

# Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO  
CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

## ESPAÇOS DE POISSON-FURSTENBERG E MEDIDAS INVARIANTES EM GRUPOS DE LIE SEMI-SIMPLES

por

**Jorge Nicolás López**

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

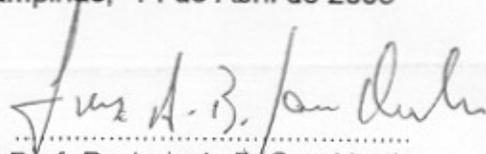
Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Co-orientador: Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino

# Espaços de Poisson-Furstenberg e medidas invariantes para grupos de Lie Semi-simples.

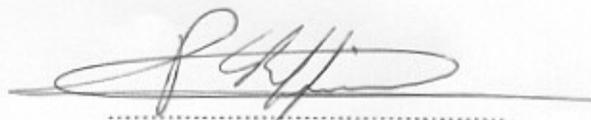
Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Jorge Nicolás López e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 14 de Abril de 2005



Prof. Dr. Luiz A. B. San Martin

Orientador



Prof. Dr. Paulo R. C. Ruffino

Co-orientador

Banca Examinadora

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Prof. Dr. Cláudio Landim

Prof. Dr. Roberto José Miatello

Prof. Dr. Pedro José Catuogno

Prof. Dr. Marcelo Firer

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título DOUTOR em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

López, Jorge Nicolás

L881e            Espaços de Poisson-Furstenberg e medidas invariantes para grupos de Lie semi-simples / Jorge Nicolás López -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientadores : Luiz Antonio Barrera San Martín; Paulo Régis Caron Ruffino

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Lie, Grupos de. 2. Funções harmônicas. 3. Semigrupos. I. Barrera San Martín, Luiz Antonio. II. Ruffino, Paulo Régis Caron. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Poisson-Furstenberg spaces and invariant measures for semi-simple Lie groups.

Palavras-chave em inglês (keywords): 1. Lie groups. 2. Harmonic functions. 3. Semigroups.

Área de concentração: Geometria diferencial

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martín (UNICAMP)

Prof. Dr. Cláudio Landim (IMPA)

Prof. Dr. Roberto José Miatello (FAMAF)

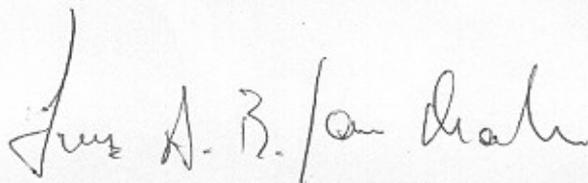
Prof. Dr. Pedro José Catuogno (UNICAMP)

Prof. Dr. Marcelo Firer (UNICAMP)

Data da defesa: 28/03/2005

Tese de Doutorado defendida em 28 de março de 2005 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



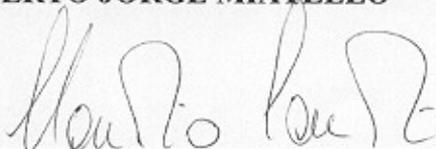
---

Prof. (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN



---

Prof. (a). Dr (a). ROBERTO JORGE MIATELLO



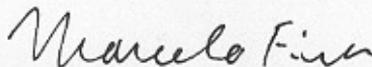
---

Prof. (a). Dr (a). CLAUDIO LANDIM



---

Prof. (a). Dr (a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO



---

Prof. (a) Dr. (a) MARCELO FIRER

★

a  
Lucy  
Jorge  
y  
Chita

## AGRADECIMENTOS

Aos Professores San Martin e Ruffino, pela orientação, dedicação e compreensão. A Nathalia pelo carinho e a paciência. A Pedro pelos conselhos. A Jones e Gimena pela amizade. A Alberto e Betinho pela camaradagem. E a tantos outros que como eles fizeram meu passo por Campinas tão feliz.

Ao IMECC por abrir suas portas tão gentilmente.

Este trabalho foi financiado pela FAPESP. Título do projeto : Teoria de Lie e Semigrupos, Processo: 00/07673-0.

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>2</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>5</b>
1.1 Motivação . . . . .	7
1.2 Descrição dos Capítulos . . . . .	8
<b>2 Preliminares e notações</b>	<b>11</b>
2.1 Generalidades . . . . .	11
2.2 Subgrupos parabólicos e tipo parabólico . . . . .	12
2.2.1 Tipo parabólico de um semigrupo . . . . .	13
2.2.2 Exemplo . . . . .	13
2.2.3 A medida que gera o semigrupo . . . . .	14
2.3 Notações . . . . .	15
<b>3 Espaço de Poisson-Furstenberg</b>	<b>17</b>
3.1 Os recobrimentos do flag maximal . . . . .	17
3.1.1 Os recobrimentos e as projeções entre eles. . . . .	17
3.1.2 A ação de $M/M_0$ em $G/M_0AN$ . . . . .	18
3.2 Conjuntos de controle invariantes nos recobrimentos. . . . .	20
<b>4 Medidas invariantes nos recobrimentos.</b>	<b>23</b>
4.1 Suportes de medidas ergódicas e $S$ -i.c.s.. . . . .	23
4.1.1 Generalidades sobre o suporte de medidas. . . . .	24
4.1.2 Medidas invariantes e funções harmônicas. . . . .	27
4.2 Medidas Ergódicas nos Recobrimentos . . . . .	31
4.3 Unicidade . . . . .	35

4.3.1	Desintegração de medidas invariantes . . . . .	36
4.3.2	A impossibilidade da existência de duas medidas ergódicas com o mesmo suporte . . . . .	36
4.3.3	As medidas da desintegração em $G/M_0AN$ carregam peso em toda a fibra do i.c.s.. . . . .	40
4.3.4	Em qualquer recobrimento. . . . .	42
<b>5</b>	<b>Tipo Parabólico</b>	<b>45</b>
5.1	Mais sobre medidas invariantes e ergódicas . . . . .	45
5.1.1	Medidas ergódicas em $G/M_0AN$ . . . . .	45
5.1.2	Simetrias das medidas ergódicas nos recobrimentos . . . . .	46
5.1.3	Ergodicidade da medida de Poisson $\mu_{\mathbb{P}}$ . . . . .	49
5.2	Medidas invariantes e funções harmônicas . . . . .	49
5.2.1	Bijeção dos operadores $i(\mu)$ . . . . .	51
5.3	Caracterização de $M_{\nu}$ . . . . .	52
5.3.1	Limites de funções harmônicas . . . . .	52
5.3.2	Uma medida que define um operador que não é sobrejetor . . . . .	55
5.3.3	O subgrupo $M_{\nu}$ . . . . .	58
5.4	$M(C_0)$ e o tipo parabólico . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Um exemplo em <math>SL(n)</math></b>	<b>65</b>
6.1	Um subgrupo de $SL(n)$ . . . . .	66
6.1.1	O grupo de isometrias . . . . .	66
6.1.2	A álgebra de Lie . . . . .	66
6.2	O campo $H_0$ . . . . .	68
6.3	O semigrupo . . . . .	68
6.3.1	O i.c.s. em $Gr_k(n)$ . . . . .	70
6.3.2	$SO_0^*(k, n - k)$ é transitivo em $fe\mathcal{O}^+$ . . . . .	74
6.3.3	$\mathcal{O}^+$ é invariante por $S$ . . . . .	75
6.3.4	$fe\mathcal{O}^+$ é o i.c.s . . . . .	77
6.3.5	O tipo parabólico . . . . .	77
<b>7</b>	<b>Equações diferenciais estocásticas.</b>	<b>81</b>
7.1	Equações diferenciais estocásticas. . . . .	82
7.1.1	A equações diferencial estocástica com drift. . . . .	82
7.1.2	Sistemas de controle . . . . .	84
7.1.3	Medidas e semigrupo gerados pela equação diferencial estocástica . . . . .	84

7.2	A invariância para o processo . . . . .	85
7.3	O operador Laplace-Beltrami . . . . .	88
7.3.1	O processo em $K' \setminus L$ . . . . .	90
<b>8</b>	<b>Exemplo da Construção do Campo</b>	<b>93</b>
8.1	A métrica em $\mathcal{O}^+$ . . . . .	93
8.1.1	O abeliano maximal . . . . .	95
8.1.2	A conjugação . . . . .	97
8.1.3	A Grassmanniana . . . . .	97
8.1.4	O fluxo em $Ab_0$ . . . . .	99
8.2	A função . . . . .	103
8.2.1	A função estendida . . . . .	104
8.2.2	A invariância em relação à métrica . . . . .	105
8.2.3	A função em $K' \setminus L$ . . . . .	106
<b>9</b>	<b>Medidas invariantes em Espaços Simétricos.</b>	<b>109</b>
9.1	Espaço Simétrico Afim Regular . . . . .	109
9.1.1	A hipótese . . . . .	110
9.1.2	As decomposições . . . . .	110
9.1.3	A classificação . . . . .	112
9.2	A equação estocástica . . . . .	112
9.3	O tipo parabólico e os i.c.s para $S$ . . . . .	114
9.4	O Espaço Simétrico $X = L/K'$ . . . . .	115
9.5	O Gradiente . . . . .	118
9.5.1	Mais sobre o espaço simétrico . . . . .	118
9.5.2	O fluxo . . . . .	120
9.6	Levantando medidas invariantes . . . . .	123
9.6.1	Levantamento ao flag maximal . . . . .	124
9.6.2	O levantamento ao recobrimento maximal . . . . .	126
<b>10</b>	<b>Expoentes de Liapunov</b>	<b>127</b>
10.1	Expoentes de Liapunov . . . . .	127
10.1.1	O cálculo . . . . .	129
	<b>Índice</b>	<b>136</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>139</b>

★

# RESUMO

Seja  $G$  um grupo de Lie semi-simples não compacto com centro finito e  $\nu$  uma medida sobre  $G$  tal que o semigrupo  $S$  gerado pelo seu suporte tenha interior não vazio. Seja  $\mathbb{P}_\nu$  o espaço de Poisson-Furstenberg para a medida  $\nu$ , ou seja, onde existe uma correspondência um a um entre as funções contínuas limitadas em  $\mathbb{P}_\nu$  e as funções  $\nu$ -harmônicas em  $G$  (fórmula de Poisson). Seja  $KAN$  a decomposição de Iwasawa de  $G$  e  $M$  o centralizador de  $A$  em  $K$ . Assim  $P = MAN$  é subgrupo parabólico maximal. É sabido que  $\mathbb{P}_\nu$  pode ser escrito como  $G/M_\nu AN$  onde  $M_\nu$  é um subgrupo de  $M$ , que contém sua componente conexa. Neste trabalho  $M_\nu$  é determinado a partir do tipo parabólico de  $S$ . Também é estabelecida uma relação entre os conjuntos de controle invariante para  $S$  e os suportes das medidas  $\nu$ -invariantes ( $\nu * \eta = \eta$ ).

Por outro lado, a fórmula de Poisson é construída a partir de uma medida  $\nu$ -invariante  $\mu$  em  $\mathbb{P}_\nu$ , que em geral é difícil de encontrar explicitamente pois envolve a solução explícita de uma equação diferencial de segunda ordem. No caso particular de  $G$  simples, com um subgrupo  $L$  semi-simples tal que  $(G, L)$  forma um par simétrico afim hermitiano e  $\nu$  é uma medida gerada a partir de uma equação diferencial estocástica gerada a partir de campos específicos provenientes da estrutura do par simétrico, conseguimos dar uma forma explícita para essa medida  $\mu$ . São mostrados exemplos detalhados quando  $G = \text{Sl}(n)$ ,  $L = \text{SO}(p, q)$  e a equação tem um parte determinística dada por um campo específico e a parte estocástica é formada por uma base ortogonal de campos da parte simétrica da álgebra de Lie de  $L$ .



# ABSTRACT

Let  $G$  be a non-compact semisimple Lie group with finite centre and  $\nu$  a measure on  $G$  such that the semigroup  $S$  generated by its support has non-empty interior. Let  $\mathbb{P}_\nu$  be the Poisson-Furstenberg space associated to the measure  $\nu$ , i.e., such that there exists a one to one correspondence between bounded  $\nu$ -harmonic functions on  $G$  and continuous functions in  $\mathbb{P}_\nu$  (Poisson formula). Let  $KAN$  be the Iwasawa decomposition of  $G$  and  $M$  the centralizer of  $A$  in  $K$ . Thus  $P = MAN$  is the parabolic maximal sub-group. It is known that  $\mathbb{P}_\nu$  can be written as  $G/M_\nu AN$  where  $M_\nu$  is a sub-group of  $M$ , which contains the connected component of the identity. In this work  $M_\nu$  is determined from the parabolic type of  $S$ . We also show that there exists a one to one correspondence between the invariant control sets of  $S$  and the supports of  $\nu$ -invariant ( $\nu * \eta = \eta$ ) ergodic measures in  $\mathbb{P}_\nu$ .

The Poisson formula is built with a  $\nu$ -invariant measure in  $\mathbb{P}_\nu$  denoted by  $\mu$ . It is difficult to show an explicit expression because it involves the explicit solution of a second order differential equation. When  $G$  is simple and includes a sub-group  $L$  semisimple such that  $(G, L)$  is a Hermitian affine symmetric pair and  $\nu$  is a measure generated from a differential stochastic equation, we obtain the explicit form of a specific invariant measure. We show examples when  $G = \text{Sl}(n)$  and  $L = \text{SO}(p, q)$ .



# Capítulo 1

## Introdução

Neste trabalho são estudados processos estocásticos em grupos de Lie e seus espaços homogêneos. As questões principais são tratadas em grupos de Lie semi-simples e estão relacionadas com a descrição analítica e geométrica das medidas invariantes para os processos. O trabalho consta, essencialmente de duas partes, uma de caráter geral, que estuda os espaços de Poisson-Furstenberg a partir do ponto de vista da teoria dos semigrupos de Lie e a segunda parte que trabalha especificamente em grupos de Lie associados aos espaços simétricos afins.

Dado um grupo de Lie  $G$  e  $\nu$  uma medida em  $G$ , uma função  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  é dita  $\nu$ -harmônica se para todo  $g \in G$

$$f(g) = \int_G f(gh) d\nu(h).$$

Sendo o conjunto destas funções denotado por  $H_\nu$ . Se  $G$  é semi-simples, conexo, não compacto, com centro finito e  $\nu$  é absolutamente contínua em relação a medida de Haar, Furstenberg [9] garante que existe um espaço homogêneo  $\mathbb{P}_\nu$  e uma medida  $\mu_\nu$  sobre  $\mathbb{P}_\nu$  tal que toda função  $\nu$ -harmônica em  $G$  surge de uma única função contínua  $\hat{f}$  em  $\mathbb{P}_\nu$ , a partir do operador  $i(\mu_\nu) : C^0(\mathbb{P}_\nu) \rightarrow H_\nu$  definido pela integral

$$f(g) := \int_{\mathbb{P}_\nu} \hat{f}(gx) d\mu_\nu(x) \tag{1.1}$$

Estes espaços são conhecidos como *espaços de Poisson-Furstenberg* e a equação (1.1) é chamada como *Fórmula de Poisson-Furstenberg*. Consideremos a decomposição de Iwasawa  $G = KAN$  e  $M$  o normalizador de  $A$  em  $K$ . Os

espaços de Poisson-Furstenberg são da forma  $G/M'AN$  com  $M_0 \subset M' \subset M$ , e  $M_0$  a componente conexa da identidade de  $M$ , ou seja, os espaços de Poisson-Furstenberg são recobrimentos do flag maximal  $\mathbb{B} = G/MAN$ . Um dos resultados de caráter geral desta tese é conseguir determinar para uma medida  $\nu$  o espaço  $\mathbb{P}_\nu$  correspondente, ou seja, o  $M'$  adequado, denotado por  $M_\nu$ . Esta determinação é feita a partir do conhecimento do *tipo parabólico* do semigrupo  $S_\nu$  gerado pelo suporte da medida  $\nu$ . O tipo parabólico corresponde a uma classificação finita dos semigrupos com interior não vazio em  $G$  (ver San Martin e Tonelli[24]). Esta classificação é feita a través do estudo dos *conjuntos de controle invariante para a ação de um semigrupo  $S$*  ( $S$ -i.c.s) nas variedades flags associadas com  $G$ . As variedades flags são da forma  $G/P_\Theta$ , com  $P_\Theta$  um grupo parabólico (ver por exemplo Warner [32]). Naturalmente  $S$  age à esquerda em  $G/P_\Theta$  e os  $S$ -i.c.s são conjuntos que são invariantes e transitivos para esta ação a menos de um fecho. A classificação consta de associar a cada semigrupo  $S$  (com interior não vazio) um espaço  $G/P_\Theta$ , e este flag é chamado o tipo parabólico de  $S$ . Assim na proposição 5.20 é demonstrado que  $M_\nu = M \cap P_\Theta^0$  onde  $G/P_\Theta$  é o tipo parabólico de  $S_\nu$  e  $P_\Theta^0$  é a componente da identidade de  $P_\Theta$ . Ressaltemos que o único resultado conhecido até agora nesta direção específica é do próprio Furstenberg [9] teorema 5.3, onde demonstra que se o semigrupo  $S_\nu$  contém a identidade no seu interior, ou seja,  $S_\nu = G$ , então o espaço de Poisson-Furstenberg correspondente é o flag maximal  $\mathbb{B}$ .

O outro resultado de caracter geral se refere às *medidas  $\nu$ -invariantes* (i.e.  $\nu * \eta = \eta$ ) nos espaços homogêneos de  $G$ . Seja  $\eta$  uma medida sobre um espaço homogêneo  $R$ , o operador dado pela integral

$$f(g) := \int_R \hat{f}(gx) d\eta(x)$$

definido sobre as funções contínuas de  $R$  tem imagem em  $H_\nu$  se e somente se  $\eta$  é  $\nu$ -invariante; e essa é a relação que existe entre as funções  $\nu$ -hamônicas e as medidas  $\nu$ -invariantes. Estas medidas podem ser decompostas em medidas  $\nu$ -invariantes ergódicas, em particular é fácil demonstrar que  $\mu_\nu$  é ergódica. O resultado que é conseguido no teorema 4.37 é que em qualquer revestimento do flag maximal, o suporte das medidas  $\nu$ -invariante ergódicas são  $S_\nu$ -i.c.s., e reciprocamente, cada  $S_\nu$ -i.c.s. é suporte de uma única medida  $\nu$ -invariante ergódica. O mesmo resultado já era conhecido no flag maximal (ver Guivac'h [10]). Usando ferramentas de desintegração de medidas obtivemos a generalização.

O resultado de caráter mais particular é o cálculo explícito da medida  $\mu_\nu$  sobre um grupo de Lie  $G$  simples associados com uma *estrutura simétrica afim de tipo hermitiano*. Esta estrutura consiste, entre outras coisas, na existência de um automorfismo  $\tau$  de ordem dois em  $G$  que define o subgrupo  $L$  de ponto fixos de  $\tau$ . Exigiremos também que  $L$  seja semi-simples. O outro requisito para a construção explícita da medida  $\mu_\nu$  será que  $\nu$  seja determinada a partir de uma equação diferencial estocástica do tipo

$$dg = H_0(g) dt + \sum_{j=1}^m Z_j(g) \circ dW_j, \quad (1.2)$$

onde  $H_0$  e  $Z_j$  são elementos da álgebra de Lie de  $G$  que surgem da estrutura afim do par  $(G, L)$ . As medidas invariantes em geral são difíceis de calcular porque envolvem equações diferenciais de segunda ordem. Com nossas restrições garantiremos simetrias suficientes para que o cálculo possa ser feito. O fato chave que permitirá o cálculo surge do resultado que se encontra em Ikeda e Watanabe [14, Thm. 4.6], onde é possível conseguir uma fórmula explícita para uma medida invariante para um processo estocástico sobre uma variedade Riemanniana. Em nosso caso a variedade Riemanniana será o  $S_\nu$ -i.c.s no flag maximal, que será identificado com o espaço simétrico de  $L$  (i.e.  $K' \backslash L$  com  $K'$  compacto maximal) que tem uma estrutura de variedade Riemanniana própria.

## 1.1 Motivação

A fórmula de Poisson-Furstenberg, válida em grupos semi-simples generaliza a fórmula clássica de Poisson para funções harmônicas no disco unitário. Essa fórmula foi descrita originalmente como:

$$f(z) = \int_{|\xi|=1} \hat{f}(\xi) \frac{1 - z\bar{z}}{|\xi - z|^2} d\xi. \quad (1.3)$$

Note que por essa fórmula, a partir de uma função  $\hat{f}$  integrável em  $S^1$  – em relação a medida de Lebesgue – obtemos uma função  $f$  harmônica no disco unitário (isto é,  $\Delta f = 0$  onde  $\Delta$  é o operador de Laplace em relação à uma métrica hiperbólica). Furstenberg generalizou esta fórmula. De fato, se  $G$  é um grupo semi-simples com centro finito,  $K$  é um compacto maximal e

$D = G/K$  é o espaço simétrico, então toda função  $\hat{f}$  integrável em relação a uma medida  $K$ -invariante  $m$  sobre  $\mathbb{B}$ , gera uma função  $f$  harmônica, através de uma fórmula integral semelhante à fórmula (1.3).

No caso da fórmula (1.3) temos que  $G = Sl(2)$ ,  $K = SO(2)$ ,  $m$  é a medida de Lebesgue em  $S^1$  e  $\mathbb{B} = S^1$  (ou mais precisamente, a reta projetiva  $\mathbb{R}P^1$ ).

Furstenberg demonstra este resultado com muito mais generalidade ainda. Uma função que chamamos H-harmônica em  $G$  é uma função que verifica ser  $m_K * \mu'$ -harmônica, onde  $m_K$  é a medida de Haar em  $K$  e  $\mu'$  é uma medida qualquer absolutamente contínua em  $G$  ([9] Definition 4.1.). Tais funções são invariantes pela ação de  $K$ , portanto, define uma função  $\tilde{f}$  em  $D$ , via  $\tilde{f}(gk) = f(g)$ . Furstenberg demonstra que estas  $\tilde{f}$  são exatamente as medidas harmônicas no sentido clássico ( $\Delta f = 0$ ). Assim o estudo de medidas harmônicas em  $D$  ou H-harmônicas em  $G$  resulta um caso particular das medidas  $\nu$ -harmônicas para  $\nu$  absolutamente contínua. São assim estas últimas as que estudamos neste trabalho.

## 1.2 Descrição dos Capítulos

No Capítulo 2 fixaremos algumas notações e descreveremos alguns conceitos importantes, em especial os referente aos grupos parabólicos (ver por exemplo [32]) e o *tipo parabólico* ([23], [24]).

No Capítulo 3 iniciaremos o estudo dos recobrimentos do flag maximal, em particular do recobrimento maximal  $G/M_0AN$  é a ação do grupo  $M/M_0$  à direita que comuta com a ação de  $G$  à esquerda. A partir desta ação damos uma descrição dos conjuntos de controle invariante em  $G/M_0AN$ . O conteúdo do Capítulo 4, que estuda as medidas  $\nu$ -invariantes nos recobrimentos e sua relação com os  $S_\nu$ -i.c.s., se resume no teorema 4.37.

No capítulo 5 primeiro se estuda a relação entre as medidas  $\nu$ -invariantes nos revestimentos e as funções  $\nu$ -invariantes. Depois se estudam os limites de sequências de valores de funções  $\nu$ -hamônicas para finalmente achar um operador  $i(\eta)$  cuja imagem são todo  $H_\nu$ . Este operador será chave para dar uma primeira caracterização de  $M_\nu$ . Por último se exhibirá uma fórmula para  $M_\nu$  a partir do tipo parabólico.

No exemplo do Capítulo 6 é aplicado todo o exposto para o grupo  $Sl(n)$  e uma medida gerada a partir de uma equação diferencial estocástica. Essa medida será melhor estudada no Capítulo 7, mais ainda, será adotado um ponto de vista tal que o interesse se centrará na procura de *medidas invariantes*

*para o processo* gerado pela equação diferencial estocástica que generalizará a ideia de medida  $\nu$ -invariante.

Já o Capítulo 8 será uma continuação do exemplo do Capítulo 6. Agora o interesse será o cálculo explícito de uma medida invariante nos flags e nos recobrimentos de  $Sl(n)$ . Mas tudo o que foi realizado no Capítulo 8 será generalizado no Capítulo 9, onde os grupos estudados têm a estrutura de par simétrico afim hermitiano e a equação estocástica é construída a partir de campos que surgem de tal estrutura.



# Capítulo 2

## Preliminares e notações

O propósito deste capítulo é estabelecer notações e introduzir conceitos que serão utilizados em todo o trabalho, com especial ênfase nos conjunto de controle invariante e no tipo parabólico.

### 2.1 Generalidades

Se  $G$  é um grupo de Lie agindo numa variedade  $M$ , diremos que  $M$  é um  $G$ -espaço. Seja  $g \in G$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  então definimos a função  $f^g : M \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f^g(x) := f(gx)$ .

Um *semigrupo*  $S$  de  $G$  será, como é habitual, um subconjunto de  $G$  que verifica

$$\text{se } a \in S \text{ e } b \in S \text{ então } ab \in S.$$

Se  $H$  é um subgrupo fechado de  $G$  o quociente  $G/H$  é conhecido como um *espaço homogêneo* de  $G$ .

Sempre que se faça referência a alguma *medida* se deverá entender medida de probabilidade, a menos que se fale o contrário. Todas as medidas serão medidas sobre a  $\sigma$ -álgebra dos borelianos. Se  $\mu$  é uma medida em  $M$  e  $g \in G$  então se define a medida  $g\mu(A) := \mu(g^{-1}A)$  para todo  $A$  mensurável. Denotaremos

$$\mu(f) := \int_M f(x) d\mu(x).$$

Se  $\nu$  também é uma medida em  $G$  definimos uma nova medida sobre  $M$ ,

chamada *convolução* e denotada por  $\nu * \mu$  dada por

$$\nu * \mu (f) = \int_G \left( \int_M f(gx) d\mu(x) \right) d\nu(g) \quad \text{para toda } f \text{ mensurável}$$

Equivalentemente  $\nu * \mu = p_*(\nu \times \mu)$  onde  $p : G \times M \rightarrow M$  é  $p(g, x) = gx$ . Denotaremos a convolução de uma medida  $\nu$ ,  $n$  vezes como  $\nu^{*n}$ .

*Convergência* no espaço de medidas sempre será convergência em relação com a topologia fraca, ou seja  $\mu_n \rightarrow \mu$  se e somente se, para toda função contínua  $f$  acontece  $\mu_n(f) \rightarrow \mu(f)$ .

Em particular pode-se tomar  $M = G$ , com a ação à esquerda ou à direita.

## 2.2 Subgrupos parabólicos e tipo parabólico

Seja  $G$  um grupo de Lie semi-simples conexo não compacto com centro finito. Denote por  $\mathfrak{g}$  sua álgebra de Lie. As *variedades flags* de  $G$  são determinadas por subconjuntos de um conjunto simples de raízes de  $\mathfrak{g}$ . Para isso, fixe uma decomposição de Iwasawa  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  e seja  $\Pi$  um conjunto de raízes para o par  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ . Sejam  $\Pi^+$  e  $\Sigma$  o conjunto de raízes positivas e simples, respectivamente, correspondente a escolha da componente nilpotente  $\mathfrak{n}$ , isto é,

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha,$$

onde  $\mathfrak{g}_\alpha$  é o subespaço da raiz  $\alpha$ . Seja  $\mathfrak{m}$  o centralizador de  $\mathfrak{a}$  em  $\mathfrak{k}$  e assim  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  é a correspondente *subálgebra parabólica minimal*. Sejam  $A = \exp \mathfrak{a}$ ,  $N = \exp \mathfrak{n}$  e  $M$  o centralizador de  $A$  em  $K = \exp \mathfrak{k}$ , então  $P = MAN$  é o subgrupo parabólico minimal e  $\mathbb{B} = G/P$  é o *flag maximal*.

Dado um subconjunto  $\Theta \subset \Sigma$ , denote por  $\mathfrak{p}_\Theta$  a correspondente *subálgebra standard parabólica*, ou seja,

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{p},$$

onde  $\mathfrak{n}^-(\Theta)$  é a subálgebra gerada pelos  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ ,  $\alpha \in \langle \Theta \rangle$ , e  $\langle \Theta \rangle$  é o semigrupo de raízes positivas geradas por  $\Theta$ . Associado com cada subálgebra parabólica temos o subgrupo parabólico  $P_\Theta$  que é o normalizador de  $\mathfrak{p}_\Theta$  em  $G$ :

$$P_\Theta = \{g \in G : \text{Ad}(\mathfrak{g})\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p}_\Theta\}$$

$\mathbb{B}_\Theta = G/P_\Theta$  é o flag associado com  $\Theta$ .

Dados dois subconjuntos  $\Theta_1 \subset \Theta_2 \subset \Sigma$ , os correspondentes subgrupos parabólicos verificam  $P_{\Theta_1} \subset P_{\Theta_2}$ , e assim existe uma fibração canônica  $\pi : G/P_{\Theta_1} \longrightarrow G/P_{\Theta_2}$ ,  $gP_{\Theta_1} \mapsto gP_{\Theta_2}$ .

### 2.2.1 Tipo parabólico de um semigrupo

Seja  $S$  um semigrupo de  $G$  tal que  $\text{int}S \neq \emptyset$ . Considere a ação de  $S$  nos flags de  $G$ . Um conjunto  $C \neq \emptyset$  contido num flag  $\mathbb{B}_\Theta$  é dito *conjunto de controle invariante* para  $S$  ( $S$ -i.c.s) se satisfaz as seguintes condições

- se  $x \in C$  então  $\text{fe}(Sx) = \text{fe}(C)$
- $C$  é maximal com a propriedade anterior

O fato de que  $\text{int}S \neq \emptyset$  garante que todo  $S$ -i.c.s. seja fechado. Além disso em cada variedade flag existe apenas um  $S$ -i.c.s. (ver San Martin [23])

Os semigrupos em  $G$  são classificados de acordo com a geometria de seus i.c.s 's. Esta geometria é mostrada no seguinte enunciado demonstrado em San Martin e Tonelli [24]. Seja  $\pi_\Theta : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}_\Theta$  a projeção canônica entre as variedades flags.

**Proposição 2.1** *Dado um semigrupo  $S \subset G$  com interior não vazio, existe  $\Theta \subset \Sigma$  tal que, se  $C_\Theta$  é o  $S$ -i.c.s em  $\mathbb{B}_\Theta$ , então  $\pi_\Theta^{-1}(C_\Theta) \subset \mathbb{B}$  é o i.c.s em  $\mathbb{B}$ . Entre esses subconjuntos  $\Theta$  existe um que é maximal (no sentido da inclusão) que satisfaz essa propriedade.*

Esse subconjunto  $\Theta$  é denotado  $\Theta(S)$  e dizemos que é o *tipo parabólico* de  $S$ . A variedade flag associada com  $\Theta(S)$  é denotada por  $\mathbb{B}_{\Theta(S)}$  e é chamada, também por abuso, o *tipo parabólico* de  $S$ . Ver San Martin e Tonelli [24], San Martin [25] e San Martin e Santana [27] para uma maior discussão sobre o tipo parabólico.

Desde um ponto de vista geral podemos afirmar que a importância do flag correspondente ao tipo parabólico reside em que os principais aspectos da dinâmica gerada pelo semigrupo são capturados neste espaço.

### 2.2.2 Exemplo

Para exemplificar todos estes conceitos vamos tomar o grupo  $G = \text{Sl}(n)$  com sua respectiva álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(n)$  cuja decomposição de Iwasawa é

$$\mathfrak{sl}(n) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

onde  $\mathfrak{so}(n)$  são as matrizes anti-simétricas,  $\mathfrak{a}$  são as matrizes diagonais e  $\mathfrak{n}$  são as matrizes triangulares superiores com 0 na diagonal. No grupo a decomposição é

$$\mathrm{Sl}(n) = \mathrm{SO}(n)AN$$

onde  $\mathrm{SO}(n)$  são as matrizes ortogonais com determinante 1,  $A$  são as matrizes diagonais com entradas positivas e  $N$  são as matrizes triangulares superiores com 1's na diagonal.

Dada  $s = (k_1, k_2, \dots, k_r)$  de inteiros  $1 \leq k_1, k_2, \dots, k_r \leq n$  a variedade flag  $\mathbb{F}_n(k_1, k_2, \dots, k_r)$  é o conjunto  $r$ -uplas de subespaços

$$\{(V_1, \dots, V_r) : V_i \subset V_{i+1} \text{ e } \dim V_i = k_i\}$$

Por exemplo  $\mathbb{F}_n(1) = \mathbb{P}^{n-1}$  e  $\mathbb{F}_n(i) = \mathrm{Gr}_n(i)$  são os flags minimais e o flag maximal é  $\mathbb{F}_n(1, 2, \dots, n)$ . As projeções se realizam simplesmente mediante a eliminação de subespaços, por exemplo, o elemento do flag maximal  $(V_1, \dots, V_n) \in \mathbb{F}_n(1, 2, \dots, n)$  projeta em  $(V_1, V_3) \in \mathbb{F}_n(1, 3)$ .

As raízes associadas com o par  $(\mathfrak{sl}(n), \mathfrak{a})$  são  $\{\alpha_{i,j} : 1 \leq i, j \leq n\}$ , onde, se  $H = \mathrm{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$  então  $\alpha_{i,j}(H) = a_i - a_j$ . O sistema simple de raízes associado com  $\mathfrak{n}$  é  $\Sigma = \{\alpha_{i,i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$ . Por exemplo se  $\Theta = \{\alpha_{1,2}\}$  então o subgrupo parabólico  $P_\Theta$  é da forma

$$\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

com  $a \det(A) = 1$ , e o flag  $\mathrm{Sl}(n)/P_\Theta$  é  $\mathbb{P}^{n-1}$ .

Um exemplo clássico de semigrupo com interior não vazio em  $\mathrm{Sl}(n)$  é  $\mathrm{Sl}_n^+$ , o semigrupo das matrizes em  $\mathrm{Sl}(n)$  com entradas positivas. Como é fácil notar, no flag  $\mathbb{P}^{n-1}$  o  $\mathrm{Sl}_n^+$ -i.c.s. tem uma descrição simples:

$$C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^{n-1} : x_i \geq 0\}$$

que são as retas que interceptam o octante positivo de  $\mathbb{R}^n$ .

O tipo parabólico de  $\mathrm{Sl}_n^+$  é  $\Theta = \{\alpha_{1,2}\}$ , ou equivalentemente,  $\mathbb{P}^{n-1}$  (ver San Martin [23]). Disso podemos concluir, usando a Proposição 2.1, que o i.c.s do flag maximal é toda  $n$ -upla de subespaços encaixados tal que o primeiro subespaço (de dimensão 1) tenha interseção no octante positivo.

### 2.2.3 A medida que gera o semigrupo

Em todos os capítulos  $\nu$  será uma medida no grupo  $G$  e o suporte de  $\nu$  gerará um semigrupo  $S$ , isto é, o menor semigrupo que contém  $\mathrm{sup}(\nu)$ .

## 2.3 Notações

- $A$  : a parte abeliana da decomposição de Iwasawa de  $G$ . Com menor frequência poderá representar um conjunto qualquer.
- $\mathfrak{a}$  : uma álgebra de Lie abeliana maximal de  $\mathfrak{l}$ .
- $\text{ad}$  : a adjunta  $\text{ad}(X)Y = [X, Y]$
- $\mathbb{B}$  : o flag maximal de  $G$
- $\mathbb{B}_\Theta$  : um flag de  $G$  associado com um subconjunto  $\Theta$  do sistema simple de raízes.
- $B(M)$  : a  $\sigma$ -álgebra dos borelianos de uma variedade  $M$
- $C, C_0, C_\Theta$ : conjuntos de controle invariante em diversos espaços.
- $\mathfrak{c}$  : uma subálgebra específica unidimensional de  $\mathfrak{l}$ .
- $\delta_x$  : a medida concentrada no elemento  $x$ .
- $\mathbb{F}$  : variedade flag
- $\text{fe}(X), \bar{X}$  : fecho topológico do conjunto  $X$ .
- $G$  : um grupo de Lie semi-simples não compacto com centro finito. A partir do Capítulo 9 também será simples.
- $H_\nu(G)$  : o conjunto das funções  $\nu$ -hamônicas em  $G$ .
- $K$  : a parte compacta da decomposição de Iwasawa de  $G$ .
- $K'$  : a parte compacta da decomposição de Iwasawa de  $L$ .
- $L$  : um grupo de Lie semi-simples contido em  $G$ .
- $\mathfrak{l}$  : a álgebra de Lie de  $L$ .
- $\mathcal{L}(X)$  : a álgebra de Lie gerada por  $X$
- $M$  : o centralizador de  $A$  em  $K$  na decomposição de Iwasawa de  $G$ .
- $M_0$  : a componente da identidade de  $M$

- $M_\nu$  : o subgrupo de  $M$  tal que  $G/M_\nu AN$  é o espaço de Poisson em relação a  $\nu$ .
- $M'$  : qualquer subgrupo de  $M$  que contenha  $M_0$ .
- $\mathcal{M}(B)$ ,  $\mathcal{M}^1(B)$  : o conjunto das medidas positivas e as medidas de probabilidade em  $B$  respectivamente.
- $N$  : uma variedade Riemanniana.
- $\mu$  : medida de probabilidade em diversos espaços homogêneo de  $G$ .
- $\mu_{\mathbb{P}}$  : a medida de Furstenberg em  $\mathbb{P}$ .
- $\nu$  : uma medida de probabilidade em  $G$ .
- $\pi, \pi_0, \pi_\Theta$ : projeções entre diversos espaços.
- $p, p_0, p_\Theta$ : projeções entre diversos espaços.
- $P$  : o subgrupo parabólico minimal de  $G$
- $P_0$  : a componente conexa da identidade de  $P$ .
- $\mathbb{P}_\nu$  : o espaço de Furstenberg para a medida  $\nu$ .
- $S$  : o semigrupo de  $G$  gerado pelo suporte da medida  $\nu$
- $S'$  : a projeção via exponencial da parte simétrica da álgebra de Lie de  $L$ .
- $\Theta$  : o tipo parabólico de algum semigrupo.
- $X^c$  : o complemento del conjunto  $X$ .

