



Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica - IMECC



*Geometria Hiperbólica: uma proposta  
para o desenvolvimento de atividades  
utilizando o software livre NonEuclid*

**Armando Staib**

staib@bol.com.br

Dissertação de Mestrado

Orientador: **Prof. Dr. Edson Agustini - UFU**

Novembro de 2010

Campinas - SP

---

*Geometria Hiperbólica: uma proposta para o  
desenvolvimento de atividades utilizando o software livre  
Noneuclid*

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Armando Staib** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, SP, 22 de novembro de 2010.



---

Prof. Dr. Edson Agustini

Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Edson Agustini (UFU)

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Yuriiko Yamamoto Baldin (UFSCAR)

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Dulce Mary de Almeida (UFU)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção de Título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**  
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

<p>St15g</p>	<p style="text-align: center;">Staib, Armando</p> <p>Geometria hiperbólica : uma proposta para o desenvolvimento de atividades utilizando o software livre NonEuclid/Armando Staib-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.</p> <p style="text-align: center;">Orientador : Edson Agustini</p> <p style="text-align: center;">Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.</p> <p style="text-align: center;">1.Geometria hiperbólica. 2.Geometria hiperbólica - Estudo e ensino. 3.Geometria não-euclidiana. 4.Geometria dinâmica. I. Agustini, Edson. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.</p>
--------------	---

Titulo em inglês: Hyperbolic geometry: a proposal for the development of activities using the software NonEuclid

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Hiperbolic geometry. 2. Hiperbolic geometry – Study and teaching. 3. Non-euclidean geometry. 4. Dynamic geometry.

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Edson Agustini (UFU)  
Profª. Drª. Yuriko Yamamoto Baldin (UFSCar)  
Profª. Drª. Dulce Mary de Almeida (UFU)

Data da defesa: 22/11/2010

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 22 de novembro de 2010 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

*EDSON AGUSTINI*

---

**Prof. (a). Dr (a). EDSON AGUSTINI**

*yuriko yamamoto baldin*

---

**Prof. (a). Dr (a). YURIKO YAMAMOTO BALDIN**

*Dulce Mary de Almeida*

---

**Prof. (a). Dr (a). DULCE MARY DE ALMEIDA**



Dedico à pessoa mais importante de minha vida: **Mirian**, amiga, companheira e esposa que sempre me apoiou neste desafio.



---

# Agradecimentos

---

A Deus por mais esta graça alcançada.

A minha esposa por compartilhar de todos os momentos em minha vida.

Aos meus filhos: Leonardo, Frederico e Luísa. Amigos que me deram muito incentivo e apoio.

A minha linda netinha Sofia que deu um *upgrade* na vida do vovô.

Ao meu orientador professor Dr Edson Agustini que desde o primeiro contato, sugeriu e opinou, contribuindo para a concretização deste trabalho, disponibilizando seu precioso tempo para a confecção dessa dissertação. Sou muito grato.

Ao corpo docente do IMECC que nos embeveceram com suas excelentes aulas.

Aos amigos da Cadeira de Matemática: Cel Malebranche, Cel Daltro, Cel Bernardelli, Ten Cel Cipriano, Maj Cleidinei, Cap Denilson e Cap Túlio. Por terem me proporcionado as condições para a execução deste trabalho.

Ao Comando da Academia Militar das Agulhas Negras, pela oportunidade.

Aos colegas do mestrado pela convivência enriquecedora durante nosso curso.

Ao Cel Tércio da AMAN e à Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sueli da UNICAMP por terem tornado possível um de meus sonhos, ser Mestre em Matemática. Obrigado.



As abelhas... em virtude de uma certa intuição geométrica... sabem que o hexágono é maior que o quadrado e o triângulo, e conterà mais mel com o mesmo gasto de material.

*Papus de Alexandria*



---

# Resumo

---

Este trabalho trata do ensino das Geometrias Hiperbólica e Euclidiana utilizando softwares de Geometria Dinâmica, em especial o software NonEuclid. O objetivo deste trabalho é ser uma proposta de atividades em Geometria Hiperbólica com o uso do software. O computador introduz uma diversidade dinâmica ao estudo, proporcionando ao aluno, verificar, conjecturar e investigar. As figuras planas podem ser manipuladas e transformadas de diferentes maneiras mantendo as suas propriedades geométricas. Elaboramos algumas atividades de Geometria Hiperbólica utilizando o software NonEuclid para alunos da graduação em matemática e fizemos também atividades que relacionam ambas as geometrias. Os futuros professores precisam saber mais do que irão lecionar e, em geometria, a utilização dos softwares de Geometria Dinâmica contribuem na evolução gradual da aprendizagem de ambas Geometrias: Hiperbólica e Euclidiana, potencializando as habilidades dos alunos pela visualização, experimentação e compreensão das propriedades geométricas.

*Palavras-chave:* Geometria Hiperbólica; Geometria Dinâmica; Geometria Euclidiana; Software NonEuclid.



---

# Abstract

---

This work deals with the teaching of Euclidian and Hyperbolic Geometry using software in the Dynamic Geometry area, especially the software by the name of “NonEuclid”. The objective of this work is to be a proposal for activities in Hyperbolic Geometry using this software. The computer introduces a dynamic diversity to the study, allowing students to examine, investigate and conjecture in this area. The plane figures can be manipulated and processed in different ways while maintaining their geometric properties. We can prepare some activities in Hyperbolic Geometry using the software NonEuclid for graduate students in mathematics and related activities that we also both geometries. Future teachers need to know more than material they present to their students, the use of Dynamic Geometry software contributes to the gradual evolution of learning of geometry, both Euclidean and Hyperbolic. This increases the students’ abilities to visualize and experiment and therefore their understanding of geometric properties.

(Keywords:) Hyperbolic Geometry; Dynamic Geometry; Euclidean Geometry; Software NonEuclid.



---

# Lista de Figuras

---

1.1	<i>Heródoto</i> - Historiador grego. . . . .	4
1.2	Euclides de Alexandria - Geômetra. . . . .	5
1.3	Folha de rosto da primeira versão inglesa de <i>Os Elementos</i> . . . . .	7
1.4	O Quinto Postulado: duas retas cortadas por uma terceira. . . . .	8
1.5	Axioma de Pasch. . . . .	8
1.6	Reta paralela por Playfair. . . . .	10
1.7	Possidônio. . . . .	10
1.8	Claudio Ptolomeu. . . . .	11
1.9	Demonstração de Ptolomeu para o Quinto Postulado. . . . .	11
1.10	Proclus. . . . .	12
1.11	Nasiredin. . . . .	13
1.12	Axioma de Nasir. . . . .	13
1.13	Quadrilátero usado por Nasir. . . . .	14
1.14	John Wallis. . . . .	15
1.15	Tentativa de demonstração do Quinto Postulado por Wallis. . . . .	16
1.16	Quadrilátero de Saccheri. . . . .	17
1.17	John Playfair e G.S. Klugel. . . . .	18
1.18	Johann Heinrich Lambert. . . . .	19
1.19	Quadrilátero de Lambert. . . . .	19
1.20	Adrien Marie Legendre. . . . .	20
1.21	Carl Friedrich Gauss. . . . .	22
1.22	Johann (Janos) Bolyai. . . . .	24
1.23	Nicolai Ivanovich Lobachevsky. . . . .	25
1.24	Eugenio Beltrami. . . . .	28
1.25	Pseudo-esfera: superfície de curvatura gaussiana constante negativa. . . . .	28

1.26	Esfera com círculo máximo. . . . .	29
1.27	Felix Christian Klein. . . . .	29
1.28	O modelo plano de Klein. . . . .	30
1.29	Jules Henri Poincaré. . . . .	30
1.30	Modelo de Disco de Poincaré. . . . .	31
1.31	Modelo do semiplano de Poincaré. . . . .	32
1.32	David Hilbert. . . . .	32
1.33	Triângulo equilátero. . . . .	33
2.1	Esquema dos axiomas. . . . .	37
2.2	Figura de apoio ao Axioma $II_1$ . . . . .	39
2.3	Segmento $AB$ . . . . .	39
2.4	Triângulo $ABC$ . . . . .	39
2.5	semirreta $S_{AB}$ . . . . .	40
2.6	Apoio ao Axioma $II_3$ . . . . .	40
2.7	Ângulo de vértice $V$ . . . . .	43
2.8	Ângulo raso. . . . .	44
2.9	Medição de ângulo com um transferidor. . . . .	44
2.10	Apoio ao Axioma $III_5$ . . . . .	45
2.11	Os ângulos $B\hat{O}A$ e $A\hat{O}C$ são suplementares. . . . .	46
2.12	Ângulos complementares na Geometria Euclidiana. . . . .	46
2.13	Ângulos opostos pelo vértice. . . . .	47
2.14	Retas perpendiculares no plano euclidiano. . . . .	47
2.15	Figuras planas congruentes. . . . .	48
2.16	Triângulos congruentes. . . . .	49
2.17	Apoio ao Axioma IV. . . . .	49
2.18	Triângulo isósceles. . . . .	50
2.19	Apoio ao caso ALA. . . . .	51
2.20	Mediana relativa ao lado $BC$ de um triângulo. . . . .	51
2.21	Bissetriz relativa ao lado $BC$ de um triângulo. . . . .	52
2.22	Altura relativa ao lado $BC$ de um triângulo. . . . .	52

---

2.23	Apoio a Proposição 2.10. . . . .	53
2.24	Apoio a Proposição 2.11. . . . .	53
2.25	Apoio a Proposição 2.12. . . . .	54
2.26	Apoio a Proposição 2.13. . . . .	55
2.27	Apoio ao Exercício 2.5. . . . .	55
2.28	Ângulo externo de um triângulo. . . . .	56
2.29	Apoio à demonstração do Teorema do Ângulo Externo. . . . .	57
2.30	Apoio ao Corolário 2.3. . . . .	57
2.31	Apoio a Proposição 2.16. . . . .	58
2.32	Apoio à Proposição 2.17. . . . .	59
2.33	Apoio à Proposição 2.18 . . . . .	59
2.34	Apoio à Proposição 2.19. . . . .	60
2.35	Triângulo retângulo. . . . .	60
2.36	Apoio à Proposição 2.20. . . . .	61
2.37	Apoio à Proposição 2.21. . . . .	62
2.38	Apoio à demonstração (iii). . . . .	62
3.1	Conteúdo do menu Help do NonEuclid. . . . .	69
3.2	A janela principal do NonEuclid. . . . .	73
3.3	Os modelos hiperbólicos suportados pelo NonEuclid. . . . .	74
3.4	A Caixa de Descrição do Comando Ativo. No exemplo MOVE POINT. . . . .	74
3.5	Caixa de Informação das Medidas. . . . .	75
3.6	O menu principal do NonEuclid. . . . .	75
3.7	Menu File. . . . .	75
3.8	Menu Edit. . . . .	76
3.9	Menu View. . . . .	77
3.10	Menu Constructions. . . . .	79
3.11	Os pontos $A$ , $B$ , $C$ , $D$ e $E$ . . . . .	79
3.12	O ponto $C$ é ponto médio de $AB$ . . . . .	80
3.13	Os pontos $F$ e $E$ são pontos de interseção da reta com a circunferência. . . . .	80
3.14	O ponto $C$ pertence ao segmento $AB$ . . . . .	81

3.15	Segmento $AB$ .	81
3.16	semirreta $CD$ .	81
3.17	A reta $CD$ .	82
3.18	O segmento $BA$ é perpendicular à reta $CD$ .	82
3.19	Círculo de centro $A$ e raio de medida $AB$ .	83
3.20	A bissetriz $AD$ do ângulo $B\hat{A}C$ .	83
3.21	O ponto $D$ é a reflexão do ponto $C$ com relação à reta $AB$ .	83
3.22	Os segmentos $AB$ e $CD$ possuem uma unidade de comprimento.	84
3.23	O ângulo $B\hat{A}C$ mede $45^\circ$ .	84
3.24	Menu Measurements.	84
3.25	Coordenadas polares dos pontos $A$ , $B$ e $C$ .	85
3.26	Medida da distância entre os pontos $A$ e $B$ .	85
3.27	Medida do ângulo $A\hat{B}C$ .	86
3.28	As medidas do triângulo $ABC$ .	86
3.29	Menu Gallery.	86
3.30	Apoio ao Exercício (19).	88
3.31	Contra-exemplo de (01) na Geometria Hiperbólica.	89
4.1	Potência de ponto.	92
4.2	Generalização da potência de ponto.	93
4.3	Inverso de um ponto.	93
4.4	Inverso de $P$ exterior à circunferência.	94
4.5	Inverso de $P$ interior à circunferência.	95
4.6	Circunferências ortogonais.	96
4.7	Apoio à Proposição 4.2.	96
4.8	Apoio à Proposição 4.2.	97
4.9	Apoio à Proposição 4.3.	98
4.10	Os pontos do plano hiperbólico.	99
4.11	As retas do plano hiperbólico.	100
4.12	Ângulos entre duas semirretas hiperbólicas.	101
4.13	Comprimento hiperbólico do segmento $TU$ .	101

---

4.14	Construção de reta, semirreta ou segmento. . . . .	103
4.15	Construção de reta perpendicular com ponto na reta. . . . .	103
4.16	Construção de reta perpendicular por um ponto fora da reta. . . . .	104
4.17	Construção de reta bissetriz. . . . .	105
4.18	Construção do ponto médio. . . . .	106
4.19	Construção da circunferência Hiperbólica. . . . .	108
4.20	Construção do reflexo de um segmento em relação à uma reta hiperbólica dada. . . . .	109
5.1	Axioma V. . . . .	112
5.2	Infinitas paralelas a uma reta dada. . . . .	113
5.3	Apoio para a demonstração de infinitas retas paralelas. . . . .	113
5.4	Apoio à Proposição 5.2. . . . .	114
5.5	Apoio à Proposição 5.4. As retas $AB$ e $CD$ são hiperparalelas. . . . .	115
5.6	Os triângulos $PQ\Omega$ , $A\Omega_1\Omega_2$ e $\Omega_3\Omega_4\Omega_5$ , são triângulos generalizados. . . . .	117
5.7	Apoio à Proposição 5.5. . . . .	118
5.8	Reta $r$ intersectando $A\Omega$ ou $B\Omega$ . . . . .	118
5.9	Reta $r$ intersectando $AB$ . . . . .	119
5.10	O ponto $D$ no exterior de $AB\Omega$ . . . . .	119
5.11	O ponto $D$ sobre a semirreta $B\Omega$ . . . . .	120
5.12	Apoio ao 1º Caso de Congruência de Triângulos Generalizados. . . . .	121
5.13	Apoio ao 2º Caso de Congruência de Triângulos Generalizados. . . . .	122
5.14	Apoio ao 3º Caso de Congruência de Triângulos Generalizados. . . . .	123
5.15	Apoio a demonstração de triângulos congruentes caso AAA (ângulo-ângulo-ângulo). . . . .	123
5.16	Apoio a demonstração, $AE > AC$ . . . . .	124
5.17	Função Ângulo de Paralelismo . . . . .	125
5.18	Extensão da Função Ângulo de Paralelismo . . . . .	126
5.19	Construção de triângulo retângulo . . . . .	127
5.20	Lado $a$ . . . . .	128
5.21	Lado $b$ . . . . .	128

5.22	Lado $c$ . . . . .	128
5.23	Ângulo de paralelismo referente ao ângulo $\lambda$ . . . . .	129
5.24	Ângulo de paralelismo referente ao ângulo $\mu$ . . . . .	129
5.25	$\lambda + \Theta(c + m) = \beta$ . . . . .	129
5.26	$\lambda + \beta = \Theta(c - m)$ . . . . .	130
5.27	$\Theta(b + l) + \Theta(m - a) = \frac{\pi}{2}$ . . . . .	130
5.28	Quadrilátero de Lambert. . . . .	132
5.29	Variáveis associadas. . . . .	132
5.30	Variáveis associadas. . . . .	132
5.31	$\lambda_1 + \Theta(c_1 + m_1) = \beta_1$ . . . . .	133
5.32	$\lambda_1 + \beta_1 = \Theta(c_1 - m_1)$ . . . . .	134
5.33	$\Theta(b_1 + l_1) + \Theta(m_1 - a_1) = \frac{\pi}{2}$ . . . . .	135
5.34	Construção de uma circunferência no NonEuclid . . . . .	137
5.35	Construção de uma paralela . . . . .	138
5.36	Construção das duas paralelas . . . . .	138
5.37	Demonstração da Proposição 5.14 . . . . .	139
1	Segmento $AB$ e o ponto $C$ . . . . .	151
2	Apoio à construção do Transporte de Segmento. . . . .	151
3	Ângulo $B\hat{A}C$ e a semirreta $DE$ . . . . .	153
4	Apoio à construção do Transporte de Ângulos. . . . .	153

---

# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Resumo Histórico</b>	<b>3</b>
1.1 A Geometria Euclidiana . . . . .	3
1.1.1 Ciência Dedutiva . . . . .	4
1.1.2 Os Elementos de Euclides . . . . .	6
1.1.3 Afirmações Primitivas . . . . .	7
1.2 Tentativas de Demonstrar o Postulado das Paralelas . . . . .	10
1.2.1 Possidônio (135 - 50 a.C) . . . . .	10
1.2.2 Cláudio Ptolomeu (87 - 165) . . . . .	11
1.2.3 Proclus (410 - 485) . . . . .	12
1.2.4 Nasir al-Din al-Tusi (Nasiredin) (1201 - 1274) . . . . .	13
1.2.5 Outros Matemáticos (séculos XVI e XVII) . . . . .	14
1.2.6 John Wallis (1616 - 1703) . . . . .	15
1.2.7 Girolamo Saccheri (1667 - 1733) . . . . .	16
1.2.8 John Playfair (1748 - 1819) e G.S. Klugel (1739 - 1812) . . . . .	18
1.2.9 Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) . . . . .	19
1.2.10 Adrien Marie Legendre (1752 - 1833) . . . . .	20
1.3 A Descoberta de uma Nova Geometria . . . . .	21
1.3.1 Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) . . . . .	22
1.3.2 Johann (Janos) Bolyai (1802 - 1860) . . . . .	24
1.3.3 Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793 - 1856) . . . . .	25
1.4 Modelos para a Geometria Hiperbólica . . . . .	27
1.4.1 Modelo de Beltrami . . . . .	28
1.4.2 Modelo de Klein . . . . .	29

1.4.3	Modelos de Poincaré . . . . .	30
1.5	O Sistema Axiomático de Hilbert . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Geometria Absoluta</b>	<b>37</b>
2.1	Axiomática Usada . . . . .	38
2.1.1	Axiomas de Incidência . . . . .	38
2.1.2	Axiomas de Ordem . . . . .	39
2.1.3	Axiomas sobre Medição de Segmentos (ou Axiomas de Continuidade) . . . . .	41
2.1.4	Axioma de Congruência . . . . .	48
2.2	Congruência . . . . .	49
2.3	Teorema do Ângulo Externo . . . . .	55
<b>3</b>	<b>O Software NonEuclid</b>	<b>65</b>
3.1	Geometria Dinâmica . . . . .	65
3.2	Introdução ao NonEuclid . . . . .	67
3.2.1	Construções Interativas na Geometria Hiperbólica . . . . .	68
3.2.2	A Tela do NonEuclid . . . . .	73
3.2.3	Menu File (Arquivo) . . . . .	75
3.2.4	Menu Edit (Editar) . . . . .	76
3.2.5	Menu View (Visualizar) . . . . .	77
3.2.6	Menu Constructions (Construções) . . . . .	79
3.2.7	Menu Measurements (Mensurações) . . . . .	84
3.2.8	Menu Gallery . . . . .	86
3.3	Atividade . . . . .	87
3.3.1	Proposições equivalentes ao Quinto Postulado de Euclides e contra-exemplos utilizando o NonEuclid . . . . .	87
<b>4</b>	<b>O Modelo Euclidiano do Disco Unitário de Poincaré</b>	<b>91</b>
4.1	Pré-Requisito . . . . .	92
4.1.1	Potência de ponto . . . . .	92
4.1.2	Inverso de um ponto . . . . .	93

---

4.1.3	Construção do Inverso do Ponto . . . . .	94
4.1.4	Circunferências ortogonais . . . . .	95
4.2	Consistência . . . . .	98
4.2.1	O modelo do Disco de Poincaré . . . . .	99
4.2.2	Consistência do Modelo de Poincaré . . . . .	99
4.3	Construções . . . . .	102
4.3.1	Reta, segmento de reta e semirreta . . . . .	102
4.3.2	Reta perpendicular (com ponto na reta) . . . . .	103
4.3.3	Reta perpendicular (com ponto fora da reta) . . . . .	104
4.3.4	Bissetriz . . . . .	105
4.3.5	Ponto médio . . . . .	106
4.3.6	Círculo . . . . .	107
4.3.7	Reflexão . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Geometria Hiperbólica</b> . . . . .	<b>111</b>
5.1	O Axioma Característico da Geometria Hiperbólica . . . . .	111
5.2	Retas Paralelas e Hiperparalelas . . . . .	112
5.3	Triângulos Hiperbólicos Generalizados . . . . .	116
5.3.1	Propriedades dos Triângulos Generalizados . . . . .	117
5.3.2	Congruência de Triângulos Generalizados . . . . .	120
5.4	Triângulos Hiperbólicos Ordinários . . . . .	122
5.5	A construção geométrica de retas paralelas na Geometria Hiperbólica . . . . .	124
5.5.1	O ângulo de paralelismo . . . . .	124
5.5.2	Os números associados a um triângulo retângulo ordinário na Geometria Hiperbólica . . . . .	126
5.5.3	Os números associados a um Quadrilátero de Lambert . . . . .	131
5.5.4	Correspondência biunívoca entre triângulos retângulos ordinários e Quadriláteros de Lambert . . . . .	135
5.5.5	Como construir rigorosamente uma reta paralela a uma reta dada na Geometria Hiperbólica . . . . .	137

---

<b>6</b>	<b>Atividades Usando o Software NonEuclid</b>	<b>141</b>
6.1	Primeira Parte . . . . .	141
6.1.1	Retas e Ângulos . . . . .	141
6.1.2	Triângulos . . . . .	142
6.1.3	Quadriláteros, Retângulos e Quadrados . . . . .	145
6.2	Segunda Parte . . . . .	145
	<b>Apêndice A</b>	<b>151</b>
	<b>Apêndice B</b>	<b>153</b>
	<b>Considerações Finais e Perspectivas Futuras</b>	<b>155</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>157</b>

---

# Introdução

---

Esta dissertação de mestrado visa atender dois objetivos do Mestrado Profissional: desenvolver conteúdos de Matemática das disciplinas ministradas em cursos superiores e incorporar o uso de recursos computacionais a esses conteúdos.

Dois mil anos foram necessários para que negassem o Quinto Postulado de Euclides e em consequência desenvolvessem geometrias tão consistentes e maravilhosas como a Euclidiana. A Geometria Hiperbólica é uma delas e será objeto de nosso estudo. Utilizaremos a Geometria Dinâmica, um recurso computacional, que permite ao aluno deixar a passividade normal do estudo ortodoxo, onde recebe as definições e propriedades prontas, e ajuda principalmente a superar as dificuldades de estudar somente com lápis e papel. Com esses recursos o estudante passa a fazer a Matemática ao poder experimentar, interpretar, pesquisar, visualizar, conjecturar, generalizar e até demonstrar essas mesmas definições e propriedades.

Aproveitar os recursos computacionais existentes, no nosso caso o software NonEuclid [13], para estudar essa geometria é o que almeja este trabalho.

Esta dissertação foi produzida para auxiliar futuros professores no estudo da Geometria Hiperbólica e como uma proposta para o desenvolvimento de atividades utilizando o software livre NonEuclid. Embora o estudo esteja direcionado para a Geometria Hiperbólica, gostaríamos que o texto fosse utilizado, também, como aprofundamento do estudo da Geometria Euclidiana.

A escolha dos assuntos e a sequência dos capítulos 1, 2, 3 e 4, tem como objetivo servir de base para o capítulo 5, que trata da Geometria Hiperbólica.

Capítulo 1: Fizemos um pequeno histórico do desenvolvimento das geometrias não-euclidianas e seus modelos.

Capítulo 2: Baseado no livro de João Lucas Marques Barbosa [6], desenvolvemos a teoria necessária para a Geometria Absoluta.

Capítulo 3: Apresentamos a Geometria Dinâmica e o software NonEuclid.

Capítulo 4: Aqui estudamos a Geometria Euclidiana utilizada no modelo euclidiano de Disco de Poincaré para a Geometria Hiperbólica.

Capítulo 5: A Geometria Hiperbólica e seus principais teoremas usando o software NonEuclid.

Capítulo 6: Neste capítulo propomos novas atividades com o uso do software NonEuclid.

Sempre que foi possível, em vários capítulos, fizemos comparações entre as Geometrias Hiperbólica e Euclidiana.

Finalizando, gostaríamos de ressaltar que se este trabalho conseguir levar um só estudante a iniciar ou retomar contato com a geometria, teremos alcançado inteiramente nosso objetivo.

# Resumo Histórico

---

---

O objetivo deste capítulo é apresentar um breve resumo histórico da Geometria Hiperbólica. Iniciamos com Os Elementos de Euclides, em seguida, as tentativas de provar o postulado das paralelas como um teorema, as tentativas por redução ao absurdo; a descoberta de uma nova geometria e os modelos para demonstrar a consistência e visualizar a Geometria Hiperbólica. Mais detalhes dos assuntos abordados neste capítulo são encontrados em: [1], [10], [11], [3], [9] e [8].

## 1.1 A Geometria Euclidiana

Muito pouco podemos afirmar a respeito da origem da Geometria. O historiador grego Heródoto (484 - 420 a.C.), afirmava que a geometria (Euclidiana) se originava no Egito, devido a necessidade prática de se fazer novas medidas de terra a cada inundação anual do rio Nilo para cobrança de impostos. O rei egípcio Sesostri III (1900 a.C.) dividira as terras no Egito, entre seus habitantes, com o intuito de cobrar impostos anuais. As enchentes cobriam as terras e para não prejudicar esses habitantes que perdiam parte das terras sob as águas, cálculos eram refeitos. Assim, a geometria surgiu dessa necessidade prática de realizar medidas que estimassem as distâncias, áreas e volumes.

A geometria dessa época adotava uma coleção de conhecimentos práticos para as medições. Com o intuito de ilustrar, vejamos um exemplo: sabemos que a área  $A$  do círculo de diâmetro  $d$  é

$$A = \frac{\pi d^2}{4},$$

os egípcios desde o ano 1500 a.C. usam para o cálculo dessa área a fórmula aproximada

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2,$$

o uso desta fórmula corresponde a adotar para  $\pi$  um valor aproximado de 3,16.

A própria palavra “geometria” originalmente significa “medida de terra”, mas a **geometria clássica** encontrada em *Os Elementos de Euclides* está muito longe de uma ciência de mensuração de terras e fórmulas práticas.

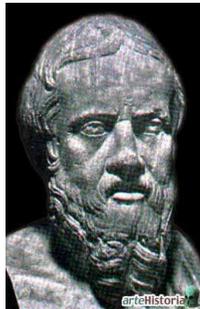


Figura 1.1: *Heródoto* - Historiador grego.

### 1.1.1 Ciência Dedutiva

A matemática como ciência dedutiva foi iniciada no século VI a.C. por *Tales de Mileto* com a preocupação demonstrativa da matemática. E culminou com *Os Elementos* de Euclides representando o mais alto grau de desenvolvimento da matemática grega.

Os gregos foram os primeiros a fazerem da matemática um estudo puramente teórico, eles preocuparam-se em demonstrar suas afirmações.

Pouco se sabe do autor de *Os Elementos*, Euclides (por volta do ano 300 a.C.), e o que sabemos vem dos comentários do filósofo *Proclus* (410 - 485) que viveu setecentos anos depois de Euclides. Proclus concluiu que Euclides viveu durante o reinado de

Ptolomeu I, ocorrido entre 304 a.C. e 285 a.C., com o seguinte raciocínio: precedeu Arquimedes (287 - 212 a.C.), pois Arquimedes cita os Elementos, e que foi posterior a Eudoxo (390 - 338 a.C.) e Teateto (morreu em 368 a.C.), pois os trabalhos destes foram incorporados aos Elementos, e a uma história<sup>1</sup> que liga Euclides a um rei Ptolomeu.



Figura 1.2: Euclides de Alexandria - Geômetra.

É provável que tenha estudado matemática na escola platônica de Atenas e que tenha sido o criador da escola de matemática de Alexandria, onde foi professor. Euclides compilou quase todo conhecimento matemático de sua época em sua mais famosa obra *Os Elementos*, não se sabe se foi com intuito de lecionar ou somente reunir conhecimentos. Sabemos que esta obra foi usada na aprendizagem matemática por mais de dois mil anos.

Euclides, duzentos e cinquenta anos após Tales, foi o primeiro a apresentar a matemática organizada num encadeamento lógico-dedutivo, onde cada proposição deveria ser deduzida de outra mais simples de maneira lógica e dedutiva.

Não se podendo provar tudo, necessitamos de proposições iniciais, evidentes por si mesmas, chamadas axiomas ou postulados, e esses axiomas são o bastante para demonstrar todos os teoremas.

Euclides procurou escolher como postulados afirmações que, por sua simplicidade, seriam aceitas por qualquer pessoa de bom senso e que eram evidentes por si mesmas. A Geometria Euclidiana foi desenvolvida a partir de dez afirmações primitivas que veremos mais adiante.

---

<sup>1</sup> Cf. [1] p.57

### 1.1.2 Os Elementos de Euclides

*Os Elementos* não são uma obra apenas de geometria. *Euclides* incorpora quase todo conhecimento matemático acumulado em sua época com exceções das seções sobre cônicas e a geometria esférica. As 465 proposições de *Os Elementos* estão divididos em treze Livros (capítulos) com os seguintes tópicos:

- Livro I - Os fundamentos da geometria plana.
- Livro II - Álgebra geométrica.
- Livro III - Teoria da circunferência.
- Livro IV - Figuras inscritas e circunscritas.
- Livro V - Teoria das proporções abstratas.
- Livro VI - Figuras geométricas semelhantes e proporcionais.
- Livro VII ao IX - Teoria dos números (enfoque geométrico, pois a álgebra e aritmética tal como as conhecemos foram desenvolvidas apenas a partir da Idade Média com os árabes e hindus).
- Livro X - Classificação dos incomensuráveis.
- Livro XI - Geometria dos sólidos.
- Livro XII - Medição de figuras
- Livro XIII - Sólidos regulares



Figura 1.3: Folha de rosto da primeira versão inglesa de *Os Elementos*.

### 1.1.3 Afirmações Primitivas

As dez afirmações primitivas, os axiomas que Euclides estabeleceu para a Geometria Euclidiana, foram divididos em dois grupos: as noções comuns e os postulados.

Noções Comuns de Euclides:

- N1 - Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.
- N2 - Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
- N3 - Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- N4 - Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.
- N5 - O todo é maior do que qualquer de suas partes.

Postulados de Euclides:

- P1 - Pode-se traçar uma (única) reta (segmento) por quaisquer dois pontos.
- P2 - Pode-se continuar (de modo único) uma reta infinitamente.
- P3 - Pode-se traçar uma circunferência com quaisquer centro e raio.
- P4 - Todos os ângulos retos são iguais.
- P5 - *Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.*

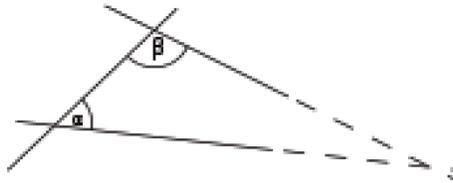


Figura 1.4: O Quinto Postulado: duas retas cortadas por uma terceira.

Euclides ao escrever *Os Elementos* introduziu os postulados um a um como representado acima.

Implicitamente, Euclides também fez uso de outras hipóteses para a compilação de seu trabalho, por exemplo:

a) Vale o Axioma de Pasch: sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos não colineares e  $r$  uma reta que não contém nenhum destes pontos. Se  $r$  corta o segmento  $AB$  então ela também corta o segmento  $BC$  ou o segmento  $AC$ .

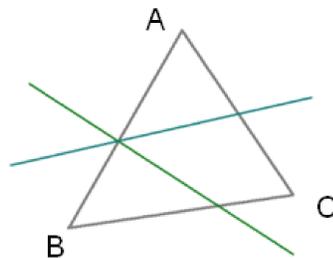


Figura 1.5: Axioma de Pasch.

b) As retas são contínuas.

Os enunciados acima não coincidem exatamente com os apresentados em *Os Elementos*. A redação e alterações levam em conta a forma na qual Euclides realmente os utilizou nas provas dos teoremas.

Para o nosso estudo iniciaremos com uma definição importante encontrada na Definição 35 de *Os Elementos*<sup>2</sup> e gostaríamos de enunciar:

*Duas retas são paralelas quando não se intersectam, isto é, não têm ponto em comum.*

Os quatro primeiros postulados satisfazem plenamente a intenção de Euclides de simplicidade e evidência mas observe que o enunciado do Quinto Postulado de Euclides, em itálico acima, contrasta em clareza e simplicidade com os enunciados dos outros quatro postulados. Além disso, Euclides só utiliza o Quinto Postulado a partir da Proposição 29, sendo que as 28 primeiras proposições são provadas usando apenas os quatro primeiros postulados. Por estes fatos, acredita-se que ele, Euclides, foi o primeiro a tentar demonstrar o Quinto Postulado como um teorema, isto é, demonstrável a partir dos quatro primeiros postulados.

Na próxima seção veremos diversas tentativas de demonstrar o Quinto Postulado de Euclides como um teorema deduzível a partir dos quatro primeiros postulados. A maior parte dessas tentativas de demonstração admitia fatos que eram **equivalentes** ao Quinto Postulado de Euclides e que não podiam ser demonstrados utilizando os outros quatro postulados.

Ser equivalente (ou substituto) significa que se utilizarmos os quatro postulados e mais um equivalente do Quinto Postulado poderemos construir a Geometria Euclidiana. Em outras palavras, afirmar que um postulado  $P_1$  é substituto do Quinto Postulado significa dizer que o desenvolvimento dos quatro primeiros postulados mais o postulado  $P_1$  coincide com Geometria Euclidiana. Além disso, tomando o postulado  $P_1$  é possível provar o quinto postulado, e vice-versa.

O mais famoso equivalente do postulado das paralelas é atribuída a Playfair com o seguinte texto:

*P5 - Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada.*

---

<sup>2</sup> Cf. [10] p.7

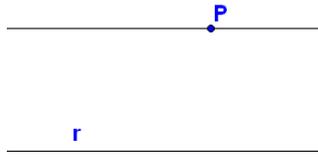


Figura 1.6: Reta paralela por Playfair.

## 1.2 Tentativas de Demonstrar o Postulado das Paralelas

Nesta seção veremos as tentativas de demonstrar o Quinto Postulado de Euclides como um teorema a partir dos outros quatro postulados. Diversos geômetras tentaram demonstrá-lo durante mais de vinte e um séculos. As tentativas de eliminar o Quinto Postulado do sistema axiomático e descrever o espaço que os gregos acreditaram existir somente com os outros quatros postulados, contribuiu para o desenvolvimento das geometrias não-Euclidianas.

### 1.2.1 Possidônio (135 - 50 a.C)



Figura 1.7: Possidônio.

Propôs que linhas paralelas são linhas coplanares e equidistantes. Inicialmente, muitos dirão que esta nova definição nada tem de errado e que, de fato, duas retas não se intersectam se e só se estiverem sempre à mesma distância. Contudo, se não for suposto o Quinto Postulado, isso não se verificará, ou seja, é possível haver retas que

não se intersectam mas que não são equidistantes. Recorrer a esta definição, ou a uma similar, para demonstrar o Quinto Postulado, ou seja, afirmar que retas paralelas são equidistantes, é equivalente a afirmar o próprio Quinto Postulado de Euclides.

### 1.2.2 Cláudio Ptolomeu (87 - 165)



Figura 1.8: Claudio Ptolomeu.

Alguns autores confundem Cláudio Ptolomeu com o general Ptolomeu I do tempo de Euclides. Segundo Bonola<sup>3</sup> Ptolomeu tentou resolver a questão de demonstrar o Quinto Postulado com uma curiosa argumentação: Sejam  $r$  e  $s$  duas paralelas e  $t$  uma transversal;  $A$ ,  $B$ ,  $A'$  e  $B'$  ângulos internos como na figura abaixo.

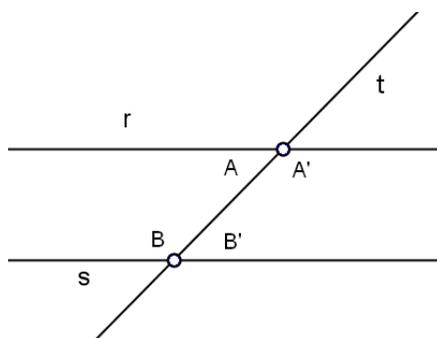


Figura 1.9: Demonstração de Ptolomeu para o Quinto Postulado.

Temos, então, que a soma  $A + B$  será maior, menor ou igual a dois ângulos retos. Verificamos que se  $A + B = 180^\circ$  teremos que  $A' + B' = 180^\circ$  e que as figuras formadas no semiplano esquerdo e direito da reta  $t$  são congruentes. Este passo de Ptolomeu está

<sup>3</sup> Cf. [8] p.21

corretíssimo e substitui a Proposição 28 de Euclides - *Se uma reta cortar outras duas, e fizer o ângulo externo igual ao interno e oposto da mesma parte; ou também os dois internos da mesma parte iguais a dois retos, as mesmas retas serão paralelas*<sup>4</sup>.

O erro de Ptolomeu foi a volta da demonstração: assumir que paralelismo acarreta na congruência das duas figuras, isso só ocorre na Geometria Euclidiana.

### 1.2.3 Proclus (410 - 485)

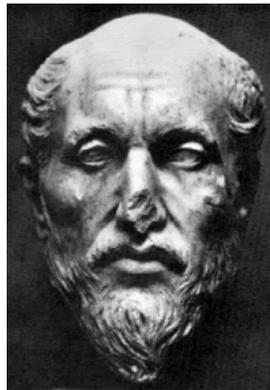


Figura 1.10: Proclus.

