Algumas Contribuições em Otimização Multiobjetivo

Lucelina Batista dos Santos

Prof. Dr. Marko A. Rojas Medar
Orientador

Profa. Dra. Rafaela Osuna Gómez
Co-Orientadora

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

IMECC - UNICAMP
Fevereiro de 2004

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Algumas Contribuições em Otimização Multiobjetivo

Lucelina Batista dos Santos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Lucelina Batista dos Santos aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora

Profa. Dra. Rafaela Osuna Gómez

Prof. Dr. Antonio Rufián Lizana

Prof. Dr. Adilson José Vieira Brandão

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva

Profa. Dra. Márcia Aparecida Gomes Ruggiero

Campinas, 26 de Fevereiro de 2004

Prof. Dr. Marko A. Rojas Medar

Profa. Dra. Rafaela Osuna Gómez

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

IIDADE BC
CHAMADA T/UNICAMP
Sa59a
EX
MBO BC/ 58174
OC 16-117-04
D X
EÇO R$ 11,00
TA 02/06/04
CPD

CM00197838-1
IB ID 316771

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Santos, Lucelina Batista dos

Sa59a Algumas contribuições em otimização multiobjetivo / Lucelina Batista dos Santos – Campinas, [S.P. :s.n.], 2004.

Orientador : Marko Antonio Rojas Medar

Co-orientadora: Rafaela Osuna Gómez

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

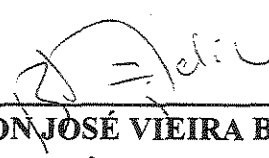
1. Otimização matemática. 2. Análise funcional não-linear. 3. Otimização não diferenciável. I. Rojas Medar, Marko Antonio. II. Osuna Gómez, Rafaela. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Tese de Doutorado defendida em 26 de fevereiro de 2004

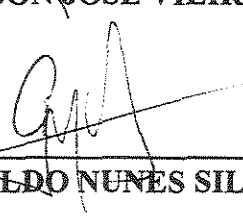
e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). RAFAELA OSUNA-GÓMEZ

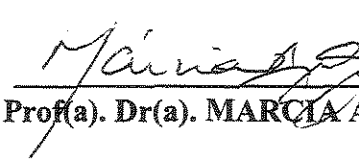
Prof(a). Dr(a). ANTONIO RUFIÁN-LIZANA



Prof(a). Dr(a). ADILSON JOSÉ VIEIRA BRANDÃO



Prof(a). Dr(a). GERALDO NUNES SILVA



Prof(a). Dr(a). MARCIA APARECIDA GOMES RUGGIERO

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Celina e Luiz.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todos aqueles que, de uma forma ou de outra, tornaram possível a realização deste trabalho.

Primeiramente, agradeço a todos os membros da Banca Examinadora, cujas críticas e sugestões em muito contribuíram para a redação final deste trabalho.

Também agradeço aos professores do Departamento de Estadística e Investigación Operativa da Universidad de Sevilla pela convivência agradável e pela boa experiência profissional que me proporcionaram, durante meu estágio nesta Universidade. De maneira especial, agradeço aos professores doutores Antonio Rufián Lizana e Rafaela Osuna Gómez (Universidad de Sevilla) e Gabriel Ruiz Garzón (Universidad de Cádiz) pelas propostas de trabalho e por inúmeros ensinamentos (**Muchísimas gracias a todos ustedes...**).

Aos funcionários da Secretaria de Pós Graduação e da Matemática Aplicada pelo auxílio prestado de forma competente e amável: nominalmente, Cidinha, Ednaldo, Tânia e Fátima.

Aos colegas e amigos, os quais tornaram meus dias mais alegres.

Ao Professor Marko Rojas, pela proposta de trabalho e orientação segura e também pela confiança e amizade por mim.

Por fim, agradeço ao CNPq e CAPES, sem cujos financiamentos, não teria sido possível a realização deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos o problema de otimização vetorial entre espaços de Banach quanto a condições necessárias e suficientes de otimalidade. Para isto, utilizamos diferentes noções de convexidade generalizada.

Na Primeira Parte tratamos o problema (Fréchet) diferenciável. Mostramos que as soluções fracamente eficientes de tais problemas podem ser completamente caracterizadas em termos de condições estacionárias e de convexidade generalizadas (pseudoinvexidade, no caso do problema multiobjetivo irrestrito e KT-invexidade, para o problema com restrições de desigualdade).

Na Segunda Parte, discutimos o problema não diferenciável. Estabelecemos um resultado de existência de soluções fracamente eficientes e uma caracterização de soluções fracamente eficientes via desigualdades quase-variacionais. Também discutimos condições de otimalidade através de cones de aproximação local e de K-derivadas. Além disto, obtivemos condições de segunda ordem através das noções de Hessiana e Derivadas Direcionais de segunda ordem generalizados (Cominetti e Correa).

Na Terceira Parte, consideramos dois problemas específicos de otimização multiobjetivo não diferenciável: o problema fracionário multiobjetivo e o problema de tempo contínuo multiobjetivo.

Conteúdo

I O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO VETORIAL DIFERENCIÁVEL 7

1 Funções pré-invexas e soluções fracamente eficientes de problemas Gâteaux-diferenciáveis 8

1.1 Introdução e formulação do problema 8

1.2 Funções Vetoriais Pré-Invexas 9

1.3 Condições de otimalidade 14

1.3.1 Condições de otimalidade para problemas escalares 14

1.3.2 Um Teorema de Escalarização 16

1.3.3 Condições de otimalidade para problemas vetoriais 18

1.4 Eficiência fraca global 20

2 Caracterização de eficiência fraca em termos de convexidade generalizada e condições estacionárias para o problema Fréchet-diferenciável 22

2.1 Introdução e formulação do problema 22

2.2 O problema irrestrito (VOP) 25

2.3 O problema com restrições (CVOP) 29

3 Caracterização de soluções eficientes e fracamente eficientes via desigualdades quase-variacionais vetoriais 33

3.1 Introdução 33

3.2 Eficiência e desigualdades quase-variacionais vetoriais 35

II O PROBLEMA NÃO DIFERENCIÁVEL 41

4 Sobre a existência de soluções fracamente eficientes 42

4.1 Introdução 42

4.2 Preliminares 43

4.3 Existência de soluções fracamente eficientes 46

5 Condições Ponto de Sela e Condições de Segunda Ordem 56

5.1 Introdução e formulação do problema 57

5.2 Preliminares técnicos 58

5.2.1 Funções subconvexlike generalizadas e o Teorema de Alternativa de Gordan 58

5.2.2 Derivadas generalizadas de 2a. ordem e Hessiana generalizada . . 59

5.3 Condições de Ponto de Sela 62

5.4 Condições de 2a. ordem 66

6 Condições necessárias e suficientes de otimalidade via cones de aproximação local e K-derivadas 71

6.1 Introdução 71

6.2 Cones de Aproximação e Derivadas K-direcionais 73

6.3 Condições Necessárias de Otimalidade 76

6.4 Condições Suficientes de Otimalidade 83

7 Caracterização de eficiência via desigualdades quase variacionais 88

7.1 Introdução 88

7.2 Soluções eficientes e desigualdades quase-variacionais 89

III DOIS PROBLEMAS ESPECÍFICOS DE OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO 96

8 O problema de otimização fracionário multiobjetivo não diferenciável 97

8.1 Introdução 97

8.2 Condições necessárias 98

8.3 Dualidade 104

9 O problema de tempo contínuo multiobjetivo 108

9.1 Introdução 108

9.2 Condições necessárias 110

9.3 Condições suficientes 121

10 Conclusões e possibilidades de trabalho futuro 130

10.1 Conclusões 130

10.2 Possibilidades de trabalho futuro 131

INTRODUÇÃO

Diariamente encontramos situações que levam à tomada de decisões. Tipicamente, este tipo de problemas surgem em áreas como Gerenciamento de Empresas, Administração de Recursos, Planejamento de Estratégias, etc. Nestes casos, freqüentemente se encontram vários objetivos fixados como metas pelo decisor. Assim é grande a aplicabilidade de Problemas de Otimização com Objetivos Múltiplos e, daí o nosso interesse em estudá-lo.

Formalmente, o problema de otimização multiobjetivo (ou com objetivos múltiplos) admite a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) := (f_1(x), ..., f_p(x)) \\ &\text{sujeito a: } x \in S \end{aligned} \tag{PV}$$

onde as f_i´s são funções definidas em $\mathbb{R}^n$ a valores reais e S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$.

Geralmente, não é possível minimizar simultaneamente todos os objetivos f_i sujeitos à restrição S, o que leva a várias noções de otimalidade para o problema de otimização (PV).

Os primeiros resultados no campo da Otimização Multiobjetivo são devidos a Pareto [80] que em seu célebre trabalho *"Cours d'Economie Politique"* introduz o conceito de *solução eficiente*. Conceitualmente, um ponto é chamado eficiente quando não é possível melhorar nenhum objetivo sem piorar algum outro objetivo. Esta noção de otimalidade tem sido amplamente utilizada na Economia, pois é intimamente ligada à chamada Teoria do Bem-Estar Social [74].

Depois da Segunda Guerra Mundial (época que coincide com o auge da Pesquisa Operacional) numerosos trabalhos surgiram neste campo. Foram estudados, sobretudo, condições necessárias e suficientes para a determinação de pontos eficientes. Desta época se destacam os trabalhos de Charnes e Cooper , Gale, Kuhn e Tucker e de Karlin .

Durante os anos 60, a literatura sobre este tema vai se sofisticando e surgem novos conceitos de otimalidade. Merecem destaque as noções de *eficiência fraca* e de *eficiência própria*. Grosso modo, um ponto é chamado fracamente eficiente se não é possível melhorar todos os objetivos simultaneamente e é chamado propriamente eficiente se é solução eficiente e se os quocientes entre o ganho em um objetivo e a perda com respeito aos demais objetivos é limitada.

Desde então, têm aparecido inúmeras publicações, tanto de caráter prático como teórico, nas quais se desenvolvem critérios que permitem decidir quando um ponto factível é ou não eficiente. O estudo de soluções eficientes se dá desde duas vertentes: por um lado, tenta-se re lacionar tais soluções com as soluções de problemas escalares, cuja resolução é bem conhecida (pois os problemas de otimização escalares têm uma teoria bastante desenvolvida) e, por outro lado, procurar encontrar condições que permitam facilitar o tratamento computacional de tais problemas e que garantam a eficiência.

Em qualquer um destes casos, a convexidade (ou em sua falta, a convexidade generalizada) desempenha um papel fundamental, seja na otimização escalar ou vetorial. As funções convexas são extremamente importantes na Teoria de Otimização por dois motivos fundamentais: Por um lado, todo mínimo local é mínimo global e por outro lado, para tais funções é possível estabelecer condições necessárias e suficientes de otimalidade via Regra de Multiplicadores (caso diferenciável) e Ponto de Sela (caso não diferenciável). Recentemente, Osuna- Gómez et al. provaram que é possível estabelecer condições necessárias e suficientes de otimalidade (no sentido da eficiência fraca) para o problema (PV) na forma de regra de multiplicadores e de condições de tipo ponto de sela (veja [75], [76]).

Um importante fato no campo da Programação Matemática foi o surgimento das chamadas *funções invexas*, as quais foram introduzidas por Hanson em [49]. Tais funções tem a propriedade de todo ponto ser mínimo global quando, e somente quando, for estacionário. Além disso, quando o problema tem restrições definidas por desigualdades, as condições de Karush-Kuhn-Tucker (abreviadamente, KKT) são suficientes para a otimal-

idade, quando todas as funções envolvidas no problema são invexas.

Entretanto, tais condições não são necessárias, nem mesmo quando o problema é invexo. Em [72] Martin introduz uma classe de problemas, denominados KT-invexos (e que inclui problemas cujos funcionais são invexos) a qual possui a seguinte propriedade: o problema é KT-invexo quando e somente quando, todo ponto que satisfaz as condições KKT são mínimos globais. Contrapartidas deste resultado para o problema vetorial (PV) foram estabelecidas por Osuna-Gómez et al em [77] para as soluções fracamente eficientes.

Para o problema de otimização escalar, é possível obter uma caracterização de otimalidade via desigualdades variacionais.

De fato, Mancino e Stampacchia [70] provaram que quando $\phi : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é o gradiente de uma função convexa $\theta : S \to \mathbb{R}$, onde S é aberto e convexo, então o problema de otimização escalar:

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } \theta(x) \\ \text{sujeito a: } x \in S \end{array} \tag{PE}$$

é equivalente ao seguinte problema de desigualdade variacional:

$$\text{Encontrar } \bar{x} \in S \text{ tal que } (y - \bar{x})^T \phi(\bar{x}) \geq 0, \forall y \in S. \tag{DV}$$

Contrapartidas deste resultado foram obtidos por Ruiz-Garzón et al. [89] para o problema invexo e também para o problema vetorial (PV) sob hipóteses adequadas de invexidade generalizada e de monotonicidade, para as soluções fracamente eficientes.

Observamos que nem todo problema de decisão pode ser formulado como um (PV). Para formular o problema de otimização que consideraremos neste trabalho, introduziremos a seguinte notação: dado um espaço de Banach F e Q é um cone convexo, fechado, com interior não vazio e distinto de F, consideraremos as seguintes relações binárias em F :

(1) $x, y \in F$, $x \leqq_Q y \Leftrightarrow y - x \in Q$;

(2) $x, y \in F$, $x \leq_Q y \Leftrightarrow y - x \in Q \setminus \{0\}$;

(3) $x, y \in F$, $x <_Q y \Leftrightarrow y - x \in \operatorname{int} Q$.

O problema de otimização vetorial generalizado é:

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } f(x) \\ \text{sujeito a } x \in S \end{array} \qquad \text{(PVG)}$$

onde E e F são espaços de Banach, $f : E \to F$ é uma função dada e S é um subconjunto não vazio de E.

Em tal caso, por "minimizar" entenderemos "buscar as soluções eficientes (ou fracamente eficiente) do problema (PVG)".

Dizemos que $\bar{x} \in S$ é *solução eficiente* (respectivamente, *fracamente eficiente*) de (PVG) se não existe $x \in S$ tal que $x - \bar{x} \leq_Q 0$ (resp. $x - \bar{x} <_Q 0$).

Neste trabalho estabeleceremos contrapartidas dos resultados comentados anteriormente para o problema de otimização vetorial generalizado (PVG).

Esta Tese é estruturada em três partes: na Primeira Parte, consideraremos o caso em que o problema (PVG) é (Fréchet) diferenciável. No Capítulo 1, extenderemos a noção usual de preinvexidade para funções definidas entre espaços de Banach e, utilizando tal noção, obteremos condições necessárias e suficientes de otimalidade (condição KKT generalizada) para o caso em que S é definido por uma restrição de desigualdade em (PVG). Além disso, provaremos que estas funções têm a propriedade de toda solução fracamente eficiente local ser solução fracamente eficiente global. Também introduzimos a noção de ponto crítico vetorial e de ponto crítico Kuhn-Tucker para o problema (PVG) e obtemos uma extensão dos resultados de Osuna-Gómez et al. [77] a este problema.

No Capítulo 2, caracterizaremos as soluções fracamente eficientes de (PVG) em termos de desigualdades quase- variacionais, sob hipóteses adequadas de convexidade generalizada. Tratam-se de resultados que generalizam os obtidos por Martin [72] e Osuna-Gómez et al. [77] ao contexto de otimização vetorial entre espaços abstratos.

No Capítulo 3 caracterizaremos as soluções fracamente eficientes de (PVG) em termos de desigualdades quese- variacionais. Nosssos resultados generalizam os obtidos por Ruiz-Garzón et al. [89]. Na Segunda Parte, consideraremos o caso em que o problema (PVG) é não diferenciável. No Capítulo 4, discutimos a existência de soluções fracamente eficientes para o problema (PVG), sob hipóteses adequadas de convexidade generalizada.

O Capítulo 5 tem três seções: na Seção 5.1, estabeleceremos condições de tipo Ponto de Sela e resultados de Dualidade para o problema (PVG). A definição de Ponto de Sela que empregaremos aqui tem a vantegem de ser expressa em termos de duas desigualdades escalares (e não vetoriais, como usualmente é o caso em otimização multiobjetivo). Formularemos um dual escalar de tipo Lagrangeano para (PVG) e estabelecemos alguns resultados de dualidade. Na Seção 5.2, consideraremos o caso particular em que F tem dimensão finita. Utilizaremos os resultados da Seção 5.2, na obtenção de condições de segunda ordem para o problema cujas funções são $C^{1,1}$ através das noções de derivada direcional de segunda ordem e de Hessiana generalizada, introduzidas por Cominetti e Correa em [25].

No Capítulo 6 estudaremos condições necessárias e suficientes de otimalidade para o problema (PVG) através das noções de cones de aproximação local e de K-derivadas, introduzidas por Elster e Thierfelder em [40], para o caso particular em que F tem dimensão finita.

No Capítulo 7, estudaremos o caso em que (PVG) é Lipschitz-contínuo. Caracterizaremos as soluções (propriamente) eficientes e fracamente eficientes via desigualdades quase- variacionais. Isto será feito através das noções de derivadas direcionais e gradientes generalizados de Clarke [23].

Na Terceira Parte trataremos dois problemas particulares de otimização multiobjetivo. No Capítulo 8, estudaremos o Problema Fracionário Multiobjetivo quanto a condições de otimalidade e dualidade e no Capítulo 9, estudaremos o Problema de Tempo Contínuo Multiobjetivo.

Finalmente, no Capítulo 10, comentamos algumas possibilidades de trabalho futuro

e apresentamos alguns comentários finais e conclusões.

Parte I

O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO VETORIAL DIFERENCIÁVEL

Capítulo 1

Funções pré-invexas e soluções fracamente eficientes de problemas Gâteaux-diferenciáveis

1.1 Introdução e formulação do problema

Neste Capítulo, consideraremos o seguinte problema de otimização:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar } f(x) & \\ \text{sujeito a:} & \begin{array}{l} -g(x) \in K \\ x \in S \end{array} \end{array} \tag{P}$$

onde E, F e G são espaços de Banach, $f : E \to F$ e $G : E \to G$ são funções direcionalmente diferenciáveis (Gâteaux-diferenciáveis).

Assumiremos que os espaços E e G são (parcialmente) ordenados pelos cones convexos, fechados $Q \subset F$ e $K \subset G$, com $\operatorname{int} Q \neq \emptyset$.

Por "minimizar" entenderemos "buscar as soluções fracamente eficientes de (P)".

Denotaremos $\mathbb{F} := \{x \in S : -g(x) \in K\}$ o conjunto factível.

Como citamos na Introdução, a noção de convexidade é de extrema importância na

Teoria de Otimização.

Os resultados seguintes são bastante conhecidos: se $\theta : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função convexa e S é um subconjunto convexo, aberto e não vazio de $\mathbb{R}^n$, então:

(1) Se $\bar{x} \in S$ é um mínimo local de θ em S, então $\bar{x}$ é um mínimo global de θ em S;

(2) Se θ é diferenciável em S, então, $\nabla\theta(x_1)(x_2 - x_1) \leq \theta(x_2) - \theta(x_1), \forall x_1, x_2 \in S$ (e, em particular, se $\bar{x} \in S$ é tal que $\nabla\theta(\bar{x}) = 0$, então $\bar{x}$ é mínimo global de θ em S).

Muitas são as funções que não são convexas e que verificam propriedades análogas a (1) e (2): são usualmente chamadas funções convexas generalizadas.

Neste Capítulo, estendemos o conceito de função pré-invexas (introduzidas por Hanson e Mond, em [50]) para funções definidas entre espaços de Banach.

Provaremos que tais funções (a valores vetoriais) possuem propriedades análogas a (1) e (2) e serão utilizadas para obter condições necessárias e suficientes de otimalidade para o problema (P).

1.2 Funções Vetoriais Pré-Invexas

Nesta Seção, introduzimos o conceito de funções (a valores vetoriais) pré-invexas e estudaremos algumas de suas propriedades. Veremos que tais funções satisfazem um Teorema de Alternativa de Tipo Gordan, o qual será de crucial importância na obtenção de condições de otimalidade para (P).

Definição 1.1 *(Hanson e Mond [50]) Seja E um espaço de Banach. A função $\theta : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ é chamada* ***pré-invexa*** *com respeito a η em $S \subset \Omega$ se para cada $x_1, x_2 \in S$ e cada $\lambda \in (0,1)$, existe uma função vetorial $\eta : S \times S \to E$ tal que*

$$\theta(x_2 + \lambda\eta(x_1, x_2)) \leq \lambda\theta(x_1) + (1 - \lambda)\theta(x_2).$$

Se o conjunto $S \subset E$ tem a propriedade

$$x_2 + \lambda\eta(x_1, x_2) \in S, \forall x_1, x_2 \in S, \forall \lambda \in (0,1)$$

diremos que S é *invexo* com respeito a η.

O conjunto $Q^* := \{\omega^* \in F^* : \langle \omega^*, x\rangle \geq 0, \forall x \in Q\}$ é o cone dual de Q e F^* é o dual topológico de F.

Denotamos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a forma bilinear canônica entre F^* e F.

A generalização de funções pré-invexas para funções definidas entre espaços abstratos que propomos é a seguinte:

Definição 1.2 *Sejam E e F dois espaços de Banach. A função $f : \Omega \subset E \to F$ é* ***pré-invexa*** *com respeito a η em $S \subset \Omega$ se para cada $\omega^* \in Q^*$, a composta $\omega^* \circ f$ é pré-invexa com respeito a η, no sentido da Definição 1.1.*

A Definição 1.2 pode ser expressa, de maneira equivalente, em termos da desigualdade $\leqq_Q$.

Lema 1.3 *A Definição 1.2 é equivalente a: f é pré-invexa com respeito a η se e somente se, para cada $x_1, x_2 \in S$ e cada $\lambda \in (0,1)$, existe um vetor $\eta : S \times S \to E$ tal que*

$$f(x_2 + \lambda\eta(x_1, x_2)) \leqq_Q \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2). \tag{1.1}$$

Para isto, necessitaremos do seguinte resultado:

Lema 1.4 *Seja F um espaço de Banach ordenado (parcialmente) pelo cone $Q \subset F$, com Q convexo e fechado. Se existe um $y \in F$ tal que $\langle y^*, y\rangle \geq 0, \forall y^* \in Q^*$, então $y \in Q$.*

(A prova deste resultado se encontra em [69], p. 215)

PROVA: (do Lema 1.3) Sejam $x_1, x_2 \in S, \lambda \in (0,1)$. Então, as seguintes equivalências são verdadeiras:

$$f(x_2 + \lambda\eta(x_1, x_2)) \leqq_Q \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - f(x_2 + \lambda\eta(x_1, x_2)) \in Q$$

$$\Leftrightarrow \omega^*(\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - f(x_2 + \lambda\eta(x_1, x_2))) \geq 0, \forall \omega^* \in Q^*$$

$$\Leftrightarrow \omega^* \circ f(x_2 + \lambda\eta(x_1, x_2)) \leq \lambda(\omega^* \circ f)(x_1) + (1-\lambda)(\omega^* \circ f)(x_2), \forall \omega^* \in Q^*$$

onde a primeira equivalência segue da definição de $\leq_Q$, a segunda segue do Lema 1.4 e a terceira segue da linearidade de ω^*. ■

A seguinte propriedade das funções pré-invexas direcionalmente diferenciáveis será extensivamente utilizada neste Capítulo:

Proposição 1.5 *Seja $f : \Omega \subset E \to F$ uma função pré-invexa em $S \subset \Omega$, direcionalmente diferenciável. Então:*

$$(\omega^* \circ f)'(x, \eta(x, y)) \leq \omega^* \circ f(y) - \omega^* \circ f(x), \forall \omega^* \in Q^*, \forall x, y \in S. \tag{1.2}$$

PROVA: Assuma que f é pré-invexa em S. Então, pelo Lema 1.3, $\omega^* \circ f$ é pré-invexa em S, $\forall \omega^* \in Q^*$ (no sentido da Definição 1.1), ou seja,

$$\omega^* \circ f(x + \lambda\eta(x, y)) \leq \omega^*(\lambda f(y) + (1-\lambda) f(x)), \forall \lambda \in (0, 1). \tag{1.3}$$

Segue de (1.3):

$$\omega^* \circ f(x + \lambda\eta(x, y)) - \omega^* \circ f(x) \leq \lambda \omega^*(f(y) - f(x)). \tag{1.4}$$

Dividindo a desigualdade (1.4) por λ e tomando o limite quando $\lambda \to 0^+$, obtemos (1.2). ■

O seguinte resultado técnico também será extensivamente utilizado:

Lema 1.6 *Se $Q \subset F$ é um cone convexo, com interior não vazio e $p \in Q^* \setminus \{0\}$, então $\langle p, s \rangle > 0$, quando $s \in \operatorname{int} Q$.*

(Para prova, veja [26], p. 54)

O seguinte resultado é um Teorema de Alternativa de Tipo Gordan para funções Pré-invexas.

Teorema 1.7 *Seja $f : E \longrightarrow F$ uma função pré-invexa com respeito a η em $S \subset E$, onde S é um conjunto invexo com respeito a η. Seja $Q \subset F$ um cone convexo com interior não vazio. Então, exatamente uma das seguintes condições se verifica:*

(i) Existe $x \in S$ tal que $-f(x) \in \operatorname{int} Q$;

(ii) Existe $p \in Q^* \setminus \{0\}$ tal que $(p \circ f)(S) \subset \mathbb{R}_+$.

