

RESULTADOS SOBRE A GEOMETRIA DOS FIBRADOS

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. LUCAS MONTEIRO CHAVES e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 12 de fevereiro de 1992.

Prof. Dr. _____



Alcibiades Rigas
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Ciências.

C399r

15673/BC

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

A memória de meu Pai

AGRADECIMENTOS

Todos nós somos uma obra coletiva. Meus sinceros agradecimentos a:

- Prof. Dr. Alcibiades Rigas pela sua dedicação e exemplo de amor à Matemática.
- Aos professores e colegas do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da UNICAMP, em particular aos professores do grupo de Geometria, pelo apoio e pelos conhecimentos a mim transmitidos.
- Aos colegas do Departamento de Ciências Exatas da Escola Superior de Agricultura de Lavras, em particular ao professor Nelson Willibaldo Werlang, que possibilitaram meu afastamento.
- Ao Estado, que financiou toda minha vida acadêmica.
- À minha esposa, sua família e em particular à D. Zenita, pelo constante apoio.
- À minha família, a qual eu devo tudo que sou.

- Ao Prof. Dr. Gilberto Lage e ao mestrando do Curso de Matemática Aplicada Paulo Blinder pela colaboração na parte gráfica e computacional.

INDICE

	Página
Resumo	vi
Abstract	vii
1. Métricas de Kaluza-Klein e Instantons	1
1.1. Uma condição para a positividade da curvatura seccional	1
1.2. Uma aplicação à geometria dos instantons	12
2. Um teorema de finitude para fibrados fat	25
2.1. Conexões fat	25
2.2. Um teorema de finitude	29
3. Os espaços de Aloff-Wallach e Eschenburg	44
3.1. Espaços de Aloff-Wallach e fibrados sobre CP^2 ...	44
3.2. Espaços de Eschenburg e fibrados sobre CP^2	58
4. Geradores de homotopia	72
4.1. Sobre uma órbita conjugada de G_2	72
4.2. Um gerador de $\pi_6(G_2)$	78
4.3. Um gerador polinomial de $\pi_5(SU(3))$	85
5. Referências bibliográficas	103

RESUMO

A tese é composta essencialmente de quatro resultados sobre a geometria dos fibrados que são:

Capítulo I. As métricas de Kaluza-Klein são métricas naturais em espaços totais de fibrados. Tais métricas são definidas a partir de conexões. No caso de fibrados principais onde o grupo estrutural é $SO(3)$, S^3 ou S^4 e a variedade da base admite métrica com curvatura seccional positiva, é natural estudarmos, em razão das propriedades das submersões Rimanianas, a positividade da curvatura seccional de tais métricas. Tal estudo é feito para o fibrado de Hopf e uma classe particular de conexões que são as chamadas conexões auto-duais (instantons).

Capítulo II. A condição de "fatness" para uma conexão em um fibrado principal é necessária para que esta conexão defina métricas de Kaluza-Klein com curvatura seccional positiva. Existem porém restrições topológicas fortes à existência de tais conexões fat. Sobre S^4 existe apenas um S^3 -fibrado principal que admite conexão fat que é o fibrado de Hopf. Este resultado é generalizado para variedades 4-dimensionais compactas e orientáveis, no sentido que sobre uma tal variedade existe um número finito de $SO(4)$ -fibrados principais que admitem conexão $SO(3)$ -fat.

Capítulo III. Os espaços de Aloff-Wallach e os espaços

de Eschenburg são exemplos dos mais interessantes de variedades que admitem curvatura seccional positiva. Obtemos que alguns dos espaços de Eschenburg são fibrados sobre o espaço CP^2 com fibra espaços lenticulares generalizados.

Capítulo IV. É obtido um gerador explícito do grupo de homotopia $\pi_6(G_2)$. Além disto, utilizando o conceito de índice exibimos 2 órbitas da ação adjunta de G_2 não homeomorfas. Obtemos também um gerador com entradas polinomiais do grupo de homotopia $\pi_5(SU(3))$ e um gerador de $\pi_7(SU(4))$..

ABSTRACT

Chapter I. Kaluza-Klein metrics are natural metrics in total spaces of fiber bundles. Such metrics are defined by connections. In the case of principal bundles where the structural group is $SO(3)$, S^3 or S^1 and the base manifold admits a metric with positive sectional curvature, it is natural to study, by the properties of Riemannian submersion, the positivity of sectional curvature of such metrics. This study is made for the Hopf bundle and the particular class of the self-dual connections (instantons).

Chapter II. The condition of "fatness" for a connection in a principal fiber bundle is a necessary condition such that these connections define Kaluza-Klein metrics with positive sectional curvature. There are strong topological restrictions for the existence of fat connections. Over S^4 there is only one principal S^3 bundle that admits a fat connection, the Hopf bundle. This result is generalized for compact orientable 4-manifolds in the sense that there is a finite number of principal $SO(4)$ -bundles that admit connections $SO(3)$ -fat.

Chapter III. The Aloff-Wallach spaces and the Eschenburg spaces are the most interesting examples of manifolds that admit positive sectional curvature. We obtain that some of the Eschenburg spaces are fiber bundles over CP^2 with fibre generalized lens spaces.

Chapter IV. We obtain an explicit generator of the homotopy group $\pi_6(G_2)$. Furthermore, with the concept of indice we were able to exhibit two orbits of the conjugation action of G_2 that aren't homeomorphic. We also obtain a generator, with polynomial entries of the homotopy group $\pi_5(SU(3))$ and a generator of $\pi_7(SU(4))$.

CAPÍTULO I

MÉTRICAS DE KALUZA-KLEIN E INSTANTONS

As métricas de Kaluza-Klein em espaços totais de fibrados principais, são métricas naturais que refletem a geometria do grupo estrutural e a da variedade Riemanniana da base. Como tais métricas são definidas em função de um parâmetro real que define uma homotetia restrita às fibras, possibilitando então um certo controle sobre, por exemplo, a curvatura das fibras, temos uma situação particularmente adequada para o estudo de curvatura (seccional, de Ricci, escalar). Neste trabalho nos preocupamos essencialmente com curvatura seccional positiva. Como as métricas de Kaluza-Klein são adequadas para formalizar conceitos da Física Teórica, é natural estudar tais métricas quando relacionadas às conexões instantons (que também expressam conceitos da Física).

No decorrer deste capítulo vamos fazer algumas definições e fixar a notação que será válida para todo o trabalho.

1. UMA CONDIÇÃO PARA A POSITIVIDADE DA CURVATURA SECCIONAL

Seja G um grupo de Lie conexo e compacto e $\mathfrak{g}$ sua Álgebra de Lie. Em $\mathfrak{g}$ vamos considerar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno

definido por uma métrica bi-invariante em G . Designaremos por M uma variedade diferenciável de dimensão ≥ 2 e por P o espaço total de um G -fibrado principal sobre M

$$G \text{ ---- } P \xrightarrow{\pi} M.$$

Dada uma conexão principal em P (definida por uma forma de conexão ω) e uma métrica Riemanniana $(\ , \)$ em M , vamos construir sobre P uma família de métricas g_t da forma

$$g_t(X, Y) := (\pi_* X, \pi_* Y) + t \langle \omega(X), \omega(Y) \rangle \quad t > 0.$$

Em relação às métricas g_t , G atua por isometrias e as fibras são subvariedades totalmente geodésicas, isométricas a $(G, \langle \ , \ \rangle)$. A questão que nos interessa é em quais situações existem entre as métricas g_t , métricas com curvatura seccional positiva. O fato das fibras serem totalmente geodésicas e isométricas a $(G, \langle \ , \ \rangle)$ restringe as possibilidades para o grupo G . Wallach [W] provou que S^3 é o único grupo de Lie conexo, compacto e simplesmente conexo que admite métrica invariante à esquerda com curvatura seccional positiva. Segue deste resultado que para o estudo de curvatura seccional positiva, na situação acima descrita, devemos nos restringir aos grupos de Lie S^3 , $SO(3)$ e S^1 .

Vamos enunciar um teorema que nos dá condições necessárias e suficientes para que (P, g_t) possua curvatura positiva para t suficiente pequeno.

Este teorema é devido a [D-R-2] e não se encontra publicado. Tal teorema já foi utilizado em [Gr] para o estudo da positividade de métricas mais gerais que as métricas g_t definidas por

$$g_f(X, Y) := (\pi_* X, \pi_* Y) + f\langle \omega(X), \omega(Y) \rangle$$

onde f é uma função real diferenciável e positiva, que depende apenas da variedade base, $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$. Com o intuito de deixar este trabalho mais auto-suficiente achamos adequado incluir a demonstração deste resultado. Devemos observar também que [S-W] obtiveram um resultado semelhante.

Seja $\text{Ad}P = P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$ o fibrado adjunto do fibrado $G \text{ --- } P \longrightarrow M$. O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathfrak{g}$ induz naturalmente uma métrica no fibrado $\text{Ad}P$ (que também designaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Seja ∇ a derivada covariante de $\text{Ad}P$ definida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Vamos considerar Ω , a forma de curvatura de ω , como uma 2-forma em M com valores em $\text{Ad}P$.

Podemos agora enunciar:

TEOREMA 1.1. Seja $G \text{ --- } P \longrightarrow M$ um G -fibrado principal com uma forma de conexão ω sobre uma variedade compacta M onde $G = S^3$, $SO(3)$ ou S^1 e dimensão de $M \geq 2$. Fixando uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em M e uma métrica bi-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em G , são equivalentes:

- (i) Existe $t_0 > 0$, tal que para $0 < t < t_0$, (P, g_t) possui curvatura seccional positiva.
- (ii) Para qualquer ponto x em M , quaisquer pares de vetores ortonormais $\langle X, Y \rangle$ em $T_x M$ e qualquer elemento não nulo u de $\text{Ad}P$ sobre x temos

$$R^M(X, Y, X, Y) \sum_{k=1}^n \langle \langle u, \Omega(X, X_k) \rangle \rangle^2 > \langle \langle u, \nabla_X \Omega(X, Y) \rangle \rangle^2$$

onde R^M é o tensor curvatura de $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base ortonormal arbitrária de $T_x M$.

Demonstração: Vamos utilizar as seguintes convenções:

$$1 \leq i, j, k, m \leq n = \dim M \quad \text{e} \quad n+1 \leq a, b, c, d, f \leq n+3.$$

Seja $\{X_{n+1}, X_{n+2}, X_{n+3}\}$ uma base ortonormal de campos vetoriais em G invariantes à esquerda, isto é, $\{X_{n+1}, X_{n+2}, X_{n+3}\}$ é um frame ortonormal na álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. As constantes de estrutura da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ em relação à base acima são definidas por $[X_a, X_b] = \sum_c C_{ab}^c X_c$. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é bi-invariante tais constantes $\{C_{ab}^c\}$ são anti-simétricas em relação a todo par de índices. Todo elemento $X \in \mathfrak{g}$ induz, pela ação à direita de G em P , um campo vertical em P que designaremos por X^* ([K-N v.I p.51]). Temos então que dado um frame $\{X_{n+1}, X_{n+2}, X_{n+3}\}$ em $\mathfrak{g}$ ficam definidos os campos verticais $X_{n+1}^*, X_{n+2}^*, X_{n+3}^*$ linearmente independentes em cada ponto de P . É conveniente trabalhar com frames ortonormais em (P, g_t) , seja portanto

$$\tilde{X}_a = t^{-1/2} X_a^* \quad n+1 \leq a \leq n+3.$$

$$\text{Logo} \quad g_t(\tilde{X}_a, \tilde{X}_a) = 1 \quad \text{e} \quad g_t(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b) = 0 \quad a \neq b.$$

Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base ortonormal de campos vetoriais definidos em um aberto $U \subset M$. Tais campos admitem um levantamento horizontal para campos definidos em $\pi^{-1}(U) \subset P$. Como o contexto deixará claro sobre quais campos estamos nos referindo, usaremos a mesma notação para um campo X em $U \subset M$ e seu levantamento horizontal em $\pi^{-1}(U) \subset P$. Vamos definir as

seguintes funções reais em $\pi^{-1}(U) \subset P$.

$$H_{ij}^a = \langle \Omega(X_i, X_j), X_a \rangle,$$

$$H_{ijk}^a = \langle (\nabla_{X_k} \Omega)(X_i, X_j), X_a \rangle$$

$$R_{ijkm}^t = g_t(R^t(X_i, X_j)X_k, X_m)$$

$$R_{ijka}^t = g_t(R^t(X_i, X_j)X_k, \tilde{X}_a) \quad \text{etc.}$$

onde R^t é o tensor curvatura de (P, g_t) .

PROPOSIÇÃO 1.2. ([1])

$$1) R_{ijkm}^t = R_{ijkm}^M - t \sum_a (2H_{ij}^a H_{km}^a + H_{ik}^a H_{jm}^a - H_{im}^a H_{jk}^a)$$

$$2) R_{ijma}^t = -t^{1/2} H_{ij,m}^a$$

$$3) R_{ijab}^t = t \sum_k (H_{ik}^a H_{kj}^b - H_{ik}^b H_{kj}^a) - \sum_c H_{ij}^c C_{ab}^c$$

$$4) R_{iajb}^t = -t \sum_k H_{ik}^b H_{kj}^a + \frac{1}{2} \sum_c H_{ij}^c C_{cb}^a$$

$$5) R_{abic}^t = 0$$

$$6) R_{abcd}^t = \frac{t^{-1}}{4} \sum_f C_{bf}^a C_{cd}^f$$

Observação: Todos os outros componentes do tensor curvatura R^t podem ser obtidos dos acima calculados utilizando as identidades $R_{ABCD} = -R_{BACD} = -R_{ABDC}$, $R_{ABCD} = R_{CDAB}$ e $R_{ABCD} + R_{ADBC} + R_{ACDB} = 0$ ■

O seguinte lema simplifica o cálculo da curvatura seccional em (P, g_t) .

LEMA 1.3. Seja $\sigma \subset T_P$ um 2-plano. Existe sempre uma base ortonormal $\langle X, Y \rangle$ de σ relativa à métrica g_t tal que

$$\begin{cases} X = \alpha X_i + \beta X_a & i \neq j, a \neq b \\ Y = \gamma X_j + \delta X_b & \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2 = 1. \end{cases}$$

Onde $\langle X_i, X_j \rangle$ é um par de vetores horizontais, ortonormais em relação a métrica g_1 e $\langle X_a, X_b \rangle$ um par de vetores verticais também ortonormais em relação à métrica g_1 .

Demonstração: Seja $\langle X, Y \rangle$ uma base ortonormal (em relação à métrica g_1) qualquer de σ e $X = X^H + X^V$, $Y = Y^H + Y^V$ a decomposição em componentes horizontais e verticais. Temos que

$$0 = g_1(X, Y) = g_1(X^H, Y^H) + g_1(X^V, Y^V).$$

Portanto se $g_1(X^H, Y^H) = 0$, então $g_1(X^V, Y^V) = 0$ e o resultado segue. Se $g_1(X^H, Y^H) \neq 0$ vamos obter uma nova base g_1 -ortonormal da forma

$$\hat{X} = \cos(\theta)X + \sin(\theta)Y \quad \hat{Y} = -\cos(\theta)X + \sin(\theta)Y.$$

$$\text{Logo } \hat{X}^H = \cos(\theta)X^H + \sin(\theta)Y^H \quad \hat{Y}^H = -\cos(\theta)X^H + \sin(\theta)Y^H$$

$$g_1(\hat{X}^H, \hat{Y}^H) = \frac{1}{2} \sin(2\theta) (\|Y^H\|_1^2 - \|X^H\|_1^2) - \cos(2\theta) g_1(X^H, Y^H)$$

de onde segue que

$$g_1(\hat{X}^H, \hat{Y}^H) = 0 \text{ se } \cotg(2\theta) = \frac{\|Y^H\|_1^2 - \|X^H\|_1^2}{2g_1(X^H, Y^H)} \quad \blacksquare$$

Devemos observar que em relação à métrica g_t

$\langle X = \alpha X_i + \beta X_a, Y = \gamma Y_j + \delta Y_b \rangle$ é uma base ortogonal e se

$$\tilde{X}_a = t^{-1/2} X_a, \quad \tilde{Y}_b = t^{-1/2} Y_b \quad \text{temos}$$

$$X = \alpha X_i + \beta t^{1/2} \tilde{X}_a \quad Y = \gamma Y_j + \delta t^{1/2} \tilde{Y}_b$$

$$\|\tilde{X}_a\|^2 = g_t(\tilde{X}_a, \tilde{X}_a) = 1 \quad \|\tilde{Y}_b\|^2 = g_t(\tilde{Y}_b, \tilde{Y}_b) = 1$$

$$\|X\|_t^2 = \alpha^2 + t\beta^2 \quad \|Y\|_t^2 = \gamma^2 + t\delta^2.$$

Vamos designar por $K_t(\sigma)$ a curvatura seccional do plano σ em relação à métrica g_t . Utilizando a Proposição 1.2 e o Lema 1.3 temos

$$\begin{aligned} K_t(\sigma) &= \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 t)(\gamma^2 + \delta^2 t)} \{ \alpha^2 \gamma^2 R_{ijij}^t + 2t^{1/2} \alpha \beta \gamma^2 R_{ija j}^t + \\ &+ 2t^{1/2} \alpha^2 \gamma \delta R_{ijib}^t + 2t \alpha \beta \gamma \delta R_{ibaj}^t + 2t \alpha \beta \gamma \delta R_{ijab}^t + t \beta^2 \gamma^2 R_{ja ja}^t + \\ &+ 2t^{3/2} \beta^2 \gamma \delta R_{abaj}^t + 2t^{3/2} \alpha \beta \delta^2 R_{ibab}^t + t^2 \beta^2 \delta^2 R_{abab}^t + t \alpha^2 \delta^2 R_{ibib}^t \} = \\ &= \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 t)(\gamma^2 + \delta^2 t)} \{ \alpha^2 \gamma^2 (R_{ijij}^M - 3t \sum_c (H_{ij}^c)^2) + 2\alpha \beta \gamma^2 t H_{ij;j}^a \\ &- 2\alpha^2 \gamma \delta t H_{ij;i}^b + 2\alpha \beta \gamma \delta t (t \sum_k H_{ik}^a H_{kj}^b - \frac{1}{2} \sum_c H_{ij}^c C_{ca}^b) + \\ &+ \beta^2 \gamma^2 t (t \sum_k (H_{jk}^a)^2) + \beta^2 \delta^2 t^2 (t^{-1} \frac{1}{4} \sum_c (C_{ab}^c)^2) + \alpha^2 \delta^2 t (t \sum_k (H_{ik}^b)^2) \}. \end{aligned}$$

Fazendo $R_t(\sigma) = K_t(\sigma)(\alpha^2 + \beta^2 t)(\gamma^2 + \delta^2 t)$ obtemos a seguinte expressão binomial em t .

$$\begin{aligned} R_t(\sigma) &= K_{ij}^M \alpha^2 \gamma^2 + (-3 \sum_c (H_{ij}^c)^2 \alpha^2 \gamma^2 + 2H_{ij;j}^a \alpha \beta \gamma^2 - \\ &- 2H_{ij;i}^b \alpha^2 \gamma \delta - 3 \sum_c H_{ij}^c C_{ab}^c \alpha \beta \gamma \delta + \frac{1}{4} \sum_c (C_{ab}^c)^2 \beta^2 \delta^2) t + \\ &+ (2 \sum_k (2H_{ik}^a H_{kj}^b - H_{ik}^b H_{kj}^a) \alpha \beta \gamma \delta + \sum_k (H_{jk}^a)^2 \beta^2 \gamma^2 + \sum_k (H_{ik}^b)^2 \alpha^2 \delta^2) t^2 \end{aligned}$$

onde K_{ij}^M é a curvatura seccional em M do plano gerado por $\pi_*(X_i)$ e $\pi_*(X_j)$.

Para trabalharmos com a expressão acima precisamos do seguinte:

LEMA 1.4. Dado parâmetros reais $A, B, C, D, E, F, G, K, L$ contidos em um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^9$, vamos definir a

família de funções $\phi_t: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ $t > 0$ da forma:

$$(1) \quad \phi_t(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = A\alpha^2\gamma^2 + (B\alpha^2\gamma^2 + C\alpha^2\gamma\delta + D\alpha\beta\gamma^2 + E\alpha\beta\gamma\delta + L\beta^2\delta^2)t \\ + (K\alpha^2\delta^2 + G\beta^2\gamma^2 + F\alpha\beta\gamma\delta)t^2.$$

As seguintes condições são equivalentes:

(i) Existe $t_0 > 0$ dependendo continuamente de $A, B, \dots, L$ tal que $\phi_t(\alpha, \beta, \gamma, \delta) > 0$ para $0 < t < t_0$ e $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2 = 1$.

(ii) Os parâmetros satisfazem

$$A > 0, \quad G > 0, \quad K > 0, \quad L > 0, \quad 4AK > C^2 \quad 4AG > D^2.$$

Demonstração: Vamos supor (i) verdadeiro.

Fazendo $\alpha = 1, \gamma = 1$ obtemos $A > 0$, com $\alpha = 1, \delta = 1$ obtemos $K > 0$ e $\beta = 1, \gamma = 1$ obtemos $L > 0$ e $G > 0$.

Considerando agora apenas $\alpha = 1$, obtemos para (1) a seguinte expressão polinomial em γ

$$(2) \quad (A + tB)\gamma^2 + tC\delta\gamma + t^2K\delta^2 > 0 \quad \text{para} \quad \gamma^2 + \delta^2 = 1 \\ \text{e } t \text{ pequeno.}$$

Seja $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(\gamma, \delta) = (A + tB)\gamma^2 + tC\delta\gamma + t^2K\delta^2$$

Restringindo f à reta $\delta = x\gamma$ temos

$$f(\gamma, x\gamma) = (A + tB + tCx + t^2Kx^2)\gamma^2.$$

Por (2) temos que para $\gamma = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$, $f(\gamma, x\gamma) > 0$ e portanto

$A + tB + tCx + t^2Kx^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o que implica que

$t^2(C^2 - 4K(A + tB)) < 0$ e portanto para t suficientemente pequeno $4KA > C^2$. De maneira semelhante, fazendo $\gamma = 1$ obtemos

$$4AG > D^2.$$

Vamos agora assumir (ii) como verdadeiro. Como vimos acima $\phi_t(1,0,\gamma,\delta) > 0$, $\phi_t(\alpha,\beta,1,0) > 0$ e portanto podemos supor que $\beta\delta \neq 0$. Dividindo ϕ_t por $\beta^2\delta^2$ e fazendo $x = \alpha\beta^{-1}$, $y = \gamma\delta^{-1}$ obtemos a seguinte condição equivalente à positividade de ϕ_t

$$(3) \quad x^2[(A + tB)y^2 + tCy + t^2K] + x[tDy^2 + tEy + t^2Fy] + tL + t^2Gy^2 > 0$$

$\forall x, y, \in \mathbb{R}$ e todo $t > 0$ suficientemente pequeno. Por (ii) temos que o coeficiente de x^2 em (3) é positivo para t suficientemente pequeno. Portanto, (3) é equivalente ao fato de seu discriminante ser negativo, isto é

$$(4) \quad y^2[y^2(D^2 - 4AG - 4tGB) + y(2DCE + tF) - 4tCG] + (E + tF)^2 - 4t^2GK < 4L[(\frac{1}{t}A + B)y^2 + Cy + tK].$$

O lado esquerdo de (4) é uma família a um parâmetro de funções $\phi_t(y)$ que satisfazem

$$\phi_t(0) = 0 \quad \frac{d}{dy}\bigg|_{y=0} \phi_t(y) = 0 \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} \phi_t(y) = -\infty$$

Além disso, $\phi_t(y)$ é uniformemente limitada nas variáveis t e y , em uma vizinhança de $y = 0$. Note que para t pequeno $\phi_t(y)$ é quase independente de t (veja a Figura da pág. 10).

O lado direito de (4) é uma família $\psi_t(y)$ de binômios na variável y que satisfazem

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^2}{dy^2} \psi_t(y) = +\infty.$$

Isto significa que cada binômio da família $\psi_t(y)$, a medida que t se aproxima do zero, definem parábolas cada vez mais fechadas (veja a Figura). O mínimo de cada uma destas parábolas $\psi_t(y)$ (t fixo) é atingido no ponto $y_t = -\frac{tC}{2(A+tB)}$ e o valor mínimo é

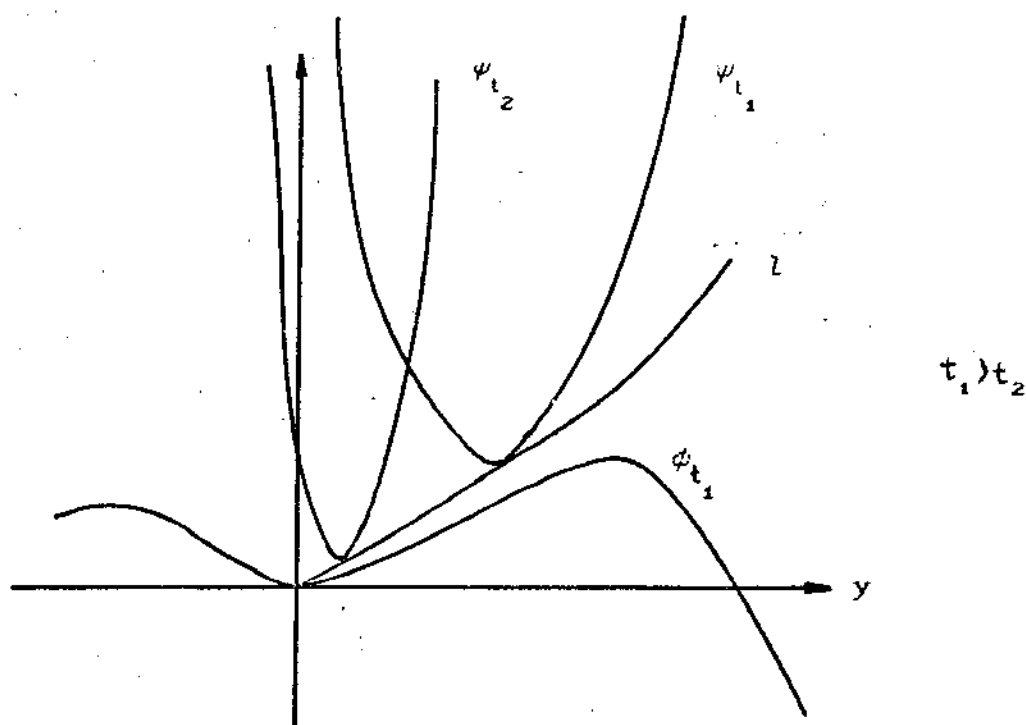
$$\psi_t(y_t) = \frac{Lt}{A+tB} (4AK - C^2 + 4tBK).$$

A curva dos vértices da família de parábolas ψ_t é da forma $t \longrightarrow l(t) = (y_t, \psi_t(y_t))$ e satisfaz

$$l(0) = (0,0) \quad l'(0) = \left(C - \frac{C}{2A}, \frac{L}{A} (4AK - C^2) \right).$$

Temos então que por (ii) a segunda componente de $l'(0)$ é diferente de zero, o que nos garante que $l(t)$ não é tangente ao eixo horizontal em $(0,0)$. Portanto as parábolas ψ_t se comportam como na Figura abaixo onde segue o resultado $\square$

FIGURA



Podemos agora terminar a demonstração do Teorema 1.1.

Fazendo na fórmula de $R_t(\sigma)$ (que é um múltiplo positivo da curvatura seccional $K_t(\sigma)$):

$$A = K_{ij}^M$$

$$B = -3 \sum_c (H_{ij}^c)^2$$

$$C = -2H_{ij;i}^b$$

$$D = 2H_{ij;j}^a$$

$$E = - \sum_c H_{ij}^c C_{ab}^c$$

$$L = \frac{1}{4} \sum_c (C_{ab}^c)^2$$

$$K = \sum_k (H_{ik}^b)^2$$

$$G = \sum_k (H_{jk}^a)^2$$

$$F = 2 \sum_k (2H_{jk}^a H_{kj}^b - H_{ij}^b H_{kj}^a)$$

o resultado segue imediatamente do Lema 1.4 ■

O Teorema 1.1 implica uma propriedade geométrica interessante que é que a positividade da curvatura seccional em (P, g_t) é equivalente a positividade da curvatura seccional de um conjunto bastante particular de 2-planos.

Corolário 1.5. Seja $W = \{ \text{conjunto dos 2-planos } \sigma \text{ em } (P, g_t) \text{ tal que existe base de } \sigma \text{ da forma } (X_i + s\tilde{X}_a, X_j), s \in \mathbb{R} \}$. Se $K_t(\sigma) > 0 \quad \forall \sigma \in W$ para t suficientemente pequeno então a curvatura seccional de (P, g_t) é positiva para t suficientemente pequeno.

