EXISTÊNCIA DE MELHORES APROXIMAÇÕES PARA FUNÇÕES CONTÍNUAS COM VALORES EM ESPAÇOS DE BANACH

Este exemplar corresponde à redação final devidamente corrigida da tese defendida pelo Sr. ARY OROZIMBO CHIACCHIO e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 31 de janeiro de 1985.

João Bosco Prolla

Prof.Dr. JOÃO BOSCO PROLLA
Orientador

Tese apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, para obtenção do Título de "DOUTOR EM MATEMÁTICA".

1985

Aos meus pais, e a todos que levam em conta as cinco Leis Universais: Livre-Arbítrio, Polaridade, Reencarnação,Evolução e Karma.

Agradeço ao Prof.Dr. João Bosco Prolla pelo estímulo e pela orientação constante e segura.

À FAPESP que custeou meus estudos de Pós-Graduação.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO

Esta Tese estuda a existência de melhores aproximações e, mais geralmente a existência de centros relativos de Chebyshev, em espaços de funções contínuas e limitadas. Mais precisamente, dados um espaço topológico X e um espaço de Banach E, consideremos o espaço $C_b(X;E)$ de todas as funções $f: X \to E$ que são limitadas e contínuas, munido da norma

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

Se $W \subset C_b(X;E)$ é um subespaço vetorial fechado, para uma dada função $f \in C_b(X;E)$ queremos determinar um elemento $g \in W$ tal que

$$\|g - f\| \leq \|h - f\| \quad \text{para todo} \quad h \in W.$$

Pondo $\operatorname{dist}(f;W) = \inf_{h \in W} \|h - f\|$, o que se quer determinar é um elemento $g \in W$ tal que $\|g - f\| = \operatorname{dist}(f;W)$.

Uma tal função g é dita uma "melhor aproximação de f com relação a W". O conjunto de tais g é indicado por $P_W(f)$. Mais geralmente, dado um conjunto limitado e não-vazio $B \subset C_b(X;E)$ queremos determinar um elemento $g \in W$ tal que

$$\sup_{f \in B} \|g - f\| \leq \sup_{f \in B} \|h - f\| \quad \text{para todo} \quad h \in W.$$

Pondo $\mathrm{rad}(B;W) = \inf_{h \in W} \sup_{f \in B} \|h - f\|$ ($\mathrm{rad}(B;W)$ é chamado "raio de Chebyshev de B com relação a W") o que se quer determinar é um elemento $g \in W$ tal que

$$\sup_{f \in B} \|g - f\| = \mathrm{rad}(B;W).$$

Uma tal função g é dita um "centro de Chebyshev de B com relação a W". O conjunto de tais centros é indicado por $\mathrm{cent}(B;W)$.

A idéia central desta Tese é a seguinte: para cada $x \in X$, consideremos o fecho em E do subespaço vetorial $W(x) = \{w(x); w \in W\}$, indicado por $\overline{W(x)}$. Seja $\mathcal{V} = \{\overline{W(x)}; x \in X\}$. Queremos encontrar propriedades de $\mathcal{V}$ que assegurem $P_W(f) \neq \emptyset$ (resp. $\mathrm{cent}(B;W) \neq \emptyset$) para toda $f \in \mathcal{C}_b(X;E)$ (resp. todo limitado $B \subset \mathcal{C}_b(X;E)$).

Para exemplificar, suponhamos que X é um espaço topológico paracompacto e W é tal que, para todo $g \in \mathcal{C}_b(X;E)$, se $g(x) \in \overline{W(x)}$, qualquer que seja $x \in X$, então $g \in W$. Suponhamos ainda que $\mathcal{V} = \{\overline{W(x)}; x \in X\}$ goza de alguma das seguintes propriedades:

Propriedade (P_2): Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $V \in \mathcal{V}$ e todo precompacto $K \subset \{v \in E; \|v\| < 1 + \delta\}$ com $\mathrm{rad}(K;V) \leq 1$ existe $s \in V$ tal que $\|s\| \leq \varepsilon$ e $K \subset \{v \in E; \|v - s\| \leq 1\}$.

Propriedade (M_2) : (a) dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $V \in \mathcal{V}$ e todo precompacto $K \subset E$, se $v \in V$ e $\|v - f\| \leq$ $\leq \mathrm{rad}(K;V) + \delta$ para todo $f \in K$, então $\mathrm{dist}(v, \mathrm{cent}(K;V)) < \varepsilon$;

(b) para todo $V \in \mathcal{V}$ e todo precompacto $K \subset E$, $\mathrm{cent}(K;V) \neq \emptyset$.

Nas condições acima sobre W e $\mathcal{V}$ tem-se $\mathrm{cent}(B,W) \neq \emptyset$, para todo precompacto $B \subset C_b(X;E)$. Em particular, $P_W(f) \neq \emptyset$ para toda $f \in C_b(X;E)$. Vide Teorema 2.17 e Teorema 5.6.

Como exemplo da situação acima descrita podemos citar os seguintes casos:

a) Se E é um espaço de Banach uniformemente convexo, então $\mathcal{V}$ goza da propriedade (P_2).

b) Se E é um espaço de Lindenstrauss real e cada $\overline{W(x)}$ é um M-ideal em E, então $\mathcal{V}$ goza da propriedade (M_2).

Finalmente, observamos que se X é compacto e $W \subset C(X;E)$ é um $C(X;\mathbb{R})$-módulo fechado então $g(x) \in \overline{W(x)}$, para todo $x \in X$, implica $g \in \bar{W} = W$. Este resultado é um Corolário da formulação "forte" do Teorema de Stone-Weierstrass: $\mathrm{dist}(g;W) = \sup_{x \in X} \mathrm{dist}(g(x); \overline{W(x)})$.

§0. *PRELIMINARES*

0.1 NOTAÇÕES: Seja E um espaço normado sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Denotaremos por $B(a,r)$ a bola aberta centrada em a e de raio r e por $\bar{B}(a,r)$ a bola fechada de centro a e raio r, isto é:

$$B(a,r) = \{s \in E;\ \|s - a\| < r\} \quad \text{e}$$
$$\bar{B}(a,r) = \{s \in E;\ \|s - a\| \leq r\}.$$

0.2 DEFINIÇÕES: Sejam E um espaço normado, $W \subset E$ um subespaço vetorial fechado e $f \in E$. Uma *melhor aproximação de* f *em* W é um elemento $h \in W$ tal que $\|f - h\| = \inf\limits_{w \in W} \|f - w\| = \operatorname{dist}(f;W)$. Denotaremos por $P_W(f)$ o conjunto de todas as melhores aproximações de f em W.

O subespaço W é dito *proximinal* em E se $P_W(f) \neq \emptyset$ para todo $f \in E$. Se o subespaço W é proximinal, a aplicação $f \longmapsto P_W(f)$ é dita a *projeção métrica de* W.

Uma aplicação $\pi : E \longrightarrow W$ tal que $\pi(f) \in P_W(f)$ para todo $f \in E$ é dita uma *seleção* de P_W, ou uma *aplicação de proximidade*.

0.3 LEMA: *Sejam* E, W *e* f *como em* 0.2. *Se* $\operatorname{dist}(f;W) = d > 0$ *então* $\operatorname{dist}(\frac{f}{d};W) = 1$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $w \in W$ então $dw \in W$ e portanto, $d \leq \|f - dw\|$.

Logo, $1 \leq \left\|\frac{f}{d} - w\right\|$. Como w é arbitrário, $1 \leq \text{dist}(\frac{f}{d};W)$. Se $1 < \text{dist}(\frac{f}{d};W)$, seja $\varepsilon > 0$ tal que $1 < 1+\varepsilon < \text{dist}(\frac{f}{d};W)$. Então, $1+\varepsilon < \left\|\frac{f}{d} - \frac{w}{d}\right\| = \frac{1}{d}\|f - w\|$ para todo $w \in W$. Portanto, $d(1+\varepsilon) \leq d$. Logo, $1+\varepsilon \leq 1$ o que é uma contradição. Portanto, $\text{dist}(\frac{f}{d};W) = 1$.

0.4 LEMA: *Sejam* E *um espaço normado e* $W \subset E$ *um subespaço vetorial fechado. O subespaço* W *é proximinal em* E *se, e somente se, para todo* $f \in E$ *tal que* $\text{dist}(f;W)=1$, $P_W(f) \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO: ($\Rightarrow$) imediato.

($\Leftarrow$) Seja $f \in E$, $f \notin W$. Então, $d = \text{dist}(f;W) > 0$. Pelo lema anterior, $\text{dist}(\frac{f}{d};W) = 1$. Por hipótese, existe $g \in W$ tal que $\left\|\frac{f}{d} - g\right\| = 1$. Logo, $\|f - dg\| = d$ e $dg \in P_W(f)$.

0.5 DEFINIÇÃO: Seja E um espaço de Banach. Dizemos que $K \subset E$ é *precompacto* se, para cada $\varepsilon > 0$, a cobertura aberta $\{B(k,\varepsilon); k \in K\}$ de K tem uma subcobertura finita.

0.6 DEFINIÇÕES: Seja W um subespaço vetorial de um espaço de Banach E. Para cada subconjunto limitado e não-vazio B de E definimos o *raio de Chebyshev de* B *relativo a* W por:

$$\text{rad}(B;W) = \inf\{\sup_{f \in B} \|w - f\|;\ w \in W\}.$$

Se $W = E$, escrevemos $rad(B;E) = rad(B)$ e dizemos que $rad(B)$ é o *raio de Chebyshev* de B.

Os elementos $w_0 \in W$ onde o ínfimo é assumido são chamados *centros de Chebyshev de* B *relativos a* W. Denotamos o conjunto desses elementos por $cent(B;W)$. Se $W = E$, escrevemos $cent(B;E) = cent(B)$ e seus elementos são ditos *centros de Chebyshev* de B.

Dizemos que W tem a *propriedade dos centros de Chebyshev* em relação a uma família $\mathbb{B}$ de subconjuntos limitados se $cent(B;W) \neq \emptyset$ para todo subconjunto $B \in \mathbb{B}$.

Dizemos que E admite *centros de Chebyshev* se $cent(B) \neq \emptyset$ para todo subconjunto limitado $B \subset E$, isto é, se $W = E$ tem a propriedade dos centros de Chebyshev em relação à família $\mathbb{B}$ de todos os limitados de E.

0.7 LEMA: *Sejam* E, W *e* B *como em* 0.6. *Se* $rad(B;W) = d > 0$ *então* $rad(\frac{1}{d}B;W) = 1$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $w \in W$ então:

$$d \leq \sup_{f \in B} \|f - dw\| \text{ e daí, } 1 \leq \sup_{f \in B} \left\|\frac{f}{d} - w\right\| = \sup_{f' \in \frac{1}{d}B} \|f' - w\| .$$

Como w é arbitrário, $1 \leq rad(\frac{1}{d}B;W)$.

Se $1 < rad(\frac{1}{d}B;W)$, seja $\varepsilon > 0$ tal que

$1 < 1 + \varepsilon < \mathrm{rad}(\frac{1}{d}B;W)$. Então, $1 + \varepsilon < \sup_{f \in B} \|\frac{f}{d} - \frac{w}{d}\| = \frac{1}{d} \sup_{f \in B} \|f - w\|$ para todo $w \in W$ e daí, $d(1 + \varepsilon) \leq d$. Logo, $1 + \varepsilon \leq 1$ o que é uma contradição. Portanto, $\mathrm{rad}(\frac{1}{d}B;W) = 1$.

0.8 LEMA: *Sejam* E *um espaço normado,* $W \subset E$ *um subespaço vetorial fechado. Então,* $\mathrm{cent}(B;W) \neq \emptyset$ *para todo limitado não-vazio* $B \subset E$ *se, e somente se, para todo limitado não-vazio* $B \subset E$ *tal que* $\mathrm{rad}(B;W) = 1$, $\mathrm{cent}(B;W) \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO: ($\Rightarrow$) imediato.

($\Leftarrow$) Sejam $B \subset E$ limitado não-vazio e $d = \mathrm{rad}(B;W)$. Se $d = 0$, B é da forma $B = \{f\}$ com $f \in W$, e portanto $\mathrm{cent}(B;W) = \{f\}$. Se $d > 0$, pelo lema 0.7, $\mathrm{rad}(\frac{1}{d}B;W) = 1$. Por hipótese, existe $g \in W$ tal que $\sup_{f \in B} \|\frac{1}{d} f - g\| = 1$. Daí, $\sup_{f \in B} \|f - dg\| = d$ e $dg \in \mathrm{cent}(B;W)$.

0.9 DEFINIÇÃO: Um espaço de Banach E é dito *uniformemente convexo* se, dado $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que:

$x, y \in E$, $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \geq \varepsilon$ implica $\|x + y\| \leq 2 - \delta$.

Os espaços de Hilbert, os ℓ_p e L_p com $1 < p < \infty$ são uniformemente convexos. Ver Clarkson [7] e Diestel [8].

0.10 LEMA: *Sejam* E *um espaço de Banach uniformemente convexo e* $W \subset E$ *um subespaço vetorial fechado. Então, para todo* $B \subset E$

limitado não-vazio, $\mathrm{cent}(B;W) \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO: Ver [16].

0.11 LEMA: (*Olech* [21]): *Seja* E *um espaço de Banach uniformemente convexo. Então, dados* $\varepsilon > 0$ *e* $R > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\|h(y)\| \leq \varepsilon$ *e* $\bar{B}(0,R+\delta) \cap \bar{B}(y,R) \subset \bar{B}(h(y),R)$ *para todo* $y \in E$, *onde* $h : E \longrightarrow E$ *é dada por:*

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{\|y\|}\, y & \text{se } \|y\| > \varepsilon; \\ y & \text{se } \|y\| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

0.12 DEFINIÇÕES: Sejam E um espaço de Banach e $V \subset E$ um subespaço vetorial fechado.

a) Diz-se que V tem a propriedade das $1\frac{1}{2}$ - bolas fechadas em E se dados $a_1 \in V$, $a_2 \in E$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ tais que $\|a_1 - a_2\| < r_1 + r_2$ e $\bar{B}(a_2,r_2) \cap V \neq \emptyset$, segue que $\bar{B}(a_1,r_1) \cap \bar{B}(a_2,r_2) \cap V \neq \emptyset$.

b) Seja $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que V tem a propriedade das n-bolas fechadas se $V \cap \bigcap_{i=1}^{n} \bar{B}(x_i,r_i) \neq \emptyset$ para toda família $\bar{B}(x_1,r_1),\ldots,\bar{B}(x_n,r_n)$ de bolas fechadas tal que $V \cap \bar{B}(x_i,r_i) \neq \emptyset$ $(i=1,\ldots,n)$ e $\bigcap_{i=1}^{n} \bar{B}(x_i,r_i)$ tem interior não-vazio em E.

c) Um espaço de Banach E é um *espaço de Lindenstrauss* se toda coleção de bolas fechadas em E, interceptando-se duas a duas e cujo conjunto dos centros é relativamente compacto tem intersecção não-vazia.

Lindenstrauss mostrou em [15] que um espaço de Banach *real* é um espaço de Lindenstrauss se, e só se, $E^* = L_1(\mu)$ para alguma medida μ.

d) Diz-se que um espaço de Banach E tem a propriedade da intersecção binária se toda coleção de bolas fechadas em E, interceptando-se duas a duas, tem intersecção não-vazia.

Nachbin [20] demonstrou que, no caso de espaços de Banach reais, a propriedade da intersecção binária é equivalente à propriedade da extensão.

Um espaço de Banach E tem a propriedade da extensão se, dado qualquer espaço de Banach G, qualquer subespaço vetorial $F \subset G$ e $T : F \longrightarrow E$, linear e contínua, existe $\tilde{T}: G \longrightarrow E$ linear e contínua com $\|\tilde{T}\| = \|T\|$, $\tilde{T}|_F = T$. Esta propriedade é ainda equivalente a E ser isometricamente isomorfo a um $C(X;\mathbb{K})$; com X compacto de Hausdorff extremamente desconexo (isto é, o fecho de um aberto é aberto). Ver Nachbin [20], Goodner [10], Kelley [13], Hasumi [11].

0.13 DEFINIÇÕES: Sejam E um espaço de Banach e $V \subset E$ um subespaço vetorial fechado. Dizemos que V é um M-*somando* se existe uma M-projeção linear P de E sobre V, isto é, uma projeção linear P sobre V tal que $\|x\| = \max(\|Px\|, \|x - Px\|)$, para todo $x \in E$.

Dizemos que V é um M-*ideal* se existe uma projeção linear e contínua P definida no dual E^* sobre V^0, o anulador de V, tal que para todo $\varphi \in E^*$ temos $\|\varphi\| = \|P\varphi\| + \|\varphi - P\varphi\|$.

Qualquer M-somando é um M-ideal, e a recíproca é verdadeira nos espaços reflexivos. Ver Alfsen e Effros [1]. Todo M-ideal é proximinal (Ver Alfsen e Effros [1 , Corollary 5.6],ou então Ando [3 , Theorem 2.1]). Holmes,Scranton e Ward [12, Theorem 2.2] provaram que a projeção métrica de um M-ideal admite uma seleção homogênea e contínua.

