa de fertilidade deve ser considerada.

Por exemplo:

O número de indivíduos de idade 10 no tempo 70 é igual ao número de indivíduos nascidos no tempo 60 multiplicado pela probabilidade de sobreviver 10 anos.

Generalizando,

$$U(a,t) = \Pi(a) \cdot B(t-a) \quad \text{para } 0 \leq a \leq t \quad [2.7]$$

naturalmente  $a \in [0, L)$ .

As equações [2.6] e [2.7] dão a distribuição de idade como função da distribuição de idade inicial e da taxa de fertilidade.

Temos ainda, para utilizar a lei de nascimento.

Se substituirmos [2.6] e [2.7] em [2.4] encontraremos:

$$B(t) = \int_0^L \lambda(a) \cdot U(a,t) da =$$

$$\int_0^t \lambda(a) \cdot U(a,t) da + \int_t^L \lambda(a) \cdot U(a,t) da$$

$$\int_0^t \lambda(a) \cdot \Pi(a) \cdot B(t-a) da + \int_t^L \lambda(a) \cdot \Pi(a-t, a) \cdot U_0(a-t) da$$

Sejam

$$\phi(t) = \int_t^L \lambda(a) \cdot \Pi(a-t, a) \cdot U_0(a-t) da$$

$$k(a) = \lambda(a) \cdot \Pi(a)$$

Teremos, então, a equação integral

$$B(t) = \int_0^t k(a) \cdot B(t-a) da + \phi(t) \quad [2.8]$$

denominada " EQUAÇÃO DE SHARPE - LOTKA ".

Esta equação é uma equação integral de VOLTERRA linear para a taxa de fertilidade B. ( Notemos que k depende somente de  $\lambda$  e  $\Pi$ ,  $\phi$  somente de  $\lambda$ ,  $\Pi$  e a distribuição de idade inicial  $U_0(a)$  ). [ Ver apêndice A]

Uma vez que [2.8] tenha sido resolvida para B, [2.6] e [2.7] podem ser usadas para determinar a distribuição U. [11,14]

Equações da forma [2.8] são também chamadas "equações de convolução" e podem ser resolvidas empregando-se o método de transformadas de Laplace.

A transformada de Laplace de uma função f é definida por:

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{\infty} e^{-p \cdot t} \cdot f(t) dt$$

para os valores de  $p$  para os quais a integral converge.

Suponhamos que

i) A função

$$\lambda : [ 0, L ) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

seja uma função suave, com suporte compacto e não identicamente nula.

ii) A função

$$U_0 : [ 0, L ) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

seja contínua.

Portanto, para os valores onde a transformada de Laplace de  $B$  existe teremos:

$$\mathcal{L}(B)(p) = \mathcal{L} \left( \phi(t) + \int_0^t k(a).B(t-a) da \right)$$

Logo,

$$\mathcal{L}(B)(p) = \mathcal{L}(\phi)(p) + \mathcal{L}(k)(p). \mathcal{L}(B)(p)$$

Assim, se

$$\mathcal{L}(k)(p) \neq 1$$

teremos



$$\mathcal{L}(B)(p) = \frac{\mathcal{L}(\phi)(p)}{1 - \mathcal{L}(k)(p)}$$

A equação

$$\mathcal{L}(k)(p) = \int_0^L e^{-p \cdot a} \cdot k(a) da = 1 \quad [2.9]$$

é chamada EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA, e foi descoberta por LOTKA em 1922. [11,14]

Portanto,  $\mathcal{L}(B)(p)$  existe para todo  $p \in \mathbb{R}$  :  
 $\mathcal{L}(k)(p) \neq 1$ .

### 2.1.2 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA DE LOTKA

A equação característica de LOTKA tem uma única solução real para  $p$ , digamos  $p^*$ . A constante  $p^*$  é chamada taxa intrínseca de crescimento natural ou potencial biótico da população. Esta constante é análoga à taxa de crescimento malthusiano.

Como  $\lambda(a)$  e  $\Pi(a)$  são funções contínuas por partes então podemos mostrar que:

Proposição 1:

[11,14]

A equação característica de Lotka tem exatamente uma solução real  $p = p^*$ . Além disso, se denotarmos por  $\left\{ p_n \right\}$  o conjunto das raízes da equação [2.9] teremos:

- i ) As  $p_n$  ocorrem aos pares conjugados
- ii )  $\operatorname{Re}(p_n) < p^*$ , qualquer que seja  $n$
- iii)  $\operatorname{Re}(p_n) \rightarrow -\infty$  quando  $n \rightarrow \infty$

Prova :

i ) Seja

$$f(p) = \int_0^L e^{-p \cdot a} \cdot k(a) da$$

suponhamos que  $p \in \mathbb{R}$ , então  $f$  é uma função suave, estritamente positiva. Além disso,

$$f'(p) = - \int_0^L a \cdot k(a) \cdot e^{-p \cdot a} da < 0$$

e portanto  $f$  é estritamente monotônica decrescente. Assim, desde que

$$f(-\infty) = \infty$$

e

$$f(\infty) = 0$$

$f(p) = 1$  para exatamente um valor de  $p$ .

Agora, consideremos  $p \in \mathbb{C}$ ,  $p = p_n$ . Em particular, seja  $p_n = \xi + i \cdot \eta$  ( $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ ,  $\eta \neq 0$ ) que satisfaz a equação característica de Lotka. Assumamos que  $\text{Re} p_n \geq p^*$ , então,

$$1 = \text{Re} f(p_n) = \text{Re} \int_0^L k(a) \cdot e^{-p_n \cdot a} da =$$

$$\text{Re} \int_0^L k(a) \cdot e^{-(\xi + i \cdot \eta) \cdot a} da =$$

$$\int_0^L k(a) \cdot e^{-\xi \cdot a} \cdot \cos \eta \cdot a da < \int_0^L k(a) \cdot e^{-p \cdot a} da$$

$$= 1$$

e assim temos uma contradição. Logo  $p^* > \xi = \text{Re} p_n$ .

Suponhamos que  $p_n \in \mathbb{C}$ ,  $p_n = \xi + i \cdot \eta$  ( $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ ,  $\eta \neq 0$ ). Seja uma solução da Equação Característica de Lotka. Então,

$$1 = f(p_n) = \int_0^L e^{-p_n \cdot a} \cdot k(a) da =$$

$$\int_0^L e^{-(\xi+i\eta) \cdot a} \cdot k(a) da = \operatorname{Re} \int_0^L e^{-\xi \cdot a} \cdot e^{-i \cdot \eta \cdot a} \cdot k(a) da$$

$$\int_0^L e^{-\xi \cdot a} \cdot k(a) \cdot \cos(-\eta a) da = \int_0^L e^{-\xi \cdot a} \cdot k(a) \cdot \cos \eta a da$$

$$\operatorname{Re} \int_0^L e^{-\xi \cdot a} \cdot e^{i \cdot \eta \cdot a} \cdot k(a) da = \int_0^L e^{-(\xi - i \cdot \eta \cdot a)} \cdot k(a) da$$

$$\int_0^L e^{-p_n \cdot a} \cdot k(a) da = f(\bar{p}_n)$$

Assim, podemos garantir que  $\mathcal{L}(B)(p)$  existe para todos  $p \in \mathbb{C}$  tais que  $\operatorname{Re} p > p^*$ . E para estes valores  $\mathcal{L}(B)(p)$  é uma função analítica.

A raiz  $p^*$  é um parâmetro importante na descrição do comportamento da população. Ela está relacionada com

$$R = \int_0^L \lambda(a) \cdot \Pi(a) da$$

denominada "net reproduction rate", ele representa o número

esperado de crianças por indivíduo em sua vida. Claramente, a integral em [2.9] é  $< R$ ,  $= R$  ou  $> R$  de acordo com  $p^* > 0$ ,  $= 0$  ou  $< 0$ .

Assim, a taxa de fertilidade cresce, decresce ou permanece constante.

Verificaremos, posteriormente, que  $p^*$  também está relacionado com a existência de uma solução separável, i.e., uma solução produto da forma

$$U(a,t) = A(a).T(t)$$

[11,14]

### 2.1.3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE SHARPE-LOTKA

As suposições feitas com relação as funções  $k$  e  $\phi$  garantem que existe a sua transformada de Laplace. Mostraremos, agora, que existe a transformada de Laplace de  $B$ .

[Ver apêndice B]

A fim de que  $\mathcal{L}(B)(p)$  exista devemos mostrar que:

1º )  $B(t)$  é integrável por partes

2º )  $B(t)$  é de ordem exponencial

Demonstração:

1. Óbvvia, a partir da definição de  $B(t)$ .

2. Temos que, para qualquer  $t \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} |e^{-p \cdot t} \cdot B(t)| &\leq |e^{-p \cdot t} \cdot \phi(t)| + \int_0^t |e^{-p \cdot t} \cdot k(a) \cdot B(t-a)| da \\ &= |e^{-p \cdot t} \cdot \phi(t)| + \int_0^t |k(a) \cdot e^{-p \cdot a} \cdot e^{-p \cdot t} \cdot B(t)| da \\ &\leq |e^{-p \cdot t} \cdot \phi(t)| + \int_0^\infty |k(a) \cdot e^{-p \cdot \text{Rep}}| \cdot |e^{-p \cdot t} \cdot B(t)| da \end{aligned}$$

Assim,

$$|e^{-p \cdot t} \cdot B(t)| \leq |e^{-p \cdot t} \cdot \phi(t)| + \int_0^\infty |k(a) \cdot e^{-a \cdot \text{Rep}}| \cdot |e^{-p \cdot t} \cdot B(t)| da$$

para todo  $t \in [0, \infty)$

Logo,

$$|e^{-p \cdot t} \cdot B(t)| \cdot \left[ 1 - \int_0^\infty |k(a) \cdot e^{-a \cdot \text{Rep}}| da \right] \leq$$

$$\sup_{0 \leq t < \infty} |e^{-p \cdot t} \cdot \phi(t)|$$

Desde que  $\text{Rep} > p^*$ ,

$$\int_0^{\infty} k(a).e^{-a.\text{Rep}} da < 1$$

Portanto,

$$|B(t)| \leq K.e^{t.\text{Rep}} \left[ 1 - \int_0^{\infty} k(a).e^{-a.\text{Rep}} da \right]^{-1}$$

Assim, a transformada de B,  $\mathcal{L}(B)(p)$  está definida como uma função analítica de  $p$  no semi-plano  $\text{Rep} > p^*$ .

Como estamos interessados em  $B(t)$ , vamos inverter a transformação utilizando a transformada inversa de Laplace.

[ Ver apêndice B ]

Assim,

$$B(t) = \frac{1}{2 \Pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\gamma - i.\tau}^{\gamma + i.\tau} e^{p.t} \cdot \frac{L(f)(p)}{1 - L(k)(p)} dp$$

[2.10]

onde  $\gamma$  é um número real maior que  $p^*$ .

Esta integral pode ser calculada utilizando o teorema dos resíduos. [6,11,14]

Logo,

$$B(t) = B_0 \cdot e^{-p \cdot t} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cdot e^{p_n \cdot t} \quad [2.11]$$

onde  $p_n$  são as raízes características satisfazendo  $\text{Re } p_n < p^*$ . Os coeficientes nesta expansão podem ser determinados pelo cálculo do resíduo nos polos  $p^*, p_n$ . [6, 11, 14]

Pode acontecer que algumas raízes complexas não sejam simples e o problema torna-se mais difícil. Mesmo neste caso, podemos escrever

$$B(t) = B_0 \cdot e^{p^* \cdot t} + o\left(e^{p^* \cdot t}\right) \quad [2.12]$$

onde  $B_0$  é o resíduo calculado em  $p = p^*$

$$B_0 = \text{res}_{p=p^*} \frac{\mathcal{L}(\phi)(p)}{1 - \mathcal{L}(k)(p)}$$

Como  $p^* > \text{Re}(p_n)$ ,  $\forall n$ .