Demonstração:

$$\begin{aligned} (5) \quad 0 < g_t(R^t(X_i + sX_a, X_j)X_i + sX_a, X_j) &= \\ &= R_{ijij}^t + 2R_{ajij}^t s + R_{ajaj}^t s^2 \quad \forall s \in \mathbb{R} \text{ com } t \\ &\text{suficientemente pequeno.} \end{aligned}$$

Como R_{ajaj}^t é a curvatura de plano vertical (plano gerado por

um vetor horizontal e um vetor vertical) temos por hipótese que $R_{ajaj}^t > 0$ e portanto (5) é equivalente ao discriminante do polinômio na variável s ser negativo, isto é

$$(6) \quad (R_{ajij}^t)^2 < R_{ijij}^t R_{ajaj}^t.$$

Segue da Proposição 1.2 que (6) é equivalente a

$$(H_{ij;j}^a)^2 < R_{ijij}^M \sum_k (H_{jk}^a)^2$$

para t suficientemente pequeno ■

2. UMA APLICAÇÃO À GEOMETRIA DOS INSTANTONS

Vamos aplicar o Teorema 1.1 à geometria dos instantons. Para as definições básicas da Teoria dos Campos Gauge indicamos ao leitor os excelentes textos [L], [A-H-S].

Primeiramente vamos colocar o problema que vamos estudar de uma maneira bastante geométrica.

Seja $G \text{ ---- } P \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado principal diferenciável. Um automorfismo interno de $P(M, G)$ é um difeomorfismo α de P que faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha} & P \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

O grupo dos automorfismos internos é chamado de grupo gauge e designaremos tal grupo por $\mathcal{G}_P$. Seja $\mathcal{E}_P$ o espaço das conexões principais em P . $\mathcal{G}_P$ atua em $\mathcal{E}_P$ por pull-back

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_P \times \mathcal{E}_P & \longrightarrow & \mathcal{E}_P \\ f, \omega & \longrightarrow & f^* \omega \end{array}$$

A forma de curvatura Ω de uma conexão ω pode ser considerada como uma 2-forma com valores no fibrado $\text{Ad}P$. O funcional de Yang-Mills é definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{YM} : \mathcal{E}_P &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow \frac{1}{2} \int_M \|\Omega\|^2. \end{aligned}$$

Temos que:

- a) Os pontos críticos de $\mathcal{YM}$ são chamados instantons.
- b) $\mathcal{YM}$ é invariante pela ação de $\mathcal{E}_P$.
- c) Se M é uma variedade Riemanniana 4 dimensional, as conexões com forma de curvatura auto-dual ($*\Omega = \Omega$ onde $*$ é o operador estrela de Hodge) são conexões instantons que são mínimos absolutos para o funcional $\mathcal{YM}$ ([L p.42]).

O espaço das conexões auto-duais módulo equivalência gauge é chamado de espaço modular. Vamos dar uma descrição do espaço modular para o fibrado de Hopf. Como é mais adequado trabalhar com fibrados vetoriais faremos uso de fibrados vetoriais associados a um fibrado principal. Seja H o conjunto dos números quaterniônicos, $\text{Sp}(1) = \{a \in H, |a| = 1\}$ e $S^7 = \{(a,b) \in H^2, |a|^2 + |b|^2 = 1\}$.

O fibrado de Hopf $S^3 \xrightarrow{\quad} S^7 \xrightarrow{\quad} S^4$ é obtido pela ação livre de $\text{Sp}(1)$ em S^7 da forma $a \times (b,c) \longrightarrow (ab,ac)$. $\text{Sp}(1)$ atua em H por $a \times \zeta = a\zeta$. Temos então o fibrado vetorial associado

$$H \xrightarrow{\quad} \begin{matrix} S^7 \times H \\ S^3 \end{matrix} \longrightarrow S^4$$

Definindo sobre $H^2 = \langle 0 \rangle$ a relação de equivalência $(a,b) \sim (c,d)$ se existe $\alpha \in H - \langle 0 \rangle$ tal que $(a,b) = (\alpha c, \alpha d)$, seja HP^1 (espaço projetivo quaterniônico) o conjunto $H^2 - \langle 0 \rangle / \sim$. $HP^1 \cong S^4$ e temos sobre HP^1 um fibrado vetorial canônico chamado de fibrado tautológico N_{S^4} definido por

$$N_{S^4} = \{([v_1, v_2], w) \in HP^1 \times H^2, w \in [v_1, v_2]\}$$

É fácil mostrar que $N_{S^4} = S^7 \times_{S^3} H$.

Em H^2 temos um produto quaterniônico da forma

$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = v_1 \bar{w}_1 + v_2 \bar{w}_2$ e $\text{Real}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ é o produto interno canônico de $R^8 \cong H^2$. A 1-forma com valores em $\text{Im}H$ (quaternios imaginários puros) $\omega = \text{Im}(v_1 d\bar{v}_1 + v_2 d\bar{v}_2)$ define uma conexão principal no fibrado de Hopf quando restrita a $S^7 \subset H^2$. O espaço vertical em S^7 definido por ω é

$$VTS_{(v_1, v_2)}^7 = \{(av_1, av_2), a \in \text{Im}H\}.$$

Devemos então observar que ω define métricas g_t que nada mais são do que variações da métrica canônica de S^7 .

A fórmula da curvatura é complicada mas no ponto $(0,1)$ temos

$$\Omega_{(0,1)} = dv_1 \wedge d\bar{v}_1.$$

O espaço horizontal em $(0,1)$ é gerado por $\frac{\partial}{\partial v_1}$ e portanto

$\Omega_{(0,1)}$ é pull-back por π de uma 2-forma auto-dual em $[0,1] \in HP^1 \cong S^4$.

O grupo simplético $Sp(2) = \{A \in M(2, H), AA^* = I\}$ atua à direita em S^7 de forma equivariante em relação à ação de S^3 .

Esta ação é transitiva e por isometrias, portanto preserva ω .

Como a ação de $Sp(2)$ em S^7 se projeta na ação de $SO(5)$ em S^4 podemos garantir que Ω , como 2-forma em S^4 , é auto-dual em

todos os pontos de S^4 . Vamos agora obter expressões locais para ω e Ω . Uma parametrização local para $HP^1 \cong S^4$ é

$$\begin{aligned} R^4 \cong H &\longrightarrow HP^1 \cong S^4 \\ x &\longrightarrow [x, 1]. \end{aligned}$$

Com esta parametrização obtemos a seção local do fibrado de Hopf

$$\begin{aligned} r : H &\longrightarrow S^7 \\ x &\longrightarrow \frac{(x, 1)}{\sqrt{1+|x|^2}}. \end{aligned}$$

Após um cálculo simples

$$A = r^* \omega = \operatorname{Im} \left(\frac{x d\bar{x}}{1+|x|^2} \right)$$

$$R = r^* \Omega = \frac{dx \wedge d\bar{x}}{(1+|x|^2)^2}.$$

A é o chamado instanton básico em [At p.21]. Em razão do operador de Hodge ser um invariante conforme, a equação da auto-dualidade também é um invariante conforme. Podemos então obter novas conexões auto-duais fazendo atuar sobre o instanton básico transformações conformes. O grupo $SL(2, \mathbb{H})$ atua no fibrado tautológico por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ([v_1, v_2], [w_1, w_2]) = ([v_1 a + v_2 c, v_1 b + v_2 d], [w_1 a + w_2 c, w_1 b + w_2 d])$$

Esta ação se projeta na ação de $SL(2, \mathbb{H})/\pm 1$ em HP^1 por transformações lineares fracionárias

$$x \longrightarrow \frac{ax + b}{cx + d}$$

Se $\nabla = d + A$ é a conexão definida pela instanton básico então $f^* \nabla$ é auto-dual e $f^* \nabla = \nabla$ se e somente se $f \in Sp(2)/\pm 1$. Obtemos então o espaço $SL(2, \mathbb{H})/Sp(2)$ de conexões auto-duais módulo

equivalência gauge. Em [A-H-S] temos a demonstração que o processo acima nos dá de fato, todas as conexões auto-duais, isto é, o espaço modular do fibrado de Hopf. O espaço $SL(2, \mathbb{H})/Sp(2)$ pode ser parametrizado por transformações conformes de $HP^1 \cong S^4$, expressas na forma local por

$$T_{\lambda, b}(x) = \lambda(x + b) \quad \lambda > 0, b \in S^4,$$

se identificamos $T_{\lambda, b} \cong T_{(1/\lambda), b^*}$ onde b^* é o ponto antípoda de b . Tais transformações, por pull-back do instanton básico, definem os instantons

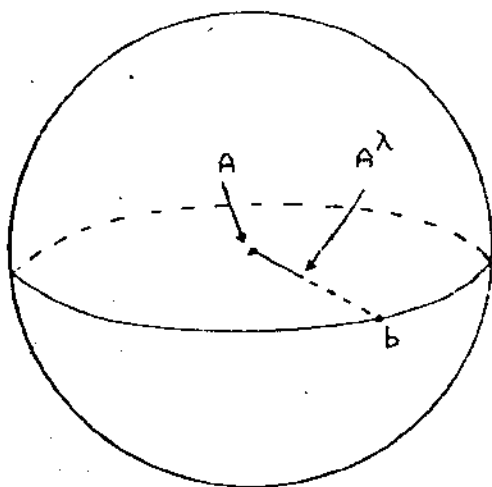
$$A^\lambda = T_{\lambda, b}^* A = \text{Im} \left(\frac{(x-b)d\bar{x}}{\lambda^2 + |x-b|^2} \right)$$

$$R^\lambda = T_{\lambda, b}^* R = \lambda^2 \frac{dx \wedge d\bar{x}}{(\lambda^2 + |x|^2)^2}$$

onde $0 < \lambda \leq 1$ (ver [F-U p.104]).

Temos agora uma boa descrição do espaço modular do fibrado de Hopf. Tal espaço é uma bola 5-dimensional B^5 com o instanton A em seu centro e o raio que liga o centro a $b \in \partial B^5 \cong S^4$ parametrizado pelos instantons A^λ .

ESPAÇO MODULAR DO FIBRADO DE HOPF



Como já observamos anteriormente que o instanton básico define métricas de Kaluza-Klein que nada mais são do que variações da métrica canônica. O problema que vamos estudar pode então ser formulado da forma:

Quanto podemos ir ao longo das linhas radiais do espaço modular do fibrado de Hopf tal que as métricas g_t^λ , definidas pelos instantons A^λ , ainda definem curvatura seccional positiva em S^2 para t suficientemente pequeno?

Em razão das simetrias envolvidas podemos supor $b = 0$ ($0 \in H = S^4 - \{\text{ponto}\}$) ([L p. 46]).

Para aplicarmos o Teorema 1.1 aos instantons

$$A^\lambda = \text{Im} \left(\frac{x d\bar{x}}{\lambda^2 + |x|^2} \right)$$

precisamos de uma longa e tediosa sequência de cálculos. Achamos conveniente explicitar todos estes cálculos.

Vamos tomar em R^4 a métrica induzida pela projeção estereográfica $\bar{g} = \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^2 g$, onde g é a métrica canônica

em R^4 . Uma base ortonormal em relação a $\bar{g}$ é dada por

$$X_i = \left(\frac{1+|x|^2}{2} \right) e_i, \dots, X_4 = \left(\frac{1+|x|^2}{2} \right) e_4$$

onde $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, ..., $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ são os campos canônicos de R^4 .

Se $V_1 = i$, $V_2 = j$, $V_3 = k$ é a base canônica da álgebra ImCHD e

$$H_{ij}^a = \langle R^\lambda(X_i, X_j), V_a \rangle$$

$$H_{ij,i}^a = \langle \nabla_{X_i} R^\lambda(X_i, X_j), V_a \rangle.$$

Temos que

$$(7) (\nabla_{x_i} R^\lambda)(X_i, X_j) = \nabla_{x_i} (R^\lambda(X_i, X_j)) - R^\lambda(\tilde{\nabla}_{x_i} X_i, X_j) - R^\lambda(X_i, \tilde{\nabla}_{x_i} X_j),$$

onde $\tilde{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita relativa a métrica $\tilde{g}$. A conexão no termo $\nabla_{x_i} (R^\lambda(X_i, X_j))$ é a conexão no fibrado

$G_E = \{ L \in \text{Hom}_H(E, E); L^t = -L \}$ induzida pela conexão ∇ em E .

Tal conexão é da forma $\nabla(R^\lambda)(\phi) = \nabla(R^\lambda \phi) - R^\lambda(\nabla \phi)$. Notando que

$G_E = \mathbb{R}^4 \times \text{Im}(\text{CHD})$, vamos descrever a conexão induzida em termos

da trivialização de G_E . Seja $\nabla = d + A$ a conexão no fibrado

trivializado $E = \mathbb{R}^4 \times H$. Se ϕ é uma seção no fibrado

$G_E = \mathbb{R}^4 \times \text{Im}(\text{CHD})$ e ψ uma seção no fibrado E temos

$$(\nabla \phi)(\psi) = \nabla(\phi(\psi)) - \phi(\nabla(\psi)) = (d + A)\phi(\psi) - \phi((d + A)\psi) = d(\phi(\psi))$$

$$+ A\phi(\psi) - \phi(d\psi) - \phi(A\psi) = (d\phi)\psi + \phi(d\psi) + A\phi(\psi) - \phi(d(\psi)) -$$

$$\phi(A\psi) = (d\phi + [A, \phi])(\psi).$$

Segue então que a conexão em G_E é da forma $d + [A, \cdot]$.

Podemos agora calcular o primeiro termo de (7)

$$\begin{aligned} \nabla_{x_i} (R^\lambda(X_i, X_j)) &= \frac{1+|x|^2}{2} \cdot \nabla_{e_i} (R^\lambda(X_i, X_j)) = \\ &= \frac{1+|x|^2}{2} \langle e_i (R^\lambda(X_i, X_j)) + [A(e_i), R^\lambda(X_i, X_j)] \rangle. \end{aligned}$$

Os termos da expressão acima são:

$$R^\lambda(X_i, X_j) = \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + |x|^2)^2} dx \wedge d\bar{x} \left(\frac{1+|x|^2}{2} e_i, \frac{1+|x|^2}{2} e_j \right) =$$

$$\frac{\lambda^2}{4} \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2 + |x|^2} \right)^2 dx \wedge d\bar{x} (e_i, e_j).$$

$$\begin{aligned} e_i (R^\lambda(X_i, X_j)) &= \frac{2\lambda^2}{4} \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2 + |x|^2} \right) (2x_i(\lambda^2 + |x|^2) - 2x_i(1+|x|^2)) \\ &\quad \cdot \frac{dx \wedge d\bar{x}}{(\lambda^2 + |x|^2)^2} (e_i, e_j). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[A(e_i), R^\lambda(X_i, X_j)] &= [Im(\frac{x d\bar{x}}{\lambda^2 + |x|^2}(e_i)), R^\lambda(X_i, X_j)] = \\
&= \frac{1}{\lambda^2 + |x|^2} [Im(x d\bar{x}(e_i)), \frac{\lambda^2}{4} (\frac{1 + |x|^2}{\lambda^2 + |x|^2})^2 dx \wedge d\bar{x}(e_i, e_j)] = \\
&= \frac{\lambda^2}{4} \frac{(1 + |x|^2)^2}{(\lambda^2 + |x|^2)^3} [Im(x d\bar{x}(e_i)), dx \wedge d\bar{x}(e_i, e_j)].
\end{aligned}$$

Para calcularmos os outros termos de (7) precisamos da seguinte relação para a conexão de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ definida por $\tilde{g}$ e a conexão de Levi-Civita D definida pela métrica canônica de $\mathbb{R}^4$.

$$\tilde{\nabla}_X Y = D_X Y + X(\varphi)Y + Y(\varphi)X - \langle X, X \rangle \text{grad} \varphi$$

onde $\varphi(x) = \ln(2) - \ln(1 + |x|^2)$ e $\text{grad} \varphi$ é o campo gradiente de φ ([P p.178]). Temos então $\text{grad} \varphi(x) = \frac{-2}{1 + |x|^2} x$

$$X_i(\varphi) = \langle X_i, \text{grad} \varphi \rangle = \langle \frac{1 + |x|^2}{2} e_i, \frac{-2}{1 + |x|^2} x \rangle = -\langle e_i, x \rangle = -x_i$$

(onde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$).

$$\text{Portanto} \quad \tilde{\nabla}_{X_i} X_i = \nabla_{X_i} X_i + 2X_i(\varphi)X_i - \langle X_i, X_i \rangle \text{grad} \varphi =$$

$$\nabla_{\frac{1 + |x|^2}{2} e_i} (\frac{1 + |x|^2}{2} e_i) - 2x_i (\frac{1 + |x|^2}{2} e_i) - \frac{(1 + |x|^2)^2}{4} \frac{-2}{1 + |x|^2} x =$$

$$\frac{1 + |x|^2}{2} (\nabla_{e_i} \frac{1 + |x|^2}{2} e_i) - (1 + |x|^2) x_i e_i + \frac{1 + |x|^2}{2} x =$$

$$\frac{1 + |x|^2}{2} (e_i (\frac{1 + |x|^2}{2} e_i) + \frac{1 + |x|^2}{2} \nabla_{e_i} e_i) - (1 + |x|^2) x_i e_i +$$

$$\frac{1 + |x|^2}{2} x = \frac{1 + |x|^2}{2} (\frac{2x_i e_i}{2}) - (1 + |x|^2) x_i e_i + \frac{1 + |x|^2}{2} x =$$

$$- (\frac{1 + |x|^2}{2}) x_i e_i + \frac{1 + |x|^2}{2} x.$$

$$\tilde{\nabla}_{x_i} X_j = \nabla_{x_i} X_j + X_i(\varphi)X_j + X_j(\varphi)X_i - \langle X_i, X_j \rangle \text{grad} \varphi =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1+|x|^2}{2} e_i \left(\frac{1+|x|^2}{2} e_j - x_i \left(\frac{1+|x|^2}{2} e_j - x_j \left(\frac{1+|x|^2}{2} e_i \right) \right) \right) = \\ & \frac{1+|x|^2}{2} (\nabla_{e_i} \frac{1+|x|^2}{2} e_j) - x_i \left(\frac{1+|x|^2}{2} e_j - x_j \left(\frac{1+|x|^2}{2} e_i \right) \right) = \\ & \frac{1+|x|^2}{2} (e_i \left(\frac{1+|x|^2}{2} e_j \right) + \frac{1+|x|^2}{2} \nabla_{e_i} e_j) - x_i \left(\frac{1+|x|^2}{2} e_j - \right. \\ & \left. x_j \left(\frac{1+|x|^2}{2} e_i \right) \right) = \frac{1+|x|^2}{2} (x_i e_j) - x_i \left(\frac{1+|x|^2}{2} e_j - x_j \left(\frac{1+|x|^2}{2} e_i \right) \right) = \\ & - x_j \left(\frac{1+|x|^2}{2} e_i \right). \end{aligned}$$

Podemos agora calcular os termos

$$\begin{aligned} R^\lambda(\tilde{\nabla}_{x_i} X_i, X_j) &= \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + |x|^2} dx \wedge d\bar{x} \left(- \frac{1+|x|^2}{2} x_i e_i + \frac{1+|x|^2}{2} x_j \frac{1+|x|^2}{2} e_j \right) = \\ &= \frac{\lambda^2}{4} \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2 + |x|^2} \right)^2 (-x_i dx \wedge d\bar{x}(e_i, e_j) + dx \wedge d\bar{x}(x, e_j)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^\lambda(X_i, \tilde{\nabla}_{x_i} X_j) &= \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + |x|^2)^2} dx \wedge d\bar{x} \left(\frac{1+|x|^2}{2} e_i, -x_j \frac{1+|x|^2}{2} e_i \right) = \\ &= - \frac{\lambda^2}{4} \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2 + |x|^2} \right)^2 x_j dx \wedge d\bar{x}(e_i, e_i) = 0 \end{aligned}$$

Finalmente obtemos a expressão de (7)

$$\begin{aligned} (\nabla_{x_i} R^\lambda)(X_i, X_j) &= \frac{1+|x|^2}{2} \left(\frac{\lambda^2(1+|x|^2)x(\lambda^2-1)dx \wedge d\bar{x}(e_i, e_j)}{(\lambda^2 + |x|^2)^3} + \right. \\ & \quad \left. \frac{\lambda^2}{4} \frac{(1+|x|^2)^2}{(\lambda^2 + |x|^2)^3} \{ \text{Im}(x d\bar{x}(e_i)) , dx \wedge d\bar{x}(e_i, e_j) \} \right) - \\ &= - \frac{\lambda^2}{4} \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2 + |x|^2} \right)^2 (-x_i dx \wedge d\bar{x}(e_i, e_j) + dx \wedge d\bar{x}(x, e_j)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^2 \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2+|x|^2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+|x|^2} \right) x_i dx \wedge d\bar{x}(e_i, e_j) + \right. \\
&\quad \left. \frac{1+|x|^2}{8(\lambda^2+|x|^2)} [Im(xd\bar{x}(e_i)) \cdot dx \wedge d\bar{x}(e_i, e_j)] - \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{4} (-x_i dx \wedge d\bar{x}(e_i, e_j) + dx \wedge d\bar{x}(x, e_j)) \right).
\end{aligned}$$

Fixando valores para i e j temos:

Caso $i = 1, j = 2$.

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, 0)$$

$$dx \wedge d\bar{x}(e_1, e_2) = dx(e_1)d\bar{x}(e_2) - dx(e_2)d\bar{x}(e_1) = 1(-V_1) - V_1 \cdot 1 = -2V_1$$

$(V_1 = i, V_2 = j, V_3 = k)$ é base canônica de ImH .

$$Im(xd\bar{x}(e_1)) = Im(x) = x_2 V_1 + x_3 V_2 + x_4 V_3.$$

$$[Im(xd\bar{x}(e_1)), -2V_1] = -2[x_2 V_1 + x_3 V_2 + x_4 V_3, V_1] =$$

$$-2x_3(V_2 V_1 - V_1 V_2) - 2x_4(V_3 V_1 - V_1 V_3) = 4x_3 V_3 - 4x_4 V_2.$$

$$dx \wedge d\bar{x}(x, e_2) = dx(x)d\bar{x}(e_2) - dx(e_2)d\bar{x}(x) =$$

$$(x_1 + x_2 V_1 + x_3 V_2 + x_4 V_3)(-V_1) - V_1(x_1 - x_2 V_1 - x_3 V_2 - x_4 V_3) =$$

$$(-x_1 V_1 + x_2 + x_3 V_3 - x_4 V_2 - x_1 V_1 - x_2 + x_3 V_3 - x_4 V_2) =$$

$$-2x_1 V_1 + 2x_3 V_3 - 2x_4 V_2.$$

Utilizando as expressões acima temos

$$(\nabla_{x_1} R^\lambda)(X_1, X_2) = \lambda^2 \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2+|x|^2} \right)^2 \left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2+|x|^2} x_1 V_1 + \right.$$

$$\left. \frac{1+|x|^2}{8(\lambda^2+|x|^2)} (4x_3 V_3 - 4x_4 V_2) - \frac{1}{4} (2x_1 V_1 - 2x_1 V_1 + 2x_3 V_3 - 2x_4 V_2) \right) =$$

$$\lambda^2 \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2+|x|^2} \right)^2 \left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2+|x|^2} x_1 V_1 + \frac{1+|x|^2}{2(\lambda^2+|x|^2)} x_3 V_3 - \frac{1+|x|^2}{2(\lambda^2+|x|^2)} x_4 V_2 \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{x_3 V_3}{2} + \frac{x_4 V_2}{2} \rangle \\
& \lambda^2 \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2+|x|^2} \right)^2 \left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2+|x|^2} x_1 V_1 + \frac{(1+|x|^2 x_3 V_3 - x_3 V_3 (\lambda^2+|x|^2))}{2(\lambda^2+|x|^2)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(1+|x|^2 x_4 V_2 + x_4 V_2 (\lambda^2+|x|^2))}{2(\lambda^2+|x|^2)} \right) = \\
& \lambda^2 \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2+|x|^2} \right)^2 \left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2+|x|^2} x_1 V_1 + \frac{1-\lambda^2}{2(\lambda^2+|x|^2)} x_3 V_3 + \frac{\lambda^2-1}{2(\lambda^2+|x|^2)} x_4 V_2 \right).
\end{aligned}$$

Temos então

$$H_{12,1}^1 = \lambda^2 \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2+|x|^2} \right)^2 \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2+|x|^2} x_1$$

$$H_{12,1}^2 = \lambda^2 \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2+|x|^2} \right)^2 \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+|x|^2} x_4$$

$$H_{12,1}^3 = \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2+|x|^2} \right)^2 \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2+|x|^2} x_3$$

$$H_{12}^1 = \langle R^\lambda(X_1, X_2), V_1 \rangle = \left\langle \frac{\lambda^2}{4} \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2+|x|^2} \right)^2 dx \wedge d\bar{x}(e_1, e_2), V_1 \right\rangle =$$

$$\frac{\lambda^2}{4} \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2+|x|^2} \right)^2 \langle dx \wedge d\bar{x}(e_1, e_2), V_1 \rangle.$$

De onde segue que

$$H_{12}^1 = - \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2+|x|^2} \right)^2 \quad \text{se } s = 2 \quad \text{e} \quad \text{zero se } s \neq 2.$$

Podemos agora aplicar o Teorema 1.1 ao fibrado de Hopf $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$ onde estamos considerando em S^7 a métrica g_t induzida pela métrica canônica de S^4 e a métrica bi-invariante de S^3 . Queremos portanto saber se

$$(H_{12,1}^1)^2 < \sum_{s=1}^4 (H_{1s}^1)^2$$

isto é

$$\lambda^4 \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2+|x|^2} \right)^4 \left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2+|x|^2} \right)^2 (x_1)^2 < \frac{\lambda^4}{4} \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2+|x|^2} \right)^4.$$

Simplificando a expressão obtemos

$$\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2+|x|^2} \right)^2 (x_1)^2 < \frac{1}{4}$$

que é equivalente a

$$f(x) = (1-\lambda^2)^2 \left(\frac{x_1}{\lambda^2+|x|^2} \right)^2 - \frac{1}{4} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^4.$$

Como $|x|^2 \geq (x_1)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^4$ fazendo

$$g(x_1) = (1-\lambda^2)^2 \left(\frac{x_1}{\lambda^2+x_1^2} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

temos $g(x_1) \geq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^4$.

$$g'(x_1) = 2(1-\lambda^2)^2 \left(\frac{x_1}{\lambda^2+x_1^2} \right) \left(\frac{\lambda^2+x_1^2-x_1 \cdot 2x_1}{(\lambda^2+x_1^2)^2} \right) = \frac{2(1-\lambda^2)^2 x_1 (\lambda^2-x_1^2)}{(\lambda^2+x_1^2)^3}.$$

Os pontos críticos de $g(x_1)$ são $x_1 = 0$, $x_1 = \lambda$, $x_1 = -\lambda$.

$$g(0) = -\frac{1}{4}, \quad g(\lambda) = g(-\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)^2}{4\lambda^2} - \frac{1}{4}.$$

Notando que $\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} g(x_1) = -\frac{1}{4}$ temos que

$g(x_1) < 0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$ se e somente se $g(\lambda) < 0$, isto é,

$$\frac{(1-\lambda^2)^2}{4\lambda^2} < \frac{1}{4} \iff (1-\lambda^2)^2 < \lambda^2 \iff 1-\lambda^2 < \lambda$$

$$\iff \lambda^2 + \lambda - 1 > 0 \iff \lambda > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Fazendo $i = 2$, $j = 3$, com cálculos semelhantes aos feitos acima obtemos

$$H_{2,3,2}^1 = \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{1+|x|^2}{\lambda^2+|x|^2} \right)^2 \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2+|x|^2} \approx_4, \text{ etc.}$$

É claro então que, pelas simetrias envolvidas, os cálculos de todos os $H_{ij,i}^a$ $i, j = 1, 2, 3, 4$ e $a = 1, 2, 3$ são obtidos de maneira semelhante e obtemos então o resultado.

TEOREMA 1.6: Para $\lambda \in \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right)$, os instantons definidos por A^λ são tais que (S^7, g_t) possui curvatura positiva para t suficientemente pequeno.