# Capítulo 3

## Espaço de Poisson-Furstenberg

Dada uma medida  $\nu$  absolutamente contínua em relação à medida de Haar em  $G$ , Furstenberg demonstra em [9] Teorema 5.4 que existe um  $G$ -espaço  $\mathbb{P}_\nu$  que tem a propriedade de possuir uma medida  $\nu$ -invariante  $\mu_{\mathbb{P}}$  ( $\nu * \mu_{\mathbb{P}} = \mu_{\mathbb{P}}$ ) tal que a fórmula

$$f(g) = \int_{\mathbb{P}_\nu} \hat{f}(gx) d\mu_{\mathbb{P}}(x)$$

estabelece uma relação biunívoca entre as funções contínuas  $\hat{f}$  em  $\mathbb{P}_\nu$  e as funções  $\nu$ -harmônicas limitadas  $f$  em  $G$ . No teorema 5.2 de Furstenberg [9] se demonstra ainda que  $\mathbb{P}_\nu$  é sempre um recobrimento do flag maximal  $\mathbb{B}$ . Ou seja,  $\mathbb{P}_\nu = G/M_\nu AN$  onde  $M_\nu$  verifica  $M_0 \subset M_\nu \subset M$ . Neste capítulo estudaremos os recobrimentos do flag maximal e os  $S$ -i.c.s's neles. Em especial introduziremos uma ação à direita do grupo  $M/M_0$  no recobrimento maximal que será de muita utilidade no estudo dos  $S$ -i.c.s's e das medidas  $\nu$ -invariantes.

### 3.1 Os recobrimentos do flag maximal

#### 3.1.1 Os recobrimentos e as projeções entre eles.

Seja  $M'$  um subgrupo de  $M$  que contém  $M_0$ . O espaço homogêneo  $R = G/M'AN$  será um recobrimento do flag maximal  $G/MAN$  pois  $M_0AN$  é a componente conexa da identidade de  $MAN$  e está contida em  $M'AN$ . Observemos que  $R$  é um recobrimento finito e o cardinal da fibra é igual ao cardinal  $|M'/M_0|$  e, por isso observemos também que  $R$  é compacto, assim

como  $G/MAN$ . Denotemos por  $\pi'$  a projeção:

$$\begin{aligned}\pi' & : R = G/M'AN \rightarrow G/MAN \\ & gM'AN \mapsto gMAN\end{aligned}$$

que é claramente equivariante pela ação à esquerda de  $G$ . De uma maneira análoga se  $M'' \subset M'$  então  $G/M'AN$  projeta em  $G/M''AN$ , sendo estas projeções também equivariantes.

Assim temos ordenados por projeção todos os recobrimentos, sendo o *recobrimento maximal*  $G/M_0AN$  e o minimal o flag maximal  $\mathbb{B} = G/MAN$ . A quantidade de recobrimentos é claramente a mesma que a quantidade de subgrupos de  $M$  que contém  $M_0$ .

Como já mencionamos, em Furstenberg [9] (pág. 377) está demonstrado que estes recobrimentos são precisamente os espaços de Poisson-Furstenberg. A partir de agora chamaremos estes espaços simplesmente *recobrimentos*.

### 3.1.2 A ação de $M/M_0$ em $G/M_0AN$

Dado que  $M_0$  é a componente conexa de  $M$ ,  $M_0$  é um subgrupo normal, e portanto  $M/M_0$  é um grupo. Este grupo age à direita em  $G/M_0AN$  da seguinte forma.

**Proposição 3.1** *Seja  $m \in M/M_0$  é  $\bar{m} \in M$  um representante de  $m$ , então a ação de  $M/M_0$  em  $G/M_0AN$*

$$(gM_0AN) m = g\bar{m}M_0AN.$$

*está bem definida e comuta com a ação à esquerda de  $G$ .*

**Demonstração.** Sejam

$$hM_0AN = gM_0AN, \quad (3.1)$$

com  $g, h \in G$  e

$$m = xM_0 = yM_0, \quad (3.2)$$

com  $x, y \in M$ . Para demonstrar que a ação está bem definida temos que demonstrar que

$$(hM_0AN)x = (gM_0AN)y$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (gy)^{-1}hxM_0AN &= M_0AN \\ y^{-1}g^{-1}hxM_0AN &= M_0AN \end{aligned}$$

que é equivalente com

$$y^{-1}g^{-1}h x \in M_0AN.$$

Mas de (3.1) sabemos que

$$g^{-1}h = m_0a n$$

com  $m_0 \in M_0$ ,  $a \in A$  e  $n \in N$ . E de (3.2) sabemos que

$$x = y m'_0$$

com  $m'_0 \in M_0$ . Juntando tudo

$$y^{-1}g^{-1}h x = y^{-1}m_0 a n y m'_0.$$

Como  $M$  normaliza  $N$  temos que  $yn'_0 = yn'_0n_1$  com  $n_1 \in N$ , e assim

$$y^{-1}g^{-1}h x = y^{-1}m_0 a y m'_0 n_1.$$

E como  $M$  está contido no centralizador de  $A$ , temos que

$$y^{-1}m_0 a y m'_0 n_1 = y^{-1}m_0 y m'_0 a n_1.$$

E como  $M_0$  é normal em  $M$

$$y^{-1}m_0 y m'_0 a n_1 = y^{-1}y m''_0 m'_0 a n_1 = m''_0 m'_0 a n_1$$

com  $m''_0 \in M_0$ . E assim

$$y^{-1}g^{-1}h x = m''_0 m'_0 a n_1$$

que claramente está contido em  $M_0AN$ .

Por outro lado é claro que esta ação à direita comuta com a ação à esquerda pois

$$\begin{aligned} h((gM_0AN) m) &= h(g\tilde{m}M_0AN) = hg\tilde{m}M_0AN \\ (hgM_0AN)m &= (h(gM_0AN))m. \end{aligned}$$

■

Notemos que o fato chave para a demonstração foi que  $M_0$  é normal em  $M$ . Portanto pode-se definir uma ação análoga de  $M/M'$  em  $G/M'AN$  para qualquer  $M'$  normal em  $M$ . É importante notar que existem grupos de Lie semi-simples que contêm algum  $M'$  que não é normal em  $M$ . (ver por exemplo Kenneth [15])

**Notação 3.2** Como de costume, se  $A \subset G/M_0AN$  e  $m \in M/M_0$  então  $Am = \{xm : x \in A\}$

A ação que acabamos de definir será de muita utilidade para a descrição dos conjuntos de controle invariante em  $G/M_0AN$  como veremos mais adiante.

## 3.2 Conjuntos de controle invariantes nos recobrimentos.

Assim como os espaços homogêneos, os recobrimentos também recebem a ação à esquerda de  $G$ . Por isso  $S$  também determina conjuntos de controle nos recobrimentos. Daremos especial atenção nos conjuntos de controle invariante pois eles, como veremos, são o suporte das medidas invariantes.

### 3.2. CONJUNTOS DE CONTROLE INVARIANTES NOS RECOBRIMENTOS.21

Notemos primeiro que se  $C$  é um i.c.s em um recobrimento  $G/M'AN$  então sabemos que  $\pi'(C)$  será um i.c.s. em  $\mathbb{B}$  (ver San Martin e Tonelli [24]), aliás, será o único i.c.s. em  $\mathbb{B}$  denotado por  $C_{\mathbb{B}}$ . Em particular em  $G/M_0AN$  os i.c.s's são totalmente descritos por  $M/M_0$ , como veremos a seguir.

**Proposição 3.3** *Seja  $C$  um i.c.s em  $G/M_0AN$ . Se  $m \in M/M_0$  então  $Cm$  também é um i.c.s.. Se  $D$  é um i.c.s em  $G/M_0AN$  existe  $m \in M/M_0$  tal que  $D = Cm$ .*

**Demonstração.** A primeira parte é demonstrada observando que o difeomorfismo de  $G/M_0AN$  definido por  $x \mapsto xm$  é uma fibração equivariante e aplicando a Proposição 2.7 de San Martin e Tonelli [24]. Demonstraremos a segunda parte: Seja  $x \in D$ . Se  $\pi : G/M_0AN \rightarrow \mathbb{B}$  é a projeção canônica então  $\pi(x) \in C_{\mathbb{B}}$ . Logo, existe  $y \in C$  tal que  $\pi(y) = \pi(x)$ . Portanto  $x$  e  $y$  estão na mesma fibra, assim existe  $m \in M/M_0$  tal que  $ym = x$  então  $Cm \cap D \neq \emptyset$ , e como i.c.s's distintos são disjuntos temos que  $Cm = D$ . ■

Não podemos garantir a unicidade de  $m$  na proposição anterior pois pode acontecer que para dois elementos diferentes  $m$  e  $n$  em  $M/M_0$ ,  $Cm$  e  $Cn$  sejam o mesmo i.c.s.. Para trabalhar com isso obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 3.4** *Seja  $C$  um i.c.s. em  $G/M_0AN$ . Seja*

$$M(C) = \{m \in M/M_0 : Cm = C\}$$

*o subgrupo de isotropia de  $C$ , então existe uma correspondência um a um entre o conjunto de todos os conjuntos de controle invariante e o quociente  $M(C) \backslash (M/M_0)$ .*

**Demonstração.** Se  $m \in M/M_0$  e  $[m]$  é a classe de  $m$  em  $M(C) \backslash (M/M_0)$ . Definimos a aplicação  $[m] \mapsto Cm$ . Está é bem definida, é injetora pela própria definição e é sobrejetora pois  $M/M_0$  age transitivamente no conjunto de todos os i.c.s's, como vimos na proposição 3.3. ■

Notemos que  $M(C)$  não é necessariamente normal em  $M/M_0$ , por isso  $M(C) \backslash (M/M_0)$  não é necessariamente um grupo.

Voltando para os recobrimentos em geral podemos afirmar a seguinte

**Proposição 3.5** *Seja  $\pi' : G/M'AN \rightarrow \mathbb{B}$  a projeção canônica. Então a união disjunta dos conjuntos de controle invariante em  $G/M'AN$  é exatamente  $\pi'^{-1}(C_{\mathbb{B}})$ .*

**Demonstração.** Denotemos por  $U$  a união dos i.c.s.. Como todo i.c.s de  $G/M'AN$  projeta sobre  $C_{\mathbb{B}}$ ,  $U \subset \pi'^{-1}(C_{\mathbb{B}})$  é trivial. Demonstraremos a inclusão inversa primeiro para o recobrimento maximal. Chamaremos neste caso a projeção canônica por  $\pi$  e a união dos i.c.s.'s por  $U_0$ . Seja  $x \in \pi^{-1}(C_{\mathbb{B}})$ . Como  $G/M_0AN$  é compacto existe pelo menos um i.c.s,  $C$ .  $\pi(C) = C_{\mathbb{B}}$ , então existe  $y \in C$  tal que  $\pi(y) = \pi(x)$ , assim  $x$  e  $y$  estão na mesma fibra então existe  $m$  tal que  $ym = x$ , em particular  $x \in Cm \subset U_0$ .

Agora demonstremos isso para um recobrimento  $R$  qualquer. Consideremos as projeções canônicas

$$G/M_0AN \xrightarrow{\pi_0} R \xrightarrow{\pi'} \mathbb{B}.$$

Naturalmente  $\pi = \pi_0 \circ \pi'$ . Portanto  $\pi'^{-1}(C_{\mathbb{B}})$  é  $\pi_0(\pi^{-1}(C_{\mathbb{B}}))$  que, como vimos agora é  $\pi_0(U_0)$ . Mas i.c.s's projetam apenas em i.c.s's. Assim  $\pi'^{-1}(C_{\mathbb{B}}) = \pi_0(U_0) \subset U$ . ■

# Capítulo 4

## Medidas invariantes nos recobrimentos.

Estudaremos neste capítulo a importante relação entre as medidas  $\nu$ -invariantes ergódicas (que são aquelas que não podem ser escritas como combinação convexa não trivial de outras medidas  $\nu$ -invariantes) e os conjuntos de controle invariantes para  $S$ . Em Brown e Guivarc'h [3] está demonstrado que em  $\mathbb{B}$  existe uma única medida  $\nu$ -invariante ergódica. Veremos que o suporte dessa medida é exatamente o único  $S$ -i.c.s. em  $\mathbb{B}$ , e generalizaremos esse resultado para recobrimentos demonstrando que cada  $S$ -i.c.s. de cada recobrimento é o suporte de uma única medida  $\nu$ -invariante ergódica e, reciprocamente, cada medida  $\nu$ -invariante ergódica tem como suporte um  $S$ -i.c.s..

Além de ser um resultado interessante por si só esta caracterização dos suportes das medidas invariantes permitirá o cálculo posterior do espaço de Poisson a partir do tipo parabólico (ver Capítulo 5) e também tomando casos particulares conseguiremos calcular explicitamente a medida  $\nu$ -invariante ergódica em  $\mathbb{B}$  ajudando-nos o fato de que seu suporte é um i.c.s. (ver capítulos 9 e 6).

### 4.1 Suportes de medidas ergódicas e $S$ -i.c.s..

Na sequência enunciaremos alguns resultados que serão de utilidade.

### 4.1.1 Generalidades sobre o suporte de medidas.

Nesta seção apresentaremos conceitos básicos sobre o suporte de medidas em grupos de Lie e espaços homogêneos que serão de utilidade mais adiante.

**Definição 4.1** *Seja  $X$  um espaço topológico Hausdorff, localmente compacto, com a propriedade de que toda cobertura de um aberto possui uma sub-cobertura numerável,  $\mu$  uma medida com  $\sigma$ -álgebra  $B(X)$ . Seja  $\mathcal{I} = \{A \in B(X) : A \text{ é fechado e } \mu(A) = 1\}$ . Definimos o suporte de  $\mu$  como*

$$\text{sup}(\mu) := \bigcap_{A \in \mathcal{I}} A.$$

Existe uma forma *local* de definir o suporte que será de muita utilidade.

**Definição 4.2**  $\text{sup}'(\mu) := \{x \in X : \forall V \text{ aberto} : x \in V \text{ e } \mu(V) > 0\}$ .

Antes de demonstrar que  $\text{sup}'(\mu) = \text{sup}(\mu)$  provaremos algumas propriedades úteis.

**Lema 4.3**  $\text{sup}'(\mu)$  é fechado, e portanto  $\text{sup}'(\mu) \in B(X)$ .

**Demonstração.** Seja  $x \in \text{fe}(\text{sup}'(\mu))$ . Seja  $V$  um aberto qualquer que contenha  $x$ . Então existe uma sequência  $x_n$  em  $\text{sup}'(\mu)$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Existe  $n_0$  tal que  $x_n \in V$ . Por isso  $\mu(V) > 0$ . Por definição  $x \in \text{sup}'(\mu)$ . ■

**Lema 4.4**  $\mu(\text{sup}'(\mu)) = 1$ .

**Demonstração.** Por absurdo suponhamos que  $\mu(\text{sup}'(\mu)^C) > 0$ . Seja  $x \in \text{sup}'(\mu)^C$ . Como  $\text{sup}'(\mu)^C$  é aberto existe para cada  $x$  um vizinhança aberto  $V_x$  tal que  $V_x \cap \text{sup}'(\mu) = \emptyset$ . Ou seja  $\mu(V_x) = 0$ . Mas  $\{V_x : x \in \text{sup}'(\mu)^C\}$  forma uma cobertura por abertos de  $\text{sup}'(\mu)^C$ , que é aberto. Então  $\mu(\text{sup}'(\mu)^C) = \mu(\cup(V_x)) \leq \sum \mu(V_x) = 0$  ■

**Proposição 4.5**  $\text{sup}(\mu) = \text{sup}'(\mu)$ .

**Demonstração.** Como  $\text{sup}'(\mu)$  é fechado e tem medida 1, então está em  $\mathcal{I}$ . E portanto  $\text{sup}(\mu) \subset \text{sup}'(\mu)$ .

Para demonstrar a outra inclusão tomemos  $x \in \text{sup}'(\mu)$  e seja  $A \in \mathcal{I}$ . Se  $x \notin A$  então, como  $A$  é fechado existe  $V$  entorno aberto de  $x$  tal que  $V \cap A = \emptyset$ . Mas, como  $\mu(A) = 1$ , então  $\mu(V) = 0$ . Logo  $x \notin \text{sup}'(\mu)$ , que contradiz a hipótese inicial. ■

Agora alguns aspectos que envolvem funções contínuas.

**Lema 4.6** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos Hausdorff. Sejam  $\mu$  uma medida em  $B(X)$  e  $f : X \rightarrow Y$  contínua. Seja  $f_*\mu$  a medida em  $B(Y)$  definida por*

$$f_*\mu(A) := \mu(f^{-1}(A)).$$

Então

$$f(\text{sup } \mu) \subset \text{sup}(f_*\mu) \quad (4.1)$$

e

$$\overline{f(\text{sup } \mu)} = \text{sup}(f_*\mu) \quad (4.2)$$

**Demonstração.** Seja  $y \in f(\text{sup } \mu)$  e seja  $V$  um entorno aberto qualquer de  $y$ . Existe  $x \in \text{sup } \mu$  tal que  $f(x) = y$ .  $f^{-1}(V)$  é aberto e  $x \in \text{sup } \mu$ . Então  $\mu(f^{-1}(V)) > 0$  e isso implica que  $f_*\mu(V) > 0$ . E assim  $y \in \text{sup}(f_*\mu)$ .

Para a segunda parte notemos que  $f(\text{sup } \mu) \subset \overline{\text{sup}(f_*\mu)}$  sai aplicando á anterior inclusão o fecho. Resta demonstra apenas que  $\overline{f(\text{sup } \mu)} \supset \text{sup}(f_*\mu)$ . Seja  $x \in \text{sup}(f_*\mu)$ . O fato de ser Hausdorff garante que existe uma sequência  $U_n$  de abertos encaixantes tais que a interseção de eles é  $x$ . Como  $x \in \text{sup}(f_*\mu)$  então  $f_*\mu(U_n) > 0$ . Isso implica que  $\mu(f^{-1}(U_n)) > 0$ . Então  $f^{-1}(U_n) \cap \text{sup } \mu \neq \emptyset$ . Para cada  $n$  seja  $y_n \in f^{-1}(U_n) \cap \text{sup } \mu$ . A sequência  $x_n := f(y_n)$  está incluída em  $f(\text{sup } \mu)$  e como  $x_n \in U_n$ ,  $x_n \rightarrow x$ . Portanto  $x \in \overline{f(\text{sup } \mu)}$ . ■

**Lema 4.7** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $\mu$  e  $\nu$  respectivas medidas em  $B(X)$  e  $B(Y)$ . Então*

$$\text{sup}(\nu \otimes \mu) = \text{sup } \nu \times \text{sup } \mu$$

**Demonstração.** Ver por exemplo Dieudonné [6]13.21.18. ■

Dos últimos resultados concluímos o seguinte

**Proposição 4.8** *Seja  $G$  um grupo de Lie e  $M$  um espaço homogêneo  $\nu$  e  $\mu$  respectivas medidas em  $B(G)$  e  $B(M)$ . Então*

$$\text{sup } \nu \text{ sup } \mu \subset \text{sup}(\nu * \mu)$$

e

$$\overline{\text{sup } \nu \text{ sup } \mu} = \text{sup}(\nu * \mu)$$

**Demonstração.** Recordemos que  $\nu * \mu = p(\nu \otimes \mu)$  onde  $p : G \times M \rightarrow M$  definida por  $p(g, m) = gm$  é contínua. Assim

$$p \sup(\nu \otimes \mu) = p(\sup \nu \times \sup \mu) = \sup \nu \sup \mu$$

A partir disto, pela fórmula (4.1)

$$\sup(\nu * \mu) = \sup(p(\nu \otimes \mu)) \supseteq p \sup(\nu \otimes \mu).$$

Analogamente

$$\overline{\sup \nu \sup \mu} = \overline{p \sup(\nu \otimes \mu)}$$

e pela fórmula (4.2)

$$\overline{p \sup(\nu \otimes \mu)} = \sup(p * (\nu \otimes \mu)) = \sup(\nu * \mu).$$

■

Aplicando este resultado várias vezes para medidas num mesmo grupo temos o seguinte

**Corolário 4.9** *Seja  $G$  um grupo de Lie e  $\nu_1, \dots, \nu_n$  medidas em  $B(G)$  então*

$$\overline{\sup \nu_1 \dots \sup \nu_n} = \sup(\nu_1 * \dots * \nu_n)$$

**Demonstração.** A demonstração segue de 4.8 ou pode ser encontrada também Dieudonné [6] 14.5.4. ■

**Definição 4.10** *Definimos  $S$  como o semigrupo gerado pelo suporte de  $\nu$ .*

Outro resultado óbvio e muito utilizado é

**Lema 4.11** *Sejam  $\nu$  e  $\mu$  duas medidas no mesmo espaço e  $a$  e  $b$  dois números reais positivos então*

$$\sup(a \nu + b \mu) = \sup \nu \cup \sup \mu$$

**Demonstração.** Ver por exemplo Dieudonné [6] 13.19.2. ■

**Lema 4.12** *Sejam  $\mu_1$  e  $\mu_2$  medidas de probabilidade distintas,  $a \neq a'$  e  $b \neq b'$  então*

$$a\mu_1 + b\mu_2 \neq a'\mu_1 + b'\mu_2 \tag{4.3}$$

**Demonstração.** Suponhamos por absurdo que essas duas medidas sejam iguais e seja  $D$  um subconjunto qualquer em  $\text{sup } \mu_1 \cup \text{sup } \mu_2$ . Sejam  $\alpha = \mu_1(D)$  e  $\beta = \mu_2(D)$ . Notemos que  $\alpha, \beta$  não são simultaneamente nulos. Como (4.3) é falso, então

$$\begin{aligned} a\alpha + b\beta &= a'\alpha + b'\beta \\ (a' - a)\alpha &= (b - b')\beta \end{aligned}$$

sem perda de generalidade suponhamos que  $\beta \neq 0$  então

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{(b - b')}{(a' - a)} = k,$$

segue que  $\mu_1(D) = k \mu_2(D)$  para todo  $D \subset \text{sup } \mu_1 \cup \text{sup } \mu_2$ , mas isso implica  $\mu_1 = k \mu_2$ , e como são medidas de probabilidade  $\mu_1 = \mu_2$  o que contradiz a hipótese. ■

### 4.1.2 Medidas invariantes e funções harmônicas.

Dada a medida  $\nu$  em  $G$  sempre existem medidas  $\nu$ -invariantes, i.e.,  $\nu * \alpha = \alpha$ , nos espaços homogenêos compactos, lema 4.15 a seguir. Por isso em cada recobrimento  $R = G/M'AN$  de  $\mathbb{B}$  podemos garantir a existência de tais medidas.

Notemos que o espaço das medidas  $\nu$ -invariantes, não necessariamente de probabilidade, forma um espaço vetorial, e notemos também que o subconjunto das medidas de probabilidade invariantes  $\mathcal{M}_\nu^1(R)$  é um conjunto convexo dentro do compacto  $\mathcal{M}^1(R)$ . Assim podemos garantir a existência de pontos extremais, ou seja, que não podem ser escritos como combinação convexa não trivial de outros elementos. Esses pontos extremais serão chamados *medidas  $\nu$ -invariantes ergódicas* ou simplesmente *medidas ergódicas*. Ou dito até aqui pode ser resumido na seguinte definição e o lema posterior:

**Definição 4.13** *Uma medida  $\alpha$  em  $R = G/M'AN$  é dita  $\nu$ -invariante, se e somente se,*

$$\nu * \alpha = \alpha$$

*Uma medida  $\nu$ -invariante é dita extremal ou ergódica se não pode ser escrita como combinação convexa de outras medidas invariantes. Quando não exista confusão uma função  $\nu$ -invariante será chamada apenas invariante.*

**Lema 4.14** *Em  $R = G/M'AN$  sempre existem medidas  $\nu$ -invariantes ergódicas.*

**Demonstração.** Segue do lema seguinte demonstrado em Bougerol e Lacroix ([2], lema 3.5) e do fato de  $\mathcal{M}^1(R)$  ser compacto. ■

**Lema 4.15** *Seja  $B$  um  $G$ -espaço compacto e separável e uma medida  $\nu$  sobre  $G$ . Para cada medida  $\alpha$  sobre  $B$  existe algum ponto limite de*

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nu^{*i} * \alpha : n \geq 1 \right\}$$

*e esses pontos limites são medidas  $\nu$ -invariantes.*

### Medidas invariantes e funções harmônicas

**Definição 4.16** *Seja  $\omega$  uma medida num recobrimento  $R$  e  $\hat{f}$  uma função contínua em  $R$  definimos a função  $i(\omega)\hat{f}$  em  $G$  por*

$$[i(\omega)\hat{f}](g) := \int_R \hat{f}(gx) d\omega(x).$$

*para  $g \in G$ .*

**Definição 4.17** *Uma função  $f$  em  $G$  é dita  $\nu$ -harmônica se para todo  $g \in G$*

$$f(g) = \int_G f(gh) d\nu(h).$$

*Também chamaremos uma função  $\nu$ -harmônica apenas harmônica. O conjunto das funções  $\nu$ -harmônica será notado por  $H_\nu(G)$ .*

A importância das medidas invariantes radica no fato de que se  $\mu$  é  $\nu$ -invariante  $i(\mu)\hat{f}$  será  $\nu$ -harmônica. Ainda mais, esse fato caracteriza as funções invariantes:

**Proposição 4.18**  *$\mu$  é invariante se e somente se a imagem de  $i(\mu)$  pertence a  $H_\nu(G)$ .*

**Demonstração.**  $\Rightarrow$  Seja  $\hat{f}$  uma função contínua em  $R$  e  $f = i(\mu)\hat{f}$ .

$$\int_G f(gh) d\nu(h) = \int_G \left( \int_R \hat{f}(ghx) d\mu(x) \right) d\nu(h)$$

denotando  $\hat{f}^g(\cdot) = \hat{f}(g\cdot)$  para que fique mais evidente a conta, segue que

$$\begin{aligned} &= \int_G \left( \int_R \hat{f}^g(hx) d\mu(x) \right) d\nu(h) = \int_R \hat{f}^g(z) d(\nu * \mu)(z) \\ &= \int_R \hat{f}^g(z) d\mu(z) = \int_R \hat{f}(gz) d\mu(z) = f(g). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$  Por outro lado, seja  $\hat{f}$  contínua em  $R$ , quero demonstrar que  $(\nu * \mu)\hat{f} = \mu(\hat{f})$ .

$$\begin{aligned} (\nu * \mu)\hat{f} &= \int_G \left( \int_R \hat{f}(hx) d\mu(x) \right) d\nu(h) \\ &= \int_G [i(\mu)\hat{f}](h) d\nu(h) = \int_G f(h) d\nu(h) \\ &= f(1) = [i(\mu)\hat{f}](1) \\ &= \int_R \hat{f}(1x) d\mu(x) = \mu(\hat{f}) \end{aligned}$$

■

### Levantamento de medidas invariantes nos recobrimentos

**Lema 4.19** *Sejam um grupo de Lie  $G$  com uma medida  $\nu$ ,  $H$  um subgrupo fechado e  $H_0$  o subgrupo de  $H$  que contém a identidade, o espaço homogêneo  $B = G/H$ , o recobrimento finito  $R = G/H_0$  de  $B$  e  $\mu$  uma medida  $\nu$ -invariante em  $B$ ; então sempre existe uma medida  $\nu$ -invariante em  $R$  que se projeta em  $\mu$ .*

**Demonstração.** Seja  $n$  a cardinalidade da fibra e seja  $\pi$  a projeção canônica. Para cada  $x \in B$  definimos a medida discreta  $u_x$  em  $R$

$$u_x = \frac{1}{n} (\delta_{y_1^x} + \delta_{y_2^x} + \cdots + \delta_{y_n^x})$$

onde  $\{y_1^x, y_2^x, \dots, y_n^x\}$  são todos os elementos da fibra  $\pi^{-1}(x)$ . Agora definimos a medida

$$\phi(\cdot) = \int_B u_x(\cdot) d\mu(x)$$

Notemos que esta medida projeta em  $\mu$ , de fato, seja  $\hat{f}$  uma função contínua em  $B$ .

$$\begin{aligned} (\pi_*\phi)\hat{f} &= \phi(\hat{f} \circ \pi) = \int_B u_x(\hat{f} \circ \pi) d\mu(x) \\ &= \int_B \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f} \circ \pi(y_i^x) \right) d\mu(x) \\ &= \int_B \hat{f}(x) d\mu(x) = \mu(\hat{f}). \end{aligned}$$

Por outro lado vejamos que  $\phi$  é  $\nu$ -harmônica, para isso é suficiente ver que, para  $\hat{f}$  contínua em  $R$ , a função em  $G$  definida por

$$f(g) := [i(\phi)\hat{f}](g) = \int_R \hat{f}(gy) d\phi(y)$$

é uma função harmônica (ver 4.18).

$$\begin{aligned} f(g) &= \int_R \hat{f}(gy) d\phi(y) \tag{4.4} \\ &= \int_B \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}(gy_i^x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Por outro lado definimos uma função contínua em  $B$ , assim:

$$\hat{h}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}(y_i^x)$$

e como  $\mu$  é  $\nu$ -invariante então a função definida por

$$h(g) = \int_B \hat{h}(gy) d\mu(y)$$

é harmônica. Mas por equivariância

$$\hat{h}(gy) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}(y_i^{gx}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}(gy_i^x)$$

e assim

$$h(g) = \int_B \hat{h}(gy) d\mu(y) = \int_B \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}(gy_i^x) d\mu(y) \tag{4.5}$$

assim como (4.4) e (4.5) são iguais temos que  $f$  também é harmônica. ■

## 4.2 Medidas Ergódicas nos Recobrimentos

A idéia nesta seção é demonstrar que toda medida  $\nu$ -invariante ergódica tem como suporte um i.c.s., e reciprocamente, todo i.c.s. é suporte de uma medida ergódica.

Se uma medida  $\mu$  é  $\nu$ -invariante veremos a continuação que o  $\text{sup}(\mu)$  é invariante pela ação do semigrupo  $S$ .

**Lema 4.20** *Seja  $M$  um  $G$ -espaço compacto e separável e uma medida  $\nu$  sobre  $B(G)$ . Seja  $S$  o semigrupo gerado pelo suporte de  $\nu$ , então*

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{sup}(\nu^{*n})$$

e para todo  $n$

$$\bar{S} \supset \text{sup}(\nu^{*n})$$

**Demonstração.** Aplicando o corolário 4.9

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{sup}(\nu)^n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\text{sup}(\nu)^n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{sup}(\nu^{*n}).$$

A segunda inclusão surge de

$$\bar{S} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{sup}(\nu)^n} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\text{sup}(\nu)^n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{sup}(\nu^{*n})$$

■

**Corolário 4.21** *Sejam  $M$  um  $G$ -espaço e  $\nu$  uma medida sobre  $B(G)$ . Seja  $\mu$  uma medida  $\nu$ -invariante sobre  $B(M)$  então*

$$S \text{ sup } \mu \subset \text{sup } \mu$$

**Demonstração.** Se  $\nu * \mu = \mu$ , então  $\nu^{*n} * \mu = \mu$  para todo  $n$ .

$$\begin{aligned} S \operatorname{sup}(\mu) &\subset \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{sup}(\nu^{*n}) \right) \operatorname{sup} \mu \quad \text{lema 4.20} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{sup}(\nu^{*n}) \operatorname{sup}(\mu) \\ &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{sup}(\nu^{*n} * \mu) \quad \text{prop. 4.8} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{sup}(\mu) = \operatorname{sup}(\mu) \end{aligned}$$

■

**Corolário 4.22** *Com as mesmas hipóteses que 4.21*

$$\forall x \in \operatorname{sup} \mu, \quad \operatorname{fe}(Sx) \subset \operatorname{sup} \mu$$

Este corolário garante que os suportes das medidas invariantes são conjuntos invariantes, no sentido que o fecho de suas  $S$ -órbitas fica dentro do conjunto, mas podemos conseguir mais:

**Proposição 4.23** *Toda medida invariante num recobrimento  $R$  tem como suporte uma união de i.c.s's.*

**Demonstração.** No flag maximal existe uma única medida invariante (ver Guivac'h [10]). Mas como será demonstrado em 5.7 item 3, medidas invariantes projetam em medidas invariantes, portanto toda medida invariante em  $R$  tem que ter suporte dentro de  $\pi^{-1}(C_{\mathbb{B}})$  que como já foi visto, é exatamente a união dos i.c.s's. Mas toda medida invariante  $\mu$ , cujo suporte tem intersecção com um i.c.s  $C$ , o contém, pois, pelo corolário 4.21, para  $\forall x \in \operatorname{sup} \mu$ ,  $\operatorname{fe}(Sx) \subset \operatorname{sup} \mu$ , em particular se  $x \in \operatorname{sup} \mu \cap C$  então  $\operatorname{fe}(Sx) = C$ . ■

Pretendemos demonstrar que quando as medidas, além de ser  $\nu$ -invariante são ergódicas, o suporte delas é um i.c.s. Mas isso será demonstrado no lema 4.26. Agora vamos demonstrar uma proposição no sentido inverso, dado um i.c.s. veremos que ele é suporte de uma medida invariante ergódica. Antes disso necessitamos um lema

**Lema 4.24** *Se  $C$  é um  $S$ -i.c.s fechado então  $\overline{SC} \subset C$ .*

**Demonstração.** Se  $y \in \overline{SC}$  então é da forma  $gx$  com  $g \in \overline{S}$  e  $x \in C$ . Assim existe uma sequência  $\{g_n\} \subset S$  tal que  $g_n \rightarrow g$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Por continuidade do produto  $g_n x$  converge para  $gx = y$  e assim  $y \in \overline{SC}$ . Assim  $\overline{SC} \subset \overline{SC}$ . Por outro lado, como  $C$  é i.c.s.  $\overline{SC} = \overline{C}$ . Por último, como  $C$  é fechado  $\overline{C} = C$  completando a cadeia de inclusões. ■

**Proposição 4.25** *Dado um  $S$ -i.c.s.  $C$  em  $R$  existe uma medida de probabilidade  $\nu$ -invariante ergódica com suporte  $C$ .*

**Demonstração.**

- Construção da medida: Existência: Definimos uma medida de probabilidade  $\alpha$  com suporte em  $C$ . Como  $C$  é fechado em  $R$ ,  $C$  é compacto. Então podemos aplicar o lema 4.15 tomando  $C$  como  $G$ -espaço. Os pontos limites do teorema são as medidas invariantes, tomemos uma e a denominemos  $\mu$ . Para demonstrar que  $\text{sup}(\mu) \subset C$  podemos notar apenas que  $C$  é fechado e invariante pela ação de  $S$ . Mais tecnicamente: notar que dada a definição da sequência do lema 4.15, o suporte de qualquer ponto da sequência está em  $C$  pois

$$\begin{aligned} \text{sup} \left( \sum \nu^{*n} * \alpha \right) &= \cup \text{sup}(\nu^{*n} * \alpha) \text{ lema 4.11} \\ &\subset \cup \text{sup}(\nu^{*n}) \text{sup}(\alpha) \text{ proposição 4.8} \end{aligned}$$

mas  $\text{sup}(\alpha) \subset C$  e  $\text{sup}(\nu^{*n}) \subset \overline{S}$  (lema 4.20) então  $\text{sup}(\nu^{*n}) \text{sup}(\alpha) \subset \overline{SC} \subset C$  (lema 4.24). Em particular a união de todos os  $\text{sup}(\nu^{*n}) \text{sup}(\alpha)$  está contida em  $C$ . Portanto  $\mu$  é uma medida  $\nu$ -invariante com suporte dentro de  $C$ .

- Por outro lado para demonstrar que  $C \subset \text{sup}(\mu)$  tomemos  $x \in C$ , como  $C$  é um i.c.s  $\text{fe}(Sx) = C$ , e pelo corolário 4.21  $\text{fe}(Sx) \subset \text{sup}(\mu)$ .
- Agora que sabemos que todo i.c.s é suporte de uma medida invariante então tem que ser suporte de uma medida extremal. De fato, seja  $\mu$ , invariante com suporte  $C$ .  $\mu$  tem que ser escrita como combinação convexa de extremais

$$\mu = \sum a_i \mu_i \quad a_i > 0$$

mas a união dos suportes das extremas será  $C$  (lema 4.11). Mas o menor suporte de uma medida invariante  $\mu_i$  é  $C$  pela proposição 4.23. Assim todas as  $\mu_i$  têm suporte  $C$ . Em particular existe uma medida invariante ergódica com suporte  $C$ .

■

Uma vez provada a proposição 4.25 podemos demonstrar que

**Lema 4.26** *Toda medida ergódica num recobrimento  $R$  tem como suporte um i.c.s*

**Demonstração.** Seja  $\mu$  uma medida ergódica em  $R$ . Já sabemos que os suportes das medidas invariantes são união de i.c.s's. E sabemos que cada i.c.s é suporte de uma medida ergódica  $\mu_i$ . Agora podemos utilizar o fato que duas medidas ergódicas ou tem o mesmo suporte ou o suportes são disjuntos (ver Yosida [33]). Se o suporte de  $\mu$  fosse mais de um i.c.s, digamos,  $C_1, C_2, \dots, C_n$  então teria suporte não disjunto e não idêntico com, por exemplo,  $C_1$ . ■

Na próxima seção demonstraremos a unicidade desta medida ergódica, ou seja, que não existem mais de uma medida ergódica com o mesmo suporte  $C$ . Esse resultado está demonstrado no teorema 2.6 em Guivarc'h e Raugi [10] para o caso específico em que o revestimento é o próprio  $\mathbb{B}$ , o flag maximal. Para entrar nas condições desse teorema apenas faltam verificar as seguintes hipóteses:

- O semigrupo  $S$  gerado pelo suporte de  $\nu$  tem uma sequência contratante.
- $G_\nu$ , o subgrupo fechado gerado pelo suporte de  $\nu$ , é *totalmente irreduzível*.