Então, quando  $t \rightarrow \infty$

$$B(t) \approx B_0 \cdot e^{p^* \cdot t}$$

[6, 11, 14]



## 2.2 FORMULAÇÃO ALTERNATIVA DO MODELO

### 2.2.1 A EQUAÇÃO DE MCKENDRICK

Vamos analisar a taxa de variação da quantidade

$$\int_{a_1}^{a_2} U(a,t) da$$

e algumas hipóteses sobre suas causas.

Verificamos inicialmente que a variação da quantidade acima se deve a dois fatores primordiais.

1 ° ) Mortalidade nesta faixa etária

Por hipótese consideramos que a taxa de mortalidade  $m(a,t)$  é proporcional à distribuição de indivíduos por idade  $U(a,t)$ , i.e.:

$$m(a,t) = \mu(a,t) \cdot U(a,t)$$

onde  $\mu$  é chamado coeficiente específico de mortalidade.

2 ° ) Fluxo de indivíduos de idade  $a < a_1$  que entram na faixa  $[a_1, a_2]$  e de indivíduos desta faixa que saem para as idades  $a > a_2$ .

Analisamos este fluxo em  $a_1$  no intervalo de tempo  $(t, t + \Delta t)$ . Supondo  $\Delta t > 0$  pequeno, os indivíduos que penetram na faixa  $[a_1, a_2]$  são aqueles que estão na faixa  $[a_1 - \Delta t, a_1]$  em número aproximadamente igual a  $U(a_1, t) \cdot \Delta t$  e portanto temos:

$$\frac{U(a_1, t) \cdot \Delta t}{\Delta t} \longrightarrow U(a_1, t)$$

quando  $\Delta t \longrightarrow 0$  por unidade de tempo.

O fluxo em  $a_1$  é positivo enquanto que em  $a_2$  é negativo e, pelos mesmos argumentos, deve valer  $-U(a_2, t)$ .

Neste caso, a lei da dinâmica nos dá:

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial U(a, t)}{\partial t} da = U(a_1, t) - U(a_2, t) - \int_{a_1}^{a_2} \mu(a, t) \cdot U(a, t) da$$

$$\int_{a_1}^{a_2} -\frac{\partial U(a, t)}{\partial a} da - \int_{a_1}^{a_2} \mu(a, t) \cdot U(a, t) da$$

para todo  $0 \leq a_1 < a_2$ .

Assim,

$$\int_{a_1}^{a_2} -\frac{\partial U(a,t)}{\partial t} da + \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial U(a,t)}{\partial t} da =$$

$$- \int_{a_1}^{a_2} \mu(a,t) \cdot U(a,t) da$$

Logo,

$$\frac{\partial U(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial U(a,t)}{\partial t} = -\mu(a,t) \cdot U(a,t) \quad [2.13]$$

Esta equação diferencial parcial de 1<sup>a</sup> ordem em U é chamada de "EQUAÇÃO DO CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO DEPENDENTE DA IDADE" ou "EQUAÇÃO DE MCKENDRICK - VON FOERSTER".

[1,11,14]

"Observe que se soubermos a estrutura por idade da população no instante  $t = 0$ , i.e: se nos for dado  $U(a,0) = U_0(a)$  (onde  $U_0$  é uma função suave) a equação [2.13] só poderá dar informações sobre a população com idade  $a > t$ ,

para cada instante  $t$ , uma vez que não foi fornecido o fluxo de indivíduos na extremidade  $a = 0$  ( taxa de nascimento ). Portanto, no instante  $t$  não sabemos ainda como a população de idade  $a < t$  foi gerada desde o momento inicial. Esta taxa de nascimento depende, naturalmente, da distribuição por idades da população em cada instante, pois a fertilidade dos indivíduos varia com a idade. É razoável, pois, supor que, para uma dada situação, a taxa de nascimento em cada instante (i.e., o fluxo de indivíduos em  $a = 0$  que é dado por  $U(0,t)$  é uma média ponderada da distribuição por idade da população naquele instante, ou seja,

$$U(0,t) = \int_0^L \lambda(a,t) \cdot U(a,t) da \quad [2.14]$$

onde  $\lambda(a,t)$  é chamada fertilidade específica ( ou coeficiente específico de natalidade) da idade e pode ser considerada como um dado do problema que depende da microestrutura da população." [1]

Observemos que, no estudo de organismos vivos a integral anterior é, na verdade, calculada em um intervalo finito, pois, em geral

$$\lambda(a,t) = 0 \quad \text{se } a > c_2^* \quad \text{e} \quad 0 < a < c_1^*$$

para certas idades críticas  $c_1^*$  e  $c_2^*$  ".

Calculando  $U(a,t)$  poderemos prognosticar a dinâmica da população, i.e: dado um instante qualquer  $t'$  poderemos predizer quantos indivíduos existirão na população com esta idade.

### 2.2.2 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MCKENDRICK

Temos o seguinte problema:

Achar  $U(a,t)$  tal que

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial U(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial U(a,t)}{\partial t} = -\mu(a,t) \cdot U(a,t) \\ U(0,t) = \int_0^{\infty} \lambda(a,t) \cdot U(a,t) da \\ U(a,0) = U_0(a) \end{array} \right.$$

onde  $\lambda(a,t)$ ,  $\mu(a,t)$ ,  $U_0(a)$  são conhecidos.

Consideremos os seguintes casos:

A ) Versão independente da idade

A versão independente da idade ocorre quando  $\lambda$  e  $\mu$  são independentes de  $a$ .

O tamanho da população num instante  $t$  é dado por:

$$U(t) = \int_0^L U(a,t) da$$

Neste caso a função  $U$  satisfaz:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{d U(t)}{d t} = [ \lambda(t) - \mu(t) ] \cdot U(t) \\ U(0) = \int_0^{\infty} U(a,0) da = \int_0^{\infty} U_0(a) da \end{array} \right.$$

A solução deste problema é

$$U(t) = U(0) \cdot \exp \left[ \int_0^t ( \lambda(t') - \mu(t') ) dt' \right]$$

Assim, a população irá crescer ou decrescer dependendo do sinal de  $\lambda(t) - \mu(t)$ , i.e: dependendo de quem seja maior a natalidade ou a mortalidade.

Ainda, quando  $\lambda - \mu$  for constante teremos o modelo malthusiano. A diferença  $\lambda - \mu$  é frequentemente chamada

potencial biótico, taxa de crescimento natural intrínseco ou parâmetro malthusiano da população .

B ) Versão dependente da idade

A versão dependente da idade ocorre quando  $\lambda$  e  $\mu$  são dependentes de  $a$ .

Voltemos, então, ao problema [2.15], vamos determinar  $U(a,t)$  para  $a, t \geq 0$  tal que

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial U(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial U(a,t)}{\partial t} = - \mu(a,t) \cdot U(a,t) \\ U(0,t) = \int_0^{\infty} \lambda(a,t) \cdot U(a,t) da \\ U(a,0) = U_0(a) \end{array} \right.$$

A solução deste problema pode ser achada diretamente através do " MÉTODO DE COORDENADAS CARACTERÍSTICAS ". [14]

As equações características da Equação de Mckendrick são dadas por:

$$\frac{da}{ds} = 1 \quad \frac{dt}{ds} = 1 \quad \frac{dU}{ds} = - \mu \cdot U$$

Temos então que

$$\frac{da}{dt} = 1 \quad \text{ou seja,} \quad a = t + c$$

onde

$$c = \begin{cases} a_0 = a - t & \text{se } a > t \\ -t_0 = -(t - a) & \text{se } a < t \end{cases}$$

assim,

$$a = \begin{cases} t + a_0 & \text{se } a > t \\ t - t_0 & \text{se } a < t \end{cases}$$

Ainda, como

$$\frac{dU}{ds} = -\mu \cdot U$$

teremos:

1º caso )  $a > t$  ,  $a = t + a_0$

Fazendo  $t = s$   
 $a = s + a_0$  ,  $a_0 = a - t$



$$\ln U ( s + a_0, s ) \Big|_0^t = - \int_0^t \mu ( s + a_0, s ) ds$$

teremos, assim,

$$U(a,t) = U_0(a-t) \cdot \exp \left[ - \int_0^t \mu ( s + a - t, s ) ds \right]$$

2º caso )  $a < t$  ,  $a = t - t_0$

Fazendo  $a = s$

$$t = s + t_0 \quad , \quad t_0 = t - a$$

$$\ln U ( s, s + t_0 ) \Big|_0^a = - \int_0^a \mu ( s, s + t_0 ) ds$$

decorre que

$$U(a,t) = B(t-a) \cdot \exp \left[ - \int_0^a \mu ( s, s + t - a ) ds \right].$$

Assim a solução do problema é dada por :

$$U(a,t) = \begin{cases} U_0(a-t) \cdot \exp \left[ - \int_0^t \mu(a-t+\sigma, \sigma) d\sigma \right] & \text{se } a \geq t \\ B(t-a) \cdot \exp \left[ - \int_0^a \mu(\sigma, t-a+\sigma) d\sigma \right] & \text{se } t > a \end{cases} \quad [2.16]$$

onde  $B(t) = U(0,t)$  [6,11,14]

### 2.3 EQUIVALÊNCIA ENTRE AS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE SHARPE - LOTKA E DE MCKENDRICK

Por uma distribuição de idade entendemos:

Uma função

$$U : [0,L) \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

que satisfaz a EQUAÇÃO DE MCKENDRICK e a equação de renovação :

$$B(t) = \int_0^L \lambda(a) \cdot U(a,t) da .$$

Dizemos que  $U$  é consistente com a condição inicial

$U_0$  se

$$U(a,0) = U_0(a).$$

O próximo teorema afirma que se  $U$  é solução da formulação de MCKENDRICK então  $U$  será solução da formulação de SHARPE-LOTKA e vice-versa.

TEOREMA

[11]

Uma distribuição de idade consistente com a condição inicial  $U_0$ ,  $U$ , satisfaz [2.6], [2.7] e tem uma taxa de fertilidade  $B$  que satisfaz a equação de SHARPE-LOTKA. Reciprocamente, toda solução  $B$  da equação de SHARPE-LOTKA gera, no sentido de [2.6] e [2.7], uma distribuição de idade consistente com  $U_0$ .

Prova:

Seja  $U$  uma distribuição de idade consistente com o dado inicial  $U_0$ , então:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial U(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial U(a,t)}{\partial t} = -\mu(a,t) \cdot U(a,t) \\ U(0,t) = \int_0^{\infty} \lambda(a,t) \cdot U(a,t) da \\ U(a,0) = U_0(a) \end{array} \right.$$

onde  $\lambda(a,t)$ ,  $\mu(a,t)$ ,  $U_0(a)$  são conhecidos e  $a, t \geq 0$

A solução deste problema é dada por

$$U(a,t) = \begin{cases} U_0(a-t) \cdot \exp \left[ - \int_0^t \mu(a-t+\sigma, \sigma) d\sigma \right] & \text{se } a \geq t \\ B(t-a) \cdot \exp \left[ - \int_0^a \mu(\sigma, t-a+\sigma) d\sigma \right] & \text{se } t > a \end{cases}$$

onde  $B(t) = U(0,t)$

Se considerarmos

$$\lambda = \lambda(a)$$

$$\mu = \mu(a)$$

teremos

$$U(a,t) = \begin{cases} U_0(a-t) \cdot \exp \left[ - \int_0^t \mu(a-t+\sigma) d\sigma \right] & \text{se } a \geq t \\ B(t-a) \cdot \exp \left[ - \int_0^a \mu(\sigma) d\sigma \right] & \text{se } t > a \end{cases}$$

onde  $B(t) = U(0,t) = \int_0^L \lambda(a) \cdot U(a,t) da$

Como,

$$\Pi(a) = \exp \left[ - \int_0^a \mu(\lambda) d\lambda \right]$$

e

$$\Pi(a,\tau) = \exp \left[ - \int_a^\tau \mu(\lambda) d\lambda \right]$$

teremos,

$$U(a,t) = \begin{cases} U_0(a-t) \cdot \Pi(a-t,a) & \text{se } a \geq t \\ B(t-a) \cdot \Pi(a) & \text{se } t > a \end{cases}$$

Resta mostrar que a taxa de fertilidade  $B$  satisfaz

a equação de Sharpe-Lotka.