PROVA:

Primeiramente, provaremos que não ocorrem (i) e (ii) simultaneamente. Caso contrário, pelo Lema 1.6, teríamos $p(f(x)) < 0$, com $x \in S$, o que contraria (ii).

Agora, provaremos que o sistema (ii) tem solução quando (i) não tem solução.

Defina:

$$A := f(S) + \operatorname{int} Q.$$

O conjunto A é aberto. De fato, sejam $x \in S$ e $s \in \operatorname{int} Q$ tais que $k = f(x) + s \in A$.

Como $s \in \operatorname{int} Q$, existe uma bola N com centro na origem tal que $s + N \subset \operatorname{int} Q$.

Mas $k + N = f(x) + (s + N) \subset A$, e portanto, A é aberto.

Agora, provaremos que A é convexo. Sejam $k_1, k_2 \in A$ e $\tau \in (0,1)$. Então, $k_1 = f(x_1) + s_1$, $k_2 = f(x_2) + s_2$, com $x_1, x_2 \in S$ e $s_1, s_2 \in \operatorname{int} Q$. Então:

$$(1-\tau)k_1 + \tau k_2 = [(1-\tau)f(x_1) + \tau f(x_2)] + [(1-\tau)s_1 + \tau s_2]. \tag{1.5}$$

Como f é pré-invexa e $\operatorname{int} Q$ é convexo (pois Q é convexo), temos,

$$(1-\tau)f(x_1) + \tau f(x_2) \in f(x_2 + \tau\eta(x_1, x_2)) + Q \tag{1.6}$$

e

$$(1-\tau)s_1 + \tau s_2 \in \operatorname{int} Q. \tag{1.7}$$

Por hipótese, S é invexo e portanto

$$x_2 + \tau\eta(x_1, x_2) \in S. \tag{1.8}$$

De (1.5)-(1.8) segue que $(1-\tau)k_1 + \tau k_2 \in A$, ou seja, A é convexo.

Como (i) não tem solução, então $0 \notin A$ e, pelo Teorema de Separação de Hahn-Banach, existe $p \in F^* \setminus \{0\}$ tal que

$$p(A) \subset \mathbb{R}_+. \tag{1.9}$$

Fixemos um $s \in \operatorname{int} Q$.

Queremos provar que $p(f(x)) \geq 0, \forall x \in S$. Como $s \in \operatorname{int} Q$, temos

$$s + N \subset \operatorname{int} Q \tag{1.10}$$

para alguma bola N.

Para $\tau \in \mathbb{R}_+$ suficientemente grande, temos que $\frac{1}{\tau} f(x) \in N$ e de (1.10) temos que $s - \frac{1}{\tau} f(x) \in \operatorname{int} Q$ e tendo em conta que $\operatorname{int} Q$ é um cone, obtemos $\tau s - f(x) \in \operatorname{int} Q$, ou seja, $\tau s \in f(x) + \operatorname{int} Q \subset A$, e assim, por (1.9) temos

$$p(s) \geq 0, \forall s \in \operatorname{int} Q. \tag{1.11}$$

Mas, para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno temos que $k = f(x) + \varepsilon s \in A$ e assim

$$(p \circ f)(x) = p(k) - \varepsilon p(s) \geq -\varepsilon p(s) \rightarrow 0$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e conseqüentemente,

$$(p \circ f)(x) \geq 0, \forall x \in S. \tag{1.12}$$

Para cada $s_0 \in Q$, $p(s_0) = \frac{1}{\tau}p(\tau s_0)$ e para todo $\tau > 0$ suficientemente pequeno, $\tau s_0 \in \operatorname{int} Q$, e por (1.11) temos que $p(s_0) \leq 0, \forall s_0 \in \operatorname{int} Q$ e, portanto,

$$p \in Q^* \setminus \{0\} \tag{1.13}$$

e (1.12) e (1.13) implicam que p é solução de (ii). ■

1.3 Condições de otimalidade

Esta Seção é dividida em três subseções. Em 1.3.1, consideraremos o problema de otimização escalar, i.e., quando a função objetivo é a valores reais; em 1.3.2 estabeleceremos e provaremos um Teorema de Escalarização, o qual nos permitirá relacionar as soluções fracamente eficientes do problema vetorial (P) com as soluções ótimas de problemas escalares e em 1.3.3 empregaremos os resultados das subseções anteriores na obtenção de condições necessárias e suficientes para a eficiência fraca em (P).

1.3.1 Condições de otimalidade para problemas escalares

Consideraremos o seguinte problema de otimização escalar:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \theta(x) \\ &\text{sujeito a: } \begin{aligned} &-g(x) \in K \\ &x \in S \end{aligned} \end{aligned} \tag{PE}$$

onde E, F são espaços de Banach, G é ordenado (parcialmente) pelo cone convexo, fechado e com interior não vazio, K. As funções $\theta : E \to \mathbb{R}$ e $g : E \to G$ são contínuas e S é um subconjunto aberto e não vazio de E.

Teorema 1.8 *Assuma que as funções θ e g são direcionalmente diferenciáveis e são pré-invexas com respeito a uma mesma η. Seja $\bar{x}$ uma solução de (PE). Então, existem*

$\alpha \geq 0$ *e* $\mu^* \in K^*$, *não simultaneamente nulos e tais que*

$$(\alpha\theta)'(\bar{x}, \eta(\bar{x}, y)) + (\mu^* \circ g)'(\bar{x}, \eta(\bar{x}, y)) \geq 0, \forall y \in S$$

$$\langle \mu^*, g(\bar{x}) \rangle = 0.$$

PROVA: Das hipóteses feitas, resulta que o conjunto factível $\mathbb{F} := \{x \in S : -g(x) \in K\}$ é invexo com respeito a η. Seja $\bar{x}$ uma solução de (PE).

Neste caso, o sistema

$$-\begin{bmatrix} \theta(x) - \theta(\bar{x}) \\ g(x) \end{bmatrix} \in \text{int}(\mathbb{R}_+ \times K)$$

não tem solução $x \in \mathbb{F}$. Do Teorema 1.7, existe $\mu = (\tau, v^*) \in (\mathbb{R}_+ \times K^*) \setminus \{(0,0)\}$ tal que

$$\tau[\theta(x) - \theta(\bar{x})] + v^* \circ g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{F}. \tag{1.14}$$

Fazendo $x = \bar{x}$ em (1.14), obtemos $v^* \circ g(\bar{x}) \geq 0$, e portanto, (pela factibilidade de $\bar{x}$ e pelo Lema 1.4)

$$v^* \circ g(\bar{x}) = 0. \tag{1.15}$$

Observamos que para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos $\bar{x} + \varepsilon\eta(\bar{x}, y) \in \mathbb{F}$, $\forall y \in S$, pois $\mathbb{F}$ é invexo com respeito a η. De (1.14) e (1.15), obtemos

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\tau\theta(\bar{x} + \varepsilon\eta(\bar{x}, y)) - \tau\theta(\bar{x}) + v^* \circ g(\bar{x} + \varepsilon\eta(\bar{x}, y)) - v^* \circ g(\bar{x})}{\varepsilon} =$$

$$= (\tau\theta)'(\bar{x}, \eta(\bar{x}, y)) + (v^* \circ g)'(\bar{x}, \eta(\bar{x}, y)) \geq 0. \tag{1.16}$$

Portanto, segue de (1.16) o resultado desejado, fazendo-se $\alpha = \tau$ e $\mu^* = v^*$. ■

1.3.2 Um Teorema de Escalarização

Consideraremos o seguinte problema de otimização vetorial:

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } f(x) \\ \text{sujeito a: } x \in \Gamma \end{array} \tag{P1}$$

onde $f : E \to F$, $\Gamma \subset E$ é não vazio, E e F são espaços de Banach.

Assumiremos que F é (parcialmente) ordenado pelo cone convexo, fechado e com interior não vazio Q.

O seguinte teorema de escalarização é válido para o problema (P1):

Teorema 1.9 *Assuma em (P1) que a função f é pré-invexa com respeito a η no conjunto factível Γ e que Γ é invexo com respeito a η. Se $x^* \in \Gamma$ é uma solução fracamente eficiente de (P1), então existe um multiplicador $\omega^* \in Q^* \setminus \{0\}$ tal que*

$$\omega^* \circ f(x^*) \leq \omega^* \circ f(x), \forall x \in \Gamma.$$

PROVA: Consideremos os seguintes conjuntos:

$$U := \{u \in F : 0 <_Q u\};\ V := \{v \in F : v \leq_Q f(x^*) - f(x), \text{ para algum } x \in \Gamma\}.$$

Como x^* é solução fracamente eficiente de (P1), então $U \cap V = \varnothing$.

De fato, caso contrário, existiria um $z \in U \cap V$, e, portanto, existe algum $x \in \Gamma$ tal que $0 <_Q z \leq_Q f(x^*) - f(x)$ e, conseqüentemente,

$$f(x) <_Q f(x^*)$$

o que contraria x^* ser solução fracamente eficiente de (P1) (pois $x \in \Gamma$).

Portanto, $U \cap V = \varnothing$.

É claro que U é aberto e convexo (pois $U = \text{int}\, Q$ e Q é convexo). Como f é pré-invexa

e Γ é invexo com respeito a η, então V é convexo.

De fato, sejam $v_1, v_2 \in V$ e $\lambda \in (0,1)$. Então, existem $x_1, x_2 \in \Gamma$ tais que

$$v_1 \leq_Q f(x^*) - f(x_1),\ v_2 \leq_Q f(x^*) - f(x_2)$$

e, como Q é um cone, são válidas

$$\lambda v_1 \leq_Q \lambda f(x^*) - \lambda f(x_1),\ (1-\lambda)v_2 \leq_Q (1-\lambda)f(x^*) - (1-\lambda)f(x_2)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 &\leq_Q f(x^*) - [\lambda f(x_1) - (1-\lambda)f(x_2)] \\ &\leq_Q f(x^*) - f(x_2 + \lambda\eta(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

onde a última desigualdade decorre da pré-invexidade de f e a primeira decorre do fato de Q ser um cone convexo.

Como Γ é um conjunto invexo com respeito a η, temos $x_2 + \lambda\eta(x_1, x_2) \in \Gamma$ e, portanto, V é convexo.

Pelo Teorema de Separação de Hahn-Banach, existe um $\omega^* \in F^* \setminus \{0\}$ tal que

$$\langle \omega^*, v \rangle \leq 0 \leq \langle \omega^*, u \rangle, \forall v \in V, \forall u \in U.$$

A segunda destas desigualdades implica $\langle \omega^*, u \rangle \geq 0, \forall u \in \operatorname{int} Q$.

Mas Q é convexo, fechado e com interior não vazio, e então, $\overline{\operatorname{int} Q} = Q$ (ver [35], p. 413) o que implica $\langle \omega^*, u \rangle \geq 0, \forall u \in Q$, ou seja, $\omega^* \in Q^*$. Observe que para cada $x \in \Gamma$, temos que para cada $x \in \Gamma$, temos $f(x^*) - f(x) \in V$ e portanto,

$$\langle \omega^*, f(x^*) - f(x) \rangle \leq 0, \forall x \in \Gamma.$$

■

1.3.3 Condições de otimalidade para problemas vetoriais

Nesta Subseção, obteremos condições necessárias e suficientes de otimalidade para o problema vetorial (P) através do Teorema 1.8 (condição de otimalidade para problemas escalares) e do Teorema 1.9 (Teorema de Escalarização).

Teorema 1.10 *(condição necessária) Assuma em (P) que as funções f e g são pré-invexas com respeito a uma mesma η, direcionalmente diferenciáveis e o conjunto S é invexo com respeito a η. Se $\bar{x} \in \mathbb{F}$ é solução fracamente eficiente de (P), então existem $\lambda \in Q^*, \mu^* \in K^*$, não simultaneamente nulos e tais que*

$$(\lambda^* \circ f)'(\bar{x}, \eta(\bar{x}, y)) + (\mu^* \circ g)'(\bar{x}, \eta(\bar{x}, y)) \geq 0, \forall y \in \mathbb{F} \tag{1.17}$$

$$\langle \mu^*, g(\bar{x}) \rangle = 0. \tag{1.18}$$

PROVA: Das hipóteses feitas, o conjunto factível $\mathbb{F}$ é invexo com respeito a η. Pelo Teorema 1.9 (Escalarização), existe $\lambda \in Q^* \setminus \{0\}$ tal que

$$\lambda \circ f(\bar{x}) \leq \lambda^* \circ f(x), \forall x \in \mathbb{F}.$$

Desta desigualdade e do Teorema 1.8, existem $\alpha \geq 0$ e $\mu^* \in K^*$, não todos nulos e tais que

$$\alpha(\lambda \circ f)'(\bar{x}, \eta(\bar{x}, y)) + (\mu^* \circ g)'(\bar{x}, \eta(\bar{x}, y)) \geq 0, \forall y \in \mathbb{F} \tag{1.19}$$

$$\langle \mu^*, g(\bar{x}) \rangle = 0. \tag{1.20}$$

Basta definir $\lambda^* := \alpha\lambda$ e obtemos o resultado desejado. ■

Veremos que as condições (1.19) e (1.20) resultam suficientes se $\lambda^* \neq 0$.

Teorema 1.11 *(condição suficiente) Suponha em (P) que as funções f e g são pré-invexas com respeito a uma mesma η e que são direcionalmente diferenciáveis. Suponha também que o conjunto S é invexo com respeito a η. Se existem $\lambda^* \in Q^* \setminus \{0\}$ e $\mu^* \in K^*$, satisfazendo (1.17) e (1.18), então $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (P).*

PROVA: Suponhamos por absurdo que $\bar{x}$ não é solução fracamente eficiente de (P). Então, existe um $x \in \mathbb{F}$ tal que $f(x) <_Q f(\bar{x})$, e como $\lambda^* \in Q^* \setminus \{0\}$, temos (pelo Lema 1.6) que $\lambda^*(f(x) - f(\bar{x})) < 0$, e portanto, pela Proposição 1.5, obtemos

$$(\lambda^* \circ f)'(\bar{x}, \eta(\bar{x}, x)) < 0. \tag{1.21}$$

e, novamente, pela Proposição 1.5

$$(\mu^* \circ g)'(\bar{x}, \eta(\bar{x}, x)) \leq \mu^* \circ g(x) - \mu^* \circ g(\bar{x}) = \mu^* \circ g(x) \leq 0. \tag{1.22}$$

Somando as desigualdades (1.21) e (1.22), obtemos

$$(\lambda^* \circ f)'(\bar{x}, \eta(\bar{x}, x)) + (\mu^* \circ g)'(\bar{x}, \eta(\bar{x}, x)) < 0$$

o que contraria (1.17), e, portanto, $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (P). ■

Observamos que quando λ^* é nulo, o problema (P) é chamado *anormal*. Para que (1.17) e (1.18), com $\lambda^* \neq 0$ seja uma condição necessária de otimalidade, alguma qualificação de restrição deve ser exigida. Talvez a mais popular seja a seguinte condição: **Condição de Regularidade de Slater:** Existe $x_0 \in \mathbb{F}$ tal que $g(x_0) <_K 0$.

Teorema 1.12 *Sob as hipóteses do Teorema 1.10, se a Condição de Regularidade de Slater é satisfeita, então,* $\lambda^* \neq 0$.

PROVA: De fato, suponha que as hipóteses do Teorema 1.10 são verificadas e que a Condição de Regularidade de Slater é satisfeita.

Por absurdo, suponha que $\lambda^* = 0$. Neste caso, existe $\mu^* \in K^* \setminus \{0\}$ tal que

$$(\mu^* \circ g)'(\bar{x}, \eta(\bar{x}, y)) \geq 0, \forall y \in \mathbb{F} \tag{1.23}$$

$$\langle \mu^*, g(\bar{x}) \rangle = 0. \tag{1.24}$$

Mas:

$$(\mu^* \circ g)'(\bar{x}, \eta(\bar{x}, x_0)) \leq \mu^* \circ g(x_0) - \mu^* \circ g(\bar{x})$$
$$= \mu^* \circ g(x_0) < 0$$

o que contraria (1.23). ■

1.4 Eficiência fraca global

Nesta seção, voltaremos a considerar o problema (P1), formulado em 1.3.2.

Recordemos que um ponto $x_0 \in \Gamma$ é chamado *solução global fracamente eficiente* de (P1) se não existe $x \in \Gamma$ tal que $f(x) <_Q f(x_0)$ e é chamado *solução local fracamente eficiente* de (P1) se existe N vizinhança de x_0 tal que não existe $x \in N \cap \Gamma$ tal que $f(x) <_Q f(x_0)$.

Provaremos que se f é função pré-invexa então eficiência local fraca implica eficiência global fraca.

Teorema 1.13 *(eficiência global) Suponha em (P1) que f é função pré-invexa com respeito a η, que o conjunto Γ é invexo com respeito à mesma η e que Q é um cone convexo, fechado, ponteado e com interior não vazio. Então toda solução local fracamente eficiente de (P1) é uma solução global fracamente eficiente de (P1).*

PROVA: Suponha que a função f é pré-invexa em Γ e que $\bar{x} \in \Gamma$ é solução local fracamente eficiente de (P1) mas que não é solução global fracamente eficiente.

Então, existem $x' \in \Gamma$ tal que

$$f(\bar{x}) - f(x') \in \operatorname{int} Q. \tag{1.25}$$

Como f é pré-invexa e Γ é invexo, então existe $\eta : E \times E \to E$ tal que $\bar{x} + \alpha\eta(x', \bar{x}) \in \Gamma$,

para cada $\alpha \in (0,1)$ e

$$f(\bar{x} + \alpha\eta(x', \bar{x})) \leq_Q \alpha f(x') + (1-\alpha) f(\bar{x})$$

ou equivalentemente,

$$\alpha f(x') + (1-\alpha) f(\bar{x}) - f(\bar{x} + \alpha\eta(x', \bar{x})) \in Q \tag{1.26}$$

e, de (1.25) e (1.26) segue que

$$\alpha(f(x') - f(\bar{x})) + f(\bar{x}) - f(\bar{x} + \alpha\eta(x', \bar{x})) \in Q, \ \forall \alpha \in (0,1). \tag{1.27}$$

Como Q é um cone ponteado, segue de (1.25) e (1.27) que $\eta(x', \bar{x}) \neq 0$. Por outro lado,

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x} + \alpha\eta(x', \bar{x})) = [\alpha(f(x') - f(\bar{x})) + f(\bar{x}) - f(\bar{x} + \alpha\eta(x', \bar{x}))] + \alpha(f(\bar{x}) - f(x'))$$
$$\in Q + \operatorname{int} Q \subset \operatorname{int} Q, \forall \alpha \in (0,1)$$

o que contradiz o fato de $\bar{x}$ ser solução local fracamente eficiente de (P1). ■

Concluímos este Capítulo observando que os mesmos resultados foram provados por Osuna-Gómez em [78], para o caso particular em que (P) é finito-dimensional (i.e., quando $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, $G = \mathbb{R}^m$, $Q = \mathbb{R}^p_+$ e $K = \mathbb{R}^m_+$). Neste caso, $Q^* = \mathbb{R}^p_+$ e $K^* = \mathbb{R}^m_+$ de modo que nossos resultados generalizam os obtidos pela autora em [78] ao problema infinito-dimensional.

Capítulo 2

Caracterização de eficiência fraca em termos de convexidade generalizada e condições estacionárias para o problema Fréchet-diferenciável

2.1 Introdução e formulação do problema

No Capítulo 1, estabelecemos condições de otimalidade para o problema de otimização vetorial cujas funções são direcionalmente diferenciáveis. Neste Capítulo, consideraremos o caso em que as funções são Fréchet-diferenciáveis (ou, diferenciáveis, por simplicidade).

À luz do trabalho [77], introduziremos as noções de ponto crítico vetorial e de ponto crítico Kuhn-Tucker para problemas de otimização vetoriais sem e com restrições, respectivamente. Utilizando estas noções caracterizaremos as soluções fracamente eficientes em termos de noções adequadas de convexidade generalizada.

Em otimização escalar, as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) são suficientes para a otimalidade quando o problema é convexo. Nos últimos anos, consideráveis progressos têm ocorrido no sentido de enfraquecer a hipótese de convexidade, ampliando,

assim, a classe de problemas que verificam a sufiência das condições KKT.

Uma importante contribuição nesta direção foi dada por Hanson [49], que introduziu as funções invexas. Para tais funções, as condições KKT são suficientes para garantir a otimalidade global. Pouco depois, Martin [72] provou que para problemas sem restrições, a invexidade é condição necessária e suficiente para que todo ponto estacionário seja ótimo global.

Uma interessante questão que surge é a seguinte: para problemas com restrições (de desigualdade) qual é a maior classe de problemas tal que as condições KKT são necessárias e suficientes para estabelecer a otimalidade global? A resposta foi dada por Martin [72], onde introduz a noção de problemas KT-invexos. Assim sendo, consideremos o problema escalar irrestrito:

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } \theta(x) \\ \text{sujeito a: } x \in S \end{array} \tag{PEI}$$

onde $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $S \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e não vazio.

Dizemos que $\bar{x} \in S$ é *ponto crítico* se $\nabla\theta(\bar{x}) = 0$.

Recordemos que $\theta : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é *invexa* em $\bar{x}$ se existe $\eta : S \times S \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\theta(x) - \theta(\bar{x}) \geq \eta(x, \bar{x})^T \nabla\theta(\bar{x}), \forall x \in S$$

e dizemos que é invexa em $S_0 \subset S$ se for invexa em cada $\bar{x} \in S_0$.

Proposição 2.1 *(Martin [72]) A função θ é invexa em S se e somente se todo ponto crítico é mínimo global de (PEI).*

Agora, seja o problema escalar com restrições:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar } \theta(x) & \\ \text{sujeito a:} & g_j(x) \leq 0,\ j = 1, ..., m \\ & x \in S \end{array} \tag{PER}$$

onde $\theta, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, ..., m$ e $S \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e não vazio.

Diremos que $\bar{x}$ é um *ponto crítico de Kuhn-Tucker* se existe $\bar{u} \in \mathbb{R}^m_+$ tal que

$$\nabla\theta(\bar{x}) + \bar{u}^T \nabla g(\bar{x}) = 0;$$

$$\bar{u}^T g(\bar{x}) = 0.$$

Sob hipóteses de convexidade e de regularidade, ser ponto crítico Kuhn-Tucker é condição necessária de otimalidade (veja Mangasarian, [71]). Além disso, é condição suficiente, se o problema é invexo:

Proposição 2.2 *(Hanson [49]) Se θ e g_j $(j = 1, ..., m)$ são invexas em S com respeito a uma mesma η e se $\bar{x}$ é ponto crítico Kuhn-Tucker, então $\bar{x}$ é solução de (PER).*

Entretanto, não se pode afirmar que (PER) é invexo quando e somente quando todo ponto crítico Kuhn-Tucker é ótimo.

Recordemos (Martin, [72]) que o problema (PER) é *KT-invexo* se existe uma função vetorial $\eta : S \times S \to \mathbb{R}^n$ tal que para cada $x_1, x_2 \in S$, com $g(x_1), g(x_2) \leqq 0$, se verificam:

$$\theta(x_1) - \theta(x_2) \geq \eta(x_1, x_2)^T \nabla\theta(x_2)$$

$$-\eta(x_1, x_2)^T \nabla g_j(x_2) \geq 0, \forall j \in I(x_2)$$

onde $I(x_2) := \{j : g_j(x_2) = 0\}$ é o conjunto dos índices de restrições ativas em x_2.

É claro que a classe de problemas KT-invexos inclui os problemas cujos funcionais são todos invexos com respeito a uma mesma η. Além disso, vale o seguinte resultado:

Proposição 2.3 *(Martin, [72]) Todo ponto crítico Kuhn-Tucker de (PER) é mínimo global quando, e somente quando, o problema (PER) é KT-invexo.*

Neste Capítulo, estabelecemos contrapartidas destes resultados para as soluções fracamente eficientes de problemas de otimização vetorial entre espaços de Banach.

Consideraremos o *problema de otimização vetorial irrestrito*:

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } f(x) \\ \text{sujeito a: } x \in S \end{array} \tag{VOP}$$

onde E, F são espaços de Banach, $f : E \to F$, $Q \subset F$ é cone convexo, fechado e com interior não vazio e S é um subconjunto aberto e não vazio de E.

Também consideraremos o *problema de otimização vetorial com restrições*:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar } f(x) & \\ \text{sujeito a:} & \begin{array}{l} -g(x) \in K \\ x \in S \end{array} \end{array} \tag{CVOP}$$

onde E, F, G são espaços de Banach, $f : E \to F$, $g : E \to G$, $Q \subset F$ e $K \subset G$ são cones convexos, fechados e $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$.

Na Seção 2.2, estudaremos o problema sem restrições (VOP). Estenderemos as noções de funções pseudoinvexas e de ponto crítico para o problema (VOP) e veremos que f é pseudoinvexa quando e somente quando todo ponto crítico é solução fracamente eficiente. Na Seção 2.3, consideraremos o problema com restrições (CVOP). Estenderemos a noção de KT-invexidade e de ponto crítico Kuhn-Tucker ao contexto de otimização vetorial e provaremos que, sob certas hipóteses, (CVOP) é KT-invexo quando, e somente quando, todo ponto crítico Kuhn-Tucker é solução fracamente eficiente.