CAPÍTULO II

UM TEOREMA DE FINITUDE PARA FIBRADOS FAT

Weinstein em [W-1] introduz o conceito de fibrados fat e coloca a questão de se encontrar os S^3 -fibrados principais sobre S^4 que admitem conexão fat. Derdzinski e Rigas em [D-R-1] demonstraram que apenas o fibrado de Hopf $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$ é fat. Neste capítulo vamos generalizar este resultado (Teorema 2.8), provando que sobre uma variedade 4-dimensional compacta e orientável o número de fibrados fat é finito.

1. CONEXÕES FAT

Seja $G \rightarrow P \rightarrow M \in \text{PCM}, G$ um fibrado principal diferenciável com uma forma de conexão ω e uma forma de curvatura Ω . Temos que Ω é uma 2-forma horizontal em TP com valores na álgebra de Lie do grupo G (que denotaremos por $\mathfrak{g}$). Podemos obter 2-formas horizontais reais tomando funcionais lineares $\mu : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ e fazendo a composição $\mu \circ \Omega$. Seja $\mathfrak{g}^*$ o conjunto dos funcionais lineares em $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^{**} = \mathfrak{g}^* - \{\text{funcional nulo}\}$. Dado um subconjunto $S \subseteq \mathfrak{g}^{**}$ diremos que uma conexão ω em PCM, G é S-fat se $\mu \circ \Omega$ é não degenerada $\forall \mu \in S$, em cada subespaço horizontal de TP. Se PCM, G admite uma conexão $\mathfrak{g}^{**}$ -fat

diremos que $P(M, G)$ é um fibrado fat. Para a teoria geral dos fibrados fat, sua relação com as variedades simpléticas, as definições e notação básica ver [W-2].

O conceito de conexão fat surgiu da seguinte construção: Dado um fibrado $P(M, G)$ com uma conexão ω , vimos no capítulo I que podemos definir de maneira natural métricas g_t em P . Temos que as métricas g_t definem curvaturas seccionais vertizontais positivas em todo ponto de P se e somente a conexão ω é fat (a demonstração deste fato segue imediatamente da definição de conexão fat e da fórmula da curvatura vertizional na proposição 1.1).

O conceito de fatness no caso em que a variedade da base é 4-dimensional implica em uma certa rigidez para o fibrado no sentido que passaremos a descrever. Seja M uma variedade 4-dimensional orientada e $\Lambda^2 M$ o fibrado sobre M das 2-formas. Munindo M de uma estrutura conforme fica definido o operador estrela de Hodge, que é um endomorfismo $*$: $\Lambda^2 M \longrightarrow \Lambda^2 M$ que satisfaz $(*)^2 = 1$ (identidade). $\Lambda^2 M$ se decompõe como soma direta dos auto-espacos referentes aos auto-valores ± 1 de $*$. Vamos denotar esta decomposição por $\Lambda^2 M = \Lambda_+^2 M \oplus \Lambda_-^2 M$. Os fibrados $R^3 \dashrightarrow \Lambda_{\pm}^2 M \longrightarrow M$ definem $SOC(3)$ -fibrados principais que designaremos por $SOC(3) \dashrightarrow P_{\pm}(TMD) \longrightarrow M$.

A construção acima se generaliza como se segue: Seja ξ um fibrado vetorial 4-dimensional orientado sobre uma variedade M ($R^4 \dashrightarrow \xi \longrightarrow M$). Munindo ξ de um produto interno em cada fibra fica definido em $\Lambda^2(\xi)$ o operador estrela de Hodge

e a decomposição $\Lambda^2(\xi) = \Lambda_+^2(\xi) \oplus \Lambda_-^2(\xi)$. Os $SO(3)$ -fibrados serão denominados por $SO(3) \text{ --- } P_{\pm}(\xi) \longrightarrow M$.

O recobrimento canônico $Spin(4) \cong S^3 \times S^3 \longrightarrow SO(4)$ define em $SO(4)$ dois subgrupos normais isomorfos a S^3 que denominaremos por $S_{\pm}^3$ ($S_+^3 = \{p : R^4 \longrightarrow R^4 (x \longrightarrow px)\}$, $S_-^3 = \{p : R^4 \longrightarrow R^4 (x \longrightarrow xp)\}$ onde $p \in S^3$ e a multiplicação é quaterniônica). Portanto, dado um fibrado $P(M, SO(4))$ ficam definidos dois $SO(3)$ -fibrados principais da forma, $SO(4)/S_{\pm}^3 \cong SO(3) \text{ --- } P/S_{\pm}^3 \longrightarrow M$, que denominaremos por $P_{\pm} = P/S_{\pm}^3$. Devemos observar que se ξ é o fibrado vetorial associado a $P(M, SO(4))$ pela ação canônica de $SO(4)$ em R^4 , então a decomposição

$$\Lambda^2(\xi) = \Lambda_+^2(\xi) \oplus \Lambda_-^2(\xi)$$

se relaciona aos fibrados $P_{\pm}(M, SO(3))$ no sentido que $P_{\pm}(\xi) = P_{\pm}$. (Obs.: Sempre que nos referimos a um fibrado vetorial associado ξ , estaremos supondo que ξ é associado a P , pela ação canônica de $SO(4)$ em R^4).

Podemos agora enunciar os resultados:

TEOREMA 2.1. ([W-2 teorema 7.2]). Seja P um $SO(4)$ -fibrado principal sobre uma variedade 4-dimensional orientável M e ξ o fibrado vetorial 4-dimensional associado. Se P admite conexão $SO(3)$ -fat então, para escolhas adequadas de orientações, $\Lambda_+^2(\xi)$ é isomorfo a $\Lambda_+^2 M$.

A demonstração deste teorema está baseada no fato que

se Ω é a forma de curvatura definida pela conexão $SO(3)$ -fat, podemos considerar Ω como uma 2-forma em M com valores no fibrado adjunto AdP , isto é, Ω se estende a uma aplicação linear $\Lambda^2 M \xrightarrow{\Omega} AdP$. Observando que $AdP = P \times \hat{SO}(4)$ onde a ação de $SO(4)$ em $\hat{SO}(4)$ é a ação adjunta, $\Lambda^2 \xi = P \times \Lambda^2(R^4)$ e $\Lambda^2(R^4) \cong \hat{SO}(4)$ temos que AdP é isomorfo a $\Lambda^2 \xi$. A condição de fatness e as dimensões apropriadas nos permitem mostrar que Ω define um isomorfismo $\Lambda^2_+ M \cong \Lambda^2_+ \xi$.

Um caso particular do Teorema 2.1 pode ser enunciado da forma:

TEOREMA 2.2. ([D-R-1 teorema 1]). Seja P um $SO(3)$ -fibrado sobre uma variedade 4-dimensional orientável M . Se P admite uma 2-forma horizontal de tipo tensorial e fat então M admite uma orientação tal que $P(\Lambda^2_+ M)$ é isomorfo a P .

O fato essencial na dimensão 4 é que se pode relacionar o conceito de fatness com o conceito de auto-dualidade. Isto foi feito em [D-R-1] da seguinte forma: Seja $(P(M, G))$ um fibrado principal com $G = S^3$ ou $SO(3)$ e uma conexão fat ω , então existe em M uma estrutura conforme orientada tal que em relação a esta estrutura conforme Ω , é uma 2-forma horizontal auto-dual. Utilizando então a auto-dualidade temos:

TEOREMA 2.3. ([D-R-1 teorema 2]). Seja $P(M, SO(4))$ um fibrado principal sobre uma variedade 4-dimensional compacta e orientável. Se $P(M, SO(4))$ admite conexão $SO(3)$ -fat então para uma escolha adequada de orientação em M vale:

- i) P_+ é isomorfo a $P(A^2_+ M)$.
- ii) $0 \leq |p_1(P_-)[M]| < |3\tau(M) + 2\chi(M)|$

(onde $p_1(P_-)$ é a primeira classe de Pontrjagin e $\tau(M)$, $\chi(M)$ são respectivamente a assinatura e a característica de Euler de M).

Utilizando o Teorema 2.3 é possível então resolver a questão enunciada em [W-1].

TEOREMA 2.4. ([D-R-1 teorema 3]). Seja $P(S^4, SO(4))$ um fibrado principal com uma conexão $SO(3)$ -fat. Então para uma orientação adequada $P_+(S^4, SO(3))$ é isomorfo ao fibrado de Hopf e $P_-(S^4, SO(3))$ é um fibrado trivial.

2. UM TEOREMA DE FINITUDE

Para generalizarmos o Teorema 2.4 usaremos o Teorema 2.3. A demonstração deste teorema é baseada em uma fórmula para o primeiro número de Pontrjagin. Como não encontramos nenhuma referência para a demonstração desta fórmula, vamos apresentar aqui uma demonstração detalhada. Seja $P(M, SO(4))$ um fibrado principal e $R^4 \xrightarrow{\xi} M$ o fibrado vetorial associado. Utilizando as notações fixadas no primeiro parágrafo temos:

PROPOSIÇÃO 2.5.

$$p_1(\Lambda_+^2 \xi) = p_1(\xi) + 2e(\xi)$$

$$p_1(\Lambda_-^2 \xi) = p_1(\xi) - 2e(\xi)$$

Conde $e(\xi)$ é a classe de Euler do fibrado ξ .

Demonstração: A conexão ω em $PCM, SO(4)$ induz uma conexão ∇ no fibrado vetorial ξ que por sua vez induz uma conexão $\tilde{\nabla}$ no fibrado $\Lambda^2 \xi$ da forma: Se $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é um referencial ortonormal local em ξ então $\{e_i \wedge e_j, i < j\}$ é um referencial ortogonal local em $\Lambda^2(\xi)$ e temos

$$\tilde{\nabla}(e_i \wedge e_j) = \nabla e_i \wedge e_j + e_i \wedge \nabla e_j.$$

A conexão $\tilde{\nabla}$ se decompõe em relação a soma direta

$$\Lambda^2(\xi) = \Lambda_+^2(\xi) \oplus \Lambda_-^2(\xi) \quad \text{em} \quad \tilde{\nabla} = \tilde{\nabla}_+ + \tilde{\nabla}_-$$

definindo portanto conexões em cada um dos subfibrados $\Lambda_{\pm}^2(\xi)$.

A demonstração é simples. A expressão de $\tilde{\nabla}_+$ é obtida da seguinte forma: um referencial ortonormal local de $\Lambda_+^2(\xi)$ é dado por

$$f_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4), \quad f_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4),$$

$$f_3^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3).$$

como $\nabla e_i = \sum_{j=1}^4 \omega_{ij} e_j$ temos após um pequeno cálculo

$$\tilde{\nabla}_+(f_1^+) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nabla e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge \nabla e_2) = (\omega_{23} + \omega_{14})f_2^+ + (\omega_{24} - \omega_{13})f_3^+$$

$$\tilde{\nabla}_+(f_2^+) = (\omega_{32} + \omega_{41})f_1^+ + (\omega_{34} + \omega_{12})f_3^+$$

$$\tilde{\nabla}_+(f_3^+) = (\omega_{42} + \omega_{13})f_1^+ + (\omega_{43} + \omega_{21})f_2^+.$$

de onde o resultado segue (para $\tilde{\nabla}_-$ os cálculos são semelhantes). Temos então que se $\tilde{\omega}_+$ é a conexão em $P_+(M, SO(4))$ induzida por ω (ou equivalentemente $\tilde{\omega}_+$ induz a conexão $\tilde{\nabla}_+$ em $\Lambda^2(\xi)$) temos

$$\tilde{\omega}_+ = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{23} + \omega_{14} & \omega_{24} + \omega_{31} \\ \omega_{32} + \omega_{41} & 0 & \omega_{34} + \omega_{12} \\ \omega_{42} + \omega_{13} & \omega_{43} + \omega_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

A curvatura $\tilde{\Omega}_+$ de $\tilde{\omega}_+$ satisfaz a equação de estrutura

$$\tilde{\Omega}_+ = d\tilde{\omega}_+ + \frac{1}{2} [\tilde{\omega}_+, \tilde{\omega}_+].$$

Podemos então, após um cálculo um pouco longo mas imediato, obter a matriz de $\tilde{\Omega}_+$. Se Ω é a curvatura de uma conexão ω em um fibrado principal e R a curvatura no fibrado vetorial associado definida pela conexão ∇ induzida por ω , temos a relação

$$\langle R(X_1, X_2)\xi_1, \xi_2 \rangle_{\xi} = \langle 2(X_1^*, X_2^*)(u^{-1}(\xi_1)), u^{-1}(\xi_2) \rangle_{R^4}$$

(ver [K-N v.I p.201] para as definições).

Considerando então R_{ij} como a 2-forma

$$R_{ij}(X, Y) = \langle R(X, Y)\xi_1, \xi_2 \rangle$$

temos em relação a um referencial ortonormal local

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ que a matriz $\tilde{\Omega}_+$ é da forma

$$\tilde{\Omega}_+(e_i, e_j) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & (R_{23ij} + R_{44ij}) & (R_{43ij} - R_{24ij}) \\ (R_{32ij} + R_{41ij}) & 0 & (R_{43ij} + R_{21ij}) \\ (R_{34ij} + R_{42ij}) & (R_{34ij} + R_{12ij}) & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos agora calcular as classes de Pontrjagin. Primeiramente

vamos relembrar as definições ([K-N v.II p.292]).

Seja E um fibrado vetorial real sobre M com fibra $\mathbb{R}^q$.
Seja $E^c = E \otimes \mathbb{C}$. A k -ésima classe de Pontrjagin de E é definida por

$$p_k(E) = (-1)^k c_{2k}(E^c) \in H^{4k}(M; \mathbb{R})$$

onde $c_{2k}(E^c)$ é a $2k$ -ésima classe de Chern de E^c . Vamos definir funções polinomiais $\text{Ad}(\mathfrak{gl}(q, \mathbb{R}))$ -invariantes $g_0, g_1, \dots, g_q$ em $\mathfrak{gl}(q, \mathbb{R})$ da forma

$$\det(\lambda I_q - \frac{1}{2\pi} X) = \sum_{k=0}^q g_k(X) \lambda^{q-k}.$$

Pela teoria de Chern-Weil, se Ω é a curvatura de uma conexão ω no fibrado de bases de E , então existe uma única $4k$ -forma fechada β_k em M tal que

$$\pi^*(\beta_k) = g_{2k}(\Omega)$$

onde π é a projeção do fibrado de bases.

Temos a seguinte expressão para g_{2k} :

$$g_{2k}(\Omega) = \frac{1}{(2\pi)^{2k} (2k)!} \sum \delta_{i_1 \dots i_{2k}}^{j_1 \dots j_{2k}} \Omega_{j_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{j_{2k}}^{i_{2k}}$$

onde a soma é em todos os subconjuntos ordenados $(i_1, \dots, i_{2k})$ de $2k$ -elementos de $(1, 2, \dots, q)$ e todas as permutações $(j_1, \dots, j_{2k})$ de $(i_1, \dots, i_{2k})$ e $\delta_{i_1 \dots i_{2k}}^{j_1 \dots j_{2k}}$ é o sinal da permutação (obs.: $\Omega_i^j = \Omega_{ij}$).

No caso $q = 4$ e $k = 1$ temos

$$g_2(\Omega) = \frac{2}{8\pi^2} (-\Omega_2^1 \wedge \Omega_1^2 - \Omega_3^1 \wedge \Omega_1^3 - \Omega_4^1 \wedge \Omega_1^4 - \Omega_2^3 \wedge \Omega_3^2 - \Omega_4^3 \wedge \Omega_3^4 - \Omega_2^4 \wedge \Omega_4^2 - \Omega_3^4 \wedge \Omega_4^3).$$

No caso $q = 3$ e $k = 1$ temos

$$g_2(\Omega) = \frac{2}{8\pi^2} (-\Omega_2^1 \wedge \Omega_1^2 - \Omega_3^1 \wedge \Omega_1^3 - \Omega_3^2 \wedge \Omega_2^3).$$

Temos então que

$$\begin{aligned} g_2(\tilde{\Omega}_+^2) &= \frac{2}{32\pi^2} \{ (R_{23} + R_{14}) \wedge (R_{23} + R_{14}) + \\ &+ (R_{13} - R_{24}) \wedge (R_{13} - R_{24}) + (R_{43} + R_{21}) \wedge (R_{43} + R_{21}) \} = \\ &= \frac{2}{32\pi^2} \{ R_{23} \wedge R_{23} + 2R_{23} \wedge R_{14} + R_{14} \wedge R_{14} + R_{13} \wedge R_{13} - 2R_{13} \wedge R_{24} + \\ &+ R_{24} \wedge R_{24} + R_{43} \wedge R_{43} + 2R_{43} \wedge R_{21} + R_{21} \wedge R_{21} \}. \end{aligned}$$

Observando que a curvatura Ω definida por ω em $(M, \text{SOC}(4))$ é da forma

$$\Omega = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & 0 & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & 0 & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\begin{aligned} g_2(\Omega) &= \frac{2}{32\pi^2} (R_{12} \wedge R_{12} + R_{13} \wedge R_{13} + R_{14} \wedge R_{14} + R_{23} \wedge R_{23} + \\ &+ R_{24} \wedge R_{24} + R_{34} \wedge R_{34}). \end{aligned}$$

Segue então que

$$p_1(\Lambda_+^2 \xi) = p_1(\xi) + \frac{4}{32\pi^2} (R_{23} \wedge R_{14} - R_{13} \wedge R_{24} + R_{43} \wedge R_{21}).$$

A classe de Euler de um fibrado vetorial orientado com fibra R^{2p} é representada por uma $2p$ -forma fechada em M cujo pull-back nos dá a $2p$ -forma

$$e(\Omega) = \frac{1}{2^{2p} p!} \sum \varepsilon_{i_1 \dots i_{2p}} \Omega_{i_1 i_2}^{i_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{2p-1} i_{2p}}^{i_{2p-1}}$$

onde o somatório é sobre todas as permutações de $(1, \dots, 2p)$ e $\varepsilon_{i_1 \dots i_{2p}}$ vale 1 ou -1 caso $(i_1, \dots, i_{2p})$ seja uma permutação par ou ímpar.

No caso de ξ , $p = 2$ e portanto

$$e(\xi) = \frac{1}{32\pi^2} (\Omega_2^1 \wedge \Omega_4^3 - \Omega_1^2 \wedge \Omega_4^3 + \Omega_1^2 \wedge \Omega_3^4 + \dots + \Omega_3^4 \wedge \Omega_1^2).$$

Temos uma soma com 24 termos que podem ser reduzidos a apenas 3 termos utilizando-se as relações

$$\Omega_i^j = -\Omega_j^i \text{ e } \Omega_i^j \wedge \Omega_k^s = \Omega_k^s \wedge \Omega_i^j.$$

Temos então

$$e(\xi) = \frac{1}{32\pi^2} (8\Omega_2^1 \wedge \Omega_4^3 - 8\Omega_3^1 \wedge \Omega_4^2 + 8\Omega_4^1 \wedge \Omega_3^2)$$

de onde segue que

$$e(\xi) = \frac{1}{16\pi^2} (R_{21} \wedge R_{43} - R_{19} \wedge R_{24} + R_{14} \wedge R_{23}).$$

Relacionando as expressões obtidas temos

$$p_1(\Lambda_+^2) = p_1(\xi) + 2e(\xi).$$

A outra fórmula segue de maneira semelhante. A conexão $\tilde{\omega}$ induzida por ω em P_- tem como curvatura a matriz

$$\tilde{\Omega}_- = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -R_{29} + R_{14} & R_{19} + R_{24} \\ -R_{32} + R_{41} & 0 & -R_{49} + R_{21} \\ R_{31} + R_{42} & -R_{34} + R_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

Uma observação deve ser feita no sentido que as equações

$$p_1(\Lambda_+^2) = p_1(\xi) + 2e(\xi)$$

$$p_1(\Lambda_-^2) = p_1(\xi) - 2e(\xi)$$

são simétricas em relação à orientação inicial de ξ . Quando alteramos a orientação de ξ as formas auto-duais se transformam em formas anti-autoduais em relação à nova orientação. Ocorre também o seguinte: se $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é um referencial ortonormal local de ξ positivamente orientado então

$$\begin{aligned} &\{e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2, e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3\} \\ &\{e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_4 - e_3 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4\} \end{aligned}$$

definem referenciais ortonormais locais positivamente orientados para $\Lambda_+^2(\xi)$ e $\Lambda_-^2(\xi)$, respectivamente. Se trocamos a orientação, por exemplo, para $\{e_2, e_1, e_3, e_4\}$ temos

$$\begin{aligned} &\{e_2 \wedge e_1 + e_3 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_1, e_2 \wedge e_4 + e_1 \wedge e_3\} = \\ &= \{-(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4), -(e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3), (e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4)\}, \end{aligned}$$

isto é, $\Lambda_+^2(\xi)$ se transforma em $\Lambda_-^2(\xi)$ em relação à nova orientação, porém com orientação invertida em relação à orientação anterior. Como as classes de Pontrjagin são independentes da orientação e a classe de Euler muda de sinal se a orientação é alterada. ([M-S p.184 e p.98]) temos que com uma mudança da orientação de ξ a equação

$$p_1(\Lambda_+^2 \xi) = p_1(\xi) + 2e(\xi)$$

se transforma na equação

$$p_1(\Lambda_-^2 \xi) = p_1(\xi) - 2e(\xi)$$

No caso particular em que ξ é o fibrado tangente TM de M , é usual escrevermos as equações da Proposição 2.5 em termos do primeiro número de Pontrjagin de M e da característica de Euler de M

$$p_1(\Lambda_+^2 MD[M]) = p_1(TMD[M]) + 2\chi(M).$$

Neste caso, como uma mudança de orientação de M também altera a classe fundamental $[M]$, uma mudança na orientação de M transforma a equação

$$p_1(\Lambda_+^2 MD[M]) = p_1(TMD[M]) + 2\chi(M)$$

$$\text{em} \quad -p_1(\Lambda_-^2 MD[M]) = -p_1(TMD[M]) + 2\chi(M)$$

$$\text{isto é} \quad p_1(\Lambda_-^2 MD[M]) = p_1(TMD[M]) - 2\chi(M).$$

Como aplicação da Proposição 2.5 podemos reobter sem nenhum esforço adicional a desigualdade de Thorpe-Hitchin: "se M é uma variedade 4-dimensional compacta que admite métrica de Einstein então $|\tau(M)| \leq \frac{2}{3} \chi(M)$ ".

Seja $P(M, SO(4))$ o fibrado de bases ortonormais de M (4-dimensional e compacta) e ω a conexão Riemanniana em P definida pela métrica de Einstein. ω induz conexões $\tilde{\omega}_\pm$ nos fibrados $P_\pm$. Calculamos anteriormente as formas de curvatura $\tilde{\Omega}_\pm$. Da expressão de $\tilde{\Omega}_\pm$ é imediato que a métrica em M é de

Einstein se e somente se $\tilde{\Omega}_+$ é auto-dual (ou de forma equivalente, $\tilde{\Omega}_-$ é anti-autodual), basta tomar (e_1, e_2, e_3, e_4) um referencial ortonormal local formado de vetores que diagonalizam o tensor de Ricci e vemos em que situação valem as igualdades:

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_+(e_1, e_2) &= \tilde{\Omega}_+(e_3, e_4) \\ \tilde{\Omega}_+(e_1, e_3) &= \tilde{\Omega}_+(e_4, e_2) \\ \tilde{\Omega}_+(e_1, e_4) &= \tilde{\Omega}_+(e_2, e_3) .\end{aligned}$$

Se $\tilde{\Omega}_+$ é auto-dual então $p_1(\Lambda^2_+ MD[M]) \geq 0$ e como temos também que $\tilde{\Omega}_-$ é anti-autodual $p_1(\Lambda^2_- MD[M]) \leq 0$ (estes fatos seguem da fórmula $p_1(ED[M]) = \frac{1}{4\pi^2} \int_M (|R^{\nabla}_+|^2 - |R^{\nabla}_-|^2)$ [L p.42]).

Logo

$$\left. \begin{aligned} p_1(TMD[M]) + 2\chi MD &\geq 0 \\ p_1(TMD[M]) - 2\chi MD &\leq 0 \end{aligned} \right\} \implies |p_1(TMD[M])| \leq 2\chi MD.$$

Pelo Teorema da assinatura de Hirzebruch ([M-S p.224])

$$p_1(TMD[M]) = 3\tau MD$$

e portanto

$$|\tau MD| \leq \frac{2}{3} \chi MD.$$

Vejamos o caso em que a igualdade ocorre. Neste caso, para uma orientação adequada de M , temos

$$p_1(\Lambda^2_+ MD[M]) = p_1(TMD[M]) + 2e(TMD[M]) = 3\tau MD + 2\chi MD = 0.$$

Necessitamos agora, para utilizarmos um Teorema de Dold e Whitney, calcular a segunda classes de Stiefel-Whitney de $\Lambda^2_+ M$ ([D-R-1 p.490]). Como não encontramos referência para este

cálculo, vamos fazê-lo aqui com detalhes.

PROPOSIÇÃO 2.6.

$$w_2(\Lambda_{\pm}^2 M) = w_2(TM)$$

Demonstração: O fibrado $R^6 \dashrightarrow \Lambda^2 M \longrightarrow M$ pode ser construído a partir do fibrado $R^4 \dashrightarrow TM \longrightarrow M$ da seguinte forma: seja $\{U_{\alpha}, \alpha \in I\}$ uma cobertura de M por abertos que trivializam TM e $\{g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \longrightarrow SO(4)\}$ as correspondentes funções de transição.

$SO(4)$ atua em $\Lambda^2 R^4$ da forma

$$\begin{aligned} SO(4) \times \Lambda^2 R^4 &\xrightarrow{\Phi} \Lambda^2 R^4 \\ A \times v \wedge w &\longrightarrow Av \wedge Aw \end{aligned}$$

Esta ação define uma representação ψ de $SO(4)$ em $SO(6)$. Temos então que o fibrado $\Lambda^2 M$ é dado por $\{U_{\alpha}, \alpha \in I\}$ e $\{\psi \circ g_{\alpha\beta}, \psi \circ g_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \longrightarrow SO(4) \subseteq SO(6)\}$.

Devemos observar primeiramente que ψ não é uma representação fiel pois $\psi(A) = \psi(-A) \forall A \in SO(4)$. Temos também que a ação Φ deixa invariantes os subespaços $\Lambda_+^2 M$ e $\Lambda_-^2 M$ de $\Lambda^2 M$. Tal fato segue da seguinte observação: seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ referencial ortonormal local positivamente orientado de M , logo $\{v_1 = Ae_1, v_2 = Ae_2, v_3 = Ae_3, v_4 = Ae_4\}, A \in SO(4)$, também é um referencial ortonormal positivo. Se $\alpha = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ então α é uma forma auto-dual e $A\alpha = Ae_1 \wedge Ae_2 + Ae_3 \wedge Ae_4 = v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$ também é auto-dual (uma vez que o operador estrela de Hodge não depende do referencial ortonormal positivo). Portanto, Φ define duas representações $\psi_{\pm}$ de $SO(4)$ em $SO(3) \subseteq SO(6)$. Como $S_{\pm}^3 \subseteq SO(4)$ atua de maneira transitiva

no fibrado unitário de $\Lambda_{\pm}^2 M$, vamos restringir $\psi_{\pm}$ aos subgrupos $S_{\pm}^3$. Temos então que os fibrados $\Lambda_{\pm}^2 M$ podem ser obtidos por $\{U_{\alpha}, \alpha \in I\}$ e $\{\psi_{\pm} \circ g_{\alpha\beta}, \psi_{\pm} \circ g_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \longrightarrow SO(3) \subseteq SO(6)\}$. Segue agora da definição da segunda classe de Stiefel-Whitney em termos da cohomologia de Čech (que nos dá a segunda classe de Stiefel-Whitney como obstrução aos levantamentos

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Spin}(4) \\ & \nearrow \tilde{g}_{\alpha\beta} & \downarrow \\ g_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} & \longrightarrow & SO(4) \end{array}$$

que $w_2(\Lambda_{\pm}^2 M) = w_2(TM)$ (observe que o recobrimento

$S^3 \times S^3 \xrightarrow{\pi} SO(4)$ define difeomorfismos $S^3 \times \{1\} \xrightarrow{\pi} S_+^3$ e $\{1\} \times S^3 \xrightarrow{\pi} S_-^3$ e portanto $S^3 \times \{1\} \xrightarrow{\pi} S_+^3 \xrightarrow{\psi_+} SO(3)$ é um recobrimento) ■

Temos então que se a igualdade $|\tau(M)| = \frac{2}{3}\chi(M)$ ocorre, para uma orientação adequada de M temos

$$p_1(\Lambda_+^2 M) = 0 \quad \text{e} \quad w_2(\Lambda_{\pm}^2 M) = w_2(TM).$$

Logo, se M é uma variedade Spin, $w_2(\Lambda_+^2 M) = 0$. Vamos agora utilizar o seguinte resultado de Dold e Whitney [F-U p.223].