Veamos que estas hipóteses se verificam

**Definição 4.27** *Seja  $H$  um subgrupo fechado de  $G$ . Dizemos que  $H$  é totalmente irreduzível se não existem elementos  $x, g_1, \dots, g_r$  tais que*

$$H \subset \bigcup_{i=1}^r g_i (NA\tilde{N}M)^c x$$

onde  $(X)^c$  indica o complemento de  $X$ .

Como  $S$  tem interior não vazio o grupo fechado gerado por  $S$  é  $G$ . Por outro lado  $NA\tilde{N}M$  é uma câmara aberta de Bruhat, e portanto seu complementar é um conjunto magro. É impossível que tudo  $G$  esteja contido na união finita de conjuntos magros. Portanto  $G = G_\nu$  é totalmente irredutível. Para ter uma idéia intuitiva do que significa ser totalmente irredutível podemos notar que para  $G = \text{Sl}(n)$ , um subgrupo é totalmente irredutível se não deixa invariante nenhuma união finita de subespaços próprios. Por exemplo

$$\left\{ 1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

é *irredutível* pois deixa invariante nenhum subespaço próprio, mas não totalmente irredutível pois deixa invariante a união dos subespaços gerados pelos vetores  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ .

**Definição 4.28** *Seja  $g_n$  uma sequência em  $G$  e seja a decomposição polar  $g_n = v_n h_n u_n$  com  $v_n, u_n \in K$  e  $h_n \in \text{fe}(A^+)$ . Para uma raiz  $\alpha \in \Pi$  definimos  $\phi_\alpha(h) = e^{\alpha(\log(h))}$ . A sequência é dita *contratante* se  $\phi_\alpha(h_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , para toda raiz negativa  $\alpha$ .*

Num semigrupo com interior não vazio sempre existe um elemento regular  $H \in \mathfrak{a}^+$  tal que  $\exp(H) \in \text{int}S$  (ver [23]). Assim definimos  $g_n = h^n$  claramente  $h^n \in A^+$  e  $\phi_\alpha(h^n) = e^{\alpha(\log(h^n))} = e^{n\alpha(\log(h))}$ , e como  $\alpha$  é negativa  $\alpha(\log(h)) < 0$ , assim  $e^{n\alpha(\log(h))} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Assim podemos afirmar que

**Lema 4.29** *No flag maximal existe apenas uma única medida invariante ergódica.*

## 4.3 Unicidade

Nesta seção completaremos a demonstração do teorema que afirma que cada i.c.s é suporte de uma única medida invariante.

A unicidade tem a dificuldade, que, a priori, podem existir duas medidas ergódicas com o mesmo suporte, mas isso é um caso que deve ser atacado com ferramentas que envolvem desintegração de medidas.

**Lema 4.30** *Suponhamos que  $A$  é um subconjunto de  $R$  e seja  $\mu$   $\nu$ -invariante com suporte  $A$ . Se não existe mas de uma medida invariante com suporte  $A$  então  $\mu$  é ergódica.*

**Demonstração.** Suponhamos que  $\mu$  não seja ergódica, então existem  $\mu_1$  e  $\mu_2$  medidas (de probabilidade) invariantes diferentes e existem reais  $a, b$  não nulos tal que  $a + b = 1$ , e  $a\mu_1 + b\mu_2 = \mu$ . Consideremos outros  $a'$  e  $b'$  não nulos tais que  $a' + b' = 1$ . Como  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são diferentes  $a\mu_1 + b\mu_2 \neq a'\mu_1 + b'\mu_2$  (lema 4.12). Mas

$$\text{sup}(\mu) = \text{sup}(a\mu_1 + b\mu_2) = \text{sup}(\mu_1) \cup \text{sup}(\mu_2) = \text{sup}(a'\mu_1 + b'\mu_2)$$

Assim  $\mu$  e  $a'\mu_1 + b'\mu_2$  são medidas invariantes com o mesmo suporte  $A$ , e isso contradiz a hipótese do lema. ■

### 4.3.1 Desintegração de medidas invariantes

Veremos agora algumas propriedades relacionadas com a desintegração de uma medida em medidas pontuais. Seja  $\eta$  uma medida e  $\{\eta_w\}$  um conjunto de medidas no mesmo espaço parametrizadas por  $w \in \Omega$ , onde  $\Omega$  é outro espaço de probabilidade com probabilidade  $\mathbb{Q}$ . Dizemos que  $\eta$  é desintegrada em  $\eta_w$  se

$$\eta = \int_{\Omega} \eta_w d\mathbb{Q}(w)$$

onde a igualdade é sempre no sentido

$$\eta(f) = \int_{\Omega} \eta_w(f) d\mathbb{Q}(w) \quad \text{para toda } f \text{ mensurável.}$$

Um caso particular, aparentemente mais geral, é quando escrevemos  $\eta$  como soma de desintegrações

$$\eta = \int_{\Omega} \left( \sum_i a_w^i \eta_w^i \right) d\mathbb{Q}(w).$$

Nosso interesse se centrara em desintegrações de medidas pontuais, ou seja, quando as  $\eta_w$  ou as  $\eta_w^i$  são medidas concentradas num ponto, isto é, são da forma  $\delta_{x^i(w)}$ .

### 4.3.2 A impossibilidade da existência de duas medidas ergódicas com o mesmo suporte

Suponhamos que existem  $\eta$  e  $\gamma$  duas medidas ergódicas em  $G/M_0AN$  com o mesmo suporte que chamaremos  $C$ . Como foi visto no lema 4.26,  $C$  tem que

ser um i.c.s.. Como as duas são ergódicas então são mutuamente singulares, ou seja existem conjuntos  $\Gamma_\eta, \Gamma_\gamma$  tal que

$$\Gamma_\eta \dot{\cup} \Gamma_\gamma = C$$

e

$$\eta(\Gamma_\eta) = 1 \quad \text{e} \quad \gamma(\Gamma_\eta) = 0$$

e vice versa,

$$\gamma(\Gamma_\gamma) = 1 \quad \text{e} \quad \eta(\Gamma_\gamma) = 0$$

e esses conjuntos são densos no suporte  $C$ .

**Notação 4.31** *Seja  $\pi : G/M_0AN \longrightarrow G/MAN$ .*

Então pelo lema 4.29 podemos afirmar que em  $G/MAN$  existe uma única medida  $\nu$ -invariante que chamaremos  $\xi$ . Como  $\eta$  e  $\gamma$  são invariantes, e medida invariante projeta em medida invariante, temos que

$$\pi_*\eta = \xi = \pi_*\gamma \tag{4.6}$$

Na continuação enunciaremos o lema II.2.1 em Bougerol e Lacroix [2] de grão generalidade

**Lema 4.32** *Seja  $G$  um semigrupo topológico agindo num espaço  $T$  2-enumerável e localmente compacto . Considere  $\{X_n, n \geq 1\}$  uma sequência de elementos independentes de  $G$  com uma distribuição comum  $\nu$  definida em  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{Q})$ . Se  $\psi$  é uma distribuição  $\nu$ -invariante em  $T$ , então para quase todo  $w \in \Omega$  existe uma medida de probabilidade  $\psi_w$  tal que cada sequência*

$$\{X_1(w)X_2(w) \dots X_n(w)g\psi, n \geq 1\}$$

*converge fracamente para  $\psi_w$  para quase todo  $g$  segundo a medida  $\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\nu^n$ . Além para toda função  $f$*

$$\psi(f) = \int_{\Omega} \psi_w(f) d\mathbb{Q}(w)$$

**Notação 4.33**  $M_n(w) = g_1(w)g_2(w)\dots g_3(w)g_n(w)$

Consideraremos como sempre que o semigrupo  $S$  é gerado pelo suporte da  $\nu$ . Aplicando primeiro este lema, pensando que o  $T$  é  $G/MAN$  e a medida invariante é  $\xi$  temos que existem  $\xi_w$  tais que

$$M_n(w)g\xi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi_w$$

para  $\mathbb{Q} \otimes \lambda$ -quase todo  $(w, g)$ . A partir de agora tome todas as convergências  $n \rightarrow \infty$ .

Aplicando agora o lema assumindo  $T$  como  $G/M_0AN$  e  $\psi$  como  $\eta$  e depois como  $\gamma$  temos que existem  $\eta_w$  e  $\gamma_w$  tais que

$$\begin{aligned} M_n(w)g\eta &\longrightarrow \eta_w \\ M_n(w)g\gamma &\longrightarrow \gamma_w \end{aligned}$$

para  $\mathbb{Q} \otimes \lambda$ -quase todo  $(w, g)$ . E também

$$\begin{aligned} \eta &= \int \eta_w d\mathbb{Q}(w) \\ \gamma &= \int \gamma_w d\mathbb{Q}(w) \end{aligned}$$

Por equivariância, de (4.6)

$$\begin{aligned} M_n(w)g\xi &\longrightarrow \pi_*\eta_w \\ M_n(w)g\xi &\longrightarrow \pi_*\gamma_w \end{aligned}$$

E assim

$$\pi_*\eta_w = \xi_w = \pi_*\gamma_w \tag{4.7}$$

para  $\mathbb{Q}$ -quase todo  $w$ .

Por outro lado, aplicando novamente o teorema 2.6 de Guivarc'h e Raugi [10] sabemos que a sequência  $M_n(w)g\xi$  converge  $\mathbb{Q}$ -quase todo  $w$  para uma delta de Dirac independente de  $g$ , isto é

$$M_n(w)g\xi \longrightarrow \delta_{z(w)} = \xi_w$$

com  $z(w) \in G/MAN$ . Portanto, temos que por (4.7) as  $\eta_w$  e as  $\gamma_w$  carregam sobre medidas pontuais na fibra de  $z_w$ . Isto é

$$\begin{aligned} \eta_w &= \sum_{i=1}^m a_i(w)\delta_{z^i(w)} & a_i(w) &\geq 0 \\ \gamma_w &= \sum_{i=1}^m b_i(w)\delta_{z^i(w)} & b_i(w) &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde  $\{z^1(w), \dots, z^m(w)\}$  percorrem  $\pi^{-1}(z(w)) \cap C$ ,  $\sum_{i=1}^m a_i(w) = 1$  e  $\sum_{i=1}^m b_i(w) = 1$ .

Notemos que intuitivamente o conjunto

$$\{z^i(w) : a_i(w) > 0\}$$

é o conjunto que “suporta” a medida  $\eta$ . Analogamente

$$\{z^i(w) : b_i(w) > 0\}$$

“suporta” a  $\gamma$ . Então nos concentraremos agora nesses elementos. Para isso reorganizaremos estas somatórias para deixar de fora os termos que têm zeros

$$\begin{aligned} \eta_w &= \sum A_i(w) \delta_{z^i(w)} & A_i(w) > 0 \\ \gamma_w &= \sum B_i(w) \delta_{z^i(w)} & B_i(w) > 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Notemos que

$$1 = \eta(\Gamma_\eta) = \int \eta_w(\Gamma_\eta) d\mathbb{Q}(w) = \int \sum A_i(w) \delta_{z^i(w)}(\Gamma_\eta) d\mathbb{Q}(w)$$

Para que uma integral sobre uma medida de probabilidade de uma função, limitada por 1, seja exatamente 1, a função tem que ser 1 q.t.p. Assim

$$\sum A_i(w) \delta_{z^i(w)}(\Gamma_\eta) = 1$$

$\mathbb{Q}$ -quase todo  $w$ . Mais para todo  $w$  temos que  $\sum A_i(w) = 1$  portanto

$$\delta_{z^i(w)}(\Gamma_\eta) = 1$$

$\mathbb{Q}$ -quase todo  $w$ . Ou seja

$$a_i(w) > 0 \Rightarrow z^i(w) \in \Gamma_\eta \quad \mathbb{Q}\text{-q.t.}w$$

que pode ser traduzido como

$$\mathbb{Q}(\{w : a_i(w) > 0 \text{ e } z^i(w) \notin \Gamma_\eta\}) = 0$$

analogamente

$$b_i(w) > 0 \Rightarrow z^i(w) \in \Gamma_\gamma \quad \mathbb{Q}\text{-q.t.}w$$

Intuitivamente pode-se interpretar que o “suporte” de  $\eta$  está “contido” em  $\Gamma_\eta$  e que o “suporte” de  $\gamma$  está “contido” em  $\Gamma_\gamma$ .

Apesar de  $\Gamma_\eta$  e  $\Gamma_\gamma$  serem disjuntos ainda não temos nenhuma contradição, pois pode acontecer que para os  $i$  tais que  $a_i(w) > 0$  tenhamos que  $b_i(w) = 0$ , e vice versa. Notemos que se provamos que

$$a_i(w) > 0 \Leftrightarrow b_i(w) > 0 \quad \mathbb{Q}\text{-q.t.}w$$

então teríamos um absurdo pois

$$\begin{aligned} a_i(w) > 0 &\Rightarrow b_i(w) > 0 \\ a_i(w) > 0 &\Rightarrow z^i(w) \in \Gamma_\gamma \\ a_i(w) > 0 &\Rightarrow (z^i(w) \in \Gamma_\gamma \text{ e } z^i(w) \in \Gamma_\eta) \\ a_i(w) > 0 &\Rightarrow z^i(w) \in \Gamma_\gamma \cap \Gamma_\eta \end{aligned}$$

todas as afirmações  $\mathbb{Q}$ -quase todo  $w$ . Mas  $\Gamma_\eta \cap \Gamma_\gamma = \emptyset$  e assim teríamos o absurdo

$$\mathbb{Q}(\{w : a_i(w) > 0\}) = 0$$

Mas isso não pode acontecer pois para  $\mathbb{Q}$ -quase todo  $w$

$$\sum a_i(w) = 1$$

E assim conseguiríamos o absurdo que estamos procurando. Então na próxima seção dedicaremos nossos esforços em demonstrar que

$$a_i(w) > 0 \Leftrightarrow b_i(w) > 0 \quad \mathbb{Q}\text{-q.t.}w$$

### 4.3.3 As medidas da desintegração em $G/M_0AN$ carregam peso em toda a fibra do i.c.s..

Agora demonstraremos que  $a_i(w) > 0$  se e somente se  $b_i(w) > 0$  ( $\mathbb{Q}$ -quase todo  $w$ ).

Fixemos um  $w$  para simplificar as coisas e entendamos que a maioria das afirmações serão para  $\mathbb{Q}$ -quase todo  $w$ . Lembremos que  $\sum_{i=1}^m a_i(w) = 1$  e  $\sum_{i=1}^m b_i(w) = 1$  portanto para algum  $i$  temos que  $a_i(w) > 0$  e para algum  $j$  (não necessariamente diferentes)  $b_j(w) > 0$ . Então o fato

$$a_i(w) > 0 \text{ se e somente se } b_i(w) > 0$$

pode ser inferido de

$$a_i(w) > 0 \text{ e } b_i(w) > 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, m$$

ou seja, que  $\eta_w$  e  $\gamma_w$  carregam seu peso em todos os pontos do conjunto  $\{z^1(w), \dots, z^m(w)\} = \pi^{-1}(z(w)) \cap C$ . Demonstraremos isso para  $\eta$ ,  $\mathbb{Q}$ -quase todo  $w$  e o caso  $\gamma$  é exatamente análogo.

Seja  $V \subset C$  aberto (o leitor poderá pensar-o conexo para clarificar as ideas) o suficientemente pequeno tal que  $Vm \cap V = \emptyset$  para todo  $m \in M/M_0$  diferente da identidade. Como  $V$  é aberto e contido no suporte então  $\eta(V) > 0$ , mais ainda, se  $m$  é tal que  $Vm \subset C$  então  $\eta(Vm) > 0$ . Especificamente os  $m$  que verificam isso são os elementos de

$$M(C) = \{m \in M/M_0 : Cm = C\}$$

Suponhamos, para conseguir um absurdo, que  $\eta_w$  não carrega medida para algum  $z^i(w)$ . Denotemos  $z^i(w)$  apenas por  $y_i$  para simplificar a notação. Sem perda de generalidade os elementos onde carrega a medida serão  $y_1, y_2, \dots, y_k$ . Então  $k < m$  pois  $\eta_w$  não carrega medida para algum elemento. Também podemos pensar que  $\pi(y_i) = x_0$  a identidade em  $G/MAN$ . Então, como

$$M_n(w)g\eta \longrightarrow \eta_w = \sum_{i=1}^k q_i \delta_{y_i} \quad (4.10)$$

para  $\mathbb{Q} \otimes \lambda$ -quase todo  $(w, g)$ . A partir de agora considere todas as convergências  $\mathbb{Q} \otimes \lambda$ -quase todo  $(w, g)$ . A convergência (4.10) implica que

$$M_n(w)g \sup \eta \longrightarrow \{y_1, \dots, y_k\}$$

Acontece a mesma coisa para qualquer subconjunto com medida não nula, em particular para  $V$  e para  $Vm$  com  $m \in M(C)$ . Assim

$$M_n(w)gV \longrightarrow \{y_1, \dots, y_k\} \quad (4.11)$$

e

$$M_n(w)gVm \longrightarrow \{y_1, \dots, y_k\} \quad (4.12)$$

mais se aplicamos a ação de  $m$  à direita da fórmula (4.11) então

$$M_n(w)gVm \longrightarrow \{y_1, \dots, y_k\}m$$

ou seja

$$M_n(w)gVm \longrightarrow \{y_1m, \dots, y_km\} \quad (4.13)$$

escolhemos um  $m \in M(C)$  que não permuta o conjunto  $\{y_1, \dots, y_k\}$ , isso sempre é possível de achar pois  $M(C)$  é transitivo em  $\{y_1, \dots, y_m\}$ . Então as fórmulas (4.12) e (4.13) produzem o absurdo que estávamos procurando. Se algum fato é válido para  $\mathbb{Q} \otimes \lambda$ -quase todo  $(w, g)$  é válido para  $\mathbb{Q}$ -quase todo  $g$ . Assim podemos afirmar que

$$a_i(w) > 0 \Leftrightarrow b_i(w) > 0 \quad \mathbb{Q}\text{-q.t.}w$$

A presente análise resume-se no seguinte

**Teorema 4.34** *Duas medidas ergódicas diferentes em  $G/M_0AN$  não podem ter o mesmo suporte.*

**Corolário 4.35** *Cada i.c.s em  $G/M_0AN$  é o suporte de uma e apenas uma medida invariante que é ergódica.*

**Demonstração.** Seja  $C$  um i.c.s. em  $G/M_0AN$ . O fato de que existe uma medida ergódica com suporte  $C$  foi demonstrado em 4.25. O fato de que não existe outra medida ergódica surge de 4.34. Mas também não existe nenhuma outra medida invariante com suporte  $C$ , pois se  $\mu$  é invariante com suporte  $C$  tem que ser combinação convexa de medidas ergódicas, todas elas com suporte  $C$  e existe apenas uma medida ergódica com esse suporte, assim  $\mu$  é essa medida ergódica. ■

#### 4.3.4 Em qualquer recobrimento.

Lembremos que, como foi demonstrado no lema 4.19, medidas invariantes em qualquer  $G/M'AN$  sempre são projeção de alguma medida invariante em  $G/M_0AN$ . Sabendo disso é fácil demonstrar que ergódicas em  $G/M_0AN$  projetam em ergódicas como veremos a seguir.

As medidas ergódicas em  $G/M_0AN$  surgem todas a partir de uma delas, no seguinte sentido: Seja  $\mu$  ergódica em  $G/M_0AN$  com suporte o i.c.s  $C$ . Seja  $C_1$  outro i.c.s e seja  $m \in M/M_0$  tal que  $C_1 = Cm$ , então dado que a ação de  $m$  comuta com a de  $G$ ,  $\mu m$  é invariante com suporte em  $C_1$ , ou seja é a medida ergódica com suporte  $C_1$ .

**Lema 4.36** *Toda medida invariante num recobrimento  $R'$  com suporte um i.c.s é ergódica e é a única medida invariante com esse suporte.*

**Demonstração.** Seja  $\beta$  uma medida invariante em  $R' = G/M'AN$  com suporte um i.c.s  $C'$ . Seja  $\pi : G/M_0AN \rightarrow G/M'AN$ . Temos que  $\beta$  é projeção de uma medida invariante em  $G/M_0AN$  que chamaremos de  $\alpha$ .

$$\beta = \pi_*\alpha$$

Esta é soma de ergódicas  $\alpha_i$ .

$$\alpha = \sum a_i \alpha_i$$

com  $\alpha_i$  ergódicas. Assim os suportes respectivos das  $\alpha_i$  são os i.c.s.  $C_i$ . Notemos que  $\pi(C_i) = C'$  portanto posso supor que para cada  $C_i$  existe um  $m_i \in M'$  tal que  $C_i = C_1 m_i$ . Assim também

$$\alpha = \sum a_i \alpha_1 m_i$$

então juntando tudo

$$\beta = \pi_*(\sum a_i \alpha_1 m_i) = \sum a_i \pi_*(\alpha_1 m_i)$$

mas  $\pi_*(\alpha_1 m_i) = \pi_*\alpha_1$  pois  $m_i \in M'$ . Assim

$$\beta = \sum a_i \pi_*(\alpha_1 m_i) = \sum a_i \pi_*(\alpha_1) = \pi_*(\alpha_1)$$

mas notemos que, então, toda medida invariante com suporte  $C'$  é exatamente  $\pi_*(\alpha_1)$ , Assim temos que  $\beta$  é única. E por 4.30  $\beta$  é ergódica. ■

Até aqui podemos resumir todo no seguinte

**Teorema 4.37** *Toda medida  $\nu$ -invariante ergódica num recobrimento  $R = G/M'AN$  do flag maximal  $\mathbb{B} = G/MAN$  tem como suporte um i.c.s e, reciprocamente, todo i.c.s é o suporte de uma única medida  $\nu$ -invariante ergódica.*



# Capítulo 5

## Tipo Parabólico

Com ajuda dos conjuntos de controles associados ao semigrupo  $S$ , gerado pelo suporte da  $\nu$ , daremos uma primeira caracterização de  $M_\nu$  (ver Proposição 5.15). A partir de agora consideraremos a medida  $\nu$  absolutamente contínua em relação à medida de Haar.

Depois será demonstrado que a partir do tipo parabólico do semigrupo é possível determinar exatamente  $M_\nu$ . De fato na Proposição 5.25 demonstramos que  $M_\nu = M \cap P_\Theta^0$ . Antes das caracterizações serão apresentados diversos resultados estudando as medidas ergódicas e as relações entre medidas invariantes nos diferentes espaços de Poisson e os operadores que elas definem (ver Definição 4.16).

### 5.1 Mais sobre medidas invariantes e ergódicas

Notar que do visto na subseção 4.1 podemos afirmar que as medidas invariantes num recobrimento  $R$  não necessariamente ergódicas tem como suporte uma união de i.c.s. de  $R$ .

#### 5.1.1 Medidas ergódicas em $G/M_0AN$

Para o caso  $R = G/M_0AN = G/P_0$  a ação de  $M/M_0$  sobre os conjuntos de controle invariante se reproduz nas medidas ergódicas,

**Lema 5.1** *Seja  $\mu$  uma medida invariante (ergódica) em  $G/P_0$  e  $m \in M/M_0$ . Então a nova medida definida por*

$$\mu m(A) := \mu(Am^{-1})$$

é também invariante (ergódica).

**Demonstração.** Se  $\mu$  é invariante o fato da ação de  $m$  comuta com a ação de  $G$  garante que  $\nu * \mu m = (\nu * \mu)m$ ,

$$\begin{aligned} \nu * \mu m (f) &= \int_G \left( \int_R f(gx) d\mu m(x) \right) d\nu(g) \\ &= \int_G \left( \int_R f(g(xm)) d\mu(x) \right) d\nu(g) \end{aligned}$$

Como  $m$  comuta com a ação de  $g$ , se  $f_m(\cdot) := f(\cdot m)$  temos que

$$\begin{aligned} &= \int_G \left( \int_R f_m(gx) d\mu(x) \right) d\nu(g) \\ &= \int_R f_m(x) d(\nu * \mu)(x) = \int_R f(xm) d(\nu * \mu)(x) \\ &= \int_R f(x) d((\nu * \mu)m)(x) = (\nu * \mu)m (f) \end{aligned}$$

Logo, usando o fato de  $\mu$  ser invariante

$$\nu * (\mu m) = (\nu * \mu)m = \mu m$$

e assim  $\mu m$  também é invariante.

Agora, se  $\mu$  também é ergódica o suporte de  $\mu$  é um i.c.s  $C$ , e o suporte de  $\mu m$  será o  $Cm$  ( $\cdot m$  é difeomorfismo) que também é um i.c.s, assim,  $\mu m$  é invariante e tem suporte um i.c.s, portanto é ergódica. ■

Finalmente notemos que se  $\mu$  é uma medida ergódica em  $G/P_0$  com suporte  $C$  e  $m \in M(C)$  então  $\mu m = \mu$  pois são duas medidas ergódicas com o mesmo suporte. Assim, analogamente ao feito com as i.c.s., o conjunto  $M(C) \setminus (M/M_0)$  também parametriza as medidas ergódicas em  $G/P_0$ .

### 5.1.2 Simetrias das medidas ergódicas nos recobrimentos

Existe uma grande simetria dentro das medidas ergódicas e entre elas. No sentido que explicitaremos na sequência.

**Definição 5.2** *Seja  $\pi' : R' \rightarrow \mathbb{B}$ . Chamaremos aberto distinguido de  $\mathbb{B}$  a todo conjunto conexo  $W$  tal que  $\pi'^{-1}(W)$  é a união disjunta  $\cup V_n$  e  $\pi'|_{V_n} : V_n \rightarrow W$  é um homeomorfismo. Chamaremos aberto distinguido de um recobrimento  $R'$  a todo conjunto aberto conexo  $V$  tal que sua projeção via  $\pi' : R' \rightarrow \mathbb{B}$  seja um aberto distinguido de  $\mathbb{B}$ . E chamaremos conjuntos associados a todos os  $V_i$ .*

Seja  $V_0$  um aberto conexo dentro de um conjunto de controle  $C_0 \subset R'$  tal que sua projeção  $W$  pelo recobrimento  $\pi' : R' \rightarrow \mathbb{B}$  seja um aberto de distinguido de  $\mathbb{B}$  ou seja,  $\pi'^{-1}(W) = \cup V_n$  disjuntos e  $\pi'|_{V_n} : V_n \rightarrow W$  é um homeomorfismo. Se tomamos dois  $V_0$  e  $V_1$  contidos ambos no  $C_0$ , e consideramos a medida ergódica  $\mu_0$  com suporte  $C_0$ , então  $\mu_0(V_0) = \mu_0(V_1)$ . Assim teremos uma *simetria* da própria medida. Mas geralmente, se  $V_2$  não esta contido em  $C_0$ , então está contido em outro i.c.s  $C_2$  associado com outra medida ergódica  $\mu_2$ . Neste caso  $\mu_0(V_0) = \mu_2(V_2)$ . Primeiro demonstraremos isso para o recobrimento maximal.

**Lema 5.3** *Seja  $V_0$  aberto distinguido de  $G/M'AN$ ,  $C_0$  um i.c.s. e  $V_0 \subset C_0$ . Seja  $V_2$  associado com  $V_0$  e  $C_2$  o i.c.s. que contem  $V_2$ , (possivelmente o proprio  $C_0$ ). Seja  $\mu_2$  a medida ergódica associada com  $C_2$ . Então  $\mu_0(V_0) = \mu_2(V_2)$ .*

**Demonstração.** Demonstração para  $G/M_0AN$ : Sabemos que existe  $m \in M/M_0$  tal que  $V_0m = V_2$ . Isso é fácil de ver lembrando que se  $y \in V_0$ ,  $\{xm : m \in M/M_0\}$  percorre toda a fibra, portanto existe  $xm \in V_2$ . Por conexidade e continuidade da ação de  $m$  à direita e utilizando argumentos de levantamento podemos concluir que esse  $m$  é o mesmo para todos os  $y$  em  $V_0$ .  $V_2$  está contido no i.c.s.  $C_2 = C_0m$ , e a medida ergódica associada é  $\mu_2 = \mu_0m$ . Simplesmente notemos que

$$\mu_2(V_2) = \mu_0(V_2m^{-1}) = \mu_0(V_0mm^{-1}) = \mu_0(V_0).$$

■

No caso mais geral num  $G/M'AN$  toda a dificuldade reside em que não existe necessariamente uma ação à direita de  $M/M_0$ . Demonstramos um caso particular um pouco mais simples para ilustrar.

**Lema 5.4** *Seja  $V_0$  e  $V_2$  aberto distinguido associados de  $G/M'AN$ ,  $C_0$  um i.c.s. e  $V_0, V_2 \subset C_0$ . Seja  $\mu_0$  a medida ergódica associada com  $C_0$ . Então,  $\mu_0(V_0) = \mu_0(V_2)$ .*

**Demonstração.** Sejam agora  $V_0$  e  $V_2$  abertos distinguidos de  $G/M'AN$ . A medida  $\mu_0$  é projeção de alguma medida  $\omega_0$  ergódica em  $G/M_0AN$ . Por simplicidade assumamos que  $x_0 = M_0AN$  está contido no  $D_0 = \text{sup}(\omega_0)$ . Seja  $y_0 \in M_0AN$  a projeção  $\pi(x_0)$ . A imagem inversa de  $V_0$  é

$$\pi^{-1}(V_0) = \bigcup_{n \in M'/M_0} U^0 n$$

e eles também são abertos distinguidos associados. Onde  $U^0$  que contém o  $x_0$ . Seja  $y_1 \in G/M'AN$ . Para calcular a medida de  $V_0$  interessam os  $U^0 n \subset D_0$ . Suponhamos por simplicidade que são os  $k$  primeiros. Assim

$$\begin{aligned} \mu_0(V_0) &= \omega_0(\pi^{-1}(V_0)) = \omega_0 \left( \bigcup_{n \in M'/M_0} U^0 n \right) \\ &= \bigcup_{n \in M'/M_0} \omega_0(U^0 n) = \bigcup_{n \in M'/M_0 \cap M(D_0)} \omega_0(U^0 n) \\ &= \bigcup_{l=1}^k \omega_0(U^0 n_l) = k\omega_0(U^0) \end{aligned}$$

esta última igualdade pois os  $U^0 n$  são abertos distinguidos e posso aplicar o lema 5.3 anterior.

E seja  $x_2$  um dos elementos que verifica  $\pi(x_2) = y_2$  e  $x_2 = x_0 m$  para algum  $m \in M(D_0)$ . Notemos que então

$$\pi^{-1}(V_2) = \bigcup_{n \in M'/M_0} U^0 mn$$

Para isso basta notar que se  $n \in M'/M_0$  então, como é óbvio

$$\pi(gM'ANn) = \pi(g\bar{n}M'AN) = \pi(gM'AN).$$

Novamente o cálculo da medida  $\mu_0(V_2)$  se reduz a

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \in M'/M_0} \omega_0(U^0 n) &= \bigcup_{mn \in M'/M_0 \cap M(D_0)} \omega_0(U^0 mn) \\ &= q\omega_0(U^0) \end{aligned}$$

O ponto é se  $q$  igual que  $k$ . Ou seja a quantidade de elementos de  $M'/M_0 \cap M(D_0)$  é a mesma que  $(M'/M_0 \cap M(D_0))m^{-1}$ , coisa que é claramente verdadeira. ■

A demonstração para medidas diferentes num recobrimento qualquer é análoga.

### 5.1.3 Ergodicidade da medida de Poisson $\mu_{\mathbb{P}}$

**Notação 5.5** O recobrimento  $\mathbb{P}_\nu$  que é o espaço de Poisson para a medida  $\nu$  será denotado apenas por  $\mathbb{P}$  e a medida de Poisson será denotada por  $\mu_{\mathbb{P}}$ .

**Proposição 5.6** A medida de Poisson  $\mu_{\mathbb{P}}$  é ergódica.

**Demonstração.**  $\mu_{\mathbb{P}}$  é invariante pois como foi visto é suficiente que  $i(\mu_{\mathbb{P}})$  projete dentro do conjunto das funções  $H_\nu(G)$  para que seja invariante. Seu suporte é da forma  $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_s$  com  $C_i$  conjuntos de controle invariantes e, portanto,  $\mu_{\mathbb{P}} = p_1\mu_1 + p_2\mu_2 + \dots + p_s\mu_s$  onde  $\text{sup}(\mu_i) = C_i$  e  $\sum p_i = 1$ . Pelo lema 5.4. de Furstenberg [9] existe uma sequência  $g_n \in S$  tal que  $g_n\mu_{\mathbb{P}}$  converge a uma medida pontual  $\delta_x$ . Mas o suporte de  $g_n\mu_i$  é  $g_nC_i \subset C_i$ . Portanto o suporte de  $g_n\mu_{\mathbb{P}}$  tem sempre uma parte em  $C_i$ . Mas isso implica que  $x \in C_i$  para  $i = 1, 2, \dots, s$ , e isso é possível só no caso  $s = 1$ . Assim  $\mu_{\mathbb{P}}$  tem como suporte um único i.c.s, e assim  $\mu_{\mathbb{P}}$  é ergódica. ■

## 5.2 Medidas invariantes e funções harmônicas

Agora vamos enunciar alguns resultados úteis envolvendo funções harmônicas.

**Proposição 5.7** Seja  $\hat{f}$  uma função contínua e  $\mu$  uma medida, ambos num recobrimento  $R$ , e seja  $\pi : R \rightarrow R'$  em algum outro recobrimento, então se verificam os fatos

1.  $i(\mu) \hat{f}^h = (i(\mu) \hat{f})^h$ , onde  $\hat{f}^h(\cdot) = \hat{f}(h\cdot)$
2.  $i(\mu)(\hat{f} \circ \pi) = i(\pi_*\mu)\hat{f}$
3. Se  $\mu$  é invariante então  $\pi_*\mu$  é invariante. Ou seja: medidas invariantes projetam em medidas invariantes.

4. Se  $\mu$  é ergódica  $\pi_*\mu$  é ergódica. Ou seja: Ergódicas projetam em ergódicas
5. Se  $\omega$  é uma medida ergódica [respec. invariante] em  $R'$  sempre é a projeção de alguma  $\eta$  ergódica [respec. invariante] em  $R$ .

**Demonstração.**

1.

$$\begin{aligned} [i(\mu)\hat{f}^h](g) &= \int_R \hat{f}^h(gx) d\mu(x) = \int_R \hat{f}(hgx) d\mu(x) \\ &= [i(\mu)\hat{f}](hg) = [i(\mu)\hat{f}]^h(g) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} [i(\pi_*\mu)\hat{f}](g) &= \int_{R'} \hat{f}(gx) d[\pi_*\mu](x) = \int_R \hat{f}(g\pi(x)) d\mu(x) \\ &= \int_R \hat{f}(\pi(gx)) d\mu(x) = [i(\mu)(\hat{f} \circ \pi)](g) \end{aligned}$$

3. Seja  $\hat{f}$  contínua em  $R'$ . Pela proposição 4.18, para ver se  $\pi_*\mu$  é invariante, é suficiente mostrar que  $i(\pi_*\mu)\hat{f}$  é harmônica. Mas pelo item anterior  $i(\pi_*\mu)\hat{f} = i(\mu)\hat{f} \circ \pi$ , é  $\hat{f} \circ \pi$  é contínua e  $i(\mu)$  transforma contínuas em harmônicas.
4. Conjuntos de controle invariante projetam em conjuntos de controle invariante. Como  $\text{sup}(\pi_*\mu) = \pi(\text{sup} \mu)$  então a  $\pi_*\mu$  será uma medida invariante com suporte igual a um i.c.s, logo é ergódica.
5. O suporte de  $\eta$ , ergódica, será um i.c.s.  $C'$ . Mas sabemos San Martin e Tonelli [24] que existe um i.c.s.  $C'$  em  $R$  que projete nem  $C$ . A medida ergódica associada com  $C$  é a medida procurada. A prova para medidas invariantes segue do fato que  $\pi_*$  é linear em  $\mathcal{M}(R)$ .

■

### 5.2.1 Bijeção dos operadores $i(\mu)$

Sabemos por Furstenberg que no recobrimento  $\mathbb{P}$  temos a medida  $\mu_{\mathbb{P}}$  que tem a propriedade de que  $i(\mu_{\mathbb{P}})$  é bijetor, no entanto podemos afirmar que em alguns casos  $\mu_{\mathbb{P}}$  não é a única medida em  $\mathbb{P}$  com essa propriedade. Por exemplo, no caso especial em que  $\mathbb{P}$  é  $G/M'AN$  e  $M'$  é normal em  $M$ , então, como já vimos temos definida uma ação à direita de  $M/M'$  em  $G/M'AN$ . Dependendo do grupo  $G$  isso pode acontecer sempre, por exemplo, para  $G = \text{Sl}(n)$ ,  $M$  é abeliano. Nestes recobrimentos a ação de um  $m \in M/M'$  garante que as imagens de  $i(\mu_{\mathbb{P}})$  e de  $i(\mu_{\mathbb{P}}m)$  sejam iguais. De fato

$$\begin{aligned} [i(\mu_{\mathbb{P}}m)\hat{f}](g) &= \int_{G/M'AN} \hat{f}(gx) d[\mu_{\mathbb{P}}m](x) \\ \int_{G/M'AN} \hat{f}_m(gx) d\mu_{\mathbb{P}}(x) &= [i(\mu_{\mathbb{P}})\hat{f}_m](g) \end{aligned}$$

assim  $i(\mu_{\mathbb{P}})\hat{f}_m = i(\mu_{\mathbb{P}}m)\hat{f}$  como a aplicação  $\hat{f} \mapsto \hat{f}_m$  é bijetora dentro das funções contínuas então  $\text{Im}[i(\mu_{\mathbb{P}})] = \text{Im}[i(\mu_{\mathbb{P}}m)]$ . Claramente  $\mu_{\mathbb{P}}m$  também é ergódica, pois  $m$  comuta com a ação de  $G$ . Se  $\mu_{\mathbb{P}}$  é suficientemente “pequena” que algum  $m$  verifique que  $\mu_{\mathbb{P}}m \neq \mu_{\mathbb{P}}$  então teríamos que duas medidas ergódicas (ou mais) verificam que o operador que elas definem é bijetor.