A demonstração direta de que qualquer M-somando V é proximinal é elementar e segue do fato que, para toda projeção P sobre V tem-se:

$$\|f - Pf\| \leq \|I - P\| \cdot \operatorname{dist}(f;V) \quad (*)$$

e se P é M-projeção, $\|I - P\| \leq 1$.

Demonstração de (*): Para todo $g \in V$, tem-se $g = Pg$. Logo $\|f - Pf\| = \|f - g + Pg - Pf\| = \|(I - P)(f - g)\| \leq \|I - P\| \cdot \|f - g\|$. Como g era arbitrário em V, $\|f - Pf\| \leq \|I - P\| \cdot \operatorname{dist}(f;V)$.

Alfsen e Effros [1] demonstraram que todo M-ideal tem a propriedade das n-bolas fechadas, para todo inteiro $n \geq 1$. É claro que a propriedade das 2-bolas fechadas já implica a propriedade das $1\frac{1}{2}$ bolas fechadas. Lembramos que Smith e Ward [28 , Theorem 6.2] provaram que o subespaço $\mathcal{K}(\ell_1)$ de $\mathcal{L}(\ell_1)$ não tem a propriedade das n-bolas fechadas para nenhum $n \geq 2$, mas Yost [30] mostrou que ele tem a propriedade das $1\frac{1}{2}$-bolas fechadas ([30], pg. 296). (Se E é um espaço de Banach, $\mathcal{L}(E)$ denota o espaço de Banach de todos os operadores lineares limitados de E em E, e $\mathcal{K}(E)$ o subespaço dos $T \in \mathcal{L}(E)$ que são compactos).

0.14 OBSERVAÇÕES: Neste trabalho, X denota um espaço topológico não-vazio, completamente regular e Hausdorff. Outras hipóteses sobre X serão explicitadas quando necessário.

a) DEFINIÇÃO: Dizemos que um espaço topológico X é *completamente regular* se, dados $x \in X$ e uma vizinhança qualquer V de x, existe uma função contínua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ e $f(y) = 0$ se $y \notin V$.

b) NOTAÇÕES: Denotaremos por $C(X)$ a álgebra sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de todas as funções contínuas definidas em X e com valores em $\mathbb{K}$. A subálgebra de $C(X)$ consistindo de todos os elementos de $C(X)$ que são limitados em X será denotada por $C_b(X)$. Quando X é localmente compacto, consideraremos ainda outras duas subálgebras:

1) $C_0(X)$, a subálgebra de $C(X)$ consistindo de todos os elementos de $C(X)$ que se anulam no infinito, isto é, aquelas $f \in C(X)$ tais que, dado $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto compacto $K \subset X$ tal

que $|f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X \setminus K$;

2) $K(X)$, a subálgebra de $C(X)$ de todas as funções de $C(X)$ que tem suporte compacto, isto é, aquelas $f \in C(X)$ tais que o fecho em X do conjunto $\{x \in X; f(x) \neq 0\}$ é um compacto.

Denotaremos por $C(X;E)$ o conjunto de todas as funções contínuas definidas em X e com valores no espaço de Banach E. O subconjunto de todas as funções de $C(X;E)$ que são limitadas em X será denotado $C_b(X;E)$. Se $f \in C_b(X;E)$ definimos $\|f\|_X = \sup\{\|f(x)\|; x \in X\}$.

c) DEFINIÇÃO: Seja $A \subset C(X)$ uma subálgebra. Um subespaço $W \subset C(X;E)$ é um A-módulo se para toda $f \in A$ e todo $w \in W$, $fw \in W$ (onde fw é definida por $fw(x)=f(x)w(x)$, para todo $x \in X$).

Seja $\sim$ uma relação de equivalência em X, $X_\pi = X/\sim$ com a topologia quociente e $\pi : X \longrightarrow X_\pi$ a aplicação quociente. Definimos $\pi^0 : C_b(X_\pi;E) \longrightarrow C_b(X;E)$ por $\pi^0(g) = g \circ \pi$, para toda $g \in C_b(X_\pi;E)$. A aplicação π^0 é uma isometria linear, isto é, $\|\pi^0(g)\|_X = \|g\|_{X_\pi}$. De fato: $\|\pi^0(g)\|_X = \sup_{x\in X}\|g \circ \pi(x)\| = \sup_{y\in X_\pi}\|g(y)\| = \|g\|_{X_\pi}$.

Se $f \in C_b(X;E)$ é tal que $f(x) = f(t)$ para todo $x \sim t$, então $f \in \pi^0(C_b(X_\pi;E))$, e definimos $f^\#: X_\pi \longrightarrow E$ por $f^\#(\pi(x)) = f(x)$ para todo $x \in X$. Então:

1) $f^\# \in C_b(X_\pi; E)$: Seja $G \subset E$ aberto. Então, $f^{-1}(G)$ é aberto pois f é contínua. Como $f^{-1}(G) = \pi^{-1}(f^{\#-1}(G))$ e π é aplicação

quociente temos $f^{\#-1}(G)$ aberto e logo $f^{\#}$ é contínua.

2) $f^{\#}$ é limitada. Verificação imediata.

3) $\pi^0(f^{\#}) = f$. Segue da definição de $f^{\#}$.

Portanto, se $W \subset C_b(X;E)$ é tal que $w(x) = w(t)$ para todo $w \in W$ e para todo $x \sim t$, temos $W \subset \pi^0(C_b(X_\pi;E))$. Definimos $W^{\#} = \{w^{\#};\ w \in W\}$. Se W é fechado em $C_b(X;E)$, $W^{\#}$ é fechado em $C_b(X_\pi;E)$.

0.15 DEFINIÇÃO: Se $A \subset C(X)$ é um subconjunto não-vazio, definimos uma relação de equivalência em X da seguinte maneira: para todo par $x,t \in X$, x é equivalente a t módulo A se, e somente se, $a(x) = a(t)$ para todo $a \in A$. Denotaremos por $[x]_A$ a classe de equivalência de $x \in X$ módulo A.

0.16 DEFINIÇÃO: Sejam $\pi : X \longrightarrow X_\pi$ uma aplicação contínua e sobre, E um espaço de Banach e $W \subset C_b(X,E)$. Dizemos que W é π-*localizável* se para toda $h \in C_b(X;E)$, $h\big|_{\pi^{-1}(y)} \in \overline{W}\big|_{\pi^{-1}(y)}$, para todo $y \in X_\pi$, implica $h \in \overline{W}$. Quando todo $w \in W$ é constante em $\pi^{-1}(y)$, para cada $y \in X_\pi$, escreveremos $W(y)=\{w(x) \in E;\ w \in W,\ x \in \pi^{-1}(y)\}$.

Quando X_π é o espaço quociente de X módulo A, onde $A \subset C(X)$, e π é a aplicação quociente $\pi(x) = [x]_A$, para todo

$x \in X$, um subespaço vetorial $W \subset C_b(X;E)$ que é π-localizável, é dito *localizável sob* A.

0.17 TEOREMA: (a) *Sejam* X *um espaço compacto e de Hausdorff e* $A \subset C(X)$ *uma subálgebra auto-adjunta. Todo subespaço vetorial* $W \subset C(X;E)$ *que é um* A-*módulo é localizável sob* A *em* $C(X;E)$.

(b) *Sejam* X *um espaço localmente compacto e Hausdorff e* $A \subset C_0(X)$ *uma subálgebra auto-adjunta. Todo subespaço vetorial* $W \subset C_0(X;E)$ *que é um* A-*módulo é localizável sob* A *em* $C_0(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: (a) Ver Theorem 1.8 de Prolla [23].

(b) Ver Corollary 6.2 de Prolla [23].

0.18 DEFINIÇÃO: Seja E um espaço normado e seja E^* seu dual. Dizemos que um subespaço vetorial $W \subset C_b(X;E)$, é uma *álgebra polinomial* se $A = \{\varphi \circ g; \varphi \in E^*, g \in W\}$ é uma subálgebra de $C_b(X)$ tal que $A \otimes E \subset W$.

Uma álgebra polinomial W é dita auto-adjunta se a subálgebra A é auto-adjunta.

0.19 DEFINIÇÃO: Seja E um espaço normado. Um subespaço vetorial $W \subset C_b(X;E)$ é um *subespaço de Stone-Weierstrass* se existem um espaço topológico Y e uma sobrejeção contínua e aberta $\pi: X \longrightarrow Y$ tais que:

$W = \{g \circ \pi \; ; \; g \in C_b(Y;E)\}$.

0.20 PROPOSIÇÃO: *Seja* E *um espaço normado. Todo subespaço de Stone-Weierstrass* W *de* $C_b(X;E)$ *é uma álgebra polinomial fechada e auto-adjunta.*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos mostrar que W satisfaz a seguinte condição, equivalente à definição de álgebra polinomial dada em 0.18, (Ver Prolla e Machado [24]):

Dados $h_1,\ldots,h_n \in W$ e $T \in L(^nE;E)$, onde $n \geq 1$, então $T(h_1,\ldots,h_n) \in W$. ($L(^nE;E)$ denota o subespaço vetorial de $C(E^n;E)$ gerado pelo conjunto de todas as aplicações da forma $(x_1,\ldots,x_n) \longmapsto \phi_1(x_1)\ldots\phi_n(x_n)\cdot v$, onde $\phi_1,\ldots,\phi_n \in E^*$ e $v \in E$. Os elementos de $L(^nE;E)$ são chamados aplicações n-lineares contínuas de tipo finito de E^n em E.).

Sejam $h_1,\ldots,h_n \in W$. Então existem $g_1,\ldots,g_n \in C_b(Y;E)$ tais que $h_i = g_i \circ \pi$, $i = 1,\ldots,n$. Se $T \in L(^nE;E)$ então $T(h_1,\ldots,h_n) =$ $= T(g_1 \circ \pi,\ldots,g_n \circ \pi) = T(g_1,\ldots,g_n) \circ \pi \in W$.

Logo, W é álgebra polinomial. (Ver Lemma 2.2 de Prolla e Machado [24].)

Mostremos que A é auto-adjunta. Seja $\varphi \circ g \in A$. Então $g = h \circ \pi$ para alguma $h \in C_b(Y;E)$, e $\overline{\varphi \circ g} = \overline{\varphi \circ h \circ \pi} =$

$\overline{(\varphi \circ h)} \circ \pi$.

Por outro lado, se $v \in E$, $v \neq 0$ temos:

$w = \overline{\varphi \circ g} \otimes v = ((\overline{\varphi \circ h}) \circ \pi) \otimes v = (\overline{\varphi \circ h} \otimes v) \circ \pi$. Logo, $w \in W$ pois $\overline{\varphi \circ h} \otimes v \in C_b(Y;E)$. Tomando $\psi \in E^*$ com $\psi(v) = 1$ resulta que $\psi \circ w = \overline{\varphi \circ g} \in A$.

Vamos mostrar ainda que W é fechado. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em W e seja $f \in C_b(X;E)$ tal que $f_n \longrightarrow f$. Para cada $x \in X$, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$. Sejam x e x' tais que $\pi(x) = \pi(x')$. Então $g_n(\pi(x)) = g_n(\pi(x'))$, onde $f_n = g_n \circ \pi$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo $f(x) = f(x')$. Portanto, para cada $y \in Y$, f é constante em $\pi^{-1}(y)$. Seja $g : Y \longrightarrow E$ definida por $g(y) = f(x)$ onde $x \in \pi^{-1}(y)$. Então $g \circ \pi = f$, e para todo $G \subset E, \pi(f^{-1}(G)) = g^{-1}(G)$ pois π é sobre. Se G é aberto, resulta que $g^{-1}(G)$ é aberto, pois π é aberta e f contínua. Logo, $g \in C_b(Y;E)$ e $f \in W$. Logo W é fechado.

0.21 DEFINIÇÃO: Sejam X um espaço topológico e E um espaço normado. Uma aplicação de X no conjunto das partes não-vazias de E é chamada de *portador* de X em E. Um portador Γ é dito *semicontínuo inferiormente* se para todo $x_0 \in X$, para todo $a \in E$ e para todo $r > 0$ tais que $\Gamma(x_0) \cap B(a,r) \neq \emptyset$ existe vizinhança U de x_0 tal que $\Gamma(x) \cap B(a,r) \neq \emptyset$, para todo $x \in U$.

Uma *seleção contínua* para o portador Γ é uma aplicação contínua $g : X \longrightarrow E$ tal que $g(x) \in \Gamma(x)$ para todo $x \in X$.

0.22 DEFINIÇÃO: Um espaço topológico X é dito *paracompacto* quando toda cobertura aberta de X possui um refinamento aberto localmente finito.

0.23 *TEOREMA DE MICHAEL: Seja* X *um espaço paracompacto. Todo portador semicontínuo inferiormente* Γ *de* X *no conjunto das partes fechadas, convexas e não-vazias de um espaço de Banach* E, *admite uma seleção contínua.*

DEMONSTRAÇÃO: Ver Michael [19].

0.24 DEFINIÇÃO: Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ diz-se própria quando é contínua, fechada e, para cada $y \in Y$, a imagem inversa $f^{-1}(y)$ é compacta.

0.25 LEMA: *Sejam* X,Y *espaços topológicos de Hausdorff e* π *uma aplicação própria de* X *sobre* Y. *Para cada função semicontínua superiormente* $g : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *definimos* $h(y)=\sup\{g(x); x \in \pi^{-1}(y)\}$ *para todo* $y \in Y$. *Então a aplicação* $y \longmapsto h(y)$ *é semicontínua superiormente em* Y.

DEMONSTRAÇÃO: (Adaptada do Lemma 1 de Machado-Prolla [18].)
Para cada $y \in Y$, $\pi^{-1}(y)$ é compacto em X e não-vazio pois π é própria e sobre Y. Logo, existe $a \in \pi^{-1}(y)$ tal que $h(y) = g(a) = \sup\{g(x); x \in \pi^{-1}(y)\}$ pois g é semicontínua supe-

riormente e logo $h(y)$ é finito. Denotemos por h a função real definida em Y que para cada $y \in Y$ tem o valor $h(y)$. Seja $r \in \mathbb{R}$. O conjunto $\{x \in X; g(x) \geq r\} = F$ é fechado, pois g é semicontínua superiormente e como π é fechada, $\pi(F)$ é fechado em Y. Afirmamos que $\pi(F) = \{y \in Y; h(y) \geq r\}$, o que prova que h é semicontínua superiormente. De fato, se $y \in \pi(F)$, então $y = \pi(x)$ para algum $x \in F$ e então $h(y) \geq g(x) \geq r$. Reciprocamente, se $y \notin \pi(F)$ e $t \in \pi^{-1}(y)$, então $g(t) < r$; segue que $h(y) < r$ pois existe $t_0 \in \pi^{-1}(y)$ tal que $g(t_0) = h(y)$ e a prova está completa.

0.26 NOTAÇÃO: Se $x \in X$ indicaremos por δ_x o elemento do dual de $C_b(X;E)$ definido por $\delta_x(f) = f(x), f \in C_b(X;E)$. Se V é um subespaço vetorial de $C_b(X;E)$, $\delta_x|_V$ indica a restrição a V de δ_x. Obviamente, $\|\delta_x|_V\| \leq 1$.

§1. *A PROPRIEDADE* P_1

1.1 DEFINIÇÃO: Um espaço de Banach E possui a propriedade P_1 se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo precompacto $K \subset B(0,1+\delta)$ tal que $\mathrm{rad}(K) \leq 1$, existir $s \in E$ com $\|s\| \leq \varepsilon$ e $K \subset \bar{B}(s,1)$.

Os espaços de Banach uniformemente convexos têm a propriedade P_1. De fato, veremos mais adiante (Ver 2.2 e 2.3) que eles têm uma propriedade mais geral.

A definição da propriedade P_1 dada acima é devida a Poubel [22] ; a demonstração do Exemplo 1.2, que exporemos a seguir, é também devida ao mesmo autor.

1.2 EXEMPLO: Os espaços de Lindenstrauss têm a propriedade P_1.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta = \varepsilon$ e consideremos $K \subset B(0,1+\delta)$ precompacto tal que $\mathrm{rad}(K) \leq 1$.

Seja $y \in K$. Provemos que $\bar{B}(y,1) \cap \bar{B}(0,\varepsilon) \neq \emptyset$. Caso $\|y\| \leq \varepsilon$, nada há a ser demonstrado. Suponhamos então $\|y\| > \varepsilon$. Definamos $z = \frac{\varepsilon}{\|y\|}y$. Observemos então que $\|z-y\| = \left\|y - \frac{\varepsilon}{\|y\|}\, y\right\| = \|y\|\frac{\|y\|-\varepsilon}{\|y\|} = \|y\| - \varepsilon = \|y\| - \delta < 1+\delta-\delta = 1$ e, obviamente $\|z\| = \varepsilon$.