TEOREMA 2.7. (Dold e Whitney). Sejam P_1 e P_2 $SO(3)$ -fibrados principais sobre uma variedade 4-dimensional compacta e orientável e ξ_1 , ξ_2 os respectivos fibrados vetoriais associados. Se

$$p_1(\xi_1) = p_1(\xi_2) \quad \text{e} \quad w_2(\xi_1) = w_2(\xi_2)$$

então ξ_1 e ξ_2 são topologicamente equivalentes (onde $w_2(\xi_i)$ é a segunda classe de Stiefel-Whitney do fibrado ξ_i).

Segue então deste teorema que $\Lambda_+^2 M$ é trivial.

Observação: Hitchin em [Hi] obteve, por métodos diferentes, os resultados acima. Em particular provou que no caso da igualdade, M é a superfície de Kummer $K3$ (que é uma variedade Spin e $\Lambda_+^2 K3 = 0$ em razão do fato de $K3$ ser variedade quaterniônica) ou certos quocientes de $K3$ pela ação de grupos finitos.

Vamos agora generalizar o Teorema 2.4. Seja M uma variedade 4-dimensional orientada compacta e

$\mathcal{F} = \{ \text{conjunto dos } SO(4)\text{-fibrados principais sobre } M \text{ que admitem conexão } SO(3)\text{-fat} \}$.

Pelo Teorema 2.3 se $P(M, SO(4)) \in \mathcal{F}$ (com $R^4 \dashrightarrow \xi \longrightarrow M$ o fibrado vetorial associado) temos que para uma orientação adequada de M

$$\Lambda_+^2(\xi) \cong \Lambda_+^2 M$$

e temos também a desigualdade

$$0 \leq |p_1(\Lambda_+^2(\xi)[M])| < |p_1(\Lambda_+^2 M)[M]|.$$

Segue que se $P(M, SO(4)) \in \mathcal{F}$ então P_+ está determinado e é igual ao $SO(3)$ -fibrado definido por $\Lambda_+^2 M$ e o primeiro número de Pontrjagin de P_- é limitado por uma constante independente de P .

Logo para $P \in \mathcal{F}$ temos um número finito de

possibilidades para $p_1(\Lambda^2 \xi)$ e como $H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ é finito temos também um número finito de possibilidades para $w_2(\Lambda^2 \xi)$. Devemos observar aqui as seguintes identificações: o fibrado $\Lambda^2 \xi$ é isomorfo ao fibrado adjunto $\text{Ad}P_-$. Temos também que como existe apenas uma representação irredutível de $\text{SO}(3)$ em $\mathbb{R}^3$ ([B-D p.86]), a representação definida pela ação adjunta de $\text{SO}(3)$ em $\text{SO}(3) \cong \mathbb{R}^3$ e a representação canônica de $\text{SO}(3)$ em $\mathbb{R}^3$ são conjugadas. Portanto $\Lambda^2 \xi$ além de ser o fibrado adjunto do fibrado principal $P_-(M, \text{SO}(3))$ é também o fibrado vetorial associado pela representação canônica. Note que se ξ_1 e ξ_2 são os fibrados vetoriais associados pela representação canônica aos fibrados principais $P_1(M, \text{SO}(3))$ e $P_2(M, \text{SO}(3))$ então ξ_1 e ξ_2 são isomorfos se e somente se P_1 e P_2 são isomorfos. Segue então das observações acima e do Teorema 2.7 que existe apenas um número finito de fibrados P_- . Como só existe uma possibilidade para P_+ para afirmarmos que $\mathcal{F}$ é um conjunto finito basta que P_+ e P_- determinem unicamente o fibrado $P(M, \text{SO}(4))$. Para provar tal fato necessitamos da versão completa do Teorema de Dold e Whitney ([D-W p.671]) que nos garante que se $P_1(M, \text{SO}(4))$ e $P_2(M, \text{SO}(4))$ são fibrados principais sobre uma variedade 4-dimensional compacta e orientável (com fibrados vetoriais associados ξ_1 e ξ_2 respectivamente) tais que

$$w_2(\xi_1) = w_2(\xi_2) \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$$

$$w_4(\xi_1) = w_4(\xi_2) \in H^4(M, \mathbb{Z})$$

$$p_1(\xi_1) = p_1(\xi_2) \in H^4(M, \mathbb{Z})$$

então $P_1(M, SO(4))$ e $P_2(M, SO(4))$ são isomorfos.

Observação: A quarta classe de Stiefel-Whitney com coeficientes em $\mathbb{Z}$ de um fibrado orientado $R^4 \xrightarrow{\xi} M$, $w_4(\xi) \in H^4(M, \mathbb{Z})$, é igual a classe de Euler de ξ , $e(\xi) \in H^4(M, \mathbb{Z})$, ([M-S p.99]). Sejam então $P_1(M, SO(4))$ e $P_2(M, SO(4))$ dois fibrados sobre M (com ξ_1 e ξ_2 os respectivos fibrados vetoriais associados) tais que ambos determinam os mesmos fibrados $P_{\pm}(M, SO(3))$. Temos pela Proposição 2.5 e Proposição 2.6 que:

$$\begin{aligned} p_1(\Lambda_+^2 \xi_1) &= p_1(\xi_1) + 2e(\xi_1) \\ p_1(\Lambda_-^2 \xi_1) &= p_1(\xi_1) - 2e(\xi_1) \\ w_2(\Lambda_+^2 \xi_1) &= w_2(\Lambda_-^2 \xi_1) = w_2(\xi_1) \\ p_1(\Lambda_+^2 \xi_2) &= p_1(\xi_2) + 2e(\xi_2) \\ p_1(\Lambda_-^2 \xi_2) &= p_1(\xi_2) - 2e(\xi_2) \\ w_2(\Lambda_+^2 \xi_2) &= w_2(\Lambda_-^2 \xi_2) = w_2(\xi_2). \end{aligned}$$

Temos que

$$\Lambda_+^2 \xi_1 = \Lambda_+^2 \xi_2, \quad \Lambda_-^2 \xi_1 = \Lambda_-^2 \xi_2$$

pois $\Lambda_+^2 \xi_1 = \text{Ad}P_+ = \Lambda_+^2 \xi_2$ e $\Lambda_-^2 \xi_1 = \text{Ad}P_- = \Lambda_-^2 \xi_2$.

Logo

$$p_1(\xi_1) = p_1(\xi_2) = \frac{1}{2} (p_1(\text{Ad}P_+) + p_1(\text{Ad}P_-))$$

$$e(\xi_1) = e(\xi_2) = \frac{1}{4} (p_1(\text{Ad}P_+) - p_1(\text{Ad}P_-))$$

$$w_2(\xi_1) = w_2(\xi_2) = w_2(\text{Ad}P_+)$$

e portanto pelo Teorema de Dold e Whitney ξ_1 e ξ_2 são isomorfos, de onde segue que $P_1(M, SO(4))$ é isomorfo a $P_2(M, SO(4))$. Isto demonstra o seguinte teorema de finitude:

TEOREMA 2.8. Seja M uma variedade 4-dimensional, compacta e orientável. O conjunto $\mathcal{F}$ dos $SO(4)$ -fibrados principais sobre M que admitem conexão $SO(3)$ -fat é finito.

CAPÍTULO III

OS ESPAÇOS DE ALOFF-WALLACH E ESCHENBURG

Podemos afirmar que não existe uma teoria sobre as variedades que admitem métricas Riemannianas com curvatura seccional estritamente positiva. Em geral, temos apenas que tais variedades são compactas, com grupo fundamental finito. Em razão disto, torna-se essencial o estudo dos exemplos obtidos destas variedades. Vamos aqui estudar os espaços de Aloff-Wallach e Eschenburg (que são os exemplos mais interessantes de variedades que admitem métricas com curvatura seccional estritamente positiva) do ponto de vista de fibrados. A partir de tal estudo fomos capazes de dar uma descrição do "twistor space" do espaço $\mathbb{CP}^2$. As referências básicas relativas a tais espaços são [A-W] e [E-2].

1. ESPAÇOS DE ALOFF-WALLACH E FIBRADOS SOBRE $\mathbb{CP}^2$

Os espaços de Aloff-Wallach são obtidos pelo quociente de $SU(3)$ por subgrupos da forma

$$T_{k,l} = \left\{ \exp (2\pi i \begin{bmatrix} k\theta & & \\ & l\theta & \\ & & -(k+l)\theta \end{bmatrix}) \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

onde $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, $l \neq 0$, $k + l \neq 0$. Denominaremos tais espaços por $M_{k,l} = \text{SUC}(3)/T_{k,l}$ (para as definições e notação ver [A-W]).

Os espaços $M_{k,l}$ podem ser distinguidos topologicamente na quarta cohomologia com coeficientes inteiros ([A-W lema 3.3]). A questão da classificação em termos de difeomorfismo dos espaços de Allof-Wallach só recentemente foi estudada ([K-S]) obtendo-se resultados surpreendentes. Existem espaços de Allof-Wallach que são homeomorfos entre si porém não são difeomorfos. A técnica para tal estudo é complexa utilizando-se Teoria dos Números e até procedimentos computacionais.

Devemos observar que acima, como estamos considerando $T_{k,l}$ como subgrupo de $\text{SUC}(3)$, nenhuma restrição é necessária aos valores de θ , porém, nos cálculos que virão a seguir, vamos considerar $T_{k,l}$ como uma representação fiel de $S^1 = \{e^{2\pi i\theta}, 0 \leq \theta < 1\}$ em $\text{SUC}(3)$. Neste caso, para que a representação seja fiel é necessário supor sempre que k e l são primos entre si e que $0 \leq \theta < 1$. Portanto vamos assumir sempre tais fatos.

PROPOSIÇÃO 3.1. Os espaços $M_{k,l}$ fibram sobre $\mathbb{CP}^2$.

Demonstração: Sobre $\mathbb{CP}^2$ temos o fibrado principal canônico

$$\text{U}(2) \rightarrow \text{SUC}(3) \rightarrow \text{SUC}(3)/\text{U}(2) \cong \mathbb{CP}^2.$$

Considerando $T_{k,l}$ contido em $\text{U}(2)$ da forma

$$\exp(2\pi i \begin{bmatrix} k\theta & 0 \\ 0 & l\theta \end{bmatrix}) \in \text{U}(2).$$

obtemos a família de fibrados associados

$$U(2)/T_{k,1} \dashrightarrow SU(2)/T_{k,1} = M_{k,1} \longrightarrow \mathbb{CP}^2 \quad \blacksquare$$

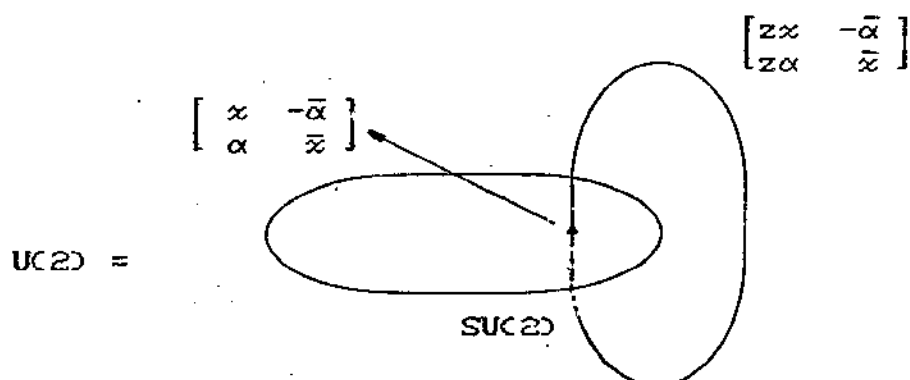
PROPOSIÇÃO 3.2. Os espaços $U(2)/T_{k,1}$ são espaços lenticulares se $k+1 \neq 0$.

Demonstração: $U(2)$ é difeomorfo a $SU(2) \times S^1$ (porém não isomorfos pois possuem centros diferentes), de fato temos mais que isto, $U(2)$ é o espaço total do fibrado principal

$$S^1 \dashrightarrow U(2) \longrightarrow SU(2)$$

onde $S^1 = \left\{ \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, |z| = 1 \right\}$ atua à direita de $U(2)$.

Geometricamente a situação é a seguinte



(É um exercício elementar verificar que um elemento genérico A de $U(2)$ tem a forma $A = \begin{bmatrix} z\alpha & -\bar{\alpha} \\ z\alpha & \bar{x} \end{bmatrix}$).

Vamos encontrar a interseção da órbita de A pela ação à direita de

$$T_{k,1} = \left\{ \begin{bmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^1 \end{bmatrix}, \omega \in S^1 \right\} \quad \text{e} \quad SU(2) \subseteq U(2).$$

A órbita por A é da forma $O(A) = \left\{ \begin{bmatrix} z\alpha\omega^k & -\bar{\alpha}\omega^1 \\ z\alpha\omega^k & \bar{x}\omega^1 \end{bmatrix}, \omega \in S^1 \right\}$.

$$\text{Como} \quad \begin{bmatrix} z\alpha\omega^k & -\bar{\alpha}\omega^1 \\ z\alpha\omega^k & \bar{x}\omega^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\omega^{1+k}\alpha\omega^{-1} & -\bar{\alpha}\omega^1 \\ z\omega^{1+k}\alpha\omega^{-1} & \bar{x}\omega^1 \end{bmatrix}$$

um elemento da órbita de A pertence a $SU(2)$ se e somente se

$z\omega^{1+k} = 1$. Vejamos em quais situações esta igualdade ocorre:

i) $k+1 = 0$. Neste caso $T_{k,1} = T_{k,-k} \subseteq \text{SU}(2)$ e portanto se $z \neq 1$ então $\mathcal{O}(A)$ não intercepta $\text{SU}(2)$. Se $A \in \text{SU}(2)$ (isto é, $z = 1$) então $\mathcal{O}(A) \subseteq \text{SU}(2)$ e a ação de $T_{k,-k}$ restrita a $\text{SU}(2)$ define a fibração de Hopf com quociente $\frac{\text{SU}(2)}{T_{k,-k}} \cong S^2$. Neste caso é fácil ver que $\frac{\text{U}(2)}{T_{k,-k}} \cong S^1 \times S^2$.

ii) $k+1 \neq 0$. A equação $z\omega^{k+1} = 1$, resolvida para $\omega \in S^1$ e z fixo ($z \in S^1$), tem $k+1$ raízes distintas, isto é, a órbita de A intercepta $\text{SU}(2)$ em $k+1$ pontos distintos. Vamos calcular explicitamente tais pontos. Fazendo $z = e^{2\pi i\theta_0}$ e $\omega = e^{2\pi i\theta}$ com $0 \leq \theta_0, \theta < 1$ temos $1 = z\omega^{k+1} = e^{2\pi i(\theta_0 + (k+1)\theta)}$ e portanto esta igualdade é válida se e somente se $\theta_0 + (k+1)\theta$ é um inteiro. Podemos supor sem perda de generalidade que $k+1 > 0$. Temos que encontrar as soluções da igualdade

$\theta_0 + (k+1)\theta = \text{inteiro}$, sujeita às restrições $0 \leq \theta_0, \theta < 1$.

Observando que $\frac{\theta_0}{k+1} < \frac{1}{k+1}$ e $\frac{\theta}{k+1} < \frac{1}{k+1}$, as soluções da igualdade são $\theta = \left\{ \frac{1}{k+1} - \frac{\theta_0}{k+1}, \frac{2}{k+1} - \frac{\theta_0}{k+1}, \dots, \frac{k+1}{k+1} - \frac{\theta_0}{k+1} \right\}$.

Note que $\frac{k+1+1}{k+1} - \frac{\theta_0}{k+1} = 1 + \frac{1}{k+1} - \frac{\theta_0}{k+1} > 1$ e portanto θ não pode assumir os valores $\frac{k+1+n}{k+1} - \frac{\theta_0}{k+1}$ para $n > 0$.

Utilizando a solução $\theta = \frac{1}{k+1} - \frac{\theta_0}{k+1}$ e escrevendo

$\omega_0 = e^{2\pi i(\frac{1-\theta_0}{k+1})}$ obtemos a seguinte matriz B em $\mathcal{O}(A) \cap \text{SU}(2)$.

$$B = \begin{bmatrix} z\omega_0^k & -\bar{\alpha}\omega_0^1 \\ z\alpha\omega_0^k & \bar{z}\omega_0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\omega_0^{k+1}\omega_0^{-1} & -\bar{\alpha}\omega_0^1 \\ z\omega_0^{k+1}\alpha\omega_0^{-1} & \bar{z}\omega_0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0^{-1} & -\bar{\alpha}\omega_0^1 \\ \alpha\omega_0^{-1} & \bar{z}\omega_0^1 \end{bmatrix}.$$

Como $\mathcal{O}(B) = \mathcal{O}(A)$ e $\mathcal{O}(B) \cap \text{SU}(2)$ é dada pelos pontos

da forma

$$\mathcal{O}(B) \cap \mathrm{SUC}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} y\omega^{-1} & -\bar{\beta}\omega^{-1} \\ \beta\omega^{-1} & \bar{y}\omega^{-1} \end{bmatrix} \right\}, \quad \omega = e^{2\pi i \theta},$$

$$\theta = \left[0, \frac{1}{k+1}, \dots, \frac{k+1-1}{k+1} \right] \quad \text{onde} \quad y = \alpha\omega_0^{-1} \quad \text{e} \quad \beta = \alpha\omega_0^{-1},$$

obtemos $\mathcal{O}(A) \cap \mathrm{SUC}(2)$ como a órbita pela ação à direita do subgrupo Z_{k+1} de S^1 das $(k+1)$ -ésimas raízes da unidade

$$S^1 \supset \left\{ \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \theta} & \\ & e^{+2\pi i \theta} \end{bmatrix} \right\}, \quad \theta = \left\{ 0, \frac{1}{1+k}, \dots, \frac{1+k-1}{1+k} \right\}.$$

portanto $\frac{\mathrm{UC}(2)}{T_{k,1}}$ é um espaço de lenticular.

Observação: A homotopia de $\frac{\mathrm{UC}(2)}{T_{k,1}}$ pode ser obtida de maneira

imediate de sequência exata de fibração

$$T_{k,1} \dashrightarrow \mathrm{UC}(2) \longrightarrow \mathrm{UC}(2)/T_{k,1}.$$

$$0 \longrightarrow \pi_2\left(\frac{\mathrm{UC}(2)}{T_{k,1}}\right) \longrightarrow \pi_1(T_{k,1}) \xrightarrow{\psi} \pi_1(\mathrm{UC}(2)) \longrightarrow$$

$$\pi_1\left(\frac{\mathrm{UC}(2)}{T_{k,1}}\right) \longrightarrow 0.$$

$$0 \longrightarrow \pi_2\left(\frac{\mathrm{UC}(2)}{T_{k,1}}\right) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1\left(\frac{\mathrm{UC}(2)}{T_{k,1}}\right) \longrightarrow 0.$$

Observando que $\begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é gerador de $\pi_1(\mathrm{UC}(2))$ e que o gerador

de $\pi_1(T_{k,1})$ é $\begin{bmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$ temos que $\psi(1) = k+1$ e portanto

$$\pi_1\left(\frac{\mathrm{UC}(2)}{T_{k,1}}\right) = \mathbb{Z}_{k+1} \quad \blacksquare$$

Temos como casos particulares dos espaços $\frac{\mathrm{UC}(2)}{T_{k,1}}$:

Caso 1. $k + 1 = 0$. Como vimos anteriormente temos

$$\frac{U(2)}{T_{k,-k}} \cong S^1 \times S^2.$$

Caso 2. $k + 1 = 1$. Neste caso a interseção da órbita de um ponto $A = \begin{bmatrix} z\alpha & -\bar{\alpha} \\ z\alpha & \bar{z} \end{bmatrix}$ e $SU(2)$ é dada por

$$\begin{bmatrix} x\omega_0^{-1} & -\bar{\alpha}\omega_0^{-1} \\ \alpha\omega_0^{-1} & \bar{x}\omega_0^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -x\omega_0^{-1} & \bar{\alpha}\omega_0^{-1} \\ -\alpha\omega_0^{-1} & -\bar{x}\omega_0^{-1} \end{bmatrix}, \text{ e portanto } \frac{U(2)}{T_{1,1}} \cong SO(3).$$

Caso 3. $k + 1 = 1$. Neste caso a interseção da órbita de um ponto A e $SU(2)$ é dada por apenas um ponto e portanto

$$\frac{U(2)}{T_{k,1}} \cong SU(2).$$

Podemos agora observar o seguinte fato interessante:

Como os subgrupos $T_{k,1}$, $T_{k,-(k+1)}$, $T_{1,-(1+k)}$ são conjugados em $SU(3)$ por automorfismos internos, os espaços

$M_{k,1}$, $M_{k,-(k+1)}$ e $M_{1,-(1+k)}$ são todos difeomorfos. Como temos as fibrações

$$\begin{array}{lcl} \frac{U(2)}{T_{k,1}} \dashrightarrow \frac{SU(3)}{T_{k,1}} = M_{k,1} \longrightarrow \mathbb{CP}^2 \\ \frac{SU(2)}{T_{k,-(k+1)}} \dashrightarrow \frac{SU(3)}{T_{k,-(k+1)}} = M_{k,-k+1} \longrightarrow \mathbb{CP}^2 \\ \frac{SU(2)}{T_{1,-(1+k)}} \dashrightarrow \frac{SU(3)}{T_{1,-(1+k)}} = M_{1,-(k+1)} \longrightarrow \mathbb{CP}^2 \end{array}$$

com fibras, em geral, topologicamente distintas, temos que um mesmo espaço de Aloff-Wallach fibra sobre $\mathbb{CP}^2$ de pelo menos três maneiras essencialmente distintas. Um outro fato interessante é que as soluções $k + 1 = 1$ definem infinitos espaços de Aloff-Wallach topologicamente distintos (lembrar que

$H^4(M_{k,1}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_r$, $r = |k^2 + 1^2 + k|$ Lema 3.3. [A-W]) e portanto temos sobre CP^2 infinitos fibrados de esferas que admitem métrica de curvatura seccional positiva.

$$\frac{U(2)}{T_{k,1}} \cong S^1 \dashrightarrow \frac{SU(3)}{T_{k,1}} \cong M_{k,1} \longrightarrow CP^2 \quad k+1=1.$$

Obs.: Nenhum desses fibrados é principal.

Vejamos agora o caso em que ocorre o grupo $SU(3)$ como fibra:

$$SU(3) \cong \frac{U(2)}{T_{1,1}} \dashrightarrow \frac{SU(3)}{T_{1,1}} \cong M_{1,1} \longrightarrow CP^2.$$

A métrica em $M_{1,1}$ que nos dá curvatura positiva é proveniente de uma métrica invariante à esquerda em $SU(3)$ que também é invariante à direita pela ação de $U(2)$. Portanto, tal métrica define uma conexão principal no fibrado $U(2) \dashrightarrow SU(3) \longrightarrow CP^2$ (basta tomar como espaço vertical o complementar ortogonal do espaço vertical) e como este fibrado se projeta no fibrado $SU(3) \dashrightarrow M_{1,1} \longrightarrow CP^2$, fica também definida uma conexão ω em $SU(3) \dashrightarrow M_{1,1} \longrightarrow CP^2$. Como a curvatura de $M_{1,1}$ é positiva ω é fat (Proposição 1.1). Segue então do TEOREMA 2.2 que $SU(3) \dashrightarrow M_{1,1} \longrightarrow CP^2$ é isomorfo ao fibrado $SU(3) \dashrightarrow PA_+^2 CP^2 \longrightarrow CP^2$, para uma orientação adequada de CP^2 .

Vamos estudar este fato com mais detalhes. Seja J uma estrutura quase complexa em CP^2 compatível com a métrica usual de CP^2 , isto é, $\langle Jx, Jy \rangle = \langle x, y \rangle$. J induz em CP^2 uma orientação natural definida declarando as bases ortonormais locais da forma $(e_1, e_2 = Je_1, e_3, e_4 = Je_3)$ como positivas. Não

existe ambiguidade nesta definição pois dadas as bases $\{e_1, e_2 = Je_1, e_3, e_4 = Je_3\}$ e $\{v_1, v_2 = Jv_1, v_3, v_4 = Jv_3\}$, seja A um endomorfismo linear tal que $Ae_i = v_i$. Como $J^{-1}AJ(e_1) = J^{-1}A(e_2) = J^{-1}(v_2) = J^{-1}(Jv_1) = v_1$, $J^{-1}AJ(e_2) = J^{-1}AJ(Je_1) = J^{-1}A(-e_1) = J^{-1}(-v_1) = (-J^{-1})(v_1) = J(v_1) = v_2$, $J^{-1}AJ(e_3) = J^{-1}A(e_4) = J^{-1}(v_4) = J^{-1}(Jv_3) = v_3$, $J^{-1}AJ(e_4) = J^{-1}AJ(Je_3) = J^{-1}A(-e_3) = (-J^{-1})(v_3) = J(v_3) = v_4$, temos que $J^{-1}AJ = A$ e portanto $AJ = JA$. A matriz de J em relação à base $\{e_1, e_3, Je_1, Je_3\}$ é da forma $\begin{bmatrix} 1 & -I \\ I & 1 \end{bmatrix}$ e temos então, que nesta base o operador A admite a expressão matricial $\begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix}$ de onde segue que $\det(A) = (\det B)^2 + (\det C)^2 > 0$. Vamos então considerar CP^2 munido da métrica canônica e da orientação induzida pela estrutura complexa usual.

Seja $SO(4) \dashrightarrow P \longrightarrow CP^2$ o fibrado tangente do CP^2 . Uma estrutura quase-complexa compatível com a métrica e a orientação, determina uma redução no grupo estrutural do fibrado $P(TCP^2, SO(4))$ de $SO(4)$ para $U(2)$. Seja portanto $U(2) \dashrightarrow P' \longrightarrow CP^2$ ($C^2 \dashrightarrow TCP^2 \longrightarrow CP^2$) o fibrado tangente com o grupo estrutural reduzido, onde a redução foi determinada pela estrutura complexa canônica. Tal fibrado possui as seguintes classes características:

$$w_2(TCP^2) = 1 \quad \chi(CP^2) = 3 \quad p_1(TCP^2)[CP^2] = 3.$$

(Obs.: A assinatura de CP^2 com a orientação definida acima é 1 e portanto $p_1(TCP^2)[CP^2] = 3$ pelo Teorema da assinatura de Hirzenbruch).

Se c_1, c_2 denotam a primeira e segunda classe de

Chern de $C^2 \dashrightarrow TCP^2 \longrightarrow CP^2$ temos a relação $p_1(TCP^2)[CP^2] = (c_1^2 - 2c_2)[CP^2]$ (de fato, pois TCP^2 é um fibrado complexo e portanto $TCP^2 \otimes C \cong TCP^2 \otimes \overline{TCP^2}$. Por definição $p_1(TCP^2) = -c_2(TCP^2 \otimes C) = c(TCP^2) \cdot c(\overline{TCP^2}) = (1 + c_1 + c_2 + \dots)(1 - c_1 + c_2 + \dots) = 1 - c_1^2 + 2c_2 + \dots$ onde c é a classe total de Chern). Como $c_2[CP^2] = \chi(CP^2)$ segue que $c_1^2[CP^2] = 9$. Com a identificação usual $H^*(CP^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[X^2]/(X^6)$ temos que $c_1 = \pm 3$. No caso de orientação canônica $c_1 = -3$.

Uma pergunta natural é qual a relação entre os fibrados $U(2) \dashrightarrow P' \longrightarrow CP^2$ e $U(2) \dashrightarrow SU(3) \longrightarrow CP^2$?

A idéia para distinguir $U(2)$ -fibrados é utilizar que $SU(2) \subseteq U(2)$ é um subgrupo normal, portanto podemos obter S^1 -fibrados associados principais.

Obtemos então:

$$U(2)/SU(2) \cong S^1 \dashrightarrow P'/SU(2) \longrightarrow CP^2$$

$$U(2)/SU(2) \cong S^1 \dashrightarrow SU(3)/SU(2) \cong S^5 \longrightarrow CP^2$$

Podemos agora utilizar o trabalho de Kobayashi sobre S^1 -fibrados principais ([K]).

O conjunto dos S^1 -fibrados principais sobre CP^2 admite uma estrutura de grupo abeliano isomorfo a $\mathbb{Z}$. Com a orientação usual o fibrado $S^1 \dashrightarrow S^5 \longrightarrow CP^2$ corresponde ao gerador 1.

TEOREMA 3.3. [K p.41] Se $U(2) \dashrightarrow P' \longrightarrow CP^2$ é o fibrado tangente do espaço CP^2 então

$$\frac{U(2)}{SU(2)} = S^1 \dashrightarrow \frac{P'}{SU(2)} \longrightarrow CP^2$$

é igual a menos três vezes o fibrado $S^1 \dashrightarrow S^5 \longrightarrow CP^2$.