Até aqui descrevemos o panorama para as medidas ergódicas no espaço de Poisson. Veremos agora que acontece nos outros recobrimentos.

**Lema 5.8** *Se  $\pi : R \rightarrow R'$  e  $\mu$  é uma medida em  $R$  então  $\text{Im}(i(\pi_*\mu)) \subset \text{Im}(i(\mu))$ .*

**Demonstração.** Seja  $f \in \text{Im}(i(\pi_*\mu))$ , então  $f = i(\pi_*\mu)\hat{f}$  para alguma  $\hat{f}$  contínua. Mas  $f = i(\pi_*\mu)\hat{f} = i(\mu)(\pi \circ \hat{f})$ , e assim,  $f \in \text{Im}[i(\mu)]$ . ■

**Corolário 5.9** *Seja  $\mu_{\mathbb{P}}$  a medida de Poisson, e sejam  $\mu$  e  $\omega$  medidas ergódicas tais que  $\pi_*\mu = \mu_{\mathbb{P}}$  e  $\pi_*\mu_{\mathbb{P}} = \omega$ . Então  $i(\mu)$  é sobrejetora e  $i(\omega)$  é injetora.*

Coloquialmente falando podemos pensar que quando subimos preservamos a sobrejetividade e quando descemos preservamos a injetividade.

### 5.3 Caracterização de $M_\nu$

Nesta seção primeiro provaremos a validade da fórmula (5.4) que servirá para demonstrar a proposição 5.13 que por último nos permitirá caracterizar  $M_\nu/M_0$  como  $M(C_0)$ .

**Hipótese 5.10** *A partir de agora vamos considerar a medida  $\nu$  absolutamente contínua em relação à medida de Haar.*

#### 5.3.1 Limites de funções harmônicas

Agora provaremos a existência de limites para determinadas sequências em  $\mathbb{R}$  cujos valores são provenientes de funções harmônicas em  $G$ . Estes limites serão úteis para estabelecer a não sobrejetividade dos operadores  $i(\mu)$  para medidas  $\mu$  invariantes em  $G/M_0AN$ .

**Notação 5.11** *A projeção canônica de  $G/M_0AN$  sobre  $G/MAN$  será denotada por  $\pi$ .*

Podemos supor sem perda de generalidade que a origem  $y_0$  de  $\mathbb{B}$  está em  $\text{int}(C_{\mathbb{B}})$  pois para qualquer semigrupo  $S$ , tal que  $\text{int}S \neq \emptyset$ , existe sempre um subgrupo parabólico minimal  $P'$  tal que  $P' \cap \text{int}S \neq \emptyset$ , e assim o flag maximal pode ser pensado como  $G/P'$  (mudando a base da decomposição de Iwasawa, ver San Martin [23], Teorema 3.4). Fixemos então  $\mathbb{B} = G/P = G/MAN$  com  $P$  adequado para que  $y_0 \in \text{int}(C_{\mathbb{B}})$ . Seja  $x_0 = M_0AN$  e seja  $C_0$  o i.c.s. em  $G/M_0AN$ . Dado que  $\pi(x_0) = y_0$ , e  $\pi$  é aberta se verifica que  $x_0 \in \text{int}(C_0)$ .

Seja  $\mu_0$  uma medida ergódica com suporte  $C_0$  no recobrimento maximal  $G/M_0AN$ . Sabemos que existe  $g_0 \in \text{int}(S)$  tal que  $g_0^n y \rightarrow y_0$  para todo  $y$  em um conjunto aberto e denso  $O \subset \mathbb{B}$  (ver San Martin [23]). O fato de  $\nu$  ser absolutamente contínua garante que toda medida invariante nos recobrimentos também seja absolutamente contínua, portanto se  $\mu_{\mathbb{B}}$  é a medida invariante em  $\mathbb{B}$  então  $\mu_{\mathbb{B}}(\mathbb{B} \setminus O) = 0$ . Isto implica que  $g_0^n \mu_{\mathbb{B}} \rightarrow \delta_{y_0}$  pois o semigrupo tem interior não vazio. Dado que  $\mu_{\mathbb{B}}$  é a projeção de  $\mu_0$  (ver lema 5.7), o limite de  $g_0^n \mu_0$  converge à uma medida concentrada sobre a fibra  $\pi^{-1}(y_0)$ . Mas, como  $\mu_0$  é invariante, seu suporte  $C_0$  é invariante pela ação de  $g_0^n$ , portanto o limite de  $g_0^n \mu_0$  deve estar concentrado apenas sobre os elementos contidos na fibra e em  $C_0$ .

Por tudo isso, se  $M(C_0) = \{1, m_1, m_2, \dots, m_{k-1}\}$  então

$$\lim g_0^n \mu_0 = p_1 \delta_{x_0} + p_2 \delta_{x_0 m_1} + \cdots + p_k \delta_{x_0 m_{k-1}}$$

com  $\sum p_i = 1$ .

Sabemos que  $\mu_0$  é invariante pela ação de  $m \in M(C_0)$  definida em 5.1. Portanto

$$\lim g_0^n \mu_0 = (\lim g_0^n \mu_0) m$$

Desenvolvendo o segundo termo

$$\begin{aligned} (\lim g_0^n \mu_0) m &= (p_1 \delta_{x_0} + p_2 \delta_{x_0 m_1} + \cdots + p_k \delta_{x_0 m_{k-1}}) m \\ &= (p_1 \delta_{x_0} m + p_2 \delta_{x_0 m_1} m + \cdots + p_k \delta_{x_0 m_{k-1}} m) \end{aligned}$$

Notemos que  $\delta_{x_0 m_i} m = \delta_{x_0 m_i m}$  e que, como  $M(C_0)$  é grupo  $m_i m = m_j \in M(C_0)$ . Portanto a ação de  $m$  resulta ser uma permutação entre os elementos de  $\{\delta_{x_0}, \delta_{x_0 m_1}, \dots, \delta_{x_0 m_{k-1}}\}$ . Então

$$\begin{aligned} \lim g_0^n \mu_0 &= (\lim g_0^n \mu_0) m \\ p_1 \delta_{x_0} + p_2 \delta_{x_0 m_1} + \cdots + p_k \delta_{x_0 m_{k-1}} &= p_1 \delta_{x_0 m} + p_2 \delta_{x_0 m_1 m} + \cdots + p_k \delta_{x_0 m_{k-1} m} \end{aligned}$$

Tomando  $m \neq 1$  a igualdade anterior exige que  $p_i = p_j$  para todo  $i$  e  $j$ . Mas como é medida de probabilidade  $p_i = \frac{1}{k}$ . Assim  $\lim g_0^n \mu_0$  é uma medida homogênea, ou seja

$$\lim g_0^n \mu_0 = \frac{1}{k} (\delta_{x_0} + \delta_{x_0 m_1} + \cdots + \delta_{x_0 m_{k-1}}) \quad (5.1)$$

Para cada  $\hat{f}$  contínua em  $G/M_0 AN$  já definimos a função harmônica  $f = i(\mu_0) \hat{f}$  pois

$$f(g) = \int \hat{f}(gx) d\mu_0(x).$$

Então utilizando a Equação (5.1) temos que

$$\begin{aligned} \lim f(g_0^n) &= \lim \int \hat{f}(g_0^n x) d\mu_0(x) \\ &= \lim \int \hat{f}(x) dg_0^n \mu_0(x) \\ &= \int \hat{f}(x) d[\lim g_0^n \mu_0](x) \\ &= \int \hat{f}(x) d\left[\frac{1}{k} (\delta_{x_0} + \cdots + \delta_{x_0 m_{k-1}})\right](x) \\ &= \frac{1}{k} (\hat{f}(x_0) + \hat{f}(x_0 m_1) + \cdots + \hat{f}(x_0 m_{k-1})). \end{aligned}$$

Assim temos a fórmula

$$\lim f(g_0^n) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \hat{f}^{\bar{m}}(x_0 m_j) \quad (5.2)$$

com  $f = i(\mu_0)\hat{f}$

Seja  $\bar{m} \in M$  um representante de  $m \in M/M_0$ . Agora notemos que  $f^g = (i(\mu_0)\hat{f})^g$  para qualquer  $g \in M$  (ver 5.7). Juntando isso com a fórmula (5.2) temos:

$$\lim f(\bar{m}g_0^n) = \lim f^{\bar{m}}(g_0^n) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \hat{f}^{\bar{m}}(x_0 m_j) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \hat{f}(\bar{m}x_0 m_j)$$

Mas  $\bar{m}x_0 = \bar{m}M_0AN = M_0ANm = x_0m$ . Então podemos escrever

$$\lim f(\bar{m}g_0^n) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \hat{f}(x_0 m m_j). \quad (5.3)$$

Note que esta fórmula é independente do  $\bar{m}$  representante de  $m$ .

Estamos interessados numa equação mais geral que (5.3) considerando  $f$  definida por uma medida apenas invariante e não ergódica. Por exemplo, seja

$$Q = M(C_0) \setminus (M/M_0) = \{q_0 = 1, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}\}$$

$q_i \in Q$ . Este elemento representa a medida ergódica  $\mu_i = \mu_0 q_i$ . Seja  $n_i \in M/M_0$  um representante de  $q_i$ . Temos que

$$\lim g_0^{\tilde{n}} \mu_i = \lim g_0^{\tilde{n}}(\mu_0 n) = (\lim g_0^{\tilde{n}} \mu_0) n$$

De forma análoga demonstramos que esse limite é uma medida homogênea com a diferença que agora está concentrada sobre os pontos da fibra  $\pi^{-1}(y_0)$  que estão contidos no suporte de  $\mu_i$ , i.e.,

$$\lim g_0^{\tilde{n}} \mu_i = \frac{1}{k} (\delta_{x_0 n} + \delta_{x_0 m_1 n} + \dots + \delta_{x_0 m_{k-1} n}).$$

É fácil ver que a fórmula é independente do representante  $n$  de  $q_i$ . Assim temos:

$$\lim g_0^{\tilde{n}} \mu_i = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \delta_{x_0 m_j n_i}.$$

De forma análoga definimos  $f_i = i(\mu_i)\hat{f}$  e provamos que, se  $\bar{m} \in M$  é um representante de  $m \in M/M_0$ , então

$$\lim f_i(\bar{m}g_0^n) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \hat{f}(x_0mm_jn_i).$$

Vamos generalizar mais um pouco. Se  $\omega$  uma medida invariante qualquer então é da forma

$$\omega = \sum_{i=0}^{n-1} p_{i+1}\mu_0q_i$$

com  $\sum p_i = 1$  e  $q_i \in Q$ . Por último vamos enunciar a validade da fórmula que estamos procurando, a demonstração é análoga ao feito anteriormente.

**Proposição 5.12** *Definimos  $f_\omega = i(\omega)\hat{f}$ . Se  $\bar{m} \in M$  é um representante de  $m \in M/M_0$  então*

$$\lim f_\omega(\bar{m}g_0^n) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{n-1} p_{i+1} \sum_{j=0}^{k-1} \hat{f}(x_0mm_jn_i). \quad (5.4)$$

onde  $n_i$  é um representante da classe lateral  $q_i = M(C_0)n_i$ .

### 5.3.2 Uma medida que define um operador que não é sobrejetor

Para a caracterização de  $M_\nu$  necessitaremos provar que para uma determinada medida invariante  $\eta$  em  $G/M_0AN$  o operador  $i(\eta)$  que define  $\eta$  não é sobrejetor. Nesta seção vamos provar um resultado que aponta nessa direção

Seja  $\tilde{M}$  um subgrupo de  $M$  tal que  $M_0 \subset \tilde{M} \subset M$ . Então  $\tilde{M}/M_0$  é um subgrupo de  $M/M_0$ . Se  $M(C_0) \subset \tilde{M}/M_0$  então  $M(C_0)\backslash(\tilde{M}/M_0)$  é um subconjunto de  $Q = M(C_0)\backslash(M/M_0)$  (o conjunto de classes laterais à direita de  $M(C_0)$  em  $M/M_0$ ). Vamos denotar  $\tilde{Q} = M(C_0)\backslash(\tilde{M}/M_0)$ . Se  $Q = \{1, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}\}$  sem perda de generalidade podemos supor que  $\tilde{Q} = \{1, q_1, \dots, q_{l-1}\}$ .

**Proposição 5.13** *Seja  $\tilde{M}$  como acima, com  $M(C_0) \subset \tilde{M}/M_0$  e*

$$\tilde{Q} = \{1, q_1, \dots, q_{l-1}\}$$

*também como acima. Seja  $\mu_0$  uma medida ergódica em  $G/M_0AN$  e*

$$\eta = \frac{1}{l}(\mu_0 q_0 + \dots + \mu_0 q_{l-1})$$

*Se  $M(C_0) \neq \tilde{M}/M_0$ , i.e.,  $l \geq 2$ , então  $i(\eta)$  não é sobrejetora.*

**Demonstração.** Se  $l \geq 2$  então existe uma classe lateral  $q_1$  diferente de  $1_0 = M(C_0)$ , ou seja, existe  $n_1 \in \tilde{M}/M_0$  tal que  $M(C_0)n_1 \neq M(C_0)$ . Note também que  $n_1M(C_0) \neq M(C_0)$ . Seja  $\bar{n}_1 \in M$  um representante de  $n_1$ . A idéia é provar que

1. Para qualquer  $f \in \text{Im}(i(\eta))$  os limites  $\lim f(g_0^n)$  e  $\lim f(\bar{n}_1 g_0^n)$  são iguais.
2. Mas em general existem funções  $\nu$ -harmônicas em  $G$  tais que esses limites acima são diferentes. Estas funções serão tomadas em  $\text{Im}(i(\mu_0))$ . Isso prova que  $\text{Im}(i(\eta))$  não são todas as funções  $\nu$ -harmônicas .

Seja  $\hat{f}$  contínua em  $G/M_0AN$  e defino  $f_\eta = i(\eta)\hat{f}$ , usando a fórmula (5.4) temos que

$$\lim f_\eta(g_0^{\bar{n}}) = \frac{1}{kl} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \hat{f}(x_0 m_j n_i)$$

e que

$$\lim f_\eta(\bar{n}_1 g_0^{\bar{n}}) = \frac{1}{kl} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \hat{f}(x_0 n_1 m_j n_i).$$

Note que  $\{m_j n_i : 0 \leq j \leq k-1, 0 \leq i \leq l-1\}$  é exatamente  $\tilde{M}/M_0$ . Mas, dado que  $n_1 \in \tilde{M}/M_0$ ,  $\{n_1 m_j n_i : 0 \leq j \leq k-1, 0 \leq i \leq l-1\}$  é uma permutação do mesmo conjunto. Portanto

$$\frac{1}{kl} \sum \sum \hat{f}(x_0 m_j n_i) = \frac{1}{kl} \sum \sum \hat{f}(x_0 n_1 m_j n_i)$$

e assim os limites são iguais.

Por outro lado, se  $f = i(\mu_0) \hat{f}$  então

$$\lim f(g_0^{\bar{n}}) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \hat{f}(x_0 m_j)$$

e

$$\lim f(\bar{n}_1 g_0^{\bar{n}}) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \hat{f}(x_0 n_1 m_j).$$

Note que

$$\begin{aligned} \{m_j : 0 \leq j \leq k-1\} &= M(C_0) \\ \{n_1 m_j : 0 \leq j \leq k-1\} &= n_1 M(C_0) \end{aligned}$$

e esses conjuntos são disjuntos porque são em diferentes classes laterais. Portanto os conjuntos  $\{x_0 m_j\}_{0 \leq j \leq k-1}$  e  $\{x_0 n_1 m_j\}_{0 \leq j \leq k-1}$  em  $G/M_0 AN$  são disjuntos. Mas é muito fácil achar uma função contínua que assuma valores diferentes em conjuntos finitos de pontos disjuntos. Por exemplo, sejam  $z_1$  e  $z_2$  números diferentes em  $\mathbb{R}$ , é possível achar uma  $\hat{f}$  contínua tal que verifique

$$\begin{aligned} \hat{f}(x_0 m_j) &= \frac{z_1}{k} \\ \hat{f}(x_0 n_1 m_j) &= \frac{z_2}{k} \\ \text{para } 0 \leq j \leq k-1 \end{aligned}$$

e assim

$$\lim f(g_0^n) = z_1 \neq z_2 = \lim f(n_1 g_0^n).$$

■

### 5.3.3 O subgrupo $M_\nu$

Nesta seção vamos caracterizar  $M_\nu$  como a imagem inversa de  $M(C_0)$  pela projeção canônica  $M \rightarrow M/M_0$ , onde  $C_0$  é o  $S$ -i.c.s em  $G/M_0AN$  tal que sua projeção no espaço de Poisson  $\mathbb{P}_\nu$  coincide com o suporte da medida de Poisson. Veremos na sequência que  $M(C_0)$  pode ser conhecido sabendo apenas o tipo parabólico do semigrupo  $S$ .

**Notação 5.14** Nesta seção  $\pi : G/M_0AN \rightarrow \mathbb{P}$ ,  $\pi_{\mathbb{P}} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{B}$  e  $\pi_B : G/M_0AN \rightarrow \mathbb{B}$

**Proposição 5.15** Seja  $C_0$  o i.c.s em  $G/M_0AN$  suporte de  $\mu_0$  tal que  $\pi_*\mu_0 = \mu_{\mathbb{P}}$ . Seja  $M_1(C_0)$  a imagem inversa  $M(C_0)$  pela projeção canônica  $M \rightarrow M/M_0$ . Então  $M_\nu = M_1(C_0)$ .

**Demonstração.** Primeiro vamos demonstrar que  $M_1(C_0) \subset M_\nu$ , ou equivalentemente,  $M(C_0) \subset M_\nu/M_0$ . Como sempre consideremos  $x_0 = M_0AN$  no interior de  $C_0$ . Seja  $C_{\mathbb{P}} = \text{sup}(\mu_{\mathbb{P}})$ . Portanto  $\pi(C_0) = C_{\mathbb{P}}$ . Pelo absurdo suponhamos que existe  $n \notin M_\nu/M_0$  e  $n \in M(C_0)$ . Claramente  $x_0$  e  $x_0n$  estão em  $\text{int}C_0$ , então  $\pi(x_0)$  e  $\pi(x_0n)$  estão em  $C_{\mathbb{P}}$ . Mas  $\pi(x_0) \neq \pi(x_0n)$  pois  $n \notin M_\nu/M_0$ . Com detalhes: Seja  $y_0 = \pi(x_0) = \pi(M_0AN) = M_\nu AN$ . E seja  $\bar{n}$  representante de  $n$ . Em particular  $\bar{n} \notin M_\nu$ .

$$\begin{aligned} \pi(x_0n) &= \pi(\bar{n}x_0) = \bar{n}\pi(x_0) = \bar{n}y_0 \\ &= \bar{n}M_\nu AN \neq M_\nu AN = \pi(x_0). \end{aligned}$$

Chamemos  $\pi(x_0n) = y_1$ . Notemos que  $y_0$  e  $y_1$  estão no  $\text{int}C_{\mathbb{P}}$  e na mesma fibra considerando a projeção  $\pi_{\mathbb{B}}$ . Veremos que isso é impossível. Pelo lema 5.4. de Furstenberg [9] existe uma sequência  $g_n \in S$  tal que  $g_n\mu_{\mathbb{P}}$  converge a uma medida pontual  $\delta_y$ . Basicamente isso implica que para qualquer entorno de  $V$  de  $y$  existem um  $n$  tal que  $g_n\text{int}C_0 \subset V$ . Em particular tomemos  $V$  suficientemente pequeno como para que não contenha dois elementos na mesma fibra considerando  $\pi_{\mathbb{B}}$ , (isso é possível porque é um recobrimento). Então  $g_ny_0$  e  $g_ny_1$  estão em  $V$ . Mas  $\pi_{\mathbb{B}}(y_0) = \pi_{\mathbb{B}}(y_1)$ , portanto  $\pi_{\mathbb{B}}(g_ny_0) = \pi_{\mathbb{B}}(g_ny_1)$ , então  $g_ny_0 = g_ny_1$ , e por último  $y_0 = y_1$ , contradizendo o fato de que são diferentes. E assim abordamos a um absurdo. portanto  $M_1(C_0) \subset M_\nu$ .

Agora vamos demonstrar a outra inclusão. Para isso vamos usar a Proposição 5.13. Sabemos que  $M_1(C_0) \subset M_\nu$ , o equivalentemente,  $M(C_0) = M_1(S)/M_0 \subset$

$M_\nu/M_0$ . Com a mesma notação que na Proposição 5.13 temos  $Q = \{1, q_1, q_2, \dots, q_{l-1}\}$  e

$$M(C_0) \setminus M_\nu/M_0 = \{1, q_1, \dots, q_{l-1}\}.$$

Também definimos a medida

$$\eta = \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} \mu q_k.$$

Primeiro notemos que  $\pi_*\eta = \pi_*\mu = \mu_{\mathbb{P}}$ . De fato,  $(\pi_*\eta) = \frac{1}{l} \sum (\pi_*\mu q_k)$ . Mas como  $q_k \in Q$  a única medida ergódica onde pode projetar é  $\mu_P$ . If  $f \in \text{Im}(i(\mu_{\mathbb{P}}))$  então temos que  $f = i(\mu_{\mathbb{P}})\hat{f} = i(\pi_*\eta)\hat{f} = i(\eta)\hat{f} \circ \pi$ , portanto  $f \in \text{Im}(i(\eta))$ . Mas  $i(\mu_{\mathbb{P}})$  é sobrejetora, portanto,  $i(\eta)$  é também sobrejetora. Pela Proposição 5.13, isto implica que  $M(C_0) \neq M_\nu/M_0$  é falso. Assim  $M_1(C_0) = M_\nu$ . ■

Agora podemos demonstrar um pequeno corolário que conta a quantidade de i.c.s.'s nos recobrimentos.

**Notação 5.16** Denotemos  $\#ics(R)$  a quantidade de i.cs no recobrimento  $R$ . Chamemos  $\#fibra\mathbb{P}$  a quantidade de elementos da fibra do recobrimento de  $\mathbb{P}$  sobre  $\mathbb{B}$ .

**Corolário 5.17**  $\#ics(G/M_0AN) = \#fibra\mathbb{P} = \#ics(\mathbb{P})$ .

**Demonstração.** Na proposição 5.15, demonstramos que  $M_\nu/M_0 = M(C_0)$ . Então note que

$$\#fibra\mathbb{P} = \left| \frac{M}{M_\nu} \right| = \left| \frac{M/M_0}{M_\nu/M_0} \right| = \left| \frac{M/M_0}{M(C_0)} \right|$$

e pela proposição 3.4

$$\left| \frac{M/M_0}{M(C_0)} \right| = \#ics(G/M_0AN).$$

Por outro lado, dado que  $G/M_0AN$  projeta em  $\mathbb{P}$ ,  $\#ics(\mathbb{P}) \leq \#ics(G/M_0AN)$ . Suponhamos que a desigualdade é estrita. então existem dois i.c.s. em  $G/M_0AN$  que projetam sobre o mesmo i.c.s em  $\mathbb{P}$ . Sem perda de generalidade suponhamos que esses são  $C_0$  e um outro  $C_2$ , que projetam em  $C \subset \mathbb{P}$ . Então existem  $x_0 \in C_0$  e  $x_2 \in C_2$  tais que  $\pi(x_0) = \pi(x_2)$ . Então existe

$m \in M_v/M_0$  tal que  $x_0 = x_2m$ . Mas  $m \in M(C_0)$ , então  $x_0$  e  $x_2$  estão no mesmo i.c.s., então  $C_0 = C_2$ . ■

Para os recobrimentos *maiores* que  $\mathbb{P}$ , claramente a quantidade de i.c.s. tem que ser a mesma que em  $\mathbb{P}$  porque essa quantidade é a mesma que em  $G/M_0AN$ . Para os recobrimentos *menores* que  $\mathbb{P}$ , temos que tem tantos i.c.s. como elementos tem sua fibra sobre  $\mathbb{B}$ . É claro pois sempre  $\#ics(R) \neq \#fibra(R)$  dado que é um recobrimento equivariante. Se  $\#ics(R) < \#fibra(R)$ , então existe um  $C$  i.c.s em  $R$  tal que ele contém dos elementos  $x_0$  e  $x_1$  na mesma fibra. Considere a imagem inversa destes elementos via  $\hat{\pi} : \mathbb{P} \rightarrow R$ ,  $\hat{\pi}^{-1}(x_1)$  tem que estar incluído no mesmo i.c.s que  $\hat{\pi}^{-1}(x_0)$  pois i.c.s projeta em i.c.s. Mas todos estes elementos estão na mesma fibra e são diferentes, e assim teria em  $\mathbb{P}$  menos de um i.c.s por elemento da fibra.

## 5.4 $M(C_0)$ e o tipo parabólico

Nesta seção provaremos que  $M(C_0)$  pode ser determinado a partir do tipo parabólico do semigrupo  $S$ , gerado pelo suporte da medida  $\nu$ , e dessa forma o espaço de Poisson correspondente a  $\nu$  pode ser determinado a partir do tipo parabólico de  $S$ . Mais especificamente demonstraremos que se  $\Theta$  é o tipo parabólico de  $S$ ,  $P_\Theta^0$  é a componente da identidade do grupo parabólico  $P_\Theta$  e  $M(\Theta) = M \cap P_\Theta^0$ , então  $M(\Theta) \subset M(C_0)$  sendo que vale a igualdade se os conjuntos de controle invariante para  $S$  são todos conexos. Esta hipótese de conexidade se verifica, por exemplo, quando  $S$  é conexo.

**Lema 5.18** *Seja  $S$  semigrupo de  $G$  com  $\text{int}S \neq \emptyset$ . Se num  $G$ -espaço a quantidade de i.c.s é finita e eles são todos conexos então cada componente conexa da união dos i.c.s. é exatamente um i.c.s..*

**Demonstração.** Seja  $U$  a união dos i.c.s. Primeiro cada componente conexa de  $U$  contém um i.c.s pois eles são conexos. Mas se uma componente conexa de  $U$  contém mais de um i.c.s então ela pode ser escrita como união finita de i.c.s que são fechados, fato impossível por ser uma componente conexa. ■

**Notação 5.19** *Nesta seção vamos considerar o seguinte diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} G/P_0 & \xrightarrow{p} & \mathbb{B} \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_\Theta \\ G/P_\Theta^0 & \xrightarrow{p_1} & \mathbb{B}_\Theta \end{array} \quad (5.5)$$

onde  $P_0 = M_0AN$ . Também definimos  $\pi = \pi_\Theta \circ p = p_1 \circ \pi_1$ .

**Proposição 5.20** *Seja  $\Theta$  o tipo parabólico do semigrupo  $S$ , seja  $C_0$  o suporte de uma medida ergódica em  $G/P_0$ . Então  $M(\Theta)/M_0 \subset M(C_0)$  onde  $M(\Theta) = M \cap P_\Theta^0$ .*

**Demonstração.** Seja  $C$  um i.c.s em  $G/P_0$  y  $x \in C_0$ . Estamos interessados na fibra sobre  $\pi(x) \in \mathbb{B}_\Theta$ . Seja  $a = p(x)$ , assim  $x \in \pi_1^{-1}(a)$ . Como  $p(C_0) = C_\mathbb{B}$ ,  $p(x) \in C_\mathbb{B}$ . Por isso e pela comutatividade do diagrama  $\pi_1^{-1}(a) \subset p^{-1}(C_\mathbb{B})$ . Também  $p^{-1}(C_\mathbb{B})$  é a união de conjuntos de controle invariante em  $G/P_0$ . Mas

$$\pi_1^{-1}(a) = x P_\Theta^0/P_0 = (\bar{x}P_0)(P_\Theta^0/P_0)$$

é conexo pois  $P_\Theta^0$  é conexo. Pelo lema 5.18, temos que  $xP_\Theta^0/P_0$  está totalmente incluído em  $C_0$ . Ou seja  $x(P_\Theta^0/P_0) \subset C_0$ . Assim  $x P_\Theta^0/P_0 \subset C_0$ . Mas  $M(\Theta) \subset P_\Theta^0$ , portanto  $x M(\Theta)/M_0 \subset C_0$ . E como  $x$  é um elemento arbitrário em  $C_0$ ,  $C_0 M(\Theta)/M_0 \subset C_0$ . Assim  $C_0 M(\Theta)/M_0 = C_0$  e portanto  $M(\Theta)/M_0 \subset M(C_0)$ . ■

Assumindo a hipótese que os i.c.s são conexos então então vamos poder demonstrar a inclusão inversa.

Antes de isso vamos enunciar um lema útil.

**Lema 5.21** *Cada componente conexa de  $P_\Theta$  contém um elemento de  $M$ .*

**Demonstração.** Ver [32] ■

**Lema 5.22**  *$P_\Theta/P_\Theta^0$  e  $M/(M \cap P_\Theta^0)$  são isomorfos.*

**Demonstração.** Considere o morfismo  $h : M/M_0 \rightarrow P_\Theta/P_\Theta^0$  definida por  $mM_0 \mapsto mP_\Theta^0$  que é uma restrição da mesma aplicação definida em  $P_\Theta/M_0 \rightarrow P_\Theta/P_\Theta^0$  (notar que  $M_0 \subset P_\Theta^0$ ). Pelo lema 5.21 é sobrejetora já que  $P_\Theta/P_\Theta^0$  são as componentes conexas de  $P_\Theta$ . O núcleo da  $h$  é definido como

$$\begin{aligned} & \{m \in M : h(mM_0) = P_\Theta^0\}/M_0 \\ & \{m \in M : mP_\Theta^0 = P_\Theta^0\}/M_0 \\ & (M \cap P_\Theta^0)/M_0 \end{aligned}$$

assim pelos teoremas do isomorfismo

$$P_{\Theta}/P_{\Theta}^0 = \frac{M/M_0}{(M \cap P_{\Theta}^0)/M_0} = M/(M \cap P_{\Theta}^0).$$

■

Antes vamos demonstrar um lema que caracteriza os i.c.s em  $G/P_0$ .

**Lema 5.23** *Os i.c.s de  $G/P_0$  são exatamente as imagens inversas dos i.c.s de  $G/P_{\Theta}^0$ .*

**Demonstração.** A situação é análoga com o que acontece com o i.c.s do flag maximal, que é exatamente a imagem inversa do i.c.s do flag do tipo parabólico. Por isso vamos analisar primeiro esse exemplo. Primeiro sem perda de generalidade assumamos que  $\text{int}(S \cap P_{\Theta}) \neq \emptyset$ . Isto significa que a origem de  $G/P_{\Theta}$  está no interior de  $C_{\Theta}$ . A demonstração de que  $\pi_{\Theta}^{-1}(C_{\Theta})$  é o conjunto de controle invariante em  $\mathbb{B}$  pode ser a seguinte: A invariância sai da invariância de  $C_{\Theta}$ . A transitividade dentro do interior pode ser dividida em duas partes.

- Transitividade horizontal: Podemos saltar de uma fibra em outra pois  $\pi_{\Theta}$  é equivariante.
- Transitividade vertical: É equivalente a dizer que o semigrupo  $S \cap P_{\Theta}$  é transitivo em  $P_{\Theta}/P$ .

De forma análoga para demonstra que  $S$  é transitivo no interior de  $\pi_1^{-1}(C)$  apenas é necessário provar que  $S \cap P_{\Theta}^0$  é transitivo na fibra  $P_{\Theta}^0/P^0$ . Mas note que  $P_{\Theta}^0/P^0$  é isomorfo com  $P_{\Theta}/P$  porque as componentes conexas de  $P_{\Theta}$  e  $P$  são dadas por  $M \subset P$ .

A transitividade de  $S \cap P_{\Theta}$  [respectivamente de  $S \cap P_{\Theta}^0$ ] na fibra  $P_{\Theta}/P$  é equivalente a afirmação seguinte: Par cada  $x \in P_{\Theta}/P$  existe  $g \in \text{int}(S \cap P_{\Theta})$  [resp.  $\text{int}(S \cap P_{\Theta}^0)$ ] tal que  $gx = x$ . Mas se  $g$  está em  $\text{int}(S \cap P_{\Theta})$  é fácil ver que alguma potência de  $g^n$  está em  $\text{int}(S \cap P_{\Theta}^0)$  porque  $P_{\Theta}$  tem um número finito de componentes conexas. E assim  $g^n x = x$  com  $g^n \in \text{int}(S \cap P_{\Theta}^0)$ . ■

**Lema 5.24**  $p_1^{-1}(C_{\Theta})$  é a união dos i.c.s's em  $G/P_{\Theta}^0$ .

**Demonstração.** Dado que  $\Theta$  é o tipo parabólico  $\pi_{\Theta}^{-1}(C_{\Theta}) = C_{\mathbb{B}}$ . Então  $p^{-1}(\pi_{\Theta}^{-1}(C_{\Theta}))$  é união dos i.c.s. em  $G/P_0$ . Dado que o diagrama é comutativo temos que

$$p^{-1}(\pi_{\Theta}^{-1}(C_{\Theta})) = \pi_1^{-1}(p_1^{-1}(C_{\Theta})).$$

Assim  $p_1^{-1}(C_{\Theta})$  é a imagem da união dos i.c.s pela projeção equivariante  $\pi_1$ . Mas isso implica que  $p_1^{-1}(C_{\Theta})$  é a união dos i.c.s's em  $G/P_{\Theta}^0$ . ■

**Proposição 5.25** *Com as mesmas hipóteses que em 5.20 Se todos os i.c.s em  $G/P_{\Theta}^0$  são conexos (hipóteses de conexidade) então  $M(\Theta)/M_0 = M(C_0)$ .*

**Demonstração.** Como  $M(\Theta)/M_0 \subset M(C_0)$  e eles são conjuntos finitos, vamos provar a igualdade contanto a quantidade de elementos em ambos. O esquema da demonstração é o seguinte:

1. Pela proposição 3.4 notemos que  $\#ics(G/P_0)$  é  $|M(C_0) \setminus M/M_0|$ .
2. Pelo lema 5.23  $\#ics(G/P_0)$  é igual ao número de i.c.s. em  $G/P_{\Theta}^0$ , que chamaremos  $\#ics(G/P_{\Theta}^0)$ .
3. Depois provaremos que  $\#ics(G/P_{\Theta}^0)$  é igual ao número de componentes conexas de  $p^{-1}(C_{\Theta})$ , que chamaremos  $\#cc(p_1^{-1}(C_{\Theta}))$ . Neste ponto utilizaremos a hipótese de conexidade.
4. Depois demonstraremos que  $\#cc(p_1^{-1}(C_{\Theta}))$  é igual ao número de fibras do recobrimento  $p_1$ , i.e.  $|P_{\Theta}^0/P_0|$ .
5. Pelo lema 5.22, então  $|P_{\Theta}/P_{\Theta}^0| = |M/M \cap P_{\Theta}^0|$ . Mas o número de classes laterais à esquerda é o mesmo que o numero de classes laterais à direita. Assim  $|P_{\Theta}/P_{\Theta}^0| = |M \cap P_{\Theta}^0 \setminus M|$ . e portanto  $M \cap P_{\Theta}^0 = M(\Theta)$ , e por fim

$$|P_{\Theta}/P_{\Theta}^0| = |M(\Theta) \setminus M| = |M(\Theta)/M_0 \setminus M/M_0|$$

6. Finalmente juntando todas as igualdades,

$$|M(C_0) \setminus M/M_0| = |M(\Theta)/M_0 \setminus M/M_0|$$

E assim  $|M(\Theta)/M_0| = |M(C_0)|$ .

Para demonstrar o segundo ponto notemos que como i.c.s projeta em i.c.s então temos  $\#ics(G/P_\Theta^0) \leq \#ics(G/P_0)$ . A outra desigualdade sai do lema 5.23.

Para provar o terceiro ponto notemos que  $p_1^{-1}(C_\Theta)$  e a união dos i.c.s em  $G/P_\Theta^0$ , mas pelo lema 5.18 cada componente conexa de  $p_1^{-1}(C_\Theta)$  é união de alguns i.c.s , assim

$$\#ics(G/P_\Theta^0) \geq \#cc(p_1^{-1}(C_\Theta))$$

mas pela hipótese de conexidade temos a outra desigualdade.

Para demonstrar o quarto ponto notemos que  $p_1$  é um recobrimento e  $C_\Theta$  é contrátil, pois está dentro da imagem de uma câmara de Bruhat aberta, e é conexo, pois é imagem de qualquer dos i.c.s de  $G/P_\Theta^0$ . A imagem inversa  $p_1^{-1}(C_\Theta)$  será contrátil e assim terá uma componente conexa por fibra. ■

# Capítulo 6

## Um exemplo em $SL(n)$

Nesta seção vamos desenvolver um exemplo dos vários conceitos que foram tratados no capítulo anterior. De fato será um caso particular de conceitos que demonstraremos com mais generalidade posteriormente. No entanto, algumas proposições serão provadas neste capítulo, as quais logo serão generalizadas utilizando ferramentas e resultados mais poderosos.

Primeiramente nosso grupo de Lie  $G$  será  $Sl(n)$ . Estaremos interessados em conhecer as funções harmônicas para uma medida  $\nu$  que construiremos adiante. Como sempre o suporte dessa medida gerará um semigrupo  $S$  que neste caso será um semigrupo gerado a partir de uma equação diferencial estocástica como será explicado no Capítulo 7. O tipo parabólico será uma Grasmanniana  $Gr_k(n) = Sl(n)/P_\Theta$ .

O semigrupo  $S$  conterá o subgrupo  $SO_0(p, q)$ , (o par  $(Sl(n), SO(p, q))$  será um par simétrico, ver Capítulo 9) é será possível caracterizar o  $S$ -i.c.s em  $Gr_k(n)$  como a órbita desse subgrupo, ou seja

$$SO_0(p, q)b_0 \text{ com } b_0 \text{ a identidade em } Sl(n)/P_\Theta.$$

A relação entre  $SO_0(p, q)$  e o semigrupo  $S$  será a seguinte: os campos invariantes à direita da parte simétrica de  $SO_0(p, q)$  gerarão a parte estocástica de uma equação diferencial que gerará  $S$ .