Filósofo, matemático e historiador, muito do que se sabe da história da Grécia Antiga se deve a ele. Escreveu um trabalho sobre a obra de Euclides e estudou os primeiros geômetras que tentaram demonstrar o Quinto Postulado como um teorema.

Proclus apontou os equívocos na demonstração de Ptolomeu e propôs uma demonstração. Sua ideia era provar que, se uma reta transversal corta uma de duas paralelas, então, corta também a segunda.

Na demonstração proposta por Proclus, deve-se admitir que retas paralelas são equidistantes, o que é equivalente ao Quinto Postulado.

---

<sup>4</sup> Cf. [10] p.20

## 1.2.4 Nasir al-Din al-Tusi (Nasiredin) (1201 - 1274)



Figura 1.11: Nasiredin.

Astrônomo, matemático persa e editor de uma versão de *Os Elementos* para o árabe, Nasir supôs, sem demonstração, o seguinte axioma para deduzir o Quinto Postulado:

“Sejam  $m$  e  $n$  duas retas,  $A$  um ponto de  $m$  e  $B$  um ponto de  $n$ , tais que  $AB$  é perpendicular a  $n$  e forma um ângulo agudo com  $m$ . Então as perpendiculares baixadas de  $m$  à reta  $n$ , do lado do ângulo agudo, são menores do que  $AB$  e as que ficam do outro lado são maiores do que  $AB$ .”

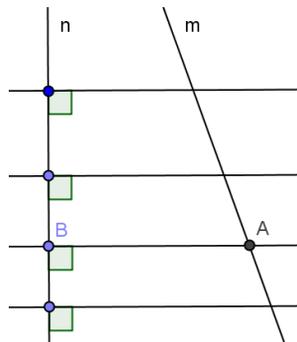


Figura 1.12: Axioma de Nasir.

Em sua demonstração, Nasir usou uma figura que ficou muito conhecida pelo nome de outro matemático<sup>5</sup>. Ele considerou um quadrilátero em que os ângulos da base eram retos e o lado  $AB$  é congruente ao lado  $A'B'$ .

<sup>5</sup> Girolamo Saccheri (1667-1773)

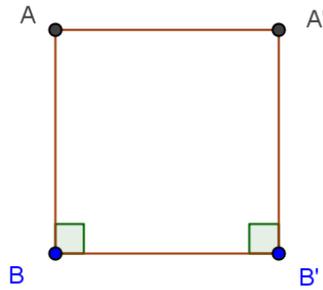


Figura 1.13: Quadrilátero usado por Nasir.

Nasiredin considerou o quadrilátero  $ABB'A'$ , como na figura 1.13, em que os ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{B}'$  são retos. Utilizando o método de redução ao absurdo e seu axioma, ele concluiu que os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{A}'$  também são retos. Ele supôs que o ângulo  $\hat{A}$  fosse agudo, deduzindo então que  $AB > A'B'$ , o que é absurdo; e supondo que o ângulo fosse obtuso demonstrou também outro absurdo:  $AB < A'B'$ .

O erro de Nasiredin foi usar que se o ângulo  $\hat{A}$  for agudo, então, o ângulo  $\hat{A}'$  deve ser obtuso. Mais adiante nos trabalhos de Saccheri veremos que esses ângulos são congruentes, uma proposição da Geometria Absoluta.

### 1.2.5 Outros Matemáticos (séculos XVI e XVII)

Escreveram sobre o Quinto Postulado e tentaram prová-lo:

Frederico Comandino (1509 - 1575 ), Itália.

C.S. Clavio (1538 - 1612), Alemanha.

Pietro A., Cataldi (1548 - 1626), Itália.

Giovanni Alfonso Boreli (1608 - 1679).

Giordano Vitale (1633 -1711)

Todos eles trabalharam a ideia de retas equidistantes que, na verdade, é um equivalente do Quinto Postulado de Euclides.

## 1.2.6 John Wallis (1616 - 1703)



Figura 1.14: John Wallis.

Wallis não usou a ideia de equidistância entre retas trabalhada pelos matemáticos que o precederam e apresentou uma demonstração do Quinto Postulado baseando-se no seguinte postulado: “dado um triângulo, é possível construir um outro que lhe é semelhante, com lados arbitrariamente grandes”.

Dados os segmentos  $AB$  e  $CD$  cortados pela reta transversal  $EF$  nos pontos  $G$  e  $H$ , suponhamos que

$$B\hat{G}H + G\hat{H}D < 180^\circ.$$

Devemos provar que as retas que passam por  $A$  e  $B$ , e por  $C$  e  $D$  se encontram. Observemos que

$$E\hat{G}B > G\hat{H}D$$

pois

$$B\hat{G}H + E\hat{G}B = 180^\circ.$$

Façamos a reta  $CD$  se deslocar ao longo de  $EF$  mantendo o ângulo  $G\hat{H}D$  rígido. Quando  $H$  coincidir com  $G$ , o segmento  $HD$  tomará uma posição  $GI$  ficando inteiramente acima de  $GB$ . Durante o movimento  $HD$  cortará  $GB$  em um ponto, digamos  $L$ . Tomando a posição do segmento  $JL$  na nossa figura. Observe que formamos um triângulo  $GJL$ . Construamos um triângulo semelhante a  $GJL$ , tendo  $GH$  como lado correspondente a  $GJ$ . Assim é evidente que  $GB$  cortará  $HD$ . Na sua prova bem como no que postulou se esconde o Quinto Postulado.

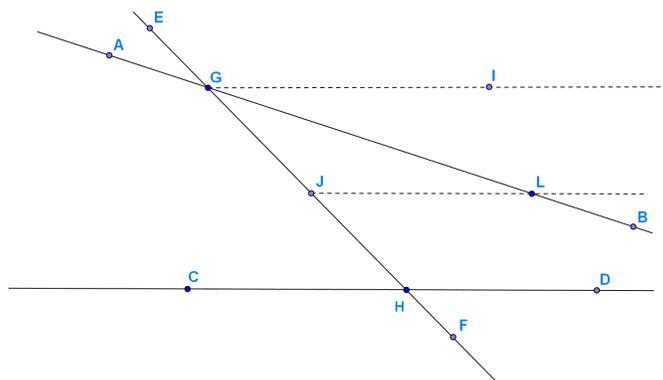


Figura 1.15: Tentativa de demonstração do Quinto Postulado por Wallis.

### 1.2.7 Girolamo Saccheri (1667 - 1733)

Cem anos antes da descoberta da primeira geometria não euclidiana tivemos a mais importante tentativa de demonstração do Quinto Postulado.

O padre jesuíta Girolamo Saccheri, professor universitário, foi o primeiro a negar o postulado e tentar demonstrá-lo por redução ao absurdo.

Saccheri ensinou filosofia por três anos em Turim, e o resultado dessa experiência foi a publicação de um livro sobre lógica (“Lógica Demonstrativa”) onde aplicava o método de redução ao absurdo no tratamento da lógica formal.

O método de redução ao absurdo consiste em admitir que a tese é falsa e que a hipótese é verdadeira e, através de um raciocínio lógico, chegar a uma contradição (absurdo) com a hipótese, concluindo então que, a tese só pode ser verdadeira.

Exímio logicista, ao lecionar na universidade de Turim, tinha lido *Os Elementos* de Euclides e aplicou o método ao problema das paralelas, resultando no livro (“Euclides Livre de Toda Imperfeição”), que foi publicado após sua morte em 1733, onde ele registra seu trabalho em busca de uma prova para o Quinto Postulado.

Saccheri estava bem preparado. Além do livro de lógica citado acima, ele estava familiarizado com o trabalho de outros matemáticos que haviam tentado provar o postulado, e havia apontado as falhas nas provas de Nasiredin e Wallis.

Em sua demonstração Saccheri usou o seguinte artifício: utilizando as primeiras 28 proposições, que não dependem do Quinto Postulado, ele criou uma figura chamada

de **Quadrilátero de Saccheri**, que consiste em um quadrilátero  $ABCD$  em que os ângulos da base, ângulo  $A$  e ângulo  $B$ , são retos e o lado  $BC$  é congruente ao lado  $AD$ .

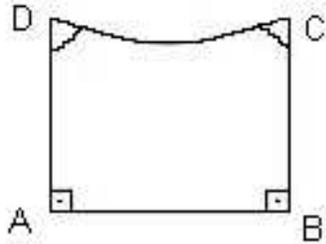


Figura 1.16: Quadrilátero de Saccheri.

As bases  $AB$  e  $CD$  são chamadas bases inferior e superior do Quadrilátero de Saccheri, respectivamente.

Traçando diagonais e utilizando congruência de triângulos ele chegou ao resultado dos ângulos  $C$  e  $D$  serem congruentes.

Saccheri, então, trabalha com as três possibilidades para os ângulos  $D$  e  $C$ : agudos, obtusos ou retos. Ele demonstrou que a hipótese do ângulo obtuso era falsa, assumindo, como Euclides (axioma implícito em sua obra), que a reta é infinita. Saccheri também provou a equivalência entre o Quinto Postulado e a hipótese do ângulo reto. Entretanto, ao procurar uma contradição para a hipótese do ângulo agudo, ele provou uma série de resultados coerentes com todos os postulados da Geometria Euclidiana, exceto o quinto.

Saccheri tentou uma segunda prova para encontrar uma contradição na hipótese do ângulo agudo, mas novamente não obteve sucesso. Ele acabou obtendo muitos teoremas clássicos de geometria não euclidiana.

Algumas conclusões importantes de Saccheri:

- Se uma das hipóteses é verdadeira para um Quadrilátero de Saccheri, então a mesma hipótese é verdadeira para todos os Quadriláteros de Saccheri.
- Para cada hipótese: agudo, obtuso e reto, há uma correspondência com a soma dos ângulos internos dos triângulos: menor do que, maior do que ou igual a dois retos.

- Assim como para os Quadriláteros de Saccheri, se existir um único triângulo onde a soma de seus ângulos for maior do que, menor do que ou igual a dois retos, então o mesmo ocorre para todos os triângulos.
- Duas retas coplanares ou têm uma perpendicular comum, ou se encontram em um ponto, ou são assintóticas (dizemos que uma reta é assintótica a outra reta se, quando um ponto se move ao longo de uma reta, a distância desse ponto à outra reta se aproxima de 0).

Saccheri mostrou possuir um grande conhecimento em lógica e percepção geométrica, foi quem primeiro vislumbrou as geometrias não-euclidianas, mas mesmo com todos os resultados obtidos não acreditou na existência de uma nova geometria. Podemos compará-lo ao seu conterrâneo, Colombo, que partiu para descobrir uma nova rota para uma terra conhecida, mas acabou por descobrir um novo mundo.

### 1.2.8 John Playfair (1748 - 1819) e G.S. Klugel (1739 - 1812)



Figura 1.17: John Playfair e G.S. Klugel.

O primeiro, matemático e físico escocês, colocou em seu livro de geometria o substituto mais comum do Quinto Postulado: por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada.

O segundo, em um trabalho de 1763 onde examinava as demonstrações das pseudo-provas do Quinto Postulado, levantou, pela primeira vez, dúvidas sobre a possibilidade de se demonstrar o Quinto Postulado a partir dos demais. Ele observou também que a certeza que se tinha da validade do Quinto Postulado não provinha de uma série de deduções rigorosas e sim de observações experimentais.

### 1.2.9 Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777)



Figura 1.18: Johann Heinrich Lambert.

Um pouco depois de Saccheri, na Alemanha, Lambert também se aproximou da descoberta de uma geometria não euclidiana.

Suas investigações sobre a Teoria das Paralelas foram estimuladas por uma dissertação de Klugel de 1763. Como vimos, Klugel foi o primeiro a manifestar dúvidas sobre a possibilidade de provar o Quinto Postulado.

Lambert fez um trabalho semelhante ao de Saccheri, considerou a figura de um quadrilátero com três ângulos retos, isto é, metade do quadrilátero usado por Saccheri.

Ele propôs três hipóteses para o quarto ângulo:

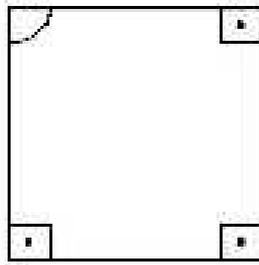


Figura 1.19: Quadrilátero de Lambert.

- I. Hipótese do ângulo reto, equivalente ao Quinto Postulado de Euclides;
- II. Hipótese do ângulo obtuso;
- III. Hipótese do ângulo agudo.

Assim como Saccheri, Lambert eliminou a hipótese do ângulo obtuso assumindo que a reta é ilimitada.

Lambert não procurou contradições e deduziu, acertadamente, que se não existir quadrados numa geometria, a área  $\Delta$  de um triângulo é  $\Delta = k(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$  onde  $\alpha, \beta, \gamma$  são as medidas dos ângulos internos do triângulo e  $k > 0$  é uma constante.

Hoje o valor de  $\Delta$  é definido como sendo o *defeito* do triângulo. Na Geometria Euclidiana o *defeito* é zero para todo triângulo, pois  $\pi = \alpha + \beta + \gamma$ .

Lambert observou que a hipótese do ângulo obtuso vale para triângulos esféricos e que a hipótese do ângulo agudo ocorre na superfície de uma esfera de raio imaginário. Suas observações seriam posteriormente comprovadas pelos matemáticos Lobachevsky e Riemann.

Sua teoria das paralelas foi escrita em 1766 e publicada, após sua morte, por G. Bernoulli e C. F. Hindenburg.

Lambert teve seu brilho de grande matemático ofuscado por ter sido contemporâneo de grandes matemáticos como Leonardo Euler (1707 - 1783) e Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783).

Como exemplo da genialidade de d'Alembert temos a famosa prova de que  $\pi$  não é racional.

### 1.2.10 Adrien Marie Legendre (1752 - 1833)



Figura 1.20: Adrien Marie Legendre.

Legendre, matemático francês, foi um dos melhores de sua época, tendo inúmeras pesquisas em matemática pura e aplicada, contribuindo com importantes descobrimentos em muitos ramos da matemática, como o Método dos Mínimos Quadrados, os Polinômios de Legendre e resultados em equações diferenciais.

Ele não fez nenhuma contribuição original para a geometria não euclidiana. Durante quarenta anos ele estudou o teorema das paralelas e morreu convicto de que a Geometria Euclidiana era a única geometria existente.

O estilo simples e direto de suas provas, em virtude da sua elegância, são de valor permanente. Acompanhar o raciocínio de suas demonstrações é gratificante pelas sábias lições que podemos extrair. Por anos ele publicou suas tentativas, reparando erros anteriores e acrescentando novos erros, pois o que ele queria demonstrar era indemonstrável.

Sua determinação em provar o Quinto Postulado e sua preocupação didática, pois era um autêntico professor e se preocupava com a educação básica, o fez publicar o livro “Elementos de Geometria” usado durante anos nas escolas de vários países. No Brasil chegou a vinte e cinco edições.

Suas demonstrações eram parecidas com as demonstrações de Saccheri e os seus resultados assemelhavam-se. Ele deu ênfase à soma dos ângulos internos do triângulo e seu trabalho era dividido em três hipóteses:

- I. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$  (equivalente ao Quinto Postulado);
- II. A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que  $180^\circ$ ;
- III. A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que  $180^\circ$ .

Ele tinha a esperança de eliminar os dois últimos. Assumindo a reta infinita eliminou o item III, chamado atualmente de Teorema de Legendre.

O teorema e a demonstração podem ser encontradas em [4] no artigo “Legendre e o Postulado das Paralelas” de Geraldo Ávila.

O erro de raciocínio de sua pseudo-prova está no seguinte enunciado: por um ponto no interior de um ângulo não raso, é sempre possível traçar uma reta que intersecta ambos os lados do ângulo. Esse resultado é equivalente ao Quinto Postulado.

## 1.3 A Descoberta de uma Nova Geometria

Os geômetras citados e principalmente os matemáticos Saccheri, Lambert e Legendre não conseguiram eliminar a hipótese do ângulo agudo, porque como já sabemos

é indemonstrável. Eles não perceberam ou não admitiram que se negassem o Quinto Postulado teriam descoberto uma nova geometria. Porém, essas tentativas fracassadas feitas nesses dois milênios contribuíram sobremaneira para a descoberta das geometrias não euclidianas.

Tecnicamente podemos dizer que, qualquer geometria distinta da geometria de Euclides é uma geometria não euclidiana. Vamos no nosso texto nos restringir à geometria descoberta por Gauss, Bolyai e Lobachevsky, denominada Geometria Hiperbólica.

### 1.3.1 Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)



Figura 1.21: Carl Friedrich Gauss.

Famoso matemático de sua época, era um gênio desde criança, dizem que sem ajuda de nenhum tipo Gauss aprendeu a calcular antes de falar.

Mostrou-se um gênio prodígio quando seu professor propôs a classe para encontrar a soma dos cem primeiros números  $1+2+3+\dots+99+100$ . Gauss somou instantaneamente que eram 50 conjuntos de mesma soma 101. Tinha por volta de dez anos e seu professor o estimulou com livros de aritmética para que prosseguisse em sua aprendizagem.

Duas passagens de sua vida, ainda estudante, se liga aos demais futuros descobridores de uma geometria não euclidiana.

A primeira passagem foi que, coincidentemente, J. Martin Bartels, um professor que o ajudara, foi, anos mais tarde, professor de Lobachevsky.

A segunda passagem foi a de que, ainda na universidade, teve um grande amigo, Farkas Bolyai, pai de Janos Bolyai, com quem manteve correspondência durante muitos anos.

Gauss produziu muito para a matemática e foi importante no meio acadêmico por essas contribuições. Na virada do século foi figura dominante no mundo acadêmico.

Ainda aos quinze anos tomou conhecimento do problema das paralelas. Sobre o Quinto Postulado e a geometria não euclidiana, muito pouco foi publicado durante sua vida. Tinha o hábito de escrever para amigos e matemáticos, ao invés de publicar. Hoje pelas suas cartas verificamos que ele foi provavelmente o primeiro a entender claramente a possibilidade de uma geometria lógica e consistente, diferente da de Euclides. Foi o primeiro a chamar a nova geometria de não euclidiana. Suas correspondências mostram também o progresso que ele fez no estudo das paralelas.

Ele trabalhou no Problema das Paralelas por duas décadas, até se convencer de que o axioma das paralelas era independente dos outros quatro. Gauss, primeiramente seguindo os passos de Saccheri e Lambert, ainda tentou provar o Quinto Postulado por redução ao absurdo, mas logo verificou essa impossibilidade.

Ele verificou que após muito estudo, como relata em cartas, que a suposição de que a soma dos 3 ângulos de um triângulo é inferior a  $180^\circ$  leva a uma geometria curiosa, diferente da nossa Geometria Euclidiana, mas completamente consistente. Diz também que os teoremas dessa nova geometria parecem ser paradoxais e, para os não iniciados, um absurdo, mas, com calma e reflexão, revelam que não contêm nada de impossível.

Em carta ele cita que se esforçou muito para descobrir uma contradição, uma incoerência, todas sem sucesso.

Gauss evitou tornar público, mantendo em segredo suas descobertas e seus trabalhos sobre a nova geometria, por receio e porque tinha uma reputação a defender. O receio se referia a temer opor-se à filosofia de Kant, adotada e considerada como dogma pela poderosa igreja. O domínio da igreja era soberano e exercia grande pressão aos que possuíam algum tipo de conhecimento.

Uma de suas contribuições é a prova de que a diferença entre dois ângulos retos e a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado sobre uma superfície de curvatura (gaussiana) constante e negativa é proporcional à área do triângulo. Esse trabalho coincidia com o trabalho de Lambert e indicava a existência de uma geometria onde não era válido o postulado das paralelas.

### 1.3.2 Johann (Janos) Bolyai (1802 - 1860)



Figura 1.22: Johann (Janos) Bolyai.

O pai de Janos Bolyai, Wolfgang(Farkas) Bolyai era um dos mais importantes amigos de Gauss desde o tempo de universidade. Gauss trocava correspondência com Wolfgang sobre o assunto Teoria das Paralelas. Wolfgang passou grande parte de sua vida tentando demonstrar o postulado das paralelas e, por duas vezes, mostrou seu trabalho para Gauss acreditando ter encontrado a prova do Quinto Postulado. Na primeira vez Gauss mostrou seu erro e da segunda nem respondeu.

Wolfgang era muito talentoso e durante duas décadas, além de seus afazeres como professor, poeta, músico e inventor, conseguiu colocar suas ideias em um livro, de dois volumes, chamado *Tentamen*.

Seu filho Johann foi educado para servir ao exército. Chegou a ser oficial do corpo de engenheiros militares do exército húngaro. Estudou matemática com o pai e foi natural que tenha também se preocupado com o estudo da teoria das paralelas. Mesmo seu pai o aconselhando a desistir de tal estudo, Janos continuou trabalhando e em 1829 chegou à mesma conclusão que chegara Lobachevsky alguns anos antes.

Negando o Quinto Postulado, havia duas possibilidades:

- I. Existe mais de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto não pertencente à essa reta.
- II. Não existe qualquer reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora desta reta.

Como a existência das paralelas é uma consequência dos quatro primeiros postulados (Proposição 27 de Euclides), Janos seguiu com a Hipótese I.

Ele observou que se existem duas retas cumprindo a Hipótese I, então existem infinitas retas. Os resultados que seguem dessa observação constituem o cerne dessa nova geometria. Ao suprimir o Quinto Postulado do sistema axiomático, ele provou um conjunto de teoremas que hoje formam a Geometria Absoluta (objeto de nosso estudo no Capítulo 2). Os resultados da Geometria Absoluta são comuns a ambas as geometrias (Euclidiana e Hiperbólica).

O pai de Janos sugeriu que os estudos do filho fossem publicados como um apêndice de seu *Tentamen*. Assim, Janos publicou seus descobrimentos em vinte e seis páginas do livro de seu pai.

Seu pai enviou uma cópia do livro para o amigo Gauss. A vaidade e a surpresa de Gauss provocou um arrasador comentário. Este comentário, enviado por carta, desapontou Janos ao descobrir que outro tinha feito as mesmas descobertas antes dele. Janos nada mais publicou, porém, continuou a trabalhar e deixou escritas mais de vinte mil páginas de manuscritos matemáticos.

Janos soube do trabalho de Lobachevsky somente em 1848. Esse trabalho com as conclusões da nova geometria havia sido publicado em 1829, dois ou três anos antes do aparecimento na imprensa do *Tentamen*. Dessa vez não teve uma recepção negativa, como ocorrera com Gauss.

### 1.3.3 Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793 - 1856)



Figura 1.23: Nicolai Ivanovich Lobachevsky.

Lobachevsky formou-se na Universidade de Kasan em 1813. Foi mantido como instrutor e mais tarde promovido a um cargo de professor.

Como estudante foi aluno de J. M. Bartels, professor de Gauss, que foi um dos primeiros a reconhecer a genialidade de Gauss.

Apesar de Gauss e Bartels serem íntimos e trocarem correspondência, não há provas de que Bartels tenha influenciado Lobachevsky com opiniões sobre o problema das paralelas.

As descobertas de Lobachevsky parecem ter sido resultado de sua própria iniciativa e capacidade. Notas de 1815 mostram que ele tinha tentado provar o Quinto Postulado e, em 1823, terminou um manuscrito de geometria que nunca foi publicado, onde fazia uma declaração significativa que nenhuma prova rigorosa do postulado das paralelas tinha sido obtida.

Já em 1826, era considerado o matemático russo do seu tempo, fez uma conferência para o departamento de Física e Matemática onde lecionava e sugeriu uma nova geometria na qual mais de uma reta paralela a uma reta dada podiam ser traçadas e que a soma dos ângulos internos do triângulo seria menor do que dois retos. Infelizmente essa palestra nunca foi impressa.

Aos trinta e cinco anos Lobachevsky se tornou reitor da universidade na qual lecionava e, entre 1829 - 1830, publicou a sua Teoria das Paralelas, a primeira sobre geometria não euclidiana. Mas, como escreveu em russo, não obteve divulgação.

Confiante do mérito de suas descobertas, escreveu muitos artigos sobre a nova teoria das paralelas e reuniu em um livro publicado em 1840, dessa vez escrito em alemão para atrair à atenção dos matemáticos de todo o mundo.

Um ano antes de sua morte, embora cego, escreveu um relato completo de suas pesquisas e dessa vez publicou em francês sob o título: *Pangeometria*. Não viveu para ver sua obra reconhecida.

Em 1841 Gauss soube do trabalho de Lobachevsky e ficou impressionado. Elogiou Lobachevsky por cartas mas não fez elogios públicos. Em 1846 escreveu para seu amigo Schumacher reconhecendo o mérito de Lobachevsky e elogiou o desenvolvimento de suas demonstrações, mas também frisou que o trabalho não era novo para ele.

Os três matemáticos Lobachevsky, Gauss e Bolyai desenvolveram ao mesmo tempo a primeira geometria não euclidiana. Outros matemáticos deram seqüência aos estudos aprofundando-os.

Em 1871, Klein deu o nome de Geometria Hiperbólica a esta nova geometria desenvolvida.

Grandes matemáticos como Beltrami, Poincaré, Klein e Riemann, continuam a pesquisa de geometrias não euclidianas, desenvolvendo o assunto em outras áreas da matemática.

Em 1868, Beltrami provou que o Quinto Postulado não é conclusão dos quatro primeiros, mostrando que a Geometria Hiperbólica é tão consistente quanto a Geometria Euclidiana. Este assunto veremos adiante.

## 1.4 Modelos para a Geometria Hiperbólica

Lobachevsky se esforçou em provar que sua geometria não possuía contradições, mas não conseguiu. Isto só foi resolvido após sua morte, quando os matemáticos Eugenio Beltrami (1835 - 1900) e Félix Christian Klein (1849 - 1925) criaram os primeiros modelos para a Geometria Hiperbólica.

Nos princípios de 1900 surgem novos modelos para a Geometria Hiperbólica, como o “Disco de Poincaré”.

Um modelo para um sistema axiomático é um ambiente no qual podemos representar (ou interpretar) os conceitos primitivos em relação aos quais os axiomas passam a ser afirmações aceitas como verdadeiras.

Exemplo de um modelo: o plano euclidiano tal qual o consideramos é um modelo para o sistema axiomático de Hilbert (o sistema axiomático de Hilbert é assunto da seção 1.5) pois nele é possível representar ponto e reta de tal modo que os axiomas de Hilbert passam a ser aceitos como verdadeiros.

Enquanto a Geometria Euclidiana foi desenvolvida a partir de uma percepção visual e tátil e axiomatizada depois, a Geometria Hiperbólica foi desenvolvida a partir de sua axiomatização e posteriormente foram desenvolvidos os modelos matemáticos para sua percepção visual e tátil.

### 1.4.1 Modelo de Beltrami



Figura 1.24: Eugenio Beltrami.

O emprego de um modelo para a Geometria Hiperbólica foi proposto pela primeira vez pelo matemático Beltrami, em uma obra editada em 1868, onde apresentou um modelo contido no  $\mathbb{R}^3$ . Neste trabalho ele mostrava que em uma superfície de curvatura gaussiana constante e negativa, tomando as geodésicas como retas, obtinha-se uma geometria com infinitas paralelas a uma reta dada, passando por um ponto não pertencente a ela. Assim, todos os resultados obtidos por Lobachevsky eram verificados por construções geométricas sobre essa superfície, conhecida como pseudo-esfera.

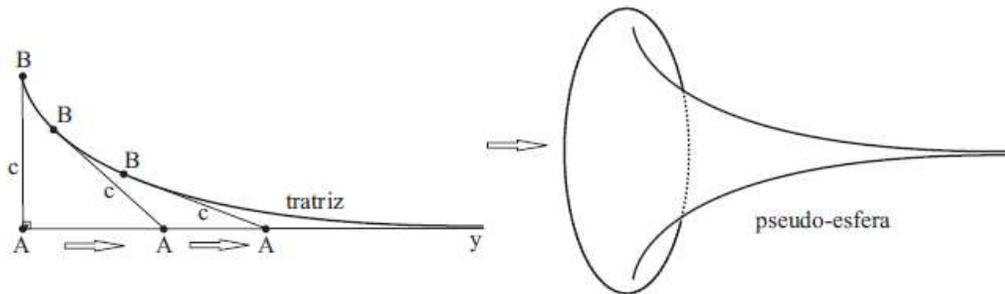


Figura 1.25: Pseudo-esfera: superfície de curvatura gaussiana constante negativa.

O modelo de Beltrami possuía um defeito. A pseudo-esfera não é um modelo plenamente adequado para a Geometria Hiperbólica, pois não é completa, isto é, apresenta “pontos singulares” que impedem o prolongamento das “retas hiperbólicas”. Hoje se sabe que nas superfícies de curvatura gaussiana constante positiva, as curvas geodésicas são as retas de uma geometria não euclidiana na qual vale a hipótese do ângulo obtuso. Essa geometria pode ser imaginada na esfera onde as retas são os círculos máximos.

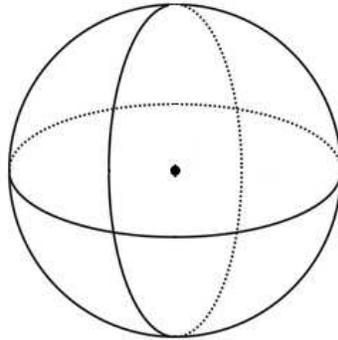


Figura 1.26: Esfera com círculo máximo.

### 1.4.2 Modelo de Klein



Figura 1.27: Felix Christian Klein.

Félix Klein apresentou um modelo euclidiano plano no qual as construções geométricas da Geometria Hiperbólica podem ser visualizadas na região interior de um círculo (disco) euclidiano. As retas são as cordas do disco, excluindo suas extremidades. Na figura, as retas  $s$  e  $s'$  são paralelas a reta  $r$ .

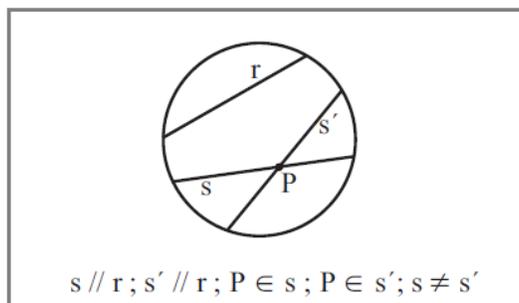


Figura 1.28: O modelo plano de Klein.

Para complementar o modelo, é preciso que as retas tenham uma extensão infinita dentro de uma área finita. Assim, introduzimos uma unidade de medida variável, isto é, seu tamanho diminui na proporção que se aproxima da fronteira do plano (circunferência do círculo). Com isso a corda, nossa reta, torna-se de comprimento hiperbólico infinito.

### 1.4.3 Modelos de Poincaré



Figura 1.29: Jules Henri Poincaré.

Henri Poincaré (1854-1912) foi um dos matemáticos mais criativos de todos os tempos e escreveu mais que qualquer outro matemático do século XX. É descrito com frequência como o último universalista da matemática. Os modelos propostos por Poincaré para a Geometria Hiperbólica foram desenvolvidos entre 1882 e 1887 e são chamados de modelo do disco e modelo do semiplano. No Capítulo 4 desenvolvemos **O Modelo Euclidiano do Disco de Poincaré**.

O modelo do Disco de Poincaré difere do modelo de Klein no que diz respeito às retas. Neste modelo, as retas são arcos de círculo perpendiculares ao círculo do modelo, cujo interior representa o plano hiperbólico.

Na figura 1.30  $AB$  e  $CD$  são retas concorrentes no ponto  $G$ , enquanto  $AE$  e  $BF$  são retas paralelas à reta  $AB$ .

Para o Modelo de Poincaré a distância entre dois pontos quaisquer  $X$  e  $Y$  da reta  $AB$ , por exemplo, é dada pela fórmula:

$$d(X, Y) = k \ln \left( \frac{\frac{AX}{XB}}{\frac{AY}{YB}} \right),$$

onde  $k$  é um parâmetro e  $AX$ ,  $XB$ ,  $AY$ , e  $YB$  são segmentos euclidianos de reta.

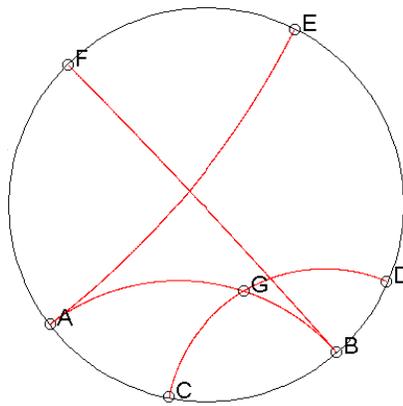


Figura 1.30: Modelo de Disco de Poincaré.

O Modelo do semiplano de Poincaré é quase idêntico ao Modelo de Disco de Poincaré. Nele, o plano hiperbólico é o semiplano euclidiano aberto, descontando-se sua reta limite. As retas são os semicírculos que são ortogonais à reta limite, ou as retas perpendiculares à mesma. A distância é a mesma do outro modelo, e os ângulos são preservados. Sua utilidade prática está no fato de ser mais fácil de trabalhar que o disco em alguns aspectos, como quando queremos usar as equações analíticas das retas, que são mais simples.

Na Figura 1.31 podemos ver retas contradizendo o Quinto Postulado. Neste exemplo  $EF \parallel AB$  e  $EF \parallel AC$ .

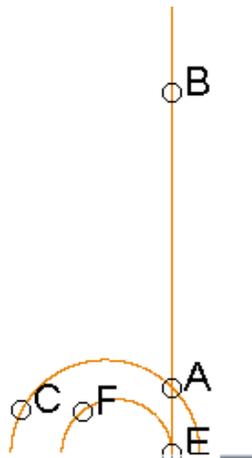


Figura 1.31: Modelo do semiplano de Poincaré.

## 1.5 O Sistema Axiomático de Hilbert



Figura 1.32: David Hilbert.

Um ponto que gostaríamos de ressaltar: é irrelevante para a teoria matemática que os axiomas sejam verdadeiros ou falsos; o que importa é que *se* os axiomas forem verdadeiros, *então* o mesmo acontece com todos os teoremas subsequentes.

Um sistema axiomático, deve satisfazer as três condições seguintes:

- a) ser consistente: os postulados não podem contradizer uns aos outros;
- b) ser completo: tudo que será usado na teoria é oriundo dos axiomas, de maneira que não hajam hipóteses implícitas; e
- c) ser independente dos demais: nenhum axioma é consequência de alguma combinação dos demais.

Baseado nessas condições, as demonstrações de *Euclides* eram incompletas e continham falhas, muitas das demonstrações tinham o apelo da intuição.

Para exemplificar o parágrafo anterior vejamos a primeira proposição do Livro I: construir um triângulo equilátero sobre uma base  $AB$  dada. Não há nada nos axiomas que nos permita concluir que dois arcos de círculo têm um ponto em comum, Euclides nessa proposição fez uma hipótese tácita.

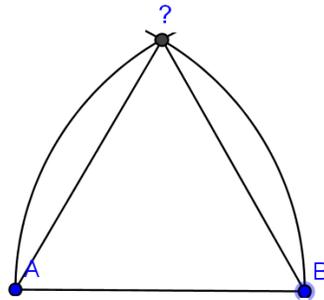


Figura 1.33: Triângulo equilátero.

No final do século XIX, David Hilbert (1862 - 1943) apresentou sua obra, *Fundamentos de Geometria*, onde fez um estudo dos Elementos de Euclides e elaborou um conjunto completo de axiomas da Geometria Euclidiana. Corrigindo as imperfeições dos axiomas de Euclides.

## Axiomas da Geometria Euclidiana Plana

### I Termos indefinidos

1. Ponto, reta, plano, pertence, está entre e congruência.

### II Axiomas de incidência

1. Para cada dois pontos distintos existe uma (única) reta que os contém.
2. Toda reta contém pelo menos dois pontos.
3. Existem pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta e todos os pontos estão sobre o mesmo plano.

### III Axiomas de Ordem

1. Se um ponto  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , então os três pontos pertencem a uma mesma reta e  $B$  está entre  $C$  e  $A$  (comutatividade).
2. Para quaisquer dois pontos distintos  $A$  e  $C$ , existe pelo menos um ponto  $B$  pertencente à reta  $AC$  tal que  $B$  está entre  $A$  e  $C$ .
3. Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois.
4. (Pasch) Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja  $l$  uma reta do plano que não contém algum dos três pontos. Então, se  $l$  intersecta o segmento  $AB$ , então ela também intersecta o segmento  $AC$  ou o segmento  $BC$ .

### IV Axiomas de Congruência

1. Se  $A$  e  $B$  são dois pontos numa reta  $l$  e  $A'$  é um outro ponto de uma reta  $l'$ , não necessariamente distinta da anterior, então é sempre possível encontrar um ponto  $B'$  em (um dado lado da reta)  $l'$  tal que os segmentos  $AB$  e  $A'B'$  são congruentes ( $\cong$ ).
2. Se um segmento  $A'B'$  e um segmento  $A''B''$  são congruentes a um mesmo segmento  $AB$ , então os segmentos  $A'B'$  e  $A''B''$  são congruentes entre si (transitividade).
3. Sobre uma reta  $l$ , sejam  $AB$  e  $BC$  dois segmentos da mesma que, exceto por  $B$  não têm pontos em comum. Além disto, sobre uma outra (ou a mesma reta)  $l'$ , sejam  $A'B'$  e  $B'C'$  dois segmentos que, exceto por  $B'$  não têm pontos em comum. Neste caso, se  $AB \cong A'B'$  e  $BC \cong B'C'$ , então  $AC \cong A'C'$ .
4. Se  $\angle ABC$  é um ângulo e se  $B'C'$  é uma semirreta com origem em  $B'$ , então existe exatamente uma semirreta  $B'A'$  com origem em  $A'$  em cada semiplano determinado pela reta  $B'C'$  tal que  $\angle A'B'C' \cong \angle ABC$ . Além disto, cada ângulo é congruente a si mesmo.
5. Se para dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  as congruências  $AB \cong A'B'$ ,  $AC \cong A'C'$  e  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$  são válidas, então a congruência  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$  é satisfeita.