2.2 O problema irrestrito (VOP)

Nesta Seção e na seguinte, E e F são espaços de Banach, $Q \subset F$ é um cone convexo, fechado e com interior não vazio e distinto do espaço F. O conjunto $S \subset F$ é aberto e não vazio e a função $f : E \to F$ é diferenciável em S.

Definição 2.4 *$\bar{x} \in S$ é um **ponto crítico vetorial** de (VOP) se existe $\lambda^* \in Q^* \setminus \{0\}$ tal que $\lambda^* \circ Df(\bar{x}) = 0$ (onde $Df(\bar{x}) \in \mathcal{L}(E, F)$ é a derivada Fréchet de f em $\bar{x}$ e $\mathcal{L}(E, F)$*

é o espaço dos operadores lineares e contínuos de E em F).

Teorema 2.5 *(Craven [26]) Se $\bar{x} \in S$ é solução fracamente eficiente de (VOP), então $\bar{x}$ é ponto crítico vetorial.*

As noções de funções invexas e pseudoinvexas podem ser estendidas a funções definidas entre espaços abstratos da seguinte maneira:

Definição 2.6 *Seja $f : E \to F$ uma função diferenciável em $S \subset E$.*

(a) *Dizemos que f é* ***invexa*** *em S se existe $\eta : S \times S \to E$ tal que*

$$Df(x_2)\eta(x_1, x_2) \leq_Q f(x_1) - f(x_2), \forall x_1, x_2 \in S.$$

(b) *Dizemos que f é* ***pseudoinvexa*** *em S com respeito a η se existe $\eta : S \times S \to E$ tal que*

$$x_1, x_2 \in S,\ f(x_1) - f(x_2) <_Q 0 \Rightarrow Df(x_2)\eta(x_1, x_2) <_Q 0$$

(onde $Df(x_2)\eta(x_1, x_2)$ denota o valor da função $Df(x_2) \in \mathcal{L}(E, F)$ aplicada no vetor $\eta(x_1, x_2) \in E$).

É imediato da definição que toda função invexa é pseudoinvexa com respeito a uma mesma η. Entretanto, ao contrário do que ocorre com as funções escalares, existem funções (vetoriais) que são pseudoinvexas e que não são invexas (veja [89]).

Proposição 2.7 *Se em (VOP) a função f é pseudoinvexa e $\bar{x} \in S$ é um ponto crítico vetorial, então, $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente.*

PROVA: Por absurdo, suponha que $\bar{x} \in S$ é ponto crítico vetorial e que não é solução fracamente eficiente de (VOP).

Neste caso, existe $\lambda^* \in Q^* \setminus \{0\}$ tal que

$$\lambda^* \circ Df(\bar{x}) = 0 \tag{2.1}$$

e existe $x \in S$ tal que

$$f(x) - f(\bar{x}) \in -\operatorname{int} Q. \tag{2.2}$$

Por outro lado, como f é pseudoinvexa, segue de (2.2) que

$$Df(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \in -\operatorname{int} Q$$

e, pelo Lema 1.6,

$$\lambda^*(Df(\bar{x})\eta(x, \bar{x})) = [\lambda^* \circ Df(\bar{x})]\eta(x, \bar{x}) < 0$$

o que contraria (2.1) e, portanto, $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (VOP). ■

O seguinte resultado é uma generalização de Teorema de Farkas, e será de fundamental importância nesta seção e na seguinte:

Lema 2.8 *Sejam X, Y e V espaços normados, $\Lambda \in \mathcal{L}(X, V)$ e $M \in \mathcal{L}(X, Y)$. Sejam $T \subset V$ e $Q \subset Y$ dois cones convexos, com $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$ e sejam dados dois vetores $b \in -T$ e $s \in -Q$. Supor ainda que o cone $[\Lambda, b]^T(T^*)$ é fraco* fechado. Então, o sistema*

$$\begin{cases} \Lambda x + b \in -T \\ Mx + s \in -\operatorname{int} Q \end{cases}$$

não tem solução, se e somente se, existem $\tau \in Q^* \setminus \{0\}$ e $\lambda \in T^*$ tais que

$$\begin{cases} \tau M + \lambda\Lambda = 0 \\ \langle \lambda, b \rangle = 0 \\ \langle \tau, s \rangle = 0. \end{cases}$$

(Para prova, veja [26], p. 59-60)

Teorema 2.9 *A função f em (VOP) é pseudoinvexa em S se e somente se cada ponto crítico vetorial é solução fracamente eficiente de (VOP).*

PROVA: Pela Proposição 2.7, cada ponto crítico vetorial é solução fracamente eficiente de (VOP).

Agora, fixemos $\bar{x} \in S$ e consideremos os seguintes dois sistemas:

$$f(x) - f(\bar{x}) \in -\operatorname{int} Q, \ x \in S \tag{2.3}$$

$$Df(\bar{x})u \in -\operatorname{int} Q, \ u \in E. \tag{2.4}$$

Provaremos que o sistema (2.4) tem solução quando o sistema (2.3). De fato, seja $x \in S$ uma solução de (2.3). Então, $\bar{x}$ não é solução fracamente eficiente e, por hipótese, não é ponto crítico vetorial.

Deste modo, não existe $\lambda^* \in Q^* \setminus \{0\}$ tal que $\lambda^* \circ Df(\bar{x}) = 0$. Defina: $\Lambda := 0 \in \mathcal{L}(E, F)$, $M := Df(\bar{x}) \in \mathcal{L}(E, F)$, $b := 0 \in E$ e $s := 0 \in F$.

Assim, não existe $\tau \in Q^* \setminus \{0\}$ e $\lambda \in Q^*$ tais que

$$\begin{cases} \tau M + \lambda \Lambda = 0 \\ \langle \lambda, b \rangle = 0 \\ \langle \tau, s \rangle = 0. \end{cases}$$

É claro que $[\Lambda, b]^T(T^*)$ é fraco* fechado.

Pelo Lema 2.8, existe $u \in E$ tal que

$$\begin{cases} \Lambda u + b = 0 \in -Q \\ Mu + s = Df(\bar{x})u \in -\operatorname{int} Q \end{cases}$$

e, em particular, o sistema (2.4) tem solução $u \in E$. Fazendo $\eta(x, \bar{x}) = u$, obtemos que f é pseudoinvexa. ■

2.3 O problema com restrições (CVOP)

Nesta seção, consideraremos o problema de otimização vetorial com restrições:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar } & f(x) \\ \text{sujeito a:} & \begin{array}{l} -g(x) \in K \\ x \in S \end{array} \end{array} \qquad \text{(CVOP)}$$

onde E, F, G são espaços de Banach, $f : E \to F$, $g : E \to G$, $Q \subset F$ e $K \subset G$ são cones convexos, fechados e $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$.

Denotaremos $\mathbb{F} := \{x \in S : -g(x) \in K\}$ o conjunto factível de (CVOP).

A noção de problema KT-invexo admite a seguinte generalização para problemas de otimização vetoriais:

Definição 2.10 *Dizemos que (CVOP) é* ***KT-invexo*** *em $x_2 \in \mathbb{F}$ se existe uma função vetorial $\eta : S \times S \to E$ tal que para cada $x_1 \in \mathbb{F}$ se verificam*

$$\begin{cases} f(x_1) - f(x_2) <_Q 0 \Rightarrow Df(x_2)\eta(x_1, x_2) <_Q 0 \\ Dg(x_2)\eta(x_1, x_2) \leqq_K 0 \end{cases}$$

e se o problema é KT-invexo em cada $x \in \mathbb{F}$, dizemos que (CVOP) é KT-invexo.

A noção de ponto crítico Kuhn-Tucker admite a seguinte extensão ao caso vetorial:

Definição 2.11 *Dizemos que $\bar{x} \in \mathbb{F}$ é* ***ponto crítico vetorial Kuhn-Tucker*** *se existem $\lambda^* \in Q^* \setminus \{0\}$ e $\mu^* \in K^*$ tais que*

$$\lambda^* \circ Df(\bar{x}) + \mu^* \circ Dg(\bar{x}) = 0;$$

$$\langle \mu^*, g(\bar{x}) \rangle = 0.$$

Os dois seguintes resultados são contrapartidas da Proposição 2.3.

Teorema 2.12 *(suficiência) Se (CVOP) é KT-invexo, então, cada ponto crítico vetorial Kuhn-Tucker é solução fracamente eficiente de (CVOP).*

PROVA: Suponha que (CVOP) é KT-invexo e seja $\bar{x}$ um ponto crítico vetorial Kuhn-Tucker.

Então, existem $\lambda^* \in Q^* \setminus \{0\}$ e $\mu^* \in K^*$ tais que

$$\lambda^* \circ Df(\bar{x}) + \mu^* \circ Dg(\bar{x}) = 0;$$

$$\langle \mu^*, g(\bar{x}) \rangle = 0.$$

Em particular,

$$\lambda^* \circ Df(\bar{x})\eta(\bar{x}, x) + \mu^* \circ Dg(\bar{x})\eta(\bar{x}, x) = 0, \forall x \in \mathbb{F}$$

$$\langle \mu^*, g(\bar{x}) \rangle = 0. \tag{2.5}$$

Por absurdo, suponha que $\bar{x}$ não é solução fracamente eficiente de (CVOP). Então, existe $x \in \mathbb{F}$ tal que $f(x) - f(\bar{x}) \in -\operatorname{int} Q$ e pelo Lema 1.6,

$$\lambda^*(Df(\bar{x})\eta(x, \bar{x})) < 0. \tag{2.6}$$

De (2.5) e (2.6) segue que

$$\mu^*(Dg(\bar{x})\eta(x, \bar{x})) > 0. \tag{2.7}$$

Como (CVOP) é KT-invexo, $-Dg(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \in K$ e $\mu^* \in K^*$, obtemos

$$\mu^*(Dg(\bar{x})\eta(x, \bar{x})) \leq 0$$

o que contradiz (2.7) e assim, $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (CVOP). ■

Teorema 2.13 *(Necessidade) Assuma que para cada $\bar{x}$ ponto crítico vetorial Kuhn-Tucker de (CVOP) o conjunto $[Dg(\bar{x}), g(\bar{x})]^T(K^*)$ é fraco* fechado. Então, se cada ponto*

crítico vetorial Kuhn-Tucker é solução fracamente eficiente de (CVOP) então (CVOP) é KT-invexo.

PROVA: Fixemos $\bar{x} \in S$ e consideremos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} Df(\bar{x})u \in -\operatorname{int} Q \\ Dg(\bar{x})u \in -K \end{cases} \tag{2.8}$$

e

$$\begin{cases} f(x) - f(\bar{x}) \in -\operatorname{int} Q \\ g(x) \in -K. \end{cases} \tag{2.9}$$

Para provar que (CVOP) é KT-invexo, basta provar que o sistema (2.8) tem solução $u \in E$ quando o sistema (2.9) tem solução $x \in S$ (e, em tal caso, basta $\eta(x, \bar{x}) := u \in E$).

Suponhamos que (2.9) tem solução. Então, $\bar{x}$ não é solução fracamente eficiente de (CVOP) e, por hipótese, $\bar{x}$ não é ponto crítico vetorial Kuhn-Tucker. Assim sendo, não existem $\tau \in Q^* \setminus \{0\}$ e $\in K^*$ tais que

$$\tau M + \lambda\Lambda = 0;$$

$$\langle \lambda, b \rangle = 0;$$

$$\langle \tau, s \rangle = 0$$

(onde $\Lambda = Dg(\bar{x}) \in L(E, G)$, $M = Df(\bar{x}) \in L(E, F)$, $b = g(\bar{x}) \in -K$ e $s = 0 \in -Q$). Pelo Lema 2.8, o sistema

$$\begin{cases} \Lambda u + b \in -K \\ Mu + s \in -\operatorname{int} Q \end{cases}$$

tem solução $u \in E$, ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} Dg(\bar{x})u + g(\bar{x}) \in -K \\ Df(\bar{x})u \in -\operatorname{int} Q. \end{cases}$$

Mas

$$Dg(\bar{x})u = [Dg(\bar{x})u + g(\bar{x})] - g(\bar{x}) \subset -K + (-K) \subset -K$$

e, portanto, o sistema (2.8) tem solução $u \in E$. ■

Observação 2.14 *Quando o cone K é poliédrico, sempre se tem $[Dg(\bar{x}).g(\bar{x}]^T(K^*)$ fraco* fechado, qualquer que seja $\bar{x} \in \mathbb{F}$. Então, os resultados deste Capítulo generalizam os correspondentes, obtidos por Osuna-Gómez et al., no qual os autores consideram o caso $K = \mathbb{R}^p_+$.*

Capítulo 3

Caracterização de soluções eficientes e fracamente eficientes via desigualdades quase-variacionais vetoriais

3.1 Introdução

Desigualdades variacionais surgem naturalmente em inúmeras áreas, tais como Física, Economia, Otimização e Controle, Elasticidade, etc (veja, por exemplo [32], [62], [52]). Para o caso escalar, Mancino e Stampacchia [70] obtiveram o seguinte resultado: se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é o gradiente de uma função convexa $\theta : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onde S é um conjunto aberto e convexo, então o problema de desigualdade variacional $(\overline{VIP})$,

$(\overline{VIP})$ Encontrar $\bar{x} \in S$ tal que $(y - \bar{x})^T F(\bar{x}) \geq 0, \forall y \in S$

é equivalente ao problema de otimização (MP)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Minimizar } \theta(x) \\ \text{sujeito a: } x \in S. \end{array}\right\} \qquad \text{(MP)}$$

Uma extensão do problema de desigualdade variacional é a chamada problema de desigualdade quase-variacional $(\overline{VLIP})$.

Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$ e consideremos duas funções $F : S \to \mathbb{R}^n$ e $\eta : S \times S \to \mathbb{R}^n$. O problema de desigualdade quase-variacional $(\overline{VLIP})$ é:

$(\overline{VLIP})$ Encontrar $\bar{x} \in S$ tal que

$$\eta(y, \bar{x})^T F(\bar{x}) \geq 0, \forall y \in S.$$

Parida et. al. em [81] estudaram a existência de solução do problema $(\overline{VLIP})$ e a equivalência entre $(\overline{VLIP})$ e os problemas de programação convexa. Ruiz et al. em [89] provaram que as soluções de $(\overline{VLIP})$ e do correspondente problema de otimização escalar coincidem, sob hipóteses adequadas de invexidade e de monotonicidade generalizadas.

Neste Capítulo, extenderemos os resultados acima às soluções eficientes e fracamente eficientes do problema de otimização vetorial entre espaços de Banach.

Sejam E_1, E_2 dois espaços de Banach, $f : E_1 \to E_2$ uma função dada e definida em S subconjunto não vazio de E_2. Seja $Q \subset E_2$ um cone convexo, fechado, ponteado, com interior não vazio e distinto de E_2.

Denotaremos

$$\left.\begin{array}{l} \text{V-min } f(x) \\ \text{sujeito a: } x \in S \end{array}\right\} \qquad \text{(VOP)}$$

o qual consiste em determinar as soluções eficientes de f no conjunto factível S e denotaremos

$$\left.\begin{array}{l} \text{W-min } f(x) \\ \text{sujeito a: } x \in S \end{array}\right\} \qquad \text{(WVOP)}$$

o qual consiste em determinar as soluções fracamente eficientes.

Sejam $E(f; S)$ o conjunto das soluções de (VOP) e $WE(f; S)$ o conjunto das soluções de (WVOP).

É claro que $E(f; S) \subset WE(f; S)$. Provaremos que sob hipóteses de invexidade generalizada é possível caracterizar as soluções dos problemas de otimização vetorial (VOP) e

(CVOP) em termos das soluções de certas desigualdades variacionais vetoriais, as quais serão definidas a seguir.

Para isto, sejam $S \subset E_1$ não vazio, $\eta : S \times S \to E_1$ e $F : S \to \mathcal{L}(E_1, E_2)$ duas funções dadas. O **Problema de Desigualdade quase-variacional Vetorial** (VVLIP) é:

(VVLIP): Encontrar um ponto $\bar{x} \in S$ tal que

$$F(\bar{x})\eta(y, \bar{x}) \notin -Q \setminus \{0\}, \forall y \in S.$$

(onde $F(\bar{x})\eta(y, \bar{x})$ é o valor da função $F(\bar{x})$ aplicada no vetor $\eta(y, \bar{x})$). Ou equivalentemente, (VVLIP) consiste de encontrar $\bar{x} \in S$ tal que $F(\bar{x})\eta(y, \bar{x}) \not\leq_Q 0, \forall y \in S$.

O **Problema de Desigualdade quase-variacional Vetorial** (WVVLIP) é:

(WVVLIP): Encontrar $\bar{x} \in S$ tal que

$$F(\bar{x})\eta(y, \bar{x}) \notin -\operatorname{int} Q, \forall y \in S$$

ou, o que é o mesmo, (WVVLIP) consiste de encontrar $\bar{x} \in S$ tais que $F(\bar{x})\eta(y, \bar{x}) \not<_Q 0, \forall y \in S$.

Provaremos, na seção seguinte que é possível relacionar, sob hipóteses adequadas de invexidade generalizadas, as soluções eficientes e fracamente eficientes com as soluções dos problemas quase-variacionais (VVLIP) e (WVVLIP).

3.2 Eficiência e desigualdades quase-variacionais vetoriais

Em [96], Yang e Goh provaram que, sob hipóteses de convexidade generalizadas, se $F = Df$ (onde Df denota a derivada de Fréchet de f) então toda solução de (VVLIP) é solução fracamente eficiente de (VOP) e reciprocamente. Também provaram que a resolução de (WVOP) é equivalente à resolução de (WVVLIP). Resultados similares

podem ser encontrados em Lee e Kum [67].

Generalizaremos os resultados obtidos por Lee e Kum [67] e Yang e Goh [96] para funções pseudoinvexas definidas entre espaços de Banach. Observamos que Ansari e Siddiqi [1], Kazmi [61] e Yang [97] obtêm resultados similares para funções pré-invexas (classe de funções mais restritiva que a que empregaremos aqui). As noções de invexidade que apresentamos a seguir foram introduzidas for Osuna-Gómez et. al. [77] em contexto finito-dimensional e admitem a seguinte generalização natural:

Definição 3.1 *Seja S um subconjunto não vazio de E_1 e $f : S \to E_2$ uma função dada, Fréchet-diferenciável (por brevidade: diferenciável) em $x \in \operatorname{int} S$.*

1. *Dizemos que f é* ***invexa*** *(IX) em $x \in S$ se e somente se existe uma função vetorial $\eta : S \times S \to E_2$ tal que*

$$f(y) - f(x) + Df(x)\eta(y, x) \in Q, \forall y \in S.$$

2. *A função f é chamada* ***estritamente invexa*** *(SIX) em $x \in S$ se e somente se existe uma função vetorial $\eta : S \times S \to E_2$*

$$f(y) - f(x) + Df(x)\eta(y, x) \in \operatorname{int} Q, \ \forall y \in S \setminus \{x\}.$$

3. *A função f é chamada* ***pseudoinvexa*** *(PIX) em $x \in S$ se e somente se existe uma função vetorial $\eta : S \times S \to E_2$ tal que*

$$f(y) - f(x) \in -\operatorname{int} Q \Rightarrow Df(x)\eta(y, x) \in -\operatorname{int} Q.$$

Segue facilmente das definições:

$$\boxed{\textbf{(SIX)} \ \Rightarrow \ \textbf{(IX)} \ \Rightarrow \ \textbf{(PIX)}}$$

É bastante conhecido o fato de que, no caso $E_2 = \mathbb{R}$ e $Q = \mathbb{R}_+$, a classe das funções pseudoinvexas coincide com a das funções invexas. Entretanto, é possível provar que isto não ocorre em geral (veja [89]).

Teorema 3.2 *Seja $f : S \subset E_1 \to E_2$ uma função diferenciável e invexa em $\bar{x} \in \operatorname{int} S$, com respeito a η. Se $F = Df$ e se $\bar{x}$ é solução da desigualdade (VVLIP) com respeito à mesma η, então $\bar{x}$ é solução eficiente de (VOP).*

PROVA: Por absurdo, suponha que $\bar{x}$ é solução de (VVLIP) e que não é solução eficiente de (VOP). Então existe $y \in S$ tal que

$$f(y) - f(x) \in -Q \setminus \{0\}. \tag{3.1}$$

Segue da hipótese de invexidade que

$$Df(\bar{x})\eta(y, \bar{x}) \in f(y) - f(\bar{x}) - Q. \tag{3.2}$$

De (3.1) e (3.2), obtemos

$$Df(\bar{x})\eta(y, \bar{x}) \in -Q \setminus \{0\}. \tag{3.3}$$

(De fato: é claro que $Df(\bar{x})\eta(y, \bar{x}) \in -Q$. Se tivéssemos $Df(\bar{x})\eta(y, \bar{x}) = 0$, de (3.2) obteríamos $-[f(y) - f(\bar{x})] \in -Q$, mas isto contradiz (3.1), já que Q é um cone ponteado. ■

Teorema 3.3 *Seja $f : S \subset E_1 \to E_2$ uma função diferenciável em $\bar{x} \in \operatorname{int} S$. Assuma que $F = Df$ e que $-f$ é estritamente invexa em $\bar{x}$ com respeito a η. Se $\bar{x}$ é solução fracamente de (WVOP), então $\bar{x}$ é solução (VVLIP) (e, com maior razão, é solução de (WVVLIP)).*

PROVA: Por absurdo, suponhamos que $\bar{x}$ é solução de (WVOP) e que não é solução da desigualdade (VVLIP). Então, existe $y \in S$ tal que

$$-Df(\bar{x})\eta(y, \bar{x}) \in Q \setminus \{0\}. \tag{3.4}$$

Por outro lado, $-f$ é estritamente invexa e conseqüentemente

$$f(\bar{x}) - f(y) + Df(\bar{x})\eta(y, \bar{x}) \subset \operatorname{int} Q \tag{3.5}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) - f(y) = f(\bar{x}) - f(y) + Df(\bar{x})\eta(y, \bar{x}) + (-Df(\bar{x})\eta(y, \bar{x})) \\ \subset Q + \operatorname{int} Q \subset \operatorname{int} Q \end{aligned}$$

o que contraria o fato de $\bar{x}$ ser solução fracamente eficiente de (WVOP). ■

Teorema 3.4 *Sejam $f : S \subset E_1 \to E_2$ uma função diferenciável em $\bar{x} \in \operatorname{int} S$ e $F = Df$. Então:*

(i) *Se $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (WVOP), então $\bar{x}$ é solução da desigualdade (WVVLIP);*

(ii) *Se f é uma função pseudoinvexa com respeito a η em $\bar{x}$ e se $\bar{x}$ é solução da desigualdade (WVVLIP) com respeito a η, então $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (WVOP).*

PROVA:

(i) Assuma que $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (WVOP). Seja $y \in S$. Como $\bar{x} \in \operatorname{int} S$, então, para cada $t > 0$ suficientemente pequeno, o ponto $\bar{x} + t\eta(y, \bar{x})$ está em S. Por outro lado, sendo $\bar{x}$ solução fracamente eficiente de (WVOP), segue que

$$f(\bar{x} + t\eta(y, \bar{x})) - f(\bar{x}) \notin -\operatorname{int} Q \tag{3.6}$$

e, como $-\operatorname{int} Q$ é um cone, para tais t, temos

$$\frac{1}{t}[f(\bar{x} + t\eta(y, \bar{x})) - f(\bar{x})] \notin -\operatorname{int} Q. \tag{3.7}$$

Fazendo em (3.7) $t \to 0^+$ e tendo em conta que $(-\operatorname{int} Q)^c$ é fechado, segue que

$$Df(\bar{x})\eta(y,\bar{x}) \notin -\operatorname{int} Q, \forall y \in S$$

e $\bar{x}$ é solução da desigualdade (WVVLIP).