## 6.1 Um subgrupo de $SL(n)$

### 6.1.1 O grupo de isometrias

Dados  $a$  e  $b$  números reais positivos,  $k$  e  $n$  inteiros com  $k < n$  a matriz

$$I_k := \begin{pmatrix} a \mathbf{1}_{k \times k} & 0 \\ 0 & -b \mathbf{1}_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix}$$

gera uma forma bilinear simétrica em  $\mathbb{R}^n$  e sua respectiva forma quadrática  $Q_k$ .

**Definição 6.1** Definimos  $SO^{a,b}(k, n-k)$ , ou simplesmente  $SO^{a,b}$  como grupo de isometrias de  $Q_k$ , isto é,  $g \in SO^{a,b}(k, n-k)$  se, e somente se,  $g$  é uma transformação linear inversível de  $\mathbb{R}^n$  tal que se  $V$  é um subespaço de dimensão  $k$  então as restrições de  $Q_k$  aos subespaços  $V$  e  $gV$  geram métricas equivalente.

Isto é equivalente a que as restrições da forma bilinear simétrica sejam equivalentes, ou seja, para todo par de vetores  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{R}^n$  se verifique que

$$(gx)^T I_k (gy) = x^T I_k y$$

ou simplesmente

$$g^T I_k g = I_k \tag{6.1}$$

### 6.1.2 A álgebra de Lie

Para achar a álgebra de Lie deste grupo simplesmente derivamos a equação (6.1). Seja  $g_t$  uma curva no grupo tal que  $g_0 = 1$ . Então derivando em  $t = 0$  temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g_t^T I_k g_t) &= 0 \\ \frac{d}{dt}(g_t^T I_k) g_0 + (g_0^T I_k) \frac{d}{dt} g_t &= 0 \\ \frac{d}{dt}(g_t^T) I_k + g_0^T \frac{d}{dt}(I_k) + I_k \frac{d}{dt}(g_t) &= 0 \\ \frac{d}{dt}(g_t^T) I_k + I_k \frac{d}{dt}(g_t) &= 0 \end{aligned}$$

assim a álgebra de Lie de  $SO^{a,b}(k, n-k)$  é dada pelo conjunto

$$\mathfrak{so}^{a,b}(k, n-k) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : X^T I_k + I_k X = 0\}.$$

**Notação 6.2** Notaremos  $\mathfrak{so}^{a,b}(k, n-k)$  apenas por  $\mathfrak{so}^{a,b}$ .

Agora vamos exibir uma forma matricial em blocos para a álgebra de Lie  $\mathfrak{so}^{a,b}$ . Seja

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

então de  $X^T I_k + I_k X = 0$  sai que

$$\begin{pmatrix} \alpha^T & \gamma^T \\ \beta^T & \delta^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & -b1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & -b1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a(\alpha^T + \alpha) & -b\gamma^T + a\beta \\ a\beta^T - b\gamma & -b(\delta^T + \delta) \end{pmatrix} = 0.$$

Deste modo podemos escrever

$$\mathfrak{so}^{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{a}{b}\beta^T & \delta \end{pmatrix} : \alpha^T + \alpha = \delta^T + \delta = 0 \right\}.$$

Dada esta descrição é fácil notar que  $\mathfrak{so}^{a,b} \subset \mathfrak{sl}(n) = \{X : \text{tr}(X) = 0\}$ . Então podemos afirmar que a componente conexa de  $SO^{a,b}$ , que notaremos como  $SO_0^{a,b}$ , está contido no grupo  $Sl(n)$ . No entanto notemos que  $SO^{a,b}$  não está incluído em  $Sl(n)$ . De fato, qualquer matriz da forma  $\text{diag}\{\pm 1, \dots, \pm 1\}$  com uma quantidade ímpar de  $-1$  pertence a  $SO^{a,b}$  mas não pertence a  $Sl(n)$ .

Notemos também que  $\mathfrak{so}^{a,b}$  são álgebras de Lie isomorfas com  $\mathfrak{so}^{1,1}$  que é a álgebra de Lie clássica  $\mathfrak{so}(k, n-k)$ .

**Lema 6.3**  $\mathfrak{so}^{a,b}$  é isomorfa a  $\mathfrak{so}(k, n-k)$

**Demonstração.** O isomorfismo é dado por

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^T & \delta \end{pmatrix} \mapsto f(X) = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{b}{a}\beta \\ \frac{a}{b}\beta^T & \delta \end{pmatrix}$$

De fato

$$[f(X), f(X_1)] = \left[ \begin{pmatrix} \alpha & \frac{b}{a}\beta \\ \frac{a}{b}\beta^T & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 & \frac{b}{a}\beta_1 \\ \frac{a}{b}\beta_1^T & \delta_1 \end{pmatrix} \right]$$

e desenvolvendo isso

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \alpha & \frac{b}{a}\beta \\ \frac{a}{b}\beta^T & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \frac{b}{a}\beta_1 \\ \frac{a}{b}\beta_1^T & \delta_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 & \frac{b}{a}\beta_1 \\ \frac{a}{b}\beta_1^T & \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \frac{b}{a}\beta \\ \frac{a}{b}\beta^T & \delta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta\beta_1^T - \beta^T\beta_1 & \alpha\frac{b}{a}\beta_1 + \frac{b}{a}\beta\delta_1 - \alpha_1\frac{b}{a}\beta - \frac{b}{a}\beta_1\delta \\ \frac{a}{b}\beta^T\alpha_1 + \delta\frac{a}{b}\beta_1^T - \frac{a}{b}\beta_1^T\alpha - \delta_1\frac{a}{b}\beta^T & \beta^T\beta_1 - \beta\beta_1^T \end{pmatrix} \\
&= f \left( \begin{pmatrix} \beta\beta_1^T - \beta^T\beta_1 & \alpha\beta_1 + \beta\delta_1 - \alpha_1\beta - \beta_1\delta \\ \beta^T\alpha_1 + \delta\beta_1^T - \beta_1^T\alpha - \delta_1\beta^T & \beta^T\beta_1 - \beta\beta_1^T \end{pmatrix} \right) \\
&= f \left( \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^T & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1^T & \delta_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1^T & \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^T & \delta \end{pmatrix} \right) \\
&= f([X, X_1])
\end{aligned}$$

■

## 6.2 O campo $H_0$

Independente do grupo de isotropia vamos definir um campo invariante à direita  $H_0$  a partir de uma matriz com o mesmo nome

$$H_0 := \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{1}_{k \times k} & 0 \\ 0 & -\beta \mathbf{1}_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix}$$

com  $H_0 \in \mathfrak{sl}(n)$ , ou seja  $k\alpha - (n-k)\beta = 0$ . Com  $\alpha$  e  $\beta$  reais positivos.

## 6.3 O semigrupo

Agora vamos a construir o semigrupo. Uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{so}(k, n-k)$  é a seguinte

$$\mathfrak{so}^{a,b}(k, n-k) = \mathfrak{s}^{a,b} \oplus \mathfrak{k}$$

onde

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(k) \oplus \mathfrak{so}(n-k) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : A^T + A = B + B^T = 0 \right\}$$

é a parte antisimétrica e a parte simétrica é

$$\mathfrak{s}^{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \frac{a}{b}\beta^T & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Como acontece com toda álgebra de Lie semi-simples a forma de Cartan-Killing restrita à parte antisimétrica é negativa definida e restrita à parte simétrica é positiva definida.

Definimos  $m = \dim \mathfrak{s} = k(n - k)$ . Seja  $\{Y_1, \dots, Y_m\}$  uma base ortogonal de  $\mathfrak{s}^{a,b}$  em relação a forma de Cartan-Killing.

Agora vamos considerar a equação diferencial estocástica que gerará um semigrupo de interior não vazio. Seja  $H_0$  e  $Y_j$  os campos invariantes à direita em  $\text{Sl}(n)$  gerados pelos elementos de  $\mathfrak{sl}(n)$ ,  $H_0$  e  $Y_j$  respectivamente. Consideramos a equação diferencial estocástica

$$dg = H_0(g)dt + \sum_{j=1}^m Y_j(g) \circ dW_j \quad (6.2)$$

da mesma forma que será feito no Capítulo 7, ponto 7.1.3. Notamos as probabilidades de transição por  $P_t(1, \cdot)$ . E assim definimos o semigrupo

$$S = \bigcup_{t>0} \text{supp}P_t(1, \cdot). \quad (6.3)$$

O fato de que este conjunto é um semigrupo segue de

$$P_t(1, \cdot) * P_s(1, \cdot) = P_{t+s}(1, \cdot).$$

Para demonstrar que este semigrupo tem interior não vazio em  $\text{Sl}(n)$  é suficiente ver que a álgebra de Lie gerada por  $H_0$  e  $Y_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , é toda  $\mathfrak{sl}(n)$  (ver *condição de posto* 7.1.2). Este fato que será demonstrado com mais generalidade no capítulo 9.

**Observação 6.4** *Para ter uma idéia de como conseguir  $\mathcal{L}(H_0, Y_1, \dots, Y_m) = \mathfrak{sl}(n)$  assumamos  $a = b = 1$  e notemos que, como em toda decomposição de Cartan,  $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{k}$ , de fato*

$$\left[ \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ \xi^T & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta^T & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \xi\eta^T - \eta\xi^T & 0 \\ 0 & \xi^T\eta - \eta^T\xi \end{pmatrix}$$

onde claramente  $\xi\eta^T - \eta\xi^T$  e  $\xi^T\eta - \eta^T\xi$  são anti-simétricas. Neste caso em particular  $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{k}$ .

Para ver que  $[\mathfrak{so}(k, n - k), H_0] = \mathfrak{sl}(n)$  notemos por exemplo que

$$\left[ \begin{pmatrix} A & \xi \\ \xi^T & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -2\xi \\ 2\xi^T & 0 \end{pmatrix}$$

e assim temos todas as matrizes anti-simétricas de  $\mathfrak{sl}(n)$ . E tomando o colchete

$$\left[ \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta^T & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -\xi^T & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -\eta\xi^T - \xi\eta^T & 0 \\ 0 & \eta^T\xi + \xi^T\eta \end{pmatrix}$$

que são as matrizes simétricas que faltavam para obter todas as matrizes simétricas.

Demonstraremos a seguir que o tipo parabólico de  $S$  é a Grassmanniana formada pelos subespaços de dimensão  $k$  denotada como é habitual por  $\text{Gr}_k(n)$ . Para isso primeiro daremos uma caracterização explícita do conjunto de controle invariante  $\text{Gr}_k(n)$  pela ação de  $S$ .

### 6.3.1 O i.c.s. em $\text{Gr}_k(n)$

**Definição 6.5** *Seja  $\mathcal{O}^+$  o conjunto de subespaços em  $\text{Gr}_k(n)$  tal que a restrição da forma bilinear  $Q_k$  é definida positiva, em símbolos:*

$$\mathcal{O}^+ = \{V : \dim V = k, Q_{k|V} > 0\}$$

Vamos provar que  $\text{fe}\mathcal{O}^+$  é o i.c.s. de  $\text{Gr}_k(n)$ . Antes disso vejamos alguns exemplos de  $\mathcal{O}^+$  para diferentes valores de  $n$  e  $k$  e  $a = b = 1$ .

**Exemplos** No caso  $n = 2$  e  $k = 1$  temos que

- $Q_k(x, y) = x^2 - y^2$
- $\text{Gr}_k(n) = \mathbb{R}P^1$  a reta projetiva.
- Se  $(x, y) \subset V \in \mathcal{O}^+$  então  $|x| > |y|$ . A união destes elementos de  $\mathbb{R}^2$  tem a forma de um cone, justamente o cone de subespaços que interceptam

a hipérbole  $\{(x, y) : x^2 - y^2 = 1\}$

- Podemos identificar cada subespaço de  $\mathbb{R}P^1$  com o ponto onde o subespaço intercepta o semicírculo

$$C := \{e^{i\theta} : -\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

- É fácil ver que  $\mathcal{O}^+$  se identifica com  $\{e^{i\theta} : -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}\} \subset C$ . Que é justamente a interseção de  $C$  com o cone:

No caso  $n = 3$  e  $k = 1$  temos que

- $Q_k(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$
- $\text{Gr}_k(n) = \mathbb{R}P^2$ .

- Se  $\langle(x, y, z)\rangle = V \in \mathcal{O}^+$  então se verifica  $x^2 - y^2 - z^2 > 0$ . A união de todos estes elementos de  $\mathbb{R}^3$  tem também a forma do cone de subespaços que interceptam o hiperbolóide de duas folhas  $\{(x, y, z) : x^2 - y^2 - z^2 = 1\}$ :

- Podemos identificar cada subespaço de  $\mathbb{R}P^2$  com um elemento que intercepta uma semi-esfera.
- Para essa identificação  $\mathcal{O}^+$  terá forma de um disco dentro da semi-esfera

No caso  $n = 3$  e  $k = 2$  temos que

- $Q_k(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

- $\text{Gr}_k(n) = \text{Gr}_2(3)$ , o conjunto dos planos em  $\mathbb{R}^3$
- Se  $\langle(x, y, z)\rangle$  está incluído  $V \in \mathcal{O}^+$  então se verifica  $x^2 + y^2 - z^2 > 0$ . A união dos pontos de todos os elementos de  $\mathcal{O}^+$  é o complemento do cone que não intercepta o hiperbolóide de uma folha  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$

**A inclusão**  $\text{SO}_0^*(k, n - k) \subset \text{cl}S$

**Notação 6.6** *Substituiremos o índice  $a, b$  por  $*$ .*

É sabido da teoria de controle que o grupo conexo cuja álgebra de Lie é gerada pelos campos da parte estocástica de equações como a equação (6.2), ou seja, os campos  $Y_1, \dots, Y_m$ , está contido no fecho do semigrupo gerado pela equação (6.3). Neste caso  $\{Y_1, \dots, Y_m\}$  é base de  $\mathfrak{s}^*$  e não é difícil verificar que  $[\mathfrak{s}^*, \mathfrak{s}^*] = \mathfrak{k}$ . Portanto a álgebra de Lie gerada é  $\mathfrak{s}^* \oplus \mathfrak{k} = \mathfrak{so}^*(k, n - k)$ . Podemos concluir então que

$$\text{SO}_0^*(k, n - k) \subset \text{fe}S.$$

Logo demonstraremos que  $\text{SO}_0^*(k, n - k)$  age transitivamente em  $\mathcal{O}^+$ . Depois disso fica claro que  $\text{fe}S$  é transitivo em  $\text{fe}\mathcal{O}^+$ . Ou seja

$$\text{dado } x \in \mathcal{O}^+ \text{ então } (\text{fe}S)x \supset \text{fe}\mathcal{O}^+$$

E como  $\text{fe}(Sx) \supset (\text{fe}S)x$  então

$$\text{dado } x \in \mathcal{O}^+ \text{ então } \text{fe}(Sx) \supset \text{fe}\mathcal{O}^+ \quad (6.4)$$

E essa é uma das inclusões que precisamos para demonstrar que  $\text{fe}\mathcal{O}^+$  é o i.c.s..

### 6.3.2 $\text{SO}_0^*(k, n - k)$ é transitivo em $\text{fe}\mathcal{O}^+$

**Lema 6.7**  $\text{SO}_0^*(k, n - k)$  é transitivo em  $\text{fe}\mathcal{O}^+$

**Demonstração.** Seja  $E_k = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$  o subespaço em  $\text{Gr}_k(n)$  gerado pelos primeiros  $k$  vetores canônicos. É claro que  $E_k \in \mathcal{O}^+$ . Tomemos um  $V \in \mathcal{O}^+$  qualquer. Queremos achar um  $g \in \text{SO}^*(k, n - k)$  tal que  $gE_k = V$ .

Seja  $\{v_1, \dots, v_k\}$  um conjunto l.i. de vetores que geram  $V$ . Pela construção de Gram-Schmidt é possível achar um conjunto  $\{w'_1, \dots, w'_k\}$  tal que  $Q_k(w'_i, w'_j) = 0$  para  $i \neq j$  e também gere  $V$ . Ainda mais, dado que  $Q_k$  restrita a  $V$  é positiva definida sabemos que  $Q_k(w'_i, w'_i) > 0$ . Se definimos

$$w_i := \frac{\sqrt[2]{aw'_i}}{\sqrt[2]{Q_k(w'_i, w'_i)}} \quad (6.5)$$

o conjunto  $\{w_1, \dots, w_k\}$  verifica que  $Q_k(w_i, w_j) = a\delta_{i,j}$ . Consideremos a transformação linear  $f : E_k \rightarrow V$  tal que

$$f(e_i) = w_i \text{ para } i = 1, \dots, k$$

Como  $Q_k(e_i, e_j) = a\delta_{i,j}$ ,  $f$  é uma isometria entre  $E_k$  e  $V$ . O Teorema de Witt (ver [29] por exemplo) diz que num espaço vetorial com uma métrica não singular toda isometria entre dos subspaços podem ser estendidos ao espaço todo. Note que  $Q_k$  não é singular pois  $\det I_k = a^k b^{n-k} \neq 0$ . Aplicando este teorema podemos afirmar que existe  $g \in \text{SO}^*(k, n - k)$ , tal que  $gE_k = fE_k = V$ . Isto prova apenas que  $\text{SO}^*(k, n - k)$  é transitivo em  $\mathcal{O}^+$  e nós queremos demonstrar que a componente conexa deste grupo é transitiva.

Para provar que  $\text{SO}_0^*(k, n - k)$  é transitivo é suficiente provar que em cada componente conexa de  $\text{SO}^*(k, n - k)$  existe um elemento  $h$  na isotropia de  $E_k$ , i.e.,

$$h \in \text{SO}_{E_k}^* := \{g' \in \text{SO}^*(k, n - k) : g'E_k = E_k\}$$

Se isso é verdade então, dados  $V \in \mathcal{O}^+$ ,  $gE_k = V$ ,  $h \in \text{SO}_{E_k}^*$  com  $g$  e  $h$  na mesma componente conexa, então  $gh^{-1}$  está em  $\text{SO}_0^*(k, n - k)$  e  $gh^{-1}E_k = gE_k = V$ . E assim  $V$  em  $\mathcal{O}^+$  pode ser alcançado desde  $E_k$  com  $gh^{-1}$  em  $\text{SO}_0^*(k, n - k)$ . ■

**Lema 6.8**

$$\mathrm{SO}_{E_k}^* = \begin{pmatrix} \mathrm{O}(k) & 0 \\ 0 & \mathrm{O}(n-k) \end{pmatrix}$$

**Demonstração.** Se  $A \in \mathrm{SO}_{E_k}^*$  então, verifica  $AE_k = E_k$  e então

$$A = \begin{pmatrix} g'_{k \times k} & p \\ 0 & h'_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix}.$$

E também verifica  $A^T I_k + I_k A = 0$ . Juntando ambas as coisas se consegue facilmente  $g' \in \mathrm{O}(k)$  e  $h' \in \mathrm{O}(n-k)$ . ■

Nota-se claramente que cada componente conexa de

$$\begin{pmatrix} \mathrm{O}(k) & 0 \\ 0 & \mathrm{O}(n-k) \end{pmatrix}$$

está contida em cada componente conexa de  $\mathrm{SO}^*(k, n-k)$ .

Resumindo, dado  $V \in \mathcal{O}^+$  sempre existe  $g$  tal que  $gE_k = V$  e  $g^{-1}V = E_k$ , com  $g, g^{-1} \in \mathrm{SO}_0^*(k, n-k) \subset \mathrm{fe}S$ . Por tudo podemos concluir o seguinte

**Lema 6.9** *feS age transitivamente em fe $\mathcal{O}^+$*

### 6.3.3 $\mathcal{O}^+$ é invariante por $S$

Agora, para concluir que  $\mathrm{fe}\mathcal{O}^+$  é o conjunto de controle invariante necessitamos demonstrar que é  $S$ -invariante.

Para provar isso é suficiente mostrar que  $\mathcal{O}^+$  é invariante pelo fluxo positivo gerado pelo campo  $H_0$  e pelos fluxos gerados pelos campos  $Y_1, \dots, Y_m$ . Dado que  $Y_j \in \mathfrak{so}^*(k, n-k)$ ,  $\exp(tY_j) \in \mathrm{SO}^*(k, n-k)$ . Portanto  $\exp(tY_j)$  é uma isometria, em particular preserva a assinatura de qualquer restrição de  $Q_k$ , o que demonstra a invariância pelos  $Y_1, \dots, Y_m$ .

Para demonstrar a invariância pelo fluxo positivo de  $H_0$  necessitaremos uma caracterização dos elementos de  $\mathcal{O}^+$  como matrizes.

Seja  $V$  um elemento de  $\mathrm{Gr}_k(n)$  e  $B = \{v_1, \dots, v_k\}$  uma base de  $V$ . Podemos representar  $V$  por uma matriz  $p$   $n \times k$  onde cada coluna é um elemento de  $B$ . Esta representação não é única. De fato, se  $x \neq Id$  é uma matriz inversível  $k \times k$  então  $q = px$  é outra matrix que representa  $V$ . Note que a matriz  $p^T I_k p$  é a matriz da restrição de  $Q_k$  a  $V$  na base  $B$ .

**Notação 6.10** Quando uma matriz  $g$  é definida positiva notaremos  $g > 0$ .

**Lema 6.11**  $V \in \mathcal{O}^+$  se e somente se pode ser representada por uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} 1_{k \times k} \\ z_{(n-k) \times k} \end{pmatrix}$$

com a  $Id - bz^T z$  definida positiva.

**Demonstração.**  $V$  está em  $\mathcal{O}^+$  então  $p^T I_k p > 0$ . Escrevemos

$$p = \begin{pmatrix} x_{k \times k} \\ y_{(n-k) \times k} \end{pmatrix}.$$

Portanto  $ax^T x - by^T y = p^T I_k p > 0$ . Note que  $a, b > 0$ , temos que se  $ax^T x - by^T y > 0$  então  $x > 0$  e, portanto,  $x$  é inversível. Assim a matriz  $px^{-1}$  representa  $V$  e sua forma é

$$\begin{pmatrix} 1_{k \times k} \\ z_{(n-k) \times k} \end{pmatrix}$$

com  $a1 - bz^T z > 0$ . A inversa é análoga. ■

**Lema 6.12**  $\mathcal{O}^+$  é invariante pela ação de  $S$

**Demonstração.** Pelo já exposto note que é suficiente demonstrar que dado  $V \in \mathcal{O}^+$  então  $\exp(tH_0)V \in \mathcal{O}^+$ . Note que

$$\exp(tH_0) = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{-\beta t} \end{pmatrix}.$$

Portanto se  $V \in \mathcal{O}^+$  então, utilizando o lema anterior  $\exp(tH_0)V$  pode ser representado assim

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{-\beta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} 1 \\ e^{-\beta t} z \end{pmatrix}$$

com  $a1 - bz^T z > 0$ . Esta matriz representa o mesmo subespaço que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-(\beta+\alpha)t} z \end{pmatrix}$$

e, dado que quando  $t > 0$  temos que  $e^{-(\beta+\alpha)t} > 1$ , então temos que  $a1 - be^{-(b+a)t^2} z^T z$  é definida positiva também. E assim  $\exp(tH_0)V \in \mathcal{O}^+$  também.

■

E assim

$$\text{dado } x \in \mathcal{O}^+ \text{ então } Sx \subset \mathcal{O}^+$$

e portanto

$$\text{dado } x \in \mathcal{O}^+ \text{ então } \text{fe}Sx \subset \text{fe}\mathcal{O}^+ \quad (6.6)$$

Um resultado que usaremos mais tarde é o seguinte

**Corolário 6.13**  $\mathcal{O}^+ = \text{SO}_0^*(k, n-k)b_0$  com  $b_0$  a origem em  $\text{Gr}_k(n)$ .

**Demonstração.** Primeiro  $\mathcal{O}^+ \subset \text{SO}_0^*(k, n-k)b_0$  pelo lema 6.7.  $\text{SO}_0^*(k, n-k)b_0 \subset \mathcal{O}^+$  pelo lema 6.12. ■

Esta caracterização será muito útil no Capítulo 8, onde permitirá escrever  $\mathcal{O}^+$  difeomorfo com  $\text{SO}_0^*(k, n-k)/\text{SO}(k) \times \text{SO}(n-k)$ , que é o espaço simétrico de  $\text{SO}_0^*(k, n-k)$ . Como tal, têm uma métrica que servirá para estabelecer explicitamente a medida invariante no suporte  $\text{fe}\mathcal{O}^+$ .

### 6.3.4 $\text{fe}\mathcal{O}^+$ é o i.c.s

Do realizado em (6.4) e (6.6) concluimos que

$$\text{dado } x \in \mathcal{O}^+ \text{ então } \text{fe}Sx = \text{fe}\mathcal{O}^+$$

o que significa que

**Proposição 6.14**  $\text{fe}\mathcal{O}^+$  é o i.c.s em  $\text{Gr}_k(n)$ .

### 6.3.5 O tipo parabólico

O tipo parabólico de  $S$  é  $\text{Gr}_k(n)$ . Lembremos que um flag  $\mathbb{F}$  é o tipo parabólico de um semigrupo  $S$  se a imagem inversa de seu  $S$ -i.c.s é o  $S$ -i.c.s no flag maximal e  $\mathbb{F}$  é minimal com essa propriedade em relação à ordem dada pelas projeções canônicas (ver Proposição 2.1). Como  $\text{Gr}_k(n)$  é um flag minimal para essa ordem é suficiente ver que apenas  $\pi_{\mathcal{O}}^{-1}(\text{fe}\mathcal{O}^+)$  é exatamente o i.c.s no flag maximal  $\mathbb{B}$ .

Primeiro provaremos que  $\pi_{\Theta}^{-1}(\mathcal{O}^+)$  é o conjunto de transitividade do i.c.s. em  $\mathbb{B}$ , e portanto  $\text{fe}(\pi_{\Theta}^{-1}(\mathcal{O}^+))$  será o i.c.s.. Mas, dado que  $\pi_{\Theta}$  é aberta, temos que

$$\text{fe}(\pi_{\Theta}^{-1}(\mathcal{O}^+)) = \pi_{\Theta}^{-1}(\text{fe}\mathcal{O}^+).$$

Agora vamos provar que  $\pi_{\Theta}^{-1}(\mathcal{O}^+)$  é transitivo pela ação de  $S$ . Definamos o subespaço  $E_i := \langle e_1, \dots, e_i \rangle$  e o elemento do flag maximal

$$E := \{E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_{n-1} \subset E_n = \mathbb{R}^n\}.$$

**Lema 6.15** *Seja  $V$  um elemento no flag maximal da forma*

$$V = \{V_1 \subset \dots \subset E_k \subset \dots \subset V_n = \mathbb{R}^n\}$$

*então existe  $h$  em*

$$\text{SO}(k) \times \text{SO}(n-k) = \begin{pmatrix} \text{SO}(k) & 0 \\ 0 & \text{SO}(n-k) \end{pmatrix}$$

*tal que  $hV = E$ .*

**Demonstração.** Pelo método de Gram-Schmidt podemos achar uma base ortonormal  $\{v_1, \dots, v_n\}$  tal que  $\langle v_1, \dots, v_i \rangle = V_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Seja  $h'$  a matriz tal que as colunas são os vetores da base. Pela construção  $h'$  tem a forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

com  $A \in \text{O}(k)$  e  $B \in \text{O}(n-k)$  pois  $V_1, V_2, \dots, V_{k-1} \subset E_k$ . Sem perda de generalidade podemos supor  $A \in \text{SO}(k)$  e  $B \in \text{SO}(n-k)$ . Para conseguir isso é suficiente trocar  $v_k$  por  $-v_k$  ou  $v_n$  por  $-v_n$  se for necessário. Note que  $h'e_i = v_i$  portanto  $h'E = V$ . Assim  $h := h'^{-1}$  verifica  $hV = E$  e  $h \in \text{SO}(k) \times \text{SO}(n-k)$ . ■

Note que  $h$  pertence a  $\text{SO}(k) \otimes \text{SO}(n-k) = K'$  que é a parte compacta de  $\text{SO}^*(k, n-k)$  que está contido em  $S$ .

**Proposição 6.16**  $\text{SO}_0^*(k, n-k)$  age transitivamente em  $\pi_{\Theta}^{-1}(\mathcal{O}^+)$ .

**Demonstração.** Tomemos  $W \in \pi_{\Theta}^{-1}(\mathcal{O}^+)$ . Seja  $W_k := \pi_{\Theta}(W) \in \mathcal{O}^+$ . Já mostramos que existe  $g \in \text{SO}_0^*(k, n-k)$  tal que  $gW_k = E_k$  (lema 6.7). Assim

$$gW = \{gW_1 \subset \dots \subset E_k \subset \dots \subset gW_n\} =: V.$$

Mas demonstrarmos acima que para um elemento  $V$  dessa forma  $h \in \text{SO}(k) \times \text{SO}(n-k)$  tal que  $hV = E$ . Assim  $gh'W = gV = E$ . Mas  $g \in \text{SO}_0^*(k, n-k)$  e  $h \in \text{SO}(k) \otimes \text{SO}(n-k)$ . Em particular  $gh \in \text{SO}_0^*(k, n-k)$ . Também  $(gh')^{-1}E = V$ . Portanto  $\text{SO}_0^*(k, n-k)$  age transitivamente sobre  $\pi_{\Theta}^{-1}(\mathcal{O}^+)$ . ■

**Corolário 6.17**  $S$  age transitivamente em  $\pi_{\Theta}^{-1}(\mathcal{O}^+)$ . E  $\pi_{\Theta}^{-1}(\mathcal{O}^+)$  é invariante pela ação de  $S$ . Portanto  $fe\pi_{\Theta}^{-1}(\mathcal{O}^+)$  é i.c.s.

**Demonstração.** Para a primeira parte é só notar que  $\text{SO}_0^*(k, n-k) \subset S$  e a proposição 6.16. Para a segunda notemos que  $S$  é invariante em  $\mathcal{O}^+$  e  $\pi_{\Theta}$  é equivariante. A terceira surge de aplicar as propriedades dos i.c.s e seus conjuntos de transitividade. ■

Agora podemos concluir que  $\pi_{\Theta}^{-1}(fe\mathcal{O}^+)$  é i.c.s em  $\mathbb{B}$  e portanto  $\text{Gr}_k(n)$  é o tipo parabólico de  $S$ .

### O subgrupo parabólico $P_{\Theta_k}$

O correspondente grupo parabólico é

$$P_{\Theta_k} = \begin{pmatrix} A_{k \times k} & * \\ 0 & A'_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix}$$

onde  $(\det A)(\det A') = 1$ .  $P_{\Theta_k}^0$  são as matrizes tais que  $\det A > 0$  (e portanto  $\det A' > 0$ ). Disso concluímos facilmente que

$$M(\Theta_k) = \{\text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n)\}$$

em  $\text{Sl}(n)$ , onde  $\gamma_i = \pm 1$ ,  $\varepsilon_j = \pm 1$ ,  $\prod_i \gamma_i = 1$  e  $\prod_j \varepsilon_j = 1$ . Portanto a fronteira de Poisson de qualquer medida cujo suporte seja gerado por  $S$  é

$$G/M(\Theta_k)AN$$

que é um recobrimento duplo de  $\mathbb{B}$ . Um exemplo de uma medida assim é

$$\nu = \int_0^1 P_t(1, \cdot) dt.$$

como veremos no Capítulo 7, fórmula (7.6).

Até aqui conseguimos achar o espaço de Poisson. Este mesmo exemplo para algumas restrições dos valores de  $a$  e  $b$  será continuado no Capítulo 8. De fato será achada a única medida  $\nu$ -invariante no  $fe\mathcal{O}^+$ .



# Capítulo 7

## Equações diferenciais estocásticas.

Como foi mencionado na introdução é interessante ter expressões explícitas de medidas invariantes. Em geral, as medidas invariantes não são fáceis de calcular pois envolvem a solução de uma equação diferencial de segunda ordem. Nossa atenção se restringirá, no capítulo 9, às álgebras simples que contêm álgebras semi-simples que verificam uma propriedade especial, esse pares  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$  são chamados *simétricos regulares*. Neste capítulo necessitaremos assumir apenas que  $\mathfrak{l}$  é uma sub-álgebra semi-simples. A medida  $\nu$  sobre  $G$ , um grupo de Lie com álgebra  $\mathfrak{g}$ , que consideraremos a partir de agora será gerada a partir das probabilidades de transição que resultam de considerar uma determinada equação diferencial estocástica do tipo

$$dg = H_0(g) dt + \sum_{j=1}^m Z_j(g) \circ dW_j. \quad (7.1)$$

com campos invariantes à direita, em tempo positivo inicializada no  $1 \in G$ . O Semigrupo  $S$  gerado pela medida conterá o subgrupo  $L_0$ , conexo com álgebra de Lie  $\mathfrak{l}$ , garantindo suficientes simetrias. Estaremos interessados em achar uma medida invariante ergódica primeiro no flag  $G/P_\Theta$  com  $\Theta$  o tipo parabólico do semigrupo  $S$  para depois ascender até o espaço de Poisson. Esta primeira medida invariante ergódica terá como sempre o suporte  $C_\Theta$ , o i.c.s de  $G/P_\Theta$ . Acontece que o interior deste i.c.s pode ser identificado com o espaço simétrico  $X$  de  $L_0$ , i.e.,  $X = L/K'$  com  $K'$  a parte compacta de  $L_0$ . A medida invariante  $\mu$  com suporte  $C_\Theta$  será uma medida absolutamente

contínua com respeito a  $dx$ , a forma volume de  $X$  gerada pela forma de Cartan-Killing. Mais especificamente, a derivada de Radon-Nykodym é dada por

$$\frac{d\mu}{dx} = e^{-f}$$

onde a função  $f$  verifica que seu gradiente  $\text{grad}f$ , em relação à métrica gerada pela forma de Cartan-Killing, coincide com o campo derivado do fluxo que gera  $\exp(tH_0)$  com  $t > 0$  em  $G/P_\Theta$ . Ver Ikeda-Watanabe [14].

Neste capítulo preparatório exporemos generalidades sobre as equações diferenciais estocásticas, os semigrupos que elas geram e definiremos o que é uma medida invariante para o processo que a equação estocástica gera, ampliando o conceito de medidas invariantes para uma medida  $\nu$  no grupo (que foi a invariância estudada até aqui). O teorema 7.11 será a ferramenta que possibilitará determinar explicitamente a medidas invariantes procuradas.

## 7.1 Equações diferenciais estocásticas.

### 7.1.1 A equações diferencial estocástica com drift.

Consideremos uma equação diferencial estocástica de Stratônovich em um grupo de Lie  $G$  com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .

$$dg = H_0(g) dt + \sum_{j=1}^m Z_j(g) \circ dW_j \quad (7.2)$$

onde  $H_0, Z_j$  são campos de vetores em  $G$  invariantes à direita considerando sempre  $t > 0$ .

Se apenas consideramos a equação

$$dg = H_0(g) dt$$

temos uma equação determinística em um grupo de Lie, acrescentando a condição inicial como  $g(0) = 1 \in G$  a solução é

$$g(t) = \exp(tH_0)$$

ou seja uma curva que parte de 1 e sempre *caminha* na direção indicada por  $H_0$ .

Consideremos agora a outra parte da equação com a mesma condição inicial

$$dg = \sum_{j=1}^m Z_j(g) \circ dW_j. \quad (7.3)$$

A solução é um processo estocástico onde podemos pensar que as possíveis trajetórias que partem de  $1 \in G$  se geram *caminhando* aleatoriamente em qualquer uma das direções  $Z_j$ . Temos assim uma marcha aleatória. O conjunto destas trajetórias  $\{g_\omega(t) : \omega \in \Omega\}$  é chamado fluxo em  $G$  (sempre  $t > 0$  e  $g_\omega(0) = 1$ ).

Ao juntar as duas partes, a parte determinística cria em nossa marcha aleatória o que é conhecido como deriva (*drift*), uma espécie de *vento* que empurra nossa marcha aleatória para uma certa *direção preferencial*. Então as possíveis trajetórias aleatórias de equação completa se modificam sensivelmente.

### O fluxo sobre um $G$ -espaço

O fluxo gerado pela equação (7.2) pode ser considerado agindo em qualquer  $G$ -espaço  $N$ , assim, se  $m \in N$ , então  $\{g_\omega(t)m : \omega \in \Omega\}$  é o conjunto de trajetórias em  $N$  que partem de  $m$ .

Quando o  $G$ -espaço  $N$  é um quociente à **direita** de  $G$ , digamos  $G/H$ , antes de considerar o conjunto de trajetórias é interessante considerar a equação diferencial estocástica induzida pelos campos invariantes à direita  $H_0$  e  $Z_j$  em  $G$ . De fato os campos invariantes à direita em  $G$  projetam em campos invariantes à direita  $H_0^N$  e  $Z_j^N$  em  $G/H$  que geram uma equação diferencial estocástica

$$dm = H_0^N(m) dt + \sum_{j=1}^m Z_j^N(m) \circ dW_j \quad (7.4)$$

da mesma forma que em  $G$ . De fato as trajetórias que gerará essa nova equação diferencial coincidem com as trajetórias  $\{g_\omega(t)m : \omega \in \Omega\}$  induzidas pela equação diferencial em  $G$ .

Em capítulos posteriores nosso interesse se centralizará nas equações diferenciais induzidas numa variedade flag  $G/P_\Theta$  específica. Veremos como as trajetórias quando partem de um elemento em  $C$ , o conjunto de controle invariante, ficam *presas* em  $C$ . O segundo passo será identificar  $C$  com um espaço  $K' \setminus L$ , aqui já não consideraremos uma equação diferencial induzidas mas trabalharemos com as trajetórias que ela produz.