### V Axioma das Paralelas

1. Seja  $l$  uma reta do plano e  $A$  um ponto desse plano não pertencente à  $l$ . Então existe uma única reta nesse plano que passa por  $A$  e não intersecta  $l$ .

## VI Axiomas de Continuidade

1. Axioma de Arquimedes: Se  $AB$  e  $CD$  são segmentos, então existe um número natural  $n$  tal que  $n$  cópias de  $CD$  contruídas contiguamente de  $A$  ao longo do raio  $AB$  passará além do ponto  $B$ .
2. Axioma da Completude da Reta: Uma extensão de um conjunto de pontos sobre uma reta com suas relações de congruência e ordem que poderiam preservar as relações existentes entre os elementos originais, bem como as propriedades fundamentais de congruência e ordem que seguem dos axiomas acima (menos o das Paralelas), é impossível.

Hoje em dia existem outros axiomas equivalentes ao de Hilbert que são considerados mais didáticos, por exemplo: os axiomas de Pogorélov. Em nosso estudo usaremos os axiomas adotados nas referências [6].



# Geometria Absoluta

Neste capítulo estudaremos a Geometria Absoluta baseados principalmente nas referências [6] e [14]. Usaremos os axiomas de A. V. Pogorélov que, como já dissemos, são axiomas mais didáticos.

Observemos o esquema abaixo:

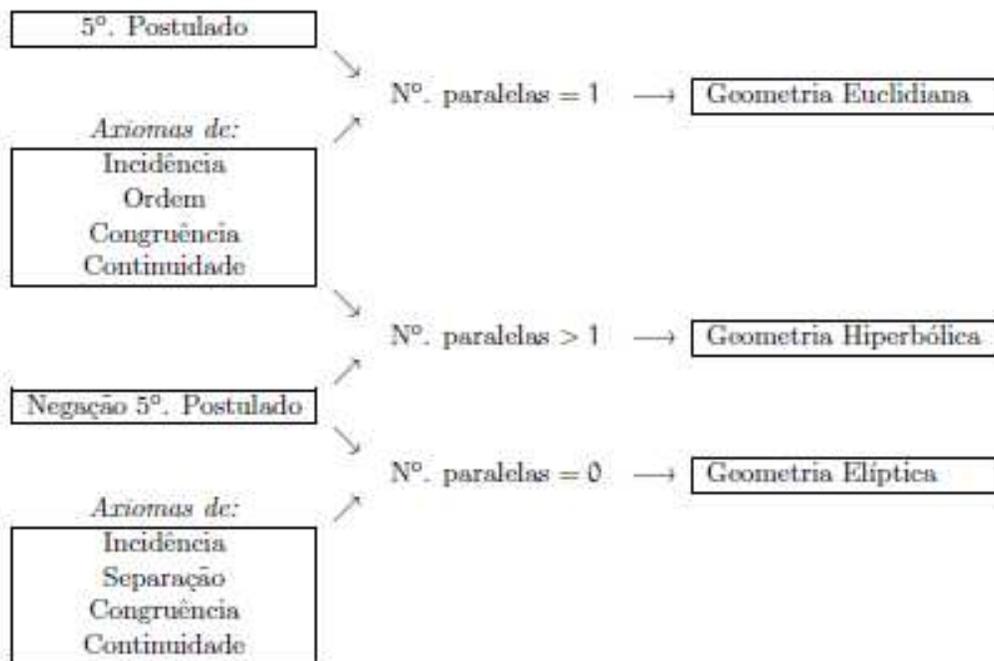


Figura 2.1: Esquema dos axiomas.

Neste trabalho não desenvolveremos assuntos pertinentes à Geometria Elíptica. No esquema observamos que os quatro primeiros axiomas da Geometria Elíptica não são iguais aos das outras geometrias citadas.

Observamos no esquema acima que os Axiomas de Incidência, Ordem, Congruência e Continuidade são iguais em ambas as geometrias, Euclidiana e Hiperbólica. Todas as proposições que advém desses axiomas, chamaremos de Geometria Absoluta. Os objetivos deste capítulo são o de apresentar os axiomas da Geometria Absoluta que servirão para o estudo da Geometria Hiperbólica e apresentar também problemas comuns de ambas as geometrias, Euclidiana e Hiperbólica, que são resolvidos ou demonstrados usando os axiomas comuns, ou seja, sem fazer uso do Axioma das Paralelas.

## 2.1 Axiomática Usada

Precisaremos demonstrar teoremas e proposições. Matematicamente demonstrar as proposições é reduzi-la, por meio de argumentos lógicos válidos, a outras proposições já demonstradas e, conseqüentemente, tidas como verdadeiras. No nosso estudo esse encadeamento lógico será todo dado, isto é, cada teorema ou proposição demonstrada tem no texto sua base de sustentação.

### 2.1.1 Axiomas de Incidência

**Axioma  $I_1$ :** Qualquer que seja a reta existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.

**Axioma  $I_2$ :** Dados dois pontos distintos existe uma única reta que contém estes pontos.

**Proposição 2.1.** *Duas retas distintas ou não se intersectam ou se intersectam em um único ponto.*

**Demonstração:** pelo Axioma  $I_2$  duas retas distintas não podem ter dois pontos em comum, assim, ou duas retas distintas não possuem ponto comum ou possuem um único ponto de interseção. ■

**Exercício 2.1.** *Os próximos dois teoremas podem ser obtidos usando os dois axiomas anteriores:*

- a) Dado um ponto qualquer, existe pelo menos uma reta não passando por ele.
- b) Dado um ponto qualquer, existem pelo menos duas retas que passam por ele.

### 2.1.2 Axiomas de Ordem

**Axioma  $II_1$ .** Dados três pontos de uma reta, um e apenas um deles está entre os outros dois.



Figura 2.2: Figura de apoio ao Axioma  $II_1$ .

**Definição 2.1.** Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos, o **segmento**  $AB$  é definido como sendo o conjunto dos pontos  $A$  e  $B$  e dos pontos  $X$  que estão entre  $A$  e  $B$ . Os pontos  $A$  e  $B$  são denominados **extremidades do segmento**  $AB$ .



Figura 2.3: Segmento  $AB$ .

**Definição 2.2.** **Triângulo** é a figura plana formada por três pontos não colineares e pelos três segmentos determinados por estes três pontos. Os segmentos são chamados **lados do triângulo** e os pontos, **vértices do triângulo**.

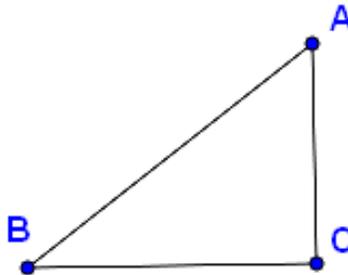


Figura 2.4: Triângulo  $ABC$ .

**Definição 2.3.** A **semirreta** de origem  $A$  contendo o ponto  $B$ , a qual denotamos por  $S_{AB}$ , é definida como sendo a união dos pontos do segmento  $AB$  com o todos os pontos  $X$  tais que  $B$  encontra-se entre  $A$  e  $X$ . O ponto  $A$  é denominado **origem** da semirreta.



Figura 2.5: semirreta  $S_{AB}$ .

**Axioma  $II_2$ .** Dados dois pontos  $A$  e  $B$  sempre existem: um ponto  $C$  entre  $A$  e  $B$  e um ponto  $D$  tal que  $B$  está entre  $A$  e  $D$ .

São consequências deste axioma: uma reta e uma semirreta possuem uma infinidade de pontos.

**Definição 2.4.** Dada uma reta  $r$  e um ponto  $P$  não pertencente a  $r$ . O conjunto dos pontos de  $r$  e de todos os pontos  $X$  tais que  $P$  e  $X$  estão em um mesmo lado da reta  $r$  é chamado de **semiplano** determinado por  $r$  contendo  $P$ . Usaremos a notação  $\pi_{r,P}$ . Observe que se dois pontos estão em semiplanos opostos, o segmento que une esses pontos intersectará a reta  $r$ .

**Axioma  $II_3$ .** Uma reta  $r$  determina exatamente dois semiplanos distintos cuja intersecção é a reta  $r$ .

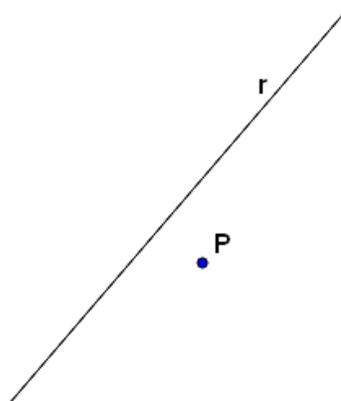


Figura 2.6: Apoio ao Axioma  $II_3$ .

### 2.1.3 Axiomas sobre Medição de Segmentos (ou Axiomas de Continuidade)

**Axioma  $III_1$ .** A todo par de pontos do plano corresponde um número real maior do que ou igual a zero. Este número é zero se, e só se, os pontos são coincidentes.

O número obtido por meio do axioma acima é chamado **distância** entre os pontos. Os pontos são ditos coincidentes se a distância entre eles for igual à zero. No enunciado deste axioma está implícito que existe uma **unidade de medida**. No nosso estudo a notação  $AB$  pode significar o segmento de extremidades  $A$  e  $B$  ou a distância entre os pontos  $A$  e  $B$ . Não usaremos outra notação como  $\overline{AB}$ , para expressar a medida do segmento, a menos que isso provoque dúvida.

**Axioma  $III_2$ .** Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que o módulo da diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.

O número correspondente a qualquer ponto da reta é chamado coordenada do ponto. Assim, se temos dois pontos,  $A$  de coordenada  $a$  e  $B$  de coordenada  $b$ , a distância entre os pontos  $A$  e  $B$  é dada por

$$AB = |b - a|.$$

**Axioma  $III_3$ .** Se o ponto  $C$  está entre  $A$  e  $B$  então

$$AC + CB = AB.$$

Após os axiomas  $III_1$ ,  $III_2$  e  $III_3$ , podemos relacionar a ordenação dos pontos de uma reta com a ordem dos números reais.

A relação de ordem dos números reais é definida do seguinte modo: sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  números reais, dizemos que  $b$  está entre  $a$  e  $c$  quando  $a < b < c$  ou  $c < b < a$ . Em ambos os casos o  $b$  está entre  $a$  e  $c$ .

**Proposição 2.2.** *Se, em uma semirreta  $S_{AB}$ , considerarmos um segmento  $AC$  com  $AC < AB$ , então o ponto  $C$  estará entre  $A$  e  $B$ .*

**Demonstração:** Temos que verificar as três possibilidades. O ponto  $A$  sendo a origem da semirreta não pode estar entre  $B$  e  $C$ . O ponto  $B$  não pode estar entre  $A$  e  $C$  porque pelo axioma  $III_3$ , teríamos  $AB + BC = AC$  o que implicaria  $AB < AC$  contrariando a hipótese  $AC < AB$ . Logo o ponto  $C$  é que está entre  $A$  e  $B$ . ■

**Proposição 2.3.** *Sejam dados uma reta  $r$  e três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertencentes à reta, com coordenadas  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente. Se  $b$  está entre  $a$  e  $c$ , então  $B$  está entre  $A$  e  $C$ .*

**Demonstração:** Se  $a < b < c$ , então  $AB = |b - a| = b - a$ ;  $AC = |c - a| = c - a$  e  $BC = |c - b| = c - b$ . Logo temos  $AB + BC = (b - a) + (c - b) = c - a = AC$ . Logo da Proposição(2.2) segue que  $B$  está entre  $A$  e  $C$ . Se  $c < b < a$ , analogamente teremos  $B$  entre  $A$  e  $C$ . ■

**Definição 2.5.** *Chamamos de **ponto médio** do segmento  $AB$  a um ponto  $C$  deste segmento tal que  $AC = CB$ .*

**Definição 2.6.** *Dois segmentos que possuem a mesma medida são chamados **segmentos congruentes**.*

**Proposição 2.4.** *Todo segmento tem um único ponto médio.*

**Demonstração:** Vamos inicialmente provar a existência do ponto médio. Sejam  $a$  e  $b$  as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$ , extremidades do segmento considerado. Existe o número

$$c = \frac{a + b}{2},$$

e pelo axioma  $III_2$  existe o ponto  $C$  que possui  $c$  como coordenada. Calculando os comprimentos dos segmentos  $AC$  e  $CB$  obtemos

$$\left| \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \right|,$$

para ambos comprimentos concluindo que  $AC = CB$ ,  $C$  ponto médio de  $AB$ .

Para provarmos a unicidade do ponto médio, suponhamos que exista  $C_1$ , um outro ponto

médio de  $AB$ , sejam  $a, c_1$  e  $b$  as coordenadas de  $A, C_1$  e  $B$ , sem perda de generalidade façamos  $a < c_1 < b$ . Teremos

$$c_1 - a = b - c_1,$$

concluindo que

$$c_1 = \frac{a + b}{2},$$

e, portanto, pelo axioma  $III_2$ ,  $C = C_1$ , ficando provado a unicidade do ponto médio  $C$ . ■

**Definição 2.7.** *Sejam  $A$  um ponto e  $r$  um número real positivo. Definimos a **circunferência** ou **círculo** de centro  $A$  e raio  $r$  como sendo o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distância  $r$  do ponto  $A$ .*

Todo ponto  $C$  que satisfaz a desigualdade  $AC < r$  é dito **ponto interior** à circunferência, o **exterior** à circunferência é o conjunto de todos os pontos  $C$  tais que  $AC > r$

A união da circunferência com o seu interior é chamada de **disco**.

**Definição 2.8.** **Ângulo** é a figura formada por duas semirretas com a mesma origem. As semirretas são chamadas de **lados** do ângulo e a origem comum, de **vértice** do ângulo.

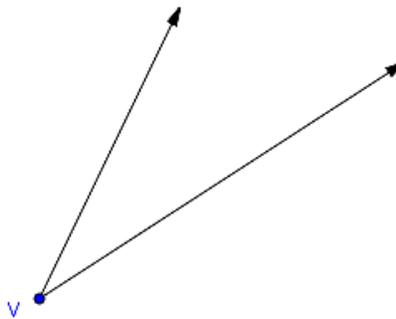


Figura 2.7: Ângulo de vértice  $V$ .

**Definição 2.9.** *Ângulo **raso** é a figura formada por duas semirretas distintas de uma mesma reta.*



Figura 2.8: Ângulo raso.

A notação usada para representar o ângulo, poderá ser  $B\hat{A}C$  sendo  $B$  e  $C$  pontos dos lados do ângulo de vértice  $A$  ou simplesmente  $\hat{A}$ .

A introdução de medidas de ângulos na geometria é dada por meio dos próximos três axiomas.

Observação: o transferidor da figura é apenas para a Geometria Euclidiana Plana no modelo do “plano usual”.

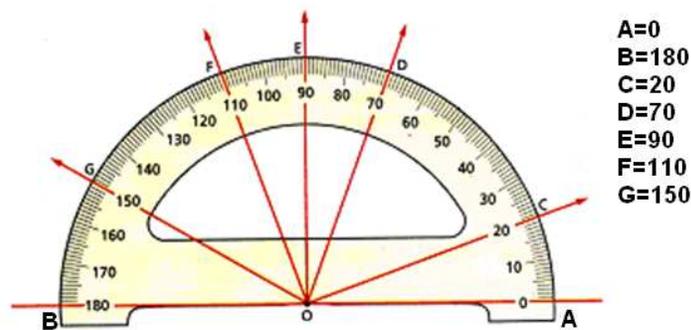


Figura 2.9: Medição de ângulo com um transferidor.

**Axioma  $III_4$ .** Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de ângulo é zero se, e somente se, ele é constituído por duas semirretas coincidentes.

**Definição 2.10.** *Uma semirreta **divide** um semiplano se ela estiver contida no semiplano e sua origem for um ponto da reta que o determina.*

**Axioma  $III_5$ .** É possível colocar, em correspondência biunívoca, os números reais maiores do que ou igual a zero e menores do que ou igual a 180 e as semirretas de mesma origem que dividem um dado semiplano, de modo que o módulo da diferença entre estes números seja a medida do ângulo formado pelas semirretas correspondentes.

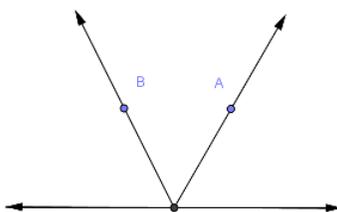


Figura 2.10: Apoio ao Axioma  $III_5$ .

Observe que o axioma  $III_5$  para ângulos é o análogo para os segmentos visto no axioma  $III_2$ . Assim cada semirreta possui sua coordenada e para calcularmos a medida do ângulo  $A\hat{O}B$  por exemplo, dadas as coordenadas  $a$  para  $S_{OA}$  e  $b$  para  $S_{OB}$  temos a medida do  $A\hat{O}B$  é  $|b - a|$ . Observemos que toda vez que a escala de medidas for de zero a cento e oitenta, chamamos a unidade de grau e indicamos pelo símbolo  $^\circ$ .

Na figura 2.9 por exemplo o cálculo da medida do ângulo  $C\hat{O}D$  é  $70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$ . Observação: Com esse desenvolvimento, verificamos que as semirretas que formam um ângulo raso são numeradas por 0 e 180 e sua medida é sempre igual a  $180^\circ$ .

Na nossa notação, assim como foi feito para segmentos, a notação  $C\hat{O}D$  tanto pode representar o ângulo como sua medida.

**Definição 2.11.** *Ângulos que têm a mesma medida são chamados de **ângulos congruentes**.*

**Definição 2.12.** *Sejam três semirretas de mesma origem  $O$ ,  $S_{OA}$ ,  $S_{OB}$  e  $S_{OC}$ . Se o segmento  $AB$  interceptar  $S_{OC}$  diremos que  $S_{OC}$  **divide** o ângulo  $A\hat{O}B$ .*

**Axioma  $III_6$ .** Se uma semirreta  $S_{OC}$  divide um ângulo  $A\hat{O}B$  então  $A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B$ .

**Definição 2.13.** *Se a soma das medidas de dois ângulos é  $180^\circ$ , então dizemos que os ângulos são **suplementares** e que cada um é o **suplemento** do outro.*

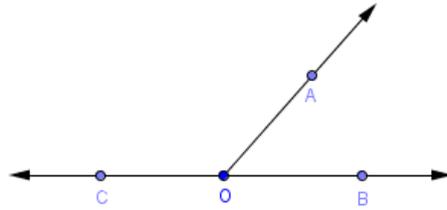


Figura 2.11: Os ângulos  $\widehat{B\hat{O}A}$  e  $\widehat{A\hat{O}C}$  são suplementares.

**Definição 2.14.** Se a soma das medidas de dois ângulos é  $90^\circ$ , então dizemos que os ângulos são **complementares** e que cada um é o **complemento** do outro.

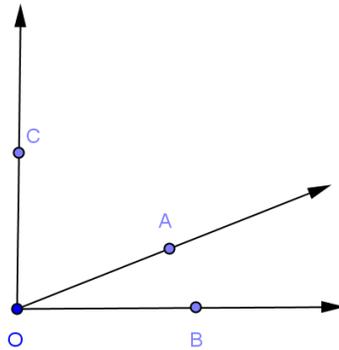


Figura 2.12: Ângulos complementares na Geometria Euclidiana.

**Definição 2.15.** Dois **ângulos** são **opostos pelo vértice** se os lados de um são as semirretas opostas aos lados do outro.

**Proposição 2.5.** Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

**Demonstração:** Se  $\widehat{A\hat{O}B}$  e  $\widehat{D\hat{O}C}$  são ângulos opostos pelo vértice (ver figura 2.13), então eles têm o mesmo suplemento  $\widehat{A\hat{O}D}$ . Assim,

$$\widehat{A\hat{O}B} + \widehat{A\hat{O}D} = 180^\circ$$

$$\text{e } \widehat{D\hat{O}C} + \widehat{A\hat{O}D} = 180^\circ,$$

Logo  $\widehat{A\hat{O}B} = 180^\circ - \widehat{A\hat{O}D} = \widehat{D\hat{O}C}$  ■

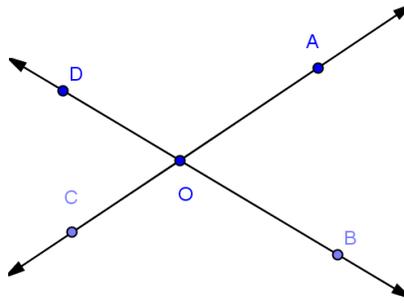


Figura 2.13: Ângulos opostos pelo vértice.

**Definição 2.16.** Um ângulo cuja medida é  $90^\circ$  é chamado **ângulo reto**.

**Definição 2.17.** Quando duas retas concorrentes formam quatro ângulos congruentes, dizemos que essas retas são **perpendiculares**.

**Proposição 2.6.** Se duas retas concorrentes formam, em um dos quatro ângulos, um ângulo reto, então todos os outros três ângulos também são retos.

**Demonstração:** Se um dos quatro ângulos é reto, seu suplemento é reto e os ângulos opostos pelo vértice de cada um desses também, logo os quatro ângulos são retos. ■

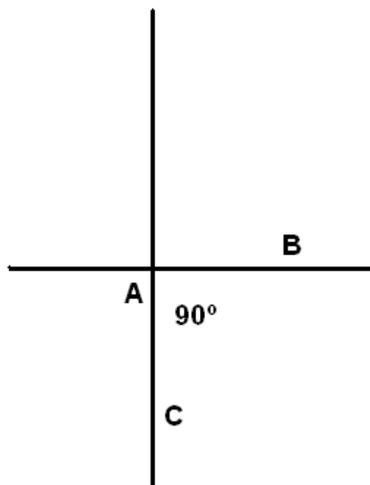


Figura 2.14: Retas perpendiculares no plano euclidiano.

**Exercício 2.2.** Um ângulo é chamado **agudo** se mede menos de  $90^\circ$ , e é chamado **obtusos** se mede mais de  $90^\circ$ . Mostre que o suplemento de um ângulo agudo é sempre obtuso.

**Exercício 2.3.** Dado um ângulo  $A\hat{O}B$  mostre que existe uma única semirreta  $S_{OC}$  tal que  $A\hat{O}C = C\hat{O}B$ . A semirreta  $S_{OC}$  é chamada de **bissetriz** do ângulo  $A\hat{O}B$ .

**Exercício 2.4.** Mostre que as bissetrizes de um ângulo e do seu suplemento são semirretas perpendiculares.

### 2.1.4 Axioma de Congruência

Nas definições 2.6 e 2.11 vimos segmentos congruentes e ângulos congruentes. Com estas definições as propriedades de igualdade de números passam a valer para a congruência de segmentos e de ângulos. Assim, um segmento é sempre congruente a ele mesmo e dois segmentos, congruentes a um terceiro, são congruentes entre si. O mesmo vale para congruência de ângulos.

A notação correta para congruência é  $\cong$ , por exemplo: o segmento  $AB$  é congruente ao segmento  $BC$  escrevemos  $AB \cong BC$ , porém por comodidade e por acharmos que não vai gerar dúvida ao leitor usaremos o símbolo  $=$ , então a congruência de  $AB$  com  $BC$  será escrita na forma  $AB = BC$ .

**Definição 2.18.** Duas **figuras planas** são **congruentes** quando pudermos, sem modificar medidas ou forma, sobrepor uma a outra.

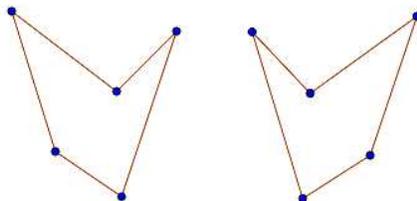


Figura 2.15: Figuras planas congruentes.

No caso particular de triângulos, podemos tomar uma definição equivalente à anterior que é mais útil na demonstração de teoremas de Geometria Absoluta.

**Definição 2.19.** Dois *triângulos* são *congruentes* se for possível estabelecer uma correspondência *biunívoca* entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

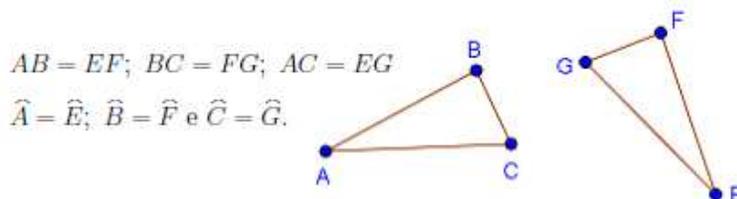


Figura 2.16: Triângulos congruentes.

Se  $ABC$  e  $EFG$  são dois triângulos congruentes, valem as seis congruências entre seus elementos, a saber:  $AB = EF; BC = FG; AC = EG; \hat{A} = \hat{E}; \hat{B} = \hat{F}$  e  $\hat{C} = \hat{G}$ . OBS: Quando escrevermos  $\Delta ABC \cong \Delta EFG$  (ou  $ABC = EFG$ ) já estamos dando implicitamente que  $A \leftrightarrow E, B \leftrightarrow F$  e  $C \leftrightarrow G$  é a correspondência entre os vértices que define a congruência, isto é, a correspondência segue a ordem na qual é descrito o triângulo.

**Axioma IV** (Critério LAL). Dados dois triângulos  $ABC$  e  $EFG$ , se  $AB = EF$ ,  $AC = EG$  e  $\hat{A} = \hat{E}$  então  $ABC = EFG$ .

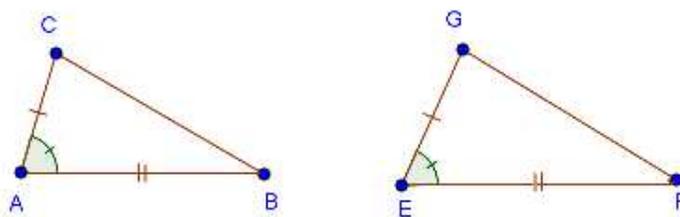


Figura 2.17: Apoio ao Axioma IV.

## 2.2 Congruência

O axioma IV é conhecido como **primeiro caso de congruência de triângulos** (LAL). Nesta seção iremos estudar outros dois casos de congruência (ALA) e (LLL).

**Definição 2.20.** Um triângulo é dito *isósceles*, quando possui dois de seus lados congruentes, o terceiro lado é chamado *base* do triângulo isósceles.



Figura 2.18: Triângulo isósceles.

**Proposição 2.7.** Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.

**Demonstração:** Seja o triângulo isósceles  $ABC$  com base  $BC$ . Vamos comparar  $ABC$  com ele mesmo, isto é, dados os triângulos  $ABC$  e  $ACB$ , temos  $AB = AC$  e  $\hat{A}$  é comum, então pelo caso LAL o  $\Delta ABC = \Delta ACB$ , como consequência  $\hat{B} = \hat{C}$  ■

A recíproca da Proposição 2.7 é verdadeira e só será demonstrada após o 2º caso de congruência de triângulos.

**Definição 2.21.** Um triângulo é dito *equilátero*, quando possui os três lados dois a dois congruentes.

**Corolário 2.1.** Todo triângulo equilátero possui seus três ângulos com a mesma medida.

**Proposição 2.8.** (2º caso de congruência de triângulo ou caso ALA). Dados dois triângulos  $ABC$  e  $EFG$ , se  $AB = EF$ ,  $\hat{A} = \hat{E}$  e  $\hat{B} = \hat{F}$ , então  $ABC = EFG$ .

**Demonstração:** Consideremos os triângulos  $ABC$  e  $EFG$ , satisfazendo as hipóteses da proposição. Seja, por construção,  $D$  um ponto da semirreta  $S_{AC}$  tal que  $AD = EG$ . Façamos a comparação do  $\Delta ABD$  e o  $\Delta EFG$ . Como  $AD = EG$  (por construção),  $AB = EF$  e  $\hat{A} = \hat{E}$  (por hipótese), concluímos pelo caso LAL que  $\Delta ABD = \Delta EFG$ . Deste fato e da hipótese segue que  $\hat{A}\hat{B}\hat{D} = \hat{E}\hat{F}\hat{G} = \hat{A}\hat{B}\hat{C}$ , pelo axioma III<sub>5</sub>,  $AD$  e  $AC$  coincidem. Portanto  $D$  e  $C$  são o mesmo ponto, e temos que  $\Delta ABC = \Delta EFG$ . ■

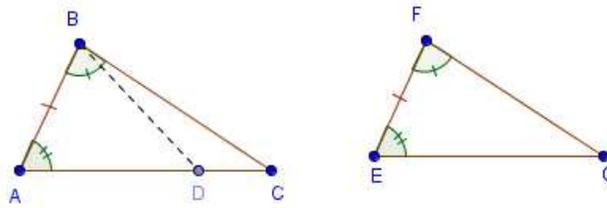


Figura 2.19: Apoio ao caso ALA.

**Proposição 2.9.** *Dado um triângulo  $ABC$ , se dois ângulos são congruentes, então o triângulo é isósceles.*

**Demonstração:** Seja um triângulo  $ABC$  em que  $\hat{B} = \hat{C}$ . Mostraremos que  $AB = AC$ . Comparando o triângulo  $ABC$  com ele próprio, consideremos os triângulos  $ABC$  e  $ACB$ , como  $\hat{B} = \hat{C}$  por hipótese,  $\hat{A}$  é ângulo comum, e  $BC = CB$ , pelo caso ALA os triângulos são congruentes, como consequência  $AB = AC$ . ■

**Definição 2.22.** *Ceviana é um segmento de reta que liga um vértice do triângulo ao lado oposto correspondente ou ao seu prolongamento. São exemplos de cevianas a Mediana, a Altura e a Bissetriz, conforme definidas abaixo.*

**Definição 2.23.** *Mediana de um triângulo é o segmento que liga um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto correspondente. Na figura 2.20 abaixo  $AD$  representa uma das três medianas do triângulo  $ABC$ .*

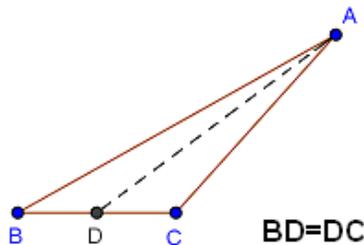


Figura 2.20: Mediana relativa ao lado  $BC$  de um triângulo.

**Definição 2.24.** *Uma bissetriz de um triângulo é um segmento da bissetriz de cada ângulo do triângulo compreendido entre o vértice correspondente e o lado oposto (na figura 2.21  $AD$  representa uma bissetriz). Cada triângulo possui três bissetrizes.*

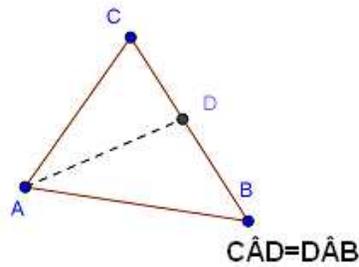


Figura 2.21: Bissetriz relativa ao lado  $BC$  de um triângulo.

**Definição 2.25.** O segmento que liga um vértice do triângulo a um ponto da reta que contém o lado oposto é chamado de **altura de um triângulo** relativo ao lado dado, se esse segmento for perpendicular à reta que contém o lado oposto ao vértice. Na figura 2.22  $AD$  é a altura relativa ao lado  $BC$ , pois o segmento  $AD$  é perpendicular a reta que contém  $B$  e  $C$ .

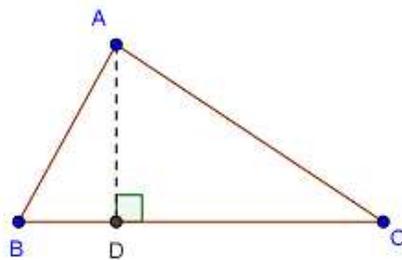


Figura 2.22: Altura relativa ao lado  $BC$  de um triângulo.

**Proposição 2.10.** Em um triângulo isósceles a mediana relativa à base é também bissetriz e altura.

**Demonstração:** Seja  $ABC$  um triângulo isósceles cuja base é  $BC$ , e  $AD$  a mediana relativa à base. Consideremos os triângulos  $BDA$  e  $CDA$ . Temos que  $BD = CD$  (pois  $D$  é ponto médio),  $BA = CA$  e  $\hat{B} = \hat{C}$  (pois, por hipótese o triângulo é isósceles). Pelo caso LAL, temos que  $\triangle ABD = \triangle ACD$  e em consequência:

- $\hat{BAD} = \hat{CAD}$  e demonstramos que  $AD$  é bissetriz;
- como  $\hat{BDC}$  é raso, temos que  $\hat{ADB} = \hat{ADC} = 90^\circ$ , demonstrando que  $AD$  é perpendicular ao segmento  $BC$ , isto é  $AD$  é altura do triângulo  $ABC$ .

■

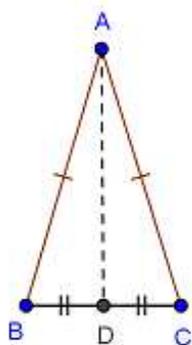


Figura 2.23: Apoio a Proposição 2.10.

**Proposição 2.11.** (*3º caso de congruência de triângulos ou caso LLL*). Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes, então esses triângulos são congruentes.

**Demonstração:** Sejam  $ABC$  e  $EFG$  dois triângulos tais que seus lados correspondentes sejam congruentes. Para demonstrar que  $ABC = EFG$  façamos algumas construções. Considere os semiplanos determinados pela reta  $AB$ . Tome a semirreta  $AD$  no semiplano que não contém o ponto  $C$  de tal modo que  $AD = EG$  e  $\hat{B}AD = \hat{F}EG$ . Verificamos pelo caso LAL que  $ABD = EFG$ . Para mostrarmos que  $ABD$  e  $ABC$  são congruentes, trace uma linha auxiliar  $CD$ . Como  $AD = EG = AC$  e  $DB = FG = BC$ , então os triângulos  $ADC$  e  $BDC$  são isósceles. Assim temos  $\hat{ADC} = \hat{ACD}$  e  $\hat{CDB} = \hat{DCB}$ , concluindo que  $\hat{ADB} = \hat{ACB}$ . Pelo caso LAL concluímos que  $ABD = ABC$ . E por transitividade  $ABC = EFG$ . ■

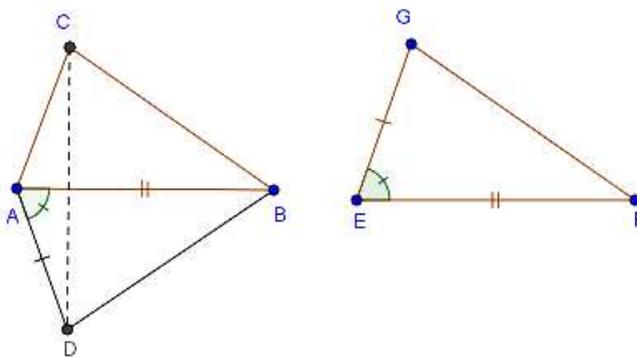


Figura 2.24: Apoio a Proposição 2.11.

**Proposição 2.12.** *Por qualquer ponto de uma reta passa uma única perpendicular a esta reta.*

**Demonstração:** Sejam a reta  $m$  e dois pontos distintos sobre ela ( $A$  e  $B$ ). Seja  $\pi$  um dos dois semiplanos que esta reta forma. Pelo axioma  $III_5$ , existe um ponto  $C$  em  $\pi$  tal que  $C\hat{A}B$  é um ângulo reto. Seja  $r$  a reta que contém o segmento  $AC$ . Assim  $r$  é perpendicular a  $m$  ( $r \perp m$ ) e demonstramos que existe pelo menos uma reta que satisfaz a proposição. Para mostrarmos a unicidade, suponhamos que existam duas retas  $r$  e  $r'$  passando por  $A$  e perpendicular a  $m$ , ora as retas  $r$  e  $r'$  contém as semirretas  $AC_1$  e  $AC_2$  que estão no mesmo semiplano  $\pi$  que tem  $m$  como origem. Pela definição de retas perpendiculares  $B\hat{A}C_1=90^\circ$  e  $B\hat{A}C_2=90^\circ$  e isso contradiz o axioma  $III_5$ , portanto temos uma única reta passando por  $A$  perpendicular a  $m$ . ■

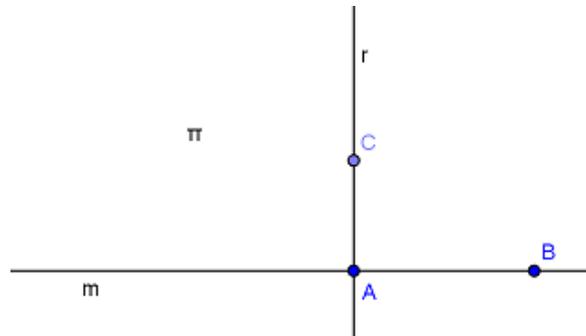


Figura 2.25: Apoio a Proposição 2.12.

**Definição 2.26.** *A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento e que contém seu ponto médio.*

**Proposição 2.13.** *A mediatriz de um segmento é o conjunto dos pontos que equidistam das extremidades do segmento.*

**Demonstração:** Seja  $AB$  um segmento com ponto médio  $M$ . seja  $m$  a mediatriz de  $AB$  e  $P$  um ponto pertencente a  $m$ . Se  $P$  está em  $AB$ , então  $P = M$  e portanto  $PA = PB$ . Se  $P$  não está em  $AB$ , pelo caso LAL o  $\triangle PMA = \triangle PMB$  e portanto  $PA = PB$ . ■

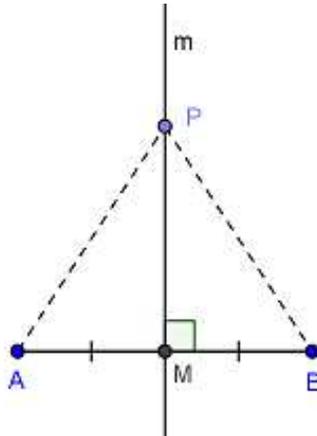


Figura 2.26: Apoio a Proposição 2.13.

**Exercício 2.5.** Na figura 2.27, temos  $AB = AC$ . Mostre que  $\hat{D}BC = \hat{E}CB$ .

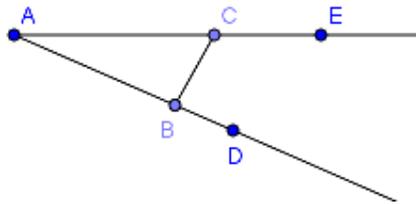


Figura 2.27: Apoio ao Exercício 2.5.