Temos,

$$B(t) = \int_0^L \lambda(a) \cdot U(a,t) da =$$

$$\int_0^t \lambda(a) \cdot B(t-a) \cdot \Pi(a) da + \int_t^L \lambda(a) \cdot \Pi(a-t,a) \cdot U_0(a-t) da$$

fazendo

$$\phi(t) = \int_t^L \lambda(a) \cdot \Pi(a-t,a) \cdot U_0(a-t) da$$

$$k(a) = \lambda(a) \cdot \Pi(a)$$

teremos,

$$B(t) = \int_0^t k(a) \cdot B(t-a) da + \phi(t)$$

Reciprocamente, seja a equação de Sharpe-Lotka

$$B(t) = \int_0^t k(a) \cdot B(t-a) da + \phi(t)$$

onde

$$k(a) = \lambda(a) \cdot \Pi(a)$$

$$\phi(t) = \int_t^L \lambda(a) \cdot \Pi(a-t, a) \cdot U_0(a-t) da$$

cuja solução é dada por:

$$U(a, t) = \begin{cases} \Pi(a-t, a) \cdot U_0(a-t) & \text{para } t < a \\ \Pi(a) \cdot B(t-a) & \text{para } 0 \leq t \leq a \end{cases}$$

Utilizando o fato de que

$$\Pi(a, \tau) = \exp \left[ - \int_a^\tau \mu(\lambda) d\lambda \right]$$

$$\Pi(a) = \exp \left[ - \int_0^a \mu(\lambda) d\lambda \right]$$

chegaremos à

$$U(a,t) = \begin{cases} U_0(a-t) \cdot \exp \left[ - \int_0^t \mu(a-t+\sigma) d\sigma \right] \\ B(t-a) \cdot \exp \left[ - \int_0^a \mu(\sigma) d\sigma \right] \end{cases}$$

a qual é uma distribuição de idade consistente com  $U_0$ .

#### 2.4 DISTRIBUIÇÃO ESTÁVEL DE IDADE

Por uma distribuição estável de idade entendemos uma distribuição de idade suave, estritamente-positiva da forma

$$U(a,t) = A(a) \cdot T(t) \quad [2.17]$$

Distribuição estável de idade é importante quando estudamos o comportamento assintótico da população.

De fato, se  $U$  é uma distribuição estável de idade teremos,



$$\begin{aligned}
 & \frac{\int_{a_1}^{a_2} U(a,t) da}{\int_0^L U(a,t) da} = \frac{\int_{a_1}^{a_2} A(a).T(t) da}{\int_0^L A(a).T(t) da} = \\
 & = \frac{\int_{a_1}^{a_2} A(a) da}{\int_0^L A(a) da}
 \end{aligned}$$

Assim, quando  $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\int_{a_1}^{a_2} U(a,t) da}{\int_0^L U(a,t) da} \longrightarrow \frac{\int_{a_1}^{a_2} A(a) da}{\int_0^L A(a) da}$$

que independe de  $t$ .

Nosso primeiro resultado mostra que construir uma distribuição estável de idade é equivalente a resolver a equação característica de Lotka,

$$\int_0^L k(a) \cdot e^{-p \cdot a} \cdot da = 1$$

onde  $k(a) = \lambda(a) \cdot \Pi(a)$

Como sabemos, a equação [2.9] tem uma única solução real  $p^*$ , echamamos esta solução de taxa de crescimento natural.

PROPOSIÇÃO 2: [11]

Seja  $p^*$  a taxa de crescimento natural. Então, dado qualquer  $A_0 > 0$ ,

$$U(a,t) = A_0 \cdot \Pi(a) \cdot e^{-p^* \cdot a} \cdot e^{p^* \cdot t} \quad [2.18]$$

é uma distribuição de idade estável.

Reciprocamente, toda distribuição de idade estável tem a forma [2.18] onde  $p$  é a taxa natural de crescimento e  $A_0 > 0$ .

Prova:

Basta mostrar que

- i )  $U$  satisfaz a Equação de Mckendrick
- ii )  $U$  satisfaz a Equação de renovação

já que,

$$U(a,t) = A(a) \cdot T(t) \quad \text{onde} \quad A(a) = A_0 \cdot e^{-p^* \cdot a} \cdot \Pi(a)$$

$$T(t) = e^{p^* \cdot t}$$

Mostremos que  $U(a,t)$  satisfaz a equação de Mckendrick.

Temos,

$$\frac{\partial U(a,t)}{\partial a} = A_0 \cdot e^{p^* \cdot t} \cdot \frac{d}{da} \left[ \Pi(a) \cdot e^{-p^* \cdot a} \right] =$$

$$A_0 \cdot e^{p^* \cdot t} \cdot \Pi'(a) \cdot e^{-p^* \cdot a} - p^* \cdot U(a,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{U(a,t)}{\partial t} = p^* \cdot U(a,t)$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial a} \frac{U(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial U(a,t)}{\partial t} = -\mu(a) \cdot U(a,t)$$

já que,

$$\mu(a) = \frac{-\Pi'(a)}{\Pi(a)}$$

Mostremos, agora que,  $U$  satisfaz a equação de Renovação.

$$\begin{aligned} \int_0^L \lambda(a) \cdot U(a,t) \, da &= \int_0^L A_0 \cdot \Pi(a) \cdot e^{-p^* \cdot a} \cdot e^{p^* \cdot t} \, da \\ &= A_0 \cdot e^{p^* \cdot t} \int_0^L \Pi(a) \cdot e^{-p^* \cdot a} \, da = B(t) \end{aligned}$$

já que

$$\int_0^L \Pi(a) \cdot e^{-p^* \cdot a} \, da < \infty$$

Reciprocamente, suponhamos que  $\lambda$  e  $\mu$  são independentes de  $t$ .

Assim, ficaremos com o seguinte problema:

Achar  $U(a,t)$  tal que

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial U(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial U(a,t)}{\partial t} = -\mu(a).U(a,t) \\ U(0,t) = \int_0^{\infty} \lambda(a).U(a,t) da \\ U(a,0) = U_0(a) \end{array} \right.$$

onde  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $U_0(a)$  são conhecidos.

Vamos agora supor que podemos expressar a função  $U(a,t)$  na forma [2.17].

Queremos obter condições sobre o parâmetro  $p$ , onde  $p$  é a constante de separação..

Substituindo  $U(a,t) = A(a).T(t)$  na equação teremos:

$$\frac{T.dA}{da} + \frac{A.dT}{dt} = -\mu(a).A.T$$

Logo,

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{dT}{dt} = - \left[ \frac{1}{A} \cdot \frac{dA}{da} + \mu(a) \right] = p$$

Obtemos, assim, duas equações diferenciais ordinárias

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{d T}{dt} = p$$

$$\frac{-1}{A} \cdot \frac{d A}{da} + \mu(a) = p$$

cujas soluções são dadas respectivamente por:

$$T(t) = e^{p \cdot t}$$

$$A(a) = A(0) \cdot \exp \left[ - \int_0^a (\mu(a') + p) da' \right]$$

Logo,

$$U(a, t) = A(0) \cdot \exp \left[ p(t-a) - \int_0^a \mu(a') da' \right]$$

onde  $p$  é um parâmetro.

A condição  $a = 0$  implica que:

$$\int_0^L \lambda(a) \cdot \exp \left[ - p \cdot a - \int_0^a \mu(a') da' \right] = 1$$

ou seja,

$$\int_0^L k(a) \cdot e^{-p \cdot a} = 1$$

## C A P Í T U L O    I I I

### ALGUMAS APLICACÕES DE POPULAÇÕES COM ESTRUTURA DE IDADE

#### EXEMPLO I: CRESCIMENTO CELULAR

[21]

Uma população de micróbios crescendo em uma cultura num meio constante atingirá, depois de um período transitório, um estado fixo de crescimento exponencial.

Nesse estado, a dependência sobre o tempo  $t$ , da população total  $N(t)$  será expressa como solução da equação diferencial.

$$\frac{d N(t)}{d t} = \alpha \cdot N(t) \quad , \quad t > 0 \quad [3.1]$$

onde  $\alpha > 0$  é conhecido como taxa de crescimento específico.



De acordo com a equação [3.1], a população passa por um crescimento maltusiano, i.e:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\alpha \cdot t}$$

onde  $N_0$  é a população inicial no tempo zero. ( Ainda, um meio constante exige que efeitos de grupo sejam desprezíveis).

Quando as células estão crescendo no meio de "batch culture technique", o ambiente é de extensão finita e fixa e não pode ser considerado constante para um período de tempo prolongado. Assim, nutrientes tais como oxigênio são esgotados, o pH do meio muda e efeitos de grupo tornam-se fixos, por exemplo, como o resultado de toxinas liberadas pelo crescimento das células. Tais efeitos podem ser considerados assumindo que  $N(t)$  satisfaz a equação

$$\frac{d N(t)}{d t} = k \cdot N \cdot \left( 1 - \frac{N(t)}{\bar{N}(t)} \right) \quad [3.2]$$

(EQUACAO DE VERHULST)

sua solução é, então, da por:

$$N(t) = \frac{N_0 \cdot \bar{N}(t)}{N_0 + (\bar{N}(t) - N_0) \cdot e^{-k \cdot t}}$$

Quando  $t \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \bar{N}$

( onde  $\bar{N}$  = valor de equilíbrio estável)

Atualmente é possível observar experimentalmente de uma maneira quantitativa outras características da população celular através de seu número . Por exemplo, volume, massa, quantidade de DNA, a duração de várias fases do ciclo celular, o número de células na mitose, o número de células na fase da síntese do DNA do ciclo celular e assim por diante. Para obter vantagens das observações que descrevemos teorias dependentes da idade foram introduzidas.

A concepção fundamental da teoria está na função densidade de idade  $\eta(a,t)$ , onde  $a$  representa a idade da célula,  $t$  o tempo decorrido desde o seu nascimento.

Assim, a população total no tempo  $t$  é expressa por:

$$N(t) = \int_0^{\infty} \eta(a,t) da$$

A função densidade de idade (ou distribuição de idade) foi primeiramente proposta por SCHERBAUM e RASCH (1957) e satisfazia a equação parcial

$$\frac{\partial \eta(a,t)}{\partial t} + \frac{\partial \eta(a,t)}{\partial a} = 0, \quad a, t > 0 \quad [3.3]$$

Subsequentemente, a possibilidade de "perda" da célula foi considerada por VON FOERSTER, que modificou a equação [3.3] para [3.4]

$$\frac{\partial \eta(a,t)}{\partial t} + \frac{\partial \eta(a,t)}{\partial a} = -\lambda \cdot \eta(a,t), \quad a, t > 0 \quad [3.4]$$

onde  $\lambda$  é a probabilidade por unidade de tempo da célula "desaparecer" da população. O "desaparecimento" da célula se deve a duas causas principais, mitose celular e a morte da célula. Portanto é conveniente expressar as duas contribuições como

$$\lambda = \lambda_d + \lambda_m$$

Em geral,  $\lambda_m$  depende da idade e  $\lambda_d$  pode depender de ambos, idade e tempo. Em geral,  $\lambda_d$  depende somente da idade.

A solução única da equação [3.4] exige a especificação de uma condição inicial e uma condição de fronteira. A condição inicial é dada por

$$\eta(a,0) = \varphi(a), \quad a > 0$$

onde  $\varphi(a)$  é a distribuição de idade inicial da população.

A condição de fronteira, que exprime como as células nascem, é dada por

$$\eta(0,t) = 2 \int_0^{\infty} \lambda_m(\tau) \cdot \eta(\tau,t) d\tau, \quad t > 0 \quad [3.5]$$

O fator 2 está presente na equação acima porque a divisão de uma célula de idade  $\tau$  na população dá origem a duas células de idade zero.