Como os S^1 -fibrados sobre CP^2 são espaços lenticulares da forma

$$\frac{S^1}{Z_p} \cong S^1 \dashrightarrow \frac{S^5}{Z_p} \longrightarrow CP^2$$

temos então que o fibrado $U(2) \dashrightarrow P' \longrightarrow CP^2$ se projeta no fibrado $S^1 \dashrightarrow S^5/Z_p \longrightarrow CP^2$ com a orientação adequada.

Seja novamente $SO(4) \dashrightarrow P \longrightarrow CP^2$ o fibrado tangente. Ficam então definidos os $SO(3)$ -fibrados

$$SO(3) \dashrightarrow P_{\pm} \longrightarrow CP^2$$

correspondentes a decomposição

$$R^3 \oplus R^3 \dashrightarrow \Lambda_+^2 CP^2 \oplus \Lambda_-^2 CP^2 \longrightarrow CP^2.$$

Seja J uma estrutura quase complexa compatível com a métrica e a orientação de CP^2 .

Proposição 3.4. A forma de Kaehler $\omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle$ é autodual.

Demonstração: Como J é compatível com a métrica e a orientação é possível obter um referencial ortonormal local positivamente orientado da forma:

$$\{e_1, e_2 = Je_1, e_3, e_4 = Je_3\}.$$

Como

$$\omega(e_1, e_2) = \langle Je_1, Je_1 \rangle = 1, \quad \omega(e_1, e_3) = \langle Je_1, e_3 \rangle = 0$$

$$\omega(e_1, e_4) = \langle Je_1, Je_3 \rangle = 0, \quad \omega(e_2, e_3) = \langle JJe_1, e_3 \rangle = 0$$

$$\omega(e_2, e_4) = \langle JJe_1, Je_3 \rangle = 0, \quad \omega(e_3, e_4) = \langle Je_3, Je_3 \rangle = 1$$

temos a igualdade

$$\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \quad \blacksquare$$

Temos portanto que uma estrutura quase complexa J (compatível com a métrica e a orientação) define uma secção no fibrado vetorial $\Lambda_+^2 \mathbb{CP}^2$, ou de forma equivalente, uma redução do grupo estrutural de P_+ de $SO(3)$ para $SO(2)$.

Devemos observar aqui que existem restrições à redução do grupo estrutural. Se $SO(3) \dashrightarrow P_+ \longrightarrow \mathbb{CP}^2$ reduz para um fibrado $SO(2) \dashrightarrow P' \longrightarrow \mathbb{CP}^2$ então o fibrado vetorial $R^3 \dashrightarrow \Lambda_+^2 \mathbb{CP}^2 \longrightarrow \mathbb{CP}^2$ admite uma decomposição em soma de Whitney da forma

$R^2 \oplus R \dashrightarrow L \oplus \varepsilon \longrightarrow \mathbb{CP}^2$ onde $\varepsilon \cong \mathbb{CP}^2 \times R$ e L é um fibrado linha complexo. Como

$p_1(\Lambda_+^2 \mathbb{CP}^2) = -c_2(\Lambda_+^2 \mathbb{CP}^2 \otimes \mathbb{C}) = -c_2(L \otimes \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) = -c_2(L \oplus \bar{L}) = c_1^2$ onde c_1 é a primeira classe de Chern de L , segue então que $p_1(\Lambda_+^2 \mathbb{CP}^2)[\mathbb{CP}^2]$ deve ser um quadrado perfeito. Tal fato realmente ocorre pois

$$p_1(\Lambda_+^2 \mathbb{CP}^2) = p_1(T\mathbb{CP}^2)[\mathbb{CP}^2] + 2\chi(\mathbb{CP}^2) = 9.$$

Já para o fibrado $\Lambda_-^2 \mathbb{CP}^2$

$$p_1(\Lambda_-^2 \mathbb{CP}^2) = p_1(T\mathbb{CP}^2)[\mathbb{CP}^2] - 2\chi(\mathbb{CP}^2) = -3,$$

o que implica que $SO(3) \dashrightarrow P_- \longrightarrow \mathbb{CP}^2$ não admite redução para um $SO(2)$ -fibrado. Como $\Lambda_-^2(\mathbb{CP}^2)$ é o fibrado das formas auto-duais para $\mathbb{CP}^2$ com a orientação diferente da canônica, provamos o resultado conhecido.

PROPOSIÇÃO 3.5. O espaço $\overline{CP^2}$ não admite estrutura quase complexa compatível com a métrica e a orientação.

(Onde $\overline{CP^2}$ é o espaço CP^2 munido da métrica canônica e orientação oposta à orientação usual).

As reduções topológicas de um $SO(3)$ -fibrado principal podem ser melhor compreendidas a partir do seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 3.6. ([K-N v.I] proposição 5-6 p.57)

O grupo estrutural G de um fibrado $P(M, G)$ é redutível a um subgrupo fechado H se e somente se o fibrado associado $G/H \dashrightarrow P/H \longrightarrow M$ admite uma secção $\sigma : M \longrightarrow P/H$.

Os fibrados $SO(3) \dashrightarrow P_{\pm} \longrightarrow CP^2$ definem os fibrados associados

$$\frac{SO(3)}{SO(2)} \cong S^2 \dashrightarrow \frac{P_{\pm}}{SO(2)} \longrightarrow CP^2.$$

As proposições 3.4 e 3.6 nos garantem então que as secções do fibrado $S^2 \dashrightarrow P_{+} \longrightarrow CP^2$ parametrizam o conjunto das estruturas quase complexas de CP^2 compatíveis com a métrica e a orientação.

Observação: Para as variedades 4-dimensionais compactas e orientáveis existe obstrução topológica a existência de estrutura quase complexa compatível com a métrica e a orientação. Prova-se, utilizando-se técnicas mais sofisticadas (Cohomologia de Doubeault, Teorema de Riemann - Roch) que uma condição ne-

cessária para a existência de uma tal estrutura quase complexa é que a soma da característica de Euler com a assinatura tem que ser um múltiplo de 4, isto é,

$$\chi(M) + \tau(M) = 0 \pmod{4}. \quad ([Bes \text{ p.151}])$$

Utilizando este resultado é imediato que $\overline{CP^2}$ e S^4 não admitem estruturas quase complexas compatíveis com a métrica e a orientação.

Vimos anteriormente que o fibrado

$SO(3) \dashrightarrow M_{1,1} \longrightarrow CP^2$ é fat e portanto temos pelo Teorema 2.2 que $M_{1,1}$ é igual a P_+ ou a P_- (note que no Teorema 2.2 $M_{1,1} = P_+$ para a orientação adequada e aqui a orientação foi fixada a priori). Como

$$SO(3) \dashrightarrow M_{1,1} = SU(3)/T_{1,1} \longrightarrow CP^2$$

$$\frac{SO(3)}{SO(2)} \cong S^2 \dashrightarrow \frac{SU(3)/T_{1,1}}{SO(2)} = \frac{SU(3)}{T^2} = F_3 \longrightarrow CP^2.$$

(F_3 variedade dos Flags em C^3 [A-H-S p.438]).

Vamos mostrar que $M_{1,1}$ não pode ser P_+ . Se isto ocorresse então o fibrado $SO(3) \dashrightarrow M_{1,1} = SU(3)/T_{1,1} \longrightarrow CP^2$ admitiria uma $SO(2)$ redução e portanto pela proposição 3.6 existiria uma secção em $S^2 \dashrightarrow \frac{SU(3)}{T^2} \cong F_3 \begin{matrix} \xrightarrow{\pi} \\ \xleftarrow{\sigma} \end{matrix} CP^2$.

Como $\pi \circ \sigma = Id|_{CP^2}$ temos que as aplicações induzidas em homotopia π_* e σ_* seriam tais que

$\pi_* \circ \sigma_* = Id : \pi_n(CP^2) \longrightarrow \pi_n(CP^2)$ e portanto π_* seria sobrejetiva e σ_* injetiva. Vamos obter a contradição com tal fato pela sequência exata de homotopia do fibrado $S^2 \dashrightarrow F_3 \longrightarrow CP^2$. Temos que:

$$\pi_5(S^2) \longrightarrow \pi_5(F_3) \xrightarrow{\pi_*} \pi_5(CP^2) \longrightarrow \pi_4(S^2) \longrightarrow \pi_4(F_3) \longrightarrow \pi_4(CP^2) \longrightarrow$$

$$Z_2 \longrightarrow \pi_5(F_3) \xrightarrow{\pi_*} Z \longrightarrow Z_2 \longrightarrow \pi_4(F_3) \longrightarrow 0.$$

($\pi_5(S^2) = \pi_4(S^2) = Z_2$, $\pi_5(CP^2) = Z$ e $\pi_4(CP^2) = 0$ pela sequência exata de homotopia dos fibrados

$$S^1 \dashrightarrow S^3 \longrightarrow S^2 \quad \text{e} \quad S^1 \dashrightarrow S^5 \longrightarrow CP^2).$$

Como π_* é sobrejetiva segue que $Z_2 = \pi_4(F_3)$. Mas como $T^2 \dashrightarrow SU(3) \longrightarrow F_3$ temos novamente pela sequência exata de homotopia que $\pi_4(SU(3)) = \pi_4(F_3)$. Mas $\pi_4(SU(3))$ já é estável e portanto pelo Teorema de Periodicidade de Bott ([M-1 p.130]) $\pi_4(SU(3)) = 0$, nos levando então a uma contradição. Temos portanto que $M_{1,1} = P_-$.

Com o raciocínio acima podemos obter uma prova imediata que S^4 não admite nenhuma estrutura quase complexa. O fibrado tangente de S^4 é o fibrado $SO(4) \dashrightarrow SO(5) \longrightarrow S^4$ que define os fibrados $SO(3) \dashrightarrow P_{\pm} = \frac{SO(5)}{S^3_{\pm}} \longrightarrow S^4$.

Como

$$p_1(P_+)[S^4] = p_1(TS^4)[S^4] + 2\chi(S^4)$$

$$p_1(P_-)[S^4] = p_1(TS^4)[S^4] - 2\chi(S^4)$$

e $p_1(P_+)[S^4] = \pm p_1(P_-)[S^4]$, segue que $p_1(TS^4)[S^4] = 0$ e $p_1(P_+)[S^4] = 4$. Como 4 é um quadrado perfeito não temos a restrição à redução do fibrado $P_+(S^4, SO(3))$ para um $SO(2)$ -fibrado. Vejamos o que ocorre se existe uma secção no fibrado

$$(1) \quad \frac{SO(3)}{SO(2)} \cong S^2 \dashrightarrow \frac{P_+}{SO(2)} \xrightarrow{\sigma} S^4.$$

Primeiramente devemos observar que

$$\frac{P_+}{SO(2)} = \frac{SO(5)/S_+^3}{SO(2)} \cong \frac{Sp(2)}{S^1 \times Sp(1)} \cong CP^3 \quad (\text{At p. 38}).$$

Portanto (1) nada mais é do que a famosa fibração de Penrose

$$S^2 \dashrightarrow CP^3 \longrightarrow S^4$$

A sequência exata de homotopia nos dá que

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_4(S^2) & \longrightarrow & \pi_4(CP^3) & \xrightarrow{\pi_*} & \pi_4(S^4) & \longrightarrow & \pi_3(S^2) \longrightarrow \pi_3(CP^3) \\ \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \end{array}$$

$$(\pi_4(CP^3) = \pi_4(CP^2) = 0, \quad \pi_3(CP^3) = \pi_3(CP^2) = 0)$$

absurdo com π_* sobrejetiva. Portanto a secção σ não pode existir e obtemos então o resultado:

PROPOSIÇÃO 3.7. S^4 não admite nenhuma estrutura quase complexa.

2. ESPAÇOS DE ESCHENBURG E FIBRADOS SOBRE CP^2

Os espaços de Eschenburg são obtidos de $SU(3)$ da seguinte forma: Vamos tomar em $SU(3) \times SU(3)$ subgrupos fechados a um parâmetro, isto é, vamos tomar subgrupos da forma $S^1 \subseteq SU(3) \times SU(3)$. Sem perda de generalidade podemos supor $S^1 \subseteq T^2 \times T^2$ onde $T^2 \subseteq SU(3)$ é o toro maximal. Tais subgrupos são descritos por

$$T_{k|pq} = \left\{ \begin{pmatrix} z^k & & \\ & z^l & \\ & & z^{-k-l} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z^p & & \\ & z^q & \\ & & z^{-p-q} \end{pmatrix} \right\}, \quad z \in S^1.$$

Temos aqui novamente o fato que, como vamos considerar T_{klpq} como uma representação fiel de S^1 em $SU(3) \times SU(3)$, então vamos sempre supor $0 \leq \theta < 1$ onde $z = e^{2\pi i \theta}$ e k, l, p, q primos entre si. T_{klpq} atua em $SU(3)$ da forma

$$T_{klpq} \times SU(3) \longrightarrow SU(3) \quad (A, B) \times C \longrightarrow ACB^{-1}.$$

Esta ação em geral não é livre.

PROPOSIÇÃO 3.4. ([E-1 proposição 2.1])

T_{klpq} atua em $SU(3)$ livremente se e somente se os seguintes pares de inteiros são relativamente primos

$$(k - p, l - q), (k - p, l + p + q), (k + p + q, l - q) \\ (k - q, l - p), (k - q, l + p + q), (k + p + q, l - q).$$

Os espaços de Eschenburg para valores adequados de l, k, p, q admitem métrica com curvatura seccional estritamente positiva e em geral (note que para $p = 0, q = 0$ temos os espaços de Aloff-Wallach) não são homogêneos. O nosso estudo sobre os espaços de Aloff-Wallach nos leva a questão natural. "São os espaços de Eschenburg fibrados sobre o CP^2 ?"

Se a resposta da questão acima é positiva, como são as fibras? Vejamos primeiramente a última questão.

A construção de Eschenburg aplicada a $U(2)$.

Vamos considerar

$$T_{klpq} = \left\{ \begin{pmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega^q \end{pmatrix} \right\}, \omega \in S^1, \subseteq U(2) \times U(2).$$

Se k, l, p, q são inteiros primos entre si, temos uma representação fiel de S^1 em $U(2) \times U(2)$. T_{klpq} atua em $U(2)$ da forma $T_{klpq} \times U(2) \longrightarrow U(2) \quad (A, B)C \longrightarrow ACB^{-1}$. Com uma demonstração semelhante à da proposição 3.3 temos que esta ação é livre se e somente se os pares de inteiros $(k - q, l - p)$ e $(k - p, l - q)$ são primos entre si. Supondo este fato, temos o fibrado principal

$$T_{klpq} \text{ ---- } U(2) \longrightarrow \frac{U(2)}{T_{klpq}} = N_{klpq}$$

A fibra pela identidade é

$$\phi(\text{Id}) = \left\{ \begin{bmatrix} \omega^{k-p} & 0 \\ 0 & \omega^{l-q} \end{bmatrix}, \omega \in S^1 \right\}.$$

Da sequência exata de homotopia do fibrado

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_2(U(2)) & \longrightarrow & \pi_2(N_{klpq}) & \longrightarrow & \pi_1(T_{klpq}) & \longrightarrow & \pi_1(U(2)) \longrightarrow \\ & & & & & & \pi_1(N_{klpq}) \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & \pi_2(N_{klpq}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(N_{klpq}) \longrightarrow 0 \\ & & & & 1 & \longrightarrow & k + l - (p + q) \end{array}$$

segue que se

- i) $k+l-(p+q) \neq 0$ então $\pi_2(N_{klpq}) = 0$ e $\pi_1(N_{klpq}) = \mathbb{Z}_{k+l-(p+q)}$
 ii) $k+l-(p+q) = 0$ então $\pi_2(N_{klpq}) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(N_{klpq}) = \mathbb{Z}$.

Como no caso dos espaços de Aloff-Wallach, para classificar os espaços N_{klpq} , vamos encontrar a interseção da órbita de um elemento qualquer $A \in U(2)$ pela ação de T_{klpq} e $SU(2) \leq U(2)$.

$$\phi(A) = \left\{ \begin{bmatrix} z\alpha\omega^{k-p} & -\bar{\alpha}\omega^{k-q} \\ l\alpha\omega^{l-p} & \bar{z}\omega^{l-q} \end{bmatrix}, \omega \in S^1 \right\}.$$

$$\text{como } \begin{bmatrix} z\omega^{k-p} & -\bar{\alpha}\omega^{k-q} \\ z\alpha\omega^{l-p} & \bar{z}\omega^{l-q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\omega^{k-p+l-q} & \alpha\omega^{-l+q} \\ z\omega^{k-p+l-q} & \alpha\omega^{-k+q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}\omega^{k-q} \\ \bar{\alpha}\omega^{l-q} \end{bmatrix}$$

as interseções de $\mathcal{O}(A)$ com $SU(2)$ ocorrem se e somente se $z\omega^{k-p+l-q} = 1$. Vejamos as situações possíveis:

i) $k+l-(p+q) = 0$. Se $z \neq 1$ temos $\mathcal{O}(A) \cap SU(2) = \emptyset$ e se $z = 1$ temos $\mathcal{O}(A) \subseteq SU(2)$. Então, de maneira análoga com a dos exemplos de Aloff-Wallach temos que $N_{k+lpq} \cong S^1 \times S^2$.

ii) $k+l-(p+q) \neq 0$. Fazendo $z = e^{2\pi i \theta_0}$ e $\omega = e^{2\pi i \theta}$ $0 \leq \theta < 1$ temos

$$1 = z\omega^{k-p+l-q} = e^{2\pi i (\theta_0 + (k-p+l-p)\theta)} \implies \theta_0 + (k+l-(p+q))\theta = \text{inteiro} \\ \implies \theta = \frac{\text{inteiro}}{(k+l)-(p+q)} - \frac{\theta_0}{(k+l)-(p+q)}.$$

Podemos supor sem perda de generalidade que $k+l > p+q$. Como $0 \leq \theta$, $\theta_0 < 1$ os valores possíveis para o denominador da primeira fração são $1, 2, \dots, (k+l) - (p+q)$. Para estes valores ω^{-l+q} e ω^{-k+q} assumem respectivamente os valores

$$\left\{ e^{-2\pi i \left(\frac{(l-q)n}{(k+l)-(p+q)} - \frac{(l-q)\theta_0}{(k+l)-(p+q)} \right)} \right\} \\ \left\{ e^{-2\pi i \left(\frac{(k-q)n}{(k+l)-(p+q)} - \frac{(k-q)\theta_0}{(k+l)-(p+q)} \right)} \right\} \quad n = 1, 2, \dots, (k+l)-(p+q).$$

O "primeiro" ponto da interseção de $\mathcal{O}(A)$ com $SU(2)$ ocorre para $n = 1$. Denominado tal ponto por (z_1, z_2) isto é

$$\begin{bmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix}$$

os outros pontos ocorrem para

$$\left(z_1 e^{-2\pi i \left(\frac{(1-q)n'}{(k+1)-(p+q)} \right)}, z_2 e^{-2\pi i \left(\frac{(k-q)n'}{(k+1)-(p+q)} \right)} \right)$$

$n' = 0, 1, 2, \dots, (k+1)-(p+q)-1$.

Temos então que N_{klpq} não é em geral um espaço lenticular (obs.: Note que se $k = l = 0$ então N_{klpq} é um espaço lenticular). N_{klpq} é chamado de espaço lenticular generalizado (de acordo com a definição em [D-N-F p.60]).

O ESPAÇO M_6

Eschenburg em sua tese de livre docência em 1984 ([E-2]) obteve um novo exemplo de uma variedade 6-dimensional com curvatura seccional estritamente positiva. A idéia é novamente utilizar quocientes duplos. Vamos descrever a construção desta variedade.

Vamos considerar o seguinte subgrupo U de $U(3) \times U(3)$

$$U = \left\{ (A_{s,t}, B_{s,t}), s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

onde

$$A_{s,t} = \exp(2\pi i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2t \end{bmatrix}), \quad B_{s,t} = \exp(2\pi i \begin{bmatrix} -s & s+t \\ s+t & t \end{bmatrix}).$$

U atua em $SU(3)$ da forma

$$U \times SU(3) \xrightarrow{\Phi} SU(3)$$

$$(A_{s,t}, B_{s,t}) \times X \longrightarrow A_{s,t} X B_{s,t}^{-1}$$

PROPOSIÇÃO 3.5. A ação Φ é livre.

Demonstração. Fixados s e t temos que se

$$A_{s,t} X B_{s,t}^{-1} = X \text{ então } A_{s,t} = X B_{s,t} X^{-1}$$

logo os auto-valores de $A_{s,t}$ e $B_{s,t}$ são iguais. Como $A_{s,t}$ possui dois auto-valores iguais a 1, o mesmo ocorre para $B_{s,t}$. Mas os auto-valores de $B_{s,t}$ são $e^{2\pi i(-s)}$, $e^{2\pi i(s+t)}$, e $e^{2\pi i(t)}$, o que implica então que s e t são necessariamente inteiros e portanto $B_{s,t} = \text{Id}$ e $A_{s,t} = \text{Id}$ ■

O fato de $U \subset \text{SU}(3) \times \text{SU}(3)$ não é um fato essencial e deve-se apenas a simplificação nos cálculos. De fato, podemos transladar U obtendo um subgrupo $U' \subseteq \text{SU}(3) \times \text{SU}(3)$ da seguinte forma: Sejam

$$z_t = \exp \left(2\pi i \begin{bmatrix} (-2/3)t & & \\ & (-2/3)t & \\ & & (-2/3)t \end{bmatrix} \right)$$

$$U' = \langle (z_t A_{s,t}, z_t B_{s,t}) \mid s, t \in \mathbb{R} \rangle.$$

Como z_t está contido no centro de $\text{UC}(3)$ é imediato que U' atua de maneira livre em $\text{SU}(3)$ e que $\frac{\text{SU}(3)}{U} \cong \frac{\text{SU}(3)}{U'}$. Vamos denominar o espaço $\frac{\text{SU}(3)}{U}$ por M_6 . Por [E-2 Satz 422 p.49] temos que M_6 admite métrica com curvatura positiva projetada de uma métrica invariante à esquerda em $\text{SU}(3)$. Além disto M_6 não é homotopicamente equivalente a nenhum espaço homogêneo.

PROPOSTIÇÃO 3.6. M_6 é um S^2 -fibrado sobre $\mathbb{CP}^2$

Demonstração: Vamos estender o subgrupo $U \subseteq \text{UC}(3) \times \text{UC}(3)$ para um subgrupo $H \subseteq \text{UC}(3) \times \text{UC}(3)$ que também atua de maneira livre em $\text{SU}(3)$ tal que $\frac{\text{SU}(3)}{H} \cong \mathbb{CP}^2$.

Sejam $H' = \langle (C_z, D_z), z \in S^1 \rangle \subseteq U(3) \times U(3)$

onde

$$C_z = \begin{bmatrix} z^2 & z^2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_z = C_z \begin{bmatrix} \bar{z} & 1 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & z^2 & z \end{bmatrix}$$

e $H'' = \langle (\text{Id}, E), E \in \text{SU}(2) \subseteq \text{SU}(3) \rangle \subset \text{SU}(3) \times \text{SU}(3)$.

(Obs.: Estamos considerando a inclusão

$$\text{SU}(2) \longrightarrow \text{SU}(3) \quad A \longrightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos definir $H = H' \times H''$ (onde a multiplicação é multiplicação do produto direto).

LEMA 3.7. H é um subgrupo.

Demonstração: Basta mostrarmos que H é fechado em relação à multiplicação e à inversão. Todo elemento de H é da forma (C_z, D_z, E) com $z \in S^1$ e $E \in \text{SU}(2)$. Vamos mostrar que

$$(C_z, D_z, E) \times (C_v, D_v, E') = (C_{zv}, D_{zv}, E'') \quad \text{para algum}$$

$$E'' \in \text{SU}(2) \subseteq \text{SU}(3).$$

$$D_z E D_v E' = \begin{bmatrix} z & & \\ & z^2 & \\ & & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -\bar{\alpha} & 0 \\ \alpha & \bar{x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & & \\ & w^2 & \\ & & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & -\bar{\beta} & 0 \\ \beta & \bar{y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} zw & & \\ & zw & \\ & & zw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -w\bar{\alpha} & 0 \\ z\alpha & zw\bar{x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & -\bar{\beta} & 0 \\ \beta & \bar{y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} zw & & \\ & zw & \\ & & zw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xy - w\bar{\alpha}\beta & -x\bar{\beta} - w\bar{\alpha}\bar{y} & 0 \\ z\alpha y + zw\bar{x}\beta & -z\alpha\bar{\beta} + zw\bar{x}\bar{y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} zw & (zw)^2 \\ & zw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xy - w\bar{\alpha}\beta & -x\bar{\beta} - w\bar{\alpha}\bar{y} & 0 \\ \bar{w}\alpha y + \bar{x}\beta & -\bar{w}\alpha\bar{\beta} + \bar{x}\bar{y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D_{zw} E''.$$

Dado $(C_z, D_z E)$ com $E = \begin{bmatrix} x & -\bar{\alpha} & 0 \\ \alpha & \bar{x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é fácil ver que $(C_z, D_z E')$

com $E' = \begin{bmatrix} x & \bar{z}\bar{\alpha} \\ -z\alpha & \bar{x} \end{bmatrix}$ é tal que $(C_z, D_z E)(C_z, D_z E') = (I, I)$ ■

O subgrupo H não é uma extensão do subgrupo U e sim de um transladado de U que passaremos a descrever. Seja

$$U'' = \{A_{s,t} z_t, B_{s,t} z_t\}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

onde

$$z_t = \exp(2\pi i \begin{bmatrix} -2t & & \\ & -2t & \\ & & -2t \end{bmatrix}).$$

Portanto os elementos de U'' são da forma

$$(\exp(2\pi i \begin{bmatrix} -2t & & \\ & -2t & \\ & & 0 \end{bmatrix}), \exp(2\pi i \begin{bmatrix} -s-2t & & \\ & s-t & \\ & & -t \end{bmatrix})).$$

Fazendo $z = e^{-2\pi i t}$ obtemos:

$$(\begin{bmatrix} z^2 & & \\ & z^2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z & & \\ & z^2 & \\ & & z \end{bmatrix} \cdot \exp(2\pi i \begin{bmatrix} -s-t & & \\ & s+t & \\ & & 0 \end{bmatrix}))$$

de onde segue que $U'' \subseteq H$. Como z_t pertence ao centro de $U(3)$,

U'' atua livre em $SU(3)$ e $\frac{SU(3)}{U} \cong \frac{SU(3)}{U''} = M_0$.

H atua em $SU(3)$ da forma

$$\begin{aligned} H \times SU(3) &\xrightarrow{\Phi} SU(3) \\ (C_z, D_z E) \times X &\longrightarrow C_z X E^* D_z \end{aligned}$$

LEMA 3.8. A ação Φ é livre.

Demonstração: Seja $X \in SU(3)$ tal que $C_z X E^* D_z = X$ para algum $(C_z, D_z E) \in H$.

Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de C^3 .

$$\begin{aligned} X(e_3) &= C_z X E^* D_z(e_3) = C_z X E^*(ze_3) = C_z X(ze_3) = \bar{z} C_z(X(e_3)) = \\ &= \bar{z} C_z(x_{13}e_1 + x_{23}e_2 + x_{33}e_3) = z\bar{x}_{13}e_1 + z\bar{x}_{23}e_2 + \bar{z}x_{33}e_3 \end{aligned}$$

Conde $X = (x_{ij}) \quad 1, j = 1, 2, 3$.

Portanto

$$\begin{aligned} x_{13}e_1 + x_{23}e_2 + x_{33}e_3 &= z\bar{x}_{13}e_1 + z\bar{x}_{23}e_2 + \bar{z}x_{33}e_3 \quad \text{de onde se-} \\ \text{gue que } z &= 1 \quad \text{e consequentemente } C_z = D_z = I. \text{ Temos então que} \\ X &= C_z X E^* D_z = X E^* \implies E = I \quad \blacksquare \end{aligned}$$

LEMA 3.9. $\frac{SUC(3)}{H} \cong CP^2$.

Demonstração: O espaço CP^2 pode ser obtido de $C^3 - \{0\}$ pela seguinte relação de equivalência

$y = (y_1, y_2, y_3), \quad w = (w_1, w_2, w_3)$ em C^3 são equivalentes se e somente se existe $z \in C - \{0\}$ t. q. $(w_1, w_2, w_3) = (zy_1, zy_2, \bar{z}y_3)$. Denotaremos as classes de equivalência por y .