**Definição 2.27.** *Corda* de uma circunferência é qualquer segmento cujas extremidades sejam pontos pertencentes à circunferência.

**Exercício 2.6.** Seja  $AB$  uma corda de uma circunferência de centro  $C$ . Mostre que uma reta  $r$ , contendo o ponto  $C$  e interseccionando a corda  $AB$  em seu ponto médio é perpendicular a  $AB$ .

## 2.3 Teorema do Ângulo Externo

Muitos teoremas importantes da Geometria Absoluta são consequência do Teorema do Ângulo Externo. Nesta seção iremos estudar o Teorema do Ângulo Externo e alguns destes teoremas.

**Definição 2.28.** *Ângulos internos* ou *ângulos do triângulo* são os ângulos que estão no interior do triângulo. Os suplementos destes ângulos são chamados de **ângulos externos**. Na figura 2.28  $\hat{C}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{A}$  são os ângulos internos do triângulo  $ABC$  e  $B\hat{A}D$  é exemplo de um dos seis ângulos externos desse triângulo.

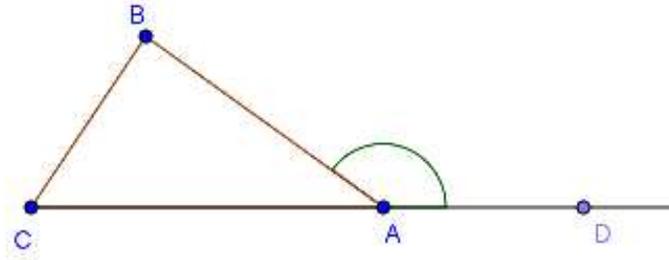


Figura 2.28: Ângulo externo de um triângulo.

Na figura 2.28 os ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  são os **ângulos internos não adjacentes** ao ângulo  $B\hat{A}D$ .

**Proposição 2.14.** *Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer um dos ângulos internos a ele não adjacentes.*

**Demonstração:** Seja  $ABC$  um triângulo. Sem perda de generalidade, seja o ângulo externo  $B\hat{A}D$  como mostra a figura 2.29. Devemos mostrar que o ângulo  $B\hat{A}D$  é maior que cada um dos ângulos não adjacentes a ele ( $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ ). Mostraremos que  $B\hat{A}D > \hat{B}$  e a outra demonstração é análoga. Construimos a semi-reta  $S_{CE}$  sendo  $E$  o ponto médio de  $AB$ , marquemos  $F$  nesta semirreta tal que  $CE = EF$ <sup>1</sup>. Pelo caso LAL os triângulos  $BEC$  e  $AEF$  são congruentes, conseqüentemente  $\hat{B} = E\hat{A}F$ . Como a semirreta  $S_{AF}$  divide o ângulo  $B\hat{A}D$ , segue que  $E\hat{A}F < B\hat{A}D$ , isto é,  $\hat{B} < B\hat{A}D$ . ■

<sup>1</sup> Tomar  $F$  tal que  $CE = EF$  sempre é possível devido ao fato da reta ser ilimitada. Em uma geometria onde as retas são limitadas (como na Geometria Elíptica) o Teorema do Ângulo Externo não é verdadeiro.

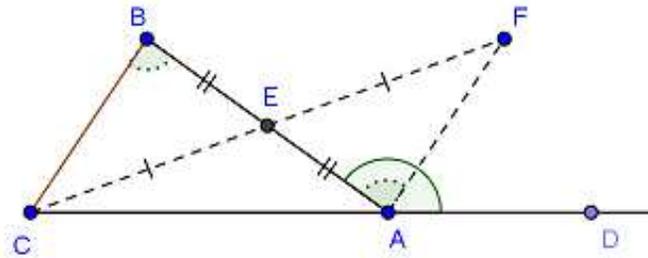


Figura 2.29: Apoio à demonstração do Teorema do Ângulo Externo.

**Proposição 2.15.** *A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor do que  $180^\circ$ .*

**Demonstração:** Dado o triângulo  $ABC$ , sem perda de generalidade, seja  $\alpha$  o ângulo externo deste triângulo com vértice em  $A$ . Pela proposição anterior temos que  $\alpha > \hat{B}$ . Como  $\alpha$  e  $\hat{A}$  são suplementares, então  $\alpha + \hat{A} = 180^\circ$  e portanto,  $\hat{B} + \hat{A} < \alpha + \hat{A} = 180^\circ$ .

■

**Corolário 2.2.** *Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos.*

**Demonstração:** Caso o triângulo possua só um ângulo agudo, a soma dos outros dois ângulos do triângulo seria maior do que ou igual a  $180^\circ$ . Contrariando a Proposição 2.15. ■

**Corolário 2.3.** *Se duas retas distintas  $r$  e  $s$  são perpendiculares a uma terceira reta, então  $r$  e  $s$  não se intersectam.*

**Demonstração:** Se  $r$  e  $s$  fossem concorrentes, iriam formar um triângulo com dois ângulos retos, contrariando o Corolário 2.2 ■

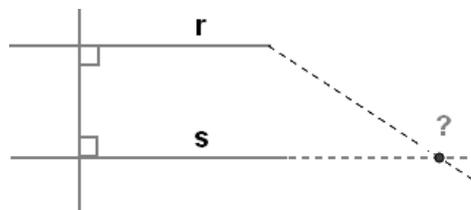


Figura 2.30: Apoio ao Corolário 2.3.

**Proposição 2.16.** *Por um ponto não pertencente a uma reta, existe uma única reta perpendicular à reta dada.*

**Demonstração:** Dada a reta  $r$  e um ponto  $P$  não pertencente a reta. Pelo axioma  $III_5$  podemos formar um ângulo reto  $P\hat{Q}R$ , sendo  $Q$  e  $R$  pontos da reta  $r$ , demonstrando a existência.

Para demonstrarmos a unicidade, suponhamos que pelo ponto  $P$  não pertencente à reta  $r$ , passem duas retas  $s$  e  $t$ , ambas perpendiculares à reta  $r$ , interseccionando  $r$ , respectivamente nos pontos  $S$  e  $T$ .

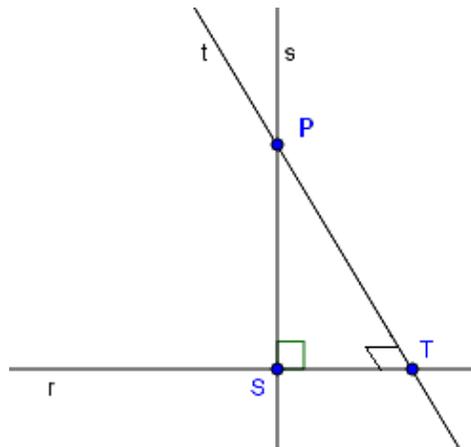


Figura 2.31: Apoio a Proposição 2.16.

Formamos, assim, os ângulos  $P\hat{T}S$  e  $P\hat{S}T$  ambos retos do triângulo  $PTS$ , o que contradiz o Corolário 2.2. ■

**Proposição 2.17.** *(Caso LAA de congruência de triângulos). Sejam  $ABC$  e  $EFG$  dois triângulos tais que  $AB = EF$ ,  $\hat{B} = \hat{F}$  e  $\hat{C} = \hat{G}$ . Então  $\Delta ABC = \Delta EFG$ .*

**Demonstração:** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $EFG$ , seja  $D$  um ponto de  $S_{BC}$  tal que  $BD = FG$ . Considerando inicialmente o ponto  $D$  entre  $B$  e  $C$ , pelo caso LAL temos  $ABD = EFG$  e com isso  $A\hat{D}B = \hat{G}$ .

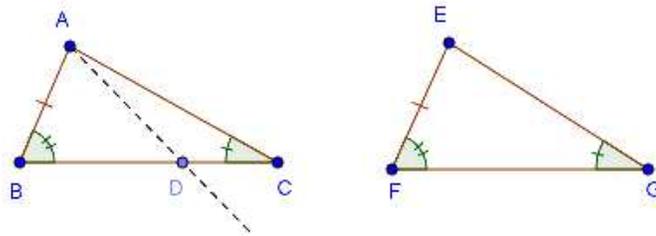


Figura 2.32: Apoio à Proposição 2.17.

Observe que  $\hat{A}DB$  é um ângulo externo do triângulo  $ADC$ , onde temos  $\hat{A}DB > \hat{A}CD = \hat{G}$ , uma contradição, já que vimos que  $\hat{A}DB = \hat{G}$ .

Se fizermos, agora,  $C$  entre os pontos  $B$  e  $D$ , a demonstração é análoga e novamente haverá a contradição, portanto  $D = C$  e então,  $ABC = EFG$ . ■

**Proposição 2.18.** *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos à esses lados não são iguais e o maior ângulo é oposto ao maior lado.*

**Demonstração:** Seja o triângulo  $ABC$  com  $AC$  não congruente a  $BC$ . Se  $\hat{B}$  e  $\hat{A}$  fossem congruentes, então o triângulo  $ABC$  seria isósceles sendo  $AB$  a base, implicando  $AC = BC$ , uma contradição com a hipótese. Para mostrarmos que o lado maior é oposto ao maior ângulo, consideremos, sem perda de generalidade,  $BC < AC$ . Vamos mostrar que o ângulo  $\hat{A}$  oposto ao lado  $BC$  é menor do que o ângulo  $\hat{B}$  oposto a  $AC$ .

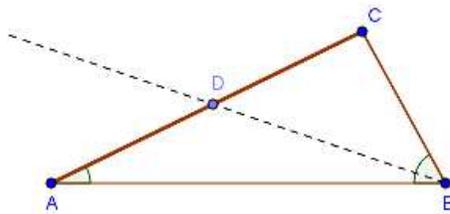


Figura 2.33: Apoio à Proposição 2.18

Por construção, marquemos um ponto  $D$  em  $S_{CA}$  tal que  $CD = BC$ . É fácil ver que esse ponto  $D$  está entre  $C$  e  $A$ . Em consequência  $S_{BD}$  divide o ângulo  $\hat{B}$ . Temos então que  $\hat{C}BA > \hat{C}BD = \hat{C}DB > \hat{C}AB$ , sendo que na última desigualdade utilizamos o Teorema do Ângulo Externo. ■

**Proposição 2.19.** *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes, e o lado maior é o oposto ao ângulo maior.*

**Demonstração:** Para demonstrarmos que o lado maior é oposto ao ângulo maior, consideremos um triângulo  $ABC$  sendo  $\hat{C} > \hat{B}$  e mostraremos que  $AB > AC$ . Se os lados opostos aos ângulos  $\hat{C}$  e  $\hat{B}$  fossem iguais, o triângulo seria isósceles e então os ângulos  $\hat{C}$  e  $\hat{B}$  seriam congruentes, o que contraria a hipótese.

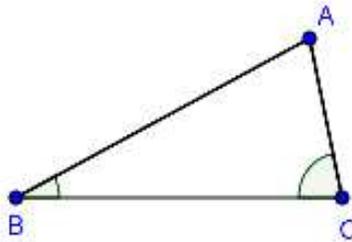


Figura 2.34: Apoio à Proposição 2.19.

Se  $AB < AC$ , pela proposição anterior teríamos que  $\hat{C} < \hat{B}$ , contrariando a hipótese. Logo a única possibilidade é  $AC > AB$ . ■

**Definição 2.29.** *Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado **triângulo retângulo**. O lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa**, e os outros dois lados são denominados **catetos**.*

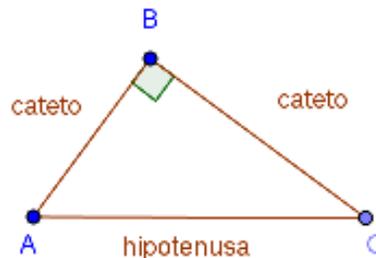


Figura 2.35: Triângulo retângulo.

**Corolário 2.4.** *Em todo triângulo retângulo cada cateto tem comprimento menor do que o comprimento da hipotenusa.*

**Proposição 2.20.** *Em todo triângulo, a soma dos comprimentos dos dois lados é maior do que o comprimento do terceiro lado.*

**Demonstração:** No triângulo  $ABC$  abaixo, por construção, marquemos o ponto  $D$  na semirreta  $S_{AB}$  tal que  $BD = BC$ . Formamos, assim, o triângulo isósceles  $BCD$  com base  $CD$ . Em consequência os ângulos  $\hat{BCD}$  e  $\hat{BDC}$  são congruentes. Como  $B$  está entre  $A$  e  $D$ , temos  $\hat{BCD} < \hat{ACD}$ , ou seja,  $\hat{BDC} < \hat{ACD}$  e pela proposição anterior  $AC < AD$ , logo  $AC < AB + BC$ . ■

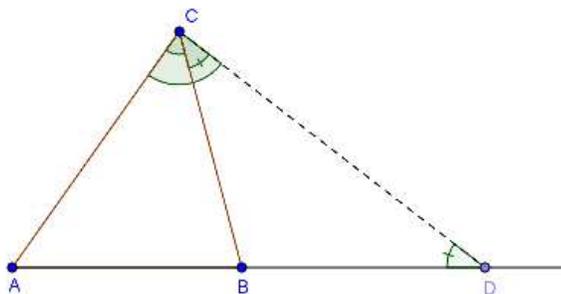


Figura 2.36: Apoio à Proposição 2.20.

**Proposição 2.21.** (*Desigualdade Triangular*). *Dados três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  do plano, tem-se que  $BC \leq AB + AC$ . A igualdade ocorre se, e somente se,  $A$  pertence ao intervalo  $BC$ .*

**Demonstração:** Dado um triângulo  $ABC$ , por construção, marquemos  $D$  um ponto de  $S_{CA}$  tal que  $AD = AB$ . Formamos, assim, o triângulo isósceles  $ADB$  com base  $BD$ . Como  $A$  está entre  $C$  e  $D$ , temos:  $DC = DA + AC$  e também que  $\hat{DBA} < \hat{DBC}$  ou seja,  $DC = AB + AC$  e  $\hat{BDC} < \hat{DBC}$ . Pela Proposição 2.19 obtemos  $BC < DC$ . Logo  $BC < AB + AC$  é demonstrada. ■

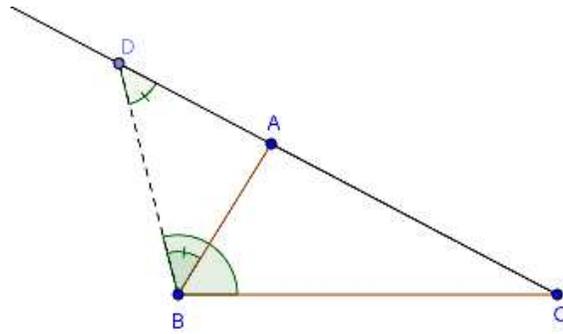


Figura 2.37: Apoio à Proposição 2.21.

**Proposição 2.22.** (Congruência de triângulos retângulos). *Sejam  $ABC$  e  $EFG$  dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são  $\hat{B}$  e  $\hat{F}$ . Se alguma das condições abaixo ocorrer, então os dois triângulos são congruentes:*

- i)  $BC = FG$  e  $\hat{A} = \hat{E}$ ;*
- ii)  $AC = EG$  e  $\hat{A} = \hat{E}$ ;*
- iii)  $AC = EG$  e  $AB = EF$ .*

**Demonstração:** A demonstração de (i) e (ii) segue imediatamente dos casos de congruência LAL e LAA.

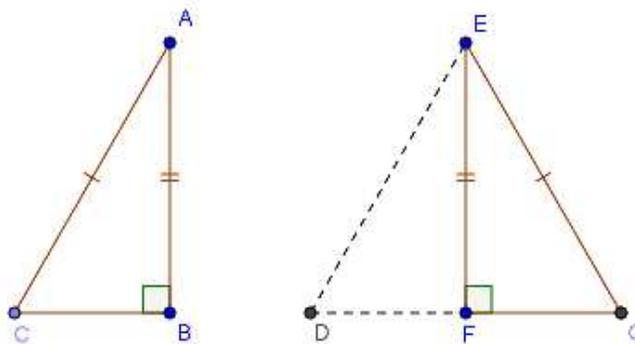


Figura 2.38: Apoio à demonstração (iii).

Para a demonstração de (iii) utilizaremos a figura auxiliar 2.38, observe que nos triângulos dados,  $\hat{B} = \hat{F} = 90^\circ$ ,  $AC = EG$  e  $AB = EF$ . Marquemos um ponto  $D$  em

---

$S_{GF}$  de modo que  $FD = BC$ . Pelo caso LAL temos  $\triangle EFD = \triangle ABC$ . Observe que o triângulo  $EDG$  é isósceles, logo  $\widehat{FGE} = \widehat{FDE}$ , ou seja,  $\widehat{FGE} = \widehat{BCA}$  e pelo caso LAA obtemos a congruência requerida. ■



# O Software NonEuclid

A escolha do software NonEuclid, como ferramenta de aprendizado da Geometria Hiperbólica, se deu por sua gratuidade, por ser um software de Geometria Dinâmica e possuir os dois modelos de Poincaré. Esses assuntos e uma introdução aos comandos do software é o que veremos neste capítulo.

## 3.1 Geometria Dinâmica

O professor Elon Lages Lima no prefácio de um de seus livros <sup>1</sup> dá dicas de como se deve estudar matemática. Extraímos as seguintes dicas: “Matemática não se aprende passivamente...não se lê um livro de Matemática como se fosse uma novela. Você deve ter lápis e papel na mão para reescrever, com suas próprias palavras, cada definição, o enunciado de cada teorema, verificar os detalhes às vezes omitidos nos exemplos e nas demonstrações e resolver os exercícios referentes a cada tópico estudado. É conveniente, também, desenhar figuras, ... a fim de atribuir significado intuitivo aos raciocínios do texto...”. Os programas de Geometria Dinâmica auxiliam a desenhar essas figuras.

Geometria Dinâmica não é uma nova geometria como o nome induz, é o nome dado aos programas de computador que simulam eletronicamente a régua e compasso e possuem vários recursos para visualizar e interagir com os desenhos e figuras geométricas

<sup>1</sup> Lima, Elon Lages, Curso de Análise, Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 1976

que estão sendo construídos. Impondo movimento, velocidade e precisão em um visual limpo que estimula o aluno na produção das figuras.

Quando o aluno recebe um problema geométrico para resolver, a primeira coisa que se deve fazer é representar o problema com um modelo geométrico que lhe permita visualizar qual é o problema que está sendo analisado.

Utilizando o mouse ou o teclado podemos, a partir de menus, construir retas, segmentos, triângulos, círculos, marcar o ponto médio, traçar mediatriz de um segmento, ângulos e muitas outras figuras geométricas. Para um visual limpo podemos ocultar partes de uma figura ou partes de sua construção, além de salvar e recuperar as figuras.

A idéia de movimento na geometria já existe há muito tempo, e o computador pôde trazer esse dinamismo que os primeiros instrumentos criados não possuíam.

Se o programa de Geometria Dinâmica tivesse apenas uma função: ser um caderno interativo para resolução de problemas com régua e compasso, já bastaria como auxiliar do ensino-aprendizagem de geometria. Sabemos que há desenhos de execução bastante complicada e até mesmo impossíveis com as tecnologias tradicionais (papel, lápis ou quadro e giz, por exemplo) e que se tornam facilmente executáveis com o uso do computador. Principalmente na Geometria Hiperbólica onde seus modelos de construções são mais complexos do que na Geometria Euclidiana e a simples função estática do programa de Geometria Dinâmica já seria ideal para o ensino-aprendizagem. Porém o software de Geometria Dinâmica ultrapassa em muito essa função estática de desenho.

O papel principal da Geometria Dinâmica é manter as propriedades dos objetos construídos ao serem movimentados, facilitando desta forma a possibilidade de análise de situações impraticáveis fazendo uso de régua e compasso, facilita a formulação de conjecturas e ajuda o professor na elaboração de dinâmicas ilustrativas.

O estudante pode facilmente, dada a facilidade, velocidade e iteratividade do programa, explorar e verificar situações análogas, e mesmo ser levado a formular conjecturas, aguçando sua curiosidade para buscar uma demonstração.

O recurso visual e sua movimentação, mantendo as propriedades, convencem o aluno da veracidade de certos teoremas, alguns realmente verdadeiros e outros falsos, precisamos alertar que a simples (“mostração”) na tela não é suficiente para a demonstração dos teoremas. Dependendo do nível do aluno poderemos trabalhar as demonstrações

lógicas ou não, porém ambos devem estar conscientes de que a demonstração visual não é suficiente.

Recursos como cores em diferentes objetos do desenho, construções precisas, possibilidade de arrastar um objeto mantendo sua propriedade de construção, possibilidade de salvar os trabalhos para usar posteriormente, a função rastro que visualiza ponto a ponto a trajetória de um objeto escolhido e outras potencialidades destes programas, ajudam a enriquecer o processo de ensino-aprendizagem da geometria.

O foco central do ensino-aprendizagem proporcionada pela Geometria Dinâmica é a possibilidade de atividades de exploração e de descoberta. Na atividade de descoberta, o aluno tem a autonomia para construir seus próprios desenhos, visando o domínio dos conceitos necessários para sua construção. Nas atividades de exploração os alunos recebem as construções prontas eletronicamente e são desafiados a compreendê-las.

Em ambas as situações o aluno pode movimentar a figura construída e verificar as propriedades por meio da observação.

Essa experimentação, exploração e análise das propriedades geométricas dos desenhos, estimula o raciocínio e motiva a descoberta de novas relações e conceitos geométricos.

A interação dessa visualização com os conhecimentos de conceitos e propriedades é a união entre o intuitivo e o lógico, básicos no estudo da geometria.

## 3.2 Introdução ao NonEuclid

O objetivo desta seção é apresentar o programa NonEuclid. Faremos a descrição de seus comandos, seus recursos, os modelos de Geometria Hiperbólica disponíveis, potencialidades e limitações deste software de Geometria Dinâmica.

Foram consideradas como as principais razões para a escolha do NonEuclid: custo e disponibilidade. O NonEuclid é gratuito e roda na plataforma Java, esta plataforma é compatível com diferentes sistemas operacionais, tais como Windows, Linux e Macintosh.

Terminamos essa seção com alguns exercícios de Geometria Hiperbólica.

### 3.2.1 Construções Interativas na Geometria Hiperbólica

NonEuclid é um aplicativo Java para construções interativas com régua e compasso na Geometria Hiperbólica tanto no modelo em disco quanto no semiplano de Poincaré.

O NonEuclid permite que o estudante explore e adquira experiência na Geometria Hiperbólica ao investigar empiricamente questões como: na Geometria Hiperbólica os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes?

O programa foi desenvolvido por Joel Castellanos, Departamento da Ciência e Computação da Universidade do Novo México, Joe Dan Austin, Departamento de Educação da Rice University e Ervan Darnell, Departamento da Ciência de Computação da Rice University.

O NonEuclid roda com a utilização do Java 1.5 ou versão mais recente. O software pode ser baixado em <http://cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/NonEuclid.jar>. Podemos também executar o NonEuclid sem baixá-lo na máquina, no site acima há as instruções para esse tipo de utilização que é bem simples. No nosso estudo usaremos o NonEuclid salvo no computador.

NonEuclid foi escrito como um projeto de estudantes da Rice University, com financiamento da National Science Foundation, da Rice University em um curso de verão. O código original foi escrito em Microsoft VisualBasic para MS-DOS em 1991. Ele não tinha o controle do mouse. A interface de linha de comando foi usado para construir os pontos de coordenadas polares. A idéia original do NonEuclid foi do filho do Dr. Joe Dan Austin, um programador no Departamento de Educação da Rice University, e foi inspirado pela leitura de um livro de geometria avançada de E.E. Moise.

Existe uma documentação em seu menu Help, em inglês, que é muito rica e foi escrita por seus autores, na Figura 3.1 listamos um resumo de seu conteúdo:

<b>Help</b>
<b>What is Non-Euclidean Geometry</b>
<b>The Shape of Space</b>
<b>The Pseudosphere</b>
<b>Parallel Lines</b>
<b>My First non-Euclidean Triangle</b>
<b>What-to-do: Activities</b>
<b>Axioms and Theorems</b>
<b>Area</b>
<b>X-Y Coordinate System</b>
<b>Why Study Hyperbolic Geometry?</b>
<b>References</b>
<b>About NonEuclid</b>

Figura 3.1: Conteúdo do menu Help do NonEuclid.

- **What is Non-Euclidean Geometry (O que é a Geometria Não-Euclidiana)**

São apresentadas as Geometrias Euclidiana e Não-Euclidiana. O autor apresenta um resumo histórico da Geometria Euclidiana e comenta o seu valor prático. Mostra a Geometria Não Euclidiana como uma geometria diferente da Geometria Euclidiana, dotada de um sistema consistente de definições, hipóteses e demonstrações, que descrevem as propriedades dos objetos: pontos, retas e planos.

Dá como exemplo as duas geometrias não euclidianas mais conhecidas: Geometria Esférica e a Geometria Hiperbólica. Descrevendo resumidamente suas características e aplicabilidade: na Geometria Esférica (navegação) e na Geometria Hiperbólica (Teoria Geral de Relatividade de Einstein e Topologia). Ressalta, também, a geometria absoluta ao afirmar que diversas demonstrações e teoremas da Geometria Euclidiana são compartilhados com a Geometria Hiperbólica.

- **The Shape of Space (A Forma do Espaço)**

Nesse item é apresentado o espaço curvo citando a Teoria da Relatividade de Einstein. Para falar da dificuldade de compreendermos a quarta dimensão, é dado um resumo do livro “A Romance of Many Dimensions” de Edwin A. Abbott, 1884, onde se imagina um mundo bidimensional em contraponto à terceira dimensão.

Para explicar a curvatura relativa à quarta dimensão, o autor classifica a curvatura em três diferentes escalas: micro, média e macro, dando exemplos e fazendo associações com objetos de nossa dimensão.

Mostra, também, que a curvatura em macro escala apresenta uma característica de curvatura, chamada Espaço Hiperbólico e que em espaços fechados com pequena curvatura aproxima-se da Geometria Euclidiana, isto é, os teoremas da Geometria Euclidiana parecem ser localmente verdadeiros nesse espaço hiperbólico. Finaliza dando como exemplos de curvatura as distâncias de nosso sistema solar.

- **The Pseudosphere (A Pseudoesfera)**

Neste item, para explicar o Espaço Hiperbólico Tridimensional, é necessário observar o Espaço Hiperbólico Bidimensional. Para isso, o autor inicia fazendo uma associação entre a Geometria Esférica Bidimensional, que é melhor representada pela superfície de uma esfera, e a Geometria Hiperbólica Bidimensional, que é melhor representada pela superfície de uma **pseudoesfera**. A partir deste início, o autor explica o que é uma pseudoesfera.

Mostra a dificuldade de representar a pseudoesfera na Geometria Euclidiana e o artifício de “encolher” a pseudoesfera para caber numa região circular usada no Modelo de Disco de Poincaré. Conclui afirmando que este modelo é geometricamente equivalente à pseudoesfera original e mostra as peculiaridades desse modelo, principalmente, as medidas dos segmentos.

- **Parallel Lines (Retas Paralelas)**

Mostrando uma figura retirada do NonEuclid, no Modelo de Disco de Poincaré, com três retas hiperbólicas, verificamos que não é válido o seguinte teorema da Geometria Euclidiana: *“Se duas retas são paralelas a uma terceira, então cada duas dessas retas são paralelas entre si.”* A partir deste ponto, o autor ressalta a aparência que uma reta infinita possui no Modelo de Disco de Poincaré. Reforça, também, que os objetos tornam-se cada vez menores, visualmente, à medida que se aproximam da fronteira do círculo.

Faz uma lista de propriedades que as retas hiperbólicas possuem em comum às retas euclidianas, e termina mostrando exemplos de propriedades diferentes que podemos comprovar com contra-exemplos no NonEuclid.

- **My First Non-Euclidean Triangle (Meu Primeiro Triângulo Não-Euclidiano)**

É criada uma atividade simples de construção de um triângulo na qual o autor, passo a passo, ensina os comandos necessários. No final deste tópico o autor recomenda que o usuário tente reproduzir construções com régua e compasso de Geometria Euclidiana, sendo que algumas delas serão factíveis e outras não. Para essas últimas o autor pede que o usuário verifique o motivo da impossibilidade de construção.

- **What-to-do: Activities (O que fazer: Atividades)**

Este tópico possui dez atividades de construções com o NonEuclid, começa com as definições necessárias, alguns teoremas e atividades. As atividades foram divididas em ângulos, retas e ângulos, triângulos, triângulos congruentes, losango, retângulos e quadrados, paralelogramos, polígonos, círculos e ladrilhamentos do plano.

- **Axioms and Theorems (Axiomas e Teoremas)**

Neste tópico há um resumo histórico da Geometria Hiperbólica, iniciando com os cinco postulados de Euclides, as tentativas infrutíferas, por 2000 anos, de provar que o Postulado das Paralelas não era necessário e o descobrimento da Geometria Hiperbólica, pelos matemáticos, Gauss, Bolyai e Lobachevski, negando o Postulado das Paralelas.

Mostra que há duas formas de negar o Postulado das Paralelas: o Axioma das Paralelas da Geometria Esférica e o Axioma das Paralelas da Geometria Hiperbólica. Explica, também, o porquê dos axiomas da Geometria Esférica não serem consistentes com os primeiros axiomas da Geometria Euclidiana e, contrariando expectativas, a perfeita consistência dos quatro primeiros axiomas da Geometria Euclidiana com o Axioma das Paralelas da Geometria Hiperbólica.

Descreve que Euclides fez algumas afirmações em Os Elementos sem justificá-las e aponta uma falha na argumentação da prova de demonstração do caso LAL (Lado-Ângulo-Lado) de congruência de triângulos.

Termina este item afirmando que as demonstrações que não usam o Axioma das Paralelas servirão para ambas as geometrias. E os teoremas que requerem o Axioma das Paralelas na Geometria Euclidiana são falsos na Geometria Hiperbólica. O autor dá como exemplo a demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo, onde na Geometria Euclidiana dá sempre  $180^\circ$  e na Geometria Hiperbólica isso é falso.

- **Area (Área)**

Neste tópico são apresentadas as diferenças do cálculo de área entre as geometrias. Há a definição de defeito de um triângulo e defeito de um polígono, que são as ferramentas para cálculo de área na Geometria Hiperbólica. Também são citadas as propriedades necessárias para uma Função Área terminando o tópico com limitantes superiores para área.

- **X-Y Coordinate System (Sistema de Coordenadas X-Y)**

É definido um sistema de coordenadas no plano hiperbólico mostrando as analogias e diferenças com o sistema de coordenadas cartesianas da Geometria Euclidiana.

- **Why Study Hyperbolic Geometry? (Por que estudar Geometria Hiperbólica?)**

Este tópico é voltado para os professores onde o autor justifica sua necessidade e mostra o valor de se usar um software de Geometria Dinâmica.

- **References (Referências)**

Lista de referências e leituras complementares.

- **About NonEuclid (Sobre NonEuclid)**

Informações sobre autores, versão, tradução.

### 3.2.2 A Tela do NonEuclid

Ao executarmos o NonEuclid ele inicia sempre com o mesmo arquivo ou janela, este arquivo chamado Radii.euc é um arquivo de saudação do autor, onde ele dá um exemplo de uma circunferência com seus raios e suas medidas que permite o movimento de alguns pontos, e termina a explicação mostrando que o usuário poderá fazer alterações e gravá-la para posterior uso.

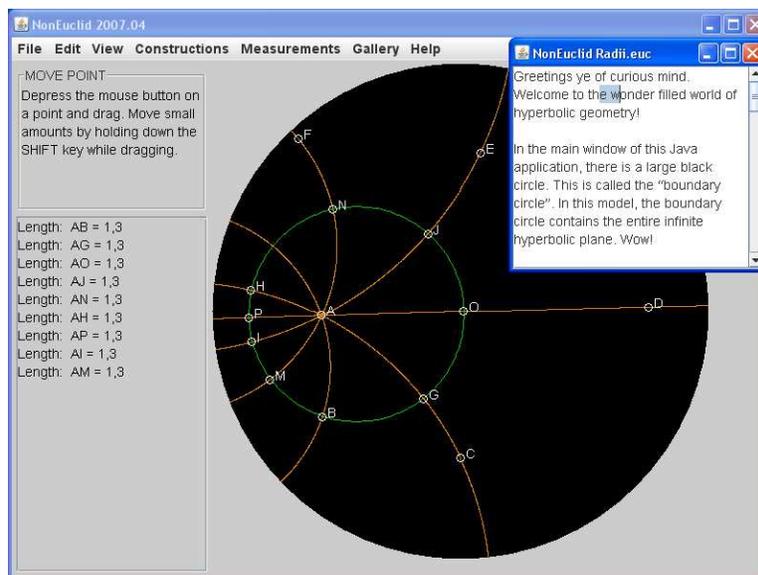


Figura 3.2: A janela principal do NonEuclid.

## O Modelo hiperbólico

Os modelos hiperbólicos ficam do lado direito da tela principal. No nosso trabalho mostraremos lado a lado um mesmo desenho nos dois modos possíveis: modelo de disco de Poincaré e semiplano superior de Poincaré.

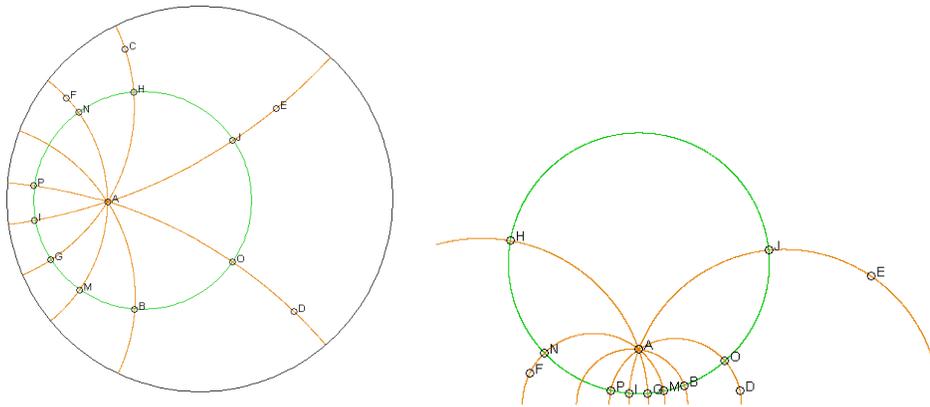


Figura 3.3: Os modelos hiperbólicos suportados pelo NonEuclid.

### A Caixa de Descrição do Comando Ativo

No nosso trabalho, observar essa caixa auxilia nossas construções. Ela mostra qual comando está ativo e dá uma pequena descrição do que faz o comando ativo.

No exemplo de saudação do NonEuclid veremos o MOVE POINT: Depress the mouse button on a point and drag. Move small amounts by holding down the SHIFT key while dragging. Cujá tradução é “Mover Ponto: Pressione o botão do mouse sobre um ponto e arraste. Movimento devagar mantendo pressionada a tecla SHIFT enquanto arrasta.”

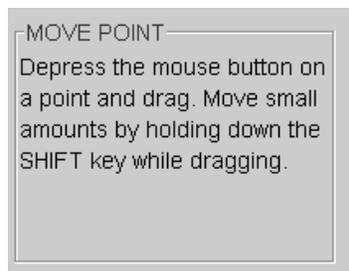


Figura 3.4: A Caixa de Descrição do Comando Ativo. No exemplo MOVE POINT.

### A Caixa de Informações das Medidas

Com o NonEuclid nós podemos verificar as coordenadas polares de um ponto, a medida de um segmento dado, o ângulo e as medidas de um triângulo. Na Figura 3.5 fizemos um exemplo de cada um destes itens.

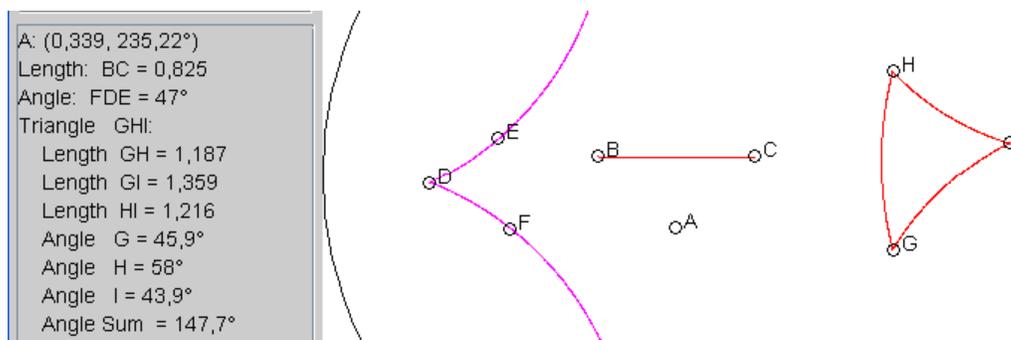


Figura 3.5: Caixa de Informação das Medidas.

## O Menu Principal

O menu principal está escrito em inglês. Veremos abaixo cada sub-menu e o que pode ser feito com cada opção.



Figura 3.6: O menu principal do NonEuclid.

### 3.2.3 Menu File (Arquivo)



Figura 3.7: Menu File.

- **File** ↔ **New** (**Arquivo** ↔ **Novo**)

Inicia um arquivo novo, limpa a tela do modelo hiperbólico. Temos que ter o cuidado ao usar esse item pois todas as modificações não salvas são perdidas.

- **File** ↔ **Open** (**Arquivo** ↔ **Abrir**)

Abre-se a caixa de arquivos gravados. Abrindo um arquivo previamente gravado, perde-se o que não foi salvo anteriormente.

- **File** ↔ **Save As** (**Arquivo** ↔ **Salvar Como**)

Salva o atual arquivo, o cuidado aqui é que se dermos o mesmo nome ele sobreescreve sem aviso.

- **File** ↔ **Print** (**Arquivo** ↔ **Imprimir**)

Imprime o plano hiperbólico atual, preferencialmente devemos selecionar em **View** ↔ **Background** ► a opção [White on White].

- **File** ↔ **Quit** (**Arquivo** ↔ **Fechar**)

Fecha o programa, o que não foi salvo previamente é perdido.