(ii) Suponha que $\bar{x} \in S$ é solução da desigualdade (WVVLIP) mas não é solução fracamente eficiente de (WVOP). Então, existe um $y \in S$ tal que

$$f(y) - f(x) \in -\operatorname{int} Q \tag{3.8}$$

e, como f é pseudoinvexa em $\bar{x}$, temos

$$Df(\bar{x})\eta(y,\bar{x}) \in -\operatorname{int} Q$$

o que contraria o fato de $\bar{x}$ ser solução da desigualdade (WVVLIP). ■

Teorema 3.5 *Seja $f : S \subset E_1 \to E_2$ uma função diferenciável em $\bar{x}$. Assuma que $F = Df$ e que f é estritamente invexa com respeito a η em $\bar{x}$. Se $\bar{x}$ é um solução fracamente eficiente de (WVOP), então também é solução eficiente de (VOP).*

PROVA: Assuma que $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (WVOP) mas que não é solução eficiente de (VOP). Neste caso, existe $y \in S$ tal que

$$f(y) - f(\bar{x}) \in -Q \setminus \{0\} \tag{3.9}$$

e, como f é estritamente invexa em $\bar{x}$,

$$f(y) - f(\bar{x}) - Df(\bar{x})\eta(y,\bar{x}) \in \operatorname{int} Q. \tag{3.10}$$

Então, de (3.9) e (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} Df(\bar{x})\eta(y,\bar{x}) &\in f(y) - f(\bar{x}) - \operatorname{int} Q \\ &\subset -Q + (-\operatorname{int} Q) \\ &\subset -\operatorname{int} Q \end{aligned} \tag{3.11}$$

Desta última inclusão segue que $\bar{x}$ não é solução de (WVVLIP). Com maior razão, (Teorema 3.4) $\bar{x}$ não é solução fracamente eficiente de (WVOP), o que contraria a hipótese feita. ■

O Teorema 3.4 e a Proposição 2.6 nos possibilita relacionar as soluções fracamente eficientes de (WVOP) com os pontos críticos vetoriais (VCP) (e, portanto, com as soluções da desigualdade (WVVLIP)). Isto pode ser dito de maneira mais precisa, assim:

Corolário 3.6 *Suponha que S é aberto e que $F = Df$. Se f é pseudoinvexa com respeito a η em S, então os pontos críticos vetoriais, as soluções fracamente eficientes de (WVOP) e as soluções da desigualdade (WVVLIP) coincidem.*

Desta maneira, os resultados desta Capítulo podem ser representados no seguinte diagrama:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \textbf{(VVLIP)} & \begin{array}{c} \Rightarrow f(IX), F = Df \\ \Leftarrow -f(SIX), F = Df \end{array} & \textbf{(VOP)} & & \\ \Downarrow & & \Downarrow\Uparrow f(SIX) & & \\ \textbf{(WVVLIP)} & \begin{array}{c} \Rightarrow f(PIX), F = Df \\ \Leftarrow F = Df \end{array} & \textbf{(WVOP)} & \begin{array}{c} \Leftarrow f(PIX), F = Df \\ \Rightarrow \end{array} & \textbf{(VCP)} \end{array}}$$

Parte II

O PROBLEMA NÃO DIFERENCIÁVEL

Capítulo 4

Sobre a existência de soluções fracamente eficientes

4.1 Introdução

É fato que o papel desempenhado pela Análise Não Diferenciável é de grande importância na Teoria de Otimização. Isto se deve por pelo menos dois motivos. Por um lado, em muitas aplicações, a hipótese de diferenciabilidade pode ser demasiado restritiva e, por outro, existem inúmeros mecanismos naturais que geram "não suavidades ", mesmo quando se parte de problemas diferenciáveis. Isto surge, por exemplo, em Teoria de Dualidade, Análise de Estabilidade, Técnicas de Decomposição, Métodos de Penalização, etc.

Na segunda parte deste trabalho, estudaremos o problema de otimização não diferenciável entre espaços de Banach. Estamos interessados no estudo da existência de soluções fracamente eficientes para problemas não convexos e não diferenciáveis, cujas funções estão definidas entre espaços de Banach infinito- dimensionais. Consideraremos

neste Capítulo o seguinte problema de otimização vetorial:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a:} & x \in K \end{array}\right\} \qquad \text{(PV)}$$

onde f é uma função definida entre dois espaços de Banach infinito-dimensionais.

Nosso objetivo neste Capítulo é estabelecer a existência de soluções fracamente eficientes para (PV). Para isto, consideraremos a classe das funções compactamente fortemente Lipschitz, a qual foi introduzida por El Abdouni e Thibault em [93] no estudo de condições necessárias para a otimalidade no problema otimização vetorial (veja também [37], [94]) e que nos permitirá extender alguns resultados da Análise Não Diferenciável de Clarke [23] a funções definidas entre espaços de Banach abstratos (veja [93]).

Necessitaremos de uma noção de convexidade generalizada para funções definidas entre espaços de Banach (utilizaremos aqui as chamadas funções invexas). Provaremos que as soluções de uma certa desugualdade quase- variacional são soluções fracamente eficientes de (PV) e, através desta caracterização e também o Teorema KKM-Fan, provaremos a existência de soluções para o problema (PV). Os resultados que obtidos aqui, generalizam os obtidos por Chen e Craven [22] e Kazmi [61].

O Capítulo tem a seguinte estrutura: na Seção 4.2, fixaremos a notação básica e alguns resultados de Análise Não Diferenciável, os quais serão também utilizados no Capítulo 7, e na Seção 4.3, estabeleceremos nosso resultado central.

4.2 Preliminares

Sejam X, Y dois espaços de Banach reais. Denotaremos $\|\cdot\|$ a norma em Y. Sejam $K \subset X$ um subconjunto não vazio e $P \subset Y$ um cone convexo e ponteado, tal que $\text{int}P \neq \varnothing$. Seja $f : X \to Y$ uma função dada.

Consideraremos o seguinte problema de otimização vetorial:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a:} & x \in K \end{array}\right\} \qquad \text{(PV)}$$

A noção de otimalidade que consideraremos é a eficiência fraca. O objetivo deste trabalho é estabelecer a existência de soluções fracamente eficientes para (PV).

Relembramos algumas noções e resultados de Análise Não Diferenciável.

A **derivada direcional generalizada de Clarke** de uma função localmente Lipschitz ϕ de X em $\mathbb{R}$ em $\overline{x}$ na direção d, denotada por $\phi^o(\overline{x}, d)$ (veja [23]) é dada por:

$$\phi^o(\overline{x}; d) = \limsup_{\substack{x \to \overline{x} \\ t \downarrow 0}} \frac{\phi(y + tv) - \phi(y)}{t}$$

e o **gradiente generalizado de Clarke** de ϕ em $\overline{x}$ é definido por

$$\partial\phi(\overline{x}) = \{x^* \in X^* : \phi^o(\overline{x}; d) \geq \langle x^*, d\rangle, \ \ \forall d \in X\},$$

onde X^* denota o dual topológico de X.

Seja C um subconjunto não vazio de X e considere sua **função distância**, isto é, a função $\delta_C(\cdot) : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\delta_C(x) = \inf\{\|x - c\| : c \in C\}.$$

A função distância não é diferenciável mas é globalmente Lipschitz.

Seja $\overline{x} \in C$. Um vetor $d \in X$ é dito ser **tangente** a C em $\overline{x}$ se $\delta_C^o(\overline{x}; d) = 0$.

O conjunto dos vetores tangentes a C at $\overline{x}$ é um cone fechado em X e é chamado o **cone tangente** a C em $\overline{x}$ e é denotado $T_C(\overline{x})$.

Por polaridade, define-se o **cone normal** a C em $\overline{x}$:

$$N_C(\overline{x}) := \{\xi \in X^* : \langle \xi, v\rangle \leq 0, \forall v \in T_C(\overline{x})\}.$$

Assim, $N_C(\overline{x})$ é um cone convexo, fraco*-fechado.

Pode-se provar que a seguinte caracterização (intrínseca) de cone tangente é válida:

$$T_C(y) = \{v \in X : \forall (x_i) \subset C, x_i \to x, \forall (t_i) \in \mathbb{R}, t_i \downarrow 0, \exists v_i \to v, x_i + t_i v_i \in C, \forall i\}.$$

Além disso, se uma função f é localmente Lipschitz e atinge um mínimo sobre $C \subset X$ em $\overline{x}$, então

$$0 \in \partial f(\bar{x}) + N_C(\overline{x}) \tag{4.1}$$

e um ponto $\overline{x}$ que verifica (4.1) é chamado *ponto estacionário.*

Recordamos [83]: Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz em $C \subset X$ é dita ser *invexa* em C se para quaisquer $x, y \in X$, existe um vetor $\eta(y, x) \in T_C(x)$ tal que

$$f(y) - f(x) \geq f^0(x; \eta(y, x)).$$

E mais, f localmente Lipschtz em C é invexa em C se e somente se, todo ponto estacionário é ponto de mínimo global de f em C.

A classe das funções fortemente compactamente Lipschitz tem algumas propriedades (veja Observação 4.2) as quais nos perimitirão extender os resultados da Análise Não Diferenciável de Clarke a funções não diferenciáveis definidas entre espaços abstratos.

Definição 4.1 *Sejam X e Y dois espaços de Banach e $h : X \to Y$ uma função dada. Dizemos que h é* ***fortemente compactamente Lipschitz*** *em $\overline{x} \in X$ se existe uma multifunção $R : X$ é uma multifunção a valores compactos (com respeito a norma) e se existe uma função $r : X \times X \to \mathbb{R}_+$ que satisfazem:*

(i) $\lim_{x \to x, d \to 0} r(x, d) = 0$;

(ii) Existe um $\alpha > 0$ tal que

$$t^{-1}[h(x + td) - h(x)] \in R(d) + \|d\| r(x, t) B_Y,$$

para todo $x \in x + \alpha B_Y$ e $t \in]0, \alpha[$ (Aqui B_Y denota a bola unitária fechada, centrada na origem, de Y);

(iii) $R(0) = \{0\}$ e R é semicontínua superiormente.

Observação 4.2 *Se Y é finito-dimensional, então h é fortemente compactamente Lipschitz em $\overline{x}$ se e somente se é Lipschitz próximo de $\overline{x}$. Para X e Y espaços de Banach abstratos, se h é fortemente compactamente Lipschitz, então para cada $u^* \in Y^*$, $(u^* \circ h)(x) = \langle u^*, h(x)\rangle$ é localmente Lipschitz. Para maiores detalhes sobre funções fortemente compactamente Lipschitz veja[37].*

4.3 Existência de soluções fracamente eficientes

Iniciaremos esta seção relembrando algumas noções de convexidade generalizada para funções definidas entre espaços de Banach.

Definição 4.3 (1) *(Phoung, Sach e Yen [83]) Dizemos que a função $\theta : K \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz em K é* ***invexa*** *com respeito a η em K se para cada $x, y \in K$ existe um vetor $\eta(x, y) \in T_K(y)$ tal que*

$$\theta(x) - \theta(y) - \theta^0(y, \eta(x, y)) \geq 0;$$

(2) *(Brandão, Rojas-Medar e Silva [17]) Dizemos que a função fortemente compactamente Lipschitz $f : K \subset X \longrightarrow Y$ é P-* ***invexa*** *com respeito a η em K se $\omega^* \circ f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ é invexa, para cada $\omega^* \in P^*$.*

(3) *(Chen e Craven [61]) A função $f : K \subset X \longrightarrow Y$ é P-* ***preinvexa*** *com respeito a η, se $\eta : K \times K \longrightarrow X$ é tal que para cada $\alpha \in (0, 1)$ e cada $x, y \in K$ temos $y + \alpha\eta(x, y) \in K$ and*

$$\alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) - f(y + \alpha\eta(x, y)) \in P.$$

O conjunto K é chamado **invexo** com respeito a η, se verifica $y + \alpha\eta(x,y) \in K$ para cada $x, y \in K$ e cada $\alpha \in (0,1)$. Recordamos os seguintes resultados:

Lema 4.4 *Se P é um cone convexo, fechado e com interior não vazio e $y \in Y$ é tal que $\omega^*(y) \geq 0$ $\forall \omega^* \in P^*$, então $y \in P$. E, além disso, se $y \in intP$, então, $\omega^*(y) > 0$, $\forall \omega^* \in P^* \setminus \{0\}$.*

Lema 4.5 *Se P é um cone convexo, fechado e com interior não vazio, então $P^* \neq \{0\}$.*

As provas dos lemas acima podem ser encontradas em ([26], [69]) e [47], respectivamente.

Proposição 4.6 *Seja $f : K \subset X \longrightarrow Y$ uma função fortemente compactamente Lipschitz em K. Se f is P-preinvexa com respeito a η em K e se $\eta(x,\cdot)$ é contínua, para cada $x \in K$, então f é P-invexa com respeito a η.*

PROVA: Queremos provar que, para cada $\omega^* \in P^*$, a composta $\omega^* \circ f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ é invexa.

Primeiramente, provaremos que para quaisquer $x, y \in K$, o vetor $\eta(x,y) \in T_K(y)$. De fato, sejam $(y_i) \in K$, $y_i \to y$ e $t_i \downarrow 0$. Defina: $\widehat{v}_i := \eta(x, y_i)$. É claro que $\widehat{v}_i \to \eta(x,y)$. Além disso, existe um i_0 tal que $t_i \in (0,1)$, para cada $i \geq i_0$. Como K é invexo,

$$y_i + t_i\widehat{v}_i \in K, \forall i \geq i_0.$$

Defina:

$$v_i := \begin{cases} \widehat{v}_i, \text{ se } i \geq i_0, \\ \dfrac{\widehat{v}_i}{t_{i-1}}, \text{ se } i < i_0. \end{cases}$$

Para $i < i_0$, $y_i + t_i v_i = y_i + \dfrac{t_i}{t_{i-1}}\eta(x, y_i) \in K$ (pois K é invexo e $\dfrac{t_i}{t_{i-1}} \in (0,1)$).

Portanto, pela caracterização (intrínseca) do cone tangente, temos que $\eta(x,y) \in T_K(y)$, $\forall y \in K$. Como f é P-preinvexa, do Lema 4.4, obtemos

$$\alpha(\omega^* \circ f)(x) + (1-\alpha)(\omega^* \circ f)(\widetilde{y}) - (\omega^* \circ f)(\widetilde{y} + \alpha\eta(x, \widetilde{y})) \geq 0 \qquad (4.2)$$

Para cada $\omega^* \in P^*$, $\alpha \in (0,1)$ e $x, \widetilde{y} \in K$. Como f é P-preinvexa, $\eta(x,y) \in T_K(y), \forall y \in K$. Então,

$$\frac{1}{\alpha}[\omega^* \circ f(\widetilde{y} + \alpha\eta(x,\widetilde{y})) - \omega^* \circ f(\widetilde{y})] \leq \omega^* \circ f(x) - \omega^* \circ f(\widetilde{y}). \tag{4.3}$$

Fixamos $\varepsilon > 0$. Então:

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{0<\|y-\widetilde{y}\|<\varepsilon \\ 0<\alpha<\varepsilon}} \frac{1}{\alpha}[\omega^* \circ f(\widetilde{y} + \alpha\eta(x,y)) - \omega^* \circ f(\widetilde{y})] \quad &\leq \quad \sup_{\substack{0<\|y-\widetilde{y}\|<\varepsilon \\ 0<\alpha<\varepsilon}} \frac{1}{\alpha}[\omega^* \circ f(\widetilde{y} + \alpha\eta(x,\widetilde{y})) - \omega^* \circ f(\widetilde{y})] \\
&\quad + \sup_{\substack{0<\|y-\widetilde{y}\|<\varepsilon \\ 0<\alpha<\varepsilon}} \frac{1}{\alpha}[\omega^* \circ f(\widetilde{y} + \alpha\eta(x,y)) \\
&\quad -\omega^* \circ f(\widetilde{y} + \alpha\eta(x,\widetilde{y}))] \\
&\leq \quad \sup_{\substack{0<\|y-\widetilde{y}\|<\varepsilon \\ 0<\alpha<\varepsilon}} [\omega^* \circ f(x) - \omega^* \circ f(\widetilde{y})] \\
&\quad +k \sup_{0<\|y-\widetilde{y}\|<\varepsilon} \|\eta(x,y) - \eta(x,\widetilde{y})\|
\end{aligned}$$

(Na anterior, a segunda desigualdade segue de (4.2) e k é a constante de Lipschitz da função $\omega^* \circ f$).

Fazendo $\varepsilon \downarrow 0$, obtemos:

$$(\omega^* \circ f)^0(y; \eta(x,y)) \leq \omega^* \circ f(x) - \omega^* \circ f(y)$$

e como ω^* é arbitrária, f é P-invexa. ■

Teorema 4.7 *Seja $f : K \subset X \longrightarrow Y$ uma função fortemente compactamente Lipschitz, P-invexa e seja K um conjunto invexo com respeito a η. Então, toda solução fracamente eficiente local é solução fracamente eficiente global.*

PROVA: Provaremos a afirmação por absurdo. Suponha que existe $x_0 \in K$ que é solução fracamente eficiente local, mas que não é global. Então existe uma vizinhança U

de x_0 tal que

$$f(x) - f(x_0) \notin -\text{int}P, \ \forall x \in U \cap K, \ x \neq x_0. \tag{4.4}$$

Como x_0 não é solução fracamente eficiente global, então existe $x \in K$ tal que

$$f(x) - f(x_0) \in -\text{int}P. \tag{4.5}$$

Pelo Lema 4.4, temos:

$$\omega^* \circ f(x) - \omega^* \circ f(x_0) < 0, \forall \omega^* \in P^* \setminus \{0\} \tag{4.6}$$

e como f é P-invexa,

$$(\omega^* \circ f)^0(x_0, \eta(x, x_0)) < 0, \forall \omega^* \in P^* \setminus \{0\} \tag{4.7}$$

ou seja,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{\substack{0<\alpha<\varepsilon \\ 0<\|y-x_0\|<\varepsilon}} \frac{(\omega^* \circ f)(y + \alpha\eta(x, x_0)) - (\omega^* \circ f)(y)}{\alpha} < 0. \tag{4.8}$$

Então, para $\omega^* \in P^* \setminus \{0\}$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$(\omega^* \circ f)(x_0 + \alpha\eta(x, x_0)) - (\omega^* \circ f)(x_0) < 0 \tag{4.9}$$

para cada $0 < \alpha < \varepsilon$. Além disso, $x := x_0 + \alpha\eta(x, x_0) \in U \cap K$ se α é suficientemente pequeno. Então

$$f(x) - f(x_0) \notin -\text{int}P \tag{4.10}$$

e, conseqüentemente, pelo Lema 4.4,

$$\exists \omega^* \in P^* \setminus \{0\}, \ \omega^* \circ f(x) - \omega^* \circ f(x_0) \geq 0 \tag{4.11}$$

e isto contradiz (4.6), porque em (4.6), $\omega^* \in P^*$ é arbitrário. Assim, x_0 é solução fracamente eficiente global de (PV). ■

Consideraremos o seguinte **problema de desigualdade quase- variacional vetorial**: Encontrar $x_0 \in K$ tal que para cada $x \in K$ existe $\omega^* \in P^* \setminus \{0\}$ tal que

$$(\omega^* \circ f)^0(x_0, \eta(x, x_0)) \geq 0. \tag{DQV}$$

Observamos que, sob as hipóteses feitas sobre o cone P, pelo Lema 3.3, o cone dual $P^* \neq \{0\}$.

Teorema 4.8 *Seja K um conjunto invexo com respeito a η e $f : K \subset X \longrightarrow Y$ uma função P-invexa com respeito a η. Então toda solução da desigualdade (DQV) é solução fracamente eficiente de (PV).*

PROVA: Suponha que x_0 não é solução fracamente eficiente de (PV) e que é solução da desigualdade quasi-variacional (DQV). Então, existe $x \in K$ tal que

$$f(x) - f(x_0) \in -\text{int}P. \tag{4.12}$$

Por outro lado, existe $\omega^* \in P^* \setminus \{0\}$ tal que $(\omega^* \circ f)^0(x_0, \eta(x, x_0)) \geq 0$. Como f é P -invexa,

$$\omega^* \circ f(x) - \omega^* \circ f(x_0) \geq (\omega^* \circ f)^0(x_0, \eta(x, x_0)) \geq 0. \tag{4.13}$$

Por outro lado o Lema 4.4 implica que $\omega^* \circ f(x) - \omega^* \circ f(x_0) < 0$ e isto contradiz a desigualdade anterior. ■

O seguinte Lema será utilizado na prova de nosso resultado central:

Lema 4.9 *(Teorema KKM-Fan [41]) Seja X um espaço vetorial topológico localmente convexo, $E \subset X$ não vazio e $F : E \rightrightarrows X$ uma multifunção tal que para cada $x \in E$, o conjunto $F(x)$ é fechado e não vazio e, além disto, existe $x \in E$ tal que $F(x)$ é compacto.*

Se cada subconjunto finito de E, $\{x_1, ..., x_n\}$, verifica

$$co\{x_1, ..., x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i) \tag{4.14}$$

então,

$$\bigcap_{x \in E} F(x) \neq \emptyset. \tag{4.15}$$

(onde $co\{x_1, ..., x_n\}$ é a envolvente convexa de $\{x_1, ..., x_n\}$).

Finalmente, nosso resultado de existência para (PV).

Teorema 4.10 *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e K um subconjunto convexo e fechado e limitado de X. Seja $f : K \longrightarrow Y$ uma função fortemente compactamente Lipschitz, P-invexa com respeito a η. Suponha que para cada $x \in K$ e cada $\omega^* \in P^* \setminus \{0\}$, os conjuntos*

$$\Phi(x, \omega^*) := \{y \in K : (\omega^* \circ f)^0(x, \eta(y, x)) < 0\} \tag{4.16}$$

são convexos. Além disso, suponha que η é contínua e satisfaz $\eta(x, x) = 0$, para cada $x \in K$. Então o problema de otimização vetorial (PV) tem solução fracamente eficiente global $x_0 \in K$.

PROVA: Para cada $y \in K$ e $\omega^* \in P^*$, definimos

$$F(y, \omega^*) := \{x \in K : (\omega^* \circ f)^0(x, \eta(y, x)) \geq 0\}. \tag{4.17}$$

Pelo Teorema 4.8, é suficiente provar que a desigualdade quase-variacional vetorial tem uma solução $x_0 \in K$. Ou seja, queremos provar que:

$$\bigcap_{y \in K} \bigcup_{\omega^* \in P^* \setminus \{0\}} F(y, \omega^*) \neq \emptyset. \tag{4.18}$$

Para que isto ocorra, é suficiente que

$$\bigcap_{y\in K}\bigcap_{\omega^*\in P^*\setminus\{0\}} F(y,\omega^*)\neq\emptyset.$$

Assim, checaremos que a multifunção $G: K \rightrightarrows X$ dada por

$$G(y) := \bigcap_{\omega^*\in P^*\setminus\{0\}} F(y,\omega^*) \tag{4.19}$$

satisfaz as hipóteses do Teorema KKM-Fan.

Obviamente, $G(y)\neq\emptyset$, $\forall y\in K$.

Notamos que $P^*\neq\{0\}$(veja [47]). Então para cada $\omega^*\in P^*\setminus\{0\}$, pelas hipóteses temos $\eta(y,y)=0$ e, além disso, $y\in F(y,\omega^*)$. Conseqüentemente, $y\in G(y)$.

Para cada $\{x_1,...,x_n\}\subset K$, $\text{co}\{x_1,...,x_n\}\subset\bigcup_{i=1}^n G(x_i)$. Caso contrário, existiriam $\alpha_i\geq 0$, $i=1,...,n$ tais que $\sum_{i=1}^n\alpha_i=1$ e

$$x:=\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i\notin\bigcup_{i=1}^n G(x_i) \tag{4.20}$$

ou, equivalentemente, para cada i, existe um $\omega_i^*\in P^*\setminus\{0\}$ tal que $x\notin F(x_i,\omega_i^*)$, ou seja, $(\omega_i^*\circ f)^0(x;\eta(x_i,x))<0$. Fixado $i\in\{1,...,n\}$, definiremos para cada $j\in\{1,...,n\}$, $m\in\mathbb{N}$:

$$\omega_{i,j}^{(m)} := \begin{cases} \omega_j^*, \text{ se } (\omega_j^*\circ f)^0(x;\eta(x_i,x))<0 \\ \frac{1}{m}\omega_j^*, \text{ se } (\omega_j^*\circ f)^0(x;\eta(x_i,x))\geq 0 \end{cases}$$

$$\omega_i^{(m)} := \sum_{j=1}^n \omega_{i,j}^{(m)}.$$

Afirmamos que para cada i fixado, o funcional $\omega_i^{(m)}\in P^*\setminus\{0\}, \forall m\in\mathbb{N}$.

De fato, sejam i fixado, $J_1=\{j : (\omega_j^*\circ f)^0(x;\eta(x_i,x))<0\}$, $J_2=\{j : (\omega_j^*\circ f)^0(x;\eta(x_i,x))\geq 0\}$. Sejam $\alpha_1=\#J_1$ (número de elementos de J_1) e $\alpha_2=\#J_2$. O

funcional $\omega_i^{(m)}$ é linear: De fato, sejam $u_1, u_2 \in Y$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\omega_i^{(m)}(\alpha u_1 + u_2) = \sum_{j \in J_1} \omega_j^*(\alpha u_1 + u_2) + \frac{1}{m} \sum_{j \in J_2} \omega_j^*(\alpha u_1 + u_2)$$

$$= \alpha(\sum_{j \in J_1} \omega_j^*(u_1) + \frac{1}{m} \sum_{j \in J_2} \omega_j^*(u_2)) + \sum_{j \in J_1} \omega_j^*(u_1) + \sum_{j \in J_2} \omega_j^*(u_2)$$

$$= \alpha \omega_i^{(m)}(u_1) + \omega_i^{(m)}(u_2).$$

Além disso, $\omega_i^{(m)}$ é contínua.

De fato, seja $M = \max_j \left\|\omega_j^*\right\|$ e $u \in Y$. Então,

$$\left|\omega_i^{(m)}(y)\right| \leq \alpha_1 M \|u\| + \frac{1}{m} \alpha_2 M \|u\| = (\alpha_1 + \frac{1}{m}\alpha_2) M \|u\|, \forall u \in Y$$

e, portanto, $\omega_i^{(m)} \in Y^*, \forall m \in \mathbb{N}$.