Observação: Esta definição é equivalente, a menos de difeomorfismo, a definição usual do espaço CP^2 .

Vamos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \frac{SUC(3)}{H} &\xrightarrow{\psi} CP^2 \\ [X] &\longrightarrow \overline{X(e_3)}. \end{aligned}$$

i) ψ está bem definida.

$$\begin{aligned} C_z X E^* D_z(e_3) &= C_z X E^*(\bar{z}e_3) = \bar{z} C_z(X(e_3)) = \\ &= z\bar{x}_{13}e_1 + z\bar{x}_{23}e_2 + \bar{z}x_{33}e_3, \text{ de onde segue que } \overline{C_z X E^* D_z(e_3)} = \overline{X(e_3)}. \end{aligned}$$

ii) ψ é injetiva.

Como não encontramos uma prova direta para este fato, usaremos

Usaremos o seguinte argumento: Como ψ está bem definida, temos que a órbita por uma matriz X está contida no subconjunto das matrizes Y tais que $Y(e_g) = zX(e_g)$ (onde estamos identificando o CP^2 obtido com a relação de equivalência definida acima e o CP^2 obtido pela relação de equivalência usual) para algum $z \in S^1$. Ora, tal subconjunto nada mais é que a órbita por X da ação à direita de $U(2)$ em $SU(3)$. Como esta órbita tem dimensão 4 e a órbita por X definida pela ação de H também tem dimensão 4 segue que ambas são iguais. Mas isto implica na injetividade de ψ pois se $\overline{X(e_g)} = \overline{Y(e_g)}$ então X e Y estão na mesma órbita definida pela ação de $U(2)$ e portanto na mesma órbita definida pela ação de H .

iii) ψ é sobrejetiva. Imediato ■

Podemos agora demonstrar a Proposição 3.6.

O subgrupo $U'' \subseteq H$ define o fibrado associado

$$H \dashrightarrow SU(3) \longrightarrow CP^2$$

$$H/U'' \dashrightarrow SU(3)/U'' = M_\sigma \longrightarrow CP^2.$$

É fácil ver que $H/U'' \cong S^2$ ■

Podemos agora voltar à questão inicial.

"Os espaços de Eschenburg M_{klpq} fibram sobre CP^2 ?"

A idéia para abordar esta questão é utilizar a fibração

$$H \dashrightarrow SU(3) \longrightarrow CP^2. \text{ Para isto precisamos transladar } T_{klpq}$$

para obtermos um subgrupo em H . Como estamos trabalhando com uma ação dupla (isto é, pela direita e esquerda simultaneamente

te) a dificuldade com a translação é que temos de garantir que o subgrupo transladado continua a atuar livre e que o espaço de órbitas não é alterado. Em geral, a maneira mais fácil de obtermos translações com tais propriedades é utilizar o centro de $U(3)$. Porém existe restrições para que o subgrupo T_{klpq} seja transladado pelo centro de $U(3)$ para H . Uma outra opção seria transladar o próprio subgrupo H . Bem, o fato é que não encontramos uma maneira geral que dê uma resposta para a questão acima. Vamos analisar aqui um caso particular.

Sejam

$$T_{klpq} = \left\{ \exp(2\pi i \begin{bmatrix} kt & lt & -(k+1)t \\ pt & qt & -(p+q)t \end{bmatrix}), t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$ZU(3) = \left\{ z(t) = \exp(2\pi i \begin{bmatrix} st & st & st \end{bmatrix}), \text{ onde } s \text{ é um número real fixo e } t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vamos transladar T_{klpq} da seguinte forma

$$\tilde{T}_{klpq} = \left\{ \exp(2\pi i \begin{bmatrix} (k+s)t & (1+s)t & -(k+1+s)t \\ (p+s)t & (q+s)t & -(p+q+s)t \end{bmatrix}), t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Para que $\tilde{T}_{klpq}$ esteja contido em H é necessário que

$k + s = 1 + s$ e $-(k + 1) + s = 0$, isto é, temos que nos restringir ao caso $k = 1$ e $s = 2k$. Neste caso $\tilde{T}_{klpq}$ fica da forma

$$\tilde{T}_{klpq} = \left\{ \exp(2\pi i \begin{bmatrix} 3kt & 3kt & 0 \end{bmatrix}), \right.$$

$$\left. \exp(2\pi i \begin{bmatrix} (p+2k)t & (q+2k)t & -(p+q+2k)t \end{bmatrix}), t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Como as matrizes diagonais do segundo fator de H são da forma

$$\exp(2\pi i \begin{bmatrix} \frac{3kt}{2} & & \\ & 3kt & \\ & & \frac{3kt}{2} \end{bmatrix}) \exp(2\pi i \begin{bmatrix} xt & & \\ & -xt & \\ & & 0 \end{bmatrix})$$

temos as seguintes restrições aos valores de p e q .

$$p + 2k = \frac{3k}{2} + x \quad q + 2k = 3k - x \quad \frac{3k}{2} = -(p + q) + 2k$$

$$\text{isto é, } p - x = -\frac{k}{2} \quad q + x = k \quad p + q = \frac{k}{2}$$

Uma solução possível para o sistema é $k = 2$, $p = 4$, $q = -3$, $x = 5$. Devemos observar que $(2, 2, 4, -3)$ satisfaz as condições da proposição 2.1 de [E-1] e portanto T_{224-3} define o espaço de Eschenburg

$$M_{224-3} \cong \frac{SU(3)}{T_{224-3}} \cong \frac{SU(3)}{\tilde{T}_{224-3}}$$

Vamos tomar o fibrado associado

$$H/\tilde{T}_{224-3} \xrightarrow{\quad} \frac{SU(3) \times H/\tilde{T}_{224-3}}{H} \longrightarrow CP^2$$

onde $\tilde{T}_{224-3}$ atua à direita em H e H atua à esquerda em $H/\tilde{T}_{224-3}$.

$$\text{Afirmação: } \frac{SU(3) \times H/\tilde{T}_{224-3}}{H} \cong SU(3)/\tilde{T}_{224-3} \cong M_{224-3}$$

Demonstração:

Seja

$$\begin{aligned} \frac{SU(3) \times H/\tilde{T}_{224-3}}{H} &\xrightarrow{\psi} SU(3)/\tilde{T}_{224-3} \\ [A, (\overline{h_1}, h_1')] &\longrightarrow [h_1^{-1} A h_1'] \end{aligned}$$

ψ esta bem definida pois

$$[h_2 A h_2^{-1}, (\overline{h_2 h_1}, h_1' h_1')] \longrightarrow [h_1^{-1} h_2^{-1} h_2 A h_2^{-1} h_1' h_1'] = [h_1^{-1} A h_1']$$

$$[A, (\overline{h_1 t}, h_1' t')] \longrightarrow [t^{-1} h_1^{-1} A h_1' t'] = [h_1^{-1} A h_1']$$

É fácil ver que ψ é um isomorfismo ■

Vamos descrever a fibra H/T_{124-3} .

A órbita de um elemento qualquer (C_z, D_z, E) de H pela ação de $\tilde{T}_{224-3}$ intercepta $(Id, SU(2)) \subseteq H$ nos pontos onde t satisfaz as igualdades

$$\begin{bmatrix} z^2 & & \\ & z^2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \exp(2\pi i \begin{bmatrix} 6t & & \\ & 6t & \\ & & 0 \end{bmatrix}) = Id$$

e

$$\begin{bmatrix} z & & \\ & z^2 & \\ & & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -\bar{\alpha} & \\ \alpha & \bar{x} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \exp(2\pi i \begin{bmatrix} 8t & & \\ & t & \\ & & 3t \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} y & -\bar{\beta} & \\ \beta & \bar{y} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

para algum y, β .

A última igualdade pode ser escrita da forma

$$\begin{bmatrix} z & & \\ & z^2 & \\ & & z \end{bmatrix} \exp(2\pi i \begin{bmatrix} 3t & & \\ & 6t & \\ & & 3t \end{bmatrix}) \exp(2\pi i \begin{bmatrix} 3t & & \\ & 0 & \\ & & 3t \end{bmatrix})$$

$$\begin{bmatrix} x & -\bar{\alpha} & \\ \alpha & \bar{x} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \exp(2\pi i \begin{bmatrix} 2t & & \\ & -5t & \\ & & -3t \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} y & -\bar{\beta} & \\ \beta & \bar{y} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

isto é

$$\begin{bmatrix} ze^{2\pi i 3t} & & \\ & z^2 e^{2\pi i 6t} & \\ & & ze^{2\pi i 3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xe^{2\pi i 5t} & -\bar{\alpha} e^{2\pi i (-2t)} & \\ \alpha e^{2\pi i 2t} & -\bar{x} e^{2\pi i (-5t)} & \\ & & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} y & -\bar{\beta} & \\ \beta & \bar{y} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto nos pontos de interseção os valores de t devem satisfazer $ze^{2\pi i 3t} = 1$. Como 3, 5, 2, são primos entre si

temos que t deve percorrer o intervalo $[0, 1]$ para fechar a órbita. No intervalo $[0, 1]$ a equação $ze^{2\pi i 3t} = 1$ possui 3 soluções distintas t_1, t_2, t_3 definindo na esfera 3 pontos $(xe^{2\pi i 5t_i}, \alpha e^{2\pi i 2t_i})$ $i = 1, 2, 3$ e onde segue que $H/\tilde{T}_{224-3}$ é um espaço lenticular generalizado como já era esperado. (note que $\pi_1(M_{224-3}) = \mathbb{Z}_3$ pois $2 + 2 - (4 - 3) = 3$).

O exemplo acima nos leva a acreditar que todos os espaços de Eschenburg M_{klpq} fibram sobre $\mathbb{CP}^2$ com fibra espaços lenticulares generalizados. Porém uma prova deste fato certamente será excessivamente técnica e ao que tudo indica seguiria essencialmente os cálculos feitos acima.

CAPÍTULO IV

GERADORES DE HOMOTOPIA

Dado um grupo de Lie G , o grupo de homotopia $\pi_n(G)$ classifica os G -fibrados principais sobre S^{n+1} . A importância de se obter uma fórmula explícita para um representante de $\pi_n(G)$, é que podemos obter informações sobre o fibrado determinado por este representante.

Os fibrados principais

$G_2 \dashrightarrow P \longrightarrow S^7$, $SU(3) \dashrightarrow G_2 \longrightarrow S^6$ são importantes do ponto de vista da geometria diferencial. Em razão deste fato, fizemos um estudo para explicitar os geradores dos grupos $\pi_6(G_2)$, $\pi_5(SU(3))$ e $\pi_7(SU(4))$.

Durante este estudo obtemos, utilizando o conceito de índice ([D]), um exemplo de duas órbitas singulares da ação adjunta de G_2 que são topologicamente distintas.

1. SOBRE UMA ÓRBITA CONJUGADA DE G_2

Seja H o corpo não comutativo dos números quaterniônicos. Vamos definir em $H \otimes H$ o produto $(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c})$. Com este produto obtemos em $H \otimes H$ uma estrutura de álgebra não associativa, sem divisores de zero e com unidade, que

passaremos a designar por $\mathcal{E}_a$ (álgebra dos números de Cayley).

Seja $G_2 = \{x \in SO(8), \quad x(\alpha\beta) = x(\alpha)x(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{E}_a \cong \mathbb{R}^8\}$.

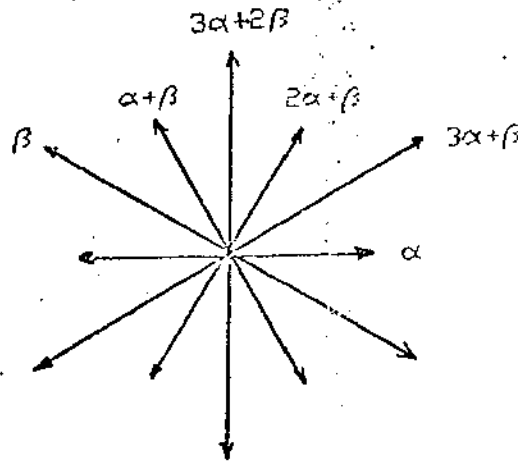
G_2 é um grupo de Lie 14-dimensional, compacto e simples.

Denominando $\hat{G}_2$ sua álgebra de Lie, estamos interessados em estudar as órbitas da ação adjunta de G_2 em $\hat{G}_2$, isto é, os conjuntos da forma $O(A) = \{xAx^{-1}, \quad x \in G_2, \quad A \in \hat{G}_2\}$.

Vejamos primeiramente alguns fatos genéricos. Seja G um grupo de Lie compacto e $\hat{G}$ sua álgebra de Lie. A ação adjunta de G em $\hat{G}$ é definida da forma $G \times \hat{G} \longrightarrow \hat{G} ((x, A) \longrightarrow xAx^{-1})$. O estudo das órbitas desta ação foi feito, utilizando técnicas da Teoria de Morse, por Bott em [Bo]. Tais órbitas são homotopicamente equivalentes a CW-complexos formados de células de dimensão par. O número e a dimensão de tais células podem ser obtidos diretamente do diagrama infinitesimal do grupo G (para as definições ver [A]). Um elemento $X \in \hat{G}$ é dito regular se existe apenas um toro maximal $T \subseteq G$ tal que $X \in \hat{T}$ (onde $\hat{T} \subseteq \hat{G}$ é álgebra de Lie de T), caso contrário tal elemento será dito singular. O resultado de Bott nos garante que todas as órbitas por elementos regulares (órbitas regulares) são homotopicamente equivalentes a CW-complexos (o número e a dimensão das células que formam estes CW-complexos são iguais) o mesmo e ocorre também para as órbitas por elementos singulares (órbitas singulares). O fato de todos os toros maximais de G serem conjugados implica que todas as órbitas regulares são difeomorfas entre si. O mesmo não acontece com as órbitas singulares. Vamos exibir para o grupo G_2 duas órbitas singulares não homeomorfas

Distinguindo Órbitas Singulares

O diagrama das raízes de G_2 é da forma



[Bo] nos garante que as órbitas singulares são homotopicamente equivalentes a CW-complexos com uma célula em cada uma das dimensões 0, 2, 4, 6, 8 e 10.

Sejam $H_1, H_2 \in \hat{G}_2$ elementos correspondentes a raízes de tamanhos diferentes.

Se $O(H_i) = \{xH_ix^{-1}, x \in G_2\}, i = 1, 2$

$$I(H_i) = \{x \in G_2, xH_i = H_ix\}, i = 1, 2$$

temos $O(H_i) \cong G_2/I(H_i), i = 1, 2$.

Para exibirmos a diferença entre $O(H_1)$ e $O(H_2)$ faremos uso do par simétrico $(G_2, SO(4))$.

$SO(4)$ admite uma inclusão em G_2 , induzida pelo seguinte homomorfismo de $Spin(4) \cong Sp(1) \times Sp(1)$ em G_2

$$\theta: Sp(1) \times Sp(1) \longrightarrow G_2$$

$$\xi, \eta \longrightarrow \theta_{\xi, \eta}: (a, b) \longrightarrow (\eta a \bar{\eta}, \xi b \bar{\eta}).$$

Como $\text{posto } G_2 = \text{posto } \text{SO}(4) = 2$ ([R-3 p.44]), vamos tomar um toro maximal T de G_2 tal que $T \subseteq \text{SO}(4) \subseteq G_2$. Para obtermos uma base conveniente de $\hat{T}$ vamos trabalhar na álgebra de Lie de $\text{SO}(4)$. O recobrimento canônico de $\text{Spin}(4) \cong \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1)$ sobre $\text{SO}(4)$ é dado por

$$\psi : \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1) \longrightarrow \text{SO}(4)$$

$$\xi, \eta \longrightarrow \psi_{\xi, \eta} : x \longrightarrow \xi x \bar{\eta}$$

Temos então em $\text{SO}(4)$ dois subgrupos normais, isomorfos a S^3 que são

$$S_1^3 = \psi(\text{Sp}(1) \times \{1\}) \quad S_2^3 = \psi(\{1\} \times \text{Sp}(1)).$$

O toro maximal canônico de $\text{SO}(4)$ (que também designaremos por T) é da forma

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) & & \\ -\sin(x) & \cos(x) & & \\ & & \cos(y) & \sin(y) \\ & & -\sin(y) & \cos(y) \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Logo

$$\hat{T} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & -y & 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

As raízes de $\text{SO}(4)$ são os funcionais lineares $\hat{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ dados por $x + y$ e $x - y$. Se munirmos $\hat{T}$ com o produto interno $\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \text{traço}(AB)$ as raízes $x + y$ e $x - y$ se identificam respectivamente aos vetores

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Devemos observar que $\|B_1\|^2 = \|B_2\|^2 = 2$, isto é, as raízes de $\text{SO}(4)$ são do mesmo tamanho. Temos também que B_1 e B_2 pertencem

a $SO(4)$ pois $B_1 = \psi_{1,1}$ e $B_2 = -\psi_{1,1}$. Um cálculo imediato nos dá:

$$H_1 = e_*(B_1) = \begin{bmatrix} & 0 & & & & \\ & & & & 0 & \\ \hline & & & 0 & -1 & \\ & 0 & & 1 & 0 & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = e_*(B_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -2 & & & \\ 0 & 2 & 0 & & & \\ \hline & & & 0 & 1 & \\ & 0 & & -1 & 0 & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como B_1 e B_2 são singulares, H_1 e H_2 também são elementos singulares de $\hat{G}_2$. Além disto, $\|H_1\|^2 = 2$, $\|H_2\|^2 = 6$ e $\langle H_1, H_2 \rangle = 0$, isto é, H_1 e H_2 são elementos singulares perpendiculares entre si e portanto o diagrama infinitesimal de G_2 (ver pag. 81) nos garante que H_1 e H_2 são vetores correspondentes a raízes de tamanhos diferentes. Vejamos as órbitas adjuntas $\mathcal{O}(H_1)$ e $\mathcal{O}(H_2)$. Pela construção destes vetores temos que

$$e(\psi(Sp(1) \times S^1)) \subseteq I(H_2) \quad \text{e} \quad e(\psi(S^1 \times Sp(1))) \subseteq I(H_1)$$

Conde S^1 em ambos os casos é o grupo $S^1 = \{v = \alpha + i\beta, |v| = 1\}$. Como sabemos que $\dim \mathcal{O}(H_1) = \dim \mathcal{O}(H_2) = 10$ as inclusões acima são de fato igualdades, uma vez que $I(H_i)$ $i = 1, 2$ é conexo. $e(\psi(Sp(1) \times S^1))$ e $e(\psi(S^1 \times Sp(1)))$ definem em G_2 dois subgrupos isomorfos a $U(2)$. O que nos permitirá distinguir entre $\mathcal{O}(H_1)$ e

$O(H_2)$ é uma medida de quanto este dois $U(2)$ estão situados em G_2 de formas diferentes. Para isto precisamos das seguintes considerações.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples. Existe em $\mathfrak{g}$ apenas um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (a menos de homotetia) tal que todos os automorfismos internos são invariantes por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Vamos normalizar este produto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (denominaremos o produto normalizado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$) de tal forma que se δ é a maior raiz de $\mathfrak{g}$ então $\langle \delta, \delta \rangle_{\mathfrak{g}} = 2$. Se $\mathfrak{g}'$ é uma subálgebra simples de $\mathfrak{g}$ podemos de igual maneira, obter o produto interno normalizado $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}'}$. O produto interno de $\mathfrak{g}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$, induz em $\mathfrak{g}'$ um produto interno que denotaremos também por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$. Existe portanto um número real positivo k , que é por definição o índice de $\mathfrak{g}'$ em $\mathfrak{g}$, tal que

$$k \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}'} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}.$$

TEOREMA: [Dynkin] k é um inteiro.

Atiyah e outros ([A-H-S]) trabalhando com a demonstração de Bott [Bo] de que se G é um grupo de Lie simples e compacto então $\pi_3(G) = \mathbb{Z}$, estenderam o conceito de índice para a seguinte situação: sejam G_1, G grupos de Lie simples e compactos tais que $G_1 \subseteq G$. Se o índice de $\hat{G}_1$ em $\hat{G}$ é k então $\pi_3(G/G_1) = \mathbb{Z}_k$. A idéia então é mostrar que $I(H_2) = e(\psi(Sp(1) \times S^1)) \cong U(2)$ e $I(H_1) = e(\psi(S^1 \times Sp(1))) \cong U(2)$ possuem índices diferentes. Note que temos

$$S^1 \dashrightarrow G_2 / \mathcal{O}(S_1^3) \longrightarrow G_2 / I(H_1)$$

e portanto $\pi_3(G_2 / \mathcal{O}(S_1^3)) \cong \pi_3(G_2 / I(H_1))$ $i = 1, 2$, isto é, quando nos referimos ao índice de $U(2)$ em G_2 , estamos de fato nos referindo ao índice de $SU(2) \subseteq U(2)$ em G_2 .

$$\text{Como } \|B_1\|^2 = \|B_2\|^2 = 2, \|H_1\|^2 = 2, \|H_2\|^2 = 6$$

e $H_1 \in \mathfrak{e}_*(\widehat{Sp(1) \times (1)})$, $H_2 \in \mathfrak{e}_*(\widehat{(1) \times Sp(1)})$, segue que o índice de $I(H_1)$ em G_2 é 3 e o índice de $I(H_2)$ em G_2 é 1. Temos então que $\pi_3(\mathcal{O}(H_1)) = \mathbb{Z}_3$ e $\pi_3(\mathcal{O}(H_2)) = \{0\}$. (obs.: Estas duas órbitas singulares são estudadas em [S p.164] sem menção do fato de não serem homotopicamente equivalentes).

2. UM GERADOR DE $\pi_6(G_2)$

Projetando pela aplicação exponencial, as órbitas da ação adjunta são levadas em órbitas da ação conjugada

$$(G \times G \longrightarrow G \quad (x, y) \longrightarrow xyx^{-1})). \quad \text{Observando que}$$

$$\pi B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\pi & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi \\ 0 & 0 & \pi & 0 \end{bmatrix}$$

se projeta pela exponencial no centro de $SO(4)$, temos que a órbita adjunta $\mathcal{O}(\pi H_1)$ se projeta na órbita conjugada difeomorfa a $G_2 / SO(4)$. A geometria desta órbita é bem conhecida. O fato de $(G_2, SO(4))$ formarem um par simétrico possui uma bonita implicação geométrica dada pelo seguinte Teorema devido a Elie Cartan.

TEOREMA [C-E p.77]. Sejam G, H grupos de Lie com G compacto e $H \leq G$. Se (G, H) formam um par simétrico e considerando em G uma métrica bi-invariante e em G/H uma métrica igual a duas vezes a métrica normal, então existe um mergulho isométrico totalmente geodésico de G/H em G .

A construção deste mergulho é obtida da seguinte forma:

seja $A = \exp(\psi(1, -1)) \in G_2$. Então $A^2 = Id$ e definindo $\sigma : G_2 \longrightarrow G_2$, $\sigma(X) = AXA$, temos que σ é um homomorfismo com $\sigma^2 = Id$. O conjunto dos pontos fixos de σ é igual a $SO(4) \subseteq G_2$ e portanto σ induz a aplicação $\tilde{\sigma} : G_2/SO(4) \longrightarrow G_2$, $\tilde{\sigma}([X]) = X(\sigma(X^{-1})) = XAX^{-1}A$. $\tilde{\sigma}$ um mergulho totalmente geodésico e obtemos então $G_2/SO(4)$ como órbita conjugada totalmente geodésica $G_2/SO(4) = \{XAX^{-1}A, X \in G_2\}$. (obs.: A translação à esquerda por A é uma isometria).

Vamos agora obter uma outra órbita conjugada. A idéia é explorar o fato que $SU(3) \subseteq G_2$ ($SU(3) = \{A \in G_2, A(1) = 1\}$, [Po p.272]). O grupo $SU(3)$ possui um centro ($ZSU(3)$) discreto formado pelas matrizes

$$Z(SU(3)) = \left\{ \begin{bmatrix} z & & \\ & z & \\ & & z \end{bmatrix}, z = 1, \exp(2\pi i/3), \exp(4\pi i/3) \right\}.$$

Seja $A \in Z(SU(3))$ a matriz definida por $z = \exp(2\pi i/3)$

(note que estamos considerando A em G_2).

Vamos mostrar que $\mathcal{O}(\frac{2\pi}{3} H_2)$ se projeta pela aplicação exponencial na órbita pela ação conjugada de A (também designaremos tal órbita por $\mathcal{O}(A)$).

Temos que

$$H_1 - H_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Logo como matriz complexa, $H_1 - H_2$ é da forma $\begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

isto é, possui traço nulo e portanto pertence à álgebra de Lie de um toro maximal $T_1 \subseteq \text{SU}(3) \subseteq G_2$. Analisando o diagrama infinitesimal de $\text{SU}(3)$ (ver pag. 81) temos que existe $X \in \hat{T}_1$ tal que o ângulo entre X e $H_1 - H_2$ é -150° , $\|X\|^2 = \frac{24\pi^2}{9}$ e

$\exp(X) = \Lambda$. O ângulo entre $H_1 - H_2$ e H_2 também é de -150° , pois $-6 = \langle H_1 - H_2, H_2 \rangle = \|H_1 - H_2\| \|H_2\| \cos \theta = \sqrt{8} \sqrt{6} \cos \theta \implies \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. A interseção entre $\hat{T}_1$ e $\hat{T}$ contém o subespaço gerado por $H_1 - H_2$.

Como todos os toros maximais de G_2 são conjugados existe $A \in G_2$ tal que $A\hat{T}_1A^{-1} = \hat{T}$. Afirmamos que podemos obter A com a propriedade $A(H_1 - H_2)A^{-1} = H_1 - H_2$. De fato, seja $C \subseteq G_2$ o centralizador de $\exp(H_1 - H_2)$, isto é,

$C = \{Y \in G_2, Y \exp(H_1 - H_2) Y^{-1} = \exp(H_1 - H_2)\}$. C é um subgrupo e contém os toros maximais T e T_1 , logo existe $A \in C$ tal que $AT_1A^{-1} = T$ e portanto $A(H_1 - H_2)A^{-1} = H_1 - H_2$. Como a ação adjunta é por isometrias temos que o ângulo entre os vetores $A(H_1 - H_2)A^{-1} = H_1 - H_2$ e $A X A^{-1}$ é -150° (se este ângulo for 150° podemos, em razão das simetrias do diagrama infinitesimal de $\text{SU}(3)$, tomar outro $X \in \hat{T}_1$ tal que o ângulo seja -150°) e portanto $A X A^{-1} = \frac{2\pi}{3} H_2$ (note que $\|\frac{2\pi}{3} H_2\|^2 = \frac{24\pi^2}{9}$).

Temos então que $\exp(\frac{2\pi}{3} H_2) = \exp(AXA^{-1}) = A \exp(X) A^{-1} = A \Lambda A^{-1}$ de onde segue que $\exp(\theta(\frac{2\pi}{3} H_2)) = \theta(\Lambda)$.