### 3.2.4 Menu Edit (Editar)

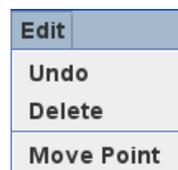


Figura 3.8: Menu Edit.

- **Edit** ↔ **Undo** (**Editar** ↔ **Desfazer**)

Desfaz ou refaz a última alteração.

- **Edit** ↔ **Delete** (**Editar** ↔ **Apagar**)

Apaga todos os objetos clicados.

- **Edit** ↔ **Move Point** (**Editar** ↔ **Mover Ponto**)

É a ferramenta mais importante para o nosso estudo. Podemos movimentar os objetos sem perder as propriedades com as quais eles foram criados. Se ao arrastarmos os objetos pressionarmos, simultaneamente, a tecla *shift* o movimento será mais lento.

### 3.2.5 Menu View (Visualizar)

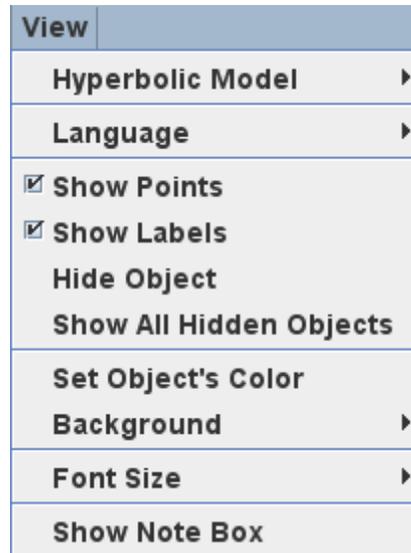


Figura 3.9: Menu View.

- **View ↔ Hyperbolic Model ▶ (Visualizar ↔ Modelo Hiperbólico ▶)**  
Podemos alterar entre o modelo de disco e o modelo de semiplano de Poincaré.
- **View ↔ Language ▶ (Visualizar ↔ Linguagem ▶)**  
Existem duas opções de linguagem: Inglês e italiano.
- **View ↔ Show Points (Visualizar ↔ Mostrar Pontos)**  
Exibe ou esconde os pontos. Não há alteração na figura. Ao movimentarmos o mouse o ponto aparece e podemos usar o programa normalmente, criando, deletando ou movimentando.
- **View ↔ Show Labels (Visualizar ↔ Mostrar Rótulos)**  
Exibe ou esconde os rótulos, análogo ao **View ↔ Show Points**, ao movimentarmos o mouse o rótulo aparece.
- **View ↔ Hide Object (Visualizar ↔ Ocultar Objeto)**  
Esconde o objeto clicado. Para desfazer esse comando temos de usar **View ↔ Show All Hidden Objects**.

- **View ↔ Show All Hidden Objects (Visualizar ↔ Mostrar Todos Objetos Ocultos)**

Mostra todos os objetos escondidos pelo comando **View ↔ Hide Object**.

- **View ↔ Set Object's Color (Visualizar ↔ Definir Cor do Objeto)**

Este comando permite modificar as cores dos objetos. Escolhemos uma cor deixando-a ativa e os objetos (reta, semirreta, segmento e círculo) clicados terão essa nova cor.

- **View ↔ Background ► (Visualizar ↔ Segundo Plano ►)**

Temos três opções para a cor de fundo do nosso modelo hiperbólico. Para imprimir recomenda-se a opção [White on White].

- **View ↔ Font Size ► (Visualizar ↔ Tamanho da Fonte ►)**

Podemos escolher entre dez opções de tamanho da fonte.

- **View ↔ Show Note Box (Visualizar ↔ Mostrar Caderno de Notas)**

Muito útil. Mostra o caderno de notas. Cada arquivo possui seu caderno de notas. Podemos escrever observações sobre cada arquivo salvo.

### 3.2.6 Menu Constructions (Construções)

Constructions
Plot Point
Plot Midpoint
Plot Intersection Point
Plot Point on Object
Draw Line Segment
Draw Ray
Draw Line
Draw Perpendicular
Draw Circle
Bisect Angle
Reflect
Draw Segment of Specific Length
Draw Ray at Specific Angle

Figura 3.10: Menu Constructions.

- **Constructions**  $\leftrightarrow$  **Plot Point (Construções**  $\leftrightarrow$  **Plotar Ponto)**

Constrói pontos. Seu rótulo segue a sequência:  $A, B, C, \dots, Z, A_1, B_1, \dots, Z_1, A_2, \dots$

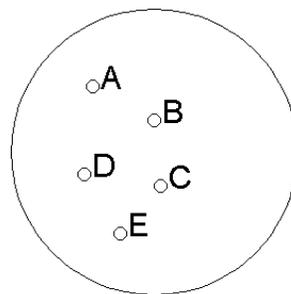


Figura 3.11: Os pontos  $A, B, C, D$  e  $E$ .

- **Constructions**  $\leftrightarrow$  **Plot Midpoint (Construções**  $\leftrightarrow$  **Plotar Ponto Médio)**

Constrói o ponto médio do segmento definido por dois pontos.

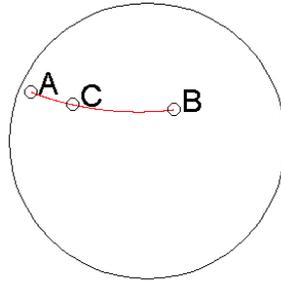


Figura 3.12: O ponto  $C$  é ponto médio de  $AB$ .

- **Constructions  $\leftrightarrow$  Plot Intersection Point (Construções  $\leftrightarrow$  Plotar Ponto de Interseção)**

Constrói os pontos de interseção de dois objetos (reta, semirreta, segmento e círculo).

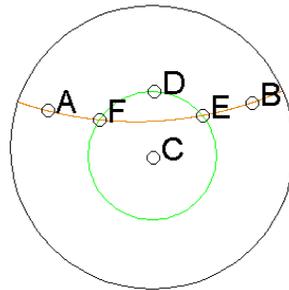


Figura 3.13: Os pontos  $F$  e  $E$  são pontos de interseção da reta com a circunferência.

- **Constructions  $\leftrightarrow$  Plot Point on Object (Construções  $\leftrightarrow$  Plotar Ponto Sobre Objeto)**

Constrói um ponto em um objeto (reta, semirreta, segmento e círculo), essa propriedade é mantida ao movimentarmos o objeto.

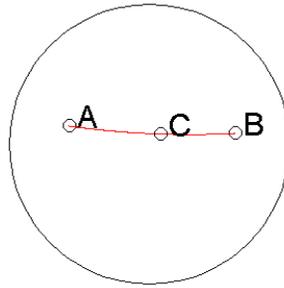


Figura 3.14: O ponto  $C$  pertence ao segmento  $AB$ .

- **Constructions  $\leftrightarrow$  Draw Line Segment (Construções  $\leftrightarrow$  Desenhar Segmento de Reta)**

Constrói um segmento definido por dois pontos.

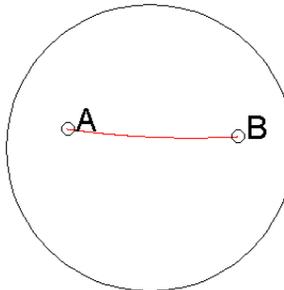


Figura 3.15: Segmento  $AB$ .

- **Constructions  $\leftrightarrow$  Draw Ray (Construções  $\leftrightarrow$  Desenhar Semirreta)**

Constrói uma semirreta definida por dois pontos.

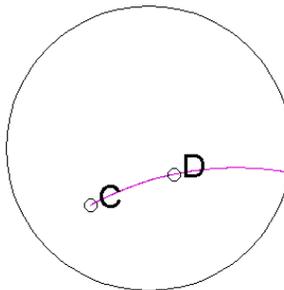


Figura 3.16: semirreta  $CD$ .

- **Constructions  $\leftrightarrow$  Draw Line (Construções  $\leftrightarrow$  Desenhar Reta)**

Constrói uma reta definida por dois pontos.

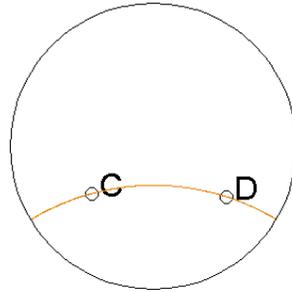


Figura 3.17: A reta  $CD$ .

- **Constructions  $\leftrightarrow$  Draw Perpendicular (Construções  $\leftrightarrow$  Desenhar Reta Perpendicular)**

Constrói uma reta perpendicular definida por um ponto e uma reta. Se o ponto pertence à reta, é construída uma reta, se o ponto não pertencer à reta, então é construído um segmento perpendicular à reta dada.

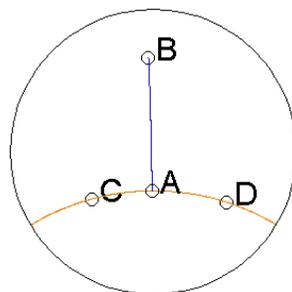


Figura 3.18: O segmento  $BA$  é perpendicular à reta  $CD$ .

- **Constructions  $\leftrightarrow$  Draw Circle (Construções  $\leftrightarrow$  Desenhar Círculo)**

Constrói um círculo dados seu centro e um ponto de sua circunferência.

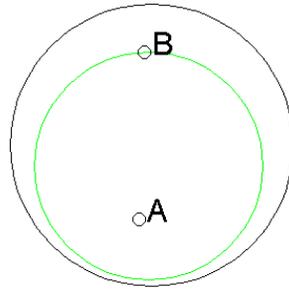


Figura 3.19: Círculo de centro  $A$  e raio de medida  $AB$ .

- **Constructions  $\leftrightarrow$  Bisect Angle (Construções  $\leftrightarrow$  Bissetriz do Ângulo)**  
 Constrói a bissetriz de um ângulo definido por três pontos.

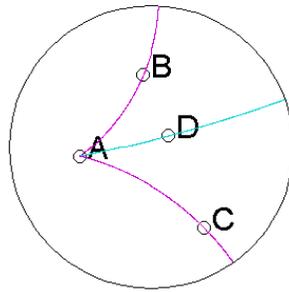


Figura 3.20: A bissetriz  $AD$  do ângulo  $B\hat{A}C$ .

- **Constructions  $\leftrightarrow$  Reflect (Construções  $\leftrightarrow$  Reflexão)**  
 Constrói a reflexão de um ponto com relação a uma reta.

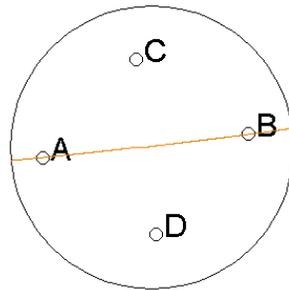


Figura 3.21: O ponto  $D$  é a reflexão do ponto  $C$  com relação à reta  $AB$ .

- **Constructions  $\leftrightarrow$  Draw Segment of Specific Length (Construções  $\leftrightarrow$  Desenhar um Segmento de Reta de Comprimento Dado)**  
Constrói um segmento de comprimento dado.

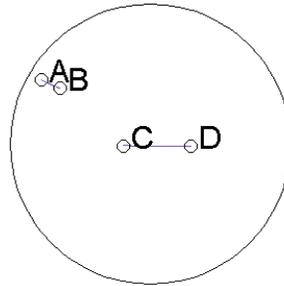


Figura 3.22: Os segmentos  $AB$  e  $CD$  possuem uma unidade de comprimento.

- **Constructions  $\leftrightarrow$  Draw Ray at Specific Angle (Construções  $\leftrightarrow$  Desenhar um Ângulo de Medida Dada)**  
Constrói um ângulo de medida dada.

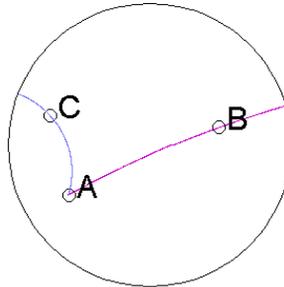


Figura 3.23: O ângulo  $B\hat{A}C$  mede  $45^\circ$ .

### 3.2.7 Menu Measurements (Mensurações)

Measurements
Measure Point (Polar Coordinates)
Measure Distance
Measure Angle
Measure Triangle

Figura 3.24: Menu Measurements.

- **Measurements**  $\leftrightarrow$  **Measure Point (Polar Coordinates)** (**Mensurações**  $\leftrightarrow$  **Mensura Ponto (Coordenadas Polares)**)

Dá as coordenadas polares de um ponto.

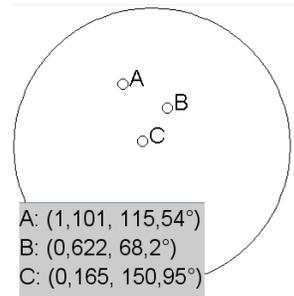


Figura 3.25: Coordenadas polares dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

- **Measurements**  $\leftrightarrow$  **Measure Distance** (**Mensurações**  $\leftrightarrow$  **Mede Distância**)

Mede a distância entre dois pontos dados.

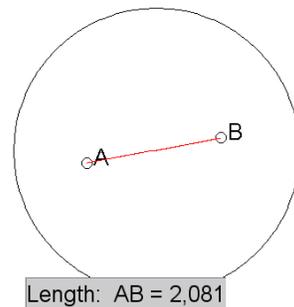


Figura 3.26: Medida da distância entre os pontos  $A$  e  $B$ .

- **Measurements**  $\leftrightarrow$  **Measure Angle** (**Mensurações**  $\leftrightarrow$  **Mede Ângulo**)

Mede o ângulo, dados três pontos que o definem.

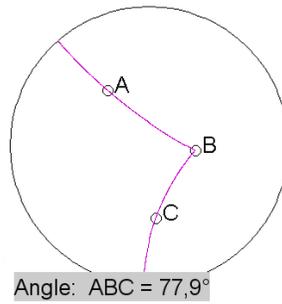


Figura 3.27: Medida do ângulo  $\hat{A}BC$ .

- **Measurements**  $\leftrightarrow$  **Measure Triangle** (**Mensurações**  $\leftrightarrow$  **Mensura Triângulo**)

Dá todas as medidas de um triângulo definido por três pontos.

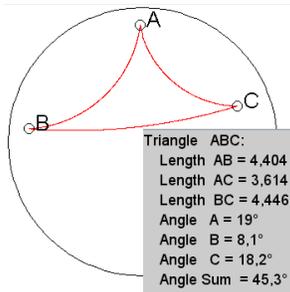


Figura 3.28: As medidas do triângulo  $ABC$ .

### 3.2.8 Menu Gallery



Figura 3.29: Menu Gallery.

- **Gallery**  $\leftrightarrow$  **Radii** (**Galeria**  $\leftrightarrow$  **Radii**)

Fecha o arquivo atual, sem salvá-lo, e abre o arquivo inicial de saudação do autor.

## 3.3 Atividade

### 3.3.1 Proposições equivalentes ao Quinto Postulado de Euclides e contra-exemplos utilizando o NonEuclid

Para exercitarmos este capítulo, o leitor é convidado a participar dos exercícios. Dada uma relação de equivalentes ao Quinto Postulado de Euclides listados abaixo mostre com contra-exemplos utilizando o NonEuclid, que estes equivalentes ao Quinto Postulado de Euclides não ocorrem na Geometria Hiperbólica.

Quinto Postulado de Euclides: *Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.*

Lista de equivalentes ao Quinto postulado:

- (01) O postulado de Playfair: Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada.
- (02) A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre a mesma.
- (03) Vale o Teorema de Pitágoras em um triângulo retângulo.
- (04) Vale o Teorema de Tales.
- (05) A razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro é constante.
- (06) Se três retas são paralelas duas a duas, então somente uma das três está entre as outras duas.
- (07) A área de um triângulo é igual ao produto de sua base por sua altura.
- (08) Por três pontos não colineares passa um único círculo.
- (09) A soma das medidas dos quatro ângulos internos de qualquer quadrilátero convexo é igual a  $360^\circ$ .

- (10) Duas retas paralelas sempre possuem uma perpendicular comum.
- (11) Três pontos que equidistam de uma reta em um mesmo semiplano são colineares.
- (12) Todo círculo admite um triângulo circunscrito.
- (13) As mediatrizes de um triângulo se intersectam.
- (14) As alturas de um triângulo se intersectam.
- (15) Sejam dadas três retas onde se  $r$  é paralela a  $s$  e  $s$  é paralela a  $t$ , então  $r$  é paralela a  $t$ .
- (16) Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então o quarto ângulo também é reto.
- (17) Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta a outra.
- (18) Retas paralelas são equidistantes.
- (19) Considere a Figura 3.30:

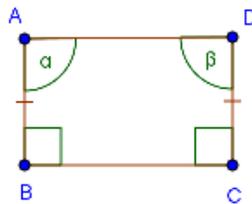


Figura 3.30: Apoio ao Exercício (19).

Se  $ABCD$  é um quadrilátero satisfazendo  $AB \equiv CD$  e  $m(\hat{A}BC) = m(\hat{B}CD) = 90^\circ$ , então  $\alpha = \beta = 90^\circ$ .

- (20) Um ângulo inscrito em um semicírculo é sempre reto.
- (21) Lados e ângulos opostos de um paralelogramo (*quadrilátero cujos lados opostos são paralelos*) são congruentes.

- (22) Um quadrilátero pode ser inscrito em um círculo se, e somente se, possui um par de ângulos opostos suplementares.
- (23) Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.

Faremos o contra exemplo para (01) utilizando o NonEuclid. A Figura 3.31 mostra esse contra-exemplo, exhibe um ponto  $P$  não pertencente à reta  $r$  e retas  $s, t, u, v$  todas passando por  $P$  e paralelas à  $r$ .

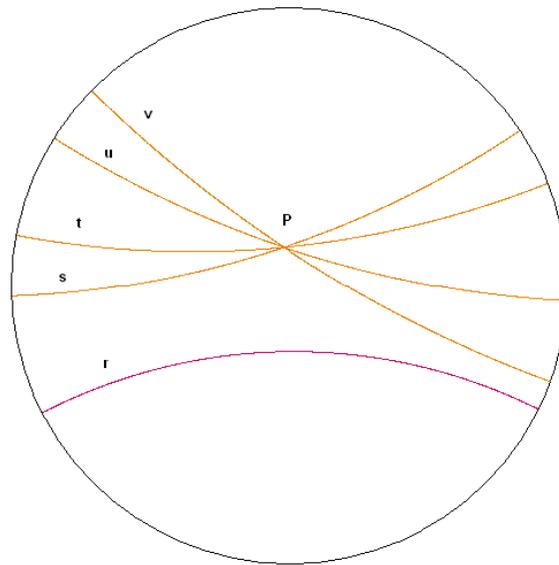


Figura 3.31: Contra-exemplo de (01) na Geometria Hiperbólica .



# O Modelo Euclidiano do Disco Unitário de Poincaré

---

---

Neste capítulo estudaremos o modelo do Disco de Poincaré. Dividiremos este capítulo em três seções.

Na primeira delas estudaremos a Geometria Euclidiana necessária, onde veremos os seguintes assuntos: potência de ponto, inverso de um ponto, circunferência ortogonal e proposições relativas à circunferência ortogonal necessárias para a compreensão do capítulo.

Na segunda seção estudaremos a consistência do modelo. Iremos provar que os pontos e as retas definidas para o modelo do Disco de Poincaré, construídos usando a Geometria Euclidiana, formam a base para um sistema lógico consistente, satisfazendo os axiomas da Geometria Hiperbólica.

Por último, faremos as construções geométricas usadas no NonEuclid com suas respectivas demonstrações passo a passo. As construções que o NonEuclid usa são: ponto médio, reta, segmento, semirreta, reta perpendicular (com ponto na reta e fora da reta), círculo, bissetriz e reflexão.

## 4.1 Pré-Requisito

### 4.1.1 Potência de ponto

**Proposição 4.1.** *Dado um ponto  $P$ , exterior ou interior a uma circunferência  $\delta$ ,  $P \notin \delta$ , se duas retas por  $P$  intersectam  $\delta$  em pares de pontos  $(A,B)$  e  $(C,D)$ , respectivamente, então:*

$$PA.PB = PC.PD$$

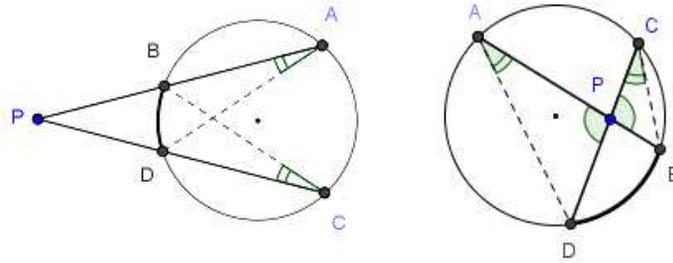


Figura 4.1: Potência de ponto.

**Demonstração:** Assumindo, sem demonstrar, a Proposição<sup>1</sup>, consideremos os triângulos PAD e PCB (Figura 4.1). O ângulo  $\hat{P}$  é comum ou oposto pelo vértice nesses triângulos. Sendo, também,  $\hat{A} = \hat{C}$ , visto que subtendem o mesmo arco, temos que tais triângulos são semelhantes. Logo,

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA.PB = PC.PD$$

■

**Definição 4.1.** *O produto  $PA.PB = PC.PD$  é chamado de **potência de  $P$**  em relação a circunferência  $\delta$ .*

Uma generalização do 1º caso: seja o ponto  $P$  fora do círculo  $\delta$  e  $T$  o ponto de tangência de uma das duas retas tangentes a  $\delta$  passando por  $P$ , então  $PT^2$  é igual à potência do ponto  $P$  em relação a  $\delta$ . Como os triângulos  $PAT$  e  $PTB$  são semelhantes,

<sup>1</sup> Na Geometria Euclidiana, ângulos inscritos que subtendem um mesmo arco em uma circunferência possuem mesma medida.

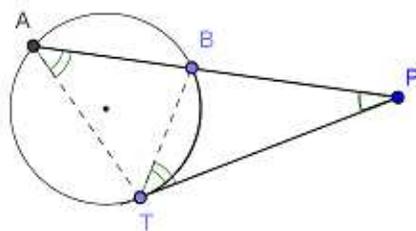


Figura 4.2: Generalização da potência de ponto.

$P$  é comum e  $\widehat{BAT} = \widehat{BTP}$  (medem a metade do arco menor  $BT$ ), pelo caso AA (ângulo-ângulo) de semelhança de triângulos<sup>2</sup>, temos:

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = (PT)^2$$

#### 4.1.2 Inverso de um ponto

**Definição 4.2.** Seja  $\lambda$  uma circunferência de raio  $r$  e centro  $O$ . Para cada ponto  $P$  do plano,  $P$  distinto de  $O$ , o **inverso de  $P$**  em relação à  $\lambda$  é o único ponto  $P'$  na semirreta  $OP$  tal que

$$OP \cdot OP' = r^2$$

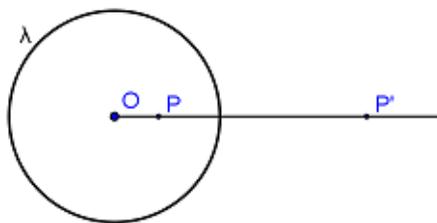


Figura 4.3: Inverso de um ponto.

As seguintes propriedades de inversão, são imediatas, a partir de sua definição:

- $P' = P$  se, e somente se,  $P \in \lambda$
- Se  $P \in \text{int } \lambda$ , então  $P' \in \text{ext } \lambda$

<sup>2</sup> Cf. [6]

- Se  $P \in \text{ext } \lambda$ , então  $P' \in \text{int } \lambda$
- $(P')' = P$

### 4.1.3 Construção do Inverso do Ponto

$P$  exterior à circunferência  $\lambda$

Dados a circunferência  $\lambda$  de centro  $O$  e raio  $r$  e o ponto  $P$  externo à circunferência  $\lambda$ , façamos:

- Tracemos a semirreta  $OP$ .
- Passando por  $O$  construíamos a perpendicular à semirreta  $OP$  determinando os pontos  $A$  e  $B$  de interseção dessa perpendicular com a circunferência  $\lambda$ .
- Tracemos a semirreta  $AP$  determinando o ponto  $C$  de interseção dessa semirreta com a circunferência  $\lambda$ .
- Tracemos a semirreta  $BC$  determinando o ponto  $P'$  de interseção da semirreta  $BC$  com a semirreta  $OP$ , inverso de  $P$ .

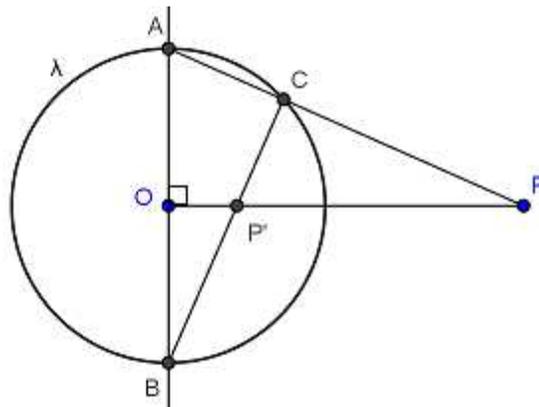


Figura 4.4: Inverso de  $P$  exterior à circunferência.

Observamos que os triângulos  $OPA$  e  $OBP'$  são semelhantes, seus ângulos internos são côngruos. Logo

$$\begin{aligned} \frac{OA}{OP'} &= \frac{OP}{OB} \Rightarrow OA \cdot OB = OP \cdot OP' \\ &\Rightarrow OP \cdot OP' = r^2 \end{aligned}$$

**$P$  interior à circunferência  $\lambda$** 

Dados a circunferência  $\lambda$  de centro  $O$  e raio  $r$  e o ponto  $P$ , distinto de  $O$ , interior à circunferência  $\lambda$ , façamos:

- i) Tracemos a semirreta  $OP$ .
- ii) Passando por  $P$  construíamos a perpendicular à semirreta  $OP$  e obtemos um ponto  $T$  de interseção dessa perpendicular com a circunferência  $\lambda$ .
- iii) Tracemos o raio  $OT$ .
- iv) Construíamos a tangente à  $\lambda$  por  $T$  e obtemos o ponto  $P'$  de interseção com a semirreta  $OP$ , inverso de  $P$ .

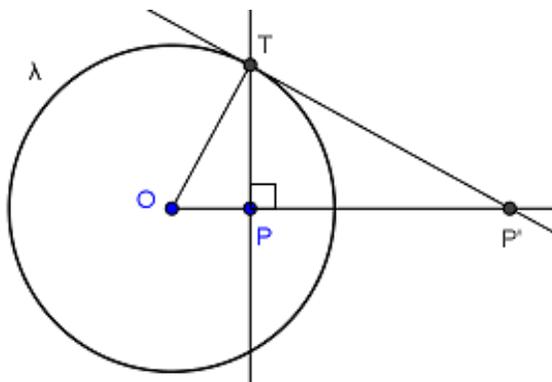


Figura 4.5: Inverso de  $P$  interior à circunferência.

Observamos que os triângulos  $OPT$  e  $OTP'$  são semelhantes, visto que  $\widehat{OTP'} = 90^\circ = \widehat{OPT}$ . Logo

$$\begin{aligned} \frac{OT}{OP'} &= \frac{OP}{OT} \Rightarrow (OT)^2 = OP \cdot OP' \\ &\Rightarrow OP \cdot OP' = r^2 \end{aligned}$$

**4.1.4 Circunferências ortogonais**

**Definição 4.3.** Duas circunferências,  $\lambda$  e  $\delta$ , são **ortogonais** quando seus raios são perpendiculares em cada ponto de interseção de  $\lambda$  com  $\delta$ .

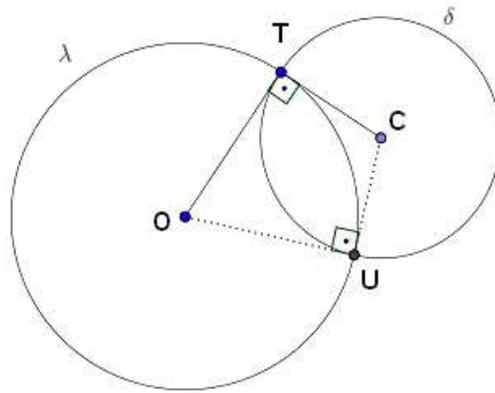


Figura 4.6: Circunferências ortogonais.

Na proposição abaixo veremos que por um ponto  $P$  interior a uma circunferência  $\delta$  de centro  $O$ ,  $P \neq O$ , passam infinitas circunferências ortogonais à  $\delta$ , e todas contém o ponto  $P'$  inverso de  $P$ .

**Proposição 4.2.** *Sejam  $P$  um ponto qualquer do plano e  $\lambda$  uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ ,  $P \notin \lambda$  e  $P \neq O$ . Uma circunferência  $\delta$  passando por  $P$  corta  $\lambda$  ortogonalmente se, e somente se,  $\delta$  passa por  $P'$ , ponto inverso de  $P$  em relação à  $\lambda$ . Prova da condição necessária.*

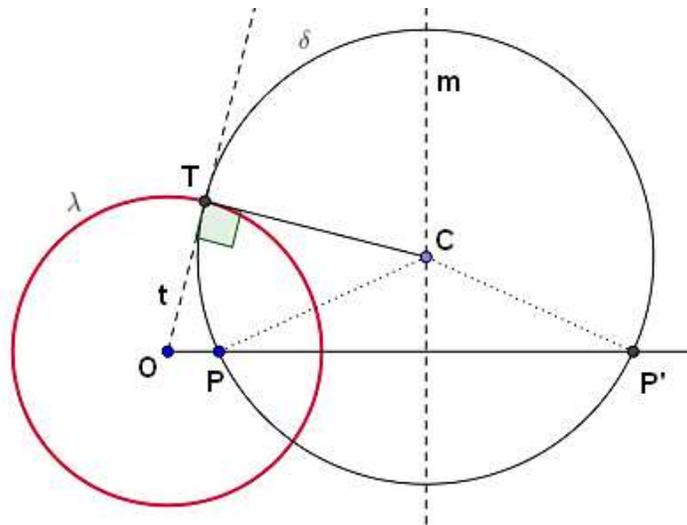


Figura 4.7: Apoio à Proposição 4.2.

Suponhamos que a circunferência  $\delta$  corte ortogonalmente a circunferência  $\lambda$  nos pontos  $T$  e  $U$ , então as tangentes à  $\delta$  em  $T$  e  $U$  se encontram em  $O$ , e  $O$  está fora de  $\delta$ . A semirreta  $OP$  corta a circunferência  $\delta$  no ponto  $Q$ , e temos

$$OP.OQ = OT^2 = r^2 \Rightarrow Q = P' \text{ inverso de } P \text{ em relação a } \lambda.$$

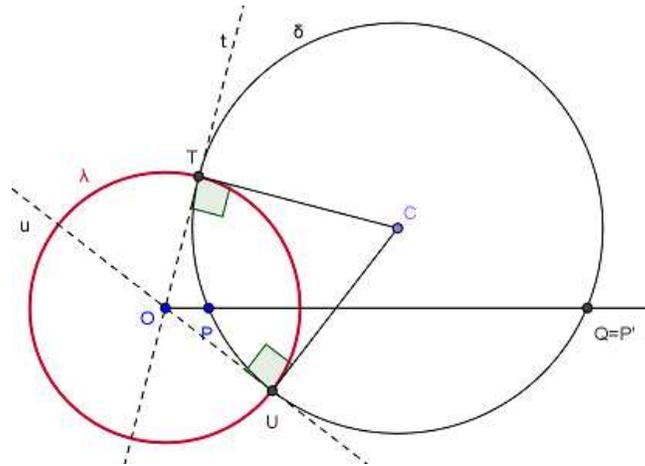


Figura 4.8: Apoio à Proposição 4.2.

Prova da condição suficiente.

Suponhamos  $P'$  inverso de  $P$  em relação à circunferência  $\lambda$ ,  $P$  e  $P'$  pertencem a uma mesma circunferência  $\delta$ , então o centro  $C$  desta circunferência pertence à mediatriz  $m$  de  $PP'$ . Como o ponto  $O$  é externo a  $\delta$ ,  $P \neq O$ , existe  $T \in \delta$  ponto de tangência da reta que passa por  $O$  à circunferência  $\delta$ .

$$OT^2 = OP.OP' = r^2 \Rightarrow T \in \lambda$$

Logo  $\lambda$  é ortogonal a  $\delta$ .

A proposição abaixo nos afirma que dados dois pontos  $P$  e  $Q$  internos à uma circunferência  $\lambda$ , de centro  $O$  e raio  $r$ ,  $P \neq O$  e  $Q \neq O$ , existe uma única circunferência ortogonal a  $\lambda$  que contém os pontos  $P$ ,  $P'$ ,  $Q$  e  $Q'$  satisfazendo a igualdade  $OP.OP' = OQ.OQ'$ .

**Proposição 4.3.** *Sejam  $P$  e  $Q$  pontos internos à uma circunferência  $\lambda$  de centro  $O$  e raio  $r$ ,  $P$  e  $Q$  distintos de  $O$ . Se  $P'$  e  $Q'$  são pontos inversos, respectivamente de  $P$  e  $Q$ , em relação à circunferência  $\lambda$ , então os pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $P'$  e  $Q'$  pertencem a uma única circunferência (chamaremos esta de  $\delta$ ).*

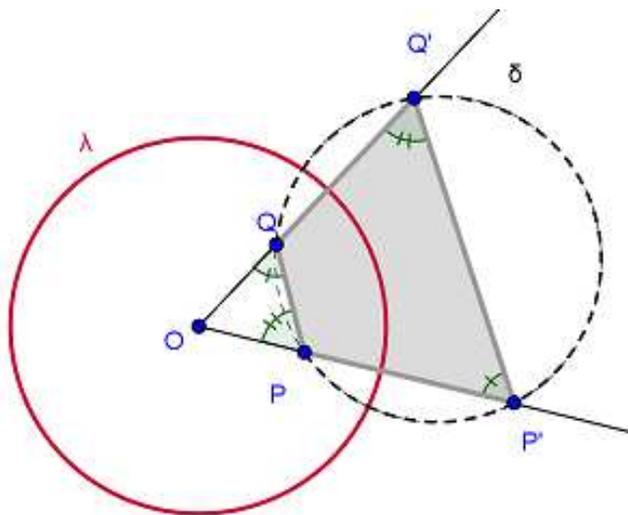


Figura 4.9: Apoio à Proposição 4.3.

**Demonstração:** Se  $P'$  e  $Q'$  são os pontos inversos de  $P$  e  $Q$ , respectivamente, em relação à circunferência  $\lambda$ , então

$$r^2 = OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ',$$

ou seja

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'},$$

logo, os triângulos  $OQP$  e  $OP'Q'$  são semelhantes, então o quadrilátero  $PQQ'P'$  tem ângulos opostos suplementares e isto implica que o quadrilátero é inscritível<sup>3</sup>. ■

## 4.2 Consistência

A consistência do modelo permite-nos ilustrar, sem contradições, teoremas e demonstrações da Geometria Hiperbólica. Naturalmente, essas construções geométricas

<sup>3</sup> Um quadrilátero é inscritível em um círculo se, e somente se, seus ângulos opostos são suplementares.

devem estar em conformidade com os axiomas de tal geometria. Há ainda que se observar: o uso do modelo nos permite uma percepção refinada sobre a geometria estudada.

### 4.2.1 O modelo do Disco de Poincaré

Consideremos no plano euclidiano um círculo  $\lambda$  de centro  $O$  e raio unitário, sendo  $\Delta$  o seu interior. A região  $\Delta$  será o modelo do plano hiperbólico, os pontos hiperbólicos serão os pontos de  $\Delta$ . Não são pontos deste plano os pontos da circunferência e os pontos fora da circunferência. A união da circunferência  $\lambda$  com o seu interior  $\Delta$  é denominada de Disco de Poincaré.

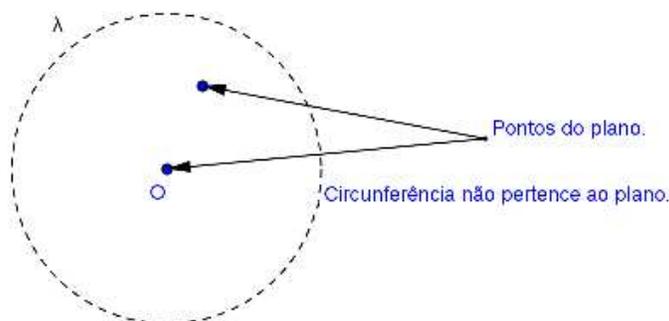


Figura 4.10: Os pontos do plano hiperbólico.

As retas hiperbólicas serão todos os arcos de círculos abertos ortogonais a  $\lambda$  e todas as cordas que passam pelo centro  $O$  (diâmetros abertos de  $\lambda$ ). Os pontos de interseção destas retas com a circunferência, como já visto, não pertencem ao plano hiperbólico, mas no nosso estudo são pontos importantes e são chamados de pontos ideais, esse assunto será visto mais adiante.

### 4.2.2 Consistência do Modelo de Poincaré

Definidos acima, plano, pontos e retas hiperbólicas, verificaremos agora que eles satisfazem os axiomas da Geometria Hiperbólica, demonstrando assim a consistência desse sistema.

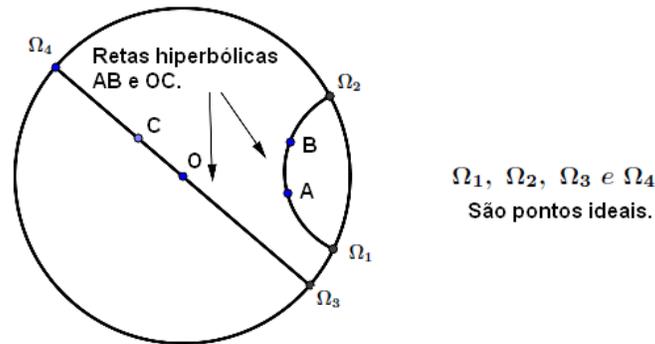


Figura 4.11: As retas do plano hiperbólico.