Esta equação pode ser resolvida da mesma maneira que resolvemos a EQUACAO DE MCKENDRICK.

EXEMPLO II: DOENÇAS HORIZONTALMENTE E  
VERTICALMENTE TRANSMISSÍVEIS [8]

Basicamente existem dois modos de transmissão de doenças infecciosas em uma população: A transmissão vertical e a transmissão horizontal.

A transmissão vertical é definida como uma transferência direta de pais para filhos. Algumas infecções podem ser transmitidas da mãe para o filho através da placenta, por exemplo, o vírus da Rubella é transmitido dessa maneira. A infecção causada pelo vírus da Herpes Simples 2 que é transmitido quando a criança passa através do canal de nascimento.

A transmissão horizontal é qualquer outro tipo de transferência excluída a verticalmente transmitida. Assim, por exemplo, a AIDS é transmitida verticalmente e horizontalmente enquanto a malária é apenas transmitida horizontalmente.

Neste exemplo será apresentado, um sistema de equações integro-diferencial não linear que representa o modelo de uma epidemia dependente da idade horizontalmente e verticalmente transmitida.

Este modelo trata o tipo simples de



## FORMULAÇÃO DO MODELO

Consideremos uma população com estrutura de idade de tamanho variável exposta a uma doença que é horizontalmente e verticalmente transmitida com as seguintes hipóteses sobre o modelo:

(i) Seja  $s(a,t)$  e  $i(a,t)$  a densidade por idade de susceptíveis e infectados respectivamente com idade  $a$  no tempo  $t$ .

Assim,

$$s(t) = \int_{a_1}^{a_2} s(a,t) da = \quad [3.5]$$

número de susceptíveis no tempo  $t$  e idade entre  $a_1$  e  $a_2$ .

$$i(a,t) = \int_{a_1}^{a_2} i(a,t) da = \quad [3.6]$$

número de infectados no tempo  $t$  e idade entre  $a_1$  e  $a_2$ .

OBS: Vamos assumir que a população total consiste somente de susceptíveis e infectados.

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \int_0^{\infty} s(a,t) \, da + \int_0^{\infty} i(a,t) \, da = \\
 &\int_0^{\infty} \left[ s(a,t) + i(a,t) \right] \, da \quad [3.7]
 \end{aligned}$$

(ii) Assumamos que a taxa de transmissão horizontal ocorre de acordo com a seguinte lei de "ação em massa":

$$K \cdot s(a,t) \cdot \int_0^{\infty} i(a,t) \, da = K \cdot s(a,t) \cdot I(t)$$

onde

$$I(t) = \int_0^{\infty} i(a,t) \, da \quad [3.8]$$

e  $K$  é uma constante que combina fatores epidemiológicos e sociais que desempenham um papel importante na transmissão da doença.

A expressão  $K \cdot \int_0^{\infty} i(a,t) \, da$  é frequentemente chamada a "força da infecção".

(iii) A taxa de mortalidade  $\mu(a)$  é a mesma para susceptíveis e infectados e suponhamos que  $\mu(a)$  é não-negativa, limitada e eventualmente não-decrescente.

(iv) A taxa de fecundidade  $\lambda(a)$  é não-negativa, limitada, tem suporte compacto  $[0, S]$  e tem variação total finita sobre  $(0, \infty)$ .

(v) Assumamos que os nascimentos sejam modelados por:

$$s(0, t) = \int_0^{\infty} \lambda(a) \cdot \left[ s(a, t) + (1-q) \cdot i(a, t) \right] da, \quad t \geq 0 \quad [3.9]$$

$$i(0, t) = q \cdot \int_0^{\infty} \lambda(a) \cdot i(a, t) da, \quad q \in [0, 1], \quad t \geq 0 \quad [3.10]$$

isto é, o número de descendentes susceptíveis é a soma dos descendentes de pais susceptíveis com uma fração de descendentes de pais infectados enquanto o número de descendentes infectados é uma fração de descendentes de pais infectados.

A hipótese acima incorpora a transmissão vertical visto que afirma que uma fração  $(1-q)$  de descendentes de pais infectados são susceptíveis e uma fração  $q$  são infectados. Assumimos, também, que a taxa de fertilidade para os pais de mesma idade é a mesma.



(vi) Assumimos que a distribuição de idade inicial seja dada por:

$$\begin{aligned} s(a,0) &= s_0(a) \\ i(a,0) &= i_0(a) \end{aligned} \quad a \in (0,\infty)$$

Feitas as hipóteses, vamos passar à análise da taxa de variação das quantidades  $s(t)$  e  $i(t)$ .

Podemos considerar a mesma análise feita no capítulo II onde estudamos a variação da quantidade  $U(a,t)$  e assim teremos o seguinte modelo:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial s(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial s(a,t)}{\partial t} = -\mu(a) \cdot s(a,t) \\ \frac{\partial i(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial i(a,t)}{\partial t} = -\mu(a) \cdot i(a,t) \\ s(0,t) = \int_0^{\infty} \lambda(a) \cdot \left[ s(a,t) + (1-q) \cdot i(a,t) \right] da \\ i(0,t) = q \cdot \int_0^{\infty} \lambda(a) \cdot i(a,t) da \end{array} \right. \quad [3.11]$$

onde  $s(a,t), i(a,t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , para  $a, t > 0$

Nesse caso, entretanto, não podemos nos esquecer que a variação das quantidades  $s(t)$  e  $i(t)$  se deve, também, a um outro fator, isto é, existe uma quantidade de indivíduos susceptíveis que se tornam infectados devido à influência do meio ambiente numa quantidade

$$K \cdot s(a,t) \int_0^{\infty} i(a,t) da$$

Assim, o modelo descrito em [3.11] se transformará em:

$$\frac{\partial s(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial s(a,t)}{\partial t} + \mu(a) \cdot s(a,t) = -K \cdot s(a,t) \cdot \int_0^{\infty} i(a,t) da$$

$$\frac{\partial i(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial i(a,t)}{\partial t} + \mu(a) \cdot i(a,t) = K \cdot s(a,t) \cdot \int_0^{\infty} i(a,t) da$$

[3.12]

$$s(0,t) = \int_0^{\infty} \lambda(a) \cdot \left[ s(a,t) + (1-q) \cdot i(a,t) \right] da$$

$$i(0,t) = q \cdot \int_0^{\infty} \lambda(a) \cdot i(a,t) da$$

onde  $s(a,t), i(a,t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , para  $a, t > 0$

## FORMULAÇÃO REDUZIDA DO MODELO

Nesta seção, vamos transformar o modelo apresentando em [3.12] para melhor analisá-lo. Consideremos a função  $W$ , definida por

$$W(a,t) = \frac{i(a,t)}{I(t)} \quad \text{onde} \quad I(t) = \int_0^{\infty} i(a,t) \, da$$

A função  $W$  é chamada "age-profile".

Primeiramente, notemos que considerando

$$p(a,t) = s(a,t) + i(a,t)$$

então  $p(a,t)$  satisfaz a seguinte equação

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial p(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial p(a,t)}{\partial t} + \mu(a) \cdot p(a,t) = 0 \\ p(0,t) = \int_0^{\infty} \lambda(a) \cdot p(a,t) \, da, \quad t \geq 0 \\ p(a,0) = p_0(a) \\ p(a,t) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad a \longrightarrow \infty \quad \text{para} \quad t \geq 0 \end{array} \right.$$

Seja

$$P(t) = \int_0^{\infty} p(a,t) da = \text{total da população no tempo } t$$

então o problema [3.12] , vamos reduzi-lo ao seguinte modelo:

$$\left[ \begin{aligned}
 & \frac{\partial W(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial W(a,t)}{\partial t} + \mu(a) \cdot W(a,t) = \\
 & K \cdot p(a,t) + \left\{ -K \cdot P(t) + \int_0^{\infty} \left[ \mu(a) - q \cdot \lambda(a) \right] \cdot W(a,t) da \right\} \cdot W(a,t) \\
 & W(0,t) = B(t) = q \int_0^{\infty} \lambda(a) \cdot W(a,t) da, \quad t \geq 0 \\
 & \int_0^{\infty} W(a,t) da = 1, \quad a > 0, \quad t \geq 0 \\
 & W(a,0) = W_0(a) \\
 & W(a,t) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad a \rightarrow \infty
 \end{aligned} \right.$$

e  $I(t)$  satisfaz

$$\left[ \begin{aligned}
 & \frac{d I(t)}{d t} + I(t) \cdot \int_0^{\infty} \left[ \mu(a) - q \cdot \lambda(a) \right] \cdot W(a,t) da = \\
 & \qquad \qquad \qquad K \cdot \left[ P(t) - I(t) \right] \cdot I(t) \\
 & I(0) = I_0
 \end{aligned} \right.$$

Como  $p = s + i \Rightarrow$

$$\frac{s}{I} = \frac{p}{I} - W \quad [\text{F.1}]$$

Ainda,

$$i_a + i_t = -\mu.i + K.s.I(t) \Rightarrow \frac{i_a + i_t}{I} = -\mu.W + K.s \quad [\text{F.2}]$$

Temos que

$$W = \frac{i}{I}$$

e, utilizando [F.2], chegaremos a

$$W_a + W_t + \mu.W = K.s - \frac{I'}{I} \cdot W = \frac{K.s.I}{I} + \frac{I'}{I} \cdot W$$

assim utilizando [F.2]

$$W_a + W_t + \mu.W = K.p - K.W.I - W \cdot \frac{I'}{I}$$

Como  $I = P + S$  chegaremos a

$$\frac{\partial W(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial W(a,t)}{\partial t} + \mu(a).W(a,t) =$$

$$K.p(a,t) + \left\{ -K.P(t) + K.s(a,t) - \frac{I'(t)}{I(t)} \right\} \cdot W(a,t)$$

Devemos mostrar que:

$$K.s(a,t) - \frac{I'(t)}{I(t)} = \int_0^{\infty} \left[ \mu(a) - q.\beta(a) \right] \cdot W(a,t) da$$

Temos que

$$\int_0^{\infty} \left[ \mu(a) - q.\beta(a) \right] \cdot W(a,t) da =$$

$$\int_0^{\infty} \left[ \mu(a) \cdot W(a,t) \, da - \int_0^{\infty} q \cdot \beta(a) \cdot W(a,t) \, da \right] .$$

Como

$$W(a,t) = \frac{i(a,t)}{I(t)} \quad e$$

e

$$i(0,t) = \int_0^{\infty} q \cdot \beta(a) \cdot i(a,t) \, da ,$$

então,

$$\int_0^{\infty} \left[ \mu(a) - q \cdot \beta(a) \right] \cdot W(a,t) \, da =$$

[F.3]

$$\frac{1}{I(t)} \cdot \left[ \int_0^{\infty} \mu(a) \cdot i(a,t) \, da - i(0,t) \right]$$

Temos ainda que,



$$\mu(a) \cdot i(a,t) = K \cdot s(a,t) \cdot I(t) - \frac{\partial i(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial i(a,t)}{\partial t}$$

Logo,

$$\int_0^{\infty} \mu(a) \cdot i(a,t) da = K \cdot I(t) \cdot s(a,t) + i(0,t) - I'(t) \quad [F.4]$$

Substituindo [F.4] em [F.3] teremos

$$\int_0^{\infty} \left[ \mu(a) - q \cdot \beta(a) \right] \cdot W(a,t) da = K \cdot s(a,t) - \frac{I'(t)}{I(t)}$$