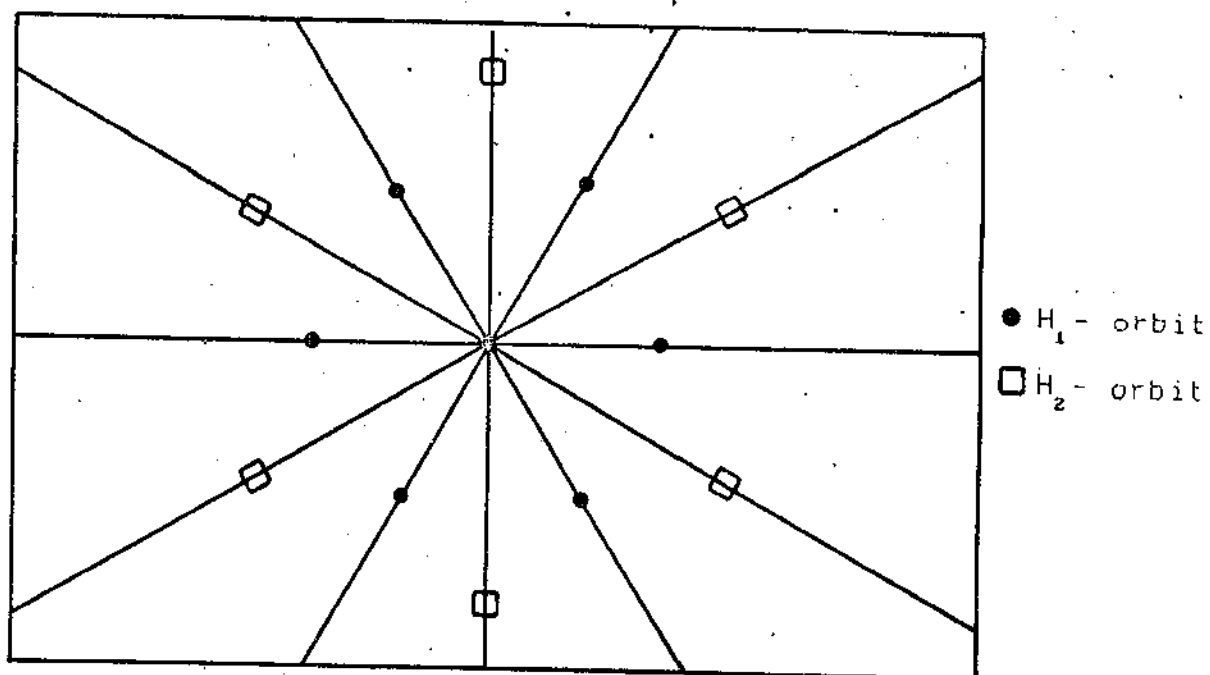
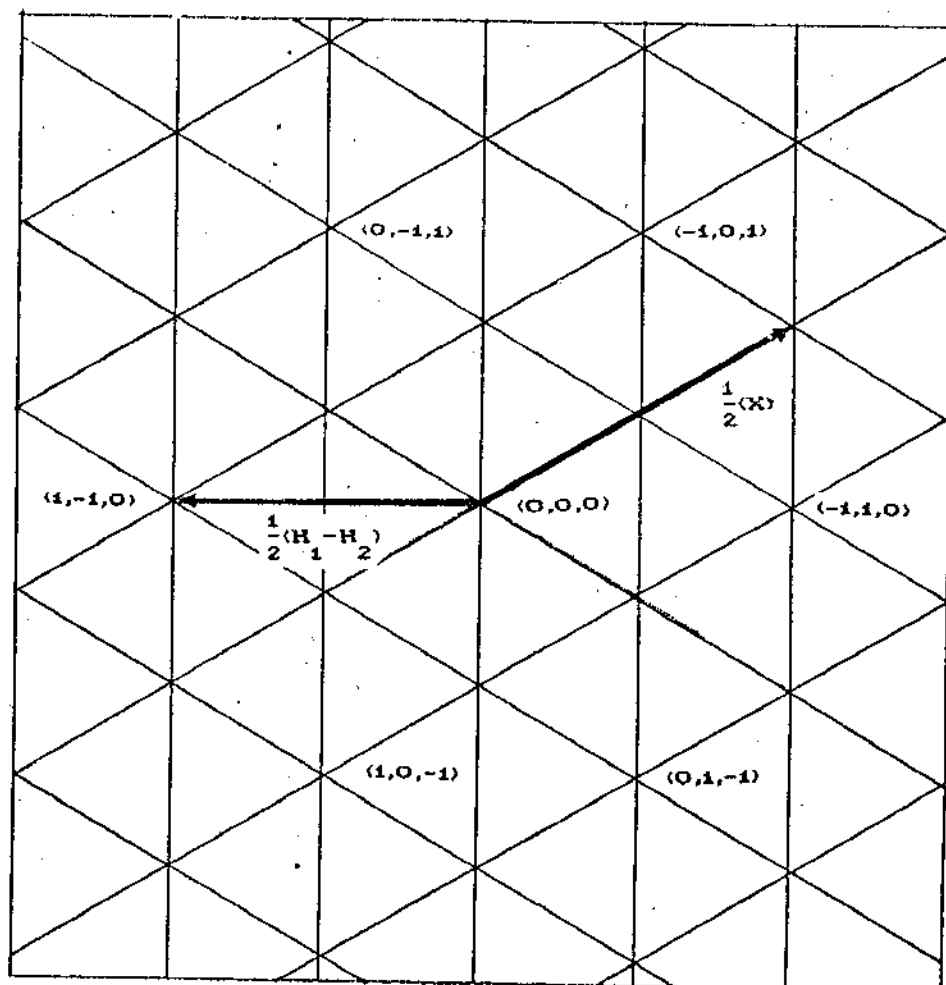


DIAGRAMA INFINITESIMAL DE $SUC(3)$



A órbita conjugada $O(A)$ satisfaz $O(A) = G_2/SUC(3) \cong S^6$ pois $A \wedge A^{-1} = A$ se e somente se $A \in SUC(3)$. Aqui a situação é diferente do caso $G_2/SOC(4)$ pois $(G_2, SUC(3))$ não é um par simétrico. Não podemos então utilizar o Teorema de Cartan para mergulhar isometricamente $G_2/SUC(3)$ em G_2 . (Obs.: Apesar de $(G_2, SUC(3))$ não ser um par simétrico, a métrica normal em $G_2/SUC(3) \cong S^6$ é a métrica simétrica [B]). No entanto, a órbita $G_2/SUC(3)$ tem também uma bonita propriedade topológica dada por:

TEOREMA 4.1. A aplicação

$$\begin{array}{ccc} \psi : S^6 \cong G_2 / SUC(3) & \longrightarrow & G_2 \\ [X] & \longrightarrow & XAX^{-1} \end{array}$$

é um gerador do grupo de homotopia $\pi_6 G_2 \cong \mathbb{Z}_9$.

A demonstração deste Teorema é baseada na propriedade da trialidade das matrizes em $SOC(8)$ [Ca].

" $\forall A \in SOC(8) \exists B, C \in SOC(8)$ tal que $A(xy) = B(x)C(y)$,

$\forall x, y \in \mathbb{O} \cong \mathbb{R}^8$." (onde a multiplicação é a multiplicação de números de Cayley).

Vamos relembrar que:

$Spin(7) = \langle B \in SOC(8), A(xy) = B(x)C(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^8 \text{ e } A \in SOC(7) \rangle$
([Wh]).

Vamos definir a seguinte função:

$$\begin{array}{ccc} g : S^7 & \longrightarrow & SOC(7) \\ \alpha & \longrightarrow & g_\alpha : x \longrightarrow \alpha x \bar{\alpha} \end{array}$$

g está bem definida pois $g_\alpha(1) = \alpha \cdot 1 \cdot \bar{\alpha} = 1$. Como uma das identidades de Moufang nos dá que

$g_\alpha(xy) = \alpha(xy)\bar{\alpha} = (\alpha\alpha\alpha^2)(\bar{\alpha}^2 y \bar{\alpha})$; temos que a aplicação

$f_\alpha(x) = \alpha\alpha\alpha^2$ pertence a $\text{Spin}(7)$.

Podemos então definir a aplicação

$$f : S^7 \longrightarrow \text{Spin}(7)$$

$$\alpha \longrightarrow f_\alpha$$

Em [T-S-Y] temos a demonstração que a aplicação g gera o grupo de homotopia $\pi_7(\text{SO}(7))$ e aplicação f gera o grupo de homotopia $\pi_7(\text{Spin}(7))$.

Se $\alpha \in S^7$ é tal que $\alpha^3 = 1$ então $\alpha^2 = \bar{\alpha}$ e

(1) $f_\alpha(xy) = \alpha(xy)\alpha^2 = (\alpha\alpha\alpha^2)(\bar{\alpha}^2 y \alpha^2) = (\alpha\alpha\alpha^2)(\alpha^4 y \alpha^2) = (\alpha\alpha\alpha^2)(\alpha y \alpha^2) = f_\alpha(x)f_\alpha(y)$ e portanto $f_\alpha \in G_2$. Como todo número de Cayley unitário é da forma $\alpha = \cos(t) + J\sin(t)$ $0 \leq t \leq \pi$, onde J é um número de Cayley imaginário puro, se

$\alpha = \cos(t) + J\sin(t)$ então $\alpha^3 = 1 \iff t = 2\pi/3$ ou $t = 0$.

Vamos restringir a aplicação f ao paralelo

$S^6 = \{\cos(2\pi/3) + J\sin(2\pi/3)\}$. Denominando f_1 tal aplicação temos em razão de (1) a aplicação

$$f_1 : S^6 \longrightarrow G_2$$

$$\alpha \longrightarrow f_\alpha$$

Seja $e^7 \subseteq S^7$ a célula 7-dimensional definida por

$$e^7 = \{\cos(t) + J\sin(t), 2\pi/3 \leq t \leq \pi\}.$$

Vamos denominar por $\tilde{f}$ a restrição de f à célula e^7 . É fácil ver que $\tilde{f}$ é injetiva e que como $\partial e^7 = S^6$ temos que $\tilde{f}|_{\partial e^7} = f_1$.

Utilizando agora a conhecida fibração

$$(2) \quad G_2 \dashrightarrow \text{Spin}(7) \xrightarrow{\pi} S^7$$

temos

$$\begin{array}{ccc}
 & & G_2 \\
 & & \vdots \\
 & & \text{Spin}(7) \\
 \nearrow \tilde{f} & & \downarrow \pi \\
 e^7 & \xrightarrow{\pi \circ \tilde{f}} & S^7
 \end{array}$$

$\pi \circ \tilde{f} : (e^7 - \partial e^7) \longrightarrow S^7 - (1, 0, \dots, 0)$ é bijetiva e portanto $\pi \circ \tilde{f} : (e^7, \partial e^7) \longrightarrow S^7$ é um gerador de $\pi_7(S^7) \cong \mathbb{Z}$. Como $\pi \circ f : S^7 \longrightarrow S^7$ é uma aplicação de grau 3 ($\pi \circ f(\alpha) = \pi(f_\alpha) = \alpha \cdot 1 \cdot \alpha^2 = \alpha^3$), $\pi_6(\text{Spin}(7)) = \{0\}$, e a sequência exata de homotopia do fibrado (2), é da forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_7(\text{Spin}(7)) & \xrightarrow{\pi} & \pi_7(S^7) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_6(G_2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \cong \swarrow & & \nearrow \partial & & \\
 & & \pi_7(\text{Spin}(7), G_2) & & & &
 \end{array}$$

obtemos que:

- i) $\pi_*([1]) = [3]$, o que implica que $\pi_6(G_2) = \mathbb{Z}_3$.
 - ii) $\Delta([1]) = [1]$, o que implica que $f_1 : S^6 \longrightarrow G_2$ não é homotopicamente trivial e portanto f_1 é um gerador de $\pi_6(G_2)$.
- Obs.: i) foi provado por Mimura em [Mi] usando o fato que $\pi_6(S^9) = \mathbb{Z}_{12}$.

O procedimento anterior nos dá uma prova elementar que $\pi_6(\text{SU}(3)) = \mathbb{Z}_6$ e $\pi_6(S^9) = \mathbb{Z}_{12}$ bastando para isto utilizar a sequência de homotopia dos fibrados principais sobre S^7 , com espaços totais $\text{Spin}(5)$, $\text{Spin}(6)$ e $\text{Spin}(7)$ ([Y]).

Resta agora apenas mostrar que a imagem de f_1 é a órbita conjugada de Λ (isto é, $\psi(S^6)$).

Se $t = 2\pi/3$ e $\alpha_0 = \cos(t) + i\sin(t)$ então $f_{\alpha_0}(1) = 1$ e portanto $f_{\alpha_0} \in \text{SU}(3) \subseteq G_2$. Afirmamos que $f_{\alpha_0} = \Lambda$. Para mostrarmos isto

devemos provar que $f_{\alpha_0} A = A f_{\alpha_0}$, $\forall A$ em $SU(3)$. De fato isto ocorre pois, $(A f_{\alpha_0})(x) = A(\alpha_0 x \alpha_0^2) = A(\alpha_0) A(x) A(\alpha_0^2) = A(\alpha_0) A(x) A^2(\alpha_0) = \alpha_0 A(x) \alpha_0^2 = f_{\alpha_0}(A(x)) = (f_{\alpha_0} A)(x)$, uma vez que $A(\alpha_0) = \alpha_0$ pois $A(1) = 1$.

Temos também que para $B \in G_2$, $\psi([B])(x) = B \wedge B^{-1}(x) = B f_{\alpha_0} B^{-1}(x) = B f_{\alpha_0}(B^{-1}(x)) = B(\alpha_0 B^{-1}(x) \alpha_0^2) = B(\alpha_0) x B^2(\alpha_0) = f_{B(\alpha_0)}(x)$. $B(\alpha_0)$ pertence a S^6 pois $(B(\alpha_0))^3 = B(\alpha_0^3) = B(1) = 1$ e portanto $f_{B(\alpha_0)}$ está na imagem de f_1 . Isto implica que $\psi(S^6) \subseteq f_1(S^6)$. Como a ação de G_2 em S^6 é transitiva, isto é, $\{B(\alpha_0), B \in G_2\} = S^6$, temos de fato a igualdade $\psi(S^6) = f_1(S^6)$.

Pelo poliedro de Cartan de G_2 temos que $\mathcal{O}(A)$ é uma órbita isolada e portanto minimal [H-L] ■

3. UM GERADOR POLINOMIAL DE $\pi_5(SU(3))$

Um procedimento para se obter geradores dos grupos de homotopia $\pi_n(SU(k))$, consiste em considerar aplicações adequadas $S^n \longrightarrow SU(m)$ para m grande e através de reflexões, projetar estas aplicações em $SU(k)$. Vejamos primeiramente como trabalhar com reflexões complexas.

Reflexões em Espaços Complexos

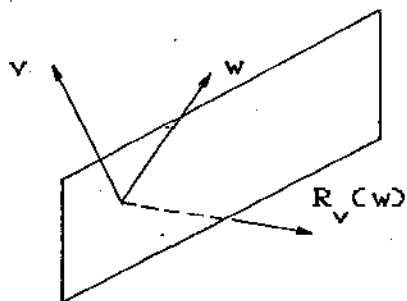
No caso real a situação é a seguinte:

Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dado um vetor unitário v vamos definir a transformação linear $R_v: V \longrightarrow V$. ($w \longrightarrow R_v(w) = w - 2\langle v, w \rangle v$).

R_v satisfaz as propriedades:

- i) $R_v(v) = -v$
- ii) Se $\langle u, v \rangle = 0$ então $R_v(u) = u$
- iii) $R_v \circ R_v = \text{Id}$
- iv) $\langle R_v(w), R_v(\xi) \rangle = \langle w, \xi \rangle$.

Portanto, R_v é uma reflexão em relação ao plano perpendicular a v



As reflexões atuam de maneira transitiva nas esferas de raio arbitrário contidas em V , isto é, dados $x, y \in V$ com $|x| = |y|$ e $x \neq y$, se $u = \frac{y-x}{|y-x|}$ então $R_u(x) = y$.

No caso complexo temos uma situação análoga. Seja V um espaço vetorial complexo com um produto hermitiano $(\cdot, \cdot)$. Dado $v \in V$ com $(v, v) = 1$, seja $R_v: V \longrightarrow V$ ($\xi \longrightarrow \xi - 2\overline{(v, \xi)}v$).

R_v satisfaz

- i) $R_v(\lambda\xi) = \lambda\xi$, isto é, R_v é $\mathbb{C}$ -linear.
- ii) $R_v(v) = -v$.
- iii) Se $(v, \xi) = 0$ então $R_v(\xi) = \xi$.
- iv) $R_v \circ R_v = \text{Id}$.

$$\begin{aligned}
 v) (R_v(\xi), R_v(\eta)) &= (\xi - 2(\overline{v}, \xi)v, \eta - 2(\overline{v}, \eta)v) = \\
 &(\xi, \eta) - 2(v, \eta)(\xi, v) - 2(\overline{v}, \xi)(v, \eta) + 4(\overline{v}, \xi)(v, \eta) = \\
 &(\xi, \eta) - 2(v, \eta)(\xi, v) - 2(\xi, v)(v, \eta) + 4(\xi, v)(v, \eta) = (\xi, \eta).
 \end{aligned}$$

Portanto $R_v \in U(n)$ onde $n = \dim_{\mathbb{C}} V$.

Devemos notar que com as identificações $V \cong \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$,

$U(n) \longrightarrow SO(2n)$, as reflexões complexas R_{ξ} , $\xi \in \mathbb{C}^n$, como matrizes em $SO(2n)$, são composições de duas reflexões. A diferença do caso complexo em relação ao caso real é que dados $x, y \in V$ com $|x| = |y|$ e $x \neq y$ e $u = \frac{y-x}{|y-x|}$ nem sempre é válido que $R_u(x) = y$.

Um gerador polinomial de $\pi_5(SU(3))$.

Temos a identificação natural

$$\begin{aligned}
 S^3 \subseteq \mathbb{C}^2 &\xrightarrow{\alpha} SU(2) \\
 \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Podemos "por suspensão" obter a aplicação

$$\begin{aligned}
 S^5 \subseteq \mathbb{C}^3 &\xrightarrow{\psi} SU(4) \\
 \begin{bmatrix} z \\ w \\ x \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} A \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} & -xI \\ xI & A^* \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -\overline{w} & -\overline{x} & 0 \\ w & \overline{z} & 0 & -\overline{x} \\ x & 0 & \overline{z} & \overline{w} \\ 0 & x & -w & z \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Obs.: A razão de se trabalhar com a aplicação ψ , obtida por suspensão da aplicação natural α é que primeiramente α é um gerador de $\pi_3(SU(2))$ e a suspensão de aplicações de esferas

possui propriedades topológicas fortes. Vamos primeiramente trabalhar heurísticamente com as aplicações obtidas por suspensão para depois enunciar um Teorema que nos dará as propriedades topológicas da suspensão.

Como a primeira coluna das matrizes contidas na imagem de ψ nunca assumem o valor $(0,0,0,1)$, a idéia ([H]) é refletir todos os vetores colunas de $\psi(S^5)$ e obter uma nova aplicação $\tilde{\psi}$ com $\tilde{\psi}(S^5) \subseteq \text{SUC}(3)$. Sejam $x_1 = \begin{pmatrix} z \\ w \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ o vetor primeira coluna de ψ , $1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - x_1)$.

Vamos tomar a reflexão complexa R_{ξ} . Temos que

$$R_{\xi}(x_1) = x_1 - 2(\overline{\xi}, x_1)\xi = \begin{bmatrix} z \\ w \\ x \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \frac{\sqrt{2}}{2} (-1) \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -z \\ -w \\ -x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se x_2, x_3, x_4 representam os outros vetores colunas de ψ , então

$$R_{\xi}(x_2) = x_2 - 2(\overline{\xi}, x_2)\xi = \begin{bmatrix} -\overline{w} \\ \overline{z} \\ 0 \\ x \end{bmatrix} - (x) \begin{bmatrix} -z \\ -w \\ -x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{w} + xz \\ \overline{z} + xw \\ x^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{\xi}(x_3) = x_3 - 2(\overline{\xi}, x_3)\xi = \begin{bmatrix} -\overline{x} \\ 0 \\ z \\ -w \end{bmatrix} - (-w) \begin{bmatrix} -z \\ -w \\ -x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{x} - wz \\ -w^2 \\ z - wx \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{\xi}(x_4) = x_4 - 2(\overline{\xi}, x_4)\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ -\overline{x} \\ w \\ z \end{bmatrix} - (z) \begin{bmatrix} -z \\ -w \\ -x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^2 \\ -\overline{x} + zw \\ w + zx \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obtemos então a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & -\bar{w}+xz & -\bar{x}-wz & -z^2 \\ 0 & z+xw & -w^2 & -\bar{x}+zw \\ 0 & x^2 & z-wx & w+zx \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & B \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

Como $\det R_\xi = -1$ temos que $\det(R_\xi \cdot \psi) = \det(R_\xi) \cdot \det(\psi) = -1$ (o ponto significa o produto de matrizes).

Mas $-1 = \det(R_\xi \cdot \psi) = (-1)^{4+1} \det B \implies \det B = 1$. Podemos então definir a aplicação $\Theta = R_\xi \cdot \psi$

$$S^5 \xrightarrow{\Theta} SU(3)$$

$$\begin{bmatrix} z \\ w \\ x \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -\bar{w}+xz & -\bar{x}-wz & -z^2 \\ z+xw & -w^2 & -\bar{x}+zw \\ x^2 & z-wx & w+zx \end{bmatrix}$$

Para enfatizar a dependência de ξ em relação ao ponto

$y = (z, w, x)$ vamos escrever $\xi = \xi(y)$ e portanto

$$\Theta(y) = R_{\xi(y)} \cdot \psi(y).$$

PROPOSIÇÃO 4.2. Θ é um gerador de $\pi_5 SU(3)$.

Demonstração: Pela sequência exata de homotopia do fibrado

$$SU(2) \dashrightarrow SU(3) \xrightarrow{\pi} S^5$$

temos

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & \pi_7(S^5) & \longrightarrow & \pi_6(SU(2)) & \longrightarrow & \pi_6(SU(3)) & \longrightarrow \\ \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{12} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_6 & \longrightarrow \\ \longrightarrow & \pi_6(S^5) & \longrightarrow & \pi_5(SU(2)) & \longrightarrow & \pi_5(SU(3)) & \longrightarrow \pi_5(S^5) \longrightarrow \\ \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\cong} & & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \\ & & & & & 1 & \longrightarrow 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & \pi_4(SU(2)) & \longrightarrow & \pi_4(SU(3)) & \longrightarrow & \pi_4(S^5). \\ \longrightarrow & & & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow 0. \end{array}$$

$$(\pi_{n+2}(S^n) \cong \pi_{n+1}(S^n) \cong \mathbb{Z}_2 \text{ [D-N-F p.141]}, \pi_6(S^3) = \mathbb{Z}_{12}, \\ \pi_5(SU(3)) = \mathbb{Z} \text{ [M-1 p.129]}).$$

Portanto um gerador de $\pi_5(SU(3))$ é levado em duas vezes o gerador de $\pi_5(S^5)$. Mas o gerador de $\pi_5(S^5)$ é a aplicação

$$\begin{bmatrix} z \\ w \\ \infty \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} z \\ w \\ \infty \end{bmatrix}, \text{ isto é, uma aplicação de } S^5 \text{ em } S^5 \text{ de grau um.}$$

Basta então provarmos que $\pi \circ \theta : S^5 \longrightarrow S^5$ é uma aplicação de grau dois. Mas tal fato deve ocorrer uma vez $\pi \circ \theta$ é uma função com entradas polinomiais de grau dois. Desenvolvendo os cálculos necessários temos que realmente o grau de $\pi \circ \theta$ é dois ■

Como foi observado na Introdução, a importância de se obter expressões para os geradores dos grupos de homotopia, consiste em, por exemplo, no caso de $SU(3)$, $\pi_5(SU(3))$ classifica os $SU(3)$ -fibrados principais sobre S^5 e portanto conhecendo-se explicitamente um elemento de $\pi_5(SU(3))$, conhece-se então a "função de colagem" que determina o fibrado.

Proposição 4.3. e corresponde ao fibrado

$$SU(3) \dashrightarrow G_2 \longrightarrow S^5$$

Demonstração: Pela sequência exata de homotopia temos

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_7(S^5) & \longrightarrow & \pi_6(SU(3)) & \longrightarrow & \pi_6(G_2) & \longrightarrow & \pi_6(S^5) & \longrightarrow & \pi_5(SU(3)) \\ & & & & \longrightarrow & \pi_5(G_2) & \longrightarrow & \pi_5(S^5) & \longrightarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \longrightarrow & Z_2 & \longrightarrow & Z_6 & \longrightarrow & Z_9 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & 1 & \longrightarrow & 3, & 1 & \longrightarrow & 1, & 0 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \pm 1 \end{array}$$

de onde o resultado segue.

(Note que pela sequência de homotopia do fibrado

$$G_2 \dashrightarrow \text{Spin}(7) \longrightarrow S^7 \quad \text{temos } \pi_5(G_2) = \pi_5(\text{Spin}(7)) = \\ = \pi_5(\text{SO}(7)) = 0 \quad [\text{M-1 p.142}] \blacksquare$$

Observação: É possível então construir a variedade G_2 colando-se duas cópias de $D^6 \times \text{SU}(3)$ utilizando-se θ .

Devemos ainda observar que $\pi_5(\text{SU}(3)) \cong \pi_5(\text{SU}(4)) =$
 $= \pi_5(\text{U}(4))$. A Proposição 4.4 abaixo nos garante que θ é ho-
motópico a ψ . Temos portanto um representante bastante simples
do gerador de $\pi_5(\text{SU}(4))$. Como $\pi_5(\text{SU}(4)) = \pi_5(\text{U}(4))$ vamos
considerar ψ e θ como funções com valores em $\text{U}(4)$ e realizar
neste espaço a homotopia entre estas aplicações.

PROPOSIÇÃO 4.4. θ é homotópico a ψ .

Demonstração: temos que

$$\begin{array}{ccc} S^5 & \longrightarrow & \text{U}(4) \\ y & \longrightarrow & \psi(y) \\ & \searrow \pi \circ \psi & \downarrow \pi \\ & & \psi_1(y) \in S^7 \end{array}$$

$\psi_1 = \pi \circ \psi$ é homotópico a uma aplicação constante.

Como $\xi(y) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \psi_1(y))$, $\xi(y)$ também é homotópico a uma
aplicação constante. Logo a aplicação

$S^5 \longrightarrow \text{U}(4) \quad (\xi \longrightarrow R_\xi) \quad \text{é homotópica à aplicação constante}$

$(\xi \longrightarrow R_{\xi})$. Como R_{ξ} pode ser ligado em $U(4)$ à matriz identidade temos que $(\xi \longrightarrow R_{\xi})$ é homotópico a aplicação constante $(\xi \longrightarrow Id)$. Segue então que $\theta: (y \longrightarrow R_{\xi(y)} \circ \psi(y))$ é homotópico a $\psi: (y \longrightarrow \psi(y))$.

A construção acima para se obter um gerador de $\pi_5(SU(3))$, pode ser generalizada na tentativa de se obter um gerador de $\pi_7(SU(4))$. É o que faremos a seguir.

Um Gerador Racional para $\pi_7(SU(4))$

Podemos obter por suspensão da aplicação

$\psi: S^5 \longrightarrow SU(4)$ a seguinte aplicação (que também denotaremos por ψ):

$$S^7 \subseteq \mathbb{C}^4 \xrightarrow{\psi} SU(8).$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x & -\bar{y} & -\bar{z} & 0 & -\bar{w} & 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & -\bar{z} & 0 & -\bar{w} & 0 & 0 \\ z & 0 & x & y & 0 & 0 & -\bar{w} & 0 \\ 0 & z & -y & x & 0 & 0 & 0 & -\bar{w} \\ w & 0 & 0 & 0 & x & y & z & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & -y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & -z & 0 & x & -\bar{y} \\ 0 & 0 & 0 & w & 0 & -z & y & x \end{bmatrix}$$

(note que ψ é da forma $\begin{bmatrix} A & -\bar{w}I \\ wI & A^* \end{bmatrix}$).

A idéia é novamente utilizar projeções complexas para projetar ψ em $SU(4)$. Denominando $\alpha = (x, y, z, w) \in S^7$ e $(\psi_1(\alpha), \dots, \psi_8(\alpha))$ os vetores colunas de $\psi(\alpha)$, temos que $\psi_1(\alpha) \neq (0, \dots, 0, 1) \forall \alpha \in S^7$.

Sejam

$$\xi(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} ((0, \dots, 0, 1) - \psi_1(\alpha)) = \frac{\sqrt{2}}{2} (-x, -y, -z, 0, -w, 0, 0, 1)$$

e $R_{\xi(\alpha)}$ a projeção complexa $R_{\xi(\alpha)}(\eta) = \eta - 2(\overline{\xi(\alpha)}, \eta)\xi(\alpha)$.

Como $(\overline{\xi(\alpha)}, \psi_1(\alpha)) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ temos $R_{\xi(\alpha)}(\psi_1(\alpha)) = (0, \dots, 0, 1)$ e portanto $R_{\xi(\alpha)} \cdot \psi(\alpha)$ é uma matriz da forma $\begin{bmatrix} -\frac{iB}{1} \end{bmatrix}$. Como

$$\det R_{\xi(\alpha)} = -1 \quad \text{temos} \quad -1 = \det((R_{\xi(\alpha)} \cdot \psi(\alpha))) = (-1)^{8+1} \det B$$

$$\Rightarrow \det B = 1 \quad \text{e portanto} \quad B \in \text{SUC}(7).$$

Como

$$(\xi(\alpha), \psi_1(\alpha)) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\xi(\alpha), \psi_5(\alpha)) = 0$$

$$(\xi(\alpha), \psi_2(\alpha)) = 0$$

$$(\xi(\alpha), \psi_6(\alpha)) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{z}$$

$$(\xi(\alpha), \psi_3(\alpha)) = 0$$

$$(\xi(\alpha), \psi_7(\alpha)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{y}$$

$$(\xi(\alpha), \psi_4(\alpha)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{w}$$

$$(\xi(\alpha), \psi_8(\alpha)) = \frac{\sqrt{2}}{2} x$$

a matriz $R_{\xi(\alpha)} \cdot \psi(\alpha)$ é da forma

$$\begin{bmatrix} -\bar{y} & -\bar{z} & xw & -\bar{w} & -xz & xy & |x|^2 \\ x & 0 & -\bar{z}+yw & 0 & -\bar{w}-yz & -y^2 & \bar{x}y \\ 0 & x & y+zw & 0 & -z^2 & -w+yz & \bar{x}z \\ z & -y & x^2 & 0 & 0 & 0 & -\bar{w} \\ 0 & 0 & w^2 & x & \bar{y}-wz & \bar{z}+yw & \bar{x}w \\ w & 0 & 0 & -y & x & 0 & \bar{z} \\ 0 & w & 0 & -z & 0 & x & -y \end{bmatrix}$$

Temos então definida uma aplicação que denominaremos θ da forma:

$$S^7 \xrightarrow{\theta} \text{SUC}(7) \quad (\alpha \longmapsto R_{\xi(\alpha)} \cdot \psi(\alpha))$$

por um raciocínio idêntico ao da proposição 4.4 temos que θ e ψ são homotópicos.