### Axiomas de Incidência:

Sejam dois pontos de  $\Delta$ . Se eles estão sob um diâmetro não há o que demonstrar pois o segmento de reta euclidiano é a reta hiperbólica. Se não estiverem nesse caso, a Proposição 4.3 garante a existência e unicidade do círculo ortogonal à fronteira de  $\Delta$  passando pelos dois pontos. Assim, por dois pontos de  $\Delta$  passa sempre uma única reta hiperbólica.

### Axiomas de Ordem:

Sendo as retas hiperbólicas, segmentos de reta ou arcos de círculos euclidianos, dados três pontos em um deles, é sempre possível dizer qual deles está entre os outros dois, e também é fácil ver que as retas hiperbólicas dividem o plano hiperbólico em duas regiões.

### Axiomas de Congruência (Ângulos):

**Definição 4.4.** *Se dois arcos se cruzam em um ponto  $P$ , a medida do ângulo hiperbólico é a medida do ângulo euclidiano entre as tangentes neste ponto.*

Com a definição de ângulos hiperbólicos dada acima, é análoga à Geometria Euclidiana e assim obedece aos axiomas relativos a tais medições. Em consequência, duas retas que se intersectam formam quatro ângulos, e os ângulos opostos são iguais. Com isto, podemos falar em retas perpendiculares e veremos mais abaixo a construção das retas perpendiculares neste plano.

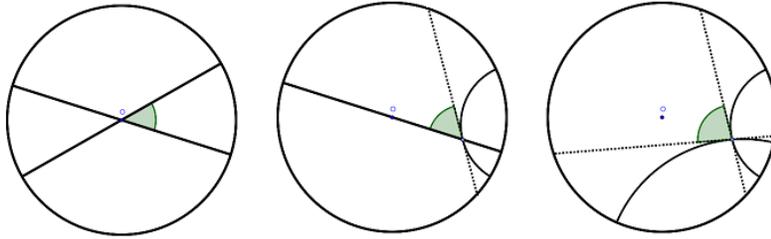


Figura 4.12: Ângulos entre duas semirretas hiperbólicas.

### Axiomas de Congruência (Segmentos):

**Definição 4.5.** *Sejam  $T$  e  $U$  pontos da região  $\Delta$ , e sejam  $R$  e  $S$  os extremos da reta hiperbólica pertencentes a circunferência  $\lambda$ . Definimos o comprimento hiperbólico  $d(T, U)$ , sendo  $UR$ ,  $TS$ ,  $TR$  e  $US$  comprimentos euclidianos, por:*

$$d(T, U) = \ln \left( \frac{UR \cdot TS}{TR \cdot US} \right)$$

Esta definição permite que o comprimento de retas neste modelo seja zero, se os pontos forem coincidentes, ou tenda ao infinito. Observe que fixado um ponto qualquer, o centro por exemplo, ao caminharmos em direção ao bordo da circunferência o comprimento fica cada vez maior, isto é, do ponto de vista hiperbólico, nunca alcançaremos o bordo da circunferência.

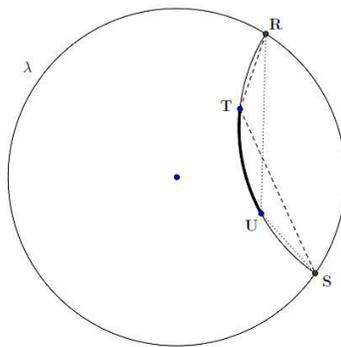


Figura 4.13: Comprimento hiperbólico do segmento  $TU$ .

Com esta definição, dizemos que dois segmentos hiperbólicos  $TU$  e  $PQ$  são congruentes se  $d(T, U) = d(P, Q)$ . Assim, vários axiomas de congruência de segmentos são verificados.

A interpretação de congruência de segmentos no modelo de Poincaré é mais complexa no sentido que sua forma de medir, como já vimos, é diferente da maneira usual euclidiana. A demonstração completa desses axiomas pode ser vista nas referências [7] e [16].

### Axiomas das Paralelas:

Dada uma reta hiperbólica  $m$  e um ponto  $P$  fora de  $m$ , é fácil ver que nesse modelo podemos construir pelo menos duas retas distintas passando pelo ponto  $P$  e paralela a reta  $m$ .

Assim verificamos que o Disco de Poincaré como definido acima é um modelo para o conjunto de axiomas da Geometria Hiperbólica fazendo com que a consistência da Geometria Euclidiana garanta a consistência da outra geometria.

## 4.3 Construções

Nesta seção fazemos as construções geométricas (euclidianas) das construções hiperbólicas que são usadas no NonEuclid. Utilizamos o software Geogebra, que possui toda sua estrutura em português e não haverá dúvida caso o leitor queira acompanhar as construções. O nosso modelo de Poincaré será o disco  $\lambda$  de centro  $O$  e raio unitário.

### 4.3.1 Reta, segmento de reta e semirreta

Dados os pontos  $P$  e  $Q$  do plano de Poincaré, se  $P = O$  ou  $Q = O$  não há o que demonstrar pois a reta hiperbólica é um diâmetro. Se  $P \neq O$  e  $Q \neq O$ , para construir a reta hiperbólica  $PQ$ , temos que:

- i) Marcar  $P'$  inverso de  $P$  com relação à  $\lambda$ .
- ii) Construir a circunferência  $\delta$  passando pelos pontos  $P$ ,  $P'$  e  $Q$ .
- iii) O arco de circunferência contido em  $\delta$  que intersecta  $\lambda$  é a reta hiperbólica  $PQ$ .

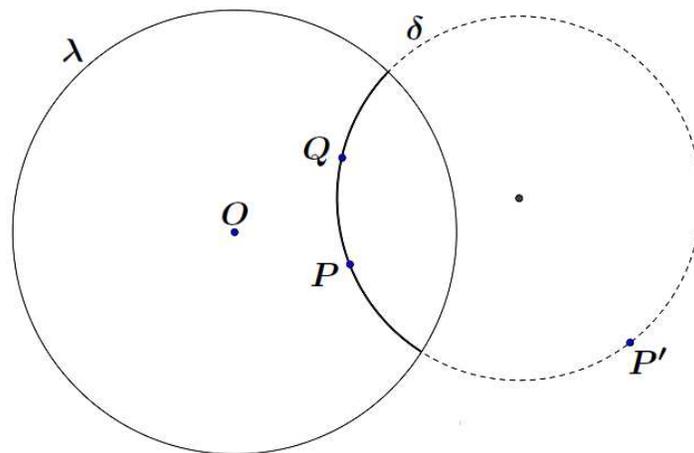


Figura 4.14: Construção de reta, semirreta ou segmento.

### 4.3.2 Reta perpendicular (com ponto na reta)

Dados a reta hiperbólica  $QR$  e um ponto  $P$  pertencente a esta reta hiperbólica, construir a reta perpendicular a  $QR$  passando por  $P$ . Temos que:

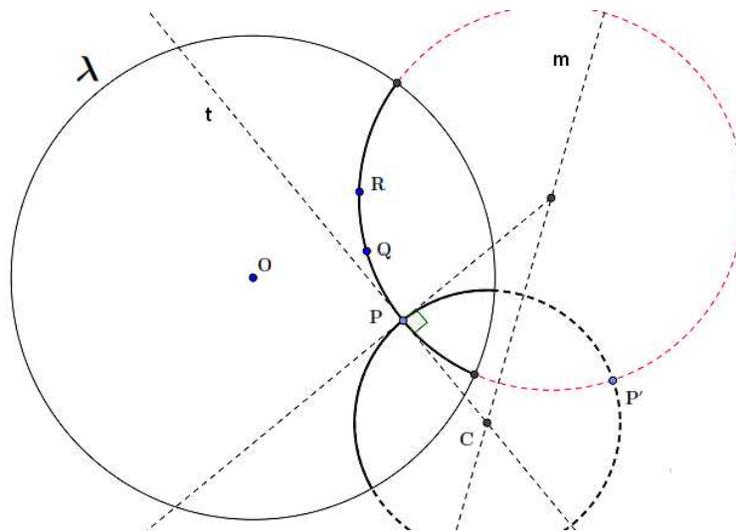


Figura 4.15: Construção de reta perpendicular com ponto na reta.

- i) Marcar  $P'$  inverso de  $P$  com relação à  $\lambda$ .
- ii) Construir a reta mediatriz ( $m$ ) de  $PP'$ , nesta reta estão todos os possíveis centros das infinitas circunferências ortogonais à  $\lambda$  que passam pelo ponto  $P$ .

- iii) Construir a reta tangente ( $t$ ) à circunferência  $PQR$  por  $P$ , esta reta forma com o raio da circunferência  $PQR$  um ângulo de  $90^\circ$ .
- iv) Marcar o ponto  $C$  interseção da mediatriz  $m$  com a reta  $t$ , que é o centro da circunferência, cuja intersecção com  $\lambda$  é a reta procurada.

### 4.3.3 Reta perpendicular (com ponto fora da reta)

Dados a reta hiperbólica  $QR$  e um ponto  $P$  não pertencente a esta reta hiperbólica, para construir a reta perpendicular a  $QR$  passando por  $P$ , temos que:

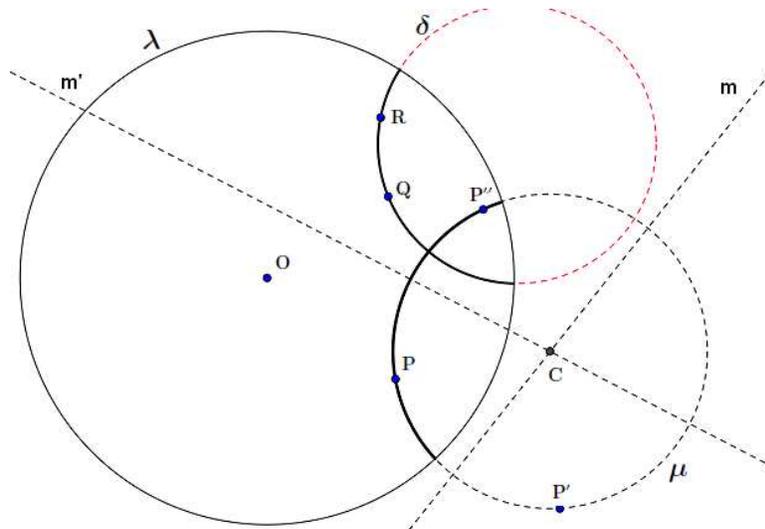


Figura 4.16: Construção de reta perpendicular por um ponto fora da reta.

- i) Marcar  $P'$  inverso de  $P$  com relação à  $\lambda$ .
- ii) Construir a reta mediatriz ( $m$ ) de  $PP'$ . Nesta reta estão todos os possíveis centros das infinitas circunferências ortogonais à  $\lambda$  que passam pelo ponto  $P$ .
- iii) Queremos uma que seja ortogonal a  $\delta$ , circunferência que contém a reta hiperbólica  $QR$ . Marcamos  $P''$ , inverso de  $P$  em relação à  $\delta$ .
- iv) Construir a reta mediatriz ( $m'$ ) de  $PP''$ , nesta reta estão todos os possíveis centros das infinitas circunferências ortogonais à  $\delta$  que passam pelo ponto  $P$ .

- v) Marcar o ponto  $C$  interseção da mediatriz  $m$  com a reta  $m'$ , que é o centro da circunferência  $\mu$ , cuja interseção com  $\lambda$  é a reta procurada.

A justificativa dessa construção: como as circunferências  $\delta$  e  $\mu$  são ortogonais, suas tangentes nos pontos de intersecção formam ângulo reto.

#### 4.3.4 Bissetriz

Dadas duas retas hiperbólicas concorrentes no ponto  $P$ ,  $PQ$  e  $PR$ , para traçar uma reta bissetriz de um dos pares de ângulos opostos pelo vértice formados pelas retas  $PQ$  e  $PR$ , temos que:

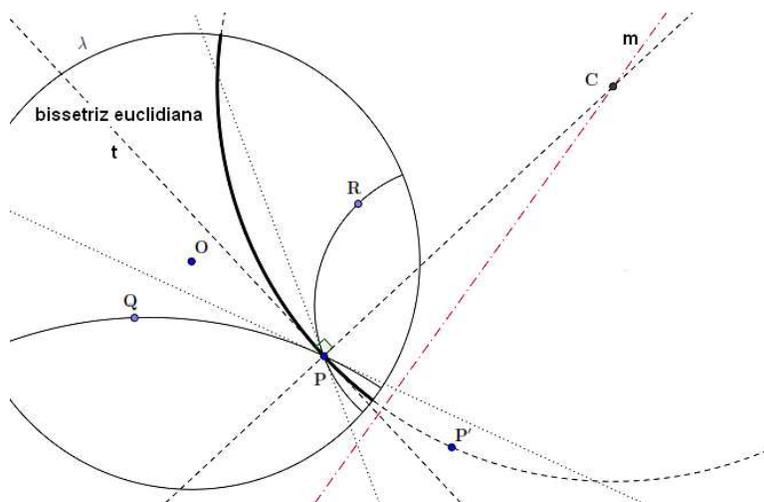


Figura 4.17: Construção de reta bissetriz.

- i) Construir as retas tangentes às circunferências que possuem as retas hiperbólicas  $PQ$  e  $PR$  por  $P$ .
- ii) Construir a bissetriz euclidiana  $t$  das retas tangentes construídas em (i).
- iii) Marcar  $P'$  inverso de  $P$  com relação à  $\lambda$ .
- iv) Construir a reta mediatriz ( $m$ ) de  $PP'$ , nesta reta estão todos os possíveis centros das infinitas circunferências ortogonais à  $\lambda$  que passam pelo ponto  $P$ .
- v) Construir a reta perpendicular à reta  $t$  em  $P$ , marcar a interseção  $C$  dessa perpendicular com  $m$ , este ponto é o centro da circunferência procurada.

- vi) Construir a circunferência de centro em  $C$ , raio  $CP$ , a interseção dessa circunferência com  $\lambda$  é reta hiperbólica mediatriz das retas  $PQ$  e  $PR$ .

### 4.3.5 Ponto médio

Dados dois pontos  $T$  e  $U$  de uma reta hiperbólica, para encontrar seu ponto médio, temos que:

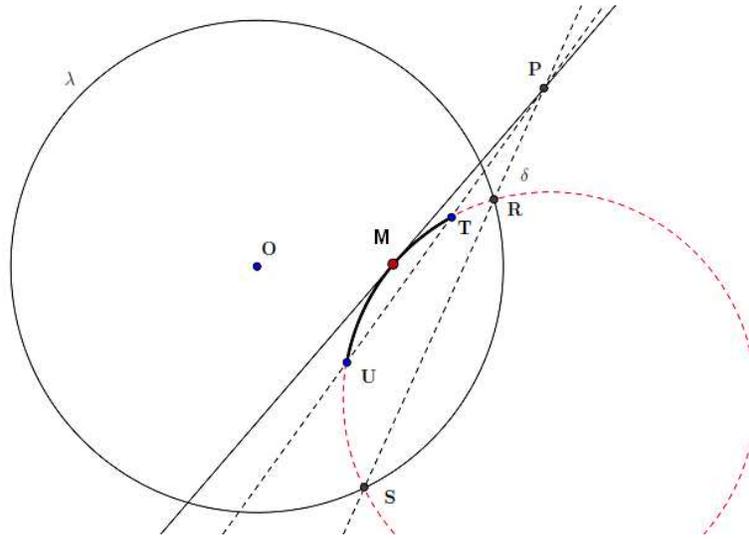


Figura 4.18: Construção do ponto médio.

- i) Marcar as interseções com  $\lambda$  da circunferência ortogonal a  $\lambda$  que contém  $T$  e  $U$ . Sejam  $R$  e  $S$  esses pontos de interseções.
- ii) Traçar as retas  $TU$  e  $RS$  que intersectam no ponto  $P$ .
- iii) Traçar a tangente à  $\delta$  (circunferência que contém o segmento hiperbólico  $TU$ ) por  $P$ , e marcar o ponto  $M$ . Aqui fazemos uma observação: quando  $TU$  e  $RS$  forem paralelas, o ponto  $P$  não irá existir, nesse caso para encontrarmos  $M$  precisamos traçar a mediatriz de  $TU$ .
- iv)  $M$  é o ponto médio hiperbólico do segmento hiperbólico  $TU$ .

Deixaremos como exercício para o leitor justificar que  $M$  é ponto médio de  $TU$ . Observe que as distâncias  $d(M,T)=d(M,U)$ , se, e somente se,

$$d(M, T) = \ln \left( \frac{MR.TS}{TR.MS} \right) = d(M, U) = \ln \left( \frac{UR.MS}{MR.US} \right)$$

ou pelas propriedades do logaritmo

$$\frac{MR.TS}{TR.MS} = \frac{UR.MS}{MR.US}.$$

Para a demonstração utilize as semelhanças dos triângulos  $PTR \sim PSU$ ,  $PTS \sim PRU$  e  $PMR \sim PSM$  que seguem da potência do ponto  $P$  em relação à  $\delta$ :

$$r^2 = PM^2 = PT.PU = PR.PS.$$

Para demonstrar as últimas duas construções do NonEuclid, **necessitamos de resultados de transformações lineares com números complexos** que podem ser vistas na referência [7]. Veremos abaixo, duas definições necessárias e o passo a passo das construções euclidianas.

**Definição 4.6.** *Uma **circunferência hiperbólica** é o lugar geométrico dos pontos cuja distância hiperbólica a um ponto fixo chamado centro é constante.*

**Definição 4.7. Reflexão** *é uma transformação geométrica que envolve um ponto a ser refletido e uma reta, transformando o ponto num outro simétrico com relação à reta fornecida.*

### 4.3.6 Círculo

Para construir a circunferência hiperbólica de  $\lambda$  dados dois pontos: o centro da circunferência hiperbólica  $C_h$  e um ponto  $T$  qualquer por onde a circunferência hiperbólica irá passar, temos que:

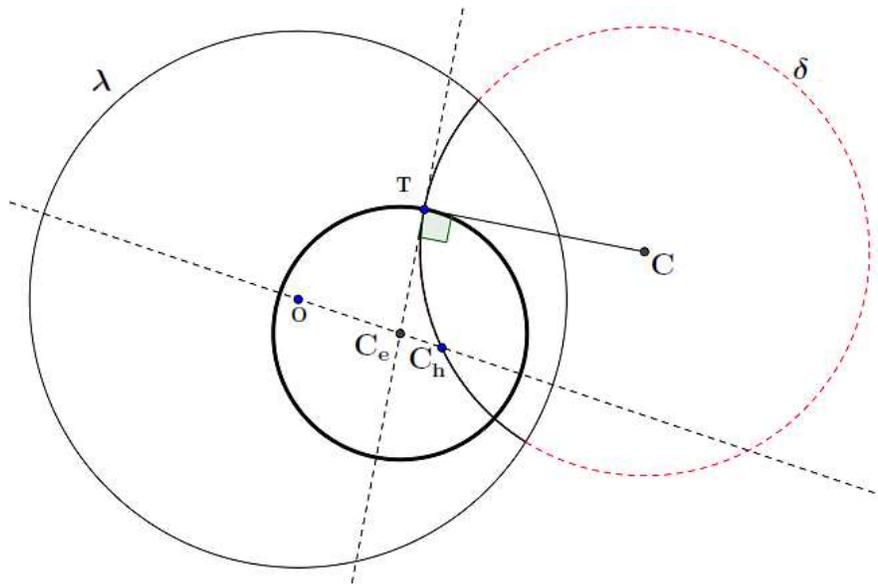


Figura 4.19: Construção da circunferência Hiperbólica.

- i) Construir a reta hiperbólica  $C_h T$ ;
- ii) Marcar o centro  $C$  da circunferência  $\delta$  que possui a reta hiperbólica  $C_h T$ ;
- iii) Traçar a semirreta  $TC$ ;
- iv) Traçar a reta que liga o centro hiperbólico  $C_h$  ao centro do Disco de Poincaré  $O$ . Chamaremos essa reta de  $C_h O$ ;
- v) Construir a perpendicular à reta  $TC$  por  $T$  que intersecta a reta  $C_h O$  no ponto  $C_e$  centro euclidiano da circunferência hiperbólica. Observe que essa circunferência será ortogonal à  $\delta$

### 4.3.7 Reflexão

Dados um segmento hiperbólico  $PQ$  e uma reta hiperbólica  $r$  qualquer, para traçar o segmento  $P_r Q_r$ , reflexão de  $PQ$  com relação à reta hiperbólica  $r$ , temos que:

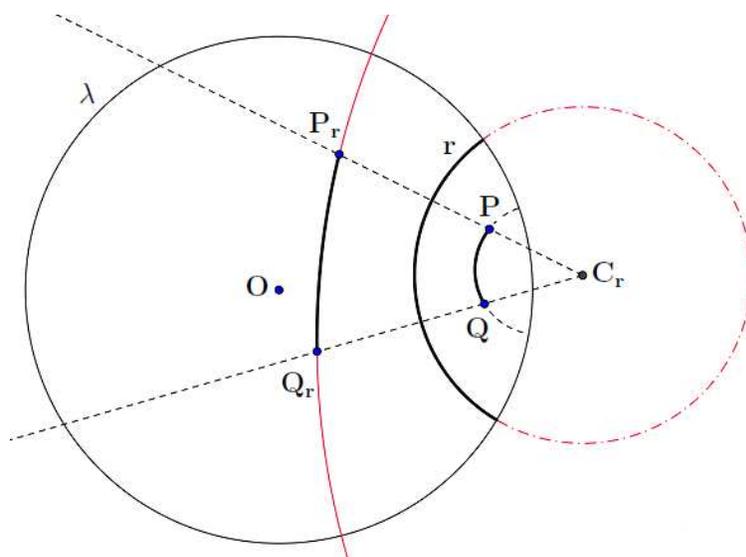


Figura 4.20: Construção do reflexo de um segmento em relação à uma reta hiperbólica dada.

- i) Marcar os pontos  $P_r$  inverso de  $P$  e  $Q_r$  inverso de  $Q$ , ambos, com relação à circunferência que contém a reta hiperbólica  $r$ .
- ii) Construir a reta hiperbólica  $P_rQ_r$ . O segmento  $P_rQ_r$  é simétrico ao segmento  $PQ$ .



---

# Geometria Hiperbólica

---

A Geometria Hiperbólica é desenvolvida pelos axiomas e proposições já vistos no capítulo da Geometria Absoluta, acrescentada ao postulado característico da Geometria Hiperbólica. O objetivo deste capítulo é estudarmos os principais teoremas da Geometria Hiperbólica e algumas comparações com a Geometria Euclidiana. Nem todos os teoremas serão demonstrados, mas suas demonstrações podem ser consultadas no livro [7].

## 5.1 O Axioma Característico da Geometria Hiperbólica

Os axiomas e proposições desenvolvidos no capítulo 2, que chamamos de Geometria Absoluta, são axiomas e proposições da Geometria Hiperbólica e da Geometria Euclidiana que não dependem do Quinto Postulado.

A partir de agora, com a distinção do Postulado das Paralelas, veremos o desenvolvimento de proposições válidas na Geometria Hiperbólica e aproveitaremos para fazer algumas comparações com a Geometria Euclidiana. Chamaremos o Postulado das Paralelas da Geometria Hiperbólica de Postulado de Lobachevsky.

**Axioma V ou Postulado de Lobachevsky:** *Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada.*

<b>Constructions <math>\leftrightarrow</math> Draw Line</b>	
	Reta $AB$ .
	Reta $CD$ .
	Reta $CE$ .

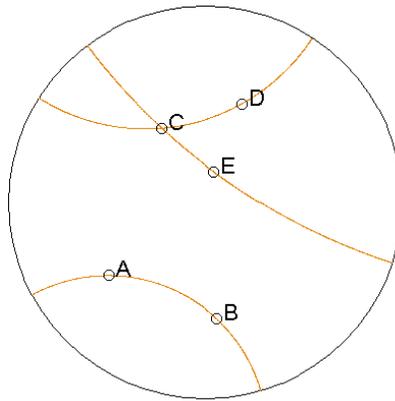


Figura 5.1: Axioma V.

## 5.2 Retas Paralelas e Hiperparalelas

Observamos que se existem duas retas com a propriedade de não encontrar a reta dada então, existem infinitas retas com esta propriedade.

<b>Constructions <math>\leftrightarrow</math> Draw Line</b>	
	Reta $AB$ .
	Reta $CD$ .
	Reta $CE$ .
	Reta $CF$ .
<b>Edit <math>\leftrightarrow</math> Move Point</b>	
Mova o ponto $F$ representando as infinitas retas.	

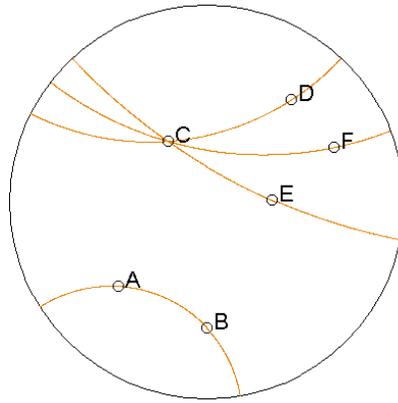


Figura 5.2: Infinitas paralelas a uma reta dada.

**Proposição 5.1.** *Sejam  $AB$  uma reta e  $C$  um ponto não pertencente a  $AB$ : Então, existem infinitas retas que passam por  $C$  e não intersectam  $AB$ .*

**Demonstração:** Sabemos do Postulado de Lobachevsky que existem pelo menos duas retas que passam pelo ponto  $C$ , que são paralelas a reta  $AB$ , sejam  $CD$  e  $CE$  estas retas (Figura 5.3). Pelo Axioma  $III_5$ , existe um número infinito de semirretas e portanto, de retas passando pelo ponto  $C$  interiores do  $\angle DC\hat{E}$ . Seja  $CF$  qualquer uma dessas semirretas.

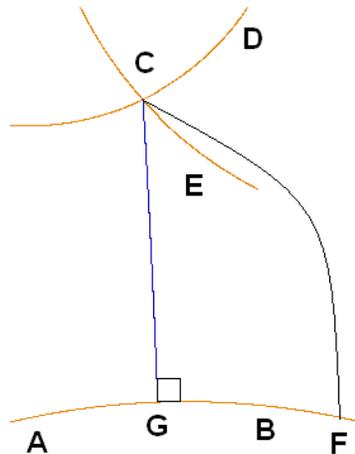


Figura 5.3: Apoio para a demonstração de infinitas retas paralelas.

Suponhamos por absurdo que a reta que contém a semirreta  $CF$  intercepte a reta  $AB$ . Seja  $CG$  perpendicular a partir do ponto  $C$  à reta  $AB$ , pelo axioma de Pasch, sabemos

que a reta  $CE$  deve secionar a reta  $AB$ , que é uma contradição. Portanto há um número infinito de retas paralelas à reta dada. ■

**Proposição 5.2.** *Dados uma reta  $AB$  e um ponto  $C$  fora desta reta, existe exatamente duas retas  $CL$  e  $CM$  que passam pelo ponto  $C$  e que separam o conjunto das retas que intersectam  $AB$  do conjunto das que não intersectam  $AB$ .*

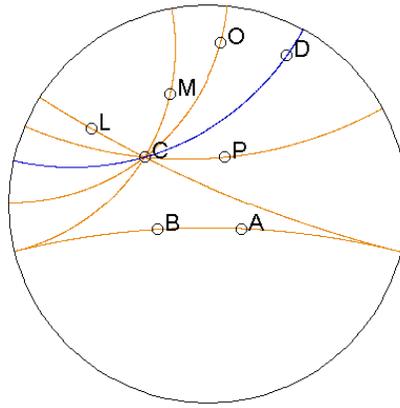


Figura 5.4: Apoio à Proposição 5.2.

**Proposição 5.3.** *As retas paralelas a  $AB$  passando por  $P$  formam ângulos iguais com a perpendicular baixada de  $P$  à reta  $AB$ . Além disto, o ângulo mencionado é agudo.*

**Definição 5.1.** *As duas retas que decorrem da Proposição 5.2 são chamadas **retas paralelas**.*

**Definição 5.2.** *As retas que não são paralelas e não se cortam são chamadas **retas hiperparalelas**.*

**Proposição 5.4.** *Duas retas hiperparalelas possuem uma, e somente uma, reta perpendicular em comum.*

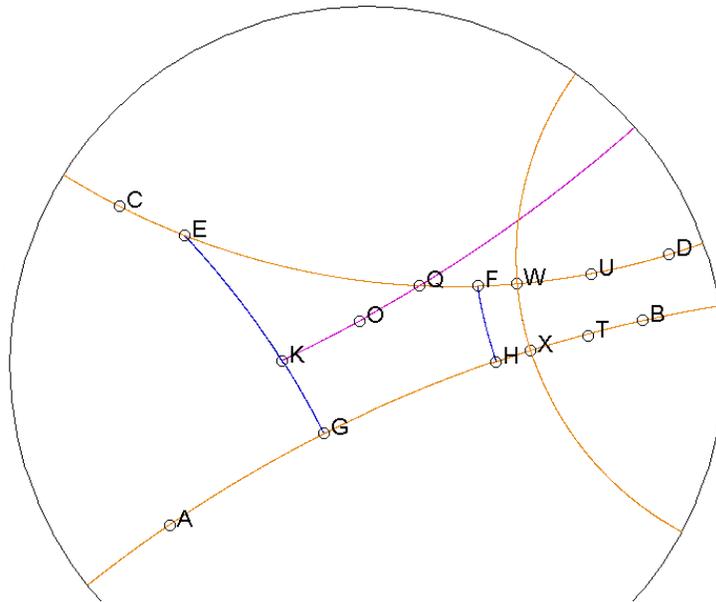


Figura 5.5: Apoio à Proposição 5.4. As retas  $AB$  e  $CD$  são hiperparalelas.

Acompanhe passo a passo a construção da reta perpendicular comum às duas retas hiperparalelas. Para transportar segmentos e ângulos no NonEuclid (Apêndice A e Apêndice B).

**Constructions  $\leftrightarrow$  Draw Line**

Reta  $AB$  e reta  $CD$  ( $AB$  e  $CD$ , hiperparalelas).

**Constructions  $\leftrightarrow$  Plot Point on Object**

Pontos  $E$  e  $F$  pertencentes a reta  $CD$ .



**Constructions  $\leftrightarrow$  Draw Perpendicular**

Segmentos  $EG$  e  $FH$  perpendiculares à reta  $AB$ ;

sendo a medida de  $EG$  maior do que  $FH$ .

Construa no segmento  $EG$  o ponto  $K$  tal que  $GK = HF$

(transporte de segmento).

Construa o ângulo  $G\hat{K}O$  congruente ao ângulo  $H\hat{F}D$

(transporte de ângulo).

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Draw Line**

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Draw Ray**

semirreta  $KO$ .

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Plot Intersection Point**

Ponto  $Q$  interseção da semirreta  $KO$  com a reta  $CD$ .



Construa na reta  $CD$  o ponto  $U$  tal que  $FU = QK$   
(transporte de segmento).

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Plot Midpoint**

Ponto  $W$ , ponto médio do segmento  $QU$ .

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Draw Perpendicular**

Segmento  $WX$  perpendicular a reta  $AB$ .

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Draw Line**

Reta  $WX$  é a reta procurada.

- (Obs: i) Duas retas concorrentes não possuem uma reta perpendicular em comum. Caso contrário, teríamos um triângulo ordinário (esse assunto se inicia na próxima seção) com dois ângulos internos retos ou um ângulo raso com medida diferente de  $\pi$  radianos.
- (Obs: ii) Duas retas paralelas não possuem uma reta perpendicular em comum. Caso contrário, teríamos um triângulo generalizado (esse assunto se inicia na próxima seção) com dois ângulos internos retos.

### 5.3 Triângulos Hiperbólicos Generalizados

**Definição 5.3.** *Seja  $r$  uma reta hiperbólica. Vamos acrescentar dois pontos especiais a  $r$ . Um que, em termos de ordenação, vem antes de todos e outro que, em termos de ordenação, vem depois de todos. Esses pontos especiais são chamados de **pontos ideais**.*

Fazendo uma analogia com o estudo do conjunto dos números reais seria o mesmo procedimento para a inclusão dos “pontos”  $+\infty$  e  $-\infty$ . No Modelo do Disco de Poin-

caré, esses pontos situam-se no bordo do disco e são os “extremos” da reta hiperbólica. A notação usada para pontos ideais é  $\Omega_{\text{índice}}$ .

**Definição 5.4.** Chamamos os pontos do plano hiperbólico de **pontos ordinários**. Observe que assim como  $+\infty$  e  $-\infty$  não são pontos da reta real, os pontos ideais não são pontos do plano hiperbólico.

A ideia de acrescentar os pontos ideais, de tal modo que retas paralelas tenham um ponto ideal comum facilita muitas noções e enunciados, como a definição a seguir.

**Definição 5.5.** Chamamos de **triângulos generalizados** aos triângulos que possuem pelo menos um vértice ideal.

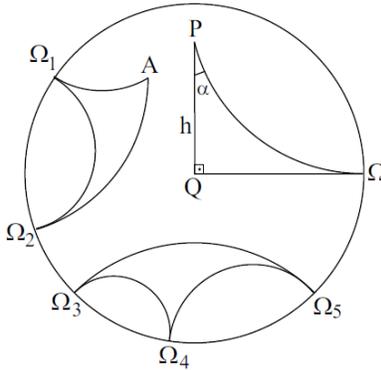


Figura 5.6: Os triângulos  $PQ\Omega$ ,  $A\Omega_1\Omega_2$  e  $\Omega_3\Omega_4\Omega_5$ , são triângulos generalizados.

**Observação:** Os ângulos dos vértices ideais são definidos como **nulo**.

### 5.3.1 Propriedades dos Triângulos Generalizados

**Proposição 5.5.** Se uma reta  $r$  entra em um triângulo generalizado  $AB\Omega$  passando por um de seus vértices, então  $r$  intersecta o lado do triângulo generalizado oposto a esse vértice.

**Demonstração:** As retas  $A\Omega$  e  $B\Omega$  são paralelas. Logo, se a reta  $r$  penetra por  $A$  ou por  $B$  irá intersectar o lado oposto. Suponhamos, agora, que a reta venha do ponto  $\Omega$  e passe em algum ponto  $P$  interior ao triângulo. Pelo paralelismo a semirreta  $AP$  intersecta  $B\Omega$  em um ponto  $Q$ . Pelo axioma de Pasch a reta que vem de  $\Omega$  e passa por

$P$ , deve intersectar um dos dois lados do triângulo  $AB\Omega$ , não pode intersectar  $BQ$  pois do contrário coincidiria com o lado  $B\Omega$ . Portanto intersecta  $AB$ . ■

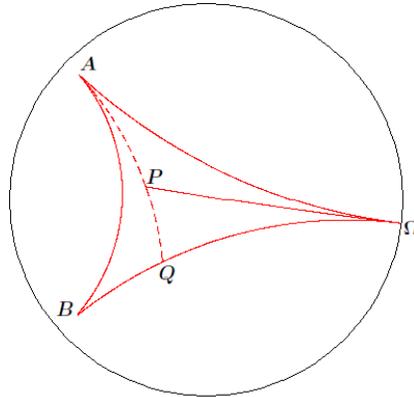


Figura 5.7: Apoio à Proposição 5.5.

**Proposição 5.6.** *Se uma reta  $r$  entra em um triângulo generalizado  $AB$  intersectando um de seus lados mas não passando por nenhum de seus vértices, então  $r$  intersecta um dos outros dois lados do triângulo generalizado.*

**Demonstração:** Se a reta  $r$  intersecta  $A\Omega$  ou  $B\Omega$ , o resultado segue do paralelismo e do axioma de Pasch (Figura 5.8). Se a reta  $r$  intersecta  $AB$  em um ponto  $R$ , traçando  $R\Omega$  caímos na demonstração anterior (Figura 5.9). ■

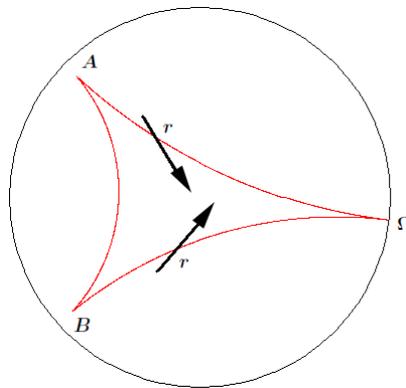


Figura 5.8: Reta  $r$  intersectando  $A\Omega$  ou  $B\Omega$ .

**Proposição 5.7.** *(Teorema do Ângulo Externo para Triângulos Generalizados) Um ângulo externo de um triângulo generalizado é sempre maior do que um ângulo interno que não lhe seja adjacente.*

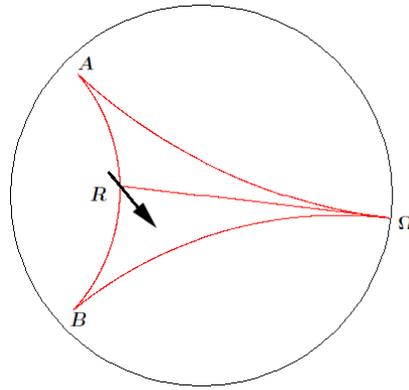


Figura 5.9: Reta  $r$  intersectando  $AB$ .

**Demonstração:** Dado um triângulo generalizado  $AB\Omega$  e um ponto  $C$  na semirreta  $AB$ , fora do segmento  $AB$ . O ângulo  $C\hat{B}\Omega$  é um ângulo externo do triângulo. É suficiente mostrarmos que  $C\hat{B}\Omega > B\hat{A}\Omega$  pois, qualquer ângulo externo é não nulo e maior do que o ângulo nulo dos vértices ideais.

Tracemos, a partir de  $B$ , um segmento  $BD$ , tal que  $C\hat{B}D = B\hat{A}\Omega$ . Temos três possibilidades para o ponto  $D$ :

(i) Para o ponto  $D$  no interior de  $AB\Omega$ : observamos que  $BD$  não pode intersectar  $AD$ , num ponto  $E$ , por exemplo, pois se intersectasse, teríamos um triângulo  $BAE$  com ângulo externo igual ao ângulo interno não adjacente. Uma contradição com o Teorema do Ângulo Externo.

(ii) Para o ponto  $D$  no exterior de  $AB\Omega$ : acompanhe pela Figura (5.10), observe que como o ângulo  $D\hat{B}\Omega > \text{nulo}$ , o resultado fica demonstrado.