Observemos também que $\bar{B}(y,1) \cap \bar{B}(z,1) \neq \emptyset$ se $y, z \in K$ pois $\|y-z\| \leq \mathrm{diam}(K) \leq 2\ \mathrm{rad}(K) \leq 2$.

Logo, como E é um espaço de Lindenstrauss, existe $s \in \bar{B}(0,\varepsilon) \cap (\cap\{\bar{B}(y,1);\ y \in K\})$ pois $K \cup \{0\}$ é relativamente compacto. Logo, $\|s\| \leq \varepsilon$ e $\|s - y\| \leq 1$ para todo $y \in K$, ou seja, $K \subset \bar{B}(s,1)$.

1.3 LEMA: *Seja* E *um espaço de Banach com a propriedade* P_1. *Para todo precompacto não-vazio* $B \subset E$ *temos* $\text{cent}(B) \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Lema 0.8, podemos supor que $\text{rad}(B) = 1$. Seja $\varepsilon > 0$. Consideremos $\delta > 0$ dado pela propriedade P_1. Como $\text{rad}(B) = \inf_{v \in E} \sup_{b \in B} \|b - v\| = 1$, existe $v_0 \in E$ tal $\sup_{b \in B} \|b - v_0\| < 1 + \delta$.

Tomemos $K = B - v_0 \subset B(0,1 + \delta)$. Como $\text{rad}(K) = \text{rad}(B) = 1$, pela propriedade P_1 existe $v \in E$ com $\|v\| \leq \varepsilon$ e $B - v_0 \subset \bar{B}(v,1)$. Portanto, $\sup_{b \in B} \|b - (v_0 + v)\| \leq 1$ e $v_0 + v \in \text{cent}(B)$.

1.4 TEOREMA: *Sejam* $\pi : X \longrightarrow X_\pi$ *uma aplicação própria e sobre um espaço paracompacto Hausdorff* X_π, E *um espaço de Banach com a propriedade* P_1, $W \subset C_b(X;E)$ *um subespaço vetorial fechado contendo* $\pi^0(C_b(X_\pi;E))$. *Seja* $f \in C_b(X;E)$ *tal que* $\text{dist}(f;W) = 1$ *e* $\sup_{y \in X_\pi} \text{rad } f(\pi^{-1}(y)) \leq \text{dist}(f;W)$. *Então* $P_W(f) \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO: Para todo $y \in X_\pi$ definimos

$$\Gamma_f(y) = \{s \in E;\ \sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \|f(x) - s\| \leq 1\}.$$

É claro que $\Gamma_f(y)$ é fechado e convexo. Verifiquemos que $\Gamma_f(y) \neq \emptyset$.

Seja $B = f(\pi^{-1}(y))$. Então B é compacto e não-vazio e pelo Lema 1.3 existe $s_0 \in \text{cent}(B)$. Como $\sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \|f(x) - s_0\| \leq \text{rad}(B) = \text{rad } f(\pi^{-1}(y)) \leq 1$, $s_0 \in \Gamma_f(y)$.

Mostremos agora que Γ_f é semicontínuo inferiormente em X_π. Sejam $y_0 \in X_\pi$, $a \in E$ e $r > 0$ tais que $\Gamma_f(y_0) \cap B(a,r) \neq \emptyset$. Então, existe $s_0 \in E$ tal que:

(i) $\sup_{x \in \pi^{-1}(y_0)} \|f(x) - s_0\| \leq 1.$

(ii) $\|a - s_0\| < r.$

Tomemos r' tal que $\|a - s_0\| < r' < r.$

Como $x \longmapsto \|f(x) - s_0\|$ é contínua temos que $y \longmapsto \sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \|f(x) - s_0\|$ é semicontínua superiormente (ver Lema 0.25). Consideremos então, uma vizinhança U de y_0 tal que $\sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \|f(x) - s_0\| < 1 + \delta$ para todo $y \in U$ onde $\delta > 0$ é dado pela propriedade P_1 aplicada para $\varepsilon = r' - \|a - s_0\| > 0$.

Tomemos $y \in U$. Então, $f(\pi^{-1}(y)) - s_0 \subset B(0,1 + \delta)$. Como $\text{rad}(f(\pi^{-1}(y)) - s_0) = \text{rad } f(\pi^{-1}(y)) \leq 1$, pela propriedade P_1 temos que $f(\pi^{-1}(y)) - s_0 \subset \bar{B}(s,1)$ onde $s \in E$ é tal que $\|s\| \leq \varepsilon$. Seja $s_1 = s_0 + s$. Então $f(\pi^{-1}(y)) \subset \bar{B}(s_1,1)$, ou seja, $\|f(x) - s_1\| \leq 1$ para todo $x \in \pi^{-1}(y)$. Além disso, $\|s_1 - a\| \leq \|s_1 - s_0\| + \|s_0 - a\| \leq \varepsilon + r' - \varepsilon = r' < r$. Portanto, $s_1 \in \Gamma_f(y) \cap B(a,r)$. Mostramos que $\Gamma_f(y) \cap B(a,r) \neq \emptyset$ para todo $y \in U$. Logo, Γ_f é semicontínuo inferiormente em X_π. Pelo Teorema de

Michael existe $g \in C_b(X_\pi;E)$ que é seleção contínua para Γ_f.

Consideremos $h = g \circ \pi \in C_b(X;E)$. Pela hipótese feita $h \in W$, pois $h = \pi^0(g)$.

Vamos mostrar agora que $h \in P_W(f)$. Fixemos $x \in X$ e seja $y = \pi(x) \in X_\pi$. Então: $\|h(x) - f(x)\| \leq \sup_{t \in \pi^{-1}(y)} \|h(t) - f(t)\| \leq$

$\leq \sup_{t \in \pi^{-1}(y)} \|g(y) - f(t)\|$ pois $h(t) = g(\pi(t)) = g(\pi(x)) = g(y)$ para todo $t \in \pi^{-1}(y)$. Como $g(y) \in \Gamma_f(y)$ para todo $y \in X_\pi$, $\sup_{t \in \pi^{-1}(y)} \|g(y) - f(t)\| \leq 1$. Logo, $\|h(x) - f(x)\| \leq 1$ para todo $x \in X$ e portanto, $\|h - f\| \leq 1 = \text{dist}(f;W)$, ou seja, $h \in P_W(f)$.

1.5 TEOREMA: *Sejam* X *um espaço compacto Hausdorff,* E *um espaço de Banach com a propriedade* P_1, $A \subset C(X;\mathbb{K})$ *uma subálgebra auto-adjunta,* $W \subset C(X;E)$ *um subespaço vetorial fechado contendo as funções constantes e que é um* A-*módulo, e seja* X_π *o espaço quociente de* X *módulo* A. *Seja* $f \in C(X;E)$ *tal que* $\text{dist}(f;W) = 1$ *e* $\sup_{x \in X} \text{rad } f([x]_A) \leq \text{dist}(f;W)$. *Então* $P_W(f) \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO: Basta notar que devido ao Teorema 0.17, parte (a), W é π-localizável onde $\pi : X \longrightarrow X_\pi$ é a aplicação quociente, e daí resulta que $\pi^0(C(X_\pi;E)) \subset W$ pois W contém as constantes.

1.6 COROLÁRIO: *Sejam* E, A *e* W *como no Teorema* 1.5 *e suponhamos* *ainda que cada* $g \in W$ *é constante em cada classe de equivalência* $[x]_A$, $x \in X$. *Então* W *é proximinal em* $C(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Lema 0.4 basta mostrar que $P_W(f) \neq \emptyset$ para toda $f \in C(X;E)$ tal que $\mathrm{dist}(f;W) = 1$.

Seja f nestas condições. Afirmamos que $\sup\limits_{x \in X} \mathrm{rad}\, f([x]_A) \leq$ $\leq \mathrm{dist}(f;W)$. De fato, fixemos $x \in X$ e $w \in W$. Então: $\mathrm{rad}\, f([x]_A) =$ $= \inf\limits_{v \in E} \sup\limits_{t \in [x]_A} \|f(t) - v\| \leq \sup\limits_{t \in [x]_A} \|f(t) - w(t)\| \leq \sup\limits_{t \in X} \|f(t) - w(t)\| = \|f - w\|$.
Portanto, $\sup\limits_{x \in X} \mathrm{rad}\, f([x]_A) \leq \|f - w\|$. Como w era arbitrário em W, $\sup\limits_{x \in X} \mathrm{rad}\, f([x]_A) \leq \inf\limits_{w \in W} \|f - w\| = \mathrm{dist}(f;W)$. Pelo Teorema 1.5 resulta que W é proximinal em $C(X;E)$.

1.7 EXEMPLO: Sejam X e E como no Teorema 1.5, $W \subset C(X;E)$ uma álgebra polinomial auto-adjunta fechada contendo as funções constantes. Então W é proximinal em $C(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Por definição, $W \subset C(X;E)$ é álgebra polinomial auto-adjunta se, e só se, $A = \{\varphi \circ g; \varphi \in E^*, g \in W\}$ é uma subálgebra auto-adjunta de $C(X;\mathbb{K})$ e $A \otimes E \subset W$ (ver 0.18). Resulta do Teorema de Hahn-Banach que cada $g \in W$ é constante em $[x]_A$, para cada $x \in X$.

Verifiquemos que W é A-módulo: Sejam $h = aw$ com $a \in A$ e $w \in W$ e $Y = [x]_A = [x]_W$. Então, h é constante em Y.

Se $h|_Y = 0$ nada há a ser demonstrado.

Se $h|_Y \neq 0$, seja $h|_Y$ = constante $= v \neq 0$.

Seja $t \in Y$. Então $v = h(t) = a(t)w(t) \neq 0$. Portanto $w(t) \neq 0$. Escolha $\varphi \in E^*$ tal que $\varphi(w(t)) = 1$. Então $\varphi \circ w \in A$ e definindo $k = (\varphi \circ w) \otimes v$ temos $k \in A \otimes E$ e $k = h$ em Y. De fato, se $t \in Y$ temos $k(t) = \varphi(w(t)) \cdot v = 1\ v = v = h(t)$. Portanto, $h \in \overline{A \otimes E}$ por 0.17(a). Basta agora observar que $\overline{A \otimes E} \subset \subset \overline{W} = W$.

1.8 SUBEXEMPLO: Sejam X um espaço compacto Hausdorff, E um espaço de Banach com a propriedade P_1 e $W \subset C(X;E)$ um subespaço de Stone-Weierstrass. Então W é proximinal em $C(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: W é uma álgebra polinomial auto-adjunta e fechada de $C(X;E)$, contendo as constantes. (Ver 0.20)

1.9 OBSERVAÇÃO: Quando E é uniformemente convexo, Olech [21] provou a proximinalidade dos subespaços de Stone-Weierstrass de $C(X;E)$.

1.10 EXEMPLO: Sejam X compacto Hausdorff, E um espaço de Banach com a propriedade P_1 e F uma família de aplicações contínuas de X em X. Então $W(F) = \{g \in C(X;E); g(f(x)) = g(x), x \in X, f \in F\}$ é proximinal em $C(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos $A(F) = \{\varphi \in C(X;\mathbb{K}); \varphi(f(x)) = \varphi(x)$, $f \in F, x \in X\}$. É fácil ver que $A(F)$ é uma subálgebra auto-adjunta e $W(F)$ é um $A(F)$-módulo.

Vamos verificar que $W(F)$ é fechado. Seja $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W(F)$ tal que $g_n \longrightarrow g$. Devemos mostrar que $g \in W(F)$.

Como $g_n \in W(F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $g_n(f(x)) = g_n(x)$ para todo $x \in X$, para todo $f \in F$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $g(f(x)) = \lim g_n(f(x)) = \lim g_n(x) = g(x)$ para todo $x \in X$ e para todo $f \in F$ e logo, $g \in W(F)$.

Claramente $W(F)$ contém as funções constantes. Precisamos verificar ainda que cada $g \in W(F)$ é constante em $[x]_{A(F)}$. Sejam $t \in [x]_{A(F)}$, $g \in W(F)$ e suponhamos $g(t) \neq g(x)$. Consideremos $\varphi \in E^*$ tal que $\varphi(g(x)) \neq \varphi(g(t))$ e $h = \varphi \circ g$. Então, $h \in A(F)$ pois $h \circ f = \varphi \circ g \circ f = \varphi \circ g = h$ e $h(x) \neq h(t)$ o que é uma contradição. O resultado segue do Corolário 1.6.

1.11 SUBEXEMPLO: Sejam $X = [-1,1]$, E um espaço de Banach com a propriedade P_1, $F = \{f\}$ onde $f(x) = -x$. Então, $W(F)$, o espaço vetorial das funções pares, é proximinal em $C(X;E)$.

1.12 TEOREMA: *Sejam* π, E *e* W *como no Teorema* 1.4. *Então, para todo precompacto* $B \subset C_b(X;E)$ *com* $\mathrm{rad}(B;W)=1$ *e tal que* $\sup_{y \in X_\pi} \mathrm{rad}(B_y) \leq \mathrm{rad}(B;W)$ *onde* $B_y = \bigcup_{f \in B} f(\pi^{-1}(y))$, *temos* $\mathrm{cent}(B;W) \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO: Para todo $y \in X_\pi$ definimos $\Gamma_B(y) = \{s \in E;$ $\|f(x) - s\| \leq 1,\ x \in \pi^{-1}(y),\ f \in B\}$. O conjunto $\Gamma_B(y)$ é fechado e convexo. Além disso, $\Gamma_B(y) \neq \emptyset$. De fato, pelo Lema 1.3 $\text{cent}(B_y) \neq \emptyset$. Seja $s_0 \in \text{cent}(B_y)$. Como $\sup_{f \in B} \sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \|f(x) - s_0\| \leq$ $\leq \text{rad}(B_y) \leq 1$, temos $s_0 \in \Gamma_B(y)$.

O portador Γ_B é semicontínuo inferiormente em X_π: Sejam $y_0 \in X_\pi$, $a \in E$ e $r > 0$ tais que $\Gamma_B(y_0) \cap B(a,r) \neq \emptyset$. Então, existe $s \in E$ tal que:

(a) $\|f(x) - s\| \leq 1$, para todo $x \in \pi^{-1}(y_0)$ e para toda $f \in B$.

(b) $\|a - s\| < r$.

Seja r' tal que $\|a - s\| < r' < r$.

Consideremos $\delta > 0$ dado pela propriedade P_1 para $\varepsilon =$ $= r' - \|a - s\| > 0$.

Como B é precompacto, sejam $f_1,\ldots,f_n \in B$ tais que $B(f_1,\frac{\delta}{2}),\ldots,B(f_n,\frac{\delta}{2})$ cobrem B.

Como $x \longrightarrow \|f_i(x) - s\|$ é contínua temos que $y \longmapsto$ $\longmapsto \sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \|f_i(x) - s\|$ é semicontínua superiormente $(i = 1,\ldots,n)$.

Consideremos então vizinhanças $U_1,\ldots,U_n$ de y_0 tais que $\sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \|f_i(x) - s\| < 1 + \frac{\delta}{2}$ para todo $y \in U_i$.

Sejam $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, $y \in U$ e $f \in B$. Então $f \in B(f_{i_0},\frac{\delta}{2})$ para algum i_0, $1 \leq i_0 \leq n$ e $\|f(x) - s\| \leq \|f(x) - f_{i_0}(x)\| + \|f_{i_0}(x) -$

$- s\| < \frac{\delta}{2} + 1 + \frac{\delta}{2} = 1 + \delta$ para todo $x \in \pi^{-1}(y)$. Logo,

$\sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \|f(x) - s\| < 1 + \delta$ para todo $f \in B$ e para todo $y \in U$.

Tomemos $y \in U$. Então, $B_y - s \subset B(0,1+\delta)$, $B_y - s$ é precompacto (pois B_y o é) e $\mathrm{rad}(B_y - s) = \mathrm{rad}(B_y) \leq 1$. Pela propriedade P_1 existe $s_1 \in E$ tal que $\|s_1\| \leq \varepsilon$ e $B_y - s \subset \subset \bar{B}(s_1,1)$. Definindo $w = s + s_1$, temos $B_y \subset \bar{B}(w,1)$, ou seja, $\|f(x) - w\| \leq 1$ para todo $x \in \pi^{-1}(y)$ e para toda $f \in B$. Como $\|w - a\| \leq \|w - s\| + \|s - a\| \leq \varepsilon + r' - \varepsilon = r' < r$, temos que $w \in \in \Gamma_B(y) \cap B(a,r)$. Mostramos que $\Gamma_B(y) \cap B(a,r) \neq \emptyset$ para todo $y \in U$, ou seja, Γ_B é semicontínuo inferiormente em X_π. Pelo Teorema de Michael existe $g \in C_b(X_\pi;E)$ tal que $g(y) \in \Gamma_B(y)$ para todo $y \in X_\pi$.

Consideremos $h = g \circ \pi \in C_b(X;E)$. Por hipótese, $h \in W$.