Agora, seja $u \in P$. Então, $\omega_i^{(m)}(u) = \sum_{j \in J_1} \omega_j^*(u) + \frac{1}{m} \sum_{j \in J_2} \omega_j^*(u) \geq 0$, (pois cada parcela é não negativa). Logo, $\omega_i^{(m)} \in P^*$. Além disso, $\omega_i^{(m)}$ é não nula, pois para cada j fixado, existe um $u \in P$ tal que $\omega_j^*(u) > 0$.

Portanto, $\omega_i^{(m)}(u) = \sum_{j \in J_1} \omega_j^*(u) + \frac{1}{m} \sum_{j \in J_2} \omega_j^*(u) > 0$ (pois alguma das parcelas é positiva e as demais não negativas).

Assim $\omega_i^{(m)} \in P^* \setminus \{0\}$.

Observamos que, para i fixado, temos $(\omega_i^{(m)} \circ f)^0(x; \eta(x_i, x)) < 0$ para m suficientemente grande.

De fato:

$$(\omega_i^{(m)} \circ f)^0(x; \eta(x_i, x)) = (\sum_{j \in J_1} \omega_j^* \circ f + \frac{1}{m} \sum_{j \in J_2} \omega_j^* \circ f)^0(x; \eta(x_i, x)) \leq (\sum_{j \in J_1} \omega_j^* \circ f)^0(x; \eta(x_i, x)) +$$

$$\frac{1}{m}(\sum_{j \in J_2} \omega_j^* \circ f)^0(x; \eta(x_i, x))$$

e, portanto, para m suficientemente grande, temos

$$(\omega_i^{(m)} \circ f)^0(x; \eta(x_i, x)) \leq (\sum_{j \in J_1} \omega_j^* \circ f)^0(x; \eta(x_i, x)) < 0, \forall m \geq m(i).$$

Em particular, $(\omega_i^{(m(i))} \circ f)^0(x; \eta(x_i, x)) < 0$, $\forall i = 1, ..., n$. Seja $M = \max_i m(i)$. Então, para i fixado

$$(\omega_i^{(M)} \circ f)^0(x, \eta(x_i, x)) < 0, \forall i.$$

Agora, defina:

$$\omega^{(M)} = \sum_i \omega_i^{(M)} \in P^* \setminus \{0\}.$$

Então,

$$(\omega^{(M)} \circ f)^0(x; \eta(x_i, x)) < 0, \forall i$$

pois

$$(\omega^{(M)} \circ f)^0(x; \eta(x_i, x)) \leq \sum (\omega_i^{(M)} \circ f)^0(x; \eta(x_i, x)) < 0$$

ou, o que é equivalente,

$$x_i \in \Phi(x, \omega^{(M)}), \forall i.$$

Mas $\Phi(x, \omega^{(M)})$ é convexo (por hipótese) e, portanto, $x \in \Phi(x, \omega^{(M)})$ (o que é absurdo, pois, por hipótese, $\eta(x, x) = 0$). Portanto, $\text{co}\{x_1, ..., x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^n G(x_i)$.

Provaremos agora que para cada $y \in K$ fixado, o conjunto $G(y) = \bigcap_{\omega^* \in P^* \setminus \{0\}} F(y, \omega^*)$ é fechado. Para isto, é suficiente provar que, para cada $y \in K$ e $\omega^* \in P^* \setminus \{0\}$ o conjunto $F(y, \omega^*)$ é fechado.

De fato, seja $(x_k) \subset F(y, \omega^*)$ tal que $x_k \to x$. Então, $(\omega^* \circ f)^0(x_k; \eta(y, x_k)) \geq 0, \forall k$ e, com maior razão, $\limsup_k (\omega^* \circ f)^0(x_k; \eta(y, x_k)) \geq 0$. Mas $(\omega^* \circ f)^0(\cdot; \cdot)$ é semicontínua superiormente e, assim, $(\omega^* \circ f)^0(x; \eta(y, x)) \geq 0$, ou seja, $x \in F(y, \omega^*)$.

Agora, considere o espaço X munido da topologia fraca. Então, o conjunto $G(y)$ é fracamente compacto, para cada $y \in K$. De fato, $G(y)$ é um subconjunto fechado de K e K é convexo, fechado e limitado. Logo, K é compacto fraco pois X é espaço reflexivo.

portanto, $G(y)$ é compacto fraco. Assim sendo, G satisfaz todas as hipóteses do Teorema de KKM-Fan, e, portanto, existe $x_0 \in \bigcap_{y \in K} G(y)$.■

Capítulo 5

Condições Ponto de Sela e Condições de Segunda Ordem

Nos últimos anos, uma teoria de diferenciabilidade generalizada tem sido desenvolvida e, através de diferentes noções de diferenciabilidade generalizada, vêm sendo estabelecidas condições de otimalidade de primeira ordem para o problema de otimização escalar (veja [23], [86]). Recentemente, uma significativa teoria de diferenciabilidade generalizada de segunda ordem vem sendo desenvolvida (veja, por exemplo, [2], [4], [12], [19], [42], [53], [56]). Em particular, Cominetti e Correa introduzem em [25] as noções de derivada direcional de 2a. ordem e de Hessiana Generalizada, as quais se destacam das demais definições de derivadas generalizadas de segunda ordem por possuir boas propriedades operacionais, motivo pelo qual serão utilizadas neste Capítulo.

5.1 Introdução e formulação do problema

Neste Capítulo, consideraremos inicialmente o problema de otimização vetorial:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar } f(x) & \\ \text{sujeito a:} & -g(x) \in K \\ & x \in S \end{array} \tag{P}$$

onde E, F e G são espaços de Banach, $f : E \to F$, $g : E \to G$ são funções dadas, não necessariamente diferenciáveis. Os espaços F e G são ordenados pelos cones convexos $Q \subset F$ e $K \subset G$, os quais supomos convexos, fechados. Também suporemos que Q tem interior não vazio.

À luz do trabalho [75] propomos uma definição de ponto de sela, a qual nos permita relacionar as soluções fracamente eficientes com os pontos que cumprem condições de ponto de sela. Nossa definição de ponto de sela apresenta a vantagem de se basear na resolução de problemas escalares (e não vetoriais, como é usual). Veremos que, sob hipóteses adequadas de convexidade generalizada é possível caracterizar as soluções fracamente eficientes de (P) em termos da condição ponto de sela. Em seguida, aplicaremos este resultado ao seguinte caso particular (finito-dimensional):

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar } f(x) := (f_1(x), ..., f_p(x)) & \\ \text{sujeito a:} & g_i(x) \leq 0,\ i = 1, ..., m \\ & x \in S \end{array} \tag{PF}$$

onde X é espaço de Banach, $f_j, g_i : X \to \mathbb{R}$, $j \in J = \{1, ..., p\}$ e $I = \{1, ..., m\}$ são funções Gâteaux-diferenciáveis e S é um subconjunto aberto e não vazio de X.

Utilizando uma caracterização de soluções fracamente eficientes em termos dos Pontos de Sela, obteremos condições de segunda ordem para o problema finito-dimensional (PF), em termos de derivadas direcionais de segunda ordem e da Hessiana generalizada.

Este Capítulo é dividido em quatro seções. Na Seção 5.2, recordamos alguns resulta-

dos referentes a funções subconvexlike generalizadas e teoremas de alternativa; também relembramos algumas propriedades das derivadas direcionais generalizadas e da Hessiana generalizada de Cominetti e Correa. Na Seção 5.3 estabelecemos um teorema de tipo Ponto de Sela para o problema de otimização vetorial (P) e, finalmente, utilizamos este resultado na obtenção de condições de segunda ordem para o problema (PF).

5.2 Preliminares técnicos

5.2.1 Funções subconvexlike generalizadas e o Teorema de Alternativa de Gordan

A convexidade, ou em sua falta, a convexidade generalizada, é conceito de fundamental importância dentro da Teoria de Otimização. Um dos motivos é que, para tais funções é possível estabelecer teoremas de alternativa e, através destes, se obtêm condições necessárias e/ ou suficientes de otimalidade. A noção de convexidade generalizada que empregaremos neste Capítulo são as funções subconvexlike generalzadas, as quais foram introduzidas por Xinming Yang [95]. Neste trabalho, prova-se que estas funções satisfazem um Teorema de Alternativa de tipo Gordan.

Vale frisar que existem outras classes de funções que verificam o Teorema de Alternativa (como as funções pré-invexas, por exemplo. Veja Teorema 1.7). Entretanto, se exigem hipóteses adicionais sobre S ou sobre a função (como diferenciabilidade, Lipschitz-continuidade, etc.), o que não ocorre com as funções subconvexlike-generalizadas (veja o Teorema 5.2, abaixo).

Definição 5.1 *Sejam E, F dois espaços normados, $f : S_0 \subset E \to F$ uma função, $Q \subset F$ um cone convexo com interior não vazio e S_0 um subconjunto não vazio de E. Dizemos que f é* ***subconvexlike generalizada*** *se existe um $u \in \operatorname{int} Q$ tal que para cada $\alpha \in (0, 1)$*

e quaisquer $x_1, x_2 \in S_0$ *e* $\varepsilon > 0$, *existem* $x_3 \in S_0$ *e* $\rho > 0$ *tais que*

$$\varepsilon u + \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) - \rho f(x_3) \in Q.$$

A classe das funções subconvexlike generalizadas satisfaz o seguinte teorema de alternativa (cuja prova pode ser encontrada em [95], p. 128-130):

Teorema 5.2 *(Teorema de Alternativa) Sejam* E *e* F *dois espaços de Banach,* $Q \subset F$ *um cone convexo com interior não vazio e seja* $S \subset E$ *não vazio. Suponha que* $f : S \to F$ *é subconvexlike generalizada. Então, exatamente um dos seguintes sistemas é consistente:*

1. Existe $x \in S$ tal que $-f(x) \in \operatorname{int} Q$;

2. Existe $s^* \in Q^* \setminus \{0\}$ tal que $s^*(f(x)) \geq 0, \forall x \in S$.

5.2.2 Derivadas generalizadas de 2a. ordem e Hessiana generalizada

Nesta Subseção reunimos os principais resultados referentes às derivadas generalizadas de segunda ordem e à Hessiana generalizada. As provas serão omitidas. Para maiores detalhes, consultar [25].

No que segue, X é um espaço vetorial topológico localmente convexo. Denotaremos X^* o dual (topológico) de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a forma bilinear canônica (dualidade) entre X^* e X. Consideraremos os espaços X e X^* munidos de topologias compatíveis com a dualidade.

Definição 5.3 *A* ***derivada direcional generalizada de segunda ordem****, de uma função* $f : X \to \mathbb{R}$ *em* $x \in X$ *na direção* $(u, v) \in X \times X$ *é definida por*

$$f^{00}(x; u, v) := \limsup_{\substack{y \to x \\ t,s \to 0}} \frac{f(y + su + tv) - f(y + su) - f(y + tv) + f(y)}{st}$$

e a ***Hessiana generalizada*** *de f em x é a multifunção $\partial^2 f(x) : X \rightrightarrows X^*$ dada por*

$$\partial^2 f(x)(u) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, v\rangle \leq f^{00}(x; u, v), \forall v \in X\}.$$

Algumas propriedades relacionadas a estas duas noções são dadas na seguinte

Proposição 5.4 *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $x \in X$. Então:*

1. $f^{00}(x; \cdot, \cdot)$ é simétrica e bisublinear;
2. $f^{00}(\cdot; u, v)$ é semicontínua superiormente (scs) em x e $\partial^2 f(\cdot)(u)$ é fechada em x, para $u, v \in X$ fixados.
3. $f^{00}(x; u, -v) = f^{00}(x - u, v) = (-f)^{00}(x; u, v)$;
4. $\partial^2 f(x)$ é multifunção a valores convexos e fechados. Além disso,

$$\partial^2 f(x)(u + v) \subset \overline{\partial^2 f(x)(u) + \partial^2 f(x)(v)}, \forall u, v \in X.$$

Recordemos a terminologia empregada por Ioffe em [56]: Uma multifunção $A : X \rightrightarrows X^*$ é um *prefan* se possui imagens fechadas e convexas, $0 \in A(0)$ e $A(tu) = tA(u), \forall t > 0, \forall u \in X$. Um *prefan* é chamado fan se possui imagens não vazias e verifica

$$A(u + v) \subset \overline{A(u) + A(v)}, \forall u, v \in X.$$

Utilizando esta terminologia, $\partial^2 f(x)$ é um prefan.

É conhecido que existe uma correspondência 1-1 entre a família dos fans e o conjunto das funções bisublineares que são semicontínuas inferiormente (sci) na segunda variável. Esta correspondência é estabelecida via *função suporte*.

Mais precisamente, a cada fan $A : X \rightrightarrows X^*$ associa-se a função $s_A : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$, $s_A(u, v) = \sup\langle A(u), v\rangle$. A função s_A é bisublinear e sci na segunda variável. Reciprocamente, a cada $s : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ é função bisublinear e sci na segunda variável, associamos (um único) fan $A : X \rightrightarrows X^*$, $A(u) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, v\rangle \leq s(u, v), \forall v \in X\}$.

A classe das funções duas vezes C-diferenciáveis corresponde à das funções f tais que $\partial^2 f(x)$ é um fan e seu suporte é $f^{00}(x;\cdot,\cdot)$. Ou, o que é equivalente,

Definição 5.5 *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é **duas vezes C-diferenciável** em x se $f^{00}(x;u,\cdot)$ é sci, para cada $x, u \in X$.*

(E neste caso, $f^{00}(x;u,v) = \sup\langle \partial^2 f(x)(u), v\rangle$.)

Para obter propriedades de continuidade para a Hessiana generalizada é necessária definir a seguinte classe de funções:

Definição 5.6 *Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é **duas vezes localmente Lipschitz** em x se para cada $v \in X$ existem V vizinhança de x e U vizinhança da origem tais que o conjunto $f^{00}(V;U,v)$ é limitado em $\mathbb{R}$.*

Sejam Y, Z espaços vetoriais topológicos, $A : Y \rightrightarrows Z$ uma multifunção. Dizemos que A é *localmente compacta* em $y \in Y$ se existe v vizinhança de y tal que $A(V) = \bigcup_{y' \in V} A(y')$ é relativamente compacto. Dizemos que A é *fechada* em y se para cada rede $y_\alpha \to y$ e $z_\alpha \to z$, $z_\alpha \in A(y_\alpha), \forall \alpha$ temos $z \in A(y)$. Se A é localmente compacta e fechada em y, dizemos que A é *semicontínua superiormente* (scs) em y.

Definição 5.7 *Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é **função $C^{1,1}$** se é Gateaux-diferenciável e a derivada (de Gateaux) ∇f é localmente Lipschitz.*

Proposição 5.8 *Assuma que $f : X \to \mathbb{R}$ é duas vezes localmente Lipschitz em x. Então, para cada $u \in X$, valem:*

(a) $\partial^2 f(\cdot)(u)$ é localmente fraco* compacto e $\partial^2 f(x)(u)$ é fraco* compacto;

(b) $f^{00}(\cdot;\cdot,v)$ é scs, para cada $v \in X$ e $\partial^2 f(\cdot)(\cdot)$ é fechada;

(c) Se f é $C^{1,1}$, então $\partial^2 f(\cdot)(\cdot)$ é localmente fraco* compacta.

A seguinte proposição é uma versão generalizada do Teorema do Valor Médio para funções duas vezes C-diferenciáveis.

Proposição 5.9 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função continuamente Gateaux-diferenciável no segmento fechado $[x, y] \subset X$. Então existe ξ no segmento aberto $]x, y[$ tal que*

$$f(y) \in f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2}\overline{\langle \partial^2 f(\xi)(y - x), y - x \rangle}$$

e o fecho é desnecessário quando f é $C^{1,1}$.

5.3 Condições de Ponto de Sela

Seguindo a linha de Kuhn-Tucker e de Fritz-John, relacionaremos as soluções fracamente eficientes do problema (P) com os pontos que cumprem as condições de tipo Ponto de Sela. Aqui pretendemos dar uma definição de ponto de sela para o problema de otimização vetorial, que seja a mais simples possível, baseada na resolução de problemas escalares. A vantagem da nossa definição sobre outras já existentes é que a condição que propomos não acarreta na resolução de um problema multiobjetivo, o que simplifica a tarefa. Além disso, nossa definição generaliza a correspondente introduzida em [75] para o caso em que (P) é finito-dimensional.

Definição 5.10 *Diremos que a terna $(\bar{x}, \bar{r}, \bar{v}) \in E \times F^* \times G$ é um **ponto de sela múltiplo** para o problema (P) se*

$$\bar{r} \circ f(\bar{x}) + v \circ g(\bar{x}) \leq \bar{r} \circ f(\bar{x}) + \bar{v} \circ g(\bar{x}) \leq \bar{r} \circ f(x) + \bar{v} \circ g(x) \tag{5.1}$$

$\forall v \in K^*, \forall x \in E$ *e se* $(\bar{r}, \bar{v}) \in Q^* \times K^*$, $\bar{r} \neq 0$.

Como ocorre no caso clássico, se $(\bar{x}, \bar{r}, \bar{v})$ é ponto de sela múltiplo, então $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (P). Antes de provarmos tal afirmação, necessitaremos do seguinte:

Lema 5.11 *Sejam E, F dois espaços de Banach, F ordenado pelo cone convexo $Q \subset F$ com interior não vazio e seja $f : \Gamma \subset E \to F$. Considere o problema de otimização*

vetorial:

$$\begin{array}{l} \textit{Minimizar } f(x) \\ \textit{sujeito a: } x \in \Gamma. \end{array} \qquad (\widehat{P})$$

Se existe um $\bar{r} \in Q^* \setminus \{0\}$ *tal que* $\bar{x} \in \Gamma$ *é solução de*

$$\begin{array}{l} \textit{Minimizar } \bar{r} \circ f(x) \\ \textit{sujeito a: } x \in \Gamma \end{array} \qquad (\widehat{P}(\bar{r}))$$

então $\bar{x}$ *é solução fracamente eficiente de* $(\widehat{P}(\bar{r}))$.

PROVA: Por absurdo, supor que $\bar{x} \in \Gamma$ não é solução fracamente eficiente de $(\widehat{P})$. Neste caso, existe $x \in \Gamma$ tal que $f(x) <_Q f(\bar{x})$, ou seja, $f(\bar{x}) - f(x) \in \operatorname{int} Q$. Como $\bar{r} \in Q^* \setminus \{0\}$, então (pelo Lema 1.6) $\bar{r}(f(\bar{x}) - f(x)) > 0$ e, pela linearidade de $\bar{r}$,

$$\bar{r} \circ f(\bar{x}) > \bar{r} \circ f(x)$$

o que é absurdo. ■

Teorema 5.12 *Se* $(\bar{x}, \bar{r}, \bar{v})$ *é ponto de sela múltiplo, então* $\bar{x}$ *é solução fracamente eficiente de (P).*

PROVA: Pelo Lema 5.13, é suficiente provar que $\bar{x}$ é solução do problema

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } \bar{r} \circ f(x) \\ \text{sujeito a: } x \in \mathbb{F} \end{array} \qquad (5.2)$$

onde $\mathbb{F} := \{x \in S : -g(x) \in K\}$.

Como $(\bar{x}, \bar{r}, \bar{v})$ é ponto de sela múltiplo, então

$$\bar{r} \circ f(\bar{x}) + v \circ g(\bar{x}) \leq \bar{r} \circ f(x) + \bar{v}(x), \forall v \in K^*, \forall x \in E. \qquad (5.3)$$

Em particular, fazendo em (5.3) $v = 0$ e $x = \bar{x}$, obtemos $\bar{v} \circ g(\bar{x}) \geq 0$ e, portanto, $\bar{v} \circ g(\bar{x}) = 0$. Então, fazendo $x \in \mathbb{F}$ em (5.3), obtemos

$$\bar{r} \circ f(\bar{x}) \leq \bar{r} \circ f(x), \forall x \in \mathbb{F}$$

e, portanto, $\bar{x}$ é solução de (5.2). ■

A recíproca deste resultado também é verdadeira sob hipóteses adequadas de convexidade generalizada- em nosso caso, subconvexlike generalizada- e de regularidade nas restrições do problema. Utilizaremos uma qualificação de restrição (QR) de tipo Slater.

Qualificação de Restrição de Slater (QR): Existe um $\widetilde{x} \in \mathbb{F}$ tal que $-g(\widetilde{x}) \in \operatorname{int} K$.

Teorema 5.13 *Suponhamos em (P) que a função $(f - f(\bar{x}), g)$ é subconvexlike generalizada (com respeito ao cone $Q \times K \subset F \times G$). Então, se $\bar{x} \in \mathbb{F}$ é solução fracamente eficiente de (P) e se (P) satisfaz a qualificação de restrição (QR) em $\bar{x}$, então existem $\bar{r}, \bar{v}$ tais que $(\bar{x}, \bar{r}, \bar{v})$ é um ponto de sela múltiplo.*

PROVA: A prova segue do Teorema 5.2 (Teorema de Alternativa para funções subconvexlike generalizadas).

De fato, se $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (P), então o sistema

$$\begin{cases} f(x) - f(\bar{x}) \in -\operatorname{int} Q \\ g(x) \in -K \end{cases}$$

não tem solução $x \in E$.

Como a função $(f - f(\bar{x}), g)$ é subconvexlike generalizada, então pelo Teorema 4.2, existe $(\bar{r}, \bar{v}) \in Q^* \times K^* \setminus \{(0,0)\}$ tal que

$$\bar{r}(f(x) - f(\bar{x})) + \bar{v} \circ g(x) \geq 0, \forall x \in E$$

ou seja,

$$\bar{r} \circ f(x) + \bar{v} \circ g(x) \geq \bar{r} \circ f(\bar{x}), \forall x \in E. \tag{5.4}$$

Fazendo em (5.4) $x = \bar{x}$, obtemos $\bar{v} \circ g(\bar{x}) \geq 0$ e, portanto

$$\bar{v} \circ g(\bar{x}) = 0 \tag{5.5}$$

(pois $g(\bar{x}) \in -K$ e $\bar{v} \in K^*$). Além disso,

$$\forall v \in K^*, v \circ g(\bar{x}) \leq 0 \tag{5.6}$$

e assim, temos

$$\bar{r} \circ f(x) + \bar{v} \circ g(x) \geq \bar{r} \circ f(\bar{x}) \geq \bar{r} \circ f(\bar{x}) + v \circ g(\bar{x}), \forall v \in K^*, \forall x \in E$$

(onde a primeira desigualdade segue de (5.4) e a segunda de (5.5) e (5.6)). Ou seja:

$$\bar{r} \circ f(\bar{x}) + v \circ g(\bar{x}) \leq \bar{r} \circ f(x) + \bar{v} \circ g(x), \forall v \in K^*, \forall x \in E. \tag{5.7}$$

Agora, tome $v \in K^*$. Então,

$$\bar{r} \circ f(\bar{x}) + v \circ g(\bar{x}) \leq \bar{r} \circ f(\bar{x}) + 0 = \bar{r} \circ f(\bar{x}) + \bar{v} \circ g(\bar{x}), \forall v \in K^* \tag{5.8}$$

(onde a desigualdade segue de (5.6) e a igualdade segue de (5.5)). Unindo (5.7) e (5.8), obtemos a desigualdade (5.1).

Resta provar que $\bar{r} \neq 0$. Mas, pela (QR), existe $\widetilde{x} \in E$, $-g(\widetilde{x}) \in -\operatorname{int} K$. Fazendo em (5.7) $x = \widetilde{x}$, obtemos

$$\bar{r} \circ f(\bar{x}) \leq \bar{r} \circ f(\widetilde{x}) + \bar{v} \circ g(\widetilde{x}).$$

Por absurdo, suponhamos $\bar{r} = 0$. Então, $\bar{v} \neq 0$ e como $-g(\widetilde{x}) \in \operatorname{int} K$, pelo Lema 1.6, temos $\bar{v} \circ g(\widetilde{x}) < 0$. disto e da desigualdade anterior segue que $\bar{r} \circ f(\bar{x}) < \bar{r} \circ f(\widetilde{x})$, ou

seja,

$$\bar{r}(f(\bar{x}) - f(\widetilde{x})) < 0$$

e, portanto, $\bar{r} \neq 0$. ■

5.4 Condições de 2a. ordem

No que segue, consideraremos o seguinte problema de otimização vetorial:

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } f(x) := (f_1(x), ..., f_p(x)) \\ \text{sujeito a: } g_i(x) \leq 0, \ i = 1, ..., m \end{array} \tag{PF}$$

onde X é espaço de Banach e $f_j, g_i : X \to \mathbb{R}$ $(j = 1, ..., p; i = 1, ..., m)$ são funções $C^{1,1}$.

Estabeleceremos condições de segunda ordem para a eficiência fraca para este problema através das noções de derivada direcional e Hessiana generalizados de Cominetti e Correa e das Condições de Ponto de Sela estudada na Seção 5.3. Primeiramente, definiremos os seguintes cones: Para cada $Q \subset X$, $x \in Q$, sejam

$$D(Q, x) := \{u \in X : \exists r > 0 \text{ tal que } x +]0, r[\, u \in Q\}$$

$$B(Q, x) := \{u \in X : \exists t_\alpha \downarrow 0, \exists u_\alpha \to u \text{ tal que } x + t_\alpha u_\alpha \in Q\}$$

(chamados, respectivamente, *cone de direções factíveis* e *cone tangente de Bouligand*).