Ainda,

$$W(0,t) = q \cdot \int_0^{\infty} \beta(a) \cdot W(a,t) da$$

$$\text{já que } W(0,t) = \frac{i(0,t)}{I(t)}$$

Ainda,

$$\int_0^{\infty} W(a,t) da = 1$$

$$W(a,0) = \frac{i(a,0)}{I(t)} = W_0(a)$$

$$W(a,t) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad a \longrightarrow \infty$$

ainda,  $I(t)$  satisfaz

$$K \cdot \left[ P(t) - I(t) \right] \cdot I(t) =$$

$$\frac{d I(t)}{d t} + I(t) \cdot \int_0^{\infty} \left[ \mu(a) - \varrho \cdot \beta(a) \right] \cdot W(a,t) da$$

$$\text{onde} \quad I(0) = I_0$$

e, portanto, o problema [3.12] pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\left[ \begin{aligned}
 & \frac{\partial W(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial W(a,t)}{\partial t} + \mu(a) \cdot W(a,t) = \\
 & K \cdot p(a,t) + \left\{ -K \cdot P(t) + \int_0^{\infty} \left[ \mu(a) - q \cdot \lambda(a) \right] \cdot W(a,t) da \right\} \cdot W(a,t) \\
 & W(0,t) = B(t) = q \int_0^{\infty} \lambda(a) \cdot W(a,t) da, \quad t \geq 0 \\
 & \int_0^{\infty} W(a,t) da = 1, \quad a > 0, \quad t \geq 0 \\
 & W(a,0) = W_0(a) \\
 & W(a,t) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad a \rightarrow \infty
 \end{aligned} \right.$$

e  $I(t)$  satisfaz

$$\left[ \begin{aligned}
 & \frac{d I(t)}{d t} + I(t) \cdot \int_0^{\infty} \left[ \mu(a) - q \cdot \lambda(a) \right] \cdot W(a,t) da = \\
 & \qquad \qquad \qquad K \cdot \left[ P(t) - I(t) \right] \cdot I(t) \\
 & I(0) = I_0
 \end{aligned} \right.$$

#### MÉTODO DE RESOLUÇÃO

Com esta formulação do modelo podemos primeiramente encontrar  $p(a,t)$  usando a teoria linear clássica da Equação de mckendrick então resolver [3.14] para obter  $W(a,t)$ . Uma vez feito isso, a equação [3.15] pode ser analisada para obter o comportamento de  $I(t)$  e portanto de  $i(a,t)$ , já que,

$$i(a,t) = W(a,t) \cdot I(t)$$

e assim podemos, também, obter o comportamento de  $s(a,t)$  onde

$$s(a,t) = p(a,t) - i(a,t) .$$

EXEMPLO III: PREDACÃO COM ESTRUTURA DE IDADE [18]

Como vimos em capítulos anteriores, a densidade  $U(a,t)$  de indivíduos de idade  $a$  no tempo  $t$  é descrita por:

$$\frac{\partial U(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial U(a,t)}{\partial t} = -\mu \cdot U(a,t) \quad [3.16]$$

onde a população total é dada por:

$$P(t) = \int_0^{\infty} U(a,t) da \quad [3.17]$$

Os modelos apresentados neste capítulo, combinam as equações [3.16] e [3.17] com as equações de LOTKA-VOLTERRA ou de KOLMOGOROV.

O número de nascimentos de presas é dado por:

$$B(t) = \int_0^{\infty} \lambda(a) \cdot U(a,t) da \quad [3.18]$$

onde  $\lambda$  é a função fertilidade.

Nos exemplos, que vamos apresentar consideramos

$$\lambda(a) = \lambda_0 \cdot a \cdot \exp(-\alpha \cdot a) \quad [3.19]$$

(  $\lambda_0 \geq 0, \alpha \geq 0$  )

Verificou-se que:

(i) se  $\alpha > 0$ , [3.19] descreve o comportamento

de muitos mamíferos cuja fertilidade é maior em indivíduos jovens.

(ii) se  $\alpha = 0$ , [3.19] poderia representar a fertilidade de muitas espécies de peixes cuja fertilidade cresce com o tamanho ( portanto com a idade ).

Primeiramente, apresentamos o modelo de uma espécie, que devora suas próprias crias ( MODELO I ). Em seguida, apresentamos o caso de duas espécies distintas (presa-predador ) onde os predadores se alimentam de presas de todas as idades igualmente ( MODELO II ).

#### MODELO I : CANIBALISMO

Canibalismo de jovens tem sido observado em muitas espécies de peixes. Esse modelo foi planejado para testar a crença comum que canibalismo é um meio de controle populacional.

Assumamos, por simplicidade, que somente recém-nascidos são devorados. E representemos por  $U(0,t)$  o o número de recém-nascidos sobreviventes ao canibalismo por unidade de tempo.

Assim,

$$U(0,t) = B(t) \cdot g( B(t), P(t) )$$

onde  $g(B,P)$  é a fração de sobreviventes.

A transformação de recém-nascidos em alimento é modelada pela função mortalidade

$$\mu = f(B(t), P(t))$$

Mostremos que a modelagem desse problema é dada por

$$\left[ \begin{array}{l} \dot{P} = -P \cdot f(B, P) + B \cdot g(B, P) \\ \dot{B} = -B \cdot f(B, P) - \alpha \cdot B + \lambda_0 \cdot A \quad [3.20] \\ \dot{A} = -A \cdot f(B, P) - \alpha \cdot A + B \cdot g(B, P) \end{array} \right.$$

onde

$$A(t) = \int_0^{\infty} a \cdot \exp(-\alpha \cdot a) \cdot U(a, t) \, da$$

(i) Temos que  $\mu = f(B(t), P(t))$ , assim utilizando [3.16] chegaremos à

$$\frac{\partial U(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial U(a,t)}{\partial t} + f(B, P) \cdot U(a,t) = 0$$

ou seja,

$$\int_0^L \frac{\partial U(a,t)}{\partial a} da + \int_0^L \frac{\partial U(a,t)}{\partial t} da + f(B, P) \cdot \int_0^L U(a,t) da = 0$$

logo,

$$\frac{dP}{dt} - B \cdot g(B, P) + P \cdot f(B, P) = 0$$

(ii) Por outro lado, como

$$B(t) = \int_0^L \lambda(a) \cdot U(a,t) da$$

teremos

$$\frac{dB(t)}{dt} = \int_0^L \lambda(a) \cdot \frac{\partial U(a,t)}{\partial t} da =$$

$$- f(B, P) \cdot B - \alpha \cdot B + \lambda_0 \cdot A$$



onde

$$A(t) = \exp(-\alpha \cdot a) \cdot U(a,t)$$

(iii) Ainda,

$$\frac{dA}{dt} = \int_0^L \exp(-\alpha \cdot a) \cdot \frac{\partial U(a,t)}{\partial t} da =$$

$$-A \cdot f(B, P) + B \cdot g(B, P) - \alpha \cdot A$$

Considerando-se

$$A = \begin{bmatrix} -f(B, P) & g(B, P) & 0 \\ 0 & -f(B, P) - \alpha & \lambda_0 \\ 0 & g(B, P) & -f(B, P) - \alpha \end{bmatrix}$$

$$X(t) = (P(t), B(t), A(t))$$

$$\dot{X}(t) = (\dot{P}(t), \dot{B}(t), \dot{A}(t))$$

O sistema [3.20] poderá ser reescrito da seguinte maneira

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) \quad [3.21]$$

O ponto crítico do sistema de equações diferenciais [3.21] é o ponto  $E^* = (0, 0, 0)$ .

Através da análise do sistema de equações diferenciais [3.21] podemos afirmar que os autovalores associados à matriz  $A$  são dados por:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -f \\ \gamma_2 &= -f - \alpha - \left( g \cdot \lambda_0 \right)^{1/2} \\ \gamma_3 &= -f - \alpha + \left( g \cdot \lambda_0 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Ainda se

$$\left[ g \cdot \lambda_0 \right]^{1/2} < f + \alpha$$

então temos que  $E^*$  é estável para o sistema [3.21].

#### MODELO II : PREDACÃO COM IDADE INDISCRIMINADA

Para o caso de predação com idade indiscriminada, a função mortalidade depende linearmente da população de predadores  $P_2$ , assim

$$\mu = \mu_0 + r \cdot P_2$$

Desde que, as presas recém-nascidas não são mais vulneráveis que outras idades,

$$U(0,t) = B(t)$$

A população de predadores obedece a equação de LOTKA-VOLTERRA. Assim, de maneira análoga ao sistema [3.20] deduzimos o sistema:

$$\left[ \begin{array}{l} \dot{P}_1 = -\mu_0 \cdot P_1 - r \cdot P_1 \cdot P_2 + B \\ \dot{B} = -\gamma \cdot B - r \cdot B \cdot P_2 + \beta_0 \cdot A \\ \dot{A} = -\gamma \cdot A - r \cdot A \cdot P_2 + B \\ \dot{P} = -B \cdot P_2 + c \cdot P_1 \cdot P_2 \end{array} \right. \quad [3.21]$$

onde  $\mu_0, r, \gamma, \beta_0, b, c > 0$  e  $\gamma = \mu_0 + \alpha$

O resultado de [3.21] mostra que o sistema comporta-se como o sistema presa-predador com idade ignorada.

EXEMPLO IV: COMPETIÇÃO ENTRE DUAS ESPÉCIES [3,4]

A fim de simplificar o modelo vamos considerar duas espécies competindo pelo mesmo recurso onde apenas uma delas tem estrutura de idade. Esta não é somente uma simplificação matemática, existem populações que a satisfazem; por exemplo, consideremos populações de passáros e lagartos competindo por insetos, somente os lagartos tem uma estrutura de idade significativa.

Mostremos que a equação para população total  $P(t)$  da espécie com estrutura de idade é dada por

$$\frac{d P(t)}{dt} = -\mu \cdot P(t) + \int_0^L \lambda_a(a,t) \cdot P(t-a) e^{-\mu \cdot a} da \quad [3.22]$$

onde

$\mu$  é taxa de mortalidade ( que estamos supondo constante )

$\lambda$  é a taxa de fertilidade de  $P$  dada por

$$\lambda = b \cdot \beta(a) \cdot h( P, Q )$$

onde  $\lambda$  satisfaz as seguintes condições:

$$\beta(a) = 0$$

$$\beta(a) \geq 0$$

$$\int_0^L e^{-\mu \cdot a} \cdot \beta(a) da < \infty$$

De fato, vamos deduzir a equação [3.22] utilizando a teoria linear clássica de Mckendrick.

Como sabemos, nessa teoria a distribuição de indivíduos dada por  $U(a,t)$  satisfaz

$$P(t) = \int_0^L U(a,t) da \quad [3.23]$$

$$\frac{\partial U(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial U(a,t)}{\partial t} = -\mu \cdot U(a,t) \quad [3.24]$$

onde  $\mu$  é taxa de fertilidade que nesse caso consideramos constante.

$$U(0,t) = \int_0^L \lambda(a,t) \cdot U(a,t) da \quad [3.25]$$

onde  $\lambda$  é a taxa de fertilidade, nesse caso dada por:

$$\lambda(a,t) = b \cdot \beta(a) \cdot h(P, Q) \quad [3.26]$$

onde

a constante positiva  $b$  é chamada módulo de nascimento

a função  $\beta(a)$  é chamada função maturidade ( a função  $\beta$  descreve o efeito da idade na fertilidade) e

satisfaz:

(i)  $\beta$  é uma função limitada, continuamente diferenciável para  $a \geq 0$

(ii)  $\beta(a) \geq 0$

$\beta(0) = 0$  e  $\beta(a) = 0$  para  $a \geq L$

$$\int_0^L \beta(a) \cdot e^{-\mu \cdot a} \cdot da < \infty$$

a função  $h$  é contínua, diferenciável e satisfaz:

(i)  $h(0, 0) = 1$

(ii)  $h(P, Q) \geq 0$

(iii)  $h_p < 0$ ,  $h_q < 0$  para  $P, Q \geq 0$

Assumamos ainda que :

$$U(\infty, t) = 0 \text{ para todo } t$$

i.e., que a distribuição de indivíduos de idade  $a$  no tempo  $t$  tende a zero quando  $a \rightarrow \infty$ .