Mostraremos agora que $h \in \mathrm{cent}(B;W)$. Para isso, fixemos $x \in X$ e seja $y = \pi(x) \in X_\pi$. Então: $\sup_{f \in B} \|h(x) - f(x)\| \leq$

$\leq \sup_{f \in B} \sup_{t \in \pi^{-1}(y)} \|g(y) - f(t)\| \leq 1$. Logo, $\sup_{x \in X} \sup_{f \in B} \|h(x) - f(x)\| \leq 1$.

Mas $\sup_{x \in X} \sup_{f \in B} \|h(x) - f(x)\| = \sup_{f \in B} \sup_{x \in X} \|h(x) - f(x)\| = \sup_{f \in B} \|h - f\|$.

Portanto, $\sup_{f \in B} \|h - f\| \leq 1 = \mathrm{rad}(B;W)$ e $h \in \mathrm{cent}(B;W)$.

1.13 TEOREMA: *Sejam* X *um espaço compacto Hausdorff,* E *um espaço de Banach com a propriedade* P_1, $A \subset C(X;\mathbb{K})$ *uma subálgebra auto-adjunta,* $W \subset C(X;E)$ *um subespaço vetorial fechado contendo as funções constantes e que é um* A*-módulo,* X_π *o espaço quociente*

X *módulo* A. *Então, para todo precompacto* $B \subset C(X;E)$ *tal que* $\mathrm{rad}(B;W) = 1$ *e* $\sup_{y \in X_\pi} \mathrm{rad}(B_y) \leq \mathrm{rad}(B;W)$, *temos* $\mathrm{cent}(B;W) \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\pi : X \longrightarrow X_\pi$ a aplicação quociente. Basta notar que W é π-localizável e portanto, $W \supset \pi^0(C(X_\pi;E))$.

1.14 COROLÁRIO: *Sejam* X,E,A e W *como no Teorema* 1.13 *e suponhamos ainda que cada* $g \in W$ *é constante em cada classe de equivalência* $[x]_A$, $x \in X$. *Então* W *tem a propriedade dos centros de Chebyshev em relação à família dos precompactos de* $C(X;E)$. *Em particular, toda álgebra polinomial fechada auto-adjunta de* $C(X;E)$ *e contendo as constantes de* $C(X;E)$ *tem essa propriedade.*

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Lema 0.8 basta mostrar que $\mathrm{cent}(B;W) \neq \emptyset$ para todo precompacto $B \subset C(X;E)$ tal que $\mathrm{rad}(B;W) = 1$. Seja B nestas condições. Então, $\sup_{y \in X_\pi} \mathrm{rad}(B_y) \leq \mathrm{rad}(B;W)$. De fato, fixemos $y \in X_\pi$ e $w \in W$. Então:

$$\mathrm{rad}(B_y) = \inf_{s \in E} \sup_{f \in B} \sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \|f(x) - s\| \leq \sup_{f \in B} \sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \|f(x) - w(x)\| \leq$$

$$\leq \sup_{f \in B} \sup_{x \in X} \|f(x) - w(x)\| = \sup_{f \in B} \|f - w\|. \text{ Portanto, } \sup_{y \in X_\pi} \mathrm{rad}(B_y) \leq$$

$$\leq \sup_{f \in B} \|f - w\|. \text{ Como } w \text{ era arbitrário em } W, \sup_{y \in X_\pi} \mathrm{rad}(B_y) \leq$$

$\leq \inf_{w \in W} \sup_{f \in B} \|f - w\| = \mathrm{rad}(B;W)$. Pelo Teorema 1.13, $\mathrm{cent}(B;W) \neq$

$\neq \emptyset$.

1.15 COROLÁRIO: *Sejam* X *e* E *como no Teorema* 1.13 *e* $B \subset C(X;E)$ *uma parte não-vazia e precompacta. Então* $\mathrm{cent}(B) \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO: No Corolário 1.14 tomemos $A = C(X;\mathbb{K})$ e $W = C(X;E)$. Como A é separadora, $[x]_A = \{x\}$ para todo $x \in X$ e portanto, cada $f \in C(X;E)$ é constante nas classes de equivalência de A.

1.16 OBSERVAÇÃO: Quando E é um espaço de Banach uniformemente convexo, vale um resultado mais geral. Com efeito, Ward [29] provou que $\mathrm{cent}(B) \neq \emptyset$ para todo *limitado* $B \subset C_b(X;E)$ se X é um espaço topológico normal e E é um espaço de Hilbert. Mais tarde, Amir [2] e Lau[14] estenderam o resultado de Ward para qualquer espaço de Banach uniformemente convexo E, e qualquer espaço topológico X.

1.17 EXEMPLO: Sejam X um espaço compacto Hausdorff, E um espaço de Banach com a propriedade P_1 e $W \subset C(X;E)$ um subespaço de Stone-Weierstrass. Então W tem a propriedade dos centros de Chebyshev em relação à família dos precompactos de $C(X;E)$.

1.18 OBSERVAÇÃO: Quando E é uniformemente convexo, Mach [16] provou que os subespaços de Stone-Weierstrass tem a propriedade dos centros de Chebyshev em relação à família de todos os *limitados* de $C(X;E)$. Ver também Corollary 3.6 de Roversi [26].

1.19 OBSERVAÇÃO: A conclusão do Teorema 1.4 permanece verdadeira para toda $f \in C_b(X;E)$ tal que $\sup_{y \in X_\pi} \text{rad } f(\pi^{-1}(y)) \leq \text{dist}(f,W)$. Vale observação análoga para a conclusão do Teorema 1.5.

1.20 TEOREMA: *Sejam* X *compacto Hausdorff e* E *um espaço de Banach com a propriedade* P_1. *Seja* $W \subset C(X;E)$ *um subespaço vetorial fechado contendo as constantes. Seja* $f \in C(X;E)$ *tal que* $\text{rad } f(X) \leq \text{dist}(f,W)$. *Então* $P_W(f) \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO: Considere a álgebra $A = \{\varphi \in C(X;\mathbb{R});\ \varphi g \in W$, para toda $g \in W\}$. Obviamente, W é um A-módulo e pelo Teorema 0.17, parte (a), W é π-localizável onde $\pi : X \longrightarrow X_\pi$ é a aplicação quociente, e X_π é espaço quociente de X módulo A. Se $x \in X$, $\text{rad } f([x]_A) \leq \text{rad } f(X)$ e podemos aplicar o Teorema 1.5 e a observação anterior.

§2. *A PROPRIEDADE* P_2

2.1 DEFINIÇÃO: Sejam E um espaço de Banach e $\mathcal{V}$ uma família de subespaços vetoriais fechados de E. Dizemos que a família $\mathcal{V}$ tem a propriedade P_2 se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $V \in \mathcal{V}$ e para todo precompacto $K \subset B(0,1+\delta)$ com $\mathrm{rad}(K;V) \leq 1$, existe $s \in V$ com $\|s\| \leq \varepsilon$ e $K \subset \bar{B}(s,1)$.

Quando a família $\mathcal{V}$ de todos os subespaços vetoriais fechados de E tem a propriedade P_2 dizemos que o espaço E tem a propriedade P_2.

2.2 OBSERVAÇÃO: Se a família $\mathcal{V} = \{E\}$ tem a propriedade P_2 então E tem a propriedade P_1.

2.3 EXEMPLO: Os espaços de Banach uniformemente convexos têm a propriedade P_2.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\varepsilon > 0$ dado. Consideremos $\delta > 0$ dado pelo Lema de Olech (0.11) para $R = 1$. Sejam $V \in \mathcal{V}$ e $K \subset B(0,1+\delta)$ precompacto tal que $\mathrm{rad}(K;V) \leq 1$. Consideremos k_0 um centro de Chebyshev de K relativo a V (ver Lema 0.10). Temos então $K \subset \bar{B}(k_0,\mathrm{rad}(K;V))$. Pelo Lema de Olech, $\bar{B}(k_0,1) \cap \bar{B}(0,1+\delta) \subset \subset \bar{B}(h(k_0),1)$.

Como $K \subset \bar{B}(k_0,\mathrm{rad}(K;V)) \cap B(0,1+\delta)$ segue que $K \subset \subset \bar{B}(h(k_0),1)$.

Basta tomar $s = h(k_0)$ e notar que $s \in V$, pois $k_0 \in V$, e que $\|s\| = \|h(k_0)\| \leq \varepsilon$.

2.4 PROPOSIÇÃO: *Sejam* E *um espaço de Banach e* V *uma família de subespaços vetoriais fechados de* E *com a propriedade* P_2. *Então, para todo* $W \in V$ *e todo subconjunto precompacto não-vazio* $B \subset E$ *temos que* $\text{cent}(B;W) \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Lema 0.8 basta mostrar que $\text{cent}(B;W) \neq \emptyset$ para todo $B \subset E$ precompacto não-vazio tal que $\text{rad}(B;W) = 1$. Tomemos $\varepsilon > 0$ e consideremos $\delta > 0$ dado pela propriedade P_2. Como $\text{rad}(B;W) = 1$, existe $w \in W$ tal que $\sup_{b \in B} \|b - w\| < 1 + \delta$. Tomemos $K = B - w$. Então $K \subset B(0, 1 + \delta)$ e como $\text{rad}(K;W) = \text{rad}(B;W) = 1$, pela propriedade P_2 existe $s \in W$ com $\|s\| \leq \varepsilon$ e $K = B - w \subset \bar{B}(s,1)$. Portanto, $\sup_{b \in B} \|b - (s + w)\| \leq 1$ e $s + w \in \text{cent}(B;W)$.

2.5 TEOREMA: *Sejam* $\pi : X \longrightarrow X_\pi$ *uma aplicação própria sobre um espaço paracompacto Hausdorff* X_π *e* E *um espaço de Banach. Seja* $W \subset C_b(X;E)$ *um subespaço vetorial fechado* π-*localizável e tal que* $w\big|_{\pi^{-1}(y)}$ *é constante para todo* $w \in W$ *e* $y \in X_\pi$. *Se* $V = \{\overline{W(y)}; y \in X_\pi\}$ *tem a propriedade* P_2, *então* W *é proximinal em* $C_b(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Lema 0.4 basta mostrar que $P_W(f) \neq \emptyset$ se $f \in C_b(X;E)$ e $\mathrm{dist}(f;W) = 1$.

Seja f nestas condições. Então:

1) $\sup\limits_{y \in X_\pi} \mathrm{rad}(f(\pi^{-1}(y)); \overline{W(y)}) \leq \mathrm{dist}(f;W)$. De fato, fixemos $y \in X_\pi$. Então:

$$\mathrm{rad}(f(\pi^{-1}(y)); \overline{W(y)}) = \inf_{s \in \overline{W(y)}} \sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \|f(x) - s\| =$$

$$= \inf_{\substack{w \in W \\ x \in \pi^{-1}(y)}} \sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \|f(x) - w(x)\| = \inf_{w \in W} \sup_{x \in \pi^{-1}(y)} \|f(x) - w(x)\| \leq$$

$$\leq \inf_{w \in W} \sup_{x \in X} \|f(x) - w(x)\| = \inf_{w \in W} \|f - w\| = \mathrm{dist}(f;W).$$

2) Para todo $y \in X_\pi$ definimos:

$\Gamma_f(y) = \overline{W(y)} \cap \{s \in E; \|f(t) - s\| \leq 1, t \in \pi^{-1}(y)\}$. Claramente $\Gamma_f(y)$ é fechado e convexo. Verifiquemos que $\Gamma_f(y)$ é não-vazio. Seja $B = f(\pi^{-1}(y))$. Então B é compacto e não-vazio. Pela Proposição 2.4 existe $s_0 \in \mathrm{cent}(B;\overline{W(y)})$. Como $\sup\limits_{x \in \pi^{-1}(y)} \|f(x) - s_0\| =$

$= \mathrm{rad}(B;\overline{W(y)}) \leq \mathrm{dist}(f;W) = 1$, resulta que $s_0 \in \Gamma_f(y)$.

Mostremos agora que Γ_f é semicontínuo inferiormente em X_π. Sejam $y_0 \in X_\pi$, $a \in E$ e $r > 0$ tais que $\Gamma_f(y_0) \cap B(a,r) \neq \emptyset$.

Escolhamos $x_0 \in \pi^{-1}(y_0)$ e $s \in \Gamma_f(y_0) \cap B(a,r)$. Então:

(i) $\|f(t) - s\| \leq 1$, para todo $t \in \pi^{-1}(y_0)$.

(ii) $s \in \overline{W(y_0)}$.

(iii) $\|s - a\| < r$.

Tomemos r' tal que $\|s - a\| < r' < r$ e consideremos $0 < \varepsilon < r - r'$. Seja $\delta > 0$ dado pela propriedade P_2 para esse ε.

Da condição (ii) temos que existe $w \in W$ tal que

$\|w(x) - s\| < \delta'$ onde $0 < \delta' < r' - \|s - a\|$ e $\delta' < \delta$.

Para todo $t \in \pi^{-1}(y_0)$ temos:

$\|f(t) - w(t)\| \leq \|f(t) - s\| + \|s - w(t)\| < 1 + \delta' < 1 + \delta$ e

$\|w(t) - a\| \leq \|w(t) - s\| + \|s - a\| < \delta' + \|s - a\| < r'$. Por semicontinuidade superior, existe vizinhança V de y_0 em X_π tal que se $y \in V$ então:

$$\left\| f\big|_{\pi^{-1}(y)} - w\big|_{\pi^{-1}(y)} \right\| < 1 + \delta \quad \text{e} \quad \left\| w\big|_{\pi^{-1}(y)} - a \right\| < r' .$$

Seja $y \in V$. Então $K_y = \{f(x);\ x \in \pi^{-1}(y)\}$ é compacto e $\mathrm{rad}(K_y; \overline{W(y)}) \leq 1$.

Escolhamos $t \in \pi^{-1}(y)$. Então, $s_y = w(t) \in W(y)$ e $\|s_y - a\| < r'$. Como $\mathrm{rad}(K_y - s_y; \overline{W(y)}) = \mathrm{rad}(K_y; \overline{W(y)}) \leq 1$, pela propriedade P_2 existe $s' \in \overline{W(y)}$ tal que $\|s'\| \leq \varepsilon$ e $K_y - s_y \subset \subset \bar{B}(s',1)$. Portanto, $K_y \subset \bar{B}(u,1)$ onde $u = s' + s_y \in \overline{W(y)} + W(y) \subset \subset \overline{W(y)}$. Logo, $\|f(t) - u\| \leq 1$ para todo $t \in \pi^{-1}(y)$ e $\|u - a\| = \|s' + s_y - a\| \leq \varepsilon + r' < r$. Portanto, $\Gamma_f(y) \cap B(a,r) \neq \emptyset$ para todo $y \in V$ e Γ_f é semicontínuo inferiormente em X_π. Pelo Teorema de Michael existe $g \in C_b(X_\pi;E)$ que é seleção contínua para Γ_f. Logo, $g(y) \in \overline{W(y)} = \overline{W^{\#}(y)}$, se $y \in X_\pi$.

Consideremos $h = g \circ \pi \in C_b(X;E)$. Como $h\big|_{\pi^{-1}(y)} = g(y) \in \in \overline{W\big|_{\pi^{-1}(y)}}$ para todo $y \in X_\pi$, e W é π-localizável, resulta que $h \in W$.

Mostremos agora que $h \in P_W(f)$: fixemos $x \in X$ e seja $y = \pi(x) \in X_\pi$. Então:

$$\|h(x) - f(x)\| \leq \sup_{t \in \pi^{-1}(y)} \|h(t) - f(t)\| \leq \sup_{t \in \pi^{-1}(y)} \|g(y) - f(t)\| \leq 1.$$

Portanto, $\|h - f\| \leq 1 = \mathrm{dist}(f;W)$ e $h \in P_W(f)$.

2.6 TEOREMA: *Sejam* X *um espaço compacto Hausdorff,* E *um espaço de Banach com a propriedade* P_2, $A \subset C(X;\mathbb{K})$ *uma subálgebra auto-adjunta e* $W \subset C(X;E)$ *um subespaço vetorial fechado que é um* A-*módulo e tal que* $[x]_A \subset [x]_W$ *para todo* $x \in X$. *Então* W *é proximinal em* $C(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam X_π o espaço quociente X módulo A e

$\pi : X \longrightarrow X_\pi$ a aplicação quociente. Basta notar que, pelo Teorema 0.17, parte(a), W é π-localizável.

2.7 OBSERVAÇÕES: 1) Como $E = \mathbb{R}$ é uniformemente convexo, se tomarmos $W = A$ resulta de 2.6 que toda subálgebra fechada A de $C(X;\mathbb{R})$ é proximinal. Este resultado clássico se deve a Mazur (inédito) e as primeiras provas publicadas se devem a Semadeni e Pelczynski.

2) Quando trocamos a propriedade P_1 pela propriedade P_2 podemos retirar, no exemplo 1.7, a hipótese de que as álgebras polinomiais auto-adjuntas fechadas de $C(X;E)$ devem conter as funções constantes para serem proximinais em $C(X;E)$.