Como é usual, definiremos a função Lagrangeana:

$$L_{r,v}(x) := \sum_{j=1}^{p} r_j f_j(x) + \sum_{i=1}^{m} v_i g_i(x)$$

onde $r \in \mathbb{R}^p_+, v \in \mathbb{R}^m_+$ e $x \in X$.

Como veremos a seguir, sob certas hipóteses, se $\bar{x}$ factível para (PF) é solução fraca-

mente eficiente, então, existem $r \in \mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}, v \in \mathbb{R}^m_+$ tais que

$$\sum_{j=1}^{p} r_j \nabla f_j(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} v_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \tag{5.9}$$

$$v_i g_i(\bar{x}) = 0 \tag{5.10}$$

e, neste caso o par (r, v) é chamado *multiplicador*.

Provemos esta última afirmação.

Lema 5.14 *Seja $\bar{x}$ factível para (PF) uma solução fracamente eficiente. Supor que a função $(f - f(\bar{x}), g)$ é subconvexlike generalizada (com respeito ao cone $\mathbb{R}^p_+ \times \mathbb{R}^m_+$) e que (PF) satisfaz a qualificação de restrição de Slater (QR). Então, existe um multiplicador $(\bar{r}, \bar{v})$ satisfazendo (5.9) e (5.10).*

PROVA: Pelo Teorema 5.15, existe $(\bar{r}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^p_+ \times \mathbb{R}^m_+$ tal que $(\bar{x}, \bar{r}, \bar{v})$ é ponto de sela múltiplo. Em particular, vale a desigualdade

$$\sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j f_j(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{v}_i g_i(\bar{x}) \leq \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j f_j(x) + \sum_{i=1}^{m} \bar{v}_i g_i(x), \forall x \in X.$$

Desta desigualdade e do fato de f_j, g_i serem Gateaux-diferenciáveis, segue que

$$\sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j \nabla f_j(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{v}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0.$$

Além disso, quando $(\bar{x}, \bar{r}, \bar{v})$ é ponto de sela múltiplo,

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{v}_i g_i(\bar{x}) = 0.$$

(veja prova do Teorema 5.14). ■

Observação 5.15 *Na prova Lema 5.16, utilizamos o seguinte fato: quando $F = \mathbb{R}^p$ e $Q = \mathbb{R}^p_+$, então $Q^* = \mathbb{R}^p_+$ (pois, pelo Teorema de Representação de Riesz, $(\mathbb{R}^p)^* = \mathbb{R}^p$).*

A cada par de multiplicadores (r, v), associaremos o conjunto

$$Q(r,v) := \{x \in \mathbb{F} : g_i(x) = 0, \text{ se } v_i > 0 \text{ e } g_i(x) \leq 0, \text{ se } v_i = 0\}.$$

Teorema 5.16 *(condições necessárias de segunda ordem) Supor que x solução local fracamente eficiente de (PF). Supor que $(f - f(x), g)$ é subconvexlike generalizada e que (PF) satisfaz a qualificação de restrição de Slater. Então:*

(i) *Existe (r, v) tais que (x, r, v) é ponto de sela múltiplo;*

(ii) *Para cada par de multiplicadores $(r, v) \in \mathbb{R}^p_+ \times \mathbb{R}^m_+$ tais que (x, r, v) é ponto de sela múltiplo, se verifica a desigualdade*

$$L^{00}_{r,v}(x; u, u) \geq 0, \forall u \in D(Q(r,v), x).$$

PROVA: (i) É justamente o Lema 5.16.

(ii) Seja $(r, v) \in \mathbb{R}^p_+ \times \mathbb{R}^m_+$ par de multiplicadores. É claro que

$$L^{00}_{r,v}(x; u, u) \geq \limsup_{t \downarrow 0} \langle \nabla_{r,v}(\bar{x} + tu), u \rangle, \forall u \in X.$$

Tome $u \in D(Q(r,v), x)$. Então, existe $r > 0$ tal que $x + tu \in Q(r,v), \forall t \in (0, r)$ e, portanto,

$$\sum_{j=1}^{p} r_j f_j(x + tu) = L_{r,v}(x + tu), \forall t \in (0, r).$$

Então, pela Condição de Ponto de Sela,

$$\sum_{j=1}^{p} r_j f_j(x) + \sum_{i=1}^{m} v_i g_i(x) = \sum_{j=1}^{p} r_j f_j(x) \leq \sum_{j=1}^{p} r_j f_j(x + tu) + \sum_{i=1}^{m} v_i g_i(\bar{x} + tu)$$

para cada t suficientemente pequeno, ou seja,

$$L_{r,v}(x + tu) \geq L_{r,v}(x), \text{ para cada } t > 0 \text{ suficientemente pequeno.}$$

Fixado $t > 0$ suficientemente pequeno, pelo Teorema do Valor Médio, existe $t' \in (0,t)$ tal que

$$t'\langle \nabla L_{r,v}(x+t'u), u\rangle \geq 0$$

e assim,

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\langle \nabla L_{r,v}(x+tu), u\rangle \geq 0.$$

Com maior razão,

$$L^{00}_{r,v}(x;u,u) \geq 0.$$

■

Teorema 5.17 *(condições suficientes de segunda ordem) Supor em (PF) que as funções $f_i, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções $C^{1,1}$. Então, uma condição suficiente para um ponto factível x ser solução fracamente eficiente local de (PF) é que exista um multiplicador $(r,v) \in \mathbb{R}^p_+ \times \mathbb{R}^m_+$ tal que*

$$-L^{00}_{r,v}(x;u,-u) > 0, \forall u \in B(Q;x) \setminus \{0\}.$$

PROVA: Suponhamos que x não é solução local fracamente eficiente de (PF). Então, existe uma seqüência $(x_k) \subset \mathbb{F}\setminus\{x\}$ tal que $x_k \to x$ e $f_j(x_k) < f_j(x), \forall j = 1,...,p, \forall k \in \mathbb{N}$. Defina:

$$u_k := \frac{x_k - x}{\|x_k - x\|}.$$

Então $u_k \in B(Q;x), \forall k \in \mathbb{N}$ e $B(Q,x)$ é fechado (veja Laurent, [64]). Desta maneira, podemos assumir, sem perda de generalidade (passando a uma subseqüência se necessário) que $u_k \to u \in B(Q,x) \setminus \{0\}$. Por hipótese, temos $-L^{00}_{r,v}(x;u,-u) > 0$. Defina:

$$a_k := 2\frac{(L_{r,v}(x_k) - L_{r,v}(x))}{\|x_k - x\|^2}.$$

Assim,

$$L_{r,v}(x_k) - L_{r,v}(x) = \sum_{j=1}^{p} r_j(f_j(x_k) - f_j(x)) + \sum_{i=1}^{m} v_i g_i(x_k) < 0$$

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

pois a primeira parcela é < 0 e a segunda é ≤ 0, pela factibilidade de x_k. Logo, $a_k < 0, \forall k$. Pela Proposição 5.9, existe um $\xi_k \in]x_k, x[$ tal que $a_k \in \langle \partial^2 L_{r,v}(\xi_k)u_k, u_k\rangle, \forall k$. Portanto, existe $x_k^* \in \partial^2 L_{r,v}(\xi_k)u_k$ tal que $a_k = \langle x_k^*, u_k\rangle, \forall k$. Segue da Proposição 5.8 (c) que podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_k^* \to x^* \in \partial^2 L_{r,v}(x)(u)$, ou seja, $\langle x^*, u\rangle \leq 0$ e, com maior razão,

$$-L_{r,v}^{00}(x; u, -u) \leq 0$$

o que contraria a hipótese feita. ■

Capítulo 6

Condições necessárias e suficientes de otimalidade via cones de aproximação local e K-derivadas

6.1 Introdução

Para o tratamento de problemas de otimização existe uma teoria bem desenvolvida e bastante completa no que se refere a condições de otimalidade, sobretudo para problemas suaves (diferenciáveis) e convexos. Entretanto, as hipóteses de diferenciabilidade, na prática, nem sempre são verificadas. Assim, nos últimos anos, muitos esforços têm sido feitos no sentido de extender tais resultados ao caso mais geral (não diferenciável).

Significativos resultados foram obtidos nesta direção através da noção de gradientes generalizados, que foram introduzidos por Clarke em meados dos anos 70. A partir de então, muitos autores têm empregado esta noção e uma extensiva teoria foi desenvolvida, a maior parte dela, sob condições de Lipschitz-continuidade. (veja Clarke [23], [24] , Hiriart-Urruty [54], e Rockafellar [86], por exemplo).

Em [38],[39], Elster e Thielfelder propõem um procedimento axiomático através do qual obtêm condições necessárias de otimalidade para problemas de otimização com res-

trições de desigualdade, cujos funcionais estão definidos em um espaço topológico. Esta abordagem consiste do uso do método de Dubovitskii e Milyutin [34], segundo o qual a otimalidade é expressa em termos de certas relações de disjunção de certos conjuntos concretos. São estabelecidas certas proposições de tipo Kuhn-Tucker e Fritz-John, através do uso de cones de aproximação (cuja noção é introduzida em [38]) e do uso de teoremas de separação.

Assim sendo, à luz dos trabalhos [38], [39], adaptamos o método mencionado acima para a obtenção de condições necessárias de otimalidade (no sentido de eficiência fraca) para o problema de otimização vetorial que mencionaremos a seguir.

Consideraremos neste Capítulo o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) := (f_1(x), ..., f_p(x)) \\ &\text{sujeito a: } x \in S := \{x \in X_0 : g_i(x) \leq 0, \forall i \in I := \{1, ..., m\}\} \end{aligned} \tag{P}$$

onde X é um espaço Hausdorff localmente convexo, $X_0 \subset X$ é um conjunto aberto.

Denotaremos $J := \{1, ..., p\}$.

As funções $f_j, g_i : X_0 \to \mathbb{R}$ $(i \in I,\ j \in J)$ não são, necessariamente, diferenciáveis.

Assim como o problema escalar (caso em que $p = 1$) este problema têm sido amplamente estudado e possui uma bem desenvolvida teoria no que se refere a condições necessárias de otimalidade, quando os funcionais envolvidos são suaves e/ ou convexos (veja Chankong and Haimes [20], Sawaragi et al. [90]). O caso não diferenciável e não convexo também têm sido estudado, sobretudo sob hipóteses de Lipschitz-continuidade, via gradientes generalizados de Clarke (veja Minami [73], Clarke [23], Phuong et al. [83]).

Utilizando uma abordagem análoga à utilizada por Elster and Thierfelder [38], [39], (que trataram o problema escalar) mostraremos que é possível estabelecer certas condições necessárias de otimalidade para o problema (P), as quais generalizam os resultados obtidos pelos autores em [38], [39].

Por outro lado, em [18], Castellani propõe várias definições de invexidade para funções não diferenciáveis, que estão generalizam as já existentes, através do conceito de K-

derivadas direcionais (ou seja, derivadas direcionais relacionadas com cones de aproximação local). Utilizando tais noções, ele obtém algumas condições suficientes de otimalidade para o problema (escalar) de otimização não diferenciável. Mostraremos que resultados análogos são ainda válidos para o caso vetorial.

Este Capítulo tem a seguinte estrutura: na Seção 6.2, apresentamos alguns resultados sobre cones de aproximação local e K-derivadas direcionais, os quais serão utilizados nas seções posteriores; na Seção 6.3, obteremos condições necessárias para a eficiência fraca para o problema (P) e, finalmente, na Seção 6.4, estabeleceremos condições suficientes para a eficiência fraca sob hipóteses de K-invexidade.

6.2 Cones de Aproximação e Derivadas K-direcionais

Nesta Seção, apresentamos uma seleção de resultados referentes a cones de aproximação e de derivadas K-direcionais. As provas serão todas omitidas. Para maiores detalhes, sugerimos [38], [39].

Em todo o Capítulo, consideraremos $X = [X, \tau]$ um espaço de Hausdorff localmente convexo e denotaremos $X^* = [X^*, \sigma^*(X^*, X)]$ o espaço dual de X munido da topologia fraca.

Definição 6.1 *Uma correspondência $K : 2^X \times X \to 2^X$ é chamada um* ***cone de aproximação local*** *se a cada $M \subset X$ e cada $x \in X$, associa-se um cone $K(M, x) \subset X$ satisfazendo:*

(a) $K(M - x, 0) = K(M, x), \forall x \in X$

(b) $K(M \cap U, x) = K(M, x), \forall x \in X, \forall U \in \mathcal{U}(x)$, onde $\mathcal{U}(x)$ é um sistema de vizinhanças de x;

(c) $K(M, x) = X, \forall x \in \operatorname{int} M$

(d) $K(M, x) = \varnothing, \forall x \notin \overline{M}$

(e) $K(\phi(M), \phi(x)) = \phi(K(M, x))$, para cada $\phi : X \to X$ homeomorfismo linear

(f) $0^+M \subset 0^+K(M, x)$

onde $0^+M := \{y \in X : x + ty \in M, \forall x \in M, \forall t \geq 0\}$ é o *cone de recessão de Rockafellar.* São exemplos de cones de aproximação local os seguintes conjuntos:

$$T(M, x) := \{y \in X : \forall U \in \mathcal{U}(y), \forall \lambda > 0, \exists \overline{y} \in U \text{ tal que } x + t\overline{y} \in M\}$$
$$D(M, x) := \{y \in X : \exists U \in \mathcal{U}(y), \exists \lambda > 0, \forall \overline{y} \in U \text{ tal que } x + t\overline{y} \in M\}$$

que são, respectivamente, o *cone contingente de Bouligand* e o *cone de deslocamentos interiores.*

Pode-se provar que, se Ω é um conjunto finito de índices e $K(\cdot, \cdot)$, $K_i(\cdot, \cdot), \forall i \in \Omega$ são cones de aproximação local, então

$$\operatorname{int} K(\cdot, \cdot),\ \overline{K}(\cdot, \cdot),\ \operatorname{conv} K(\cdot, \cdot),\ X \setminus K(X \setminus \cdot, \cdot),$$
$$\cup_{i \in \Omega} K_i(\cdot, \cdot),\ \cap_{i \in \Omega} K_i(\cdot, \cdot),\ \sum_{i \in \Omega} K_i(\cdot, \cdot)$$

também são cones de aproximação local.

Sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função a valores na reta extendida e $x \in X$ tal que $|f(x)| < +\infty$. Seja $K(\cdot, \cdot) : 2^{X \times \mathbb{R}} \times (X \times \mathbb{R}) \to 2^{X \times \mathbb{R}}$ um cone de aproximação local.

Definição 6.2 *O funcional* $f^K(x, \cdot) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *com*

$$f^K(x, y) := \inf\{\xi \in \mathbb{R} : (y, \xi) \in K(\operatorname{epi} f, (x, f(x)))\},\ y \in X$$

(onde epi f *é o epígrafo de* f*) é chamado* K***-derivada direcional*** *de* f *no ponto* x*.*

Pode-se provar que as derivadas direcionais generalizadas associadas ao cone contingente e ao cone de deslocamentos interiores são, as derivadas regularizadas de Dini,

inferior e superior, respectivamente. Mais precisamente:

$$f^D(x,y) = \limsup_{\substack{\overline{y}\to y \\ t\to 0^+}} \frac{f(x+t\overline{y}) - f(x)}{t}$$
$$f^T(x,y) = \liminf_{\substack{\overline{y}\to y \\ t\to 0^+}} \frac{f(x+t\overline{y}) - f(x)}{t}.$$

É claro que $f^K(x,\cdot)$ é um funcional positivamente homogêneo; além disso, é convexo quando $K(\text{epi}\, f,(x,f(x)))$ é convexo e é semicontínua inferiormente se além disso. $K(\text{epi}\, f,(x,f(x)))$ for fechado. Neste último caso, vale

$$\text{epi}\, f^K(x,\cdot) = K(\text{epi}\, f,(x,f(x))).$$

Além disso, $f^{\text{int}\, K}(x,\cdot)$ é semicontínua superiormente.

De acordo com a Análise Convexa, a cada funcional $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ que é sublinear, própria e semicontínua inferiormente, é possível associarmos um (único) conjunto convexo e fechado $M \subset X^*$, satisfazendo

$$h(y) = \sup_{x^*\in M} \langle x^*, y\rangle; M := \{x^* \in X^* : \langle x^*, y\rangle \leq h(y), \forall y \in X\}.$$

Isto justifica a seguinte definição:

Definição 6.3 *O conjunto*

$$\partial^K f(x) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, y\rangle \leq f^K(x,y), \forall y \in X\}$$

é chamado K-***subdiferencial*** *de* f *em* x. *Os elementos de* $\partial^K f(x)$ *são chamados* K-***subgradientes*** *de* f *em* x.

Portanto, o conjunto $\partial^K f(x)$ é sempre convexo e fechado.

Ao longo deste Capítulo, suporemos que o cone de aproximação local $K(\cdot,\cdot)$ é uma correspondência a valores convexos e fechados. Isto é menos restritivo do que parece:

de fato, pode-se provar que $\partial^K f(x) = \partial^{\overline{\text{conv}}K} f(x)$. Algumas das propriedades dos K-subdiferenciais e das K-derivadas direcionais são dadas na seguinte

Proposição 6.4 *Quando os cone de aproximação local $K(\cdot,\cdot), K_i(\cdot,\cdot), \forall i \in \Omega$ (Ω finito) são correspondências a valores convexos e fechados são válidas as seguintes afirmações:*

(a) Se $\operatorname{dom} f^{\text{int}\,K}(x,\cdot) \neq \varnothing$, então $\partial^K f(x) = \partial^{\text{int}\,K} f(x)$;

(b) $f^K(x,y) = f^{\text{int}\,K}(x,y)$, $\forall y \in \operatorname{dom} f^{\text{int}\,K}(x,\cdot)$;

(c) $\forall \lambda > 0$, $\partial^K(\lambda f)(x) = \lambda \partial^K f(x)$;

(d) $0 \in \sum_{i\in\Omega} \partial_{K_i} f_i(x) \Rightarrow \sum_{i\in\Omega} f^{K_i}(x,y) \geq 0, \forall y \in X$;

(e) se existe $y_0 \in \bigcap_{i\in\Omega} \operatorname{dom} f_i^{K_i}(x,\cdot)$ tal que os funcionais $f_i^{K_i}(x,\cdot)$ são semicontínuas superiormente em y_0, exceto, eventualmente, para um índice $i \in \Omega$, então,

$$\sum_{i\in\Omega} f^{K_i}(x,y) \geq 0, \forall y \in X \Rightarrow 0 \in \sum_{i\in\Omega} \partial_{K_i} f_i(x)$$

6.3 Condições Necessárias de Otimalidade

Nesta seção, consideraremos o seguinte problema de otimização quanto a condições necessárias de otimalidade (no sentido de eficiência fraca):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) := (f_1(x), ..., f_p(x)) \\ &\text{sujeito a: } x \in S := \{x \in X_0 : g_i(x) \leq 0, \forall i \in I := \{1, ..., m\}\} \end{aligned} \tag{P}$$

onde $f_j, g_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ são funções a valores (reais) extendidos para cada $j \in J := \{1, ..., p\}$, $i \in I := \{1, ..., m\}$ e X_0 é um subconjunto aberto de X.

Assumiremos que $x \in S$ é tal que $|f_j(x)| < \infty$ $\forall j \in J$ e $|g_i(x)| < \infty$ $\forall i \in I$. Isto implica a K-diferenciabilidade direcional com respeito a cada cone de aproximação local $K(\cdot,\cdot)$.

Neste caso, denotaremos $I(x) := \{i \in I : g_i(x) = 0\}$ é o conjunto de índices de restrições ativas em x. Suporemos g_i são semicontínuas superiormente, $\forall i \in I \setminus I(x)$ e, deste modo, para a descrição local de S é suficiente considerar apenas as restrições ativas em x.

Inicialmente, consideraremos o caso irrestrito, i.e.,

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) := (f_1(x), ..., f_p(x)) \\ &\text{sujeito a: } x \in X. \end{aligned} \tag{UP}$$

Iniciamos com um Teorema de Alternativa tipo Gordan para funcionais convexos a valores extendidos:

Lema 6.5 (Teorema de Alternativa) *Sejam $\varphi_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i \in \Omega = \{1, ..., s\}$ funcionais convexos tais que $C \subset X$ é convexo e $(\bigcap_{i\in\Omega} \operatorname{dom} \varphi_i) \cap C \neq \varnothing$. Então, são equivalentes:*

(1) Não existe $x \in (\bigcap_{i\in\Omega} \operatorname{dom} \varphi_i) \cap C$ tal que $\varphi_i(x) < 0$, $\forall i \in \Omega$;

(2) Existem $\lambda_i \geq 0$, $i \in \Omega$, não todos nulos e tais que $\sum_{i\in\Omega} \lambda_i \varphi_i(x) \geq 0$, $\forall x \in (\bigcap_{i\in\Omega} \operatorname{dom} \varphi_i) \cap C$.

PROVA: É claro que (2) $\Rightarrow$ (1). Provemos (1) $\Rightarrow$ (2). Sejam:

$$C_0 := (\bigcap_{i\in\Omega} \operatorname{dom} \varphi_i) \cap C$$
$$A := \{(\alpha_1, ..., \alpha_s) \in \mathbb{R}^s : \exists x \in C_0; \varphi_i(x) \leq \alpha_i, \forall i \in \Omega\}.$$

Das hipóteses feitas, A é convexo, não vazio e $0 \notin A$. Portanto, podemos separar 0 e A, ou seja, existem $\lambda_i \geq 0$, não todos nulos e tais que

$$\sum_{i\in\Omega} \lambda_i \alpha_i \geq 0, \forall (\alpha_1, ..., \alpha_s) \in A$$

donde segue que

$$\sum_{i\in\Omega}\lambda_i\varphi_i(x)\geq 0, \forall x\in(\bigcap_{i\in\Omega}\operatorname{dom}\varphi_i)\cap C.$$

■

A partir do Lema 6.5 é possível estabelecer a seguinte condição de otimalidade para o problema irrestrito:

Teorema 6.6 (caso irrestrito) *Sejam $x\in X$ uma solução local fracamente eficiente do problema irrestrito (UP) e $K(\cdot,\cdot)\subset D(\cdot,\cdot)$. Então:*

(a) Não existe $y\in X$ tal que $f_j^K(x,y)<0, \forall j\in J$.

(b) Existem $\lambda_j\geq 0$, $j\in J$, não todos nulos e tais que $\sum_{j\in J}\lambda_j f_j^K(x,y)\geq 0, \forall y\in X$.

PROVA: Provemos (a). Suponhamos, por absurdo, que existe $y\in X$ tal que $f_j^K(x,y)<0, \forall j\in J$. Com maior razão, $f_j^D(x,y)<0, \forall j\in J$. Mas: $f_j^D(x,y)=\limsup_{\substack{\overline{y}\to y\\ t\to 0^+}}\dfrac{f_j(x+t\overline{y})-f_j(x)}{t}$. Disto e das propriedades do lim sup segue que, para cada $j\in J$ fixado, existem $U_j\in\mathcal{U}(y)$, $\lambda_j>0$ tais que para cada $t\in(0,\lambda_j)$ e cada $\overline{y}\in U_j$ se tem $\dfrac{f_j(x+t\overline{y})-f_j(x)}{t}<0$. Defina: $\lambda:=\min_{j\in J}\lambda_j\ (>0)$ e $U:=\bigcap_{j\in J}U_j\ (\in\mathcal{U}(y))$.

$$f_j(x+t\overline{y})<f_j(x), \forall\overline{y}\in U,\ \forall t\in(0,\lambda)$$

para cada $j\in J$, o que contraria o fato de $x\in X$ ser solução fracamente eficiente local de (UP). Isto conclui a prova de (a).

A prova de (b) segue do Lema 6.5 aplicado aos funcionais convexos $f_j^K(x,\cdot)$. ■

A desvantagem deste resultado é que, em geral, o cone $D(\cdot,\cdot)$ não é convexo, e portanto, não podemos utilizar o Teorema de Separação. Por isto, em toda esta Seção assumiremos que o cone de aproximação local $K(\cdot,\cdot)$ têm as seguintes propriedades adicionais:

(V1) K é correspondência a valores convexos e fechados;

(V2) $z \in M \Leftrightarrow 0 \in K(M, z), \forall M \subset X$;

(V3) $K(\cdot,\cdot) \subset T(\cdot,\cdot)$;

(V4) $\operatorname{int} K(\cdot,\cdot) \subset D(\cdot,\cdot)$;

A seguir, consideraremos o problema de otimização com um conjunto abstrato de restrição, digamos,

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) := (f_1(x), ..., f_p(x)) \\ &\text{sujeito a: } x \in S \end{aligned} \tag{ACP}$$

onde $S \subset X$ é um conjunto abstrato de restrições (ou seja, as restrições não são, necessariamente definidas por desigualdades).

Antes, porém, introduziremos a seguinte notação: Dada uma função $\phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \in X$, K um cone de aproximação local, denotamos

$$A_\phi^K(x) = \{y \in X : \phi^K(x, y) < 0\}$$

o cone de direções de K-descida.