Integrando [3.24] vamos obter

$$U(a, t) = B(t-a) \cdot e^{-\mu \cdot a} \text{ para } t > L$$

onde  $B(t) = U(0, t)$ .

Substituindo em [3.25] vamos obter:

$$U(a, t) = \int_0^L \lambda(a, t) \cdot B(t-a) \cdot e^{-\mu \cdot a} da$$

Por outro lado, integrando [3.24] de  $a = 0$  até  $a = \infty$  e utilizando [3.23] vamos obter:

$$P'(t) + \mu \cdot P(t) = B(t)$$

ou seja,

$$P'(t) + \mu \cdot P(t) = \int_0^{\infty} \lambda(a,t) \cdot B(t-a) \cdot e^{-\mu \cdot a} da \quad [3.27]$$

integrando [3.24] por partes e substituindo em [3.27] chegaremos à

$$P'(t) + \mu \cdot P(t) = \int_0^{\infty} \lambda_a(a,t) \cdot P(t-a) \cdot e^{-\mu \cdot a} da$$

A dinâmica da espécie que não consideramos estrutura de idade é definida por

$$\frac{dQ}{dt} = r \cdot Q \cdot g(P, Q)$$

onde  $r > 0$  é uma constante e  $g \in C^2$  e satisfaz

$$g(0,0) = 1$$

$$g_p < 0 \text{ e } g_Q < 0 \text{ para todo } P, Q \geq 0$$

$$g(P,Q) < 0 \text{ para } P^2 + Q^2 \text{ suficientemente grande}$$

$$P, Q \geq 0$$

Assim, o modelo será descrito por

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{d P}{d t} = -\mu . P(t) + b . h( P, Q) . \int_0^L \beta'(a) . P(t-a) . e^{-\mu . a} . da \\ \frac{d Q}{d t} = r . Q . g( P, Q ) \end{array} \right.$$



## CAPÍTULO IV

### SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo fazemos uma simulação numérica do modelo estudado, ou seja, do modelo de dinâmica populacional com estrutura de idade baseado na equação de evolução

$$\frac{\partial U(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial U(a,t)}{\partial t} + \lambda(a) \cdot U(a,t) = 0 \quad [4.1]$$

para  $0 \leq a < L$  e  $t \geq 0$

Na equação de renovação

$$U(0,t) = \int_0^L \lambda(a) \cdot U(a,t) da, \quad t \geq 0 \quad [4.2]$$

e na condição inicial

$$U(a,0) = U_0(a) \quad \text{para} \quad 0 \leq a < L \quad [4.3]$$

onde

(i)  $L$  representa um limitante superior para a idade de um indivíduo, a qual nunca é atingida.

(ii) A função mortalidade  $\mu(a)$  é estritamente positiva em  $[0, L)$  e  $\mu(a) \rightarrow \infty$  quando  $a \rightarrow L$ . Além disso,

$$\int_0^L \mu(a) \cdot da = \infty$$

(iii) A função fertilidade  $\lambda(a)$  é não negativa em  $[0, L)$ .

A princípio, podemos pensar que o problema apresentando é de fácil implementação numérica, já que temos uma equação diferencial parcial de 1ª ordem.

Podemos resolvê-lo, por exemplo, através do método de discretização por diferenças finitas (atrasada, adiantada e central) e a partir daí construir uma simulação numérica.

A simulação numérica descrita acima conduz a bons resultados computacionais, desde que a condição de contorno seja uma função bem comportada. Ocorre que, no problema apresentado, a condição de contorno associada à E. D. P. é dada por uma equação integral, o que acarreta sérios problemas de estabilidade na solução.

Os problemas de estabilidade que surgiram mostrou a não trivialidade do problema, e portanto, a necessidade de critérios de estabilidade que conduzam a bons resultados computacionais

### A IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Apresentamos agora, a implementação numérica descrita por LOPEZ e TRIGIANTE [19], cujo objetivo é encontrar uma solução numérica para o modelo de dinâmica populacional.

Do ponto de vista computacional a principal dificuldade para estudar o modelo é que o problema torna-se stiff. De fato, a discretização com relação à variável idade conduz ao seguinte problema de valor inicial

$$\left[ \begin{array}{l} \dot{X}(t) = A \cdot X(t) + F(X(t)) \\ X(0) = X_0 \\ t > 0 \end{array} \right. \quad [4.4]$$

onde

A é uma matriz quadrada  $v \times v$  que possui autovalores reais estritamente negativos e como

$$\int_0^L \mu(a) da = \infty$$

existe um autovalor com valor muito grande com relação aos outros. Assim, LOPEZ e TRIGIANTE, propõe primeiramente um esquema explícito para a solução numérica de [4.1] - [4.3].

#### DESCRIÇÃO DO MÉTODO EXPLÍCITO

Consideremos a discretização da idade no intervalo  $[0, L)$  dada por

$$\left\{ a_i / a_i = i \cdot \Delta a, i = 0, \dots, v \right\}$$

onde

$$\Delta a = \frac{L}{v + 1}$$

onde  $v$  é um inteiro positivo.

Denotemos por  $X_i(t)$  a aproximação de  $U(a,t)$  em  $a = a_i$  no tempo  $t$ . Então se discretizamos [4.1] com relação à variável idade por meio de diferenças finitas atrasadas vamos obter

$$\dot{X}_i(t) = \frac{1}{\Delta a} \cdot \left[ - \left( 1 + \Delta a \cdot \mu(a_i) \right) \right] \cdot X_i(t) + X_{i-1}(t)$$

$i = 1, \dots, v$

Se aproximamos a lei de nascimento

$$\int_0^L \lambda(a) \cdot U(a,t) \, da$$

utilizando a fórmula de Simpson 1/3 supondo que  $\lambda(a_0)$  e  $\lambda(a_n)$  são identicamente nulos, vamos obter o seguinte resultado

$$X_0(t) = \sum_{i=1}^v c_i \cdot X_i(t)$$

onde

$$c_i = \alpha_i \cdot \lambda_i \quad , \quad i = 1, \dots, v$$

$$\lambda_i = \lambda(a_i) \quad , \quad i = 1, \dots, v$$

$$\alpha_i = \text{parâmetros da integração numérica por Simpson 1/3}$$

Ainda, se consideramos a condição inicial

$$X_i(0) = U_0(a_i) \quad , \quad i = 0, \dots, v$$

Chegaremos ao seguinte sistema linear

$$\left[ \begin{array}{l} \dot{X}(t) = A \cdot X(t) + F(X(t)) \\ X(0) = \left( X_1(0), X_2(0), \dots, X_v(0) \right) \\ t > 0 \end{array} \right. \quad [4.5]$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda_2 & & & \\ & 1 & -\lambda_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & \\ & & & & & -\lambda_v \end{bmatrix}$$

$$\text{com } \lambda_i = 1 + \Delta a \cdot \mu(a_i) \quad , \quad i = 1, \dots, v$$

$$X(t) = \left( X_1(t), \dots, X_v(t) \right)^t$$

$$F( X(t) ) = \frac{1}{\Delta a} \cdot \left( X_0(t), 0, \dots, 0 \right)^t$$

Observamos que os autovalores de  $A$  são estritamente negativos e devido ao comportamento da função mortalidade  $\mu$  teremos,

$$\gamma_v \gg \gamma$$

onde

$$\gamma = \min_{1 \leq i \leq v} \gamma_i \quad \text{e} \quad \gamma_i = \frac{\lambda_i}{\Delta a} \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, v$$

isto torna o sistema diferencial apresentado [4.5] um problema **stiff**.

Observamos, também que se escrevermos  $F( X(t) )$  na forma

$$F( X(t) ) = B \cdot X(t)$$

onde B é a matriz  $v \times v$  dada por

$$B = \frac{1}{\Delta a} \cdot \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_v \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

com  $c_i = \alpha_i \cdot \lambda_i$  para  $i = 1, \dots, v$ .

o problema [4.5] pode ser reescrito da seguinte maneira

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (A + B) \cdot X(t) \\ X(0) = \left( X_1(0), \dots, X_v(0) \right)^t, \quad t > 0 \end{cases} \quad [4.6]$$

Portanto, se denotamos por  $X^N$  a aproximação do vetor  $X \left( t_N \right)$  com  $t_N = N \cdot \Delta t$ , para  $N \geq 0$  e  $\Delta t$  o passo no tempo, aplicando o método de Euler explícito teremos:

$$X^{N+1} = \left[ I + \Delta t \cdot (A + B) \right] \cdot X^N \quad \text{para } N \geq 0 \quad [4.7]$$

Se a norma da matriz B é suficientemente pequena e para v fixado, o esquema numérico [4.7] é estável quando assumimos que



$$\frac{\Delta t}{\Delta a} \cdot \lambda_v < 2 \quad [4.8]$$

e portanto, desde que  $\gamma_v \gg \gamma$  para  $\Delta a$  fixo, devemos tomar  $\Delta t$  muito pequeno a fim de que a condição [4.8] seja satisfeita.

Alternativamente, podemos usar o Método de Euler implícito, o qual é dado por

$$\left[ I + \Delta t \cdot (A + B) \right] \cdot X^{N+1} = X^N \quad \text{para } n \geq 0$$

Nesse caso, teremos que resolver um sistema linear com uma matriz bidiagonal.

LOPEZ e TRIGIANTE, em seu trabalho propõe, também, um método híbrido para a resolução de [4.6] o qual pode ser resumido da seguinte maneira:

1º ) Particionamos o vetor  $X$  em dois subvetores  $Y_1$  e  $Y_2$  cujas dimensões são respectivamente  $k$  e  $v-k$  onde  $k$  é um inteiro tal que  $1 < k < v$ .

2º ) Particionamos as matrizes  $A$  e  $B$  da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ A_{21} & \vdots & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \vdots & B_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $A_{11}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ ,  $B_{11}$ ,  $B_{12}$  são matrizes  $k \times k$ ,  
 $(v \times k) \times k$ ,  $(v-k) \times (v-k)$ ,  $k \times k$ ,  $k \times (v-k)$   
respectivamente.

Assim, reescrevemos [4.6] da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dot{Y}_1(t) = A'_{11} \cdot Y_1(t) + B_{12} \cdot Y_2(t) \\ \dot{Y}_2(t) = A_{21} \cdot Y_1(t) + A_{22} \cdot Y_2(t) \end{cases} \quad [4.6]$$

onde  $A'_{11} = A_{11} + B_{11}$  e resolvemos [4.6] aplicando o  
esquema híbrido cuja solução será dada por

$$\begin{cases} Y_1^{N+1} = \left( I + \Delta t \right) \cdot A'_{11} \cdot Y_1^N + \Delta t \cdot B_{12} \cdot Y_2^N \\ \left( I + \Delta t \cdot A_{22} \right) \cdot Y_2^{N+1} = \Delta t \cdot A_{21} \cdot Y_1^{N+1} + Y_2^N \end{cases}$$

Notamos, entretanto, que estes métodos são  
instáveis, necessitam de várias hipóteses a fim de que o

resultado obtido seja razoável.

Assim, vimos que a simulação numérica do problema com estrutura de idade não é realmente um problema muito fácil vemos, portanto, a necessidade de muitos estudos sobre o assunto.

A seguir, apresentamos o programa correspondente a simulação numérica do problema, os resultados obtidos ( tabela 1.1 e tabela 1.2 ) e o gráfico da superfície obtida ( figura 4.1 ).

A solução  $X^j$  foi obtida através do método de Euler Explícito considerando-se:

A função natalidade

$$\lambda(a) = \begin{cases} \lambda_0 & \text{para } 0.1 \leq a \leq 0.9 \\ 0 & \text{para } 0.0 \leq a \leq 0.1 \text{ e } 0.9 \leq a \leq 1. \end{cases} \quad [D.1]$$

onde  $\lambda_0 = 2.3462$  .

A função mortalidade

$$\mu(a) = \frac{(e^c - 1) \cdot e^{c \cdot a}}{e^c - e^{c \cdot a}} \quad [D.2]$$

sobre  $[0, 1)$  com  $c = 7$ .