2.8 EXEMPLO: Sejam X e E como em 2.6 e seja $W \subset C(X;E)$ uma álgebra polinomial auto-adjunta e fechada. Então W é proximinal em $C(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Basta aplicar o Teorema 2.6 com $A = \{\varphi \circ g; \varphi \in E^*, g \in W\}$.

2.9 OBSERVAÇÃO: Seja E um espaço de Banach com a propriedade P_2. Como P_2 implica P_1, resulta sob as hipóteses de 1.15 que para todo precompacto não-vazio $B \subset C(X;E)$ temos $\text{cent}(B) \neq \emptyset$, ou seja, $\text{cent}(B;W) \neq \emptyset$ quando $W = C(X;E)$. Vamos estender este resultado para outros A-módulos.

2.10 TEOREMA: *Sejam* π *e* E *como em* 2.5 *e seja* $B \subset C_b(X;E)$ *precompacto não-vazio. Seja* $W \subset C_b(X;E)$ *um subespaço vetorial fechado* π*-localizável, e tal que* $w|_{\pi^{-1}(y)}$ *é constante para todo* $w \in W$. *Se* $V = \{\overline{W(y)}; y \in X_\pi\}$ *tem a propriedade* P_2 *então* $\mathrm{cent}(B;W) \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Lema 0.8, basta mostrar que $\mathrm{cent}(B;W) \neq \emptyset$ se $B \subset C_b(X;E)$ é precompacto não-vazio e tal que $\mathrm{rad}(B;W) = 1$.

Seja B nestas condições:

a) $\sup\limits_{y \in X_\pi} \mathrm{rad}(B_y;\overline{W(y)}) \leq \mathrm{rad}(B;W)$ onde $B_y = \bigcup\limits_{f \in B} f(\pi^{-1}(y))$. De fato, fixemos $y \in X_\pi$. Então:

$$\mathrm{rad}(B_y;\overline{W(y)}) = \inf_{s \in \overline{W(y)}} \sup_{\substack{f \in B \\ x \in \pi^{-1}(y)}} \|f(x) - s\| = \inf_{w \in W} \sup_{\substack{f \in B \\ x \in \pi^{-1}(y)}} \|f(x) -$$

$$- w(x)\| \leq \inf_{w \in W} \sup_{f \in B} \sup_{x \in X} \|f(x) - w(x)\| = \inf_{w \in W} \sup_{f \in B} \|f - w\| =$$

$$= \mathrm{rad}(B;W).$$

b) Para todo $y \in X_\pi$ definimos

$$\Gamma_B(y) = \overline{W(y)} \cap \{s \in E; \|f(t) - s\| \leq 1,\ t \in \pi^{-1}(y),\ f \in B\}.$$

O conjunto $\Gamma_B(y)$ é fechado e convexo.

Afirmamos que $\Gamma_B(y)$ é não-vazio. De fato, pela Proposição 2.4 existe $s \in \mathrm{cent}(B_y;\overline{W(y)})$. Então, $\sup\limits_{f \in B} \sup\limits_{x \in \pi^{-1}(y)} \|f(x) - s\| = \mathrm{rad}(B_y;\overline{W(y)}) \leq \mathrm{rad}(B;W) = 1$ e $s \in \Gamma_B(y)$.

O portador Γ_B é semicontínuo inferiormente em X_π : Sejam $y_0 \in X_\pi$, $a \in E$ e $r > 0$ tais que $\Gamma_B(y_0) \cap B(a,r) \neq \emptyset$. Escolhamos $x \in \pi^{-1}(y_0)$ e $s \in \Gamma_B(y_0) \cap B(a,r)$. Tomemos r' tal que $\|s-a\| < r' < r$ e consideremos $0 < \varepsilon < r - r'$ e $\delta > 0$ dado pela propriedade P_2 para esse ε.

Como $s \in \overline{W(y_0)}$, existe $w \in W$ tal que $\|w(x) - s\| < \delta'$ onde $0 < \delta' < r' - \|s-a\|$ e $\delta' < \frac{\delta}{2}$. Então, para todo $t \in \pi^{-1}(y_0)$ temos:

$$\|f(t) - w(t)\| \leq \|f(t) - s\| + \|s - w(t)\| \leq 1 + \delta' < 1 + \frac{\delta}{2} \quad \text{para toda } f \in B,$$

ou seja, $\left\| f\big|_{\pi^{-1}(y_0)} - w\big|_{\pi^{-1}(y_0)} \right\| < 1 + \frac{\delta}{2}$ para toda $f \in B$. Note também que $\left\| w\big|_{\pi^{-1}(y_0)} - a \right\| \leq \|w(x) - s\| + \|s - a\| < r'$.

Como B é precompacto, sejam $(f_i)_{i=1}^{n} \subset B$ tais que $B(f_1,\frac{\delta}{2}),\ldots,B(f_n,\frac{\delta}{2})$ cobrem B. Então: $\left\| f_i\big|_{\pi^{-1}(y_0)} - w\big|_{\pi^{-1}(y_0)} \right\| < 1 + \frac{\delta}{2}$ para $i = 1,\ldots,n$. Por semicontinuidade superior, para cada $i = 1,\ldots,n$ existe vizinhança V_i de y_0 em X_π tal que se $y \in V_i$ então: $\left\| f_i\big|_{\pi^{-1}(y)} - w\big|_{\pi^{-1}(y)} \right\| < 1 + \frac{\delta}{2}$ e $\left\| w\big|_{\pi^{-1}(y)} - a \right\| < r'$.

Sejam $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$, $y \in V$ e $f \in B$. Então $f \in B(f_{i_0}, \frac{\delta}{2})$ com $1 \leq i_0 \leq n$ e para todo $t \in \pi^{-1}(y)$ temos:

$$\|f(t) - w\big|_{\pi^{-1}(y)}\| \leq \|f(t) - f_{i_0}(t)\| + \|f_{i_0}(t) - w\big|_{\pi^{-1}(y)}\| < \frac{\delta}{2} + 1 + \frac{\delta}{2} = 1 + \delta.$$

Logo, $\|f\big|_{\pi^{-1}(y)} - w\big|_{\pi^{-1}(y)}\| < 1 + \delta$ para toda $f \in B$. Escolhamos $t \in \pi^{-1}(y)$. Então, $s_y = w(t) \in W(y) \subset \overline{W(y)}$ e $\|s_y - a\| = \|w(t) - a\| < r'$.

Como $B_y - s_y$ é precompacto (pois B_y o é) e $\mathrm{rad}(B_y - s_y; \overline{W(y)}) = \mathrm{rad}(B_y; \overline{W(y)}) \leq 1$, pela propriedade P_2 existe $s' \in \overline{W(y)}$ tal que $\|s'\| \leq \varepsilon$ e $B_y - s_y \subset \bar{B}(s', 1)$. Portanto, $B_y \subset \bar{B}(u, 1)$ onde $u = s' + s_y \in \overline{W(y)}$. Logo, $\|f(x) - u\| \leq 1$ para todo $x \in \pi^{-1}(y)$, para todo $f \in B$ e $\|u - a\| = \|s' + s_y - a\| < \varepsilon + r' < r$. Portanto, $\Gamma_B(y) \cap B(a,r) \neq \emptyset$ para todo $y \in V$ e Γ_B é semicontínuo inferiormente em X_π.

Pelo Teorema de Michael existe $g : X_\pi \longrightarrow E$ seleção contínua e limitada para Γ_B. Logo, $g(y) \in \overline{W(y)} = \overline{W^{\#}(y)}$ para todo $y \in X_\pi$. Consideremos $h = g \circ \pi \in C_b(X;E)$. Então $h \in W$.

Verifiquemos que $h \in \mathrm{cent}(B;W)$: Fixemos $x \in X$ e seja $y = \pi(x) \in X_\pi$. Então: $\sup_{f \in B} \|h(x) - f(x)\| \leq \sup_{f \in B} \sup_{t \in \pi^{-1}(y)} \|g(y) - f(t)\| \leq 1$. Logo, $\sup_{x \in X} \sup_{f \in B} \|h(x) - f(x)\| \leq 1$. Portanto, $\sup_{f \in B} \|h - f\| \leq 1 = \mathrm{rad}(B;W)$ e $h \in \mathrm{cent}(B;W)$.

2.11 DEFINIÇÃO: Um subespaço vetorial $W \subset C_b(X;E)$ é dito um *espaço de Stone-Weierstrass generalizado* se para toda $f \in C_b(X;E)$, $f \in \overline{W}$ se, e só se:

(1) para todo $x, y \in X$ tal que $g(x) = g(y)$ para todo $g \in W$, $f(x) = f(y)$.

(2) para todo $x \in X$, $f(x) \in \overline{W(x)}$.

É fácil ver que todo espaço de Stone-Weierstrass é um espaço de Stone-Weierstrass generalizado. Mas, a recíproca não é verdadeira: tome $V \subset E$ subespaço vetorial fechado próprio e considere $W = C_b(X;V) \subset C_b(X;E)$.

2.12 TEOREMA: *Sejam* X *compacto de Hausdorff e* E *um espaço de Banach com a propriedade* P_2. *Então, todo espaço de Stone-Weierstrass generalizado* $W \subset C(X;E)$ *tem a propriedade dos centros de Chebyshev em relação à família dos precompactos de* $C(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja π a aplicação quociente de X em X_π, onde X_π é o espaço quociente de X pela relação de equivalência definida por W: $x \equiv y$ se, e só se, $g(x) = g(y)$, para toda $g \in W$.

É fácil ver que π é fechada e portanto, X_π é compacto. O subespaço W é π-localizável, como verifica-se facilmente a partir da Definição 2.11. O resultado segue do Teorema 2.10.

2.13 TEOREMA: *Sejam* X *um espaço compacto e* E *um espaço de Banach com a propriedade* P_2, $B \subset C(X;E)$ *precompacto não-vazio,* $W \subset C(X;E)$ *um subespaço vetorial fechado,* $A \subset C(X;\mathbb{K})$ *uma subál gebra auto-adjunta tal que* $[x]_A \subset [x]_W$ e $AW \subset W$. *Então,* $\mathrm{cent}(B;W) \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam X_π o espaço quociente X módulo A e $\pi : X \longrightarrow X_\pi$ a aplicação quociente. Então W é π-localizável.

2.14 OBSERVAÇÃO: Como $E = \mathbb{R}$ é uniformemente convexo, se tomarmos $W = A$ resulta de 2.13 que $\mathrm{cent}(B;A) \neq \emptyset$ para todo precom pacto $B \subset C(X;\mathbb{R})$, quando A é uma subálgebra fechada. Entretanto, neste caso vale um resultado mais geral. Com efeito, Smith e Ward [27] provaram que $\mathrm{cent}(B;A) \neq \emptyset$ para todo limitado $B \subset C(X;\mathbb{R})$.

2.15 EXEMPLO: Sejam X e E como em 2.13 e seja $B \subset C(X;E)$ precompacto não-vazio, $W \subset C(X;E)$ uma álgebra polinomial auto-adjunta e fechada. Então $\mathrm{cent}(B;W) \neq \emptyset$.

2.16 OBSERVAÇÃO: Como os subespaços de Stone-Weierstrass são álgebras polinomiais fechadas auto-adjuntas resulta que todo subespaço de Stone-Weierstrass W é tal que $\mathrm{cent}(B;W) \neq \emptyset$ para todo B precompacto. Mas, como já vimos em 1.18, vale um resultado mais geral quando E é uniformemente convexo: Mach [16] provou que $\text{cent}(B;W) \neq \emptyset$ para todo B limitado se W é um Stone-Weierstrass. Ver também Theorem 3.9, Roversi [26] que estendeu o resultado acima para $B \subset \ell_\infty(X;E)$.

2.17 TEOREMA: *Sejam* X *um espaço topológico paracompacto de Hausdorff, e* E *um espaço de Banach. Seja* $W \subset C_b(X;E)$ *um subespaço vetorial fechado tal que:*

(1) *a família* $V = \{\overline{W(x)}; x \in X\}$ *tem a propriedade* P_2.

(2) *para todo* $g \in C_b(X;E)$, *se* $g(x) \in \overline{W(x)}$ *qualquer que seja* $x \in X$, *então* $g \in W$.

Então W *tem a propriedade dos centros de Chebyshev em relação à família dos precompactos de* $C_b(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Basta mostrar que $\text{cent}(B;W) \neq \emptyset$ para todo subconjunto precompacto não-vazio $B \subset C_b(X;E)$ e tal que $\text{rad}(B;W) = 1$.

Seja $B \subset C_b(X;E)$ nestas condições. Definimos, para todo $x \in X$, $\Gamma_B(x) = \overline{W(x)} \cap \{s \in E; \|f(x) - s\| \leq 1,\ f \in B\}$.

O conjunto $\Gamma_B(x)$ é fechado e convexo. Pela Proposição 2.4 temos que $\Gamma_B(x) \neq \emptyset$.

O portador Γ_B é semicontínuo inferiormente em X. De fato, sejam $x \in X$, $a \in E$ e $r > 0$ tais que $\Gamma_B(x) \cap B(a,r) \neq \emptyset$. Então existe $s \in E$ tal que:

(i) $\|f(x) - s\| \leq 1$, para toda $f \in B$.

(ii) $s \in \overline{W(x)}$.

(iii) $\|s-a\| < r$.

Seja r' tal que $\|s-a\| < r' < r$ e consideremos $0 < \varepsilon < r - r'$ e $\delta > 0$ dado pela propriedade P_2 para esse ε.

Por (ii) existe $w \in W$ tal que $\|s - w(x)\| < \delta'$ onde $0 < \delta' < r' - \|s-a\|$ e $\delta' < \frac{\delta}{2}$. Então: $\|f(x) - w(x)\| < 1 + \delta' < 1 + \frac{\delta}{2}$ para toda $f \in B$ e $\|w(x) - a\| \leq \delta' + \|s-a\| < r'$. Como B é precompacto, sejam $f_1, \ldots, f_n \in B$ tais que $B(f_1, \frac{\delta}{2}), \ldots, B(f_n, \frac{\delta}{2})$ cobrem B. Por continuidade, para cada $i = 1, \ldots, n$ existe vizinhança V_i de x tal que se $t \in V_i$ então: $\|f_i(t) - w(t)\| < 1 + \frac{\delta}{2}$ e $\|w(t) - a\| < r'$.

Seja $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. Tomemos $t \in V$ e $f \in B$. Então, $f \in B(f_{i_0}, \frac{\delta}{2})$ com $1 \leq i_0 \leq n$ e $\|f(t) - w(t)\| \leq \|f(t) - f_{i_0}(t)\| + \|f_{i_0}(t) - w(t)\| < \frac{\delta}{2} + 1 + \frac{\delta}{2} = 1 + \delta$.

Consideremos $K_t = \bigcup_{f \in B} (f-w)(t)$. O conjunto K_t é precompacto, $K_t \subset B(0, 1+\delta)$ e $\operatorname{rad}(K_t; \overline{W(t)}) = \operatorname{rad}(B_t; \overline{W(t)}) \leq \operatorname{rad}(B;W) = 1$ onde $B_t = \bigcup_{f \in B} f(t)$. Pela propriedade P_2 existe $s \in \overline{W(t)}$ tal que $\|s\| \leq \varepsilon$ e $\|f(t) - w(t) - s\| \leq 1$ para toda $f \in B$. Seja $u = w(t) + s \in \overline{W(t)}$. Então, $\|f(t) - u\| \leq 1$, para toda $f \in B$ e $\|u - a\| \leq r' + \varepsilon < r$. Logo, $\Gamma_B(t) \cap B(a,r) \neq \emptyset$ para todo $t \in V$ e Γ_B é semicontínuo inferiormente em X.

O Teorema de Michael garante a existência de $g \in C_b(X;E)$ seleção para Γ_B. Logo, $g(x) \in \overline{W(x)}$ para todo $x \in X$ e por (2) $g \in W$. Claramente, $g \in \text{cent}(B;W)$.

2.18 EXEMPLO: Sejam X espaço paracompacto Hausdorff, $S \subset X$ subconjunto fechado, E um espaço de Banach com a propriedade P_2 e $V \subset E$ um subespaço vetorial fechado. Então $W = \{f \in C_b(X;E); f(S) \subset V\}$ tem a propriedade dos centros de Chebyshev em relação à família dos precompactos de $C_b(X;E)$.

Com efeito, W é subespaço vetorial fechado. Vamos verificar a condição (2) do Teorema 2.17. Seja $g \in C_b(X;E)$ tal que $g(x) \in \overline{W(x)}$ para todo $x \in X$. Então existe $w_n \in W$ tal que $w_n(x) \longrightarrow g(x)$ e se $x \in S$, $w_n(x) \in V$. Como V é fechado, resulta que $g(x) \in V$. Logo, $g \in W$.

Em particular, $W = \{f \in C_b(X;E);\ f(s) = 0,\ s \in S\}$ e $W = \{f \in C_b(X;E); f(X) \subset V\}$ têm a propriedade dos centros de Chebyshev em relação à família dos precompactos de $C_b(X;E)$.