### 7.1.2 Sistemas de controle

A equação (7.2) tem uma relação importante com o sistema de controle

$$g' = H_0(g) + \sum_{j=1}^m u_j Z_j(g). \quad (7.5)$$

definido pelos mesmos campos que (7.2). Aqui, para cada função  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_j(t))$  temos uma equação diferencial determinística e notaremos sua solução para a condição inicial  $x_0$  por  $X_t^u(x_0)$ . A teoria de controle considera uma família de funções  $\{u^\alpha(t) = (u_1^\alpha(t), \dots, u_j^\alpha(t))\}_{\alpha \in I}$  e a correspondente família de soluções  $\{X_t^{u^\alpha}(x_0) : \alpha \in I, t \in \mathbb{R}, x_0 \in G\}$ . É de interesse na Teoria de Controle, por exemplo, determinar a órbita positiva de um  $x_0$

$$S_I(x_0) = \{X_t^u(x_0) : \alpha \in I \text{ e } t > 0\}$$

A relação entre este sistema de controle e a equação estocástica (7.2) é dada pelo teorema do suporte de Stroock, Varadhan e Kunita. É assim como muitos resultados de uma teoria tem seu correspondente na outra. Por exemplo, o fato de que as trajetórias de (7.3) estão contidas no subgrupo de Lie conexo com álgebra de Lie gerada pelos  $Z_j$  com  $j = 1, \dots, m$  pode ser demonstrado facilmente desde o ponto de vista da Teoria de Controle. Mais geralmente: a conhecida *condição de posto* será utilizada mais tarde para demonstrar que se  $\mathcal{L}(H_0, Z_1, \dots, Z_m)$  (a álgebra de Lie gerada pelos campos  $H_0, Z_1, \dots, Z_m$ ) é  $\mathfrak{g}$  então o semigrupo gerado pelas soluções da equação (7.5) tem interior não vazio, o que implica, pelo teorema do suporte que

$$\bigcup_{t>0} \text{sup } P_t(1, \cdot)$$

é um semigrupo com interior não vazio.

### 7.1.3 Medidas e semigrupo gerados pela equação diferencial estocástica

Sempre existem *probabilidades de transição* associadas com uma equação diferencial estocástica. A probabilidade  $P_t(x, \cdot)$  é uma probabilidade sobre  $G$  (com a  $\sigma$ -álgebra dos borelianos) tal que  $P_t(x, A)$  é a probabilidade *de, partindo desde  $x$ , estar no conjunto  $A$  no tempo  $t$* , ou seja

$$P_t(x, A) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : g_\omega(t)x \in A\}$$

Analogamente pode ser definidas probabilidades de transição num  $G$ -espaço  $N$ :

$$P_t^N(m, A) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : g_\omega(t)m \in A\}$$

**Observação 7.1** *Estas probabilidades de transição coincidem com as probabilidades de transição que define a equação diferencial estocástica induzida quando  $N = G/H$ .*

Agora estamos em condições de definir a medida  $\nu$  para a qual desejaremos achar medidas invariantes nos flags e nos recobrimentos de Poisson:

**Definição 7.2**

$$\nu(\cdot) := \int_0^1 P_t(1, \cdot) dt. \quad (7.6)$$

O suporte dessa medida é claramente  $\cup_{0 < t < 1} \text{sup}(P_t(1, \cdot))$  e também é fácil ver que o semigrupo que esse suporte gera é

$$S = \bigcup_{t > 0} \text{sup} P_t(1, \cdot)$$

Como já foi mencionado, uma condição suficiente para garantir que  $\text{int} S \neq \emptyset$  é que a álgebra de Lie gerada pelos campos da equação diferencial estocástica, i.e. ,  $\mathcal{L}(H_0, Z_1, \dots, Z_m)$  é todo  $\mathfrak{g}$  (ver [26]).

## 7.2 A invariância para o processo

Existe um conceito de invariância para o processo estocástico que de certa maneira generaliza o conceito de invariância por convolução com o qual trabalhamos nos capítulos anteriores.

Consideremos uma equação diferencial estocástica invariante à direita em  $G$ . Consideremos apenas as trajetórias  $\{g_\omega(t) : \omega \in \Omega\}$  (sempre partindo da identidade, ou seja  $g_\omega(0) = 1 \in G$ ) e com probabilidades de transição  $P_t(1, \cdot)$  (também partindo da identidade). Como já antecipamos se  $N$  é um  $G$ -espaço onde  $G$  age à esquerda então o processo em  $G$  gera um processo em  $N$  onde as trajetórias serão

$$\{g_\omega(t)m : \omega \in \Omega, m \in N\}$$

As probabilidades de transição  $P_t^N(m, \cdot)$  poderão ser achadas a partir das probabilidades  $P_t(1, \cdot)$  da seguinte maneira:

$$P_t^N(m, \cdot) = \psi_m * P_t(1, \cdot) \quad (7.7)$$

onde  $\psi_m : G \rightarrow N$  definida por  $\psi_m(g) := gm$ . Esta igualdade surge naturalmente de

$$\psi_m * P_t(1, A) = P_t(1, \psi_m^{-1}(A)) = P_t(1, B)$$

onde  $B = \{g : gm \in A\}$  então

$$\begin{aligned} P_t(1, B) &= \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : g_\omega(t) \in B\} \\ &= \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : g_\omega(t)m \in A\} \\ &= P_t^N(m, A) \end{aligned}$$

Agora vamos definir *medida invariante* pelo processo de Markov associado ao processo de difusão.

**Definição 7.3** *Seja  $N$  um  $G$ -espaço com um processo como o definido acima e seja  $f \in \text{Cont}(N)$ . Definimos  $T_s$  como o operador*

$$(T_s f)(m) := \int_N f(\cdot) dP_s^N(m, \cdot)$$

**Definição 7.4** *Uma medida  $\mu$  em  $N$  é dita invariante para o processo se*

$$\int_N (T_s f)(\cdot) d\mu(\cdot) = \int_N f(\cdot) d\mu(\cdot)$$

Quando  $N$  é um espaço homogêneo de um grupo de Lie  $G$  é sabido que uma medida  $\mu$  é invariante para o processo se e somente se é invariante no sentido usual, ou seja, por convolução, para todas as medidas  $P_t(1, \cdot)$  em  $G$ . Como a demonstração é simples incluímos o lema a seguir.

**Lema 7.5** *Seja  $\mu$  uma medida em  $N = G/H$ .  $\mu$  é invariante para o processo se e somente se  $\mu$  é  $P_t^G(1, \cdot)$ -invariante para todo  $t$ .*

**Demonstração.** É suficiente notar que por um lado

$$\begin{aligned}
\int_N (T_s f)(m) d\mu(m) &= \int_N \left( \int_N f(\cdot) dP_s^N(m, \cdot) \right) d\mu(m) \\
&= \int_N \left( \int_N f(\cdot) d(\psi_m * P_s(1, \cdot)) \right) d\mu(m) \\
&= \int_N \left( \int_G f(\psi_m(\cdot)) dP_s(1, \cdot) \right) d\mu(m) \\
&= \int_N \left( \int_G f(y_m) dP_s(1, y) \right) d\mu(m) \\
&= (P_s(1, \cdot) * \mu)(f)
\end{aligned}$$

e por outro lado

$$\int_N f(m) d\mu(m) = \mu(f)$$

■

Como veremos na continuação se  $\mu$  é invariante para o processo também é  $\nu$ -invariante, ( $\nu$  definida em (7.6)). Como em Ikeda-Watanabe [14], para certas variedades Riemannianas  $N$ , temos fórmulas para achar explicitamente as medidas invariantes para processos de certo tipo, poderemos usar essas fórmulas para achar medidas  $\nu$ -invariantes. E essa é uma das razões para estudar este conceito de invariância para o processo. No entanto achar medidas invariantes para o processo é importante por si só. É por isso que a medida  $\nu$  perderá relevância a partir de agora. A medida  $\nu$  perderá mais destaque ainda sabendo que ela não é única, no sentido que poderemos definir muitas  $\nu_\varepsilon$  com as seguintes propriedades:

- se uma medida  $\mu$  é invariante para o processo então ela é  $\nu_\varepsilon$ -invariante.
- o semigrupo gerado por  $\sup \nu_\varepsilon$  é  $\bigcup_{t>0} \sup P_t(1, \cdot)$ .

E estas duas propriedades serão as únicas necessárias para gerar as medidas invariantes em  $N$ .

**Lema 7.6** *Seja  $\mu$  medida em  $N$  invariante pelo processo. E seja  $\nu_\varepsilon$  uma medida em  $G$  definida por*

$$\nu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon P_t(1, \cdot) dt.$$

*Então  $\mu$  é  $\nu_\varepsilon$ -invariante.*

**Demonstração.**

$$\begin{aligned}
(v_\varepsilon * \mu)f &= \int_N \left( \int_G f(gm) d \left[ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon P_t(1, g) dt \right] \right) d\mu(m) \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \int_N \left( \int_G f(gm) d [P_t(1, g)] \right) d\mu(m) dt \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \int_N \left( \int_N f(\cdot) d [P_t^N(m, \cdot)] \right) d\mu(m) dt \quad (\text{por (7.7)}) \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \int_N T_t f(\cdot) d\mu(\cdot) dt \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \int_N f(\cdot) d\mu(m) dt \quad (\text{por invariância}) \\
&= \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon dt \right) \mu(f) \\
&= \mu(f)
\end{aligned}$$

■

### 7.3 O operador Laplace-Beltrami

No capítulo V de Ikeda-Watanabe [14] §4, teorema 4.6 achamos uma fórmula explícita para uma medida invariante para um determinado processo. Nos capítulos seguintes vamos usar esse resultado para achar medidas invariantes para nosso processo.

Em nosso caso  $N$  será o i.c.s em  $G/P_\Theta$  munido de uma métrica Riemanniana. Veremos mais tarde no Capítulo 9 que essa métrica surge do difeomorfismo entre o i.c.s e o fecho de um espaço simétrico  $L/K'$ .

Primeiro o teorema 4.2 de Ikeda-Watanabe [14] diz

**Teorema 7.7** *Seja  $N$  uma variedade Riemanniana. Consideremos a conexão de Levi-Cevita. Seja  $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_d$  o sistema canônico horizontal de campos de vetores. Considere em  $O(N)$  (o fibrado de bases ortogonais) a equação diferencial*

$$\begin{aligned}
dr(t) &= \sum_{\alpha=1}^d \tilde{L}_\alpha(r(t)) \circ dw^\alpha(t) \\
r(0) &= r
\end{aligned}$$

onde  $w(t) = (w^\alpha(t))$  é a realização canônica de um processo de Wiener  $d$ -dimensional. Então a solução define um fluxo de difeomorfismos  $r(t) = (r(t, r, w))$  em  $O(N)$  e sua projeção sobre  $N$ ,  $X(t) = \pi[r(t)]$  define um processo de difusão em  $N$  correspondente com o operador diferencial  $A' = \frac{1}{2}\Delta_N$ .

**Observação 7.8** No teorema original em Ikeda-Watanabe [14]  $A' = \frac{1}{2}\Delta_N + c$ , onde  $c$  é um campo que depende da conexão Riemanniana. Como nós estamos utilizando apenas a conexão de Levi-Cevita temos que  $c = 0$ .

O operador  $\Delta_N$  conhecido como operador de Laplace-Beltrami (ver definição no Capítulo V, equação (4.31), Ikeda-Watanabe [14]) e veremos que o processo que ele define coincide com a processo estocástico sem drift (7.3) que definiremos com detalhe mais adiante.

Contudo estamos interessados num processo estocástico um pouco mais geral que surge de um operador diferencial  $A$  definido por

$$A = \frac{1}{2}\Delta_N + b \quad (7.8)$$

onde  $\Delta_N$  é o operador de Laplace-Beltrami e  $b$  é um campo em  $N$  qualquer (pág 290, fórmula 4.4 Ikeda-Watanabe [14])

**Notação 7.9** Chamaremos o processo acima definido  $A$ -difusão.

Do teorema 4.6 de Ikeda-Watanabe [14] se desprende diretamente o seguinte resultado

**Teorema 7.10** Se  $b$  o campo em (7.8) é gradiente em relação á métrica de  $N$ , isto é,

$$b = \text{grad}(F)$$

com  $F \in C^\infty(N)$ . Então  $\mu$ , a única medida invariante em  $N$  para a  $A$ -difusão, terá uma derivada de Radon-Nikodym em relação à medida volume definida pela métrica em  $N$  da forma

$$\frac{d\mu}{dx} = \bar{c}e^{2F}$$

onde  $\bar{c}$  é uma constante para que a medida seja de probabilidade.

Esta teorema, que mostra a forma explícita para uma medida invariante será o que nos possibilitará achar a forma explícita das medidas invariantes para nosso processo. A dificuldade radicará apenas em demonstrar que o campo  $b$  é um campo gradiente.

Vale a pena observar que quando  $b = 0$  a  $A$ -difusão é um movimento Browniano.

### 7.3.1 O processo em $K' \setminus L$

Veremos agora como os términos de (7.8) são encontrados a partir da dinâmica que gera a equação (7.2) no espaço simétrico  $K' \setminus L$ . Como veremos com detalhe no Capítulo 9  $L$  será um subgrupo semi-simples do grupo  $G$ , a álgebra de Lie  $\mathfrak{l}$  de  $L$  tem uma decomposição de Cartan em parte simétrica  $\mathfrak{s}$  é anti-simétrica  $\mathfrak{k}$ . Definimos  $K' = \exp(\mathfrak{k})$ . Assim como é sabido o espaço homogêneo  $K' \setminus L$  chamado *espaço simétrico* tem uma estrutura de variedade Riemanniana, herdada pela métrica de Cartan-Killing em  $\mathfrak{s}$ . Assim agora podemos pensar  $N = K' \setminus L$ .

Veremos também como  $K' \setminus L$  se identifica com o  $S$ -i.c.s de uma variedade flag  $F_\Theta$  específica. Assim uma equação diferencial estocástica em  $G$  como (7.2) ou, equivalentemente, uma equação diferencial estocástica em  $F_\Theta$  como (7.4) gera um processo em  $K' \setminus L \subset F_\Theta$ .

Os campos da equação (7.2) surgem da seguinte forma.

- Veremos que  $H_0$  que é um elemento na álgebra  $\mathfrak{g}$  que surge a partir da estrutura de par simétrico de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$  (ver 9.3). Independentemente de isso  $H_0$  gera um campo

$$\vec{H}_0(x) = \frac{d}{dt} (\exp tH_0) x|_{t=0}$$

em  $F_\Theta$ , consideraremos sua restrição à  $K' \setminus L \subset F_\Theta$  e denotaremos esse campo em  $K' \setminus L$  com a letra  $b$  para seguir a notação de Ikeda-Watanabe [14]. Vale a pena destacar que o fluxo gerado pelo campo tem a forma de uma contração na origem de  $F_\Theta$  quando  $t > 0$ .

- Os campos  $Z_1, \dots, Z_m$  são uma base ortogonal de  $\mathfrak{s}$ , e os campos invariantes à direita gerados por elementos em  $\mathfrak{s}$  são os campos *standard* do espaço simétrico  $K' \setminus L$  (ver Maliavin e Maliavin [16]) (analogamente os campos invariantes à esquerda são os campos *standard* de  $L/K'$ ). Assim podemos afirmar que a equação diferencial estocástica (7.3) gera

um processo que coincide com o processo definido no teorema 7.10. Vale apenas mencionar que este processo é um *movimento Browniano* (ver Ikeda-Watanabe [14]).

Podemos resumir o exposto até agora no seguinte

**Teorema 7.11** *Seja  $G$  um grupo de Lie,  $L$  um subgrupo de Lie semi-simples com parte simétrica  $\mathfrak{s}$  e  $\{Z_1, \dots, Z_r\}$  uma base ortonormal se  $\mathfrak{s}$  em relação com a forma de Cartan-Killing e  $K' = \exp(\mathfrak{k})$  o compacto maximal de  $L$ . Seja  $H_0$  em  $G$  tal que a projeção do fluxo  $\exp(tH_0)$ ,  $t > 0$  em  $K' \setminus L$  é da forma  $\text{grad}F$ . Então a única medida  $\mu$ , invariante para o processo definido por (7.2), e portanto  $\nu$ -invariante, tem derivada de Radon-Nygodin forma*

$$\frac{d\mu}{dx} = \bar{c}e^{2F}$$

onde  $dx$  representa a medida volume definida pela métrica (proveniente da forma de Cartan-Killing) em  $M$ ; e  $\bar{c}$  é tal que a medida seja de probabilidade.

Demonstraremos no capítulo 9 que o campo  $b$  é gradiente de uma função; e assim aplicando este resultado conseguiremos a forma explícita da medida  $\nu$ -invariante. Aplicaremos imediatamente todo o exposto no Capítulo 8.



# Capítulo 8

## Exemplo da Construção do Campo

Neste capítulo continuaremos desenvolvendo o exemplo do Capítulo 6. Agora estaremos interessados em achar uma forma explícita da medida  $\nu$ -invariante na grassmanniana utilizando os resultados do capítulo 7. Por isso será essencial utilizar o fato de que o suporte da medida invariante procurada tem uma estrutura de variedade Riemanniana como mostraremos mais adiante. O contexto deste capítulo será generalizado no Capítulo 9 mas vale a pena previamente ter um exemplo intuitivo que facilitará a compreensão.

### 8.1 A métrica em $\mathcal{O}^+$

**Hipótese 8.1** *Fixaremos os valores  $a = b = 1$  para facilitar as contas (ver Definição 6.1).*

**Notação 8.2**  $k = p$  e  $q = n - k$ . Lembremos que  $\mathfrak{so}(p, q)$  a álgebra de Lie de  $\mathrm{SO}_0(p, q)$  que descompõem em

$$\mathfrak{so}(p, q) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$$

*Notaremos*

- $L := \mathrm{SO}_0(p, q)$
- $S' := \exp \mathfrak{s}$

- $K' := \text{SO}(p) \otimes \text{SO}(q) = \exp \mathfrak{k}$
- A medida invariante em  $\text{Gr}_p(p+q)$  será denotada por  $\mu$ .

Então é claro que  $L = K'S'$  e que  $L/K'$  (o espaço simétrico de  $L$ ) é isomorfo com  $S'$ .

Lembremos que o suporte de  $\mu$  é  $fe\mathcal{O}^+$ , e que  $\mathcal{O}^+$  é a órbita de  $b_0$  pela ação do grupo  $L$  (ver 6.13).

Vamos demonstrar agora que a isotropia de  $b_0$  é  $K'$ .

**Lema 8.3** *Seja  $b_0$  a identidade em  $\text{Gr}_p(p+q)$ . A isotropia de  $b_0$  pela ação do grupo  $\text{SO}_0(p, q)$  é  $\text{SO}(p) \times \text{SO}(q)$ .*

**Demonstração.** Em  $\text{Gr}_p(p+q)$  a identidade é o subespaço de dimensão  $p$  gerado pelos primeiros  $p$  vetores canônicos, i.e.,

$$b_0 = E_p = \langle e_1, \dots, e_p \rangle$$

Assim se  $A$  é uma matriz inversível que verifica  $AE_p = E_p$  então pode ser escrita em blocos

$$A = \begin{pmatrix} g_{p \times p} & r_{p \times q} \\ 0 & h_{q \times q} \end{pmatrix}$$

com  $g$  e  $h$  inversíveis e  $r$  qualquer. Mas como  $A \in \text{SO}(p, q)$  então verifica  $A^T I_k A = I_k$  (ver fórmula (6.1)). Assim

$$\begin{pmatrix} g^T & 0 \\ p & h^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & r \\ 0 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^T g & g^T r \\ rg & r^T r - h^T h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Isso implica  $g \in \text{O}(p)$ ,  $p = 0$ ,  $h \in \text{O}(q)$ . Mas como  $A \in \text{SO}_0(p, q)$  conexo, apenas posso considerar os  $A$  em

$$\begin{pmatrix} \text{SO}(p) & 0 \\ 0 & \text{SO}(q) \end{pmatrix}$$

Esta é uma condição necessária e facilmente notamos que é suficiente. ■

Estão agora podemos enunciar que

**Corolário 8.4**  $\mathcal{O}^+ \approx L/K'$

**Notação 8.5** *Notar que podemos identificar  $b_0 = E_p$  a classe da identidade em  $\text{Gr}_p(p+q)$  com  $b_1 = K'$  a classe da identidade em  $L/K'$ . Denotaremos eles com diferentes símbolos para saber em que espaço estamos trabalhando. Também, quando  $g \in G$  age num elemento de  $x \in L/K'$  notaremos  $g \cdot x$  para distinguir da mesma ação pensada em  $\text{Gr}_p(p+q)$  que notamos apenas por  $gx$ .*

Disso podemos concluir que  $\mathcal{O}^+$  possui uma métrica herdada de  $\mathfrak{s}$ : Em  $L/K'$  existe uma métrica Riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  invariante por  $L$ , isto é, os elementos de  $L$  agem por isometrias de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Como a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é invariante, basta especificá-la na origem  $b_1 = K' \in L/K'$ , o que é feito da seguinte forma: o espaço tangente  $T_{b_1}(L/K')$  se identifica com  $\mathfrak{s}$  e o valor de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $\mathfrak{s}$  é o produto interno dado pela restrição da forma de Cartan-Killing a  $\mathfrak{s}$  (como  $\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  é uma decomposição de Cartan, a restrição da forma de Cartan-Killing a  $\mathfrak{k}$  é negativa definida e a  $\mathfrak{s}$ , positiva definida).

Assim  $\mathcal{O}^+ = L/K'$  e estamos nas condições do teorema 7.11 do Capítulo 7. Apenas necessitamos demonstrar que a parte determinística da equação diferencial produz um campo que é gradiente de uma função em relação a métrica de  $L/K'$ .

### 8.1.1 O abeliano maximal

**Hipótese 8.6** *Para simplificar os cálculos vamos assumir que  $p \leq q$ .*

A parte simétrica  $\mathfrak{s}$  pode ser escrita como

$$\mathfrak{s} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix} : \beta_{q \times q} \right\}$$

Consideremos as matrizes  $p \times q$  da forma

$$\beta = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_p & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (D : 0)$$

Não é difícil ver que o subconjunto  $\mathfrak{a}$  de  $\mathfrak{s}$  definida por

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix} : \beta = (D : 0) \right\}$$

é uma álgebra abeliana maximal de  $\mathfrak{s}$ , isomorfo com o espaço das matrizes diagonais  $p \times p$ .

**Notação 8.7**  $A := \exp \mathfrak{a}$

A aplicação exponencial

$$\exp : \mathfrak{s} \rightarrow S'$$

é um difeomorfismo. Da mesma forma, é um difeomorfismo a aplicação exponencial restrita

$$\exp : \mathfrak{a} \rightarrow A.$$

E já vimos que a aplicação

$$\pi : S' \mapsto L/K' \text{ definida por } g \mapsto g \cdot b_1$$

é um difeomorfismo sobre todo  $L/K'$ . A restrição dessa aplicação a  $A \subset S'$ , i.e,

$$A \mapsto A \cdot b_1$$

tem que ser um isomorfismo sobre a imagem  $A \cdot b_1$ . Assim temos os isomorfismos

$$\begin{aligned} \mathfrak{s} &\xrightarrow{\exp} S' \xrightarrow{\pi} L/K' \\ \mathfrak{a} &\xrightarrow{\exp} A \xrightarrow{\pi} A \cdot b_1 \end{aligned}$$

Resumindo, todas aplicações do digrama são homeomorfismos e o diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} & & (\mathfrak{s}, \mathfrak{a}) \\ & & \downarrow \exp \\ & & (S', A) \\ & \swarrow \pi & \downarrow \bar{\pi} \\ (S' \cdot b_1, A \cdot b_1) & \longleftrightarrow & (S'b_0, Ab_0) \end{array} \quad (8.1)$$

A restrição da métrica  $(\cdot, \cdot)$  a  $A \cdot b_1$  é facilmente reconhecível: como  $\exp : \mathfrak{a} \rightarrow A$  é um difeomorfismo,  $\mathfrak{a} \rightarrow A \rightarrow A \cdot b_1$  é um difeomorfismo. Usando esse difeomorfismo, pode-se definir uma métrica Riemanniana em  $\mathfrak{a}$ . Como  $A$  é um grupo abeliano (isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ ) esse difeomorfismo leva a restrição de  $(\cdot, \cdot)$  a uma métrica em  $\mathfrak{a}$  invariante por translações. Isso significa que essa restrição é nada mais nada menos que um múltiplo da métrica euclidiana definida pelo produto interno dado pela forma de Cartan-Killing.

**Exemplo 8.8** Para  $p = 2$  e  $q = 2$  temos que  $\mathfrak{a}$  está formado pelas matrizes

$$\{x, y\} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A forma quadrática definida pela forma de Cartan-Killing para  $X, Y \in \mathfrak{a}$  verifica

$$\text{Tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)) = 2\text{Tr}(XY)$$

então

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\text{ad}\{x, y\}\text{ad}\{x, y\}) &= 2\text{Tr}(\{x, y\}\{x, y\}) = \\ 2\text{Tr} \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y^2 \end{pmatrix} &= 2 \cdot 2(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

**Notação 8.9** Existe uma constante de diferença entre a métrica de Cartan-Killing com a métrica euclídea  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  onde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as coordenadas da parte abeliana na representação matricial que usamos. A partir de agora essa métrica será mencionada como métrica de Cartan-Killing.

### 8.1.2 A conjugação

É importante destacar que todo elemento de  $\mathfrak{s}$  é conjugado a um elemento de  $\mathfrak{a}$  por um elemento de  $K$ , isto é, dado  $X \in \mathfrak{s}$ , existe  $u \in K$  tal que  $\text{Ad}(u)X \in \mathfrak{a}$ . Isso vale também ao nível do grupo: dado  $s \in S'$  existe  $u \in K$  tal que  $usu^{-1} \in A$ . Sabendo primeiro restringiremos nossa atenção ao fluxo gerado em  $A \cdot b_1$ . Acharemos então uma função  $f$  cujo gradiente coincida com o campo gerado pelo fluxo em  $A \cdot b_1$  e estenderemos essa função por conjugação.

### 8.1.3 A Grassmanniana

Recapitulando: a órbita  $\mathcal{O}^+ = Lb_0 = \text{SO}_0(p, q)b_0$  é um aberto da Grassmanniana  $\text{Gr}_p(p+q)$  e é dada, como espaço homogêneo, pelo espaço simétrico  $L/K'$ . É claro que também  $\mathcal{O}^+ = S' \cdot b_1$

A sub variedade totalmente geodésica  $Ab_0$  é descrita da seguinte maneira: seja

$$d = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}$$

com  $\beta = (D : 0)$ ,  $D = \text{diag}\{a_1, \dots, a_p\}$ .

Então,

$$\exp H = \begin{pmatrix} \cosh D & \sinh D & 0 \\ \sinh D & \cosh D & 0 \\ 0 & 0 & 1_{(q-p)} \end{pmatrix}.$$

Onde, por exemplo,  $\cosh D$  deve entender como

### Notação 8.10

$$\cosh D = \text{diag}\{\cosh a_1, \dots, \cosh a_p\}$$

*analogamente*  $\tanh$  e  $\sinh$ .

Por outro lado

$$(\exp H) b_0 = \begin{pmatrix} \cosh D \\ \sinh D \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mas dividindo a coluna  $i$  por  $\cosh a_i$  temos que na  $\text{Gr}_p(p+q)$  vale

$$\begin{pmatrix} \cosh D \\ \sinh D \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tanh D \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

Portanto,  $Ab_0$  são representados por matrizes  $(p+q) \times p$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & D : 0 \\ (D : 0)^T & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\exp} \begin{pmatrix} \cosh D & \sinh D & 0 \\ \sinh D & \cosh D & 0 \\ 0 & 0 & 1_{(q-p)} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\bar{\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ \tanh D \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.3)$$

**Notação 8.11** As matrizes diagonais  $p \times p$  e as matrizes diagonais  $p \times p$  com entradas entre  $(-1, 1)$  serão denotadas respectivamente  $\mathcal{D}_{p \times p}$  e  $\mathcal{D}_{p \times p}^{(-1,1)}$ .

Assim temos uma cadeia de difeomorfismos

$$\mathcal{D}_{p \times p} \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow A \longrightarrow Ab_0 \longrightarrow \mathcal{D}_{p \times p}^{(-1,1)}$$

Esta composição será denotada  $\text{Tanh}$ . Como vimos em (8.3) a forma é

$$D \xrightarrow{\text{Tanh}} \tanh D \quad (8.4)$$

$$D \rightarrow H \rightarrow \exp(H) \rightarrow \exp(H) b_0 \rightarrow \tanh \exp(H) b_0 = \tanh D$$

### 8.1.4 O fluxo em $Ab_0$

Demonstramos no Capítulo 6 que fluxo  $\exp(H_0 t)$  para  $t > 0$  preserva  $S'b_0$  pois  $S'b_0 \approx \mathcal{O}^+$ . Veremos agora que também preserva a sub-variedade  $Ab_0$ . Para isso vamos descrever explicitamente o fluxo aplicado a um elemento de  $Ab_0$ . Lembremos que

$$H_0 = \begin{pmatrix} \alpha 1_p & 0 \\ 0 & -\beta 1_q \end{pmatrix},$$

Chamaremos  $H_0$  o elemento na álgebra de Lie (os campos invariantes à direita de  $G = \text{Sl}(n)$ ) gerado pela matriz  $I_k$ . E chamaremos  $\vec{H}_0$  o campo induzido por  $H_0$  em  $\text{Gr}_p(p+q)$ , i.e,

$$\vec{H}_0(x) = \frac{d}{dt} (\exp tH_0) x|_{t=0}$$

O fato de que os elementos da forma  $\exp(tH_0)$ , para  $t > 0$ , deixam  $\mathcal{O}^+$  invariante implica que o campo é completo em tempo positivo em  $\mathcal{O}^+$ . O fluxo que  $H_0$  produz em  $G$  é dado por

$$\exp(tH_0) = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{-\beta t} \end{pmatrix}.$$

Portanto, O fluxo de que  $H_0$  produz, aplicado num elemento  $(\exp H) \in A$ , é dado por

$$\exp(tH_0)(\exp H) = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cosh D & e^{\alpha t} \sinh D & 0 \\ e^{-\beta t} \sinh D & e^{-\beta t} \cosh D & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta t} 1_{(q-p)} \end{pmatrix}$$

Portanto,  $\exp(tH_0)(\exp H)b_0$  é equivalente a uma matriz da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-(\beta+\alpha)t} \tanh D \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como a forma é a mesma que em (8.2) demonstramos que o fluxo é preservado em  $Ab_0$ .

Se queremos ver todo em  $\mathcal{D}_{p \times p}^{(-1,1)}$

$$\alpha(t) = e^{-(\beta+\alpha)t} \tanh D$$

$$\alpha'(t) = \vec{H}_0^*(\alpha(t)) \text{ e } \alpha(0) = \tanh D$$

com  $\vec{H}_0$  pensado em  $\mathcal{D}_{p \times p}^{(-1,1)}$ .

**Notação 8.12**  $c := \beta + \alpha$

**Exemplo 8.13** *Seja  $\beta = \alpha = 1/2$ . Para  $p = 1$  e  $q = 1$  vimos que  $\mathcal{O}^+$  é o conjunto de retas em  $\mathbb{R}^2$  que passam pela origem com inclinação entre  $-\pi/4$  e  $\pi/4$ . É claro que quando aplicamos a matriz*

$$\exp t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$$

*todas essas retas (exceto a horizontal) se “movimentam” em direção à reta horizontal (o eixo das  $x$ 's)*

*Esse é o fluxo gerado em  $\mathcal{O}^+ = Ab_0$ .*

**Exemplo 8.14** *Ainda para  $p = 1$  e  $q = 1$  para ilustrar podemos tentar ver como é o fluxo em  $G = \text{Sl}(2)$ . Mediante uma projeção podemos eliminar uma dimensão e pensar que  $\text{Sl}(2)$  e todo  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  e que  $\text{SO}_0(1,1)$  é o subconjunto  $\{(\cosh(x), \sinh(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ . É claro que então a trajetória que*

gera o fluxo em um ponto  $(x, y)$  é  $(e^{\frac{1}{2}t}x, e^{-\frac{1}{2}t}y)$ , que não convergem para nenhum ponto em  $\mathbb{R}^2$ .

Como  $K' = \{1\}$  temos que  $\mathcal{O}^+ \approx \text{SO}_0(1, 1)$ , mas a ação de  $H_0$  tem que ser procurada em  $\mathcal{O}^+$  propriamente mediante a identificação; notemos que trajetórias não estão incluídas dentro de  $\text{SO}_0(1, 1)$  (de fato são sempre transversais).

### O fluxo em $\mathfrak{a}$

Pelo difeomorfismo inverso a Tanh o fluxo  $\alpha(t)$  determina um campo que também notaremos por  $\vec{H}_0$  no espaço  $\mathcal{D}_{p \times p}$  (ou, o que é a mesma coisa, em  $\mathfrak{a}$ ). O valor  $\vec{H}_0(D)$  é determinado da seguinte maneira: Seja  $D(t)$  a curva

definida por

$$\begin{aligned}\operatorname{Tanh} D(t) &= \alpha(t) \\ D(0) &= D\end{aligned}$$

Então  $\vec{H}_0(D) = D'(0)$ . Mas

$$\begin{aligned}\operatorname{Tanh} D(t) &= \tanh D(t) = e^{-ct} \tanh D \\ D(t) &= \operatorname{Tanh}^{-1}(e^{-ct} \tanh D) = \tanh^{-1}(e^{-ct} \tanh D)\end{aligned}$$

assim

$$e^{-ct} \tanh D = \tanh D(t). \quad (8.5)$$

Escreva  $D(t) = \operatorname{diag}\{D_1(t), \dots, D_p(t)\}$ .

Então, derivando (8.5) em relação a  $t$  e avaliando em 0, obtém-se

$$-c \tanh D_i = \frac{D'_i(0)}{\cosh^2 D_i} \quad i = 1, \dots, p.$$

Portanto,

$$D'_i(0) = -c \operatorname{senh}(D_i) \operatorname{cosh}(D_i).$$

Daí que

$$\vec{H}_0(D) = -c \operatorname{diag}\{\operatorname{senh}(D_1) \operatorname{cosh}(D_1), \dots, \operatorname{senh}(D_p) \operatorname{cosh}(D_p)\}.$$

Em relação ao produto interno canônico no espaço  $\mathcal{D}_{p \times p}$  (que é um múltiplo da forma de Cartan-Killing),  $\vec{H}_0$  é o campo gradiente de qualquer uma das seguintes funções:

- $-\frac{c}{2} (\operatorname{senh}^2(D_1) + \dots + \operatorname{senh}^2(D_p))$ .
- $-\frac{c}{2} (\operatorname{cosh}^2(D_1) + \dots + \operatorname{cosh}^2(D_p))$ .

Definimos então provisoriamente

$$f(D) := -\frac{c}{2} (\operatorname{senh}^2(D_1) + \dots + \operatorname{senh}^2(D_p)) \quad (8.6)$$

**Exemplo 8.15** Para  $p = 1$  e  $q = 1$

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix} : d \in \mathbb{R} \right\}$$

assim fica  $\mathcal{D}_{p \times p} = \{d : d \in \mathbb{R}\}$ . Assim, tomando  $c = 1$ ,  $f$  fica

$$f(d) = -\frac{1}{2} \sinh^2(d)$$

cujo gráfico é

Como  $\mathfrak{a} = \mathfrak{s}$  não é necessário estender a função. A forma da  $f$  mostra como o fluxo gerado por seu gradiente converge a um ponto, exatamente o 0. Fato que coincide com o visto no exemplo 8.13.

## 8.2 A função

Até agora conseguimos achar uma função cujo gradiente seja o campo gerado por  $H_0$  apenas sobre  $\mathfrak{a}$  [respec.  $Ab_0$ ]. Mas queremos achar uma a função com essa propriedade em todo  $\mathfrak{s}$  [respec.  $S'b_0$ ]. Para isso vamos utilizar o fato de que dado um elemento  $Y \in \mathfrak{s}$  [respec.  $y \in S'b_0$ ] sempre existe  $u \in K'$  tal que  $\text{Ad}(u)Y \in \mathfrak{a}$  [respec.  $uyu^{-1} = uy \in Ab_0$ ].

A partir disso poderemos estender a aplicação  $E$  em  $\mathfrak{s}$  que estenda  $f$  da seguinte maneira:

$$\text{para } Y \in \mathfrak{s} \quad E(Y) := f(\text{Ad}(u)Y) \text{ onde } \text{Ad}(u)Y \in \mathfrak{a} \quad (8.7)$$

Claro que primeiro devemos demonstrar que esta função está bem definida, ou seja, não depende do  $u$  escolhido. Analogamente, a  $\hat{f}$  achada em  $Ab_0$  se estenderá a uma função em toda  $S'b_0$  mediante a fórmula

$$\hat{E}(y) := \hat{f}(C_u y) \text{ onde } u \text{ verifica } C_u y \in Ab_0.$$

### 8.2.1 A função estendida

Primeiro redefinamos a  $f$  e vejamos que esta definição coincide com a anterior em  $\mathfrak{a}$ .

$$f(Y) := -\frac{c}{2} \operatorname{tr}(\sinh(\operatorname{ad}(X))^2) \text{ para } X \in \mathfrak{a} \quad (8.8)$$

( $\operatorname{ad}(X)$  é transformação linear simétrica e, portanto, pode-se calcular o seu  $\sinh$ ).

Notemos que para  $X \in \mathfrak{a}$  a fórmula (8.8) coincide com (8.6) a menos de uma constante. Para isso é suficiente notar que uma base adequada  $X$  é diagonal e como  $\mathfrak{a}$  é abeliana maximal a representação adjunta  $\operatorname{ad}(X)$  é diagonal também onde os autovalores de  $\operatorname{ad}(X)$  são os mesmo que os de  $X$  e que a multiplicidade de todos os autovalores de  $\operatorname{ad}(X)$  é a mesma.

#### Invariância pela adjunta

**Definição 8.16** *Pelo feito em (8.7) definimos a função  $E$  em  $\mathfrak{s}$  como*

$$E(Y) := -\frac{c}{2} \operatorname{tr}(\sinh(\operatorname{ad}(\operatorname{Ad}(u)Y))^2) \text{ para } Y \in \mathfrak{s} \text{ e com } \operatorname{Ad}(u)Y \in \mathfrak{a}$$

Para ver que é independente de  $u$  notemos que

$$\operatorname{ad}(\operatorname{Ad}(u)Y) = (\operatorname{Ad}(u)\operatorname{ad}Y\operatorname{Ad}(u)^{-1})$$

e que em geral  $(\sinh((KMK^{-1}))^2 = K\sinh(M)^2K^{-1}$ . E por último que  $\operatorname{tr}(KMK^{-1}) = \operatorname{tr}(M)$ .