Aqui temos também que $e_1(\alpha) \neq (0, \dots, 0, 1) \quad \forall \alpha \in S^7$ e portanto podemos projetar θ em $\text{SUC}(6)$. Sejam

$$\xi(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} ((0, \dots, 0, 1) - e_1(\alpha)) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\bar{y}, -\bar{x}, 0, -z, 0, -w, 1)$$

$$\text{e } R_{\xi(\alpha)}(\eta) = \eta - 2(\overline{\xi(\alpha)}, \eta)\xi(\alpha).$$

Como $R_{\xi(\alpha)}(e_1(\alpha)) = (0, \dots, 0, 1)$ a matriz

$R_{\xi(\alpha)} \cdot e(\alpha)$ é da forma $\begin{bmatrix} -1 & -iB \\ i & 1 \end{bmatrix}$. Mas

$$-1 = \det(R_{\xi(\alpha)} \cdot e(\alpha)) = (-1)^{7+1} \det B = \det B \text{ e portanto para}$$

obtermos uma matriz em $SU(6)$ é necessário trocar o sinal da primeira coluna. Seja $J = \begin{bmatrix} -1 & -i \\ i & \text{Id} \end{bmatrix}$, logo $R_{\xi(\alpha)} \cdot e(\alpha) \cdot J \in SU(6)$.

Definindo

$$\gamma : S^7 \longrightarrow SU(6) \quad (\alpha \longrightarrow R_{\xi(\alpha)} \cdot e(\alpha) \cdot J) \text{ e utilizando os valores}$$

$$(\xi(\alpha), e_1(\alpha)) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\xi(\alpha), e_2(\alpha)) = \frac{\sqrt{2}}{2} w \quad (\xi(\alpha), e_3(\alpha)) = 0$$

$$(\xi(\alpha), e_4(\alpha)) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{z} \quad (\xi(\alpha), e_5(\alpha)) = 0 \quad (\xi(\alpha), e_6(\alpha)) = \frac{\sqrt{2}}{2} x$$

$$(\xi(\alpha), e_7(\alpha)) = -\frac{\sqrt{2}}{2} y$$

Obtemos a seguinte expressão para γ

$$\begin{bmatrix} \bar{z} + \bar{y}w & -xw & -\bar{w} + \bar{z}\bar{y} & -xz & xy - x\bar{y} & |x|^2 + \bar{y}^2 \\ xw & -\bar{z} + yw & -xz & -w - yz & y^2 + |x|^2 & xy - yx \\ -x & y + zw & 0 & -z & -w + yz & xz \\ y - zw & x^2 & -\bar{z}^2 & 0 & xz & -\bar{w} - yz \\ 0 & w^2 & x & \bar{y} - wz & \bar{z} + yw & xw \\ -w^2 & 0 & -y - wz & x & xw & \bar{z} - yw \end{bmatrix}$$

Com um raciocínio idêntico ao da Proposição 4.4, temos que γ é homotópico a e .

Notando que $\gamma_2(\alpha) \neq (0, \dots, 0, 1) \forall \alpha \in S^7$ podemos projetar γ em $SU(5)$. Seja $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} ((0, \dots, 0, 1) - (xw, -\bar{z} + yw, \bar{y} + zw, x, w^2, 0)) = \frac{\sqrt{2}}{2} (-xw, \bar{z} - yw, -\bar{y} - zw, -x, -w^2, 1)$.

Temos então que $R_{\xi(\alpha)} \cdot \gamma(\alpha)$ é uma matriz da forma $\begin{bmatrix} * & i* \\ -i & * \end{bmatrix}$.

Observando que neste caso também é necessário trocar o sinal da primeira coluna (para isto utilizaremos uma aplicação J) e utilizando os cálculos.

$$\begin{aligned} \xi(\alpha), \gamma_1(\alpha) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{w}^2 & \xi(\alpha), \gamma_2(\alpha) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \xi(\alpha), \gamma_3(\alpha) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (-\bar{y} - \bar{w}z) & \xi(\alpha), \gamma_4(\alpha) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{x} \\ \xi(\alpha), \gamma_5(\alpha) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{x}w & \xi(\alpha), \gamma_6(\alpha) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (z - y\bar{w}) \end{aligned}$$

obtemos a aplicação $\Phi : S^7 \longrightarrow \text{SU}(5)$ ($\alpha \longrightarrow R_{\xi(\alpha)} \cdot \gamma(\alpha) \cdot J$) homotópica a γ .

A expressão de Φ é dada por

$$\begin{bmatrix} xw^3 - \bar{y}w - \bar{z} & -xzw^2 - xyw + \bar{y}z - \bar{w} & x^2w - xz \\ yw^3 - \bar{z}w^2 + \bar{x}w & -\bar{x}z + y\bar{z} + |z|^2w - y^2w - yzw^2 & xyw - xz - yz - \bar{w} \\ zw^3 + \bar{y}w^2 + \bar{x} & -|y|^2 - \bar{y}zw + yzw + z^2w^2 & xzw + x\bar{y} - z^2 \\ xw^2 + zw - y & -z^2 - xy - xzw & x^2 \\ w^4 & zw^3 - xw^2 + \bar{x} & xw^2 + \bar{y} - wz \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^2w^2 + xy - x\bar{y} & -x\bar{y}w^2 + x\bar{z}w + \bar{y}^2 + |x|^2 \\ xyw^2 - x\bar{z}w + y^2 + |x|^2 & -|y|^2w^2 - \bar{y}zw + yzw - \bar{z}^2 + x\bar{y} - x\bar{y} \\ xzw^2 + x\bar{y}w + yz - \bar{w} & -\bar{y}zw^2 - \bar{y}^2w + |z|^2w + \bar{z}\bar{y} + \bar{x}z \\ x^2w + xz & -x\bar{y}w + x\bar{z} - \bar{y}z - \bar{w} \\ xw^3 + yw + \bar{z} & -\bar{y}w^3 + \bar{z}w^2 + \bar{x}w \end{bmatrix}$$

Devemos observar agora que

$\Phi_s(\alpha) = (x^2w - xz, xyw - x\bar{z} - yz - \bar{w}, xzw + x\bar{y} - z^2, x^2, xw^2 + \bar{y} - wz)$ é sempre diferente de $(\lambda, 0, \dots, 0)$ $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ qualquer que seja $\alpha \in S^7$, isto é, se $u = (1, 0, \dots, 0)$ então u e $\Phi_s(\alpha)$ são linearmente independentes (sobre $\mathbb{C}$). Temos então que u e $\Phi_s(\alpha)$

definem um 2-plano complexo $n^C \subseteq C^5$. A idéia agora é, por meio de uma rotação neste plano, projetar $\Phi_3(\alpha)$ em u (obs.: a dificuldade aqui é que $(1, 0, \dots, 0)$ e $\Phi_3(\alpha)$ não são sempre perpendiculares e portanto não podemos fazer a reflexão definida por $\xi(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}((1, 0, \dots, 0) - \Phi_3(\alpha))$. Seja P_α a projeção ortogonal sobre n^C , isto é, $P_\alpha : C^5 \longrightarrow C^5$ tal que $P_\alpha|_{n^C} = \text{Id}$, $P_\alpha(C^5) = \eta^C$ e se $P_\alpha(x) = 0$ então $(x, n^C) = 0$.

Quando o contexto não deixar dúvidas, vamos abandonar o subscrito 3 em $\Phi_3(\alpha)$ e indicar o vetor apenas por $\Phi(\alpha)$. Uma base ortonormal de n^C relativa ao produto Hermitiano $(\cdot, \cdot)$ é dada por

$$\left\{ u, v(\alpha) = \frac{\Phi(\alpha) - (\Phi(\alpha), u)u}{|\Phi(\alpha) - (\Phi(\alpha), u)u|} \right\}$$

Em relação a esta base temos

$$\Phi(\alpha) = (\Phi(\alpha), u)u + (\Phi(\alpha), v(\alpha))v(\alpha).$$

temos que $1 = |\Phi(\alpha)|^2 = |(\Phi(\alpha), u)|^2 + |(\Phi(\alpha), v(\alpha))|^2$.

Podemos agora definir a rotação $A_{\Phi(\alpha)}$ em η^C cuja matriz na base $\{u, v(\alpha)\}$ é

$$\begin{bmatrix} A_{\Phi(\alpha)} \end{bmatrix}_{\{u, v\}} = \begin{bmatrix} (\overline{(\Phi(\alpha), u)}) & (\overline{(\Phi(\alpha), v)}) \\ -(\overline{(\Phi(\alpha), v)}) & (\overline{(\Phi(\alpha), u)}) \end{bmatrix}$$

Note que $A_{\Phi(\alpha)}(\Phi(\alpha)) = u$.

Vamos agora definir a aplicação

$$F : S^5 \longrightarrow \mathcal{L}_C(C^5, C^5)$$

$$\alpha \longrightarrow F_\alpha(w \longrightarrow (I - P_\alpha)(w) + A_{\Phi(\alpha)} \circ P_\alpha(w))$$

Para obtermos uma expressão matricial para F_α vamos estender $\langle u, v \rangle$ a uma base ortonormal (em relação ao produto hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$) $b = \{u, v, w_1, w_2, w_3\}$.

Logo

$$[F_\alpha]_b^b = \begin{bmatrix} \langle \Phi(\alpha), u \rangle & \langle \Phi(\alpha), v \rangle & 0 & 0 & 0 \\ -\langle \Phi(\alpha), v \rangle & \langle \Phi(\alpha), u \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto a matriz de F relativa à base canônica de $\mathbb{C}^5$ $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ é da forma

$$[F_\alpha]_e^e = [U]_b^e [F_\alpha]_b^b [U]_e^b$$

onde $[U]_b^e, [U]_e^b$ são as matrizes de mudança de base. Como

$$[U]_e^b = [U]_b^e^* \text{ temos que } \det [F_\alpha]_e^e = \det [F_\alpha]_b^b = 1 \text{ e portanto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & [F_\alpha]_e^e \end{bmatrix} \in \text{SUC}(5). \text{ Notando que } F_\alpha(\Phi_3(\alpha)) = (1, 0, \dots, 0),$$

podemos definir a aplicação

$$\eta : S^7 \longrightarrow \text{SUC}(4) \quad (\alpha \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \\ & [F_\alpha]_e^e \end{bmatrix} \cdot \Phi(\alpha)).$$

(note que $\begin{bmatrix} 1 & \\ & [F_\alpha]_e^e \end{bmatrix} \cdot \Phi(\alpha)$ é uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & * & 0 & * & \\ & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ & & 0 & & \end{bmatrix}$$

e portanto não há necessidade de se trocar o sinal da primeira coluna para se obter uma matriz em $\text{SUC}(4)$).

Definindo:

$$\tilde{F} : S^7 \longrightarrow S^0 \longrightarrow SU(5)$$

$$\alpha \longrightarrow \Phi_g(\alpha) \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & e \\ F_\alpha & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I-P_\alpha) & A_{\Phi_g(\alpha)} \\ 0 & P_\alpha \end{bmatrix}$$

é imediato que $\tilde{F}$ é homotópico à aplicação constante

$S^7 \longrightarrow SU(5)$ ($\alpha \longrightarrow Id$) de onde segue que η é homotópico à Φ . Para obtermos uma expressão explícita de η é necessário simplificar a expressão de F_α . Seja

$$(1) \quad F_\alpha(\Phi_j(\alpha)) = (I-P_\alpha)(\Phi_j(\alpha)) + A_{\Phi_g(\alpha)} \circ P_\alpha(\Phi_j(\alpha)).$$

Para evitar que a notação fique muito carregada vamos fazer nos cálculos que se seguirão $\Phi_j(\alpha) = y$, $P_\alpha = P$,

$$A_{\Phi_g(\alpha)} = A, \quad \Phi_g(\alpha) = x.$$

Logo

$$(1) = F_\alpha(y) = (I-P)(y) + A \circ P(y) =$$

$$\begin{aligned} & y - \langle y, u \rangle u - \langle y, v \rangle v + \langle \overline{x}, u \rangle \langle y, u \rangle + \langle \overline{x}, v \rangle \langle y, v \rangle u \\ & + \langle -\langle x, v \rangle \langle y, u \rangle + \langle x, u \rangle \langle y, v \rangle \rangle v = \\ & y + \langle (\langle \overline{x}, u \rangle - 1) \langle y, u \rangle + \langle \overline{x}, v \rangle \langle y, v \rangle \rangle u \\ & + \langle (\langle x, u \rangle - 1) \langle y, v \rangle - \langle x, v \rangle \langle y, u \rangle \rangle v. \end{aligned}$$

Os coeficientes de u e v na equação acima podem ser escritos na forma

$$\langle x, v \rangle = \langle x, \frac{v_1}{|v_1|} \rangle = \frac{1}{|v_1|} \langle x, v \rangle = \frac{1}{|v_1|} \langle x, x - \langle x, u \rangle u \rangle =$$

$$\frac{1}{|v_1|} \langle x, x \rangle - \langle \overline{x}, u \rangle \langle x, u \rangle = \frac{1}{|v_1|} (1 - |\langle x, u \rangle|^2) = |v_1|$$

$$\text{onde } v_1 = x - \langle x, u \rangle u \quad \text{e} \quad |v_1|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle =$$

$$\langle x - \langle x, u \rangle u, x - \langle x, u \rangle u \rangle =$$

$$(x, x) = (\overline{x, u})(x, u) + (x, u)(u, x) + |(x, u)|^2(u, u) =$$

$$1 - 2|(x, u)|^2 + |(x, u)|^2 = 1 - |(x, u)|^2.$$

$$(y, v) = \frac{1}{|v_1|} (y, v_1) = \frac{1}{|v_1|} (y, x - (x-u)u) =$$

$$\frac{1}{|v_1|} (y, u) - \frac{(\overline{x, u})}{|v_1|} (y, u).$$

Se $j \neq 3$ então $x \neq y$ e $(x, y) = 0$ e portanto

$$(y, v) = - \frac{(\overline{x, u})}{|v_1|} (y, u).$$

Finalmente podemos obter o coeficiente de u

$$(\overline{x, u}) - 1)(y, u) + (\overline{x, v})(y, v) =$$

$$(\overline{x, u}) - 1)(y, u) + \left(\frac{1 - |(x, u)|^2}{|v_1|} \right) \left(- \frac{(\overline{x, u})}{|v_1|} (y, u) \right) =$$

$$(\overline{x, u}) - 1 - \frac{1}{|v_1|^2} (1 - |(x, u)|^2)(\overline{x, u})(y, u) = - (y, u).$$

O coeficiente de v é dado por

$$((\overline{x, u}) - 1)(y, v) - (x, v)(y, u) =$$

$$((\overline{x, u}) - 1) \left(- \frac{(\overline{x, u})}{|v_1|} (y, u) \right) - |v_1| (y, u) =$$

$$\left(\frac{(\overline{x, u}) - |(x, u)|^2}{|v_1|} - |v_1| \right) (y, u) =$$

$$\left(\frac{(\overline{x, u}) - |(x, u)|^2 - |v_1|^2}{|v_1|} \right) (y, u) \left(\frac{(\overline{x, u}) - |(x, u)|^2 - (1 - |(x, u)|^2)}{|v_1|} \right) (y, u) =$$

$$- \frac{1 - (\overline{x, u})}{|v_1|} (y, u).$$

Temos então que o último termo da expressão de F é

$$- \frac{1 - (\overline{x, u})}{|v_1|} (y, u) \frac{v_1}{|v_1|} = - \frac{1 - (\overline{x, u})}{1 - |(\overline{x, u})|^2} (y, u) v_1.$$

Obtemos então

$$F_{\alpha}(\Phi_j(\alpha)) = \Phi_j(\alpha) - (\Phi_j(\alpha), u)u - \frac{1 - \overline{(\Phi_j(\alpha), u)}}{1 - |(\Phi_j(\alpha), u)|^2} (\Phi_j(\alpha), u)v_1$$

$$j = 1, 2, 4, 5.$$

Podemos agora calcular explicitamente a função

$$\eta : S^7 \longrightarrow SU(4).$$

Como

$$\Phi_9(\alpha) = \begin{bmatrix} x^2 w - xz \\ xyw - x\bar{z} - yz - \bar{w} \\ xzw + x\bar{y} - z^2 \\ x^2 \\ xw^2 + \bar{y} - wz \end{bmatrix} \quad (\Phi_9(\alpha), u)u = \begin{bmatrix} x^2 w - xz \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_9(\alpha) - (\Phi_9(\alpha), u)u = \begin{bmatrix} 0 \\ xyw - x\bar{z} - yz - \bar{w} \\ xzw + x\bar{y} - z^2 \\ x^2 \\ xw^2 + \bar{y} - wz \end{bmatrix}$$

$$1 - |(\Phi_9(\alpha), u)|^2 = 1 - (x^2 w - xz)(\overline{x^2 w - xz}) =$$

$$1 - |x|^4 |w|^2 + |x|^2 xw\bar{z} + |x|^2 \bar{x}z\bar{w} - |x|^2 |z|^2 =$$

$$1 - |x|^2 (|x|^2 |w|^2 + |z|^2 - 2 \operatorname{Real}(xw\bar{z}))$$

$$1 - \overline{(\Phi_9(\alpha), u)} = 1 - (\overline{x^2 w - xz}).$$

Temos então que a primeira coluna de $\eta(\alpha)$ ($\eta_1(\alpha)$) é da forma

$$\eta_1(\alpha) = \begin{bmatrix} yw^3 - \bar{z}w^2 + \bar{x}w \\ zw^3 + \bar{y}w^2 + \bar{x} \\ xw^2 + zw - y \\ w^4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(1-x^2\bar{w}+\bar{x}z)(xw^3-\bar{y}w-\bar{z})}{1-|x|^2(|x|^2|w|^2+|z|^2-2\text{Real}(xw\bar{z}))} \cdot \begin{bmatrix} xyw - x\bar{z} - yz - \bar{w} \\ xzw + x\bar{y} - z^2 \\ x^2 \\ xw^2 + \bar{y} - wz \end{bmatrix}$$

As outras colunas podem ser calculadas da mesma forma.

Como podemos garantir que η é um gerador de $\pi_7(\text{SUC}(4))$?

Como

$$\begin{array}{ccc} & \text{SUC}(3) & \\ & \downarrow & \\ & \text{SUC}(4) & \\ \nearrow \eta & & \downarrow \pi \\ S^7 & \xrightarrow{\eta_1} & S^7 \end{array}$$

$$\pi \circ \eta(\alpha) = \eta_1(\alpha)$$

a sequência exata de homotopia do fibrado nos dá

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & \pi_7(\text{SUC}(3)) & \longrightarrow & \pi_7(\text{SUC}(4)) & \longrightarrow & \pi_7 S^7 & \longrightarrow \pi_6(\text{SUC}(3)) \longrightarrow \\ & \pi_6(\text{SUC}(4)) & \longrightarrow & \pi_6 S^7 & \longrightarrow & & \\ \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{Z}_6 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \\ & & & 1 & \longrightarrow & 6 & \end{array}$$

$$(\pi_6(\text{SUC}(4)) = 0 \quad [\text{M-1 p.129}]).$$

Temos então que η é um gerador de $\pi_7(\text{SUC}(4))$ se e somente se η_1 for uma aplicação de grau 6.

O problema de se calcular o grau de η_1 é evidentemente um problema computacional. Utilizamos então um computador IBM-336 com o processador Algébrico Mathematica. Ocorreu porém

que o programa rodou durante 25 horas consecutivas sem conseguir obter o resultado. Portanto, calcular o grau de η_1 não é um problema trivial mesmo do ponto de vista computacional.

Ocorre porém que a suspensão de aplicações de esferas possui propriedades topológicas que combinadas com o Teorema de Periodicidade de Bott nos leva ao seguinte resultado forte.

TEOREMA (Fomenko [D-N-F p.271])

Se $f_{i-1} : S^{i-1} \longrightarrow U(m)$ é um gerador do grupo de homotopia $\pi_{i-1}(U(m))$, então a aplicação $f_{i+1} : S^{i+1} \longrightarrow SU(2m)$ obtida por suspensão de f_{i-1} é um gerador de $\pi_{i+1}(SU(2m))$.

Como a aplicação ψ foi obtida por duas suspensões a partir do gerador α de $\pi_3(SU(2))$ temos que realmente ψ é um gerador de $\pi_7(SU(8))$ e portanto também é um gerador de $\pi_7(SU(4))$ ([M-1 p.129]). Como ψ é homotópico a η , temos que η é um gerador de $\pi_7(SU(4))$ e portanto η_1 é uma aplicação de grau 6.

Obs.: Note que o Teorema de Fomenko não invalida nosso objetivo que era o de construir representantes explícitos para os geradores dos grupos $\pi_5(SU(3))$ e $\pi_7(SU(4))$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [A] J.F. Adams, Lectures on Lie Groups, W.A. Benjamin, (1969).
- [At] M.F. Atiyah, Geometry of Yang Mills Fields, Lezioni Fermiane, Accademia Nazionale dei Lincei - Scuola Normale Superiore, Pisa, (1979).
- [A-W] S. Aloff and N. Wallach, An infinite family of distinct 7-manifolds admitting positively curved Riemannian structures, Bull. of the Am. Math. Soc. 81, n^o 1, (1975), 93-97.
- [A-H-S] M.F. Atiyah, N. Hitchin and I.M. Singer, Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 362 (1978), 425-461.
- [B] M. Berger, Les variétés Riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 15 (1961), 179-246.
- [Be] B. Bergery, Les variétés Riemanniennes homogènes simplement connexes de dimension impaire à courbure strictement positive, J. Math. Pures et Appl. 55 (1976), 47-68.
- [Bes] A. Besse, Géométrie Riemannienne en Dimension 4, Editions CEDIG, Paris (1981).
- [Bo] R. Bott, An application of the Morse theory to the topology of Lie Groups, Bull. Soc. Math. France 84 (1956), 231-281.
- [B-D] T. Brocker and T. tom Dieck, Representations of Compact Lie Groups, Springer-Verlag (1985).

- [B-L] J.P. Bourguignon and H.B. Lawson Jr, Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields, *Comm. Math. Phys.* 79 (1981), 189-230.
- [C] M.P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA (1979).
- [Ca] E. Cartan, Le principe de dualité et la theorie des groupes simples et semi-simples, *Bull Sci Math* 49 (1925), 361-374.
- [C-E] J. Cheeger and D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland (1975).
- [D] E.B. Dynkin, Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 6, n^o 2, (1957), 111-244.
- [D-R-1] A. Derdziński and A. Rigas, Unflat connections in 3-sphere bundles over S^4 , *Trans. Amer. Math. Soc.* 265 n^o 2, (1981), 485-493.
- [D-R-2] A. Derdziński and A. Rigas, Unflatness and positive curvature, notas não publicadas.
- [D-W] A. Dold and H. Whitney, classification of oriented sphere bundles over a 4-complex, *Ann. of Math.* 69 n^o 3 (1959), 667-677.
- [D-N-F] B. Doubrovine, S. Novikov et A. Fomenko, *Géométrie Contemporaine, Méthodes et Applications*, 3^e partie, Editions MIR (1987).
- [E-1] J.H. Eschenburg, New examples of manifolds with strictly positive curvature, *Invent. Math.* 66 (1982), 469-480.
- [E-2] J.H. Eschenburg, Freire Isometrische Aktionen auf kompakten Lie-Gruppen mit positiv gekrümmten Orbiträumen, *Schriftenreihe des Math. Instituts der Universität Munster* (1984).

- [F] T. Friedrich (Editor), Self-dual Riemannian Geometry and Instantons, Proc. Summer School on Yang-Mills- Equations in Kagel, Teubner-Text zur Math (1979).
- [F-U] D.S. Freed and K. K. Uhlenbeck, Instantons and Four-Manifolds, Springer-Verlag (1984).
- [F-S] R. Fintushel and R. Stern, $SO(3)$ -connections and the topology of 4-manifolds, J. of Differential Geometry 20 (1984), 523-539.
- [G] P.B. Gilkey, The index theorem, notas de curso, Trieste (1988).
- [Gr] M.A. Bozola Grou, Fibrados com curvatura não negativa, Tese de Doutorado, UNICAMP (1987).
- [G-M] D. Gromoll and W. Meyer, An exotic sphere with nonnegative sectional curvature, Ann. of Math. (1974), 401-406.
- [H] D. Hacon, Conferência, Encontro de Topologia, UNICAMP (1988).
- [Hi] N. Hitchin, Compact four-dimensional Einstein manifolds, J. of Differential Geometry 9 (1974), 435-441.
- [H-L] W.Y. Hsiang and H.B. Lawson Jr., Minimal submanifolds of low cohomogeneity, J. of Differential Geometry 5 (1971), 1-38.
- [J] G.R. Jensen, Einstein Metrics on principal fibre bundles, J. of Differential Geometry 8 (1973), 599-614.
- [K] S. Kobayashi, Principal fibre bundles with the 1-dimensional toroidal group, Tôhoku Math. J. (1955), 29-45.
- [K-N] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, volumes I e II, Interscience (1969).

- [K-S] M. Kreck and S. Stolz, Some nondiffeomorphic homeomorphic homogeneous 7-manifolds with positive sectional curvature, J. of Differential Geometry 33 (1991), 465-486.
- [L] H. B. Lawson Jr., The Theory of Gauge Fields in Four Dimensions, Regional Conf. Series in Math. 58, Amer. Math. Soc. (1983).
- [L-M] H. B. Lawson and M. L. Michelsohn, Spin Geometry, Universidade Federal do Ceará, (1983).
- [M-1] J. W. Milnor, Lectures on Morse Theory, Ann. Math. Studies 51, Princeton University Press, New Jersey, (1963).
- [M-2] J. W. Milnor, Curvature of left invariant metrics on Lie groups, Adv. in Math. 21 (1976), 293-329.
- [M-S] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, Characteristic Classes, Princeton University Press (1974).
- [Mi] M. Mimura, The homotopy groups of Lie groups of low rank, J. Math. Kyoto Univ. 6, n- 2 (1967), 131-176.
- [O] B. O'Neill, The fundamental Equations of a submersion, Michigan Math. Journal 13 (1966), 459-469.
- [P] W. A. Poor, Differential Geometric Structures, McGraw-Hill (1981).
- [Po] M. Postnikov, Lectures in Geometry, semester V, Lie groups and Lie algebras, Mir, Moscou (1986).
- [R-1] A. Rigas, Some bundles of non negative curvature, Math. Ann. 232 (1978), 187-193.
- [R-2] A. Rigas, S^3 -bundles and exotic actions, Bull. Soc. Math. France 112 (1984), 69-92.
- [R-3] A. Rigas, Lie Groups and Lie Algebras, Notas de curso, Trieste (1988).

- [S] S. Salamon, Riemannian Geometry and Holonomy Groups, Longman Scientific and Technical (1989).
- [S-W] M. Strake and G. Walschap, Connections metrics of nonnegative curvature on vector bundles, preprint (1986).
- [T-S-Y] H. Toda, Y. Saito and I Yokota, Note on the generator of $\pi_7(SO(7))$, Memoirs of the college of Science, University of Kyoto, Series A, vol. XXX, n^o 3 (1957), 227-230.
- [W] N. Wallach, Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature, Ann. of Math. 96 (1972), 277-295.
- [W-1] A. Weinstein, Unflat bundles, M.I.T (1968), não publicado.
- [W-2] A. Weinstein, Fat bundles and symplectic manifolds, Adv. in Math 37, n^o 3 (1980), 239-250.
- [Wh] G. Whithead, Elements of Homotopy Theory, Graduate texts in Math., Springer-Verlag (1978).
- [Y] I. Yokota, An explicit isomorphism between $SU(4)$ and $Spin(6)$, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 14, n^o 1 (1979), 29-34.