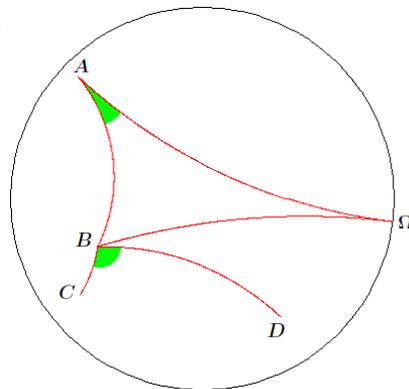


Figura 5.10: O ponto  $D$  no exterior de  $AB\Omega$ .

(iii) Para o ponto  $D$  sobre a semirreta  $B\Omega$ : Acompanhe pela (Figura 5.11). Seja  $M$  o ponto médio de  $AB$ . Baixemos uma perpendicular de  $M$  até um ponto  $N$  na semirreta  $B\Omega$ . Na reta que passa por  $A$  e por  $\Omega$ , marquemos um ponto  $L$  de modo que  $LA = BN$ , e que  $L$  e  $N$  estejam em lados opostos relativamente à reta que passa por  $A$  e  $B$ . Pelo caso  $LAL$  (lado-ângulo-lado) os triângulos  $LAM = NBM$ . É fácil ver que, neste caso,  $L$ ,  $M$ , e  $N$  são colineares e, conseqüentemente,  $LN$  é uma perpendicular comum a  $L\Omega$  e a  $N\Omega$ , contradizendo a Proposição (5.3). ■

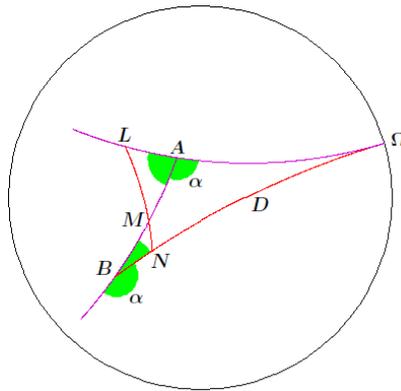


Figura 5.11: O ponto  $D$  sobre a semirreta  $B\Omega$ .

**Corolário 5.1.** *A soma dos ângulos internos de um triângulo generalizado é menor do que dois ângulos retos.*

### 5.3.2 Congruência de Triângulos Generalizados

**Definição 5.6.** *Dizemos que dois triângulos generalizados  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  são **congruentes** quando  $AB = A'B'$ ;  $\hat{A} = \hat{A}'$  e  $\hat{B} = \hat{B}'$ . Indicaremos por  $AB\Omega = A'B'\Omega'$ .*

**Definição 5.7.** *Dizemos que dois triângulos generalizados  $A\Omega_1\Omega_2$  e  $A'\Omega'_1\Omega'_2$  são **congruentes** quando  $\hat{A} = \hat{A}'$ . Indicaremos por  $A\Omega_1\Omega_2 = A'\Omega'_1\Omega'_2$ .*

**Definição 5.8.** *Definimos que todos os triângulos generalizados  $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$  são **congruentes** entre si.*

**Proposição 5.8.** *(1º Caso de Congruência de Triângulos Generalizados) Sejam  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  triângulos generalizados. Se  $AB = A'B'$  e  $\hat{A} = \hat{A}'$ . Então  $AB\Omega = A'B'\Omega'$ .*

**Demonstração:** Para mostrarmos que  $\hat{B} = \hat{B}'$ , sem perda de generalidade, vamos supor que  $\hat{B} > \hat{B}'$ . Acompanhemos a demonstração na Figura (5.12). Construamos uma semirreta  $BC$ , com o ponto  $C$  no interior do triângulo  $AB\Omega$ , tal que  $A\hat{B}C = A'\hat{B}'\Omega'$ . Pela Proposição (5.5), a semirreta  $BC$  corta o lado  $A\Omega$  em um ponto  $D$ . Tomemos o ponto  $D'$  em  $A'\Omega'$  de modo que  $A'D' = AD$ . Dessas hipóteses temos que  $ABD = A'B'D'$  pelo caso de congruência  $LAL$ . Com essa construção temos as seguintes congruências:  $A'\hat{B}'D' = A\hat{B}D = A'\hat{B}'\Omega'$ , o que é absurdo. ■

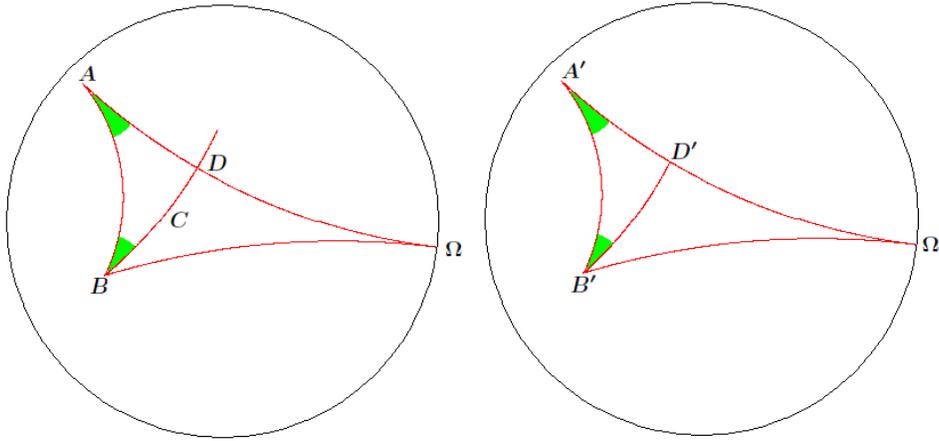


Figura 5.12: Apoio ao 1º Caso de Congruência de Triângulos Generalizados.

**Proposição 5.9.** (*2º Caso de Congruência de Triângulos Generalizados*) Sejam  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  triângulos generalizados. Se  $\hat{A} = \hat{A}'$  e  $\hat{B} = \hat{B}'$ . Então  $AB\Omega = A'B'\Omega'$ .

**Demonstração:** É suficiente provar que  $AB = A'B'$ . Sem perda de generalidade, vamos supor que  $AB > A'B'$ . Acompanhemos a demonstração na Figura (5.13). Seja  $C$  um ponto de  $AB$ , tal que  $AC = A'B'$ . Tracemos a semirreta  $C\Omega$ . Pelo 1º Caso de Congruência de Triângulos Generalizados temos que  $AC\Omega = A'B'\Omega'$ . Logo,  $A\hat{C}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$ . Como, por hipótese,  $A'\hat{B}'\Omega' = A\hat{B}\Omega$ , então, o ângulo externo do triângulo  $CB\Omega$  é igual ao ângulo interno não adjacente, uma contradição com o Teorema do Ângulo Externo. ■

**Proposição 5.10.** (*3º Caso de Congruência de Triângulos Generalizados*) Todos os triângulos generalizados “isósceles” de mesma base são congruentes, isto é, se  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  são tais que  $AB = A'B'$ ;  $\hat{A} = \hat{B}$  e  $\hat{A}' = \hat{B}'$ . Então  $AB\Omega = A'B'\Omega'$ .

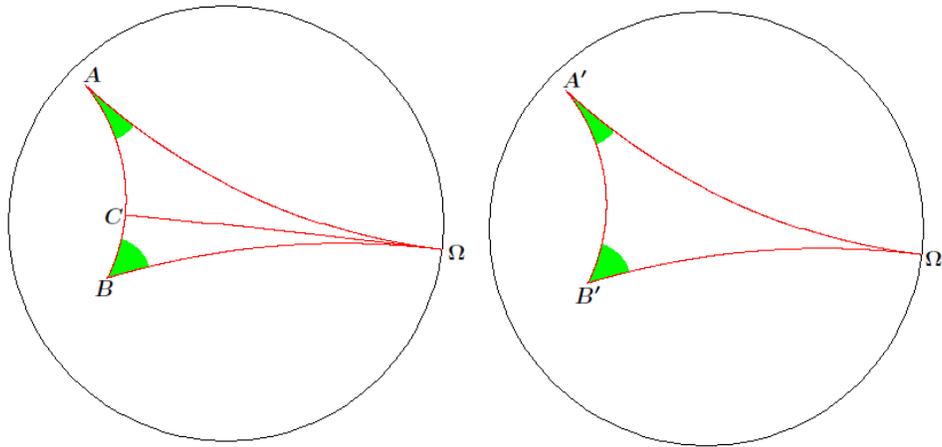


Figura 5.13: Apoio ao 2º Caso de Congruência de Triângulos Generalizados.

**Demonstração:** Devemos provar que  $\hat{A}B\Omega = \hat{A}'B'\Omega'$ , sem perda de generalidade, vamos supor que  $\hat{A}B\Omega > \hat{A}'B'\Omega'$ . Acompanhemos a demonstração na Figura (5.14). Sejam  $C$  e  $D$  pontos do inteiro do triângulo  $AB\Omega$ , de tal modo que  $\hat{A}BC = \hat{B}AD = \hat{A}'B'\Omega'$ . Pela Proposição (5.5), a semirreta  $BC$  corta a semirreta  $A\Omega$  em um ponto  $F$  e pelo Axioma de Pasch a semirreta  $AD$  corta o segmento  $BF$ , em um ponto  $E$ , no interior do triângulo  $AB\Omega$ .

Marquemos, na semirreta  $A'\Omega'$ , um ponto  $E'$ , tal que  $A'E' = AE$ . Segue-se pelo caso de congruência LAL (lado-ângulo-lado) que os triângulos  $ABE$  e  $A'B'E'$  são congruentes. Assim, teremos  $\hat{A}'B'E' = \hat{A}BE = \hat{A}'B'\Omega'$ , absurdo, e o teorema está demonstrado.

■

## 5.4 Triângulos Hiperbólicos Ordinários

**Proposição 5.11.** *A soma dos ângulos de qualquer triângulo é menor do que dois ângulos retos.*

**Corolário 5.2.** *A soma dos ângulos de todo quadrilátero é menor do que quatro ângulos retos.*

**Proposição 5.12.** *Se os três ângulos de um triângulo são respectivamente iguais aos três ângulos de um outro triângulo, então os triângulos são congruentes.*

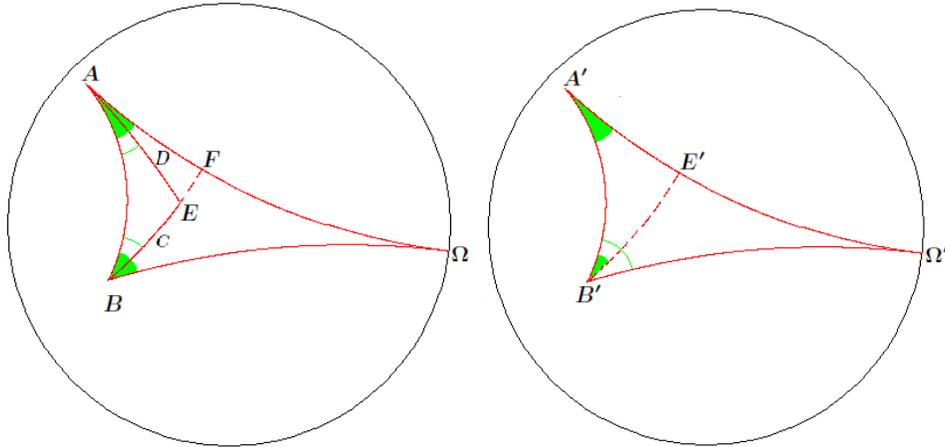


Figura 5.14: Apoio ao 3º Caso de Congruência de Triângulos Generalizados.

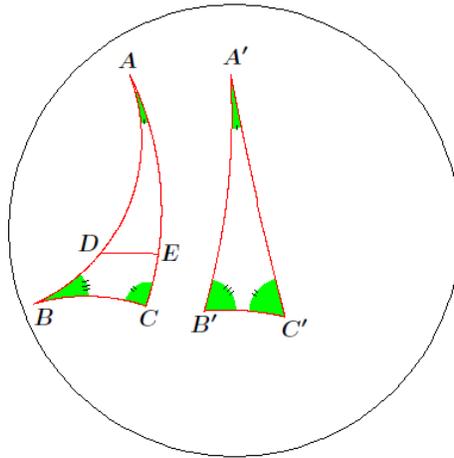


Figura 5.15: Apoio a demonstração de triângulos congruentes caso AAA (ângulo-ângulo-ângulo).

**Demonstração:** Sejam  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos, tais que  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $\hat{B} = \hat{B}'$  e  $\hat{C} = \hat{C}'$ . Suponhamos que os lados correspondentes não sejam iguais. Por exemplo, suponhamos que  $AB > A'B'$  e seja, então,  $D$  um ponto de  $AB$  tal que  $AD = A'B'$ . Na semirreta  $AC$ , marquemos um ponto  $E$  tal que  $AE = A'C'$ . Assim,  $ADE = A'B'C'$ . Precisamos verificar as três possibilidades:  $AE < AC$ ,  $AE = AC$  e  $AE > AC$ .

Supondo  $AE < AC$ , então  $BDCE$  é um quadrilátero em que a soma dos ângulos internos é exatamente quatro ângulos retos, que pelo Corolário (5.2) é uma contradição.

Suponhamos, agora, que  $AE = AC$ , então,  $E$  coincide com  $C$ . Como os ângulos  $\hat{ABC}$  e  $\hat{ADE}$  são iguais,  $D$  teria que coincidir com  $B$  o que seria uma contradição.

Se  $AE > AC$ , obtemos um triângulo com um ângulo externo igual a um interno não adjacente, outra contradição (Figura 5.16). ■

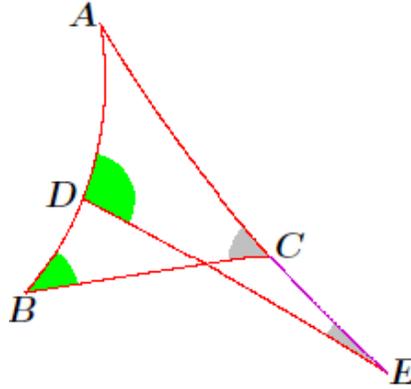


Figura 5.16: Apoio a demonstração,  $AE > AC$ .

Já estudamos na seção de Geometria Absoluta, cinco casos de congruência de triângulos válidos para a Geometria Hiperbólica. Com esse último temos seis casos de congruência para triângulos hiperbólicos ordinários ( $LLL$ ;  $LAA_O$ ;  $ALA$ ;  $LAL$ ; cateto-hipotenusa e este último caso  $AAA$ ). Com os três casos de congruência de triângulos hiperbólicos generalizados, temos, então, nove casos de congruência de triângulos na Geometria Hiperbólica.

## 5.5 A construção geométrica de retas paralelas na Geometria Hiperbólica

### 5.5.1 O ângulo de paralelismo

Considerando um triângulo retângulo generalizado  $PQ\Omega$  (Figura 5.17), em que o ângulo  $\widehat{Q}$  é um ângulo reto. Pelo Teorema do Ângulo Externo para triângulos generalizados, é fácil concluir que o ângulo  $\widehat{P}$  é agudo. A este ângulo chamamos de *ângulo de paralelismo*. O ângulo de paralelismo depende somente do comprimento do segmento  $PQ$ . Vamos representar por  $h$  tal comprimento e por  $\Theta(h)$  a medida  $\alpha$ , em radianos, do ângulo de paralelismo. Logo, podemos definir uma função, chamada de *função ângulo de paralelismo*, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \Theta: \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto \Theta(h) = \alpha \end{aligned}$$

tal que  $h$  é a medida da altura  $PQ$  do triângulo retângulo generalizado  $PQ\Omega$  e  $\alpha$  é a medida de seu ângulo interno  $\hat{P}$ .

É consequência imediata do Teorema do Ângulo Externo que  $\Theta$  é uma função decrescente, isto é se  $h_1 < h_2$  então  $\Theta(h_1) > \Theta(h_2)$ .

Como o comprimento do segmento  $PQ$  é arbitrário, a função  $\Theta$  está definida para qualquer número real positivo.

Podemos estender o domínio de  $\Theta$  do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \theta: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto \theta(h) = \begin{cases} \Theta(h) & \text{se } h > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } h = 0 \\ \pi - \Theta(-h) & \text{se } h < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Uma interpretação geométrica para  $\theta(h)$  com  $h \leq 0$  pode ser dada orientando-se a altura do triângulo  $PQ\Omega$  como na Figura 5.18. A função  $\theta$  tem por imagem o conjunto de todos os ângulos no intervalo  $(0, \pi)$ , decrescendo para zero, quando  $h$  cresce para  $+\infty$  e crescendo para  $\pi$  quando  $h$  decresce para  $-\infty$ . Além disso,  $\theta$  é contínua.

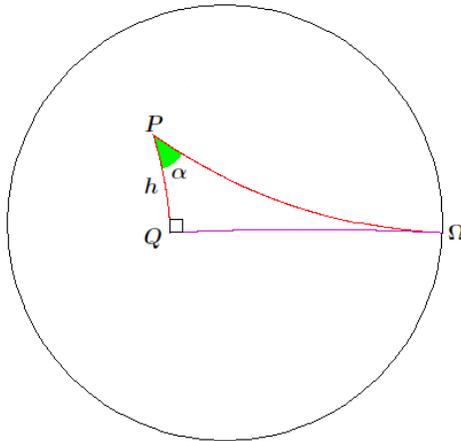


Figura 5.17: Função Ângulo de Paralelismo

**Definição 5.9.** Um **Quadrilátero de Lambert**, é um quadrilátero convexo que possui três ângulos internos retos.

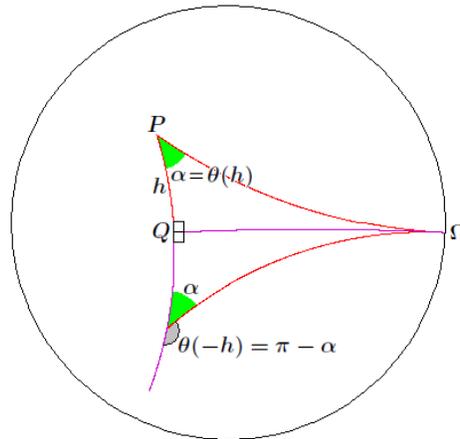


Figura 5.18: Extensão da Função Ângulo de Paralelismo

### 5.5.2 Os números associados a um triângulo retângulo ordinário na Geometria Hiperbólica

Seja  $ABC$  um triângulo retângulo tendo  $C$  como vértice do ângulo reto. Designamos por  $\lambda$  e  $\mu$  as medidas dos ângulos  $\widehat{A}$  e  $\widehat{B}$  e por  $a$ ,  $b$  e  $c$  as medidas dos lados opostos aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente. Os valores  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\lambda$  e  $\mu$  são chamados de partes do triângulo  $ABC$ . De fato, um triângulo retângulo pode ser construído quando a hipotenusa e um de seus ângulos agudos são apresentados. Primeiramente construímos a hipotenusa  $AB$  e o ângulo agudo com vértice no ponto  $B$ , baixamos a perpendicular do ponto  $A$  ao outro lado do ângulo determinando o ponto  $C$ , assim temos um triângulo  $ABC$  retângulo em  $C$  (Figura 5.19). Assim sendo, todas as demais variáveis mencionadas podem ser determinadas pela hipotenusa e um ângulo.

Vamos agora representar no software NonEuclid os ângulos de paralelismo referentes a cada lado do triângulo  $ABC$ . Os ângulos de paralelismo estão denominados da seguinte forma:  $\Theta(a) = \alpha$  onde  $\alpha$  é o ângulo  $C\widehat{B}\Omega_1$  (Figura 5.20),  $\Theta(b) = \beta$  onde  $\beta$  é o ângulo  $C\widehat{A}\Omega_2$  (Figura 5.21) e  $\Theta(c) = \gamma$  onde  $\gamma$  é o ângulo  $A\widehat{B}\Omega_3$  (Figura 5.22).

Os comprimentos correspondentes aos ângulos  $\lambda$  e  $\mu$  considerados como ângulos de paralelismo, serão designados por  $l$  e  $m$ , de modo que  $\Theta(l) = \lambda$  e  $\Theta(m) = \mu$ .

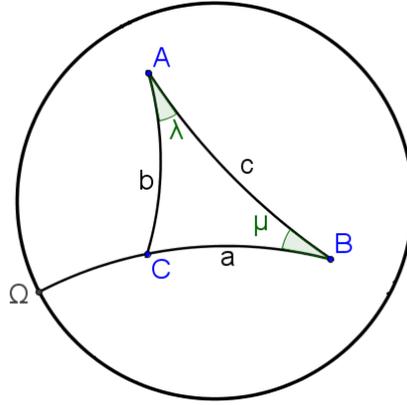


Figura 5.19: Construção de triângulo retângulo

Na construção feita no NonEuclid o ângulo  $\lambda$  está representado no ângulo  $C\hat{A}B$  bem como o lado  $l$  pelo segmento  $AJ$  (Figura 5.23) já o ângulo  $\mu$  está representado no ângulo  $A\hat{B}C$  bem como o lado  $m$  pelo segmento  $BK$  (Figura 5.24).

Os complementos dos ângulos  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$  e  $\mu$  serão representados por  $\alpha', \beta', \gamma', \lambda'$  e  $\mu'$ . Como estes últimos ângulos são agudos, eles possuem comprimentos associados pela função ângulo de paralelismo que serão designados por  $a', b', c', l'$  e  $m'$ , respectivamente. Com esta escolha de notação teremos, por exemplo, que  $\Theta(a) + \Theta(a') = \pi/2$ .

Assim, associado a um triângulo retângulo temos 20 números sendo eles:  $a, a', b, b', c, c', l, l', m, m', \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \lambda, \lambda', \mu, \mu'$ . Ou seja, vinte variáveis devem ter seus valores prescritos para que tenhamos um triângulo. Felizmente elas não são independentes.

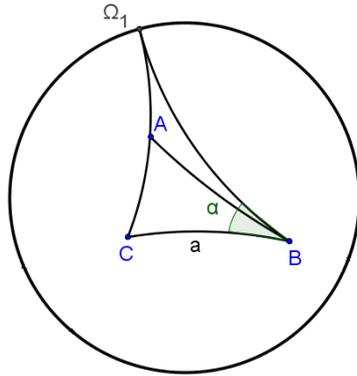
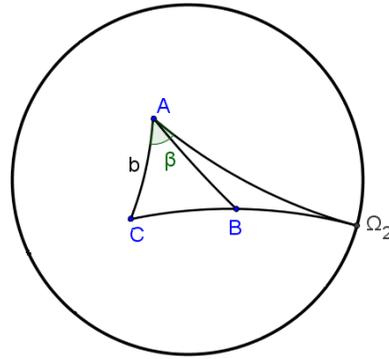
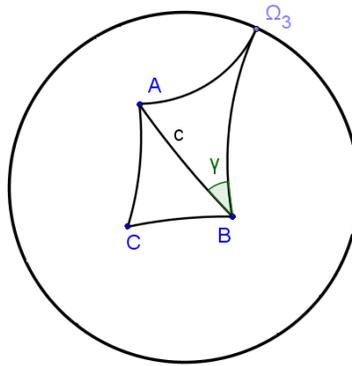
Vamos tentar determinar as relações existentes entre as variáveis associadas a um triângulo retângulo. Primeiramente as mais simples:

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = \lambda + \lambda' = \mu + \mu' = \frac{\pi}{2}$$

$$\Theta(a) = \alpha, \quad \Theta(b) = \beta, \quad \Theta(c) = \gamma, \quad \Theta(l) = \lambda, \quad \Theta(m) = \mu,$$

$$\Theta(a') = \alpha', \quad \Theta(b') = \beta', \quad \Theta(c') = \gamma', \quad \Theta(l') = \lambda', \quad \Theta(m') = \mu'.$$

Além destas 15 relações temos as seguintes, que não são independentes.

Figura 5.20: Lado  $a$ Figura 5.21: Lado  $b$ Figura 5.22: Lado  $c$ 

**Lema1:** Em um triângulo retângulo conforme descrito acima, valem as seguintes relações:

$$\lambda + \Theta(c + m) = \beta, \quad \mu + \Theta(c + l) = \alpha,$$

$$\lambda + \beta = \Theta(c - m), \quad \mu + \alpha = \Theta(c - l),$$

$$\Theta(b + l) + \Theta(m - a) = \pi/2, \quad \Theta(m + a) + \Theta(l - b) = \pi/2.$$

**Demonstração:** Inicialmente, observemos que as equações na coluna da direita, são consequência direta das correspondentes equações da coluna da esquerda, quando trocamos os papéis dos catetos  $a$  e  $b$ , dos ângulos  $\lambda$  e  $\mu$  e de todas as grandezas correspondentes. Assim, só é necessário provar as equações de uma das colunas, por exemplo, as da esquerda.

Provemos que  $\lambda + \Theta(c + m) = \beta$ .

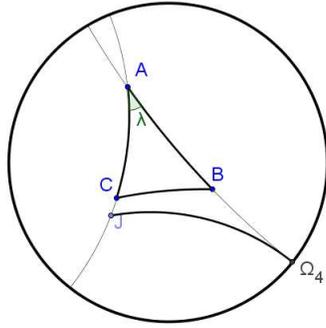


Figura 5.23: Ângulo de paralelismo referente ao ângulo  $\lambda$

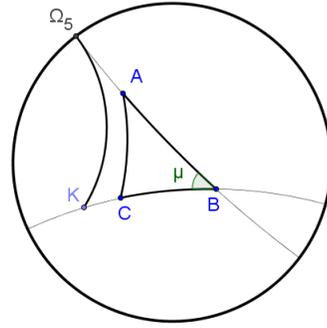


Figura 5.24: Ângulo de paralelismo referente ao ângulo  $\mu$

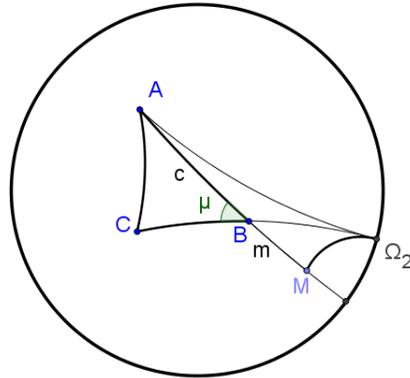


Figura 5.25:  $\lambda + \Theta(c + m) = \beta$

Acompanhemos as sequências da demonstração na Figura 5.25. Consideremos o triângulo retângulo  $ABC$  retângulo em  $C$  com a notação dada. Na semirreta  $AB$  marque um ponto  $M$  tal que  $BM = m$ . Seja  $\Omega_2$  o ponto ideal da semirreta  $CB$ . Trace a semirreta  $M\Omega_2$  formando um triângulo generalizado  $BM\Omega_2$ . Como os ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\Omega_2\widehat{BM}$  são opostos pelo vértice segue que  $\widehat{ABC} = M\widehat{B}\Omega_2 = \mu$ . Como  $\Theta(m) = \mu$ , concluímos que  $B\widehat{M}\Omega_2$  é reto. Trace agora a semirreta  $A\Omega_2$ . Formamos assim um triângulo retângulo generalizado  $AM\Omega_2$ . Segue agora que  $M\widehat{A}\Omega_2 = \Theta(c + m)$  e que  $\Omega_2\widehat{AC} = \Theta(b) = \beta$ . Logo  $C\widehat{AB} + B\widehat{A}\Omega_2 = C\widehat{A}\Omega_2$ . Portanto  $\lambda + \Theta(c + m) = \beta$ .

Provemos que  $\lambda + \beta = \Theta(c - m)$ .

Acompanhe as sequências da demonstração na Figura 5.26. Seja  $\Omega_3$  o ponto ideal da semirreta  $BC$ , trace a semirreta  $A\Omega_3$ .

**Para  $m < c$**

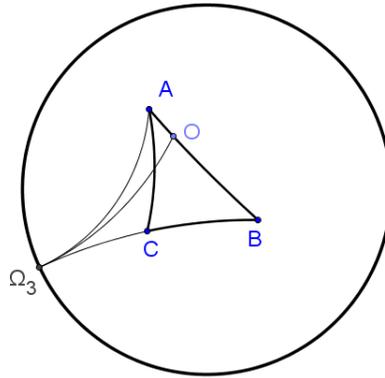


Figura 5.26:  $\lambda + \beta = \Theta(c - m)$

Tome um ponto  $O$  sobre  $AB$ , tal que  $BO = m$ . Trace  $O\Omega_3$ . Sabemos que  $\Theta(m) = \mu$ , logo o ângulo  $B\widehat{O}\Omega_3$  é reto. Além disso, temos um triângulo retângulo generalizado  $AC\Omega_3$  sendo  $C$  seu ângulo reto. Como  $AC = b$  temos que  $C\widehat{A}\Omega_3 = \beta$ . Temos também o triângulo  $O\Omega_3A$  que é retângulo em  $O$ . Logo,  $\Theta(c - m) = \lambda + \beta$ .

**Para  $m = c$**

Para este caso temos que  $BO = BA$  Logo  $c - m = 0$ . Sabemos que  $\Theta(0) = \frac{\pi}{2}$ , sabemos que também que  $\beta + \lambda$  nesse caso é igual a  $\frac{\pi}{2}$ . Logo,  $\Theta(c - m) = \lambda + \beta$ .

**Para  $m > c$**

Neste caso temos:  $\Theta(m - c) = \pi - (\lambda + \beta)$ . Pela extensão da função ângulo de paralelismo temos:  $\Theta(c - m) = \pi - (\pi - (\lambda + \beta))$ . Logo.  $\Theta(c - m) = \lambda + \beta$ .

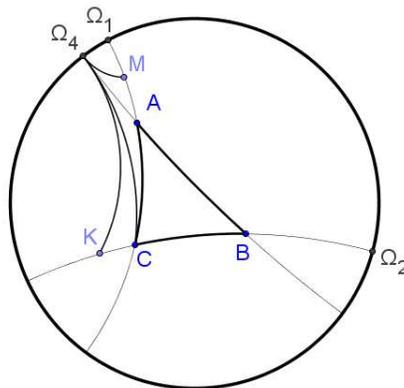


Figura 5.27:  $\Theta(b + l) + \Theta(m - a) = \frac{\pi}{2}$

Provemos agora que  $\Theta(b + l) + \Theta(m - a) = \frac{\pi}{2}$ .

Acompanhe as sequências da demonstração na Figura 5.27. Seja  $\Omega_4$  o ponto ideal da semirreta  $BA$ . Trace a semirreta  $C\Omega_4$ . Marque o ponto  $K$  sobre a semirreta  $BC$  tal que  $BK = m$ . Como  $\Theta(m) = \mu$  temos que o ângulo  $B\hat{K}\Omega_4$  é reto. Temos também que  $CK = m - a$  pois  $BC = a$ . Logo,  $CK\Omega_4$  é um triângulo retângulo generalizado. Marque um ponto  $M$  sobre  $CA$  tal que  $AM = l$ . Trace o segmento  $M\Omega_4$ . Como  $B\hat{A}C$  e  $M\hat{A}\Omega_4$  são ângulos opostos pelo vértice segue que  $B\hat{A}C = M\hat{A}\Omega_4 = \lambda$ . Como  $\Theta(l) = \lambda$  segue que o ângulo  $A\hat{M}\Omega_4$  é reto. Como  $B\hat{C}K$  é um ângulo raso e  $B\hat{C}A$  é reto segue que  $A\hat{C}K$  é reto, mas  $A\hat{C}K = A\hat{C}\Omega_4 + \Omega_4\hat{C}K$  e  $A\hat{C}\Omega_4 = \Theta(b+l)$  e  $\Omega_4\hat{C}K = \Theta(m-a)$ . Portanto,  $\Theta(b+l) + \Theta(m-a) = \frac{\pi}{2}$ . ■

### 5.5.3 Os números associados a um Quadrilátero de Lambert

Tratamento similar pode ser dado aos Quadriláteros de Lambert. Associados a cada quadrilátero  $ABCD$  temos as seguintes variáveis: o seu ângulo agudo  $\beta_1$  no vértice  $A$ , os seus lados, nominados a partir desse ângulo,  $c_1 = AB$ ,  $m'_1 = BC$ ,  $a_1 = CD$  e  $l_1 = DA$ . Os valores  $\beta_1$ ,  $c_1, m'_1, a_1$  e  $l_1$  são chamados de partes do Quadrilátero de Lambert  $ABCD$ . As outras variáveis são definidas de forma similar às definições no caso de triângulos. Assim temos: (Figura 5.28)

$$\gamma_1 = \Theta(c_1), \quad \alpha_1 = \Theta(a_1), \quad \beta_1 = \Theta(b_1), \quad \mu'_1 = \Theta(m'_1), \quad \lambda_1 = \Theta(l_1),$$

$$\beta'_1 + \beta_1 = \gamma'_1 + \gamma_1 = \alpha'_1 + \alpha_1 = \mu_1 + \mu'_1 = \lambda_1 + \lambda'_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\gamma'_1 = \Theta(c'_1), \alpha'_1 = \Theta(a'_1), \beta'_1 = \Theta(b'_1), \mu_1 = \Theta(m_1), \lambda'_1 = \Theta(l'_1).$$

A observação importante a ser feita é que temos o mesmo número de variáveis que no caso de triângulos e as relações simples são as mesmas. Podemos provar, então, o seguinte lema.

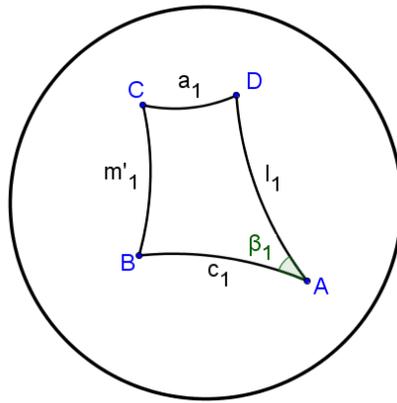


Figura 5.28: Quadrilátero de Lambert.

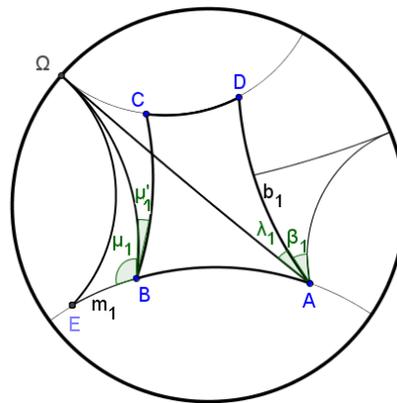


Figura 5.29: Variáveis associadas.

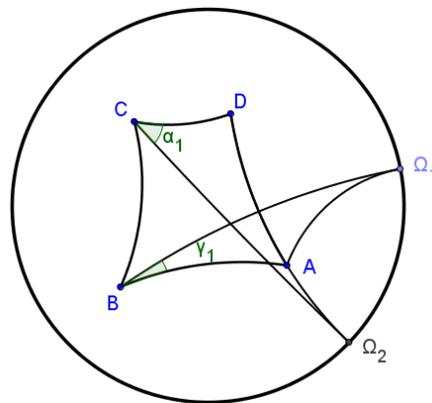


Figura 5.30: Variáveis associadas.

**Lema 2:** Em um quadrilátero de Lambert valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \Theta(c_1 + m_1) &= \beta_1, & \gamma_1 + \Theta(l_1 + a'_1) &= \beta_1, \\ \lambda_1 + \beta_1 &= \Theta(c_1 - m_1), & \gamma_1 + \beta_1 &= \Theta(l_1 - a'_1), \\ \Theta(b_1 + l_1) + \Theta(m_1 - a_1) &= \pi/2, & \Theta(a'_1 - m'_1) + \Theta(c_1 + b_1) &= \pi/2. \end{aligned}$$

**Demonstração:** Observemos que as equações na coluna da direita, são consequência direta da coluna da esquerda, trocando-se  $c_1$  por  $l_1$ ,  $m'_1$  por  $a'_1$  e fazendo as trocas dos ângulos e segmentos correspondentes. Assim, só é necessário provar as equações de um dos lados das colunas, por exemplo, as equações da esquerda.

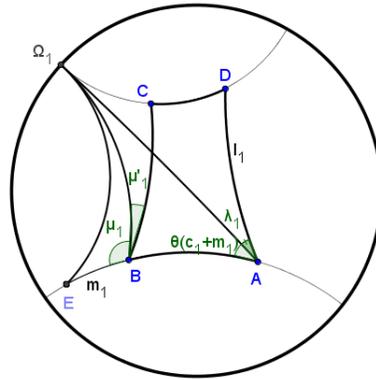


Figura 5.31:  $\lambda_1 + \Theta(c_1 + m_1) = \beta_1$

Provemos que  $\lambda_1 + \theta(c_1 + m_1) = \beta_1$

Consideremos o Quadrilátero de Lambert  $ABCD$  com ângulo agudo no vértice  $A$ , com a notação dada conforme a Figura 5.28. Acompanhem as sequências de demonstração na Figura 5.31. Seja  $\Omega_1$  o ponto ideal da semirreta  $DC$ . Tracemos a semirreta  $B\Omega_1$ , formando o triângulo generalizado  $BC\Omega_1$ , como  $BC = m'_1$ ,  $C\hat{B}\Omega_1 = \mu'_1$ . Tracemos a semirreta  $AB$  e marquemos o ponto  $E$  perpendicular do ponto  $\Omega_1$  com relação a esta reta, é evidentnte que  $m_1 = BE$ . Tracemos a semirreta  $A\Omega_1$ , formamos dois triângulos generalizados  $AD\Omega_1$  e  $AE\Omega_1$ , como  $AD = l_1$ , temos  $D\hat{A}\Omega_1 = \lambda_1$  e como  $AE = c_1 + m_1$  o ângulo  $E\hat{A}\Omega_1 = \theta(c_1 + m_1)$ . Portanto  $\beta_1 = \lambda_1 + \theta(c_1 + m_1)$ .