A condição inicial

$$U_0(a) = (1 - a) \cdot 0.3 + 0.3 \quad [D.3]$$

O passo na idade ( $\Delta a$ ) e no tempo ( $\Delta t$ ) dados respectivamente por: 0.1 e  $\Delta a / \lambda_v$ . [D.4]

Através dos resultados obtidos podemos concluir que, utilizando os dados [D.1] - [D.4] a população considerada é uma população estável.

Observamos, ainda que:

$$U(I, J) = U(a_i, t_j) = x^j$$

i.e: a distribuição de indivíduos de idade  $a_i$  no tempo  $t_j$ .



```

C      **                               CHAMADA DE SUBROUTINE                               **
C
CALL MALHA(A,C,D,N,H)
CALL FMORT(N,A,F,FM)
CALL AUTOVL(AVI,FM,H,N)
CALL TEMPO(H,AVI,K,N)
CALL CRTEST(W,AVI,K,H,N)
CALL FNAT(S,N)
CALL MATRIZ(K,H,R,G,S,AVI,B,E,N)
CALL SOLVE(X,A,N,M,G,U,B,E)

C
C      **                               IMPRESSÃO DOS RESULTADOS                               **
C
OPEN(UNIT=70,FILE='SOL.DAT',STATUS='NEW')
DO 180 J=1,M
WRITE(70,800)J
800  FORMAT(///,T10,'TEMPO = ',I3,/)
DO 190 I=1,N
WRITE(70,850)I,J,U(I,J)
850  FORMAT(/,T5,'U(',I3,1X,',',I3,1X,') = ',F14.7)
190  CONTINUE
180  CONTINUE
CLOSE(UNIT=70)

C
WRITE(*,900)
900  FORMAT(//,T10,'DESEJA EXECUTAR NOVAMENTE (S/N) ',)
READ(*,950) RESP
950  FORMAT(A1)
IF(RESP.EQ.'S') GOTO 90

C
STOP
END

```

```

SUBROUTINE MALHA(A,C,D,N,H)
C      **          PROCEDIMENTO    MALHA    1          **
REAL*8 A(*)
REAL*8 H
INTEGER C,D,N

C

H=(D-C)/FLOAT(N)
A(0)=C
DO 10 I=1,N
J=(I-1)
A(I)=A(J)+H
10    CONTINUE
C
RETURN
END

```

C\*\*\*\*\*

```

SUBROUTINE FMORT(N,A,F,FM)
C      **          CALCULO DA FUNCAO MORTALIDADE          **
REAL*8 FM(*),A(*),V,C1,F
INTEGER N

C

DO 30 I=1,N-1
V=A(I)
C1=F*V
FM(I)=((DEXP(F)-1.)*DEXP(C1))/(DEXP(F)-DEXP(C1))
30    CONTINUE
C
RETURN
END

```

C\*\*\*\*\*

C  
C

```
SUBROUTINE TEMPO(H, AVI, K, N)
```

```
C
```

```
REAL*8 AVI(*)
```

```
REAL*8 H, K
```

```
INTEGER N
```

```
C
```

```
C
```

```
K=H/AVI(N-1)
```

```
C
```

```
C
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
C*****
```

```
C
```

```
SUBROUTINE AUTOVL(AVI, FM, H, N)
```

```
C
```

```
**          CÁLCULO DOS AUTOVALORES          **
```

```
REAL*8 AVI(*), FM(*), H
```

```
INTEGER N
```

```
C
```

```
C
```

```
DO 40 I=1, N-1
```

```
AVI(I)=1+H*FM(I)
```

```
40
```

```
CONTINUE
```

```
C
```

```
C
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
C*****
```

```
C
```

```
SUBROUTINE CRTEST(W, AVI, K, H, N)
```

```
C
```

```
**          CRITÉRIO DE ESTABILIDADE          **
```

```
REAL*8 W(*), AVI(*)
```

```
REAL*8 K, H
```



INTEGER N

C

W(N-1) = (K/H)\*AVI(N-1)

IF(W(N-1).GT.2) GO TO 350

50

CONTINUE

C

RETURN

C

350 WRITE(\*,400)

400 FORMAT(/,T10,'NAO SATISFAZ A CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE')

STOP

END

C\*\*\*\*\*

C

SUBROUTINE FNAT(S,N)

C

\*\* CÁLCULO DA FUNÇÃO NATALIDADE \*\*

REAL\*8 S(\*)

INTEGER N

C

DO 60 I=1,N

S(I)=0

60

CONTINUE

DO 70 I=2,N-1

S(I)=2.3462

70

CONTINUE

C

RETURN

END

C\*\*\*\*\*

C

SUBROUTINE MATRIZ(K,H,R,G,S,AVI,B,E,N)

REAL\*8 K,H,R

REAL\*8 G(\*),S(\*),AVI(\*),B(\*),E(\*)

```

      INTEGER N
C
      DO 3 I=1,N
      G(I)=0. DO
3     CONTINUE
C
      R=K/H
C
      -----
C     *  CÁLCULO DO VETOR  G  *
C     -----
      G(1)=1. DO - R*AVI(1) + 4. DO/3. DO*K*S(1)
      DO 80 I=2, N-2, 2
      G(I)=2. DO/3. DO*K*S(I)
80    CONTINUE
      DO 90 I=3, N-1, 2
      G(I)=4. DO/3. DO*K*S(I)
90    CONTINUE
C
      -----
C     *  CÁLCULO DO VETOR  B  *
C     -----
      DO 100 I=2, N-1
      B(I)=R
100   CONTINUE
C
      -----
C     *  CÁLCULO DO VETOR  E  *
C     -----
      DO 110 I=2, N-1
      E(I)=1-R*AVI(I)
110   CONTINUE
C
      RETURN
C *****
      END

```

```

SUBROUTINE SOLVE(X,A,N,M,G,U,B,E)
REAL*8 X(*),A(*),G(*),U(10,*),B(*),E(*)
REAL*8 SOMA
INTEGER N,M

C
C -----
C * CÁLCULO DA CONDIÇÃO INICIAL *
C -----

DO 120 I=1, N-1
X(I)=(1-A(I))*0.3+0.3
120 CONTINUE

C
C -----
C * CÁLCULO DE U(I,J)
C -----

DO 130 J=1, M
SOMA=0.
DO 140 I=1, N
SOMA=SOMA+G(I)*X(I)
140 CONTINUE
U(1,J)=SOMA

C
C
DO 150 I=2, N-1
U(I,J)=B(I)*X(I-1)+E(I)*X(I)
150 CONTINUE

C
X(1)=U(1,J)
DO 160 I=2, N-1
X(I)=U(I,J)
160 CONTINUE
130 CONTINUE

C
RETURN
END
C.....149.....

```

RESULTADOS OBTIDOS

a	t	1	2	3	4	5
0.1		.5711204	.5708649	.5702661	.5693900	.5682855
0.2		.5382619	.5365564	.5348706	.5332010	.5315449
0.3		.5064317	.5029071	.4994258	.4959871	.4925906
0.4		.4729350	.4660101	.4592223	.4525685	.4460460
0.5		.4362006	.4228946	.4100632	.3976885	.3857534
0.6		.3929599	.3677998	.3443846	.3225893	.3022979
0.7		.3356100	.2890944	.2492946	.2152235	.1860406
0.8		.2419178	.1632414	.1107263	.0755931	.0520205
0.9		.0033004	.0022179	.0014966	.0010151	.0006930
1.0		.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000

Tabela 1.1

a = idade t = tempo

a	t	6	7	8	9	10
0.1		.5669899	.5655322	.5639353	.5622177	.5603946
0.2		.5299001	.5282646	.5266368	.5250154	.5233991
0.3		.4892356	.4859215	.4826479	.4794140	.4762192
0.4		.4396519	.4333834	.4272379	.4212127	.4153052
0.5		.3742411	.3631358	.3524222	.3420856	.3321118
0.6		.2834028	.2658041	.2494096	.2341334	.2198960
0.7		.1610298	.1395806	.1211733	.1053645	.0917764
0.8		.0361464	.0254074	.0181009	.0130948	.0096356
0.9		.0004769	.0003314	.0002329	.0001659	.0001201
1.0		.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.0000000

Tabela 1.2

a = idade t = tempo

DISTRIBUICAO DE IDADE

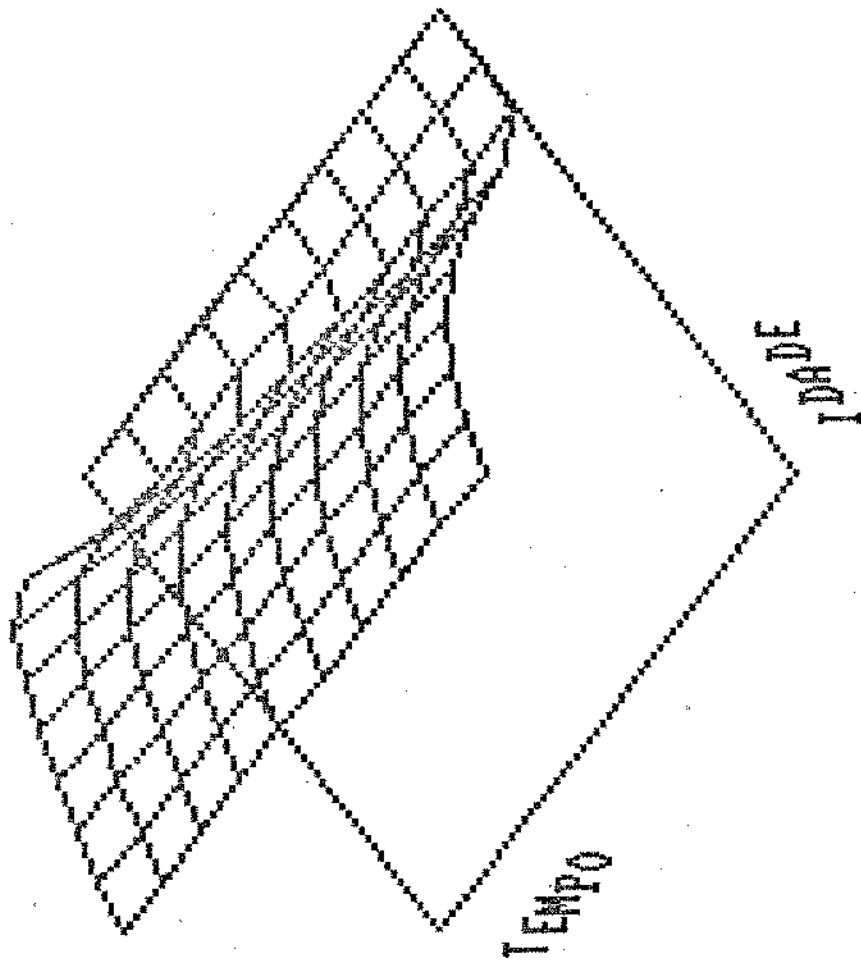


fig. 4.1

## C O N C L U S Ã O

Neste trabalho mostramos a importância de se estudar modelos matemáticos descrevendo a evolução de populações com estrutura de idade. Tais modelos têm recebido crescente atenção nos últimos anos por parte de biólogos e matemáticos, pois as taxas de fertilidade e mortalidade, como vimos, estão entre os parâmetros básicos na teoria da dinâmica populacional e demografia. Os resultados teóricos aqui estudados sugerem diversas aplicações interessantes e desafiantes.

A estimativa do tamanho e composição de idade de várias populações biológicas é um assunto significativo. Como por exemplo, tais informações são necessárias no planejamento do uso de recursos naturais renováveis, políticas econômicas e educacionais a longo prazo, etc.

Por parte de ecologistas existe um grande interesse em modelar e analisar o crescimento e interação de populações com estrutura de idade, que até então eram estudados com a dependência do tempo. Entre os casos principais podemos citar:

(i) Problemas presa-predador com dependência de idade ( ex: canibalismo de jovens em determinadas espécies de peixes ).