2.19 OBSERVAÇÃO: Quando E é um espaço de Banach uniformemente convexo, Roversi [26 , Corollary 3.3] mostrou um resultado mais geral; o subespaço $W = \{f \in C_b(X;E); f(x) = 0,\ x \in S\}$ tem a propriedade dos centros de Chebyshev em relação à família dos limitados de $\ell_\infty(X;E)$.

2.20 COROLÁRIO: *Sejam* X *um espaço compacto de Hausdorff, e* E

um espaço de Banach. Seja $W \subset C(X;E)$ *um* $C(X)$*-módulo fechado tal que a família* $V = \{\overline{W(x)}; x \in X\}$ *tem a propriedade* P_2*. Então* W *tem a propriedade dos centros de Chebyshev em relação à família dos precompactos de* $C(X;E)$*. Em particular,* W *é proximinal em* $C(X;E)$*.*

DEMONSTRAÇÃO: Quando X é compacto, todo $C(X)$-módulo é localizável sob $C(X)$ em $C(X;E)$ e portanto a condição (2) do Teorema 2.17 está verificada.

2.21 EXEMPLO: Sejam X um espaço compacto de Hausdorff, e E um espaço de Banach com a propriedade P_2. Então todo subespaço vetorial fechado $W \subset C(X;E)$, que é um $C(X)$-módulo fechado, tem a propriedade dos centros de Chebyshev em relação à família dos precompactos de $C(X;E)$.

2.22 EXEMPLO: Sejam X e E como no Exemplo 2.21, $\{\tau_x\}_{x \in X}$ uma família *fortemente contínua* de isometrias de E, isto é, se $f \in E$ e $x_\alpha \longrightarrow x$ então $\tau_{x_\alpha}(f) \longrightarrow \tau_x(f)$. Para toda $\varphi \in C(X)$ e para todo $f \in E$ definimos $\psi(\varphi,f): X \longrightarrow E$ por $\psi(\varphi,f)(x) = \varphi(x)\tau_x(f)$. É claro que $\psi(\varphi,f) \in C(X;E)$.

Sejam $I \subset C(X)$ um ideal e $V \subset E$ um subespaço vetorial fechado. Consideremos $W(I,V)$ = fecho do subespaço gerado pelo conjunto das $\psi(\varphi,f)$, $\varphi \in I$ e $f \in V$. Então, $W(I,V) \subset C(X;E)$

e $W(I,V)$ é um $C(X)$-módulo fechado. Logo, $W(I,V)$ tem a propriedade dos centros de Chebyshev em relação à família dos precompactos de $C(X;E)$.

2.23 SUBEXEMPLO: Sejam $X = G$ grupo topológico compacto, $E = L^p(G,\mu)$, $1 < p < \infty$, μ= medida de Haar, τ_x = translação por x. Sejam $I \subset C(X)$ um ideal, $V \subset E$ um subespaço vetorial fechado e $W(I,V)$ definido como no exemplo 2.22. Então, $W(I,V)$ tem a propriedade dos centros de Chebyshev em relação à família dos precompactos de $C(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: O espaço $E = L^p(G,\mu)$, $1 < p < \infty$ é uniformemente convexo. Logo, E tem a propriedade P_2.

2.24 EXEMPLO: Sejam X localmente compacto e paracompacto, E com a propriedade P_2, $\{\tau_x\}_{x \in X}$ uma família fortemente contínua de isometrias lineares de E. Sejam $A = K(X) \subset C_0(X)$ e $V \subset E$ um subespaço vetorial fechado. Definimos $W(A,V)$ como no exemplo 2.22. Então $W(A,V)$ tem a propriedade dos centros de Chebyshev em relação à família dos precompactos de $C_0(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Como $W(A,V)$ é $K(X)$-módulo localizável, basta mostrar que $\psi(\varphi,f) \in C_0(X;E)$ para toda $\varphi \in A$ e para todo $f \in E$. Seja $\varepsilon > 0$. Então:

$\{x \in X; \|\psi(\varphi,f)(x)\| \geq \varepsilon\} = \{x \in X; \|\varphi(x)\tau_x(f)\| \geq \varepsilon\} =$

$\{x \in X; |\varphi(x)|\,\|\tau_x(f)\| \geq \varepsilon\} = \{x \in X; |\varphi(x)|\,\|f\| \geq \varepsilon\} =$

$\{x \in X; |\varphi(x)| \geq \frac{\varepsilon}{\|f\|}\}$ é compacto, pois $\varphi \in A \subset C_0(X)$.

§3. *A PROPRIEDADE* P_3

3.1 DEFINIÇÃO: Sejam E um espaço de Banach e $\mathcal{V}$ uma família de subespaços vetoriais fechados de E. Dizemos que $\mathcal{V}$ tem a propriedade P_3 se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $s \in E$ e para todo $V \in \mathcal{V}$ com $\text{dist}(s;V) \leq 1$ e $\|s\| < 1 + \delta$ existe $v \in V$ com $\|v\| \leq \varepsilon$ e $\|s - v\| \leq 1$.

Quando a família $\mathcal{V}$ de todos os subespaços vetoriais fechados de E tem a propriedade P_3 diremos que E tem a propriedade P_3.

3.2 OBSERVAÇÃO: A propriedade P_2 implica a propriedade P_3. Logo, os espaços de Banach uniformemente convexos são exemplos de espaços que possuem a propriedade P_3.

3.3 EXEMPLO: Para todo espaço de Banach E, a família $\mathcal{V} = \{\{0\}, E\}$ tem a propriedade P_3.

DEMONSTRAÇÃO: Sem perda de generalidade, seja $0 < \varepsilon < 1$ dado. Sejam $s \in E$ e $V \in \mathcal{V}$ tais que $\text{dist}(s;V) \leq 1$ e $\|s\| < 1 + \varepsilon$.

CASO 1: Se $V = \{0\}$, então $v = 0$ é tal que $\|v\| \leq \varepsilon$ e $\|s - v\| = \|s\| \leq 1$.

CASO 2: Se $V = E$:

a) Se $\|s\| \leq 1$, então $v = 0$ é tal que $\|v\| \leq \varepsilon$ e $\|s - v\| = \|s\| \leq 1$.

b) Se $\|s\| > 1$, então $v = \varepsilon\|s\|^{-1}s$ é tal que $\|v\| = \varepsilon$ e $\|s - v\| =$
$= \|s - \varepsilon\|s\|^{-1}s\| = \|s(1 - \varepsilon\|s\|^{-1})\| = \|s\|(1 - \varepsilon\|s\|^{-1}) = \|s\| - \varepsilon < 1 + \varepsilon - \varepsilon = 1.$

3.4 PROPOSIÇÃO: *Sejam* E *um espaço de Banach e* V *uma família de subespaços vetoriais fechados de* E *com a propriedade* P_3. *Então todo* $W \in V$ *é proximinal em* E.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $W \in V$. Basta mostrar que $P_W(f) \neq \emptyset$ para todo $f \in E$ tal que $\text{dist}(f;W) = 1$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ e seja $\delta > 0$ dado pela propriedade P_3 para esse ε.

Como $\text{dist}(f;W) = 1$ existe $s \in W$ tal que $\|f - s\| < 1 + \delta$. Agora, $\text{dist}(f - s;W) = \text{dist}(f;W) = 1$ e pela propriedade P_3 existe $v \in W$ tal que $\|v\| \leq \varepsilon$ e $\|f - s - v\| \leq 1$. Logo, $s + v \in P_W(f)$.

OBSERVAÇÃO: Segue imediatamente da proposição 3.4 que se E tem a propriedade P_3 então todo subespaço vetorial fechado $W \subset E$ é proximinal em E.

3.5 TEOREMA: *Sejam* X *um espaço topológico paracompacto de Hausdorff e* E *um espaço de Banach. Seja* $W \subset C_b(X;E)$ *um subespaço vetorial fechado tal que:*

(1) *a família* $V = \{\overline{W(x)}; x \in X\}$ *tem a propriedade* P_3;

(2) *para todo* $g \in C_b(X;E)$, *se* $g(x) \in \overline{W(x)}$ *qualquer que seja*

$x \in X$, *então* $g \in W$.

Então W *é proximinal em* $C_b(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Basta mostrar que $P_W(f) \neq \emptyset$ para toda $f \in C_b(X;E)$ tal que $dist(f;W) = 1$.

Seja f nestas condições. Definimos $\Gamma_f(x) = \overline{W(x)} \cap \cap \{s \in E; \|f(x) - s\| \leq 1\}$ para todo $x \in X$. É fácil ver que $\Gamma_f(x)$ é convexo e fechado. Pela proposição 3.4, $\Gamma_f(x) \neq \emptyset$, pois $dist(f(x); \overline{W(x)}) \leq dist(f;W)$.

Vamos mostrar agora que Γ_f é semicontínuo inferiormente em X. Sejam $x \in X$, $a \in E$ e $r > 0$ tais que $\Gamma_f(x) \cap B(a,r) \neq \emptyset$. Então, existe $s \in E$ tal que:

(i) $\|f(x) - s\| \leq 1$.

(ii) $s \in \overline{W(x)}$.

(iii) $\|s - a\| < r$.

Seja r' tal que $\|s - a\| < r' < r$ e tomemos $0 < \varepsilon < r - r'$. Consideremos $\delta > 0$ dado pela propriedade P_3 para esse ε.

Por (ii), existe $w \in W$ tal que $\|w(x) - s\| < \delta'$ onde $0 < \delta' < r' - \|s - a\|$ e $\delta' < \delta$. Então: $\|w(x) - a\| \leq \|w(x) - s\| + \|s - a\| < r'$ e $\|f(x) - w(x)\| \leq 1 + \delta' < 1 + \delta$.

Seja V uma vizinhança de x tal que se $t \in V$ então $\|f(t) - w(t)\| < 1 + \delta$ e $\|w(t) - a\| < r'$.

Tomemos $t \in V$. Desde que $w(t) \in W(t)$, $dist(f(t) - w(t); \overline{W(t)}) = dist(f(t); \overline{W(t)}) \leq dist(f;W) = 1$. Pela propriedade P_3

existe $v \in \overline{W(t)}$ com $\|v\| \leq \varepsilon$ e $\|f(t) - w(t) - v\| \leq 1$. Seja $u = v + w(t)$. Então:

a) $u \in \overline{W(t)}$.

b) $\|u - a\| = \|v + w(t) - a\| \leq \varepsilon + r' < r$.

c) $\|f(t) - u\| \leq 1$.

Portanto, $u \in \Gamma_f(t) \cap B(a,r)$. Mostramos então que $\Gamma_f(t) \cap B(a,r) \neq \emptyset$ para todo $t \in V$, ou seja, Γ_f é semicontínuo inferiormente em X. Pelo Teorema de Michael existe $g \in C(X;E)$ seleção contínua para Γ_f, ou seja, $g(x) \in \Gamma_f(x)$, para todo $x \in X$. Logo, $g(x) \in \overline{W(x)}$ para todo $x \in X$ e por (2) $g \in W$, pois é claro que $g \in C_b(X;E)$. Como $\|g - f\| = \sup_{x \in X} \|g(x) - f(x)\| \leq 1$ temos que $g \in P_W(f)$.

3.6 COROLÁRIO: *Sejam* X *um espaço compacto de Hausdorff, e* E *um espaço de Banach. Seja* $W \subset C(X;E)$ *um* $C(X)$*-módulo fechado tal que a família* $\mathcal{V} = \{\overline{W(x)}; x \in X\}$ *tem a propriedade* P_3. *Então* W *é proximinal em* $C(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Quando X é compacto, todo $C(X)$-módulo é localizável sob $C(X)$ em $C(X;E)$ e portanto a condição (2) do teorema 3.5 está verificada.

3.7 COROLÁRIO: *Sejam* X *e* E *como no Corolário* 3.6. *Então, todo* $C(X)$*-módulo fechado* $W \subset C(X;E)$ *tal que* $W(x) = \{0\}$ *ou* E, *para todo* $x \in X$, *é proximinal em* $C(X;E)$.

3.8 COROLÁRIO: *Sejam* X *um espaço paracompacto de Hausdorff e* E *um espaço de Banach com a propriedade* P_3. *Seja* $W \subset C_b(X;E)$ *um subespaço vetorial fechado tal que se* $g \in C_b(X;E)$ e $g(x) \in \overline{W(x)}$ *para todo* $x \in X$, *então* $g \in W$. *Então,* W *é proximinal em* $C_b(X;E)$.

3.9 COROLÁRIO: *Sejam* X *um espaço compacto de Hausdorff e* E *um espaço de Banach com a propriedade* P_3. *Então, todo* $C(X)$*-módulo fechado* $W \subset C(X;E)$ *é proximinal em* $C(X;E)$.

3.10 EXEMPLO: Sejam X e E como no Corolário 3.8. Seja S um subconjunto fechado de X e V um subespaço vetorial fechado de E. Então $W = \{f \in C_b(X;E) ; f(S) \subset V\}$ é proximinal em $C_b(X;E)$.

Quando $V = \{0\}$, $W = \{f \in C_b(X;E) ; f(x) = 0, x \in S\}$ é proximinal em $C_b(X;E)$, qualquer que seja o espaço de Banach E. Com efeito, por 3.3 a família $\{\overline{W(x)} ; x \in X\} = \{\{0\}, E\}$ tem a propriedade P_3, e W satisfaz a condição (2) de 3.5.

3.11 PROPOSIÇÃO: *Sejam* Y *compacto,* $V \subset C(Y;\mathbb{R})$ *reticulado vetorial fechado tal que* $\inf_{y \in Y} \|\delta_y|_V\| > 0$. *Então* $V = \{V\}$ *tem a pro-*

priedade P_3.

DEMONSTRAÇÃO: Sem perda de generalidade, podemos supor $0 < \varepsilon < 1$. Sejam $0 < \lambda_0 < \inf_{y \in Y} \|\delta_y|_V\|$, $\lambda_0 < 1$ e $\delta = \lambda_0 \varepsilon$. Seja $f \in C(Y)$ com $\|f\| < 1 + \delta$ e $\mathrm{dist}(f;V) \leq 1$.

Por Blatter [6], V é proximinal em $C(Y)$. Portanto, existe $h \in V$ tal que $\|f - h\| = \mathrm{dist}(f;V) \leq 1$.

Fixemos $t \in Y$. Então, existe $g_t \in V$ tal que $0 \leq g_t(y) \leq 1$ para todo $y \in Y$ e $\lambda_0 < g_t(t) \leq 1$. Seja U_t uma vizinhança de t tal que $\lambda_0 < g_t(y) \leq 1$ para todo $y \in U_t$. Por compacidade, existem $t_1, \ldots, t_n \in Y$ tais que $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{t_i}$.

Seja $g = \max_i g_{t_i}$. Então $g \in V$ e $0 < \delta < \varepsilon g(y) \leq \varepsilon$ para todo $y \in Y$.

Definimos $p(y) = \varepsilon g(y)$. Então $p \in V$ e $0 < \delta < p(y) \leq \varepsilon < 1$ para todo $y \in Y$.

Seja $h' = (h \wedge p) \vee (-p)$. Então:

1) $h' \in V$.

2) $\|h'\| = \|p\| \leq \varepsilon$.

3) Precisamos mostrar que $\|f - h'\| \leq 1$.

Seja $y \in Y$:

CASO I: $|h(y)| \leq p(y)$. Portanto, $h'(y) = h(y)$ e $|f(y) - h(y)| = |f(y) - h'(y)| \leq 1$.

CASO II: $h(y) > p(y)$. Portanto, $h(y) > 0$ e $h'(y) = p(y)$.

(i) $f(y) \geq 0$. Então:
$-1 < -\varepsilon \leq -p(y) \leq f(y) - p(y) = |f(y)| - p(y) \leq 1 + \delta - \delta = 1$ e portanto, $|f(y) - h'(y)| = |f(y) - p(y)| \leq 1$.

(ii) $f(y) < 0$. Logo, $f(y) < h(y)$ e portanto, $|f(y) - h(y)| = h(y) - f(y) = h(y) + |f(y)|$. Daí, $|f(y)| = |f(y) - h(y)| - h(y) \leq 1 - p(y)$. Então, $|f(y) - h'(y)| = |f(y) - p(y)| \leq |f(y)| + p(y) \leq 1$.

CASO III: $h(y) < -p(y)$. Portanto, $h'(y) = -p(y)$.

(i) $f(y) \leq 0$. Então:
$-1 = -(1+\delta) + \delta \leq f(y) + \delta < f(y) + p(y) \leq p(y) \leq \varepsilon < 1$ e portanto, $|f(y) - h'(y)| = |f(y) + p(y)| \leq 1$.

(ii) $f(y) > 0$. Logo $f(y) > h(y)$ e portanto, $|f(y) - h(y)| = f(y) - h(y) = |f(y)| - h(y)$. Daí, $|f(y)| = |f(y) - h(y)| + h(y) \leq 1 - p(y)$. Então, $|f(y) - h'(y)| = |f(y) + p(y)| \leq 1 - p(y) + p(y) = 1$.