Assim podemos simplificar a definição 8.16 afirmando que

$$E(Y) = -\frac{c}{2} \operatorname{tr}(\sinh(\operatorname{ad}(Y))^2) \text{ para } Y \in \mathfrak{s}$$

Assim  $E$  verifica ser uma função cujo gradiente coincide com o campo induzido por  $H_0$  em  $\mathfrak{s}$ . Analogamente

$$\hat{E}(\bar{\pi} \exp Y) = -\frac{c}{2} \operatorname{tr}(\sinh(\operatorname{ad}(y))^2) \text{ para } y = \bar{\pi} \exp Y \in S'b_0$$

onde aqui  $\log$  é a aplicação que identifica que  $S'b_0$  com  $\mathfrak{s}$ .

**Exemplo 8.17** *Para  $p = 1, q = 2$  e  $c = 1$  temos que  $\mathfrak{s}$  é formado pelas matrizes do tipo*

$$(x, z) := \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ x & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fazendo toda a conta conseguimos ver que

$$E((x, z)) = -\frac{1}{4} \left( -2 + e^{-2\sqrt{x^2+z^2}} + e^{2\sqrt{x^2+z^2}} \right).$$

E novamente podemos verificar que todos os fluxos convergem a um ponto.

**Observação 8.18** Esta última observação, que existe um atrator em  $L/K'$  que atraem todo o fluxo até ele, será generalizada mas tarde no lema 9.16.

### 8.2.2 A invariância em relação à métrica

Estamos interessados que o campo gerado seja gradiente de uma função, nesta sub-seção demonstraremos que

$$\nabla \hat{E}_y = \vec{H}_0(y)$$

**Lema 8.19** Se  $u \in K'$  então

$$u (\exp tH_0) = (\exp tH_0) u \quad (8.9)$$

**Demonstração.** Não apresenta dificuldade olhando matrizes em blocos.

■

**Notação 8.20**  $C_u x = u x u^{-1}$ .

Disso sai que o campo é preservado pela adjunta, ou seja

**Lema 8.21**

$$\vec{H}_0(C_u y) = \text{Ad}(u) \vec{H}_0(y) \quad \text{para } y \in S'b_0 \quad (8.10)$$

**Demonstração.**

$$\begin{aligned}\vec{H}_0(C_u y) &= \frac{d}{dt} (\exp tH_0) C_u y|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} C_u (\exp tH_0) y|_{t=0} \text{ por (8.9)} \\ &= dC_u \frac{d}{dt} (\exp tH_0) y|_{t=0} \\ &= \text{Ad}(u) \vec{H}_0(y)\end{aligned}$$

■

Agora notemos que esta propriedade junto com o fato de que  $\text{Ad}(u)$  preserva a forma de Cartan-Killing garante o que estamos procurando

**Lema 8.22** *Seja  $M$  variedade Riemanniana,  $h : M \rightarrow M$  um difeomorfismo tal que  $dh$  é isotropia para a métrica  $M$ . Então para dada uma  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , e tomando gradiente para a métrica de  $M$*

$$dh(\nabla f_a) = \nabla(f \circ h^{-1})_{ha} \quad (8.11)$$

**Demonstração.** Trivial usando a definição que  $\nabla f$  é o vetor que verifica  $\langle \nabla f, v \rangle = df(v)$  ■

Tomando  $v = u^{-1}$ ,  $h = C_v$  temos  $dh = \text{Ad}(v)$  então conseguimos

$$\begin{aligned}\vec{H}_0(y) &= \vec{H}_0(C_v x) = \text{Ad}(v) \vec{H}_0(x) \text{ por (8.10)} \\ &= \text{Ad}(v) \nabla \hat{f}_x = dC_v \nabla \hat{f}_x \\ &= \nabla(\hat{f} \circ C_{v^{-1}})_{C_v x} \text{ por (8.11)} \\ &= \nabla \hat{E}_y\end{aligned}$$

**Proposição 8.23**  $\vec{H}_0(y) = \nabla \hat{E}_y$  para todo  $y \in S'b_0$

### 8.2.3 A função em $K' \setminus L$

Mas nós estamos interessados no processo estocástico gerado em  $L/K'$  senão em  $K' \setminus L$ . A forma mais simple de descrever este fluxo é a partir de álgebra de Lie  $\mathfrak{s}$ , para isso consideramos o diagrama comutativo de difeomorfismos

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{s} & \xleftarrow{-\text{Id}} & \mathfrak{s} \\ \downarrow \pi \circ \exp & & \downarrow \pi_D \circ \exp \\ L/K' & \xleftarrow{i} & K' \setminus L\end{array}$$

onde

**Notação 8.24**  $i(gK) := Kg^{-1}$ ,  $\pi_D$  é a projeção de  $L$  em  $K' \setminus L$ .

Seja  $\gamma_t$  o fluxo de difeomorfismos em  $S'b_0$  que via  $S'b_0 \longrightarrow S' \cdot b_1 = L/K'$  (ver diagrama (8.1)) gera o fluxo  $\alpha_t$  que como vimos verifica

$$\frac{d}{dt}\alpha_t = \vec{H}_0$$

Subindo mais um pouco no digrama (8.1) temos um fluxo de difeomorfismos que chamaremos  $\eta_t$  em  $\mathfrak{s}$ , que é o fluxo que chegou até  $\mathfrak{s}$  via as identificações

$$S' \cdot b_1 = L/K' \longrightarrow S \longrightarrow \mathfrak{s}$$

Aplicando  $\pi_D \circ \exp \circ -\text{Id}$  obtemos o fluxo em  $K' \setminus L$  que chamaremos  $\beta_t$ . Como o diagrama comuta simplesmente posso obter o fluxo compondo  $i$ , i.e.,

$$i(\alpha_t) = \beta_t$$

Continuando

$$\frac{d}{dt}i(\alpha_t) = di\left(\frac{d}{dt}\alpha_t\right) = di(\vec{H}_0) = di(\nabla \hat{E})$$

mas não é difícil ver que  $i$  é isometria entre as respectivas métricas dos espaços simétricos  $L/K'$  e  $K' \setminus L$ , de isso

$$di(\nabla \hat{E}) = \nabla(\hat{E} \circ i)$$

pelo lema 8.22. Assim

**Proposição 8.25**

$$\nabla(\hat{E} \circ i) = \frac{d}{dt}\beta_t$$

Este fluxo  $\beta_t$  é o gerado pela parte determinística da equação diferencial (7.1). E conseguimos escrever o campo que gera como um gradiente de uma função. Assim estamos nas condições do teorema 7.11. E assim podemos achar explicitamente a medida invariante para o processo.

**Observação 8.26** Não é difícil ver que a função correspondente em  $\mathfrak{s}$  é a mesma. Para isso é suficiente notar que o fluxo é radial e que  $-\text{Id}$  deixa esse fluxo invariante.



# Capítulo 9

## Medidas invariantes em Espaços Simétricos.

Neste Capítulo concentraremos nossa atenção nos grupos de Lie simples que tem uma estrutura de espaço simétrico afim *regular* (ou do *tipo hermitiano*). Se  $G$  é um grupo de Lie simples de centro finito e  $L$  é um subgrupo, definiremos em 9.1 o par simétrico  $(G, L)$ . Quando exista uma subálgebra  $\mathfrak{c}$  da álgebra de  $G$  específica o par será chamado de *tipo hermitiano* (ver Definição 9.3). Nesta sub-álgebra  $\mathfrak{c}$  tomaremos um elemento  $H_0$  que utilizaremos para a parte determinística da equação diferencial estocástica definida no Capítulo 7, equação (7.2). Acrescentando algumas hipóteses (ver [12]) os campos da parte estocástica dessa equação surgirão da parte simétrica de uma sub-álgebra de Lie de  $L$ . Com toda esta estrutura demonstraremos como estamos nas condições do teorema 7.11. E assim teremos uma forma explícita de uma medida invariante no flag correspondente ao tipo parabólico. Na seção 9.6 veremos como estas medidas podem ser levantadas ao flag maximal e aos revestimentos deste.

### 9.1 Espaço Simétrico Afim Regular

**Definição 9.1** *Seja  $G$  um grupo de Lie simples com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\tau : G \rightarrow G$  um automorfismo involutivo de ordem 2, i.e.,  $\tau^2 = 1$  e  $\tau \neq 1$ . Seja*

$$G^\tau = \{x : \tau(x) = x\}$$

*o conjunto de pontos fixos de  $\tau$ . Chamaremos  $(G, \tau)$  par simétrico. Chamaremos espaço simétrico afim a todo subgrupo  $L$  que verifique  $G_0^\tau \subset L \subset G^\tau$ .*

**Notação 9.2** Uma terna  $(G, L, \tau)$  como acima será chamado simétrico também.

Claramente  $G^\tau$  é um subgrupo fechado e portanto um grupo de Lie, denotaremos sua álgebra de Lie  $\mathfrak{l}$ . Notemos que todos os espaços simétricos afins em relação com  $\tau$  tem a mesma álgebra de Lie. O automorfismo  $\tau$  define no nível da álgebra um automorfismo  $d\tau$  que notaremos abusivamente por  $\tau$ , que também é involutivo de ordem 2. Toda automorfismo desse tipo gera uma decomposição em dois autoespaços de autovalores 1 e  $-1$ . O autoespaço de autovalor 1 coincide com  $\mathfrak{l}$ . Chamaremos  $\mathfrak{g}(-1, \tau)$  o outro autoespaço, assim

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{g}(-1, \tau).$$

O par  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$  (ou  $(\mathfrak{g}, \tau)$ ) é chamado par simétrico também. No entanto estamos interessados em pares simétricos de um tipo mais específico, os pares simétricos de tipo *hermitiano* ou *regular* que explicaremos mais adiante.

### 9.1.1 A hipótese

Assumiremos como hipótese que  $\mathfrak{l}$  é semi-simples. Com esta hipótese garantimos que a representação adjunta de  $\mathfrak{l}$  em  $\mathfrak{g}(-1, \tau)$  é irredutível (ver Faraut e Olafsson [8] teorema 2.2.).

### 9.1.2 As decomposições

A teoria dos espaços simétricos (ver por exemplo [17]) garante que existe uma involução de Cartan  $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  que comuta com  $\tau$ . Analogamente  $\mathfrak{g}$  se decompõe em autoespaços  $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}(+1, \theta)$  e  $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}(-1, \theta)$ . Assim temos a decomposição de Cartan em parte antisimétrica e simétrica respectivamente

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$$

Esta decomposição induz em  $\mathfrak{l}$  também uma decomposição de Cartan

$$\mathfrak{l} = (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{s}) = \mathfrak{l}_k \oplus \mathfrak{l}_s$$

Por outro lado temos que

$$\mathfrak{g}(-1, \tau) = (\mathfrak{g}(-1, \tau) \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{g}(-1, \tau) \cap \mathfrak{s}) = \mathfrak{g}(-1, \tau)_k \oplus \mathfrak{g}(-1, \tau)_s$$

E assim a álgebra  $\mathfrak{g}$  se decompõe na soma direta

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l}_k \oplus \mathfrak{l}_s \oplus \mathfrak{g}(-1, \tau)_k \oplus \mathfrak{g}(-1, \tau)_s$$

Como  $\tau$  e  $\theta$  são automorfismos de ordem 2, valem os colchetes:

- $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \subset \mathfrak{l}$ ,
- $[\mathfrak{l}, \mathfrak{g}(-1, \tau)] \subset \mathfrak{g}(-1, \tau)$ ,
- $[\mathfrak{g}(-1, \tau), \mathfrak{g}(-1, \tau)] \subset \mathfrak{l}$ ,
- $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$ ,
- $[\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$ ,
- $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{k}$ .

Em particular, o subespaço  $\mathfrak{l}^a = \mathfrak{l}_k \oplus \mathfrak{g}(-1, \tau)_s$  é uma subálgebra. Denote por  $\mathfrak{z}(\mathfrak{l}^a)$  seu centralizador em  $\mathfrak{g}$ . Agora estamos em condições de definir um par *regular*

**Definição 9.3** *O par simétrico  $(\mathfrak{g}, \tau)$  (ou  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$ ) é dito simétrico regular (ou de tipo hermitiano) se  $\mathfrak{z}(\mathfrak{l}^a) \cap \mathfrak{g}(-1, \tau)_s \neq \{0\}$ . Esta álgebra será denotada por  $\mathfrak{c}$ . O espaço homogêneo  $G/L$  é chamado espaço simétrico afim regular ou hermitiano.*

Quando o par é regular é possível demonstrar que  $\mathfrak{c} = \mathfrak{z}(\mathfrak{l}^a) \cap \mathfrak{g}(-1, \tau)_s$  tem dimensão 1 (ver Hilgert e Neeb [12] teorema V.1). Assim  $\mathfrak{c}$  é uma subálgebra abeliana contida em  $\mathfrak{g}(-1, \tau)_s$ . Seja  $\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}(-1, \tau)_s}$  uma subálgebra abeliana maximal de  $\mathfrak{g}(-1, \tau)_s$  que contem  $\mathfrak{c}$ . Considere  $\mathfrak{a}$  uma subálgebra abeliana maximal de  $\mathfrak{s}$  que contenha  $\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}(-1, \tau)_s}$ . A partir de  $\mathfrak{a}$ , como é usual, geramos um conjunto de raízes  $\Pi$  onde, se  $\alpha$  é uma raiz  $\mathfrak{g}_\alpha$  é seu espaço associado.

É um resultado clássico na literatura que para  $H \in \mathfrak{c}$  não nulo, os autovalores de  $\text{ad}(H)$  são 0,  $+a$ ,  $-a$ . Normalizemos um  $H_0$  tal que os autovalores  $\text{ad}(H)$  sejam 0, 1, e  $-1$ .

### 9.1.3 A classificação

Os espaços simétricos afins estão todos classificados. O fato de que  $\mathfrak{z}(\mathfrak{l}^a) \cap \mathfrak{g}(-1, \tau)_s \neq \{0\}$  implica em particular que  $\mathfrak{z}(\mathfrak{l}^a) \cap \mathfrak{s} \neq \emptyset$ , que significa que o par é do tipo *Causal Não Compacto* (ver por exemplo Olafsson [19] teorema 2.2.). Como pode ser visto em Faraut e Olafsson [8] todas as sub-álgebras  $\mathfrak{l}$  são simples exceto no caso  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p+1, q+1)$  e  $\mathfrak{l} = \mathfrak{so}(p, 1) \oplus \mathfrak{so}(1, q)$ . Em todos os casos pode ser verificado que  $[\mathfrak{l}_s, \mathfrak{l}_s] = \mathfrak{l}_k$  fato que será importante mais adiante.

## 9.2 A equação estocástica

Agora estamos em condições de apresentar exatamente a forma da equação diferencial estocástica que consideraremos sobre  $G$ :

$$dg = H_0(g) dt + \sum_{j=1}^m Z_j(g) \circ dW_j \quad (9.1)$$

Por um lado  $H_0$  é precisamente o elemento de  $\mathfrak{c}$  normalizado tal que os autovalores de  $\text{ad}(H_0)$  sejam 0, 1, e  $-1$ .

Por outro lado a álgebra  $\mathfrak{l}$  semi-simples possui a decomposição de Cartan

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_k \oplus \mathfrak{l}_s$$

e a forma de Cartan-Killing é definida positiva em  $\mathfrak{l}_s$  e definida negativa em  $\mathfrak{l}_k$ . Os  $Z_j$  com  $j = 1 \dots m$  serão tomados formando uma base ortogonal (para a forma de Cartan-Killing) de  $\mathfrak{l}_s$ . Esta equação estocástica gerará um semigrupo com suficientes simetrias para conseguir calcular as medidas invariantes em relação as medidas definidas no Capítulo 7.

A partir das informações que temos já é possível anunciar algumas características do semigrupo que esta equação gera, as quais serão provadas na sequência.

**$S$  contem  $G_0^\tau$**

Isso sai imediatamente do fato que a álgebra de Lie gerada pelos campos  $Z_1, \dots, Z_m$  da parte estocástica é  $\mathfrak{l}$ , a álgebra de Lie  $G_0^\tau$ . Para ver que  $\mathcal{L}(Z_1, \dots, Z_m) = \mathfrak{l}$  primeiro notemos que  $[\mathfrak{l}_s, \mathfrak{l}_s] = \mathfrak{l}_k$  como foi visto em 9.1.3.

$\text{int}S \neq \emptyset$

Para demonstra isso temos que provar que  $\mathcal{L}(H_0, Z_1, \dots, Z_m) = \mathfrak{g}$ .

**Lema 9.4**  $H_0 \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ .

**Demonstração.** Por absurdo suponhamos a hipótese falsa. Em particular  $H_0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l}_s)$ . Pela construção  $H_0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l}^a)$ , em particular  $H_0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}(-1, \tau)_s)$ . Assim  $H_0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{s})$ . Mas  $H_0 \in \mathfrak{s}$ . Mas isso é impossível pois se escolhemos uma subálgebra de Cartan  $\mathfrak{a}$  tal que  $H_0 \in \mathfrak{a}$  então para toda raiz  $\alpha$  da decomposição induzida por  $\mathfrak{a}$  e todo  $V \in \mathfrak{g}(\alpha)$  temos  $\alpha(H_0)V = [H_0, V] = 0$ . Assim  $\alpha(H_0) = 0$  para toda  $\alpha$ , que implica  $H_0 = 0$ . ■

**Proposição 9.5**  $\mathcal{L}(H_0, \mathfrak{l}_s) = \mathfrak{g}$ .

**Demonstração.** Consideremos a decomposição

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l}_s \oplus \mathfrak{l}_k \oplus \mathfrak{g}(-1, \tau).$$

Como  $[\mathfrak{l}_s, \mathfrak{l}_s] = \mathfrak{l}_k$  então já temos que  $\mathcal{L}(H_0, \mathfrak{l}_s)$  gera como mínimo  $\mathfrak{l}_s \oplus \mathfrak{l}_k = \mathfrak{l}$ . Resta demonstrar que também gera  $\mathfrak{g}(-1, \tau)$ . Para isso é suficiente demonstrar que  $\mathfrak{g}(-1, \tau) \subset \mathcal{L}(H_0, \mathfrak{l})$ .

Como  $[\mathfrak{l}, \mathfrak{g}(-1, \tau)] \subset \mathfrak{g}(-1, \tau)$  podemos considerar a representação adjunta de  $\mathfrak{l}$  em  $\mathfrak{g}(-1, \tau)$ , ou seja, para cada  $l \in \mathfrak{l}$ , temos

$$\text{ad}(l) : \mathfrak{g}(-1, \tau) \longrightarrow \mathfrak{g}(-1, \tau).$$

Notaremos  $\text{ad}(\mathfrak{l})$  o conjunto de todas estas transformações. Notemos que por definição  $H_0 \in \mathfrak{g}(-1, \tau)$ , assim que tem sentido considerar  $\text{ad}(l)H_0$ . Como vimos em 9.1.1 esta representação é redutível. Definimos

$$V := \bigcup_{n \geq 0} \text{ad}(\mathfrak{l})^n H_0.$$

$V$  é todo  $\mathfrak{g}(-1, \tau)$ . Se não for assim  $V$  seria um espaço invariante, pela representação, e assim  $V$  é  $\{0\}$  ou  $\mathfrak{g}(-1, \tau)$ . Mas não pode ser  $\{0\}$  pois nesse caso  $\text{ad}(\mathfrak{l})H_0 = 0$ , ou seja  $H_0$  pertence ao centralizador de  $\mathfrak{l}$ , o que é absurdo pelo lema 9.4. Portanto  $\mathfrak{g}(-1, \tau) \subset \mathcal{L}(H_0, \mathfrak{l})$  ■

### 9.3 O tipo parabólico e os i.c.s para $S$

É de interesse geral e específico conhecer o tipo parabólico do semigrupo  $S$ . O interesse específico vem do fato que, como  $S$  é conexo, estamos nas condições do teorema 5.25 que encontra o espaço de Poisson a partir do tipo parabólico. O cálculo dos i.c.s's é de interesse também pois como já vimos, eles são os suportes das medidas invariantes que queremos calcular.

Continuando calcularemos exatamente o tipo parabólico e daremos uma caracterização dos i.c.s.. Antecipemos que o tipo parabólico de  $S$  é uma flag minimal, ou seja, o tipo parabólico  $\Theta \subset \Sigma$  é da forma  $\Theta = \Sigma - \{\alpha\}$ , com  $\alpha \in \Sigma$ .

Este cálculo está feito em [28]. O principal interesse deste artigo é demonstrar que se um trio simétrico  $(G, L', \tau)$  verifica que existe um semigrupo próprio  $S$  com interior não vazio tal que  $L' \subset S$ , então o par simétrico  $(G, \tau)$  tem que ser do tipo hermitiano. Depois da demonstração de esse resultado, [28], teorema 2.8 assumindo a partir desse momento todas as hipóteses anteriores e, por consequência, também assumindo que o par é regular; calcula o tipo parabólico no lema 2.9 e caracteriza o i.c.s no flag maximal como uma órbita aberta de  $L'$ .

Primeiramente notemos que nosso caso se ajusta às hipóteses, nosso par é regular por hipótese,  $S$  tem interior não vazio como já demonstramos e o subgrupo  $L'$  será precisamente  $G_0^\tau$ .

De fato, seja  $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$  uma câmara de Weyl tal que  $H_0$  está incluído no fecho de  $\mathfrak{a}^+$ . Denote por  $\Pi^+$  o conjunto das raízes positivas em relação a  $\mathfrak{a}^+$  e por  $\Sigma$  o conjunto das raízes simples correspondente. Então podemos afirmar que

**Notação 9.6** Denotaremos  $G_0^\tau$  simplesmente por  $L$ .

**Proposição 9.7**  $\Theta = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H_0) = 0\}$  é o tipo parabólico de  $S$ . E se  $C_{\mathbb{B}}$  é o  $S$ -i.c.s no flag maximal  $\mathbb{B}$  então  $C = \text{fe}(O)$  onde  $O$  é a órbita aberta de  $L$ .

**Demonstração.** Ver [28] lema 2.9 e teorema 2.10 ■

Como corolário imediato podemos afirmar que

**Corolário 9.8** O conjunto de controle invariante  $C'$  de qualquer flag  $\mathbb{B}'$  também é o fecho de uma órbita aberta pela ação de  $L$ .

**Demonstração.** Sem perda de generalidade suponhamos que a identidade  $d_0$  de  $\mathbb{B}$  está no i.c.s  $C_{\mathbb{B}}$ . Então  $O = Ld_0$ . Seja  $\pi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}'$ . Por um lado

$$C' = \pi(C_{\mathbb{B}}) = \pi(\text{fe}O) \subset \text{fe}\pi(O) = \text{fe}\pi(Ld_0) = \text{fe}L\pi(d_0)$$

Por outro lado

$$L\pi(d_0) = \pi(Ld_0) \subset \pi(C_{\mathbb{B}}) = C'$$

pois  $L \subset S$ . Aplicando fecho

$$\text{fe}L\pi(d_0) = \text{fe}C' = C'.$$

E assim temos que

$$C' = \text{fe}Lb_0$$

com  $b_0 = \pi(d_0)$  a identidade em  $\mathbb{B}'$ . O fato de que  $L\pi(d_0) = \pi L(d_0)$  é uma órbita aberta sai de que  $\pi$  é aberta. ■

**Proposição 9.9** *O tipo parabólico  $\Theta$  de  $S$  é maximal.*

**Demonstração.** Ver [28] teorema 2.10. e Proposition 1.10. ■

## 9.4 O Espaço Simétrico $X = L/K'$

Agora vamos demonstrar que se  $\mathbb{B}_{\Theta}$  é o tipo parabólico de  $S$  e  $b_0$  a identidade nesse espaço, então a órbita  $Lb_0$  é homeomorfa com  $X$ , o espaço simétrico de  $L$ . Para isso faz falta algumas definições e resultados

**Definição 9.10** *Com as escolhas feitas acima*

$$\mathfrak{n}_c^+ := \sum_{\alpha, \alpha(H_0)=1} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

$$\mathfrak{n}_c^- := \sum_{\alpha, \alpha(H_0)=-1} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

**Lema 9.11** 1.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_c^- \oplus \mathfrak{p}_{\Theta}$

2.  $\dim \mathfrak{n}_c^- = \dim \mathfrak{l}_s$

3.  $\mathfrak{l}_k \subset \mathfrak{p}_\Theta$

**Demonstração.**

1. Primeiro notemos que podemos decompor  $\mathfrak{g}$  em:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^-, \alpha(H_0)=0} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{n}_c^-$$

e

$$\mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{p}$$

a álgebra parabólica minimal. Por outro lado

$$\sum_{\alpha \in \Pi^-, \alpha(H_0)=0} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{n}^-(\Theta).$$

2. Ver Olafsson [20].

3. Notemos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha, \alpha(H_0)=0} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{n}_c^+ \oplus \mathfrak{n}_c^-$$

Assim é claro que  $\mathfrak{z}(H_0) = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha, \alpha(H_0)=0} \mathfrak{g}_\alpha$ . Também  $\mathfrak{l}^a \subset \mathfrak{z}(H_0)$  pois  $H_0 \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{l}^a)$ . Mas  $\mathfrak{l}_k \subset \mathfrak{l}^a$ . Assim  $\mathfrak{l}_k \subset \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha, \alpha(H_0)=0} \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{p}_\Theta$ . Esta última inclusão surge de  $\sum_{\alpha(H_0)=0} \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{n}^-(\Theta)$  e  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ .

■

**Lema 9.12** *Seja  $\mathbb{B}_\Theta$  o tipo parabólico e  $b_0$  a identidade nesse espaço. Seja  $K' := \exp(\mathfrak{l}_k)$ . Então a órbita  $Lb_0$  em  $\mathbb{B}_\Theta$  é homeomorfa com*

$$X := L/K',$$

o espaço simétrico de  $L$ .

**Demonstração.** Naturalmente

$$Lb_0 \approx L/L_{b_0} \tag{9.2}$$

onde  $L_{b_0} = \{g \in L : gb_0 = b_0\}$ . Por isso queremos demonstrar que

$$L_{b_0} = K'$$

Como  $\mathfrak{l}_k \subset \mathfrak{p}_\Theta$  então  $K' \subset P_\Theta$ , e como  $K' \subset L$  então

$$K' \subset P_\Theta \cap L = L_{b_0}$$

Suponhamos que a outra inclusão não se verifica, ou seja

$$K' \subsetneq L_{b_0}$$

Então

$$\dim \mathfrak{l}_k < \dim_T L_{b_0}$$

Mas da equação (9.2) temos que

$$\begin{aligned} \dim_T L_{b_0} &= \dim_T L - \dim_T L_{b_0} \\ \dim_T L_{b_0} &= -\dim_T L_{b_0} + \dim_T L \end{aligned}$$

e assim teríamos que

$$\dim \mathfrak{l}_k + \dim_T L_{b_0} < \dim_T L \quad (9.3)$$

Mas  $L_{b_0}$  é órbita aberta em  $\mathbb{B}_\Theta$ , então, como  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_c^- \oplus \mathfrak{p}_\Theta$

$$\dim_T L_{b_0} = \dim_T \mathbb{B}_\Theta = \dim \mathfrak{n}_c^-$$

e pelo lema 9.11

$$\dim_T L_{b_0} = \dim \mathfrak{l}_s$$

Juntando isso com a equação (9.3) temos que

$$\dim \mathfrak{l}_k + \dim \mathfrak{l}_s < \dim_T L = \dim \mathfrak{l}$$

o que é claramente absurdo pois  $\mathfrak{l}_k \oplus \mathfrak{l}_s = \mathfrak{l}$ . ■

Juntando isso com o Corolário 9.8 temos que

**Proposição 9.13** *Com as notações anteriores*

$$C_\Theta \approx \text{fe}X$$

O importante é ressaltar que

- $C_\Theta$  é o suporte da única medida invariante em  $\mathbb{B}_\Theta$  (a unicidade esta demonstrada em Guivarc'h e Raugi [10])

- Como  $C_\Theta = \text{fe}Lb_0$  e  $Lb_0 \approx X$  então podemos identificar  $C_\Theta \approx \text{fe}X$ .
- $X$  possui uma estrutura de métrica Riemanniana, que provem do produto  $\langle, \rangle$  de Cartan-Killing de  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_k \oplus \mathfrak{l}_s$ . Em  $\mathfrak{l}_s$  é definida positiva e assim é herdada para  $L/K' = X$  e também para  $\text{fe}X$ .
- Essa métrica Riemanniana criará o contexto adequado para achar uma forma explícita da medida invariante tal como é feito em Ikeda-Watanabe [14].

## 9.5 O Gradiente

Estamos interessados em caracterizar o fluxo positivo que gera ação de  $H_0$  em  $\mathbb{B}_\Theta$  no conjunto de controle invariante  $C_\Theta$ . Especificamente queremos demonstrar que o campo gerado pelo fluxo é gradiente de uma função  $f$  que exibiremos mais adiante (o gradiente tomado em relação a métrica em  $C_\Theta$  induzida pelo espaço simétrico  $X$ ), ou seja

$$\frac{d}{dt} \exp(H_0 t) b_0 = \text{grad}_{\exp(H_0 t) b_0} f$$

Para conseguir isso primeiro vamos demonstrar a equação para alguns elementos de  $C_\Theta = \text{fe}Lb_0$ , especificamente os elementos  $\exp(\mathfrak{a}_l) b_0$ , onde  $\mathfrak{a}_l$  é uma subálgebra de  $\mathfrak{l}_s$ . Depois é possível generalizar o resultado a partir do fato que todo elemento em  $\mathfrak{l}_s$  é conjugado de algum elemento de  $\mathfrak{a}_l$ .

### 9.5.1 Mais sobre o espaço simétrico

A órbita  $Lb_0$  é analisada via uma boa escolha de uma subálgebra abeliana maximal na parte simétrica de  $\mathfrak{l}$ , isto é, em  $\mathfrak{l}_s$ . Existe um conjunto de raízes  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  com as seguintes propriedades (veja Olafsson [19]):

1. Os espaços de raízes  $\mathfrak{g}_{\alpha_i} \subset \mathfrak{n}_c^+$ . Isso implica que  $\mathfrak{g}_{-\alpha_i} \subset \mathfrak{n}_c^-$ .
2. As raízes são ortogonais entre si. Isso implica que os espaços de raízes comutam, isto é,  $[\mathfrak{g}_{\pm\alpha_i}, \mathfrak{g}_{\pm\alpha_j}] = 0$  se  $i \neq j$ . (Note que, de qualquer maneira,  $[\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{\alpha_j}] = 0$ , pois  $\mathfrak{n}_c^+$  é álgebra abeliana.)
3. Existem  $X_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$  e  $Y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$  tal que  $\{Y_i, H_{\alpha_i}, X_i\}$  gera uma álgebra isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , onde  $H_{\alpha_i}$  é definido por  $(\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle / 2) \alpha_i(\cdot) = \langle H_{\alpha_i}, \cdot \rangle$ .

4. Os elementos  $X_i, Y_i$  do item anterior podem ser escolhidos de tal forma que

$$[H_{\alpha_i}, X_i] = 2X_i \quad [H_{\alpha_i}, Y_i] = -2Y_i \quad [X_i, Y_i] = H_{\alpha_i}$$

e  $X_i + Y_i \in \mathfrak{l}_s$ .

5. O subespaço  $\mathfrak{a}_i$  gerado por  $\{X_1 + Y_1, \dots, X_r + Y_r\}$  é uma subálgebra abeliana maximal em  $\mathfrak{l}_s$ .

Denote por  $\mathfrak{g}(\alpha_i)$  a álgebra isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  gerada por  $\{Y_i, H_{\alpha_i}, X_i\}$  e por  $S_i = X_i + Y_i \in \mathfrak{a}_i$ . Então,  $[\mathfrak{g}(\alpha_i), \mathfrak{g}(\alpha_j)] = 0$  e, em particular,  $[S_i, S_j] = 0$  se  $i \neq j$ .

Seja  $G(\alpha_i)$  o subgrupo de Lie conexo cuja álgebra de Lie é  $\mathfrak{g}(\alpha_i)$ . Esse subgrupo é localmente isomorfo a  $\text{Sl}(2, \mathbb{R})$ . Segundo [19], página 258, linha -5,  $G(\alpha_i)$  é isomorfo a  $\text{Sl}(2, \mathbb{R})$  ou  $\text{PSl}(2, \mathbb{R}) = \text{Sl}(2, \mathbb{R}) / \{\pm 1\}$ . Contas em  $\text{Sl}(2, \mathbb{R})$  mostram que

$$\exp tS_j = \exp((\tanh t) Y_i) \pmod{P_\Theta} \quad (9.4)$$

ver Olafsson [19], teorema .2.4. Mais geralmente podemos afirmar que

**Corolário 9.14** *Com a anotação acima, se  $b_0$  é a identidade em  $P_\Theta$*

$$\exp(x_1 S_1 + \dots + x_r S_r) b_0 = \exp(A(x_1, \dots, x_r)) b_0 \quad (9.5)$$

onde  $A(x_1, \dots, x_r) = \tanh x_1 Y_1 + \dots + \tanh x_r Y_r$

**Demonstração.** Como os  $G(\alpha_i)$  são todos ortogonais,  $[S_i, S_j] = 0$  (para  $i \neq j$ ) temos que

$$\exp(x_1 S_1 + \dots + x_r S_r) = \exp x_1 S_1 \cdots \exp x_r S_r$$

Assim, usando a fórmula (9.4) repetidas vezes e multiplicando tudo

$$\exp x_1 S_1 \cdots \exp x_r S_r = \exp(\tanh x_1) Y_1 \cdots \exp(\tanh x_r) Y_r \pmod{P_\Theta}$$

e novamente, como  $G(\alpha_i)$  são todos ortogonais  $[Y_i, Y_j] = 0$  (para  $i \neq j$ )

$$\begin{aligned} & \exp(\tanh x_1) Y_1 \cdots \exp(\tanh x_r) Y_r \\ &= \exp[(\tanh x_1) Y_1 + \dots + (\tanh x_r) Y_r] \\ &= \exp A(x_1, \dots, x_r) \end{aligned}$$

Juntando tudo

$$\exp(x_1 S_1 + \cdots + x_r S_r) = \exp A(x_1, \dots, x_r) \pmod{P_\Theta}$$

em particular

$$\exp(x_1 S_1 + \cdots + x_r S_r) b_0 = \exp A(x_1, \dots, x_r) b_0,$$

■

**Notação 9.15**  $N_c^- := \exp \mathfrak{n}_c^-$

Notemos que como  $\mathfrak{a}_l$ , a subálgebra abeliana maximal de  $\mathfrak{l}_s$ , é gerada por  $\{S_1, \dots, S_r\}$  então  $\exp(x_1 S_1 + \cdots + x_r S_r) b_0$  são elementos de  $Lb_0$ .

E como  $\tanh x_1 Y_1 + \cdots + \tanh x_r Y_r \in \mathfrak{n}_c^-$ , então a fórmula (9.5) nos fornece os elementos de  $\exp(\mathfrak{a}_l) b_0$  da órbita  $Lb_0$  como elementos de  $N_c^- b_0$ .

### 9.5.2 O fluxo

Imitaremos agora o feito no capítulo 8 no ponto 8.1.4. Como  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_c^- \oplus \mathfrak{p}_\Theta$ , todo elemento em  $\mathbb{B}_\Theta$  pode ser escrito como  $(\exp Z) b_0$  com  $Z \in \mathfrak{n}_c^-$  então, o fluxo positivo gerado por  $H_0$  é

$$\{(\exp tH_0) (\exp Z) b_0 : t > 0\}$$

**Lema 9.16** *Seja  $Z \in \mathfrak{n}_c^-$  e  $b_0$  a identidade em  $\mathbb{B}_\Theta$  então*

$$(\exp tH_0) (\exp Z) b_0 = \exp(e^{-t} Z) b_0$$

**Demonstração.** Como  $b_0$  é ponto fixo para  $\exp H_0$  temos que

$$(\exp tH_0) (\exp Z) b_0 = (\exp tH_0) (\exp Z) (\exp -tH_0) b_0$$

Notemos que

$$\begin{aligned} (\exp tH_0) (\exp Z) (\exp -tH_0) &= \exp(\text{Ad}(\exp(tH_0))Z) \\ &= \exp e^{\text{ad}(tH_0)} Z \end{aligned}$$

Mas, como  $Z$  é um autovetor da transformação  $\text{ad}(H_0)$  com autovalor  $-1$  (pois  $Z \in \mathfrak{n}_c^-$ ) então

$$e^{\text{ad}(tH_0)} Z = e^{-1t} Z$$

E assim

$$\exp e^{ad(tH_0)} Z = \exp e^{-t} Z$$

Juntando tudo temos que

$$(\exp tH_0) (\exp Z) b_0 = \exp(e^{-t} Z) b_0$$

■

**Observação 9.17** *Esta é uma descrição do fluxo: mostra como, para tempo positivo de  $t$ , o fluxo contrai tudo para  $b_0$ .*

Mas estamos interessados num aspecto mais técnico do lema: Se escrevemos um elemento de  $\mathbb{B}_\Theta$  essencialmente como a exponencial de um elemento de  $Z \in \mathfrak{n}_c^-$ , ou seja,  $(\exp Z) b_0$  então quando aplicamos  $\exp(tH_0)$  nesse elemento, o resultado pode ser escrito como a exponencial de um múltiplo do  $Z$  original. Faremos uso disso no seguinte

**Lema 9.18** *Com as notações anteriores, para  $t > 0$*

$$\exp(tH_0) \exp(x_1 S_1 + \cdots + x_r S_r) b_0 = \exp(\tau_1(t) S_1 + \cdots + \tau_r(t) S_r) b_0$$

onde

$$\tau_i(t) = \tanh^{-1}(e^{-t} \tanh(x_i))$$

**Demonstração.** Pelo corolário 9.14

$$\exp\left(\sum x_i S_i\right) b_0 = \exp\left(\sum \tanh(x_i) Y_i\right) b_0$$

logo

$$(\exp tH_0) \exp\left(\sum x_i S_i\right) b_0 = (\exp tH_0) \exp\left(\sum \tanh(x_i) Y_i\right) b_0$$

e, como  $\sum \tanh(x_i) Y_i \in \mathfrak{n}_c^-$  pelo lema 9.16

$$\begin{aligned} (\exp tH_0) \exp\left(\sum \tanh(x_i) Y_i\right) b_0 &= \exp\left(e^{-t} \sum \tanh(x_i) Y_i\right) b_0 \\ &= \exp\left(\sum e^{-t} \tanh(x_i) Y_i\right) b_0 \end{aligned}$$

Como  $t > 0$ , então  $|e^{-t} \tanh(x_i)| < 1$ , e como a  $\tanh$  é bijetora sobre o intervalo  $(-1, 1)$ , é possível utilizar o 9.14 no outro sentido:

$$\exp\left(\sum e^{-t} \tanh(x_i) Y_i\right) b_0 = \exp\left(\sum \tanh^{-1}(e^{-t} \tanh(x_i)) S_i\right) b_0$$

■

Para cada  $t$  temos um fluxo de difeomorfismos em  $Lb_0$ :

$$(\exp Z) b_0 \longmapsto (\exp tH_0) (\exp Z) b_0 = \exp(e^{-t} Z) b_0$$

Como corolário do 9.18 conseguimos demonstrar que esses difeomorfismos aplicados em  $\exp(\mathbf{a}_l) b_0$  não sai de esse conjunto pois

$$\exp\left(\sum x_i S_i\right) b_0 \longmapsto \exp(tH_0) \exp\left(\sum x_i S_i\right) b_0 = \exp\left(\sum \tau_i(t) S_i\right) b_0$$

e  $\mathbf{a}_l = \langle \{S_1, \dots, S_r\} \rangle$

Notemos que uma  $r$ -upla  $(x_1, \dots, x_r)$  são as coordenadas de um elemento em  $\exp(\mathbf{a}_l) b_0$  via a aplicação

$$(x_1, \dots, x_r) \longmapsto \exp(x_1 S_1 + \dots + x_r S_r) b_0$$

Então para cada  $t$ , a função

$$(x_1, \dots, x_r) \longmapsto (\tau_1(t), \dots, \tau_r(t))$$

é uma função em coordenadas.