Provemos que  $\lambda_1 + \beta_1 = \theta(c_1 - m_1)$

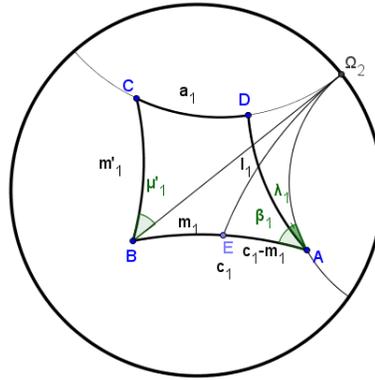


Figura 5.32:  $\lambda_1 + \beta_1 = \Theta(c_1 - m_1)$

Seja  $\Omega_2$  o ponto ideal da semirreta  $CD$ . Tracemos a semirreta  $b\Omega_2$  e baixemos a perpendicular de  $\Omega_2$  com relação a semirreta  $BA$ , encontrando o ponto  $E$ . Acompanhando a sequência da demonstração pela Figura 5.32, observamos que o ponto  $E$  pode estar entre  $B$  e  $A$ , no ponto  $A$  ou a direita do ponto  $A$ , sendo assim, temos de verificar os três casos possíveis para a medida do segmento  $BE$ : pode ser menor do que, igual ou maior do que o segmento  $BA = c_1$ . É fácil ver que em qualquer caso  $BE = m_1$ .

Para  $m_1 < c_1$ .

Tracemos a semirreta  $A\Omega_2$ . No triângulo retângulo generalizado  $AC\Omega_2$ , como  $AC = l_1$ , então o ângulo  $C\hat{A}\Omega_2 = \lambda_1$  e no triângulo retângulo generalizado  $AE\Omega_2$ , como  $AE = c_1 - m_1$ , o ângulo  $E\hat{A}\Omega_2 = \theta(c_1 - m_1)$ . Logo  $\lambda_1 + \beta_1 = \theta(c_1 - m_1)$ .

Para  $m_1 = c_1$ .

Para este caso temos que  $BE = BA$ , logo  $c_1 - m_1 = 0$ . Sabemos que  $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ , e é evidente que para esse caso  $\lambda_1 + \beta_1 = \frac{\pi}{2}$ . Portanto  $\lambda_1 + \beta_1 = \theta(c_1 - m_1)$ .

Para  $m_1 > c_1$ .

Neste caso temos:  $\theta(m_1 - c_1) = \pi - (\lambda_1 + \beta_1)$ . Pela extensão da Função Ângulo de Paralelismo temos:  $\theta(c_1 - m_1) = \pi - (\pi - (\lambda_1 + \beta_1))$ . Logo,  $\lambda_1 + \beta_1 = \theta(c_1 - m_1)$ .

$$\text{Provemos que } \theta(b_1 + l_1) + \theta(m_1 - a_1) = \frac{\pi}{2}$$

Acompanhe as sequências da demonstração na Figura 5.33. Sejam  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$  os pontos ideais das semirretas  $CD$  e  $BA$  respectivamente. Baixemos a perpendicular de  $\Omega_3$  com relação a semirreta  $CD$ , encontrando o ponto  $E$ . Ao traçarmos a semirreta  $C\Omega_3$ , fica evidente que  $CE = m_1$ . Tracemos o triângulo retângulo generalizado  $DE\Omega_3$ , como

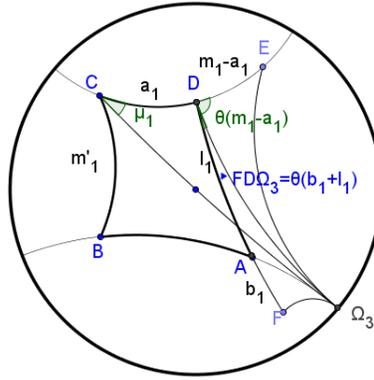


Figura 5.33:  $\Theta(b_1 + l_1) + \Theta(m_1 - a_1) = \frac{\pi}{2}$

$DE = m_1 - a_1$ , o ângulo  $E\hat{D}\Omega_3 = \theta(m_1 - a_1)$ . Por construção, marquemos o ponto  $F$  na semirreta  $DA$ , tal que  $AF = b_1$ . Tracemos a semirreta  $F\Omega_3$ , o triângulo generalizado  $AF\Omega_3$  possui ângulo reto em  $A\hat{F}\Omega_3$ . Tracemos a semirreta  $D\Omega_3$  formando o triângulo retângulo generalizado  $DF\Omega_3$ . Como  $DF = l_1 + b_1$ , temos  $F\hat{D}\Omega_3 = \theta(b_1 + l_1)$  e portanto  $\theta(b_1 + l_1) + \theta(m_1 - a_1) = \frac{\pi}{2}$ . ■

### 5.5.4 Correspondência biunívoca entre triângulos retângulos ordinários e Quadriláteros de Lambert

É sempre possível associar a um triângulo retângulo um Quadrilátero de Lambert, de uma forma biunívoca.

**Proposição 5.13.** *A cada triângulo retângulo com partes  $a, b, c, \lambda$  e  $\mu$  podemos associar sempre um Quadrilátero de Lambert com partes  $c, m', a, l,$  e  $\beta$ , sendo esta uma correspondência biunívoca.*

**Demonstração:** Vamos considerar um triângulo retângulo com hipotenusa  $c$  e um dos ângulos agudos  $\mu$ , e os demais elementos representados por  $a, b$  e  $\lambda$  como fizemos anteriormente. Da mesma forma, considere um quadrilátero de Lambert no qual um dos lados do ângulo agudo é  $c$  e o próximo lado mede  $m'$ , sendo  $\Theta(m') = \mu'$ , (onde  $\mu + \mu' = \frac{\pi}{2}$ ) e os outros comprimentos dos lados do quadrilátero serão designados por

$a_1$  e  $l_1$  e  $\beta_1$ . Isto equivale, nos dois conjuntos de equações que determinam os Lemas 1 e 2, a assumir que

$$c_1 = c \quad m'_1 = m'.$$

Sabemos que

$$\Theta(m') = \mu' \quad \mu' + \mu = \frac{\pi}{2} \quad e \quad \Theta(m'_1) = \mu'_1 \quad \mu'_1 + \mu_1 = \frac{\pi}{2}$$

Como a função ângulo de paralelismo é injetiva temos que se  $m'_1 = m'$ , então  $\mu' = \mu'_1$ , que por sua vez, implica que  $\mu = \mu_1$ . Logo,  $\Theta(m) = \Theta(m_1)$  e com isso concluímos também que  $m_1 = m$ .

Observando as duas primeiras equações da coluna à esquerda para triângulos (**Lema 1**) temos:

$$\lambda + \Theta(c + m) = \beta, \quad \lambda + \beta = \Theta(c - m). \quad (5.1)$$

E para quadriláteros (**Lema 2**) :

$$\lambda_1 + \Theta(c_1 + m_1) = \beta_1, \quad \lambda_1 + \beta_1 = \Theta(c_1 - m_1). \quad (5.2)$$

Mas como já sabemos  $c_1 = c$  e  $m_1 = m$ . Logo, temos que  $\Theta(c + m) = \Theta(c_1 + m_1)$ . Também temos que  $\Theta(c - m) = \Theta(c_1 - m_1)$ .

Podemos observar que, devido a (5.1) e (5.2),  $\beta - \lambda = \beta_1 - \lambda_1$ , bem como  $\lambda + \beta = \lambda_1 + \beta_1$ . Somando essas equações concluímos que  $\beta_1 = \beta$  e  $\lambda_1 = \lambda$  e mais uma vez, devido ao fato da função ângulo de paralelismo ser injetiva, concluímos também que  $b_1 = b$  e  $l_1 = l$ .

Observemos a última equação da coluna à esquerda para triângulos e para quadriláteros:

$$\Theta(b + l) + \Theta(m - a) = \frac{\pi}{2}, \quad \Theta(b_1 + l_1) + \Theta(m_1 - a_1) = \frac{\pi}{2}.$$

Subtraindo essas duas equações temos que  $\Theta(m - a) = \Theta(m_1 - a_1)$ . Tal fato implica que  $a_1 = a$ . Portanto, concluímos os resultados:

$$c_1 = c, \quad m'_1 = m', \quad m'_1 = m, \quad \beta_1 = \beta, \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \mu' = \mu'_1, \quad b_1 = b, \quad l_1 = l, \quad a_1 = a.$$

### 5.5.5 Como construir rigorosamente uma reta paralela a uma reta dada na Geometria Hiperbólica

Dada uma reta  $AB$  e um ponto  $C$  que não pertence a esta reta, o método de construção de uma de suas paralelas, passando pelo ponto  $C$ , é descrito a seguir:

**Proposição 5.14.** *Seja  $CD$  a perpendicular do ponto  $C$  à reta  $AB$ . Seja  $E$  um ponto na reta  $AB$ , diferente do ponto  $D$ . Seja  $CF$  uma reta perpendicular ao segmento  $CD$  passando pelo ponto  $C$ . Seja  $EG$  a perpendicular do ponto  $E$  à reta  $CF$ . Temos assim um Quadrilátero de Lambert com ângulo agudo  $\widehat{DEG}$  (Figura 5.34). Sendo  $DE$  raio*

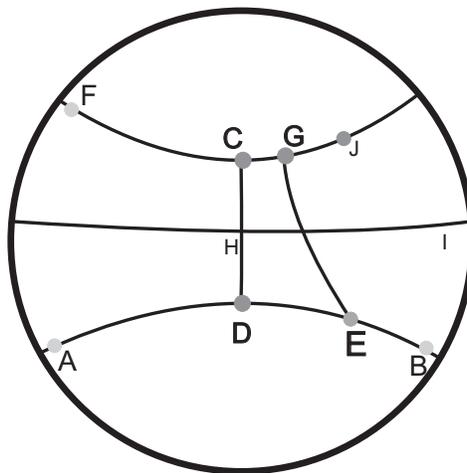


Figura 5.34: Construção de uma circunferência no NonEuclid

e  $C$  centro temos uma circunferência. Este círculo intersecta o segmento  $EG$  em um ponto  $K$ . A reta que passa por  $C$  e  $K$  é uma das paralelas à reta  $AB$  passando pelo ponto  $C$  (Figura 5.35). A outra pode ser construída de forma análoga, escolhendo um outro ponto  $R$  do outro lado do ponto  $D$ .

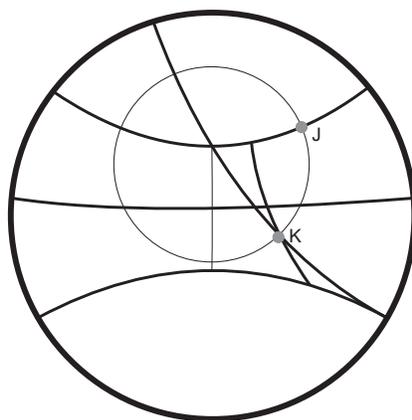


Figura 5.35: Construção de uma paralela

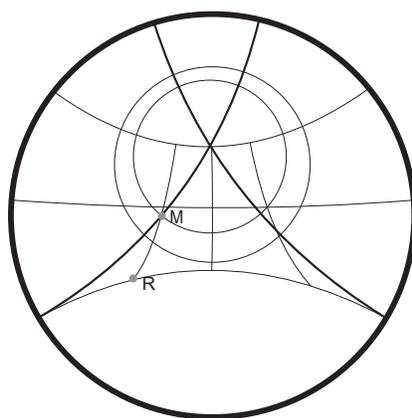


Figura 5.36: Construção das duas paralelas

**Observação:** Para fazer a construção de uma circunferência com raio dado no software NonEuclid primeiro construímos o ponto médio do segmento  $CD$ , esse será o ponto  $H$ , tracemos a reta perpendicular ao segmento  $CD$  passando por  $H$ , essa reta será a reta  $HI$ , fazemos a reflexão do ponto  $E$  em relação a reta  $HI$  e, temos assim, o ponto  $J$ . Agora fazemos um círculo com centro em  $C$  passando por  $J$ , conforme Figura 5.34.

**Demonstração:** (Veja Figura 5.37) Tome o Quadrilátero de Lambert  $EDCG$  com partes  $c$ ,  $m'$ ,  $a$ ,  $l$ , e  $\beta$ . Centrado em  $C$  e com raio igual a  $c$ , trace um círculo. Este intersectará o lado  $GE$  em um ponto  $K$ . Trace então a semirreta  $CK$ . Devemos provar que esta é paralela à semirreta  $BA$ . Para isto, considere o triângulo retângulo de partes

$a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\lambda$  e  $\mu$  associado ao quadrilátero de Lambert. Construa este triângulo sobre o lado  $CG$  do quadrilátero: marque na semirreta  $GE$  um ponto  $K'$  tal que  $GK' = b$ . O triângulo  $GCK'$  é o triângulo desejado. Assim,  $CK' = c$  e, conseqüentemente, o ponto  $K'$  coincide com o ponto  $K$ . Portanto, o ângulo  $K\hat{C}G$  mede  $\mu$ . Logo, o ângulo  $D\hat{C}K$  mede  $\mu'$ . Como  $DC = m'$  segue-se que a semirreta  $CK$  é paralela à semirreta  $DE$ , e portanto à  $AB$ , terminando assim a demonstração.

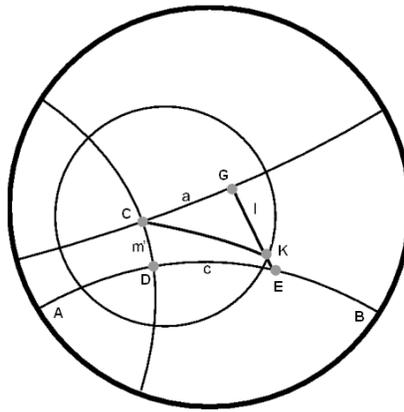


Figura 5.37: Demonstração da Proposição 5.14



---

# Atividades Usando o Software NonEuclid

---

## 6.1 Primeira Parte

A seguir temos uma lista de definições utilizadas na Geometria Hiperbólica e teoremas da Geometria Euclidiana. O leitor deve identificar quais teoremas **NÃO SÃO VÁLIDOS** na Geometria Hiperbólica e construir contra-exemplos usando o Software NonEuclid.

(Sugestão: um livro de geometria euclidiana plana, como o livro do João Lucas pode ser bastante útil para identificar quais são os teoremas que dependem do Quinto Postulado)

### 6.1.1 Retas e Ângulos

**Definição 6.1.1.1.** *Como no caso Euclidiano, ângulos hiperbólicos são figuras formadas pela reunião de duas semirretas hiperbólicas que possuem a mesma origem. As duas semirretas são chamadas de lados do ângulo e a origem comum delas de vértice. Dois ângulos são chamados ângulos opostos pelo vértice se possuem o mesmo vértice e seus lados formam dois pares de semirretas opostas. Se os ângulos  $B\hat{A}D$  e  $C\hat{A}D$  têm em comum o lado  $S_{AD}$  e as semirretas  $S_{AB}$  e  $S_{AC}$  são opostas então  $B\hat{A}D$  e  $C\hat{A}D$  são cha-*

mados ângulos suplementares. Um ângulo  $\widehat{BAD}$  é denominado ângulo reto se possui um suplemento congruente a ele.

**Teorema 6.1.1.1.** *Por qualquer ponto de uma reta passa uma única reta perpendicular a esta reta.*

**Definição 6.1.1.2.** *Duas retas  $l$  e  $m$  são perpendiculares se elas se intersectam em um ponto  $A$  e existe uma semirreta  $S_{AB}$  contida em  $l$  e uma semirreta  $S_{AC}$  contida em  $m$  de modo que o ângulo  $\widehat{BAC}$  é reto. Duas retas  $l$  e  $m$  no plano são paralelas ou hiperparalelas quando não se intersectam.*

**Teorema 6.1.1.2.** *Se  $l$  e  $m$  são duas retas paralelas e uma reta  $r$  intersecta  $l$  e é perpendicular a  $m$ , então  $r$  também é perpendicular a  $l$ .*

**Teorema 6.1.1.3.** *Se  $l$  e  $m$  são duas retas paralelas,  $r$  é uma reta perpendicular a  $l$  e  $s$  é uma reta perpendicular a  $m$ , então  $r = s$  ou  $r$  é paralela a  $s$ .*

**Teorema 6.1.1.4.** *Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar apenas uma perpendicular à reta passando pelo ponto.*

## 6.1.2 Triângulos

**Definição 6.1.2.1.** *Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos não-colineares. A figura fechada formada pela reunião dos três segmentos de retas  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  é chamada de triângulo e representada por  $ABC$ . Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são chamados de vértices e os segmentos  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  são os lados. Cada triângulo  $ABC$  determina três ângulos, a saber:  $\widehat{BAC}$ ,  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{ACB}$ . Estes são chamados ângulos do triângulo  $ABC$ . Dois triângulos são congruentes quando existe uma correspondência entre eles tal que os três pares de lados correspondentes são congruentes, e os três pares de ângulos correspondentes também são congruentes.*

**Teorema 6.1.2.1.** *Critério LLL de congruência.*

**Teorema 6.1.2.2.** *Critério ALA de congruência.*

**Teorema 6.1.2.3.** *Critério LAA<sub>0</sub> de congruência.*

**Teorema 6.1.2.4.** *(Axioma) Critério LAL de congruência.*

**Definição 6.1.2.2.** *Um triângulo que tem dois lados congruentes é chamado isósceles, o outro lado é chamado de base. Os dois ângulos que determinam a base são chamados ângulos da base e o ângulo oposto à base é chamado ângulo do vértice. Um triângulo cujos três lados são congruentes é chamado equilátero e um triângulo no qual dois lados quaisquer não são congruentes é chamado escaleno. Quando os três ângulos de um triângulo são congruentes dizemos que ele é equiângulo.*

**Teorema 6.1.2.5.** *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.*

**Teorema 6.1.2.6.** *Em um triângulo isósceles a mediana relativa à base é também altura e bissetriz.*

**Teorema 6.1.2.7.** *(Teorema da Dobradiça) Se dois lados de um triângulo são congruentes, respectivamente a dois lados de um segundo triângulo e se o ângulo determinado por eles no primeiro triângulo é maior que o ângulo correspondente no segundo, então o terceiro lado do primeiro triângulo é maior que o terceiro lado do segundo.*

**Teorema 6.1.2.8.** *(Recíproco do Teorema da Dobradiça) Se dois lados de um triângulo são congruentes, respectivamente, a dois lados de um segundo triângulo e se o terceiro lado do primeiro triângulo é maior que o terceiro lado do segundo, então o ângulo determinado pelos dois lados no primeiro triângulo é maior que o ângulo determinado pelos lados correspondentes no segundo.*

**Teorema 6.1.2.9.** *O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.*

**Teorema 6.1.2.10.** *Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.*

**Definição 6.1.2.3.** *Se  $D$  é um ponto no interior do ângulo  $\widehat{BAC}$  e  $\widehat{BAD} \equiv \widehat{DAC}$  dizemos que a semirreta  $S_{AD}$  é a bissetriz do ângulo  $\widehat{BAC}$ . Um segmento de reta é uma bissetriz de um triângulo se está contido em uma semirreta que é bissetriz de um ângulo do triângulo e suas extremidades são, uma o vértice deste ângulo e a outra, um ponto do*

lado oposto. Uma mediana de um triângulo é um segmento cujas extremidades são um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a este vértice. Uma altura de um triângulo é um segmento perpendicular, por um vértice do triângulo, à reta que contém o lado oposto.

**Teorema 6.1.2.11.** *As retas suportes das alturas dos lados de um triângulo intersectam-se num mesmo ponto ordinário.*

**Teorema 6.1.2.12.** *As bissetrizes de um triângulo intersectam-se num mesmo ponto que é equidistante dos lados do triângulo.*

**Teorema 6.1.2.13.** *Em um triângulo, o produto da medida da altura pela medida da base é o mesmo qualquer que seja o lado escolhido como base.*

**Pergunta:** Em Geometria Euclidiana, nem a correspondência *LLA* nem a correspondência *AAA* são suficientes para provar que os pares de triângulos correspondentes são congruentes. Essas correspondências são suficientes para provar que triângulos correspondentes são congruentes na Geometria Hiperbólica? Justifique.

**Definição 6.1.2.4.** *Um triângulo retângulo é um triângulo que tem um ângulo reto. O lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa e os outros dois lados de catetos.*

**Teorema 6.1.2.14.** *(Teorema de Pitágoras) Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

**Teorema 6.1.2.15.** *(Recíproco do Teorema de Pitágoras) Um triângulo possui lados medindo  $a, b$  e  $c$ . Se  $a^2 = b^2 + c^2$ , então o triângulo é retângulo e a hipotenusa é o lado de medida  $a$ .*

**Teorema 6.1.2.16.** *(Caso de congruência exclusivo de triângulos retângulos) Se dois triângulos retângulos possuem hipotenusas e um dos catetos congruentes, então os triângulos são congruentes.*

**Teorema 6.1.2.17.** *Em um triângulo retângulo a altura do vértice do ângulo reto é média proporcional entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa. ( $h^2 = mn$ )*

### 6.1.3 Quadriláteros, Retângulos e Quadrados

**Definição 6.1.3.1.** *Considere quatro pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , e  $D$  no mesmo plano. Se três quaisquer destes pontos são não colineares, os segmentos  $AB$ ,  $AC$ ,  $CD$  e  $DB$  só intersectam em seus extremos, então a união dos quatro segmentos é chamada um quadrilátero. Os quatro segmentos são chamados lados, os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  vértices e os ângulos  $\widehat{DAB}$ ,  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{BCD}$  e  $\widehat{CDA}$  são chamados ângulos do quadrilátero. Um retângulo é um quadrilátero com os quatro ângulos retos. Se os quatro ângulos são retos e todos os quatro lados são congruentes, então o quadrilátero é um quadrado. Um quadrilátero regular é um quadrilátero no qual todos os ângulos são congruentes e todos os lados também.*

**Teorema 6.1.3.1.** *Todo o quadrilátero regular têm quatro ângulos retos.*

**Teorema 6.1.3.2.** *Os dois segmentos de retas passando pelos pontos médios dos lados opostos de um quadrilátero regular dividem o quadrilátero regular em quatro quadriláteros regulares menores.*

**Teorema 6.1.3.3.** *A mediana em relação à hipotenusa de um triângulo retângulo tem por comprimento a metade do comprimento da hipotenusa.*

**Definição 6.1.3.2.** *Um paralelogramo é um quadrilátero no qual ambos os pares de lados opostos são paralelos ou hiperparalelos.*

**Teorema 6.1.3.4.** *Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.*

**Teorema 6.1.3.5.** *Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.*

**Teorema 6.1.3.6.** *As diagonais de um paralelogramo bissectam uma a outra.*

**Teorema 6.1.3.7.** *Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então este quadrilátero é um paralelogramo.*

## 6.2 Segunda Parte

Nesta segunda parte de atividades, convidamos o leitor a trabalhar com construções da Geometria Hiperbólica utilizando o software NonEuclid. Quase todos os exercícios foram retirados das **Atividades** constantes no **Help** do programa.

**Exercício 6.1.** Considere a seguinte construção euclidiana de uma mediatriz de um segmento:

- (i) Construa o segmento  $AB$ .
- (ii) Construa o círculo com centro  $A$  passando por  $B$ .
- (iii) Construa o círculo com centro  $B$  passando por  $A$ .
- (iv) Construa a reta passando pelos pontos de intersecção  $C$  e  $D$  desses dois círculos.

Na Geometria Euclidiana a reta  $CD$  é perpendicular ao segmento  $AB$  dividindo-o ao meio, ou seja, é a reta mediatriz do segmento  $AB$ .

Essa construção geométrica é válida para construir mediatrizes na Geometria Hiperbólica? Justifique.

**Exercício 6.2.** Considere a seguinte construção euclidiana de uma bissetriz de um ângulo:

- (i) Construa o ângulo  $ABC$ .
- (ii) Construa o círculo com centro  $B$  passando por  $A$ .
- (iii) Construa a intersecção  $D$  do círculo com a semirreta  $BC$ .
- (iv) Construa a mediatriz de  $AD$ .

Na Geometria Euclidiana a mediatriz acima divide o ângulo  $ABC$  ao meio, ou seja, contém a bissetriz do ângulo  $ABC$ .

Essa construção geométrica é válida para construir bissetrizes na Geometria Hiperbólica? Justifique.

**Exercício 6.3.** Verdadeiro ou Falso? Construa exemplos e contra-exemplos:

- (i) A soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois retos.
- (ii) O maior lado de um triângulo é oposto ao maior ângulo.
- (iii) As alturas de um triângulo são concorrentes (iv) As três medianas de um triângulo são concorrentes.
- (v) As três bissetrizes de um triângulo são concorrentes.
- (vi) A soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é maior do que o comprimento do terceiro lado.
- (vii) Um ângulo externo de um triângulo é sempre maior do que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

(viii) Em um triângulo, o produto do comprimento de um lado pelo comprimento da altura do triângulo relativa a este lado independe do lado escolhido.

**Exercício 6.4.** Como construir um triângulo isósceles dinâmico no *NonEuclid*? Justifique.

**Exercício 6.5.** Verdadeiro ou Falso? Construa exemplos e contra-exemplos:

(i) Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

(ii) A altura de um triângulo isósceles divide a base ao meio.

(iii) A altura e a bissetriz relativa ao ângulo oposto à base de um triângulo isósceles são colineares.

**Exercício 6.6.** Como construir um triângulo equilátero dinâmico no *NonEuclid*? Justifique.

**Exercício 6.7.** Verdadeiro ou Falso? Construa exemplos e contra-exemplos:

(i) Um triângulo equilátero possui ângulos internos congruentes.

(ii) Um triângulo que possui os três ângulos internos congruentes é equilátero (iii) Cada ângulo interno de um triângulo com três ângulos congruentes mede  $60^\circ$ .

(iv) Em um triângulo retângulo vale o Teorema de Pitágoras.

**Exercício 6.8.** Como “transladar” um triângulo na Geometria Hiperbólica visto que não existem “vetores” na Geometria Hiperbólica tal como os definimos na Geometria Euclidiana? (Obs 1. vetor é classe de equipolência de segmentos orientados paralelos, de mesmo sentido e de mesmo comprimento)

(Obs 2. o triângulo “transladado” deve ser congruente ao triângulo original e manter a orientação - horária ou anti-horária - dos vértices)

Suponha que você deseja “transladar” um triângulo de tal modo que um de seus vértices percorra duas unidades de comprimento sobre uma reta. Como fazer essa construção no *NonEuclid*? Os outros dois vértices do triângulo percorrerão também duas unidades de comprimento?

**Exercício 6.9.** Como rotacionar um triângulo no *NonEuclid*?

Rotacione de  $120^\circ$  no sentido horário um triângulo em torno de um ponto.

**Exercício 6.10.** *Verdadeiro ou Falso? Construa exemplos e contra-exemplos:*

- (i) *Caso LAL de congruência de triângulos.*
- (ii) *Caso LLL de congruência de triângulos.*
- (iii) *Caso ALA de congruência de triângulos.*
- (iv) *Caso LAA de congruência de triângulos.*
- (v) *Caso "cateto-hipotenusa" de triângulos retângulos.*
- (Vi) *Caso AAA de congruência de triângulos.*
- (vii) *Caso LLA de congruência de triângulos.*

**Exercício 6.11.** *Como construir um losango não regular dinâmico no NonEuclid? Justifique.*

**Exercício 6.12.** *Verdadeiro ou Falso? Construa exemplos e contra-exemplos:*

- (i) *Ângulos opostos de um losango são congruentes.*
- (ii) *Diagonais de um losango se cortam nos pontos médios das mesmas, ou seja, bissectam-se.*
- (iii) *Diagonais de um losango são perpendiculares.*
- (iv) *Diagonais de um losango bissectam os ângulos internos do mesmo.*

**Exercício 6.13.** *Construa um quadrilátero dinâmico com três ângulos retos e verifique que o quarto ângulo é agudo, tendo por conseqüência a não existência de retângulos na Geometria Hiperbólica.*

**Exercício 6.14.** *Como construir um quadrilátero regular (lados de mesmo comprimento e ângulos internos congruentes) dinâmico no NonEuclid? Justifique.*

**Exercício 6.15.** *Dois segmentos ligando pontos médios de lados opostos de um quadrilátero regular dividem-no em quatro quadriláteros também regulares? Justifique.*

**Exercício 6.16.** *Construa No NonEuclid um quadrilátero que não é um paralelogramo. Justifique.*

**Exercício 6.17.** *Verdadeiro ou Falso? Construa exemplos e contra-exemplos:*

- (i) *Na Geometria Hiperbólica, se lados opostos de um quadrilátero tem o mesmo comprimento, então esse quadrilátero é um paralelogramo.*

(ii) Na Geometria Hiperbólica, se ângulos opostos de um quadrilátero tem mesma medida, então esse quadrilátero é um paralelogramo.

(iii) Na Geometria Hiperbólica, se as diagonais de um quadrilátero bissectam-se, então esse quadrilátero é um paralelogramo.

(iv) Na Geometria Hiperbólica, lados opostos de um quadrilátero têm mesma medida se, e somente se, o mesmo ocorre com os ângulos opostos.

**Exercício 6.18.** Construa polígonos regulares dinâmicos com 5, 6, 8, 9, 10 e 12 lados.

**Exercício 6.19.** Dado um polígono regular, sempre é possível construir um triângulo tal que esse polígono esteja em seu interior?

**Exercício 6.20.** É sempre possível circunscrever um triângulo em um círculo? E inscrevê-lo?

**Exercício 6.21.** A razão “comprimento da circunferência” / “diâmetro” =  $\pi$  ocorre na Geometria Hiperbólica? Verifique por meio de inscrição e circunscrição de polígonos regulares em uma circunferência.



## APÊNDICE A

### Transporte de Segmentos (Compasso)

O NonEuclid não possui a Ferramenta Compasso. Veremos neste Apêndice como transportar a medida do segmento  $AB$  para o ponto  $C$ .

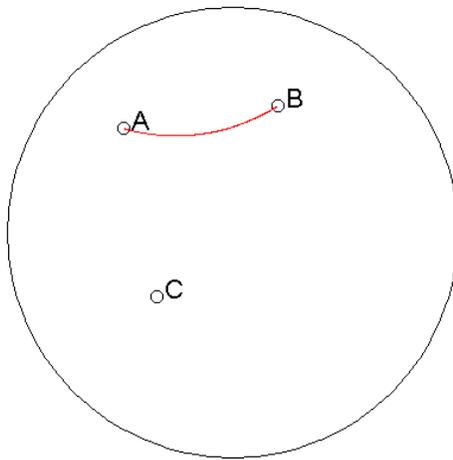


Figura 1: Segmento  $AB$  e o ponto  $C$ .

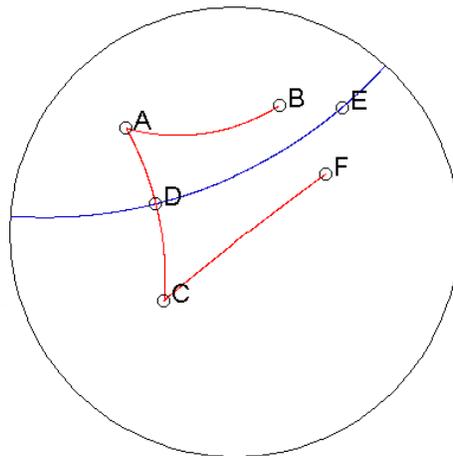


Figura 2: Apoio à construção do Transporte de Segmento.

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Draw Line Segment**

Segmento  $AC$ .

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Plot Midpoint**

Ponto  $D$ , ponto médio de  $AC$ .

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Draw Perpendicular**



Semirreta  $DE$  perpendicular à reta  $AC$  passando pelo ponto  $D$ .

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Reflect**

Ponto  $F$  reflexão do ponto  $B$  em relação à semirreta  $DE$ .

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Draw Line Segment**

Segmento  $CF$  é congruente ao segmento  $AB$ .

## APÊNDICE B

### Transporte de Ângulos

Veremos neste Apêndice como transportar o ângulo  $B\hat{A}C$  para a semirreta  $DE$  pelo vértice  $D$ .

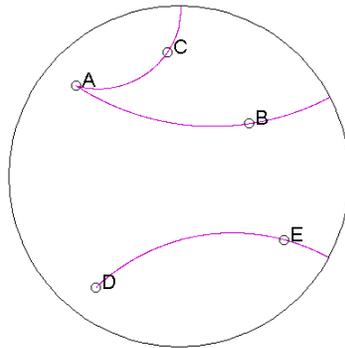


Figura 3: Ângulo  $B\hat{A}C$  e a semirreta  $DE$ .

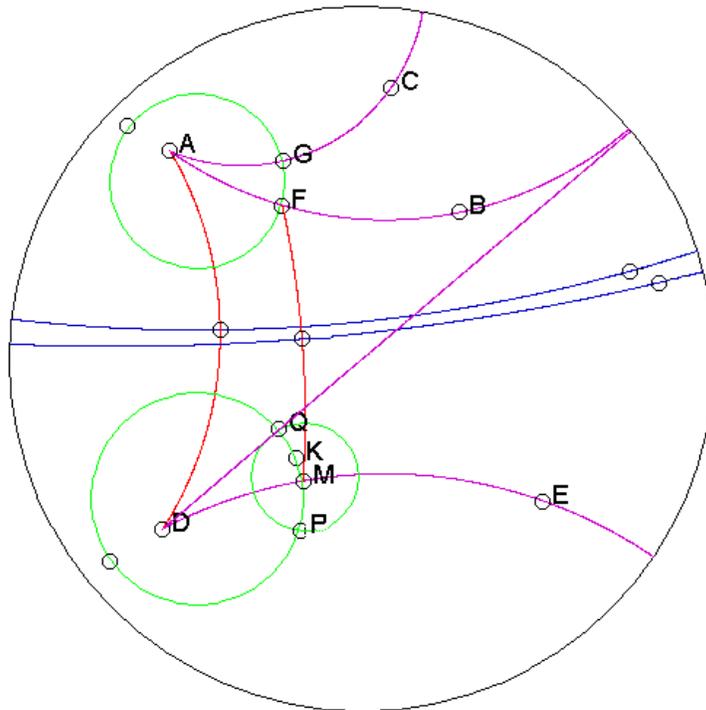


Figura 4: Apoio à construção do Transporte de Ângulos.

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Plot Point on Object**

Ponto  $F$  qualquer na semirreta  $AB$ .

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Draw Circle**

Círculo de centro  $A$  e raio  $AF$ .

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Plot Intersection Point**

Ponto  $G$  interseção do círculo  $AF$  com a semirreta  $AC$ .

Transportar o segmento  $AF$  para o ponto  $D$ , obtendo o ponto  $K$  ( $DK = AF$ ).

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Draw Circle**

Círculo de centro  $D$  e raio  $DK$ .

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Plot Intersection Point**

Ponto  $M$  interseção do círculo  $DK$  com a semirreta  $DE$ .

Transportar o segmento  $FG$  para o ponto  $M$ , obtendo o ponto  $P$  ( $MP = FG$ ).

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Draw Circle**

Círculo de centro  $M$  e raio  $MP$ .

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Plot Intersection Point**

Ponto  $Q$  interseção dos círculos  $DM$  e  $MP$ .

**Constructions**  $\leftrightarrow$  **Draw Ray**

Semirreta  $DQ$ .

O ângulo  $E\hat{D}Q$  é congruente ao ângulo  $B\hat{A}C$ .

---

# Considerações finais e perspectivas futuras

---

Construções geométricas baseadas totalmente nos axiomas da Geometria Hiperbólica podem ser bastante complexas como podemos constatar: na construção da reta perpendicular a duas retas hiperparalelas e na construção da reta paralela passando por um ponto fora da reta. Em especial objetos distintos como a Função Ângulo de Paralelismo, triângulo retângulo ordinário e Quadrilátero de Lambert estão intrinsicamente associados. A Função Ângulo de Paralelismo em particular foi desenvolvida para a concepção da trigonometria hiperbólica e não, em princípio, para construção geométrica.

Outras construções geométricas exclusivas da Geometria Hiperbólica podem ser consideradas em uma extensão natural deste trabalho, como por exemplo: Horocírculos (são curvas invariantes por isometrias parabólicas e rotação com centro num ponto ideal) e Curvas Equidistantes (uma curva  $C$  é equidistante de uma reta  $r$  quando dados  $A$  e  $B$  em  $C$ ,  $d(A, r) = d(B, r)$ ).

As curvas equidistantes  $C$  desempenham um papel importante do ponto de vista de isometrias do plano hiperbólico. Elas são invariantes por translações hiperbólicas que possuem  $r$  como eixo.

O estudo de isometria hiperbólicas está vinculado aos chamados Grupos Fuchsianos que é um campo de pesquisa bastante fértil em geometria.



---

# Referências Bibliográficas

---

- [1] AABOE, A. **Episódios da história antiga da matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.
- [2] AGUSTINI, E. **Constelações de sinais em espaços hiperbólicos**. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.
- [3] ARCARI, I. **Um texto de geometria hiperbólica**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.
- [4] ÁVILA, G. Legendre e o postulado das paralelas. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n.22, p.16 - 28, 1992.
- [5] BALDIN, Y. Y. VILLAGRA, G. A. L. **Atividades com Cabri-Géomètre II para cursos de licenciatura em matemática e professores do ensino fundamental e médio**. São Carlos: EdUFSCar, 2002.
- [6] BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.
- [7] BARBOSA, J. L. M. **Geometria hiperbólica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- [8] BONOLA, R. **Geometrías no euclidianas**. Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina, 1945.
- [9] BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda., 1974.

- [10] EUCLIDES. **Elementos de geometria**: dos seis primeiros livros do undécimo e duodécimo da versão latina de Frederico Commandino. São Paulo: Edições Cultura, 1945.
- [11] EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.
- [12] GREENBERG, M. J. **Euclidean and non-euclidean geometries**. San Francisco: Freeman and Co., 1974.
- [13] NONEUCLID. Software livre de geometria dinâmica para os modelos do disco e do semiplano de Poincaré para a geometria hiperbólica, 2007. Disponível em: <<http://cs.unm.edu/joel/NonEuclid>>. Acesso em: 2009.
- [14] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2008.
- [15] SANTOS FILHO, L. C. dos. **Encontro com o mundo não euclidiano, elementos para uma abordagem didática**. São Paulo: USP, 2004.
- [16] TERDIMAN, E. W. **A geometria hiperbólica e sua consistência**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 1989.
- [17] WOLFE, H. E. **Introduction to non-euclidean geometry**. New York: The Dryden Press, 1945.