3.12 EXEMPLO: Sejam X um espaço topológico paracompacto de Hausdorff, Y um espaço compacto de Hausdorff e $V \subset C(Y)$ como na proposição 3.11. Seja $W = \{f \in C_b(X; C(Y)); f(X) \subset V\}$. Então

W é proximinal em $C_b(X;C(Y))$.

DEMONSTRAÇÃO: Para todo $x \in X$, $\overline{W(x)} = V$. Pela Proposição 3.11, $\mathcal{V} = \{\overline{W(x)}; x \in X\} = \{V\}$ tem a propriedade P_3. Já vimos em 2.18 que W goza da condição (2) do Teorema 3.5. Portanto, W é proximinal em $C_b(X; C(Y))$.

§4. *A PROPRIEDADE* M_1

4.1 DEFINIÇÃO: Sejam E um espaço de Banach e $\mathcal{V}$ uma família de subespaços vetoriais fechados de E. Dizemos que $\mathcal{V}$ tem a propriedade M_1 se:

1) para todo $V \in \mathcal{V}$, V é proximinal em E.

2) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $f \in E$, $V \in \mathcal{V}$ e $v \in V \cap \bar{B}(f, \mathrm{dist}(f;V) + \delta)$ então $\mathrm{dist}(v; P_V(f)) < \varepsilon$.

4.2 EXEMPLO: Seja E um espaço de Banach e $\mathcal{V}$ a coleção de todos os subespaços vetoriais fechados de E que tem a propriedade das $1\frac{1}{2}$ - bolas fechadas em E. Então $\mathcal{V}$ tem a propriedade M_1.

Recordamos que um subespaço vetorial fechado $V \subset E$ tem a propriedade das $1\frac{1}{2}$ bolas fechadas em E (Yost [30]) se dados $a_1 \in V$, $a_2 \in E$, $r_1 > 0, r_2 > 0$ tais que $\|a_1 - a_2\| < r_1 + r_2$ e $\bar{B}(a_2, r_2) \cap V \neq \emptyset$, segue que $\bar{B}(a_1, r_1) \cap \bar{B}(a_2, r_2) \cap V \neq \emptyset$.

Para provar que a coleção $\mathcal{V}$ acima tem a propriedade M_1, observemos inicialmente que Yost provou [Lemma 1.1(i), 30] que todo elemento $V \in \mathcal{V}$ é proximinal em E.

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$ consideremos $0 < \delta < \eta < \varepsilon$. Sejam $f \in E$, $V \in \mathcal{V}$ e $v \in V \cap \bar{B}(f, \mathrm{dist}(f;V) + \delta)$ dados. Então $\|v - f\| < \mathrm{dist}(f;V) + \eta$, $v \in V$, $f \in E$ e $\bar{B}(f; \mathrm{dist}(f;V)) \cap V \neq \emptyset$, pela primeira parte. Como V tem a propriedade das $1\frac{1}{2}$ -bolas fechadas, $\bar{B}(v,\eta)\cap\bar{B}(f;\mathrm{dist}(f;V))\cap V\neq\emptyset$, isto é, existe $s\in V$, com $\|s-v\|\leq\eta$ e $\|s-f\|\leq\mathrm{dist}(f;V)$. Logo, $s\in P_V(f)$ e portanto, $\mathrm{dist}(v;P_V(f))\leq\eta<\varepsilon$.

4.3 PROPOSIÇÃO: *A propriedade* M_1 *implica a propriedade* P_3.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\varepsilon>0$ dado. Consideremos $\delta>0$ dado pela propriedade M_1 correspondente a $\frac{\varepsilon}{2}>0$. Escolhamos η e ξ tais que:

(i) $0<2\eta<\delta$.

(ii) $0<\xi<\eta$, $0<\xi<1$, $3\xi<\eta\varepsilon$.

Sejam $f\in E$ e $V\in\mathcal{V}$ tais que $\mathrm{dist}(f;V)\leq 1$, $\|f\|<1+\xi$.

a) Se $\|f\|\leq 1$ então $s=0\in V$ é tal que $\|s\|\leq\varepsilon$ e $\|f-s\|\leq 1$.

b) Suponhamos $\|f\|>1$.

Seja $d(f)=\mathrm{dist}(f;V)$. Então $d(f)\leq 1<\|f\|$. Portanto, $\|f\|-d(f)>0$.

CASO 1: $1-d(f)\leq\eta$

Então, $1+\xi<1+\eta\leq 2\eta+d(f)<d(f)+\delta$. Portanto, $0\in V\cap\bar{B}(f,d(f)+\delta)$ pois $\|f\|<1+\xi$. Pela propriedade M_1, $\mathrm{dist}(0;P_V(f))<\frac{\varepsilon}{2}$. Portanto, existe $s\in P_V(f)$ tal que $\|s-0\|=\|s\|\leq\varepsilon$. Como

$\|s - f\| \leq d(f) \leq 1$ obtivemos $s \in V$ como queríamos.

CASO 2: $1 - d(f) > \eta$.

Escolhamos $h \in P_V(f)$. Logo, $\|f - h\| = d(f)$. Seja $\alpha = \dfrac{\|f\| - 1}{\|f\| - d(f)}$.

Portanto, $0 < \alpha \leq 1$ e se definimos $s = \alpha h$ temos $s \in V$ e

$\|f - s\| = \|(1 - \alpha)f + \alpha f - s\| = \|(1 - \alpha)f + \alpha(f - h)\| \leq (1 - \alpha)\|f\| + \alpha\|f - h\| =$

$= (1 - \alpha)\|f\| + \alpha d(f) = 1$. De fato, $1 - \alpha = \dfrac{1 - d(f)}{\|f\| - d(f)}$ e daí,

$1 = (1 - \alpha)(\|f\| - d(f)) + d(f)$, ou seja, $1 = (1 - \alpha)\|f\| + \alpha d(f)$. Portanto, $\|f - s\| \leq 1$.

Por outro lado, $\|s\| = \alpha\|h\| \leq \alpha(d(f) + \|f\|) =$

$$= \frac{\|f\| - 1}{\|f\| - d(f)} [d(f) + \|f\|] < \frac{\xi}{1 - d(f)} [1 + 1 + 1] < \frac{3\xi}{\eta} < \varepsilon \text{ desde que}$$

$\|f\| - d(f) > 1 - d(f) > \eta$, $\|f\| - 1 < \xi$ e $d(f) \leq 1$.

4.4 TEOREMA: *Sejam* X *um espaço topológico paracompacto de Hausdorff, e* E *um espaço de Banach. Seja* $W \subset C_b(X;E)$ *um sub-espaço vetorial fechado tal que:*

(1) *a família* $V = \{\overline{W(x)}; x \in X\}$ *tem a propriedade* M_1.

(2) *para todo* $g \in C_b(X;E)$, *se* $g(x) \in \overline{W(x)}$ *qualquer que seja* $x \in X$, *então* $g \in W$.

Então W *é proximinal em* $C_b(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 4.3, $\mathcal{V}$ tem a propriedade P_3. O resultado segue do Teorema 3.5.

4.5 EXEMPLO: Sejam X um espaço compacto de Hausdorff e E um espaço de Banach, $W \subset C(X;E)$ um $C(X)$-módulo fechado tal que cada $\overline{W(x)}$ tem a propriedade das $1\frac{1}{2}$ - bolas fechadas em E. Então W é proximinal em $C(X;E)$.

4.6 EXEMPLO: Sejam X e E como no exemplo 4.5 e $W \subset C(X:E)$ um $C(X)$-módulo fechado tal que $\overline{W(x)}$ é um M-ideal para todo $x \in X$. Então W é proximinal em $C(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Como todo M-ideal de E tem a propriedade das n-bolas fechadas (Theorem 2.20, pg.52, Behrends[4]) resulta que todo M-ideal de E tem a propriedade das $1\frac{1}{2}$ -bolas fechadas em E.

4.7 EXEMPLO: Sejam X e E como no Teorema 4.4, $S \subset X$ subconjunto fechado e $V \subset E$ um subespaço vetorial fechado com a propriedade das $1\frac{1}{2}$ - bolas fechadas. Então $W = \{f \in C_b(X;E); f(S) \subset V\}$ é proximinal em $C_b(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Por 4.2, a família $\mathcal{V} = \{\overline{W(x)}; x \in X\}$ tem a propriedade M_1.

4.8 EXEMPLO: Sejam X, S e E como no Exemplo 4.7. Seja $V \subset E$ um subespaço vetorial fechado. Então, $W = \{f \in C_b(X;E); f(S) \subset V\}$ é um subespaço proximinal de $C_b(X;E)$ nos seguintes casos:

(1) V é um M-somando.

(2) V é um M-ideal.

(3) V é um semi-L-somando.

(4) V é um L-somando.

DEMONSTRAÇÃO: (1) Todo M-somando tem a propriedade das $1\frac{1}{2}$ - bolas fechadas, e podemos usar o resultado do Exemplo 4.7. O fato que todo M-somando tem a propriedade das $1\frac{1}{2}$ - bolas fechadas resulta da caracterização dos mesmos devida a R. Evans [9]: "Um subespaço vetorial fechado V de um espaço de Banach E é um M-somando se, e só se, $\bigcap_{i \in I} \bar{B}_i \cap V \neq \emptyset$ para toda família de bolas fechadas $(\bar{B}_i)_{i \in I}$ tal que $\bar{B}_i \cap V \neq \emptyset$ $(i \in I)$ e $\bigcap_{i \in I} \bar{B}_i \neq \emptyset$."

(2) Já vimos que todo M-ideal tem a propriedade das $1\frac{1}{2}$ - bolas fechadas.

(3) Um semi-L-somando V é por definição um subespaço de Chebyshev de E tal que a sua projeção métrica satisfaz $\|f\| = \|P_V(f)\| + \|f - P_V(f)\|$, para todo $f \in E$.

Sejam $a_1 \in V$, $V \cap \bar{B}(a_2, r_2) \neq \emptyset$ e $\|a_1 - a_2\| < r_1 + r_2$. Seja

$d = \mathrm{dist}(a_2;V)$. Logo, $d \leq r_2$. Por outro lado, $\|P_V(a_2-a_1)-(a_2-a_1)\| = \mathrm{dist}(a_2-a_1;V) = \mathrm{dist}(a_2;V) = d = \|P_V(a_2)-a_2\|$. Mas, P_V é quase-aditiva, logo $\|P_V(a_2)-a_1\| = \|P_V(a_2-a_1)\| = \|a_2-a_1\| - \|P_V(a_2-a_1) - (a_2-a_1)\| < r_1+r_2-d$. Se $d=r_2$, $\|P_V(a_2)-a_1\| < r_1$ e portanto, $P_V(a_2) \in V \cap \bar{B}(a_1,r_1) \cap \bar{B}(a_2,r_2)$. Se $d < r_2$, seja $\varepsilon = r_2 - d > 0$. Então, $\|P_V(a_2)-a_1\| < r_1 + \varepsilon$. Logo, $V \cap \bar{B}(P_V(a_2),\varepsilon)$ e $V \cap \bar{B}(a_1,r_1)$ têm intersecção não-vazia. Seja $v \in V$ um elemento dessa intersecção. Temos $\|v-a_2\| \leq \|v-P_V(a_2)\| + \|P_V(a_2)-a_2\| \leq \varepsilon + d = r_2$ e $\|v-a_1\| < r_1$. Logo, $v \in V \cap \bar{B}(a_2,r_2) \cap \bar{B}(a_1,r_1)$.

(4) Um L-somando V é por definição um subespaço vetorial fechado que é a imagem de uma L-projeção, isto é, $E = V \oplus N$ onde $V = P(E)$, $N = P^{-1}(0)$, para alguma projeção linear contínua $P : E \longrightarrow E$ tal que $\|f\| = \|P(f)\| + \|f-P(f)\|$, para todo $f \in E$. É fácil ver que V é então um subespaço de Chebyshev e $P = P_V$ mostra que todo L-somando é um semi-L-somando.

Vemos assim que em qualquer um dos casos (1) - (4), o subespaço V tem a propriedade das $1\frac{1}{2}$ - bolas fechadas e por 4.7 resulta que W é um subespaço proximinal de $C_b(X;E)$.

§5. *A PROPRIEDADE* M_2

5.1 DEFINIÇÃO: Sejam E um espaço de Banach e $\mathcal{V}$ uma família de subespaços vetoriais fechados de E. Dizemos que $\mathcal{V}$ tem a propriedade M_2 se:

1) para todo $V \in \mathcal{V}$ e para todo precompacto $B \subset E$, $\text{cent}(B;V) \neq \emptyset$.

2) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $V \in \mathcal{V}, B \subset E$ é precompacto e $v \in V \cap \bigcap_{f \in B} \bar{B}(f, \text{rad}(B;V) + \delta)$ então $\text{dist}(v;\text{cent}(B;V)) < \varepsilon$.

5.2 OBSERVAÇÃO: A propriedade M_2 implica a propriedade M_1.

5.3 EXEMPLO: Sejam E um espaço de Lindenstrauss e $\mathcal{V} = \{V \subset E;\ V$ é M-ideal$\}$. Então $\mathcal{V}$ tem a propriedade M_2.

DEMONSTRAÇÃO: 1) $\text{cent}(B;V) \neq \emptyset$ para todo $B \subset E$ precompacto e para todo $V \in \mathcal{V}$ (ver [17]).

2) Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta = \varepsilon$. Sejam $B \subset E$ precompacto, $v \in \mathcal{V}$ e $v \in V \cap \bigcap_{f \in B} \bar{B}(f, \text{rad}(B;V) + \delta)$. Então, obviamente $\bar{B}(v,\delta) \cap \bar{B}(f,\text{rad}(B;V)) \neq \emptyset$, para todo $f \in B$. Desde que $\bigcap_{f \in B} \bar{B}(f,\text{rad}(B;V)) \cap V = \text{cent}(B;V) \neq \emptyset$, as bolas $\bar{B}(f,\text{rad}(B;V))$, $f \in B$ se intersectam

duas a duas. Como E é espaço de Lindenstrauss, $\bar{B}(v,\delta) \cap \bigcap_{f \in B} \bar{B}(f, \mathrm{rad}(B;V)) \neq \emptyset$. Além disso, cada uma das bolas acima intersecta V. O resultado segue do seguinte lema:

5.4 LEMA: *Sejam* E *e* V *como no exemplo,* $B \subset E$ *precompacto e* $r > 0$. *Assuma que* $\bar{B}(f,r) \cap V \neq \emptyset$ *para todo* $f \in B$ *e que* $\bigcap_{f \in B} \bar{B}(f,r) \neq \emptyset$. *Então* $\bigcap_{f \in B} \bar{B}(f,r) \cap V \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO: Mach [17].

5.5 PROPOSIÇÃO: *A propriedade* M_2 *implica a propriedade* P_2.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\varepsilon > 0$ dado. Consideremos $\delta > 0$ dado pela propriedade M_2 correspondente a $\frac{\varepsilon}{2}$. Escolhamos η e ξ tais que:

1) $0 < 2\eta < \delta$.

2) $0 < \xi < \eta$, $0 < \xi < 1$, $3\xi < \eta\varepsilon$.

Seja $V \in \mathcal{V}$, $K \subset E$ precompacto, $K \subset B(0, 1+\xi)$ e $\mathrm{rad}(K;V) \leq 1$.

a) Se $\|K\| = \sup_{f \in K} \|f\| \leq 1$, $K \subset \bar{B}(0,1)$. Então, $s = 0 \in V$ é tal que $\|s\| \leq \varepsilon$ e $K \subset \bar{B}(s,1)$.

b) Suponhamos $1 < \sup_{f \in K} \|f\| = \|K\|$. Então, $\mathrm{rad}(K;V) \leq 1 < \|K\|$.

CASO 1: $1-\mathrm{rad}(K;V) \leq \eta$.

Então: $1 + \xi < 1 + \eta \leq 2\eta + \mathrm{rad}(K;V) < \delta + \mathrm{rad}(K;V)$. Portanto, $0 \in$ $\in V \cap \bigcap_{f \in K} \bar{B}(f, \mathrm{rad}(K;V) + \delta)$ pois $\|K\| < 1 + \xi$. Pela propriedade de M_2, $\mathrm{dist}(0;\mathrm{cent}(K;V)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo, existe $s \in \mathrm{cent}(K;V)$ tal que $\|s - 0\| = \|s\| \leq \varepsilon$. Como $\sup_{f \in K} \|s - f\| \leq \mathrm{rad}(K;V) \leq 1$ obtivemos $s \in V$ como queríamos.

CASO 2: $1-\mathrm{rad}(K;V) > \eta$.