**Notação 9.19** Denote por  $\vec{H}_0$  o campo induzido por  $H_0$  no flag  $\mathbb{B}_\Theta$

Derivando em relação de  $t$ , em  $t = 0$  tenho as coordenadas de  $\vec{H}_0$  em  $(\tau_1(0), \dots, \tau_r(0)) = (x_1, \dots, x_r)$ .

$$\tau'_i(t) = -\frac{e^{-t} \tanh(x_i)}{1 - e^{-2t} \tanh^2(x_i)}$$

então

$$\tau'_i(0) = -\frac{\tanh(x_i)}{1 - \tanh^2(x_i)} = -\sinh(x_i) \cosh(x_i)$$

Ou seja o campo, em coordenadas, no ponto  $\exp(x_1 S_1 + \dots + x_r S_r) b_0$  é exatamente

$$\vec{H}_0((x_1, \dots, x_r)) = (-\sinh(x_1) \cosh(x_1), \dots, -\sinh(x_r) \cosh(x_r))$$

Mas se identificamos o plano tangente com  $\mathfrak{a}_l$ , então podemos escrever

$$\vec{H}_0((x_1, \dots, x_r)) = -\sinh(x_1) \cosh(x_1) S_1 + \dots + -\sinh(x_r) \cosh(x_r) S_r$$

Recordemos que em  $\mathfrak{a}_l$  a forma de Cartan Killing é definida positiva, tomando os  $S_i$  de tal forma que sejam ortonormais em relação à forma de Cartan Killing, i.e.,  $\langle S_i, S_j \rangle = \delta_{ij}$ , então podemos trabalhar em coordenadas como se estivéssemos em  $\mathbb{R}^r$ . Assim, em coordenadas, o campo é gradiente da função

$$-(\sinh^2(x_1) + \dots + \sinh^2(x_r))$$

E esta função pode ser escrita explicitamente para qualquer  $S = x_1 S_1 + \dots + x_r S_r \in \mathfrak{a}_l$  como

$$-\langle \text{sh}(S), \text{sh}(S) \rangle$$

onde

$$\text{sh}(S) = \sinh(x_1) S_1 + \dots + \sinh(x_r) S_r$$

Analogamente ao feito no Capítulo 8, seção 8.2 podemos estender esta função a um a função em todo  $\mathfrak{s}$ . Porém, para  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ,  $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(\text{ad}(X) \text{ad}(Y))$  e como  $S$  é auto-adjunto, existe  $\sinh(\text{ad}(S))$ . Segue que a restrição de  $\vec{H}_0$  à órbita  $Lb_0$  é dada por

$$\vec{H}_0 = \text{grad} f$$

onde  $f(\exp S) = \text{tr}(\sinh^2(\text{ad}(S)))$ . O gradiente é tomado em relação à métrica de espaço simétrico em  $Lb_0$ , já que é essa métrica que é invariante por  $L$ .

## 9.6 Levantando medidas invariantes

Como já mencionamos queremos exibir as medidas invariantes nos espaços homogêneos trabalhados: Os flags e os recobrimentos do flag maximal. O que conseguimos de fato é achar a medida invariante num flag minimal, o problema reside agora em conseguir achar as medidas invariantes nos outros espaços. Para isso procederemos da seguinte forma, primeiro levantaremos essa medida até uma medida no flag maximal, e depois essa outra será levantada até o recobrimento maximal. Todas as demais se podem achar por projeções.

### 9.6.1 Levantamento ao flag maximal

Este levantamento poderá ser feito facilmente no caso de  $(G, L)$  o par simétrico. A idéia é a seguinte: o i.c.s  $C_\Theta$  no flag minimal  $\mathbb{B}_\Theta$  e o fecho da órbita aberta  $Lb_0$ . Como tomar ou não tomar o fecho não acrescenta nada na medida trabalharemos apenas com  $Lb_0$ . A isotropia de  $b_0$  é  $K'$  um subgrupo compacto maximal. Assim identificamos  $C_\Theta$  com  $L/K'$ . Por outro lado o i.c.s  $C$  no flag maximal  $\mathbb{B}$  também é  $Ld_0$  (com  $d_0$  a identidade  $\mathbb{B}$ ) mas a isotropia  $Iso_{d_0}$  é um pouco mas difícil de identificar. Naturalmente  $Iso_{d_0} \subset K'$ . Definimos

$$\begin{aligned}\bar{L} & : = L/Iso_{d_0} \\ \bar{K}' & : = K'/Iso_{d_0}\end{aligned}$$

Pelo isomorfismo

$$L/K' = \frac{L/Iso_{d_0}}{K'/Iso_{d_0}} = \bar{L}/\bar{K}'$$

**Observação 9.20** *Podemos trabalhar supondo que  $Iso_{d_0} = \{1\}$ . Desta forma podemos pensar sempre  $C$  como  $L$  e  $C_\Theta$  como  $L/K'$ .*

**Exemplo 9.21** *Por exemplo, no caso do par simétrico  $(Sl(n), SO_0^*(k, n-k))$  temos que*

$$Iso_{d_0} = \begin{pmatrix} A_{k \times k} & 0 \\ 0 & A'_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix}$$

com  $A$  e  $A'$  matrizes da forma  $\text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$  com quantidade par de  $-1$ .

A medida em  $L/K'$  é da forma

$$e^{-f(\cdot)} d\mu'(\cdot)$$

onde  $\mu'$  é a medida volume gerada pela métrica de  $L/K'$  como espaço simétrico. Queremos uma medida em  $L$  também invariante em relação ao processo. Essa medida claramente terá que projetar em  $e^{-f(x)} d\mu'(x)$  pois medidas invariantes projetam em medidas invariantes. Nosso candidato para essa medida é

$$e^{-f(\pi(\cdot))} d\beta(\cdot)$$

onde  $\pi : L \rightarrow L/K'$  é a projeção canônica e  $\beta$  é a medida invariante à direita em  $L$  que projeta em  $\mu'$ . É fácil ver que  $e^{-f(\pi(\cdot))} d\beta(\cdot)$  projeta em  $e^{-f(\cdot)} d\mu'(\cdot)$  via  $\pi$ . Mas o importante é ver que ela é invariante. Para isso é

suficiente demonstrar que a imagem de toda função contínua  $\hat{A}$  em  $L$  via o operador  $i(e^{-f(\pi(\cdot))}d\beta(\cdot))$  é uma função  $\nu$ -harmônica. Para isso vamos construir uma função contínua  $\hat{B}$  em  $L/K'$  tal que a imagem dela via o operador  $i(e^{-f(\cdot)}d\mu'(\cdot))$  é a mesma. Como  $e^{-f(\cdot)}d\mu'(\cdot)$  é invariante  $i(e^{-f(\cdot)}d\mu'(\cdot))A$  é  $\nu$ -harmônica. Definimos

$$\hat{B}(x) = \int_{K'} \hat{A}(h_x k) dk$$

onde  $dk$  é a medida de Haar em  $K'$  e  $h_x$  é qualquer elemento de  $L$  tal que  $\pi(h_x) = x$ . Esta integral está bem definida pois  $dk$  é bi-invariante, assim se  $h'_x = h_x k'$  então

$$\int_{K'} \hat{A}(g'_x k) dk = \int_{K'} \hat{A}(g_x k' k) dk = \int_{K'} \hat{A}(g_x k) dk$$

Definimos

$$\begin{aligned} A & : = i(e^{-f(\pi(\cdot))}d\beta(\cdot))\hat{A} \\ B & : = i(e^{-f(\cdot)}d\mu'(\cdot))\hat{B} \end{aligned}$$

vejamos que as duas são iguais

$$\begin{aligned} B(g) & = \int_{L/K'} \hat{B}(gx) e^{-f(x)} d\mu'(x) \\ & = \int_{L/K'} \left( \int_{K'} \hat{A}(h_{gx} k) dk \right) e^{-f(x)} d\mu'(x) \end{aligned} \quad (9.6)$$

Por outro lado

$$A(g) = \int_L \hat{A}(ga) e^{-f(\pi(a))} d\beta(a)$$

usando a fórmula para decomposição de medidas (ver por exemplo Helgason [11], Ch.1,§1, Th. 1.9)

$$\int_L \hat{A}(ga) e^{-f(\pi(a))} d\beta(a) = \int_{L/K'} \left( \int_{K'} \hat{A}(gh_x k) e^{-f(\pi(h_x k))} dk \right) d\mu'(x)$$

onde  $h_x$  é qualquer elemento na fibra de  $x$ .

$$= \int_{L/K'} \left( \int_{K'} \hat{A}(h_{gx} k) e^{-f(x)} dk \right) d\mu'(x) \quad (9.7)$$

Notemos que as fórmulas (9.6) e (9.7) são iguais.

Resumindo temos o seguinte

**Lema 9.22** *Seja  $\beta$  a medida em  $L$  invariante à direita e seja  $f$  a função cujo gradiente coincide com o fluxo gerado por  $H_0$  em  $L/K'$ . Então*

$$e^{-f(\pi(\cdot))}d\beta(\cdot)$$

*é a medida invariante no flag maximal para o processo gerado pela equação (9.1).*

### 9.6.2 O levantamento ao recobrimento maximal

Para levantar uma medida  $\nu$ -invariante desde o flag maximal até qualquer de seus recobrimentos não precisamos de nenhuma estrutura adicional, apenas é suficiente utilizar a medida definida no lema 4.19.

# Capítulo 10

## Expoentes de Liapunov

Como aplicação do exposto no Capítulo 9 faremos o cálculo dos expoentes de Liapunov para uma equação diferencial estocástica em  $\mathbb{R}^d$  gerado pela equação em  $G$  definida no Capítulo 7. Para realizar esse cálculo é necessário conhecer a forma explícita da medida invariante no flag maximal de  $G$  que já temos calculado.

### 10.1 Expoentes de Liapunov

Como sempre,  $G$  é um grupo de Lie simples e  $(G, L)$  é um par simétrico de tipo hermitiano.  $H_0$  e  $Z_1, \dots, Z_d$  são os campos definidos no Capítulo 9. Uma representação  $\rho : G \rightarrow \text{Gl}(d, \mathbb{R})$  de  $G$  em  $\mathbb{R}^d$  também induz uma representação em  $\mathfrak{g}$  que chamaremos também  $\rho$ . Ou seja, campos de vetores invariante à direita de  $G$  são mapeados em campos de vetores em  $\mathbb{R}^d$ . Dessa forma a equação diferencial estocástica em  $G$

$$dg = H_0(g) dt + \sum_{j=1}^m Z_j(g) \circ dW_j. \quad (10.1)$$

induz uma equação diferencial estocástica em  $\mathbb{R}^d$  dada por

$$dx = \rho(H_0)x dt + \sum_{j=1}^m \rho(Z_j)x \circ dW_j. \quad (10.2)$$

A relação entre estas duas equações é que uma solução da segunda que passa por um  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  é da forma

$$x_t = \rho(g_t)x_0$$

onde  $g_t$  é uma solução da primeira equação que passa pela identidade de  $G$ . Vamos assumir que  $\rho$  é uma representação fiel.

Estamos interessados em calcular os expoentes de Liapunov de (10.2) utilizando a o teorema 5.2 em Ruffino e San Martin [22] que transcrevemos a seguir:

**Teorema 10.1** *Assuma que (10.1) verifica a propriedade de acessibilidade. Considere a equação diferencial (10.2) induzida por  $\rho$ . Então os expoentes de Liapunov de (10.2) são as entradas de*

$$\rho \left( \int_{\mathbb{B}} Q(b) dV(b) \right), \quad (10.3)$$

que são  $\lambda \left( \int Q(b) dV(b) \right)$  com  $\lambda$  percorrendo os pesos da representação. E onde  $V$  é a única medida de probabilidade invariante em  $\mathbb{B}$ , e  $Q$  é

$$Q(b) = q_{H_0} + \sum_{i=1}^m r_{Z_i}(b)$$

com

$$q_{H_0}(b) = \text{pr}_{\mathfrak{a}}(\text{Ad}((u)H_0)) \quad (10.4)$$

e

$$r_{Z_i}(b) = \text{pr}_{\mathfrak{a}}[\text{Ad}(u^{-1})Z_i, \text{pr}_{\mathfrak{k}}(\text{Ad}(u^{-1})Z_i)] \quad (10.5)$$

com  $b = ub_0$  e  $u \in K$ , a parte compacta da decomposição de Iwasawa de  $G$ ;  $\mathfrak{a}$  é a álgebra abeliana maximal em  $\mathfrak{s}$ , a parte simétrica de  $\mathfrak{l}$  (a álgebra de  $L$ );  $\mathfrak{k}$  a álgebra de Lie de  $K'$ . Também  $\text{pr}_{\mathfrak{a}}$  e  $\text{pr}_{\mathfrak{k}}$  são as projeções sobre  $\mathfrak{a}$  e  $\mathfrak{k}$  respectivamente.

A condição de acessibilidade significa que a álgebra de Lie gerada pelos campos  $H_0, Z_1, \dots, Z_d$  seja toda  $\mathfrak{g}$  como de fato acontece.

Notemos que em (10.3) a integral é tomada sobre o flag maximal em relação à única medida  $V$  invariante que, como sabemos tem suporte no i.c.s.  $C_{\mathbb{B}}$ . Como já vimos em 9.20 podemos identificar  $C_{\mathbb{B}}$  com  $L$ .

Assim podemos pensar a integral (10.3) como uma integral em  $L$ . Como também foi mostrado no Capítulo 9, lema 9.22, conhecemos a forma de  $V$  pensada como medida em  $L$ . Se identificamos  $C_{\Theta}$ , o i.c.s em  $\mathbb{B}_{\Theta}$ , como  $L/K'$  então essa medida é exatamente

$$e^{-E(\pi(\cdot))} d\beta(\cdot)$$

onde  $E$  é a função cujo gradiente é o campo induzido pela parte determinística da equação,  $\pi : L \rightarrow L/K'$  é a projeção canônica e  $\beta$  é a única medida invariante à direita em  $L$ . Analogamente, se identificamos os  $C_\Theta$  com  $K' \backslash L$  então a medida é

$$e^{-F(\pi_D(\cdot))} d\hat{\beta}(\cdot) \quad (10.6)$$

onde  $F$  é a função cujo gradiente é o campo induzido pela parte determinística da equação,  $\pi_D : L \rightarrow K' \backslash L$  a projeção canônica e  $\hat{\beta}$  é a medida invariante à esquerda em  $L$ .

Notemos que como  $L$  é semi-simples é também *unimodular* (ver Helgason [11], proposição 1.6) e assim as medidas invariantes à direita  $\beta$  e à esquerda  $\hat{\beta}$  coincidem

$$\hat{\beta} = \beta \quad (10.7)$$

e é chamada medida de Haar.

Vamos agora a partir da medida (10.6) determinar a integral (10.3).

### 10.1.1 O cálculo

Então, primeiro restringimos nossa integral

$$\int_{\mathbb{B}} Q(b) dV(b) = \int_{C_{\mathbb{B}}} Q(b) dV(b) = \int_{C_{\mathbb{B}}} Q(ud_0) dV(ud_0) \quad (10.8)$$

com  $u \in K$ . Esta última igualdade é possível pois  $K$  é transitivo em  $\mathbb{B}$  (ver San Martin e Tonelli [24]). Mas  $fe(L) \approx C_{\mathbb{B}}$ . Assim pretendemos converter esta integral numa integral em  $L$ .

Para fazer essa mudança na fórmulas explícitas (10.4) e (10.5) temos que, dado  $g \in L$  achar o elemento  $u \in K$  tal que  $gd_0 = ud_0$ . Chamaremos esse elemento  $g^\perp$  que pode ser achado por ortogonalização

$$g = g^\perp a n \in K A N$$

assim (10.8) fica

$$\int_L Q(g^\perp) dV'(g)$$

onde  $V'$  é a mesma medida  $V$  pensada em  $L$ . Antes de continuar é conveniente fixar algumas notações:

- $i : L/K' \longrightarrow K' \backslash L$  definida por  $xK' \longmapsto K'x^{-1}$
- $\underline{i}$  a inversa de  $i$
- $i_L : L \longrightarrow L$  definida por  $x \longmapsto x^{-1}$
- Se  $\theta$  é uma medida então  
 $\Gamma\theta$  é a medida definida por

$$\Gamma\theta(f) = \int f(x)\Gamma(x) d\theta(x)$$

- $\beta$  será a medida de Haar em  $L$ .
- $\eta'$  será a medida invariante à direita em  $K' \backslash L$  (induzida pela métrica)
- $\mu'$  será a medida invariante à esquerda em  $L/K'$  (induzida pela métrica)
- $\eta$  será a medida invariante pelo processo em  $K' \backslash L$
- $dk$  será a medida invariante à esquerda em  $K'$  (Haar)
- $\pi : L \longrightarrow L/K'$  a projeção canônica.
- $\pi_D : L \longrightarrow K' \backslash L$  a outra projeção canônica.
- $\tilde{\pi} : L \longrightarrow K' \backslash L$  que  $x \longmapsto K'x^{-1}$
- Se  $\theta$  é uma medida em  $L/K'$  (respec. em  $K' \backslash L$ ) (respec. em  $L$ ),  $\widehat{\theta}$  será a medida  $i_*\theta$  (respec.  $\underline{i}_*\theta$ ) (respec.  $i_{L*}\theta$ ).

É fácil ver que se  $\theta$  é medida invariante à esquerda (respec. direita) em  $L$ , então  $\widehat{\theta}$  é invariante à direita (respec. esquerda).

Também  $\pi_*\beta = \mu'$  e

$$\pi_{D*}\widehat{\beta} = \eta' \tag{10.9}$$

Também  $\widehat{\eta}' = \mu'$  e  $\widehat{\mu}' = \eta'$

Agora enunciaremos alguma fórmulas triviais que serão de utilidade

**Quatro fórmulas úteis**

Sejam  $\pi : A \longrightarrow B$ , e  $\Gamma : B \longrightarrow \mathbb{R}$ , e  $\theta$  uma medida em  $A$ , então

$$\pi_*[(\Gamma \circ \pi(\cdot)) \theta] = \Gamma(\cdot)\pi_*\theta \quad (10.10)$$

Sejam  $\delta : A \longrightarrow B$  inversível, e  $\Lambda : A \longrightarrow \mathbb{R}$ , e  $\theta$  uma medida em  $A$ , então

$$\delta_*[\Lambda(\cdot) \theta] = \Lambda(\delta^{-1}(\cdot))\delta_*\theta.$$

Em particular se  $\delta = i_L$  então

$$\widehat{\Lambda(\cdot) \theta} = \Lambda(\cdot^{-1})\widehat{\theta} \quad (10.11)$$

Como  $L$  é unimodular e então vale (ver Helgason [11] teorema 1.9.):

$$\int_L W(g) d\beta(g) = \int_{L/K'} \left( \int_{K'} W(\bar{x}k) dk \right) d\mu'(x) \quad (10.12)$$

onde  $\bar{x}$  é qualquer elemento em  $L$  que projete em  $x$ , pela invariância de  $dk$  esta definição não tem problema. Será esta a fórmula que nos permitirá converter a integral em  $L \subset \mathbb{B}$  em uma integral em  $L/K' \subset \mathbb{B}_\Theta$ .

**A conta**

Agora vamos calcular

$$\int_L Q(g^\perp) dV'(g)$$

neste contexto

$$V'(\cdot) = e^{-F(\pi_D(\cdot))} d\hat{\beta}(\cdot)$$

Assim

$$\begin{aligned}
& \int_L Q(g^\perp) dV'(g) \\
&= \int_L Q(g^\perp) d\left(e^{-F(\pi_D(\cdot))} \hat{\beta}\right)(g) \\
&= \int_L Q(g^\perp) e^{-F(\pi_D(g))} d\hat{\beta}(g) \\
&= \int_L Q(g^\perp) e^{-F(\pi_D(g))} d\beta(g) \text{ por (10.7)} \\
&= \int_L Q((g^{-1})^\perp) e^{-F(\pi_D(g^{-1}))} d\beta(g) \text{ por (10.11)} \\
&= \int_{L/K'} \left( \int_{K'} Q((\bar{x}k)^{-1})^\perp e^{-F(\pi_D([\bar{x}k]^{-1}))} dk \right) d\mu'(x) \text{ por (10.12)} \\
&= \int_{L/K'} \left( \int_{K'} Q((\bar{x}k)^{-1})^\perp e^{-F(\pi_D(k^{-1}\bar{x}^{-1}))} dk \right) d\mu'(x) \\
&= \int_{L/K'} \left( \int_{K'} Q((\bar{x}k)^{-1})^\perp e^{-F(\pi_D(\bar{x}^{-1}))} dk \right) d\mu'(x) \\
&= \int_{L/K'} \left( \int_{K'} Q((\bar{x}k)^{-1})^\perp dk \right) e^{-F(\pi_D(\bar{x}^{-1}))} d\mu'(x)
\end{aligned}$$

mas notemos que,

$$Q([\bar{x}k]^{-1})^\perp = Q([(gk)^{-1}]^\perp) = Q([k^{-1}g^{-1}]^\perp) = Q(k^{-1}[g^{-1}]^\perp) \quad (10.13)$$

(por simplicidade trocamos  $\bar{x}$  por  $g$ ). Por outro lado

$$\begin{aligned}
\text{Ad}((k^{-1}[g^{-1}]^\perp)^{-1})H_0 &= \text{Ad}([g^{-1}]^\perp k^{-1})H_0 \\
&= \text{Ad}(([g^{-1}]^\perp)^{-1})\text{Ad}(k)H_0
\end{aligned}$$

mas, como  $k \in K'$  então

$$\text{Ad}(k)H_0 = H_0 \quad (10.14)$$

assim, o termo de  $Q$  definido na fórmula (10.4) fica

$$\begin{aligned}
q_{H_0}(b) &= \text{pr}_a(\text{Ad}(u)H_0) \\
&= \text{pr}_a(\text{Ad}((gk^{-1})^\perp)H_0) \\
&= \text{pr}_a(\text{Ad}((k^{-1}[g^{-1}]^\perp)H_0)) \text{ por (10.13)} \\
&= \text{Ad}(([g^{-1}]^\perp)^{-1})H_0 \text{ por (10.14)}
\end{aligned}$$

e assim conseguimos eliminar  $k$ .

Por outro lado, novamente usando a fórmula (10.13)

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^m r_{Z_i}(k^{-1}[g^{-1}]^\perp) \\
&= \sum_{i=1}^m \text{pr}_\alpha [\text{Ad}((k^{-1}[g^{-1}]^\perp)^{-1})Z_i, \text{pr}_\mathfrak{k}(\text{Ad}((k^{-1}[g^{-1}]^\perp)^{-1})Z_i)] \\
&= \sum_{i=1}^m \text{pr}_\alpha [\text{Ad}([g^{-1}]^\perp)^{-1}\text{Ad}(k)Z_i, \text{pr}_\mathfrak{k}(\text{Ad}([g^{-1}]^\perp)^{-1}\text{Ad}(k)Z_i)] \\
&= \sum_{i=1}^m r_{Y_i}([g^{-1}]^\perp)
\end{aligned}$$

onde  $Y_i = \text{Ad}(k)Z_i$ . Como  $k \in K'$   $\{\text{Ad}(k)Z_i : i = 1, \dots, m\}$  será uma base ortogonal de  $\mathfrak{s}$  como  $\{Z_i : i = 1, \dots, m\}$ . Mas em [22] está demonstrado que a integral

$$\int_{\mathbb{B}} \left( \sum_{i=1}^m r_{Z_i}(b) \right) dV(b)$$

independe da base  $\{Z_i : i = 1, \dots, m\}$  ortonormal utilizada. Assim também eliminamos o  $k$  da outra parte da integral  $\int Q(b)dV(b)$ .

Assim conseguimos eliminar  $k$  do outro termo de  $Q$ . E assim podemos afirmar que

$$Q([(gk)^{-1}]^\perp) = \tilde{Q}(g)$$

onde

$$\tilde{Q}(g) := \text{pr}_\alpha(\text{Ad}((g^{-1\perp})^{-1})H_0) + \text{pr}_\alpha [\text{Ad}(g^{-1\perp})Z_i, \text{pr}_\mathfrak{k}(\text{Ad}(g^{-1\perp})Z_i)]$$

Voltando para o cálculo de  $\int_L Q(g^\perp) dV'(g)$ .

$$\begin{aligned}
& \int_{L/K'} \left( \int_{K'} Q((\bar{x}k)^{-1\perp}) dk \right) e^{-F(\pi_D(\bar{x}^{-1}))} d\mu'(x) \\
&= \int_{L/K'} \left( \int_{K'} \tilde{Q}(\bar{x}) dk \right) e^{-F(\pi_D(\bar{x}^{-1}))} d\mu'(x) \\
&= \int_{L/K'} \tilde{Q}(\bar{x}) \overbrace{\left( \int_{K'} dk \right)}^1 e^{-F(\pi_D(\bar{x}^{-1}))} d\mu'(x) \\
&= \int_{L/K'} \tilde{Q}(\bar{x}) e^{-F(\pi_D(\bar{x}^{-1}))} d\mu'(x)
\end{aligned}$$

Ainda mais, considerando o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
L & \xrightarrow{i_L} & L & & \\
\pi \downarrow & \tilde{\pi} & \downarrow \pi_D & & \\
& \searrow & & & \\
& i & & & \\
L/K' & \rightleftharpoons & K' \setminus L & & \\
& \downarrow & \downarrow & & \\
& E & F & & \\
& & \mathbb{R} & & 
\end{array}$$

notamos que

$$\begin{aligned}
F(\pi_D(x^{-1})) &= F(\pi_D \circ i_L(x)) \\
&= F(i \circ \pi(x)) \\
&= E \circ \underline{i} \circ i \circ \pi(x) \\
&= E(\pi(x))
\end{aligned}$$

assim podemos escrever simplesmente

$$\int_{L/K'} \tilde{Q}(\bar{x}) e^{-F(\pi_D(\bar{x}^{-1}))} d\mu'(x) = \int_{L/K'} \tilde{Q}(x) e^{-E(x)} d\mu'(x)$$

### A decomposição polar

Agora temos que integrar a função que ficou dentro de  $L/K'$ . Para isso usamos uma fórmula de decomposição polar que podemos achar em Helgason [11], Ch.I §5 Th. 5.8. (pág 186)

$$\int_{L/K'} f(x) d\mu'(x) = c \int_{K'/M} \left( \int_{A^+} f(ka \cdot o) \delta(a) da \right) dk_M \quad (10.15)$$

onde

- $o$  é a origem  $\{K'\}$  em  $L/K'$ ,
- $M$  e  $A, A^+$  correspondem com a decomposição de Iwasawa de  $L$ .
- $c$  é uma constante conveniente.
- $\delta(\exp H) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} (\sinh(\alpha(H)))^{m_\alpha}$
- $dk_M$  é a medida  $K'$  invariante sobre  $K'/M$
- $da$  é a medida euclídea em  $A^+$
- $dx$  é a medida volume que proven da métrica Riemanniana induzida pela forma de Carta-Killing

En nosso caso a função  $f$  para integrar é

$$\tilde{Q}(x)e^{-E(x)}$$

Notemos que na integral (10.15)  $k$  é um representante de uma classe em  $K'/M$  mas como  $M$  é o centralizador de  $A$  em  $K'$  temos que  $kMa \cdot o = kaM \cdot o = ka \cdot o$ .

**Invariância de  $e^{-E(x)}$  pela adjunta** Notemos que a função

$$\begin{aligned} H &: L/K' \longrightarrow \mathbb{R} \\ H(x \cdot o) &= e^{-c/2 \text{Tr}(\sinh^2(\text{ad } \log(x \cdot o)))} \end{aligned}$$

é invariante também pela ação à direita de  $K$ . Seja  $k \in K'$  então  $H(kx \cdot o)$  pode ser calculado assim  $H(kxk^{-1})$ . Assim segue que

$$\log(kxk^{-1}) = \text{Ad}(k) \log(x)$$

Mas como foi feito em 8.16

$$\text{Tr} (\sinh(\text{ad} (\text{Ad}(k) \log(x)))^2) = \text{Tr} (\sinh(\text{ad} (\log(x)))^2)$$

Assim a integral

$$\begin{aligned} & \int_{K'/M} \left( \int_{A^+} \tilde{Q}(ka \cdot o) e^{-E(ka \cdot o)} \delta(a) da \right) dk_M \\ &= \int_{K'/M} \left( \int_{A^+} \tilde{Q}(ka \cdot o) e^{-E(a \cdot o)} \delta(a) da \right) dk_M \end{aligned}$$

Invertendo a ordem das integrais temos

$$\int_{A^+} \left( \int_{K'/M} \tilde{Q}(ka \cdot o) dk_M \right) e^{-E(a)} \delta(a) da$$

Ainda fica aberta a possibilidade de simplificar mais ainda a integral

$$\int_{K'/M} \tilde{Q}(ka \cdot o) dk_M$$

usando o teorema Helgason [11], Th 10.12 ch IV § 10 .

# Índice

- $G$ -espaço, 7
- $\nu$ -invariante, *ver* medida invariante
- álgebra
  - do grupo de isometrias, 62
  - parabólica, 8
  - standar parabólica, 8
- Cartan
  - descomposição de, 64
  - forma de Cartan-Killing, 65
  - subálgebra de, 109
- condição de posto, 80
- conjunto de controle invariante, 9, 16, 66
- convolução, 8, 22
- descoposição
  - de Cartan, 64
- desintegração de medidas, 32
- drift, 79
- equação diferencial estocástica, 77
- espaço
  - homogêneo, 7
  - espaço simétrico
    - afim, 105
  - espaço simétrico, 73
    - hermitiano, 107
    - regular, *ver* espaço simétrico hermitiano
- expoentes de Liapunov, 123
- flag, 8
  - maximal, 8
- fluxo, 79
- forma
  - de Cartan-Killing, 65, 78, 91
- Furstenberg
  - espaço de Poisson-, 3
- gradiente, 78, 102, 114, 119
- Gram-Schmidt
  - metodo de, 70
- Grassmanniana, 10, 66, 94
- grupo
  - de isometrias, 62
  - unimodular, 125
- i.c.s., *ver* conjunto de controle invariante
- invariância
  - e relação ao processo, 82
- Iwasawa
  - descomposição de, 8
- Laplace-Beltrami
  - operador de, 84
- levantamento, 120
- Liapunov
  - expoente de, 123
- medida, 7
  - ergódica, 19, 23

- invariante, 23
- par simétrico
  - causal não compacto, 108
  - hermitiano, 107
- Poisson
  - espaço de Poisson-Furstenberg, 3
  - fórmula de, 3
- probabilidades de transição, 80
- recobrimento, 13
  - maximal, 14
- recobrimentos, 13
- representação, 123
- semigrupo, 7, 10
  - de interior não vazio, 9
- sistemas de controle, 80
- subálgebra
  - de Cartan, 109
- suporte, 20
- tipo parabólico, 9, 110
- variedades
  - flag, *ver* flag

# Bibliografia

- [1] Azencott, Robert – Espaces de Poisson des groupes localement compacts. *Lect. Notes in Maths*, **148** (1970). Springer-Verlag, Berlin.
- [2] Bougerol, P. and Lacroix, J. – *Products of Matrices with Applications to Schrodinger Operator*, Birkhäuser Boston Inc. (1985).
- [3] Brown, I. D. and Guivarc'h, Y. – .Espaces de Poisson des groupes de Lie, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4) **7** (1974) 175-179.
- [4] Bundac, T., Isik, N., Pym, J. – The actions of semisimples Lie groups on its maximal compact subgroup, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **129** (2001) 1525-1534.
- [5] Chu, Cho-Ho, Lau, Anthony To-Ming – Harmonic functions on groups and Fourier algebras *Lect. Notes in Maths*, **1782** (2002). Springer-Verlag, Berlin.
- [6] Dieudonné, J.– *Treatise on Analysis, Volumen II*, Academic Press (1976).
- [7] Dokken, Douglas P. – Nonprobabilistic computation of the Poisson boundary for an étalée measure on a semi-simple Lie group. *Rocky mountain J. Math*, **25** (1995) no. 3, 995-1001.
- [8] Faraut J., Olafsson, G. – Causal semisimples symmertric spaces, the geometry and harmonica analysis. Em “*Semigroups in Algebra, Geometry and Analysis*” *De Gruyter Expositions in Mathematics* **20**.
- [9] Furstenberg H. – A Poisson formula for semi-simple Lie groups. *Annals of Maths.*, **77** (1963) 335-386.

- [10] Y. Guivarc'h, A. Raugi – Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence, *Zeit. für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **69** (1985) 187-242.
- [11] Helgason, S. – *Groups And Geometric Analysis*, Academic Press. (1984).
- [12] J. Hilgert e K.H. Neeb – Compression semigroups of open orbits on real flag manifolds. *Monatsh Math.*, **119** (1995) 187-214.
- [13] Hilgert J., Olafsson, G. e Orsted – Hardy spaces on affine symmetric spaces. *J. für de reine und angewandte Mathematik*, **415** (1991) 189-218.
- [14] Ikeda N., Watanabe S. – *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes* North-Holland & Kodansha, 1989.
- [15] Kenneth D. J.– The Structure of Parabolic Subgroups. *Journal of Lie Theory*, **14** (2004) 287-316.
- [16] Maliavin, M. P., Maliavin P. – Factorisations et lois limites de la diffusion horizontale au-dessus d' un espace Riemannien symétrique. *Lect. Notes in Maths*, **404** (1974). Springer-Verlag, Berlin.
- [17] Matsuki T. – The orbits of affine symmetric space under the actions of minimal parabolic subgroup. *J. Math. Soc. Japan* **3** (1979), 331-357.
- [18] Neeb, K.-H. – A convexity theorem for semisimple symmetric spaces. *Pacific J. Math.*, **162** (1994) 305-349.
- [19] Olafsson, G.– Open problems in harmonic analysis on causal symmetric spaces. Em *Positivity in Lie Theory: Open Problems. De Gruyter Expositions in Mathematics* **26**.
- [20] Olafsson, G.– *Causal Symmetric Spaces, Geometry and Harmonic Analysis*. Perspectives in Math. **18**, Academic Press 199.
- [21] Paterson, Alan L. T. – A nonprobabilistic approach to Poisson spaces. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **93** (1982/83) no. 3-4 181-188.
- [22] Ruffino P., San Martín L. A. B. – Lyapunov exponents for stochastic differential equations on semi-simples Lie groups. *Archivum Mathematicum* , **37** (2001) 207-231

- [23] San Martin, L.A.B. – Invariant control sets on flag manifolds. *Math. Control Signals Systems*, **6** (1993) 41-61.
- [24] San Martin, L.A.B. and P.A. Tonelli – Semigroup actions on homogeneous spaces. *Semigroup Forum*, **50** (1995) 59-88.
- [25] San Martin, L. A. B. – Maximal semigroups in semi-simple Lie groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **353** (2001) 5165-5184.
- [26] San Martin, L. A. B. – Orbitas de família de campos de vetores em tempo Positivo, em <http://www.ime.unicamp.br/~smartin> (1998).
- [27] San Martin, L. A. B., A. J. Santana – The homotopy type of Lie semigroups in semi-simple Lie groups. *Monatsh. Math.*, **136** (2002) 151-173.
- [28] San Martin, L. A. B.– Non existence of invariant semigroups in affine symmetric spaces. *Math. Ann.*, **321** (2001) 587-600.
- [29] Snapper, E., Robert, J. – *Metric Affine Geometry*, Academic Press (1971).
- [30] Sussmann, H.J., V. Jurdjevic – Controllability of non linear systems. *J. Diff. Equations*, **12** (1972) 95-116.
- [31] Varadarajan, V. S. – *An Introduction to harmonic analysis on semi-simple Lie groups*. Cambridge University Press (1988).
- [32] Warner G. – *Harmonic Analysis on semi-simple Lie Groups I*. Springer-Verlang (1972).
- [33] Yosida, K. *Functional Analysis*. Springer (1968).