Teorema 6.7 (restrições abstratas) *Se $x \in S$ é uma solução local fracamente eficiente de (ACP), então*

$$\bigcap_{j \in J} A_{f_j}^{\operatorname{int} K}(x) \cap K(S, x) = \varnothing. \tag{6.1}$$

Além disso, se

$$\bigcap_{j \in J} \operatorname{dom} f_j^{\operatorname{int} K}(x, \cdot) \cap K(S, x) \neq \varnothing$$

então existem $\lambda_j \geq 0$, $j \in J$ não todos nulos e tais que

$$\sum_{j \in J} \lambda_j f_j^K(x, y) \geq 0, \ \forall y \in \bigcap_{j \in J} \operatorname{dom} f_j^{\operatorname{int} K}(x, \cdot) \cap K(S, x).$$

PROVA: Por absurdo, suporemos que existe uma direção $y \in \bigcap_{j \in J} A_{f_j}^{\operatorname{int} K}(x) \cap K(S, x)$. Então, segue de (V3) e (V4) que $y \in \bigcap_{j \in J} A_{f_j}^D(x) \cap T(S, x)$. Em particular, $y \in T(S, x)$ e,

portanto, para cada $U \in \mathcal{U}(y), \lambda > 0$ existem $t \in (0, \lambda)$ e $\overline{y} \in U$ tais que $x + t\overline{y} \in S$. Por outro lado, $y \in A^D_{f_j}(x)$ ou seja, $f^D_j(x, y) = \limsup_{\substack{\overline{y} \to y \\ t \to 0^+}} \frac{f_j(x + t\overline{y}) - f_j(x)}{t} < 0, \forall j \in J$. Das propriedades de lim sup segue que, para cada $j \in J$ fixado, existem $U_j \in \mathcal{U}(y)$, $\lambda_j > 0$ tais que para cada $t \in (0, \lambda_j)$ e cada $\overline{y} \in U_j$, se tem $f_j(x + t\overline{y}) < f_j(x)$. Defina: $U := \bigcap_{j \in J} U_j$ e $\lambda = \min_{j \in J} \lambda_j$. Deste modo: $x + t\overline{y} \in S$ e $f_j(x + t\overline{y}) < f_j(x)$, $\forall t \in (0, \lambda), \forall \overline{y} \in U$, $\forall j \in J$, o que contraria o fato de x ser solução local fracamente eficente de (ACP). A última afirmação decorre de (6.1) e do Lema 6.5. ■

Finalmente, obteremos regras de multiplicadores de tipo Fritz-John e Kuhn-Tucker para o problema de otimização vetorial com restrições de desigualdade a seguir:

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } f(x) := (f_1(x), ..., f_p(x)) \\ \text{sujeito a: } x \in S := \{x \in X_0 : g_i(x) \leq 0, \forall i \in I := \{1, ..., m\}\} \end{array} \tag{CP}$$

Suporemos, de agora em diante que, além de satisfazer (V1)-(V4), $K(\cdot, \cdot)$ também satisfaz

(V5) $\bigcap_{i \in I(x)} A^K_{g_i}(x) \subset K(S, x)$.

É válida a seguinte caracterização geométrica de otimalidade:

Teorema 6.8 *Seja $x \in S$ solução fracamente eficiente de (CP). Então*

$$\bigcap_{j \in J} A^{\text{int}\, K}_{f_j}(x) \cap \left(\bigcap_{i \in I(x)} A^K_{g_i}(x) \right) = \varnothing. \tag{6.2}$$

PROVA: Imediata: segue de (V5) e do Teorema 6.7. ■

Observe que (6.2) equivale a dizer que o sistema de desigualdades convexas

$$\begin{cases} f^{\text{int}\, K}_j(x, y) < 0, \ j \in J \\ g^K_i(x, y) < 0, \ i \in I(x) \end{cases}$$

não tem solução $y \in X$. Portanto, pelo Lema 6.5 (Teorema de Alternativa) existem $\lambda_j, \mu_i \geq 0$, $(j \in J,\ i \in I(x))$ não todos nulos e tais que:

$$\sum_{j\in J} \lambda_j f_j^{\text{int}\,K}(x,y) + \sum_{i\in I(x)} \mu_i g_i^K(x,y) \geq 0,$$

para cada $y \in \bigcap_{j\in J} \operatorname{dom} f_j^{\text{int}\,K}(x,\cdot) \cap (\bigcap_{i\in I(x)} \operatorname{dom} g_i^K(x,\cdot))$.

O que prova a seguinte afirmação:

Teorema 6.9 *Se $x \in S$ é solução fracamente eficiente de (CP) e $K(\cdot,\cdot)$ satisfaz (V1)-(V5), então, existem $\lambda_j, \mu_i \geq 0$, $(j \in J,\ i \in I(x))$ não todos nulos e tais que*

$$\sum_{j\in J} \lambda_j f_j^{\text{int}\,K}(x,y) + \sum_{i\in I(x)} \mu_i g_i^K(x,y) \geq 0,\ \forall y \in \bigcap_{j\in J} \operatorname{dom} f_j^{\text{int}\,K}(x,\cdot) \cap (\bigcap_{i\in I(x)} \operatorname{dom} g_i^K(x,\cdot)).$$

Por outro lado, sob uma hipótese adicional, a conclusão do Teorema 6.9 se torna ainda mais forte. De fato, seja

(V6)

$$\exists i_0 \in I(x),\ \operatorname{dom} g_{i_0}^K(x,\cdot) \cap (\bigcap_{i\in I(x)\setminus\{i_0\}} \operatorname{dom} g_i^{\text{int}\,K}(x,\cdot) \cap \bigcap_{j\in J} \operatorname{dom} f_j^{\text{int}\,K}(x,\cdot)) \neq \varnothing.$$

Teorema 6.10 *Supor que $x \in S$ é solução fracamente eficiente de (CP) e que $K(\cdot,\cdot)$ satisfaz (V1)-(V6). Então existem $\lambda_j, \mu_i \geq 0$, $j \in J$, $i \in I(x)$, não todos nulos e tais que:*

(i) $\sum_{j\in J} \lambda_j f_j^K(x,y) + \sum_{i\in I(x)} \mu_i g_i^K(x,y) \geq 0,\ \forall y \in X$;

(ii) $0 \in \sum_{j\in J} \lambda_j \partial^K f_j(x) + \sum_{i\in I(x)} \mu_i \partial^K g_i(x)$.

PROVA: Pelo Teorema 6.9, existém $\lambda_j, \mu_i \geq 0$, $j \in J$, $i \in I(x)$, não todos nulos e tais que

$$\sum_{j\in J} \lambda_j f_j^{\text{int}\,K}(x,y) + \sum_{i\in I(x)} \mu_i g_i^K(x,y) \geq 0,\ \forall y \in X$$

(isto é verdadeiro se convencionarmos: $(+\infty)+(-\infty)=+\infty$). Com maior razão,

$$\sum_{j\in J}\lambda_j f_j^{\text{int}\,K}(x,y)+\sum_{i\in I(x)\setminus\{i_0\}}\mu_i g_i^{\text{int}\,K}(x,y)+\mu_{i_0}g_{i_0}^{K}(x,y)\geq 0,\ \forall y\in X. \tag{6.3}$$

Por (V6), existe

$$y_0\in \operatorname{dom} g_{i_0}^{K}(x,\cdot)\cap\Big(\bigcap_{i\in I(x)\setminus\{i_0\}}\operatorname{dom} g_i^{\text{int}\,K}(x,\cdot)\cap\bigcap_{j\in J}\operatorname{dom} f_j^{\text{int}\,K}(x,\cdot)\Big).$$

Mas $g_i^{\text{int}\,K}(x,\cdot)$, $f_j^{\text{int}\,K}(x,\cdot)$ são semicontínuas superiormente em y_0, e segue de (6.3) e da Proposição 6.4,

$$0\in\sum_{j\in J}\lambda_j\partial^{\text{int}\,K}f_j(x)+\sum_{i\in I(x)\setminus\{i_0\}}\mu_i\partial^{\text{int}\,K}g_i(x)+\mu_{i_0}\partial^{K}g_{i_0}(x). \tag{6.4}$$

Segue de (V6) que, para cada $i\in I(x)\setminus\{i_0\}$ e cada $j\in J$ fixados, se tem

$$\operatorname{dom} g_i^{\text{int}\,K}(x,\cdot),\ \operatorname{dom} f_j^{\text{int}\,K}(x,\cdot)\neq\varnothing \tag{6.5}$$

e, de (6.5) e da Proposição 6.4, segue que

$$\partial^{\text{int}\,K}g_i(x)=\partial^{K}g_i(x)\ \text{e}\ \partial^{\text{int}\,K}f_j(x)=\partial^{K}f_j(x), \tag{6.6}$$

para cada $i\in I(x)\setminus\{i_0\}$ e cada $j\in J$. Comparando (6.4) e (6.6) obtemos o resultado desejado. ■

É natural esperarmos que, sob alguma hipótese de regularidade sobre as restrições se possa garantir que $\lambda\neq 0$ no Teorema 6.10. De fato:

Teorema 6.11 (Kuhn-Tucker) *Suponha que $x\in S$ é solução fracamente eficiente de (CP) e que $K(\cdot,\cdot)$ satisfaz (V1)-(V6). Além disso, suponha que valha a qualificação de restrição:*

(QR) $\bigcap_{i\in I(x)} A^K_{g_i}(x) \neq \varnothing$.

Então, existem $\lambda_j, \mu_i \geq 0$ $(j \in J,\, i \in I(x))$, com $\lambda \neq 0$ e tais que

(i) $\sum_{j\in J} \lambda_j f^K_j(x,y) + \sum_{i\in I(x)} \mu_i g^K_i(x,y) \geq 0,\ \forall y \in X$;

(ii) $0 \in \sum_{j\in J} \lambda_j \partial^K f_j(x) + \sum_{i\in I(x)} \mu_i \partial^K g_i(x)$.

PROVA: Pelo Teorema 6.10, existem $\lambda_j, \mu_i \geq 0$ $(j \in J,\, i \in I(x))$ não todos nulos e tais que valem (i) e (ii). Resta provar que $\lambda \neq 0$. Por absurdo, suponhamos que $\lambda = 0$. Então, pelo teorema anterior, obtemos

$$\sum_{i\in I(x)} \lambda_i f^K_i(x,y) \geq 0, \forall y \in X$$

com $\lambda \neq 0$ o que contraria $A^K_{I(x)}(x) \neq \varnothing$ o que conclui a prova. ■

6.4 Condições Suficientes de Otimalidade

Em [18], Castellani propõe um esquema geral para a definição de invexidade para funções não derivadas: são as chamadas funções K-invexas, as quais são extendidas de maneira natural ao caso não diferenciável utilizando-se as K-derivadas.

Nesta Seção, estudaremos o problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) := (f_1(x), ..., f_p(x)) \\ &\text{sujeito a: } x \in S := \{x \in X_0 : g_i(x) \leq 0,\ i \in I\} \end{aligned} \tag{P}$$

onde X é um espaço Hausdorff localmente convexo, $X_0 \subset X$ é aberto e $f_j, g_i : X_0 \to \mathbb{R}$ $(i \in I,\, j \in J)$ são funções dadas, $J := \{1, ..., p\}$, $I := \{1, ..., m\}$.

Veremos que sob hipóteses de K-invexidade é possível estabelecer condições suficientes de otimalidade para o problema (P). Antes, porém, necessitaremos de algumas definições preliminares:

Definição 6.12 *Sejam $\overline{x} \in S$ e $\{K_i, K_j\}_{i\in I(\overline{x}), j\in J}$ cones de aproximacão local.*

(i) *Diremos que $\overline{x}$ é* ***ponto fracamente estacionário*** *para (P) se o seguinte sistema*

$$\begin{cases} f_j^{K_j}(\overline{x}, y) < 0, \ j \in J \\ g_i^{K_i}(\overline{x}, y) < 0, \ i \in I(\overline{x}) \end{cases} \tag{S1}$$

não admite solução $y \in X$.

(ii) *Diremos que $\overline{x}$ é* ***ponto fortemente estacionário*** *para (P) se o sistema*

$$\begin{cases} f_j^{K_j}(\overline{x}, y) < 0, \ j \in J \\ g_i^{K_i}(\overline{x}, y) \leq 0, \ i \in I(\overline{x}) \end{cases} \tag{S2}$$

não admite solução $y \in X$.

É claro que todo ponto fortemente estacionário é fracamente estacionário. Além disso, é possível garantir que ser ponto fracamente estacionário é uma condição necessária para a eficiência fraca, mediante escolha adequada dos cones $\{K_i, K_j\}_{i\in I(\overline{x}), j\in J}$: De fato, basta tomar K cone de aproximação local satisfazendo (V1)-(V5) e definir: $K_j := \operatorname{int} K$, $j \in J$ e $K_i := K$ $(i \in I(\overline{x}))$. O resultado segue do Teorema 6.8. Também é importante notar que, sob hipóteses de convexidade, a impossibilidade de resolver (S1) (resp. (S2)) equivale a condição Fritz-John (respect. Kuhn-Tucker, sob hipóteses de regularidade)- e isto foi discutido na seção anterior.

Agora, recordemos algumas noções de K-invexidade.

Definição 6.13 *(Castellani [18]) Sejam $K(\cdot,\cdot)$ um cone de aproximação local e $f : X_0 \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função dada.*

(i) *Dizemos que f é* ***K-invexa*** *se existe uma função $\eta : X_0 \times X_0 \to X$ tal que*

$$f(x) - f(\overline{x}) \geq f^K(\overline{x}, \eta(x, \overline{x})), \ \forall x, \overline{x} \in X_0.$$

(ii) *Dizemos que f é K-**pseudoinvexa** se existe uma função $\eta : X_0 \times X_0 \to X$ tal que*

$$f^K(\overline{x}, \eta(x, \overline{x})) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(\overline{x}),\ \forall x, \overline{x} \in X_0.$$

(iii) *Dizemos que f é K-**quase invexa** se existe uma função $\eta : X_0 \times X_0 \to X$ tal que*

$$f(x) \leq f(\overline{x}) \Rightarrow f^K(\overline{x}, \eta(x, \overline{x})) \leq 0,\ \forall x, \overline{x} \in X_0.$$

(iv) *Dizemos que f é K-**estritamente quase invexa** se existe uma função $\eta : X_0 \times X_0 \to X$ tal que*

$$f(x) \leq f(\overline{x}) \Rightarrow f^K(\overline{x}, \eta(x, \overline{x})) < 0,\ \forall x, \overline{x} \in X_0,\ x \neq \overline{x}.$$

É claro que toda função K-invexa com respeito a η também é K-pseudoinvexa e K-quase invexa com respeito à mesma η. Além disso, em [60] Kaul e Kaur provam que existem funções K-pseudoinvexas com respeito a η que não são K-invexas com respeito a (mesma) η. Entretanto, pode-se provar que toda função K-pseudoinvexa com respeito a η é K-invexa com respeito a alguma $\widetilde{\eta}$. Para maiores detalhes, veja [18], p. 326.

Veremos que, sob hipóteses de invexidade é possível estabelecer condições suficientes de otimalidade. De fato:

Teorema 6.14 *Seja $\overline{x} \in S$ um ponto fortemente estacionário para (P) com respeito à família de cones de aproximação local $\{K_i, K_j\}_{i \in I(\overline{x}), j \in J}$. Se f_j $(j \in J)$ são K_j-pseudoinvexas e as g_i são $(i \in I(\overline{x}))$ são K_i-quase invexas com respeito a uma mesma η, então $\overline{x}$ é solução (global) fracamente eficiente de (P).*

PROVA: Seja $x \in S$. Então,

$$g_i(x) \leq 0 = g_i(\overline{x}),\ \forall i \in I(\overline{x})$$

e, como as g_i $(i \in I(\overline{x}))$ são K_i-quase invexas,

$$g_i^{K_i}(\overline{x}, \eta(x, \overline{x})) \leq 0, \ \forall i \in I(\overline{x}).$$

Por outro lado, o sistema (S2) é impossível, portanto, existe um $j = j(x) \in J$ tal que $f_j(\overline{x}, \eta(x, \overline{x})) \geq 0$. Mas f_j é K_j-pseudoinvexa, e então

$$f_j(x) \geq f_j(\overline{x}).$$

Portanto, não existe nenhum $x \in S$ tal que $f_j(x) < f_j(\overline{x})$, $\forall j \in J$, donde segue que $\overline{x}$ é solução (global) fracamente eficiente de (P). ■

Sob hipóteses mais restritivas de invexidade, os pontos fracamente estacionários também são fracamente eficientes.

Teorema 6.15 *Seja $\overline{x} \in S$ um ponto fracamente estacionário para (P) com respeito à família de cones de aproximação local $\{K_i, K_j\}_{i \in I(\overline{x}), j \in J}$. Se f_j $(j \in J)$ são K_j-pseudoinvexas e as g_i são $(i \in I(\overline{x}))$ são K_i-estritamente quase invexas com respeito a uma mesma η, então $\overline{x}$ é solução (global) fracamente eficiente de (P).*

PROVA: Seja $x \in S \setminus \{\overline{x}\}$. Então:

$$g_i(x) \leq 0 = g_i(\overline{x}), \ \forall i \in I(\overline{x})$$

e como as g_i $(i \in I(\overline{x}))$ são K_i-estritamente quase invexas,

$$g_i^{K_i}(\overline{x}, \eta(x, \overline{x})) < 0, \ \forall i \in I(\overline{x}).$$

Por hipótese, o sistema (S1) é impossível, e portanto, existe $j = j(x) \in J$ tal que $f_j^{K_j}(x, \eta(x, \overline{x})) \geq 0$. Mas f_j é K_j-pseudoinvexa, donde segue que

$$f_j(x) \geq f_j(\overline{x}).$$

Assim, não existe $x \in S$ tal que $f_j(x) < f_j(\overline{x})$ para cada $j \in J$, donde se conclui que $\overline{x}$ é solução (global) fracamente eficiente para (P). ■

Capítulo 7

Caracterização de eficiência via desigualdades quase variacionais

7.1 Introdução

A ligação existente entre desigualdades variacionais e problemas de otimização é bastante conhecida (veja [48], [36], [6]). Talvez o principal trabalho nesta direção (em contexto finito-dimensional) tenha sido o de Gianessi [44]. Este problema tem sido extensivamente estudado nos últimos anos. Vários resultados sobre existência de soluções têm sido obtidos através de diferentes desigualdades variacionais [21], [63], [66], [67].

Utilizando uma desigualdade quase-variacional, Lee et al. [66] obtêm resultados de existência de soluções para problemas invexos não diferenciáveis, finito-dimensionais, os quais generalizam os correspondentes resultados estabelecidos por Chen e Craven [22] para problemas convexos e diferenciáveis. Recentemente, Gianessi [45] mostrou a equivalência entre soluções eficientes de problemas multiobjetivo (diferenciável e convexo) e a solução de uma desigualdade variacional de tipo Minty; também estabeleceu contrapartidas de tais resultados para soluções fracamente eficientes.

Através de uma abordagem similar a esta, Lee [65] provou a equivalência entre as soluções de desigualdades de tipo Minty e de Stampacchia e as soluções eficientes, uti-

lizando a noção de subdiferencial (no sentido da Análise Convexa). Além disso, utilizando estes resultados, obteve um teorema de existência de soluções fracamente eficientes para o problema convexo multiobjetivo.

Neste Capítulo estenderemos os resultados obtidos por Lee em [65] para o problema multiobjetivo invexo, não diferenciável.

7.2 Soluções eficientes e desigualdades quase-variacionais

Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$ e $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., p)$ funções dadas.

Consideraremos o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) := (f_1(x), ..., f_p(x)) \\ &\text{sujeito a: } x \in X. \end{aligned} \tag{P}$$

onde "minimizar " será entendido como a busca de soluções eficientes do problema (P). Assumiremos que f_i são funções localmente Lipschitz e invexas com respeito a η em X. Consideraremos as seguintes desigualdades quase-variacionais:

DESIGUALDADE QUASE-VARIACIONAL VETORIAL DE TIPO MINTY (MVLI)

(MVLI): Encontrar $y \in X$ tal que para cada $x \in X$ e cada $\xi_i \in \partial f_i(x)$ $(i = 1, ..., p)$, se tenha

$$(\xi_1^T \eta(x, y), ..., \xi_p^T \eta(x, y)) \notin -\mathbb{R}_+^p \setminus \{0\}$$

(onde $\partial f_i(x)$ é o gradiente generalizado de Clarke de f_i em x).

DESIGUALDADE QUASE-VARIACIONAL VETORIAL DE TIPO STAMPACCHIA (SVLI)

(SVLI): Encontrar $y \in X$ tal que para cada $x \in X$, exista $\xi_i \in \partial f_i(y)$ $(i = 1, ..., p)$ tal que

$$(\xi_1^T \eta(x, y), ..., \xi_p^T \eta(x, y)) \notin -\mathbb{R}_+^p \setminus \{0\}.$$

Proposição 7.1 *Assuma que X é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$ e que $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., p)$ são funções localmente Lipschitz e invexas com respeito a η em X. Suponha, ainda, que η é antissimétrica (i.e., $\eta(z,t) = -\eta(t,z), \forall z,t \in X$). Neste caso, se $y \in X$ é uma solução eficiente de (P), então também é solução de (MVLI).*

PROVA: Seja $y \in X$ uma solução eficiente de (P). Então para cada $x \in X$, temos:

$$(f_1(x) - f_1(y), ..., f_p(x) - f_p(y)) \notin -\mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}. \tag{7.1}$$

Como f_i são invexas com respeito com respeito a η, temos $f_i^0(x; \eta(y,x)) \leq f_i(y) - f_i(x)$, e para cada $x \in X$ e cada $\xi_i \in \partial f_i(x)$, se verifica

$$\xi_i^T \eta(y,x) \leq f_i^0(x; \eta(y,x)) \leq f_i(y) - f_i(x)$$

ou seja,

$$f_i(x) - f_i(y) \leq -\xi_i^T \eta(y,x) = \xi_i^T \eta(x,y) \tag{7.2}$$

e, comparando (7.1) e (7.2), obtemos o resultado desejado. ■

Teorema 7.2 *Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$ e sejam $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., p$ funções localmente Lipschitz e invexas em X com respeito a η. Se $y \in X$ é solução de (SVLI), então y é solução eficiente de (P).*

PROVA: Seja $y \in X$ uma solução de (SVLI). Então, para cada $x \in X$, existem $\xi_i \in \partial f_i(y)$ tais que

$$(\xi_1^T \eta(x,y), ..., \xi_p^T \eta(x,y)) \notin -\mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}. \tag{7.3}$$

Seja $x \in X$. Da invexidade de f_i, segue que

$$f_i(x) - f_i(y) \geq f_i^0(y, \eta(x,y)) \geq \xi_i^T \eta(x,y) \tag{7.4}$$

e, comparando (7.3) e (7.4),

$$f(x) - f(y) \notin -\mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}$$

para cada $x \in X$, ou seja, y é solução eficiente de (P). ■

Segue da Proposição 7.1 e do Teorema 7.2 o seguinte corolário:

Corolário 7.3 *Assuma que $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., p$ são funções localmente Lipschitz e invexas em X com respeito a η. Suponha que η é antissimétrica. Se $y \in X$ é solução de (SVLI), então também é solução de (MVLI).*

Assim sendo, (SVLI) é condição suficiente para a eficiência em (P). Entretanto, se pode provar que tal condição não é necessária (veja [65], p. 172). Mas se pode provar que esta é uma condição necessária para a eficiência própria. É o que provaremos a seguir. Antes, porém, necessitaremos do seguinte teorema minimax:

Lema 7.4 *(Jeyakumar, [59]) Sejam Γ um conjunto arbitrário, Y um espaço vetorial topológico de Hausdorff, D um subconjunto compacto de Y e $F : \Gamma \times D \to \mathbb{R}$ uma função tal que $F(x, \cdot)$ é côncava e semicontínua superiormente em D para cada $x \in \Gamma$ fixado e $F(\cdot, y)$ é convexa, para cada $y \in D$ fixado. Então,*

$$\inf_{x \in \Gamma} \max_{y \in D} F(x, y) \geq 0 \Leftrightarrow \sup_{y \in D} \inf_{x \in \Gamma} F(x, y) \geq 0.$$

Proposição 7.5 *Sejam X um conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ e $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., p$ são funções localmente Lipschitz e invexas com respeito a η em X. Assuma que para cada $y \in X$, a função $\eta(\cdot, y)$ é linear. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $y \in X$ é solução propriamente eficiente de (P);

(b) Existem $\lambda_i > 0$, $i = 1, ..., p$ tais que $y \in X$ é solução da seguinte desigualdade quase-variacional escalar: Encontrar $y \in X$ tal que existem $\xi_i \in \partial f_i(y)$, $i = 1, ..., p$

tais que para cada $x \in X$,

$$(\lambda_1\xi_1 + ... + \lambda_p\xi_p)^T\eta(x,y) \geq 0$$

(c) Existem $\lambda_i > 0$, $i = 1, ..., p$ tais que y é solução da seguinte desigualdade quase-variacional escalar: Encontrar $y \in X$ tal que para cada $x \in X$, existem $\xi_i \in \partial f_i(y)$, $i = 1, ..., p$ tal que

$$(\lambda_1\xi_1 + ... + \lambda_p\xi_p)^T\eta(x,y) \geq 0.$$

PROVA: (a)⇒(b): Se $y \in X$ é solução propriamente eficiente de (P), então, como as funções f_i são invexas e X é compacto, temos que existem $\lambda_i > 0$, $i = 1, ..., m$ tais que $y \in X$ é solução do seguinte problema de otimização escalar:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \lambda_1 f_1(x) + ... + \lambda_p f_p(x) \\ &\text{sujeito a: } x \in X \end{aligned}$$

(veja [15]). Observamos que a função $\lambda_1 f_1 + ... + \lambda_p f_p$ é invexa e portanto y é um ponto estacionário desta função, ou seja,

$$0 \in \partial(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i)(y) + N_X(y) \subset \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \partial f_i(y) + N_X(y) \tag{7.5}$$

e, então, existem $\mu \in N_X(y)$ e $\xi_i \in \partial f_i(y)$, $i = 1, ..., p$ tais que

$$0 = \mu + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \xi_i. \tag{7.6}$$

Por outro lado, $\eta(x,y) \in T_X(y), \forall x \in X$, ou seja,

$$\langle \mu, \eta(x,y) \rangle \leq 0, \ \forall x \in X. \tag{7.7}$$

De (7.6) e (7.7) segue que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle \xi_i, \eta(x,y) \rangle \geq 0, \forall x \in X$, isto é,

$$(\lambda_1 \xi_i + ... + \lambda_p \xi_p)^T \eta(x,y) \geq 0$$

o que prova (b).