Escolhamos $h \in \mathrm{cent}(K;V)$. Portanto, $\sup_{f \in K} \|f - h\| = \mathrm{rad}(K;V)$. Seja $\alpha = \frac{\|K\| - 1}{\|K\| - \mathrm{rad}(K;V)}$. Logo, $0 < \alpha \leq 1$ e se $s = \alpha h$ então $s \in V$ e, para todo $f \in K$ tem-se: $\|f - s\| = \|(1-\alpha)f + \alpha f - s\| = \|(1-\alpha)f + \alpha(f - h)\| \leq (1-\alpha)\|f\| + \alpha\|f - h\| \leq (1-\alpha)\|K\| + \alpha\,\mathrm{rad}(K;V) = 1$. De fato,

$$1 - \alpha = \frac{1 - \mathrm{rad}(K;V)}{\|K\| - \mathrm{rad}(K;V)} \quad \text{e daí,} \quad 1 = (1-\alpha)(\|K\| - \mathrm{rad}(K;V)) + \mathrm{rad}(K;V).$$

Portanto, $\sup_{f \in K} \|f - s\| \leq 1$, isto é, $K \subset \bar{B}(s,1)$.

Por outro lado: $\|s\| = \alpha\|h\| \leq \alpha(\mathrm{rad}(K;V) + \|K\|) =$

$$= \frac{\|K\| - 1}{\|K\| - \mathrm{rad}(K;V)} [\mathrm{rad}(K;V) + \|K\|] < \frac{\xi}{1 - \mathrm{rad}(K;V)} [1 + 1 + 1] < \frac{3\xi}{\eta} < \varepsilon$$

desde que $\|K\| - \mathrm{rad}(K;V) > 1 - \mathrm{rad}(K;V) \geq \eta$, $\|K\| - 1 < \xi$ e $\mathrm{rad}(K;V) \leq 1$.

5.6 TEOREMA: *Sejam* X *um espaço topológico paracompacto de Hausdorff, e* E *um espaço de Banach. Seja* $W \subset C_b(X;E)$ *um subespaço vetorial fechado tal que:*

(1) *a família* $V = \{\overline{W(x)}; x \in X\}$ *tem a propriedade* M_2.

(2) *para todo* $g \in C_b(X;E)$, *se* $g(x) \in \overline{W(x)}$ *qualquer que seja* $x \in X$, *então* $g \in W$.

Então, para todo precompacto não-vazio $B \subset C_b(X;E)$, $\mathrm{cent}(B;W) \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 5.5, V tem a propriedade P_2. O resultado segue do Teorema 2.17.

5.7 EXEMPLO: Sejam X um espaço compacto de Hausdorff, E um espaço de Lindenstrauss, $B \subset C(X;E)$ precompacto não-vazio. Seja $W \subset C(X;E)$ um $C(X)$-módulo fechado tal que $\overline{W(x)}$ é M-ideal, para todo $x \in X$. Então $\mathrm{cent}(B;W) \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO: Nestas condições, $V = \{\overline{W(x)}; x \in X\}$ tem a propriedade M_2, e a condição (2) do Teorema 5.6 se verifica pois W é localizável em $C(X;E)$.

5.8 SUBEXEMPLO: Sejam X e E como no exemplo 5.7, $S \subset X$ fechado e $V \subset E$ um M-ideal. Então $W = \{f \in C(X;E); f(S) \subset V\}$ tem a propriedade dos centros de Chebyshev em relação à família dos precompactos de $C(X;E)$.

§6. A PROPRIEDADE M_3

6.1 DEFINIÇÃO: Sejam E um espaço de Banach e $\mathcal{V}$ uma família de subespaços vetoriais fechados de E. Dizemos que $\mathcal{V}$ tem a propriedade M_3 se:

1) para todo $V \in \mathcal{V}$ e para todo limitado $B \subset E$, $\text{cent}(B;V) \neq \emptyset$.

2) dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $V \in \mathcal{V}$, $B \subset E$ é limitado e $v \in V \cap \bigcap_{f \in B} \bar{B}(f, \text{rad}(B;V) + \delta)$ então $\text{dist}(v;\text{cent}(B;V)) < \varepsilon$.

6.2 EXEMPLO: Sejam E um espaço de Banach com a propriedade da intersecção binária e $\mathcal{V} = \{V \subset E;\ V$ é M-somando$\}$. Então $\mathcal{V}$ tem a propriedade M_3.

DEMONSTRAÇÃO: 1) Sejam $V \in \mathcal{V}$ e $B \subset E$ limitado. Observemos inicialmente que $\text{cent}(B) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{f \in B} \bar{B}(f, \text{rad}(B) + \frac{1}{n})$. A coleção de bolas fechadas $\mathcal{B} = \{\bar{B}(f, \text{rad}(B) + \frac{1}{n});\ n \in \mathbb{N},\ f \in B\}$ é tal que elas se interceptam duas a duas. Como E tem a propriedade da intersecção binária, $\text{cent}(B) \neq \emptyset$; isto mostra que E admite centros. Como V é M-somando, o Theorem 2.3 de Mach [17], implica que $\text{cent}(B;V) \neq \emptyset$.

2) Vamos usar a seguinte caracterização de M-somando (ver Evans [9]) :

"Seja V um subespaço vetorial fechado de um espaço de Banach E. Então V é um M-somando se, e só se, $\bigcap_{i \in I} \bar{B}_i \cap V \neq \emptyset$ para toda família de bolas fechadas $(\bar{B}_i)_{i \in I}$ tal que $\bar{B}_i \cap V \neq \emptyset$ $(i \in I)$ e $\bigcap_{i \in I} \bar{B}_i \neq \emptyset$". (ver também: Behrends [5], Corollary 6).

Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $0 < \delta < \eta < \varepsilon$. Sejam $V \in \mathcal{V}$, $B \subset E$ limitado e $v \in V \cap \bigcap_{f \in B} \bar{B}(f, rad(B;V) + \delta)$. Queremos encontrar $v_0 \in cent(B;V)$ tal que $\| v - v_0 \| < \varepsilon$, isto é, $v_0 \in V$ que pertença à intersecção da família $\{\bar{B}(f, rad(B;V)); f \in B\} \cup \{B(v, \varepsilon)\}$. Então:

i) $V \cap \bar{B}(v, \delta) \neq \emptyset$ trivialmente.

ii) Seja $f \in B$. Como $rad(B;V) \geq dist(f;V)$, $V \cap \bar{B}(f, rad(B;V)) \supset$ $\supset V \cap \bar{B}(f, dist(f;V))$. Como todo M-somando é proximinal (ver 0.13), $V \cap \bar{B}(f, dist(f;V)) \neq \emptyset$. Logo, $V \cap \bar{B}(f, rad(B;V)) \neq \emptyset$.

iii) Como $v \in V \cap \bigcap_{f \in B} \bar{B}(f, rad(B;V) + \delta)$ então, obviamente $B(v,\eta) \cap$ $\cap \bar{B}(f, rad(B;V)) \neq \emptyset$ para todo $f \in B$. Desde que $\bigcap_{f \in B} \bar{B}(f, rad(B;V)) \cap$ $\cap V = cent(B;V) \neq \emptyset$, as bolas $\bar{B}(f, rad(B;V))$, $f \in B$ se intersectam duas a duas. Como E tem a propriedade da intersecção binária, $\bigcap_{f \in B} \bar{B}(f, rad(B;V)) \cap \bar{B}(v, \eta) \neq \emptyset$. Pela caracterização de M-somandos existe $v_0 \in V \cap \bigcap_{f \in B} \bar{B}(f, rad(B;V)) \cap \bar{B}(v, \eta)$, ou seja ,

$v_0 \in \text{cent}(B;V)$ e $\|v_0 - v\| \leq \eta < \varepsilon$ e portanto, $\text{dist}(v;\text{cent}(B;V)) < \varepsilon$.

6.3 DEFINIÇÃO: Sejam E um espaço de Banach e $\mathcal{V}$ uma família de subespaços vetoriais fechados de E. Dizemos que a família $\mathcal{V}$ tem a propriedade $P_2(b)$ se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $V \in \mathcal{V}$ e para todo limitado $B \subset B(0,1+\delta)$ com $\text{rad}(B;V) \leq 1$, existe $s \in V$ com $\|s\| \leq \varepsilon$ e $B \subset \bar{B}(s,1)$.

6.4 PROPOSIÇÃO: *A propriedade* M_3 *implica a propriedade* $P_2(b)$.

DEMONSTRAÇÃO: Análoga à da proposição 5.5.

6.5 TEOREMA: *Sejam* X *um espaço topológico paracompacto de Hausdorff, e* E *um espaço de Banach. Seja* $W \subset C_b(X;E)$ *um subespaço vetorial fechado tal que:*

(1) *a família* $\mathcal{V} = \{\overline{W(x)}; x \in X\}$ *tem a propriedade* $P_2(b)$.

(2) *para todo* $g \in C_b(X;E)$, *se* $g(x) \in \overline{W(x)}$ *qualquer que seja* $x \in X$, *então* $g \in W$.

Então W *tem a propriedade dos centros de Chebyshev em relação à família das partes limitadas e equicontínuas de* $C_b(X;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração é análoga à demonstração do Teorema 2.17 e depende do seguinte lema:

6.6 LEMA: *Sejam* X, E *e* W *como acima. Se* $B \subset C_b(X;E)$ *é um subconjunto limitado e equicontínuo tal que* $\mathrm{rad}(B;W) = 1$ *e se definimos para todo* $x \in X, \Gamma_B(x) = \overline{W(x)} \cap \{s \in E; \|f(x) - s\| \leq 1,\ f \in B\}$ *então o portador* Γ_B *é semicontínuo inferiormente em* X.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $x \in X$, $a \in E$ e $r > 0$ tais que $\Gamma_B(x) \cap B(a,r) \neq \emptyset$. Então existe $s \in E$ tal que:

(i) $\|f(x) - s\| \leq 1$, para toda $f \in B$.

(ii) $s \in \overline{W(x)}$.

(iii) $\|s - a\| < r$.

Seja r' tal que $\|s - a\| < r' < r$ e consideremos $0 < \varepsilon < r - r'$ e $\delta > 0$ dado pela propriedade $P_2(b)$ para esse ε.

Por (ii) existe $w \in W$ tal que $\|s - w(x)\| < \delta'$ onde $0 < \delta' < r' - \|s - a\|$ e $\delta' < \frac{\delta}{2}$. Então: $\|f(x) - w(x)\| \leq 1 + \delta' < 1 + \frac{\delta}{2}$ para toda $f \in B$ e $\|w(x) - a\| \leq \delta' + \|s - a\| < r'$.

Como $B - w$ é equicontínuo existe vizinhança V de x tal que se $t \in V$ então:

$\|(f - w)(t) - (f - w)(x)\| \leq \delta' < \frac{\delta}{2}$ e $\|w(t) - a\| < r'$. Portanto,

$$\|f(t) - w(t)\| \leq \|f(t) - w(t) - f(x) + w(x)\| + \|f(x) - w(x)\| < 1 + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = 1 + \delta$$ para toda $f \in B$.

Consideremos $K_t = \bigcup_{f \in B} (f - w)(t)$, para $t \in V$. O conjunto K_t é limitado, $K_t \subset B(0,1+\delta)$ e $\mathrm{rad}(K_t;\overline{W(t)}) = \mathrm{rad}(B_t;\overline{W(t)}) \leq \mathrm{rad}(B;W) = 1$ onde $B_t = \bigcup_{f \in B} f(t)$.

Pela propriedade $P_2(b)$ existe $s \in \overline{W(t)}$ tal que $\|s\| \leq \varepsilon$ e $\|f(t) - w(t) - s\| \leq 1$ para toda $f \in B$. Seja $u = w(t) + s \in \overline{W(t)}$. Então, $\|f(t) - u\| \leq 1$ para toda $f \in B$ e $\|u - a\| \leq r' + \varepsilon < r$. Logo, $\Gamma_B(t) \cap B(a,r) \neq \emptyset$ para todo $t \in V$ e Γ_B é semicontínuo inferiormente em X.

6.7 COROLÁRIO: *Sejam* X *um espaço paracompacto de Hausdorff e* E *um espaço de Banach com a propriedade da intersecção binária. Seja* $W \subset C_b(X;E)$ *um subespaço vetorial fechado tal que:*

(1) *cada* $\overline{W(x)}$, $x \in X$, *é* M-*somando;*

(2) *se* $g \in C_b(X;E)$ *é tal que* $g(x) \in \overline{W(x)}$ *para todo* $x \in X$, *então* $g \in W$.

Então W *tem a propriedade dos centros de Chebyshev em relação à família das partes limitadas e equicontínuas de* $C_b(X;E)$.

6.8 OBSERVAÇÃO: Roversi [25] mostrou que sob as hipóteses feitas sobre X e E do Corolário 6.7, todo subespaço de Stone - Weierstrass $W \subset C_b(X;E)$ tem a propriedade dos centros de Chebyshev em relação à família das partes limitadas e equicontí nuas de $C_b(X;E)$. (Ver Teorema 3.10, Roversi [25]). Entretanto, nem o Teorema 3.10 [25] é consequência de nossos resultados,nem por sua vez os resultados 6.5 e 6.7 da presente Tese são Corolários dos resultados de [25].

BIBLIOGRAFIA

[1] E.M.ALFSEN e E.G.EFFROS, *Structure in real Banach spaces* , Annals of Mathematics 96 (1972), 98-173.

[2] D.AMIR; *Chebyshev centers and uniform convexity*, Pacific Journal of Mathematics 77(1978), 1-6.

[3] T.ANDO, *Closed range theorems for convex sets and linear liftings*, Pacific Journal of Mathematics 44 (1973),393-410.

[4] E.BEHRENDS, *M-structure and the Banach-Stone theorem*, Lecture Notes in Mathematics 736, Springer-Verlag,Berlim, 1979.

[5] E.BEHRENDS, *M-complements of M-ideals*, manuscrito, 1979.

[6] J.BLATTER, *Grothendieck spaces in approximation theory*,Memoirs of the American Mathematical Society 120, 1972.

[7] J.A.CLARKSON, *Uniformly convex spaces*, Transactions of the American Mathematical Society 40(1936), 296-414.

[8] J.DIESTEL, *Geometry of Banach spaces. Selected Topics*,Lecture Notes in Mathematics 485, Springer-Verlag, Berlim,1975.

[9] R.EVANS, *A characterization of M-summands*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 76 (1974),157-159.

[10] D.B.GOODNER, *Projections in normed linear spaces*, Transactions of the American Mathematical Society 69 (1950), 89-108.

[11] M.HASUMI, *The extension property of complex Banach spaces*, Tohoku Mathematical Journal 10(1958),135-142.

[12] R.HOLMES, B.SCRANTON e J.WARD, *Approximation from the space of compact operators and other M-ideals*, Duke Mathematical Journal 42 (1975), 259-269.

[13] J.L.KELLEY, *Banach spaces with the extension property*,Transactions of the American Mathematical Society 72(1952), 323-326.

[14] K.S.LAU, *Approximation by continuous vector valued functions*, Studia Mathematica 68(1979), 291-299.

[15] J.LINDENSTRAUSS, *Extension of compact operators*,Memoirs of the American Mathematical Society 48, Providence,Rhode Island, 1964.

[16] J.MACH, *Best simultaneous approximation of bounded functions with values in certain Banach spaces*, Mathematische Annalen 240(1979), 157-164.

[17] J.MACH, *On the existence of best simultaneous approximation*, Journal of Approximation Theory 25(1979), 258-265.

[18] S.MACHADO e J.B.PROLLA, *An introduction to Nachbin Spaces*, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Sêrie II, 21(1972), 119-139.

[19] E.MICHAEL, *Selected selection theorems*, American Mathematical Monthly 63 (1956), 233-238.

[20] L.NACHBIN, *A theorem of the Hahn-Banach type for linear*

transformations, Transactions of the American Mathematical Society 68 (1950), 28-46.

[21] C.OLECH, *Approximation of set-valued functions by continuous functions*, Colloquium Mathematicum 19(1968), 285-293.

[22] R.F.POUBEL, *Sobre um Teorema de Nachbin para módulos de secções*, Dissertação de Mestrado, UFRJ, 1980.

[23] J.B.PROLLA, *Approximation of vector valued functions*, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[24] J.B.PROLLA e S.MACHADO, *Weighted Grothendieck subspaces*, Transactions of the American Mathematical Society 186 (1973), 247-258.

[25] M.S.M.ROVERSI, *Existência de centros relativos de Chebyshev*, Tese de Doutorado, UNICAMP, 1982.

[26] M.S.M.ROVERSI, *Best approximation of bounded functions by continuous functions*, Journal of Approximation Theory 41 (1984), 135-148.

[27] P.W.SMITH e J.D.WARD, *Restricted centers in subalgebras of* C(X), Journal of Approximation Theory 15(1975),54-59.

[28] R.R.SMITH e J.D.WARD, *M-ideal structure in Banach algebras*, Journal of Functional Analysis 27 (1978), 337-349.

[29] J.D.WARD, *Chebyshev centers in spaces of continuous functions*, Pacific Journal of Mathematics 52(1974),283-287.

[30] D.T.YOST, *Best approximation and intersection of balls in Banach spaces*, Bulletin of the Australian Mathematical Society 20 (1979), 285-300.