(ii) Problemas de competição com estrutura de idade ( ex: populações de passáros e largatos competindo por insetos ).

Já em Biologia Celular, podemos destacar alguns modelos matemáticos para o crescimento celular, tendo como base o ciclo celular. Nesse caso, a cada fase do ciclo está associada a um grau de maturidade da célula. Em Epidemiologia os modelos de transmissão de doenças é um fenômeno dependente da idade e em determinadas epidemias os parâmetros, entre eles, a taxa de contágio é dependente da idade. Portanto, qualquer programa de prevenção e vacinação teriam resultados mais eficazes quando vistos com essa nova estrutura. Finalmente podemos afirmar que os resultados teóricos aqui apresentados têm também uma grande relevância dentro da Farmacologia anti-tumoral, devido a existência de farmacos ciclo-específicos ( i.e.: medicamentos que somente são capazes de destruir células tumorais em determinadas fases do ciclo-celular).

O estudos desses modelos matemáticos, principalmente aqueles de Mckendrick, abriram uma nova possibilidade dentro do campo da modelagem, permitindo a compreensão da importância

da estrutura de idade nos fenômenos biológicos. Isso nos coloca a possibilidade de novas pesquisas e o nosso objetivo futuro é pois continuar trabalhando com o aperfeiçoamento e extensão de tais modelos. Quanto à metodologia numérica empregada, podemos sentir o quão complexo é tal problema, e isso nos lança um grande desafio.



## REFERÊNCIAS

- [1] BASSANEZI, R. C. e FERREIRA JR., W. C. . *Equações diferenciais com aplicações*. São Paulo, Habra, 1988
- [2] CUSHING, J. M.. Existence and stability of equilibria in age structured population dynamics. Preprint, Department of Mathematics, University of Arizona.
- [3] CUSHING, J. M. and SALEEM, M. A.. A predator-prey model with age structure. *J. Math. Biology* (1982) 14: 231-250
- [4] CUSHING, J. M. and SALEEM, M.. Population Biology. *Lectures notes in biomathematics*. Springer-Verlag, 1982. Vol. 52, p. 225-237.
- [5] DI BLASIO, G. ; IANNELLI, M. & SINISTRARI, E.. Non linear models of age dependent population growth. *Memorie dell'Istituto Italiano di Idrobiologia "Dott. Marco De Marchi"* , Pallanza, 1984. p. 185-189.
- [6] DIEUDONNÉ, J.. *Fundamentos de análise moderno*. Reverté, 1979.
- [7] EISEN, M.. Mathematical models in Cell Biology and Câncer chemotherapy. *Lectures notes in*

biomathematics, Springer-Verlag . Vol 30,  
p. 73-121.

- [8]EL-DOMA, M.. Analysis of nonlinear integro-differential equations arising in age-dependent epidemic models. *Preprint*, University of Michigan-Dearborn, Mathematics and Statistics
- [9]FREEDMAN, H. I. & STROBECK, C. Population Biology. *Lectures notes in biomathematics*. Springer-verlag, 1982. Vol. 52, p. 304-316
- [10]FREEDMAN, H. I. & STROBECK, C.. Population Biology. *Lectures notes in biomathematics*. Springer-Verlag, 1982. Vol 52, p. 225-230.
- [11]GURTIN, M. E and MacCAMY, R. C.. The mathematical theory of age-structured populations. *Manuscript*. Departement of Mathematics, Pittsburgh Carnegie, Mellon University. 1982
- [12]GURTIN M. E. and LEVINE D. S.. On predator prey interactions with predation dependent on age of prey. *Math. Biosciences* (1979) 47: 207-219
- [13]GURTIN M. E. and MacCAMY R. C.. Some simple models for nonlinear age-dependent population dynamics. *Math. Biosciences* (1978). 43: 199-211
- [14]HOPPENSTEADT, F. C. *Mathematical theories of*

populations: Demographics, genetics and epidemics.  
Society for Industrial and Applied Mathematics.  
1975

- [15] IANNELLI, M.. Mathematical Problems in the description of age-structured populations. Preprint, Universita' Degli Studi Di Trento. Dipartimento di Matematica. Italy
- [16] LEVIN, S. A. & HALLAM, T. G.. Mathematical Ecology. Lectures notes in biomathematics. Springer-Verlag. 1984. Vol. 54, p. 344-355
- [17] LEVIN, S. A. & HALLAM, T. G., Mathematical ecology. Lectures notes in biomathematics. Springer-Verlag. 1984. Vol 54, p 178-191
- [18] LEVINE D. S.. Population Biology. Lectures Notes in Biomathematics. Springer-Verlag. 1982. Vol 52, p. 304-316.
- [19] LOPEZ, L. and TRIGIANTE, D.. A hybrid sheme for solving a model of population dynamics. Preprint.
- [20] MARCUS-ROBERTS, H. & THOMPSON, M.. Life Science Models. Springer. 1983
- [21] RUBINOW, S.. Age-structured equations in the theory of cell populations. In: Levin, S (ed). *Studies in mathematical biology*. 1978. Vol 16 part II, Populations and communities. p 389-410. p 389-410

[22] SCUDO, F. M. & ZIEGLER, J. R.. The golden age of theoretical ecology. *Lectures notes in biomathematics*. Springer-Verlag. Vol 22, p. 57-121

APÊNDICE     A  
SOBRE EQUACÕES INTEGRAIS

EQUACÕES INTEGRAIS

Uma equação integral é uma equação tendo a forma

$$Y(t) = F(t) + \int_a^b K(u,t) \cdot Y(u) du$$

onde  $F(t)$  e  $K(u,t)$  são conhecidas,  $a$  e  $b$  são ou constantes dadas ou funções de  $t$ , e a função  $Y(t)$ , que aparece sob o sinal de integral deve ser determinada.

A função  $K(u,t)$  é frequentemente chamada "Kernel" da equação integral. Se  $a$  e  $b$  são constantes a equação é muitas vezes chamada Equação Integral de Fredholm. Se  $a$  é constante enquanto  $b = t$ , ela é chamada Equação Integral de Volterra.

Equações Integrais do tipo Convolução

Uma equação integral especial de importância nas aplicações é:

$$Y(t) = F(t) + \int_0^t K(t-u) \cdot Y(u) du$$

Esta equação é do tipo convolução e pode ser escrita como

$$Y(t) = F(t) + K(t) * Y(t)$$

## APÊNDICE B

### SOBRE A TRANSFORMADA DE LAPLACE

Definição :

Seja  $F(t)$  uma função de  $t$ ,  $t > 0$ . Então a transformada de Laplace de  $F(t)$ , denotada por  $L(F(t))$  é definida por:

$$\mathcal{L}(F(t)) = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot F(t) dt \quad [C.1]$$

onde assumimos que  $s \in \mathbb{R}$ .

A transformada de Laplace de  $F(t)$  existe se a integral [C.1] converge para todos os valores de  $s$ , caso contrário ela não existe.

**Funções seccionalmente contínuas ( ou contínuas por partes)**

Uma função é dita seccionalmente contínua ou contínua por partes em um intervalo  $\alpha \leq t \leq \beta$  se o intervalo pode ser subdividido em um número finito de subintervalos no qual a função é contínua e possui limites laterais tanto à esquerda quanto à direita.

**Funções de ordem exponencial**

Se existirem constantes reais  $M > 0$  e  $\gamma$  tal

que para todo  $t > N$

$$\left| e^{-\gamma \cdot t} \cdot F(t) \right| < M \quad \text{ou} \quad |F(t)| < M \cdot e^{\gamma \cdot t}$$

diremos que  $F(t)$  é uma função de ordem exponencial  $\gamma$  quando  $t \rightarrow \infty$ , ou, que  $f$  é de ordem exponencial.

Intuitivamente, funções de ordem exponencial não podem "crescer" em valor absoluto mais rapidamente que

$$M \cdot e^{\gamma \cdot t} \quad \text{quando } t \text{ cresce}$$

Na prática, entretanto, esta não é uma restrição desde que  $M$  e  $\gamma$  podem ser tão grande quanto desejarmos.

Funções limitadas são de ordem exponencial.

**Condições suficientes para a existência da Transformada de Laplace**

**Teorema**

Se  $F(t)$  é seccionalmente continua em todo intervalo  $0 \leq t \leq N$  e de ordem exponencial  $\gamma$  para  $t < N$  então sua Transformada de Laplace  $f(s)$  existe para todo  $s > \gamma$ .

**Propriedades**

1ª) Propriedade da linearidade

Se  $c_1$  e  $c_2$  são constantes quaisquer enquanto  $F_1(t)$  e  $F_2(t)$  são funções com transformada de Laplace  $f_1(s)$  e  $f_2(s)$  respectivamente então:

$$\mathcal{L} \left\{ c_1 \cdot F_1(t) + c_2 \cdot F_2(t) \right\} =$$

$$c_1 \cdot \mathcal{L} \left\{ F_1(t) \right\} + c_2 \cdot \mathcal{L} \left\{ F_2(t) \right\} = c_1 \cdot f_1(s) + c_2 \cdot f_2(s)$$

2ª) Propriedade da Convolução

Se  $\mathcal{L} \{ F(t) \} = f(s)$  e  $\mathcal{L} \{ G(t) \} = g(s)$

então

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t F(u) \cdot G(t-u) \, du \right\} = f(s) \cdot g(s)$$

**SOBRE A TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE**

Se  $f(s) = \mathcal{L} \{ F(t) \}$  então  $\mathcal{L}^{-1} \{ f(s) \}$  é dada

por



$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{s \cdot t} \cdot f(s) \cdot ds & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases} \quad [C.2]$$

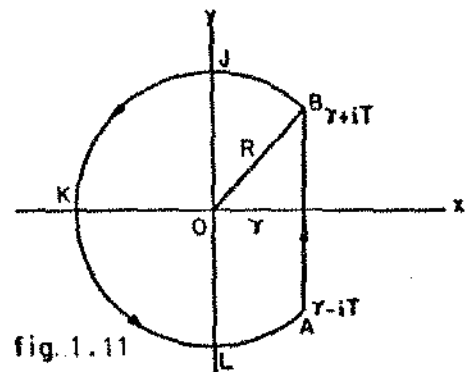
Este resultado é chamado integral ou fórmula complexa de inversão.

Também é conhecido como fórmula integral de Bromwich. A integração em [C.2] deve ser efetuada ao longo de uma reta  $s = \gamma$  no plano complexo onde  $s = x + iy$ . O número real  $\gamma$  é escolhido de modo que  $s = \gamma$  esteja à direita de todas as singularidades ( polos, pontos de ramificações ou singularidades essenciais ), no mais é arbitrário.

Na prática, a integral em [C.2] é calculada considerando a integral de contorno

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{s \cdot t} \cdot f(s) \cdot ds \quad [C.3]$$

onde  $C$  é o contorno da figura 1.11.



Este contorno é muitas vezes chamado Contorno de Bromwich e é composto da linha AB e do arco BJKLA de um círculo de raio R com centro na origem O.

Se representarmos o arco BJKLA por  $\sigma$ , teremos

$$T = \left( R^2 - \gamma^2 \right)^{1/2}$$

$$F(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{s \cdot t} \cdot f(s) ds = \quad [C.4]$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{s \cdot t} \cdot f(s) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} e^{s \cdot t} \cdot f(s) ds \right\}$$

Uso do teorema dos resíduos para encontrar Transformadas Inversas de Laplace.

Suponha que todas as singularidades de  $f(s)$  são polos os quais estão à esquerda da reta  $s = \gamma$  para alguma constante  $\gamma$ . Suponha, além disso, que a integral ao redor de  $\sigma$  em [C.4] tende a zero quando  $R \rightarrow \infty$ . Então, pelo teorema do resíduo

$$F(t) = \text{SOMA DOS RESIDUOS DE } e^{s \cdot t} \cdot f(s) \text{ NOS POLOS DE } f(s)$$