(b)⇒(a): Assuma que existem $y \in X$ e $\xi_i \in \partial f_i(y)$, $i = 1, ..., p$ onde para cada $x \in X$, se tem $(\lambda_1 \xi_1 + ... + \lambda_p \xi_p)^T \eta(x,y) \geq 0$. Por absurdo, supor que y não é solução propriamente eficiente de (P). Com maior razão, y não é solução do problema escalar

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \lambda_1 f_1(x) + ... + \lambda_p f_p(x) \\ &\text{sujeito a: } x \in X \end{aligned}$$

(veja Geoffrion [43]), ou seja, existe $x \in X$ tal que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x) < \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(y)$ e, portanto,

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i (f_i(x) - f(y)) < 0. \tag{7.8}$$

Por outro lado, pela invexidade das f_i (e, portanto, de $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$), temos,

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i (f_i(x) - f_i(y)) \geq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i^0(y; \eta(x,y)) \geq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \xi_i^T \eta(x,y) \geq 0$$

o que contraria (7.8). Portanto, y é solução propriamente eficiente de (P).

(b)⇔(c): Suponha que $y \in X$ é tal que existem $\xi_i \in \partial f_i(y)$, $i = 1, ..., p$ tal que para cada $x \in X$, se tenha $(\lambda_1 \xi_1 + ... + \lambda_p \xi_p)^T \eta(x,y) \geq 0$. Isto equivale a:

$$\max_{\xi_i \in \partial f_i(y)} \inf_{x \in X} (\lambda_1 \xi_1 + ... + \lambda_p \xi_p)^T \eta(x,y) \geq 0. \tag{7.9}$$

Sejam:

$$D := \prod_{i=1}^{p} \partial f_i(y);\ \Gamma := X;\ F(x,\xi) := (\lambda_1 \xi_1 + ... + \lambda_p \xi_p)^T \eta(x,y). \tag{7.10}$$

A função F satisfaz as hipóteses do Lema 7.4. De fato, para $x \in \Gamma$ fixado, a função $F(x, \cdot)$

é contínua em D (pois é uma forma linear definida entre espaços de dimensão finita) e em particular, é semicontínua superiormente. Além disso, $F(x,\cdot)$ é simultaneamente, côncava e convexa. Conseqüentemente, (7.9) é equivalente a

$$\inf_{x\in X}\max_{\xi_i\in\partial f_i(y)}(\lambda_1\xi_1+...+\lambda_p\xi_p)^T\eta(x,y)\geq 0$$

e esta última desigualdade é equivalente a (c). ■

Observação 7.6 *Note que na prova da Proposição 7.5, não foi usado o fato que a função $\eta(\cdot,y)$ é linear para a prova da equivalência entre (a) e (b).*

O seguinte teorema segue da Proposição 7.5 e da Observação 7.6:

Teorema 7.7 *Sejam X um subconjunto compacto e não vazio de $\mathbb{R}^n$ e $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $i=1,...,p$ são funções invexas e localmente Lipschitz com respeito a η em X. Se y é solução propriamente eficiente de (P), então y é solução da desigualdade (SVLI).*

PROVA: Se y é solução propriamente eficiente de (P) então, pela Proposição 6.7, existem $\lambda_i>0$, $\xi_i\in\partial f_i(y),\forall i=1,...,p$ tais que

$$(\lambda_1\xi_1+...+\lambda_p\xi_p)^T\eta(x,y)\geq 0,\forall x\in X. \tag{7.11}$$

Suporemos que existe $x\in X$ tal que para cada $\xi_i\in\partial f_i(y)$ vale

$$(\xi_1^T\eta(x,y),...,\xi_p^T\eta(x,y))\in -\mathbb{R}^p_+\setminus\{0\}$$

e exibiremos uma contradição. Como os λ_i são estritamente positivos, obtemos,

$$\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i\xi_i)^T\eta(x,y)<0$$

o que contraria (7.11). Portanto, y é solução de (SVLI). ■

CONCLUSÕES: Neste Capítulo estudamos a equivalência entre as suluções das desigualdades quase-variacionais de tipo Minty e Stampacchia e as soluções eficientes de problemas de otimização vetorial invexo e não diferenciáveis. Nossos resultados foram obtidos através de uma abordagem similar à empregada por Gianessi em [45] e generalizam os obtidos por Lee [65] que tratou o problema de otimização multiobjetivo convexo.

Parte III

DOIS PROBLEMAS ESPECÍFICOS DE OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

Capítulo 8

O problema de otimização fracionário multiobjetivo não diferenciável

8.1 Introdução

Neste Capítulo estudaremos o chamado *problema multiobjetivo fracionário*, cuja formulação é a seguinte:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \dfrac{f(x)}{g(x)} := \left(\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}, ..., \dfrac{f_p(x)}{g_p(x)}\right) \\ \text{sujeito a:} & h_j(x) \leq 0,\ j = 1, ..., m \\ & x \in S \end{array}\right\} \qquad \text{(VFP)}$$

onde $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., p;\ j := 1, ..., m)$ são funções dadas, S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$ e as funções g_i satisfazem $g_i(x) > 0$, para cada $x \in S$.

Neste Capítulo estudaremos o problema (VFP) quanto a soluções fracamente eficientes.

Problemas de otimização fracionários surgem em inúmeras aplicações, por exemplo,

quando se deseja otimizar razões, tais como desempenho/ custo, lucro/ investimento, custo/ tempo, etc. Para maiores detalhes sobre Programação Fracionária, veja [92] e as referências nele contidas. Do ponto de vista teórico, este problema também tem sido extensivamente estudado. Veja [7], [8], [9], [28], [29].

Uma das possíveis abordagens para o estudo de (VFP) é a *abordagem paramétrica* (veja [33], [58]). Esta abordagem foi recentemente empregada pelos autores de [79], os quais estudaram o caso em que (VFP) é diferenciável, sob hipóteses de convexidade generalizada. Também obtêm alguns resultados de dualidade.

O objetivo principal deste Capítulo é mostrar que os resultados obtidos por Osuna-Gómez et al. [79] continuam sendo válidos para uma certa classe de problemas de otimização fracionários multiobjetivo não diferenciáveis (Lipschitz-contínuos). Na Seção 8.2 caracterizaremos condições de otimalidade para o problema (VFP) e em 8.3 utilizamos os resultados da seção anterior na obtenção de resultados de dualidade.

8.2 Condições necessárias

Antes de tratar o problema (VFP), recordamos uma Proposição que nos fornece condições necessárias de otimalidade para problemas multiobjetivos não diferenciáveis (e não necessariamente fracionários).

Considere o seguinte problema de otimização:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimizar } F(x) & \\ \text{sujeito a:} & \begin{array}{l} h(x) \in -\mathbb{R}^m_+ \\ x \in S \end{array} \end{array}\right\} \qquad \text{(P)}$$

onde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ são duas funções dadas, localmente Lipschitz no conjunto factível e seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$.

Proposição 8.1 *Se x_0 é solução fracamente eficiente para (P), então existem $\mu \in$*

$\mathbb{R}^n_+, \lambda \in \mathbb{R}^m_+$ *não todos nulos e* $k > 0$ *tais que*

$$0 \in \partial(\sum_{i=1}^{n} \mu_i F_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j + k d_S)(x_0)$$

$$\langle \lambda, h(x_0) \rangle = 0.$$

(**PROVA:** Clarke [23], p. 230).

Retornemos ao problema (VFP). Denotaremos X o conjunto factível para (VFP), isto é,

$$X := \{x \in S : h_j(x) \leq 0,\ j = 1, ..., m\}.$$

Utilizando a abordagem paramétrica, Dinkelbach [33] e Jagannathan [58] consideraram o seguinte problema de otimização associado a (VFP). Seja $v = (v_1, ..., v_p) \in \mathbb{R}^p$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & (f_1(x) - v_1 g_1(x), ..., f_p(x) - v_p g_p(x)) \\ \text{sujeito a:} & h_j(x) \leq 0,\ j = 1, ..., m \\ & x \in S. \end{array}\right\} \qquad (\text{VFP}_v)$$

Adotaremos a seguinte notação: Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$x \leqq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i,\ \forall i = 1, ..., n$$
$$x \leq y \Leftrightarrow x \leqq y \text{ e } x \neq y$$
$$x < y \Leftrightarrow x_i < y_i,\ \forall i = 1, ..., n.$$

O seguinte resultado é provado em [79]:

Proposição 8.2 *O ponto* $\bar{x} \in X$ *é solução fracamente eficiente de (VFP) se e somente se* $\bar{x}$ *é solução fracamente eficiente de* $(VFP_{\bar{v}})$, *com* $\bar{v} = \dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$.

Em [43] Geoffrion caracteriza as soluções de problemas multiobjetivo em termos de certos problemas escalares- tal procedimento é chamado *escalarização*. Empregaremos uma abordagem similar a esta e consideraremos o problema (escalar) ponderado associado

a $(\text{VFP}_{\bar{v}})$:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sum_{i=1}^{n} \omega_i (f_i(x) - \bar{v}_i g_i(x)) \\ \text{sujeito a:} & h_j(x) \leq 0,\ j = 1, ..., m \\ & x \in S \end{array}\right\} \qquad ((\text{VFP})_{\bar{v}}(\omega))$$

onde $\omega \in W := \{\omega \in \mathbb{R}^p_+ : \sum_{i=1}^{p} \omega_i = 1\}$.

Aplicando as técnicas de escalarização usuais ao problema $(\text{VFP}_{\bar{v}})$ e utilizando o Proposição 8.1, obtemos:

Proposição 8.3 *Sejam $\bar{x} \in X$ e $\bar{v} = \dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$. Se $\bar{x}$ é solução do problema ponderado $(VFP)_{\bar{v}}(\omega)$, para algum $\omega \in W$, então $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (VFP).*

A seguir provamos uma recíproca da Proposição 8.3, empregando uma noção generalizada de convexidade chamada *KT-invexidade*. À luz do trabalho de Martin [72], propomos a seguinte noção de KT-invexidade para problemas fracionários:

Definição 8.4 *Dizemos que o problema $(VFP)_v$ é* ***KT-invexo*** *sobre o conjunto factível com respeito a η se para cada $x_1, x_2 \in X$, existe um vetor $\eta(x_1, x_2) \in T_S(x_2)$ tal que*

$$\phi_{v,i}(x_1) - \phi_{v,i}(x_2) \geq \phi^0_{v,i}(x_2, \eta(x_1, x_2)),\ i = 1, ..., p$$

$$h^0_j(x_2, \eta(x_1, x_2)) \leq 0,\ \forall j \in J(x_2) := \{j : h_j(x_2) = 0\}$$

(onde $\phi_{v,i}(x) := f_i(x) - v_i g_i(x)$).

Observamos que esta definição é mais geral que a dada por Osuna-Gómez et al. em [79]. De fato, quando S é aberto (e este é o caso tratado em [79]) o cone tangente $T_S(x)$ é o espaço $\mathbb{R}^n$. Além disto, nossa definição nos permite tratar de problemas com um conjunto S de restrições abstratas.

Como é usual em Programação Matemática, é necessário considerar alguma condição suplementar que nos permita estabelecer um regra de multiplicadores na forma normal (isto é, o multiplicador associado à função objetivo é não nulo) como uma condição necessária de otimalidade. Para isto, consideraremos a seguinte qualificação de restrição:

Definição 8.5 *Diremos que (VFP) satisfaz uma* ***qualificação de restrição*** *em $\bar{x}$ se existe um vetor $d_0 \in T_S(\bar{x})$ tal que $h_j^0(\bar{x}; d_0) < 0$, $\forall j \in J(\bar{x})$.*

Teorema 8.6 *Suponha que $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (VFP), que (VFP) satisfaz uma qualificação de restrição em $\bar{x}$ e que o problema ($VFP_{\bar{v}}$) é KT-invexo, com $\bar{v} = \dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$. Então, $\bar{x}$ é uma solução para o problema ponderado ($VFP_{\bar{v}}(\omega)$), para algum $\omega \in W$.*

PROVA: Suponha que $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (VFP). Então, pela Proposição 8.2, $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de ($\text{VFP}_{\bar{v}}$). Aplicando a Proposição 8.1 ao problema ($\text{VFP}_{\bar{v}}$), obtemos que existe um par não nulo $(\theta, \lambda) \in \mathbb{R}^p_+ \times \mathbb{R}^m_+$ tal que

$$[\textstyle\sum_{i=1}^{p} \theta_i (f_i - \bar{v}_i g_i) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j]^0(\bar{x}; d) \geq 0, \forall d \in T_S(\bar{x});$$
$$\lambda_j h_j(\bar{x}) = 0, \ j = 1, ..., m.$$

A desigualdade acima implica

$$[\sum_{i=1}^{p} \theta_i (f_i - \bar{v}_i g_i)]^0(\bar{x}; d) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j^0(\bar{x}; d) \geq 0, \forall d \in T_S(\bar{x}).$$

Em particular, para cada x factível para (VFP), se tem

$$[\sum_{i=1}^{p} \theta_i (f_i - \bar{v}_i g_i)]^0(\bar{x}; \eta(x, \bar{x})) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j^0(\bar{x}; \eta(x, \bar{x})) \geq 0$$

ou seja,

$$\begin{aligned}[\sum_{i=1}^{p} \theta_i (f_i - \bar{v}_i g_i)]^0(\bar{x}, \eta(x, \bar{x})) &\geq -\sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j^0(\bar{x}; \eta(x, \bar{x})) \\ &= -\sum_{j \in J(\bar{x})} \lambda_j h_j^0(\bar{x}; \eta(x, \bar{x})) \qquad (8.1)\end{aligned}$$

e da hipótese de KT-invexidade,

$$\sum_{i=1}^{p}[\theta_i(f_i(x)-\bar{v}_i g_i(x))]-\sum_{i=1}^{p}[\theta_i(f_i(\bar{x})-\bar{v}_i g_i(\bar{x}))]\geq[\sum_{i=1}^{p}\theta_i(f_i-\bar{v}_i g_i)]^0(\bar{x};\eta(x,\bar{x}))$$
$$\geq 0. \quad (8.2)$$

Afirmamos que $\theta \neq 0$. De fato, segue da qualificação de restrição que se $\theta = 0$, teríamos $\lambda \geq 0$ satisfazendo

$$h_j^0(\bar{x};d_0) < 0, \forall j \in J(\bar{x}). \quad (8.3)$$

Mas (8.3) e $\lambda \geq 0$ implicam

$$\sum_{j\in J(\bar{x})} \lambda_j h_j^0(\bar{x};d_0) < 0$$

o que contraria (8.1). Portanto, $\theta \geq 0$ e, sem perda de generalidade, podemos supor $\sum_{i=1}^{p}\theta_i = 1$. Fazendo $\omega = \theta$, segue de (8.2) que $\bar{x}$ é solução de $(\mathrm{VFP}_{\bar{v}}(\omega))$. ■

Segue imediatamente da Proposição 8.3 a seguinte condição necessária de otimalidade:

Teorema 8.7 *Seja $\bar{x}$ uma solução fracamente eficiente de (VFP) e seja $\bar{v} = \dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$. Então existe $(\bar{\lambda},\bar{\mu}) \geq 0$ tal que*

$$[\textstyle\sum_{i=1}^{p}\bar{\lambda}_i(f_i-\bar{v}_i g_i)+\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j h_j]^0(\bar{x};d)\geq 0, \forall d\in T_S(\bar{x})$$
$$\bar{\mu}_j h_j(\bar{x}) = 0,\ j = 1,...,m.$$

Para que possamos garantir que o multiplicador $\bar{\lambda}$ associado à função objetivo é não nulo, devemos supor uma qualificação de restrição. De fato:

Teorema 8.8 *Suponha que $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (VFP) e tal que (VFP) satisfaz uma qualificação de restrição em $\bar{x}$. Seja $\bar{v} = \dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$. Então existem $\bar{\lambda} \geq 0$, $\bar{\mu} \geqq 0$ tais que*

$$\begin{aligned}&[\textstyle\sum_{i=1}^{p}\bar{\lambda}_i(f_i-\bar{v}_i g_i)+\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j h_j]^0(\bar{x};d)\geq 0, \forall d\in T_S(\bar{x});\\ &\bar{\mu}_j h_j(\bar{x}) = 0,\ j = 1,...,m.\end{aligned} \quad (8.4)$$

PROVA: Segue do Teorema 8.7 que existem $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \geq 0$, satisfazendo (8.4). Suporemos que $\bar{\lambda} = 0$ e chagaremos a uma contradição. De fato, suponha $\bar{\lambda} = 0$. Segue de (8.4) que $\bar{\mu} \geq 0$ e que

$$\sum_{j=1}^{m} \bar{\mu}_j h_j^0(\bar{x}; d) \geq [\sum_{j=1}^{m} \bar{\mu}_j h_j]^0(\bar{x}; d) \geq 0, \forall d \in T_S(\bar{x}). \tag{8.5}$$

Por outro lado, da qualificação de restrição segue que existe $d_0 \in T_S(\bar{x})$ tal que $h_j^0(\bar{x}; d_0) < 0$, $\forall j \in J(\bar{x})$ e assim

$$\sum_{j=1}^{m} \bar{\mu}_j h_j^0(\bar{x}; d) = \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h_j^0(\bar{x}; d) < 0$$

o que contradiz (8.5). Portanto $\bar{\lambda} \geq 0$. ■

Sob hipóteses de convexidade generalizada, vale a recíproca do Teorema 8.8. De fato:

Teorema 8.9 *Se $\bar{x} \in X$ é tal que verifica (8.4), com $\bar{\lambda} \geq 0$, $\bar{\mu} \geqq 0$ e o problema $(VFP_{\bar{v}})$ com $\bar{v} = \dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$ é KT-invexo sobre o conjunto factível, então $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (VFP).*

PROVA: Suponhamos por absurdo que $\bar{x}$ não é solução fracamente eficiente de (VFP). Então, pela Proposição 8.2, $\bar{x}$ não é solução fracamente eficiente de $(\text{VFP}_{\bar{v}})$. Portanto, existe um $x \in X$ tal que

$$f_i(x) - \bar{v}_i g_i(x) < f_i(\bar{x}) - \bar{v}_i g_i(\bar{x}), \ i = 1, ..., p. \tag{8.6}$$

Por outro lado, segue de (8.4) que

$$[\sum_{i=1}^{p} \bar{\lambda}_i (f_i - \bar{v}_i g_i) + \sum_{j=1}^{m} \bar{\mu}_j h_j]^0(\bar{x}; \eta(x, \bar{x})) \geq 0, \ \forall x \in X$$

e, com maior razão,

$$[\sum_{i=1}^{p} \bar{\lambda}_i (f_i - \bar{v}_i g_i)]^0(\bar{x}; \eta(x, \bar{x})) + \sum_{j=1}^{m} \bar{\mu}_j h_j^0(\bar{x}; \eta(x, \bar{x})) \geq 0, \ \forall x \in X. \tag{8.7}$$

Como $(\text{VFP}_{\bar{v}})$ é KT-invexo, então $\sum_{j=1}^{m} \bar{\lambda}_j h_j^0(\bar{x}; \eta(x, \bar{x})) \leq 0$. Isto e (8.7) implicam

$$[\sum_{i=1}^{p} \bar{\lambda}_i (f_i - \bar{v}_i g_i)]^0(\bar{x}; \eta(x, \bar{x})) \geq 0, \ \forall x \in X. \tag{8.8}$$

Então, da KT-invexidade de $(\text{VFP}_{\bar{v}})$ e de (8.8) segue que

$$\sum_{i=1}^{p} \bar{\lambda}_i (f_i(x) - \bar{v}_i g(x)) - \sum_{i=1}^{p} \bar{\lambda}_i (f_i(\bar{x}) - \bar{v}_i g_i(\bar{x})) \geq 0, \ \forall x \in X. \tag{8.9}$$

Mas, como $\bar{\lambda} \geq 0$, a desigualdade (8.6) implica

$$\sum_{i=1}^{p} \bar{\lambda}_i (f_i(x) - \bar{v}_i g_i(x)) - \sum_{i=1}^{p} \bar{\lambda}_i (f_i(\bar{x}) - \bar{v}_i g_i(\bar{x})) < 0$$

a qual contradiz (8.9), e, portanto, $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (VFP). ■

8.3 Dualidade

Consideraremos o seguinte problema dual associado a (VFP), o qual é análogo ao dual proposto por Jagannathan [58] e Schaible [91]:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Maximizar } (v_1, ..., v_p) & \\ & 0 \in \partial(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i (f_i - v_i g_i) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j h_j + k d_S)(u) \\ \text{sujeito a:} & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (f_i(u) - v_i g_i(u)) \geq 0 \\ & u \in S, \ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p) \geq 0, \ \mu \geqq 0. \end{array}\right\} \tag{DF}$$

Denotaremos Y o conjunto das soluções factíveis de (DF).

A seguir, provaremos alguns resultados de dualidade para o par de problemas (VFP) e (DF), sob hipóteses de KT-invexidade.

Teorema 8.10 *(dualidade fraca) Sejam $x \in X$ e $(u, \lambda, \mu, v) \in Y$ dados. Se o problema*

(VFP_v) é KT-invexo, então

$$\frac{f(x)}{g(x)} \not< v.$$

PROVA: Como o problema (VFP_v) é KT-invexo,

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(f_i(x) - v_i g_i(x)) \geq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(f_i(u) - v_i g_i(u)) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(f_i - v_i g_i)^0(u; \eta(x,u)) \quad (8.10)$$

e pela factibilidade,

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(f_i(u) - v_i g_i(u)) \geq 0 \quad (8.11)$$

e, de (8.10) e (8.11),

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(f_i(x) - v_i g_i(x)) \geq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(f_i - v_i g_i)^0(u; \eta(x,u)). \quad (8.12)$$

Novamente, por factibilidade,

$$0 \in \partial(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(f_i - v_i g_i) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j h_j + k d_S)(u)$$

e portanto,

$$0 \leq (\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(f_i - v_i g_i)^0(u, \eta(x,u)) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j h_j^0(u; \eta(x,u)). \quad (8.13)$$

Segue de (8.13) e da KT-invexidade,

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(f_i(x) - v_i g_i(x)) \geq -\sum_{j=1}^{m} \mu_j h_j^0(u; \eta(x,u)) \geq 0. \quad (8.14)$$

Por absurdo, suponha que que $\dfrac{f(x)}{g(x)} < v$. Então, como $\lambda \geq 0$, temos

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(f_i(x) - v_i g_i(x)) < 0$$

o que contraria (8.14) e, portanto, $\frac{f(x)}{g(x)} \not\leq v$. ■

Teorema 8.11 *(dualidade forte) Suponha que (VFP_v) é KT-invexo para cada $v \in \mathbb{R}^p$ tal que existe (u, λ, μ) satisfazendo $(u, \lambda, \mu, v) \in Y$. Além disto, suponha que $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (VFP) e que (VFP) verifica a qualificação de restrição em $\bar{x}$. Então, existe $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v})$ tal que $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v})$ é solução fracamente eficiente de (DF).*

PROVA: Seja $\bar{v} = \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$. Se $\bar{x} \in X$ é solução fracamente eficiente de (VFP), então pelo Teorema 8.8, existem $\bar{\lambda} \geq 0$, $\bar{\mu} \geqq 0$ tais que

$$\begin{aligned} &(\textstyle\sum_{i=1}^{p} \bar{\lambda}_i(f_i - \bar{v}_i g_i) + \sum_{j=1}^{m} \bar{\mu}_j h_j)^0(\bar{x}; d) \geq 0, \ \forall d \in T_S(\bar{x}) \\ &\textstyle\sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j h_j(\bar{x}) = 0. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Mas (8.15), a qualificação de restrição e a KT-invexidade implicam

$$\begin{aligned} &0 \in \partial(\textstyle\sum_{i=1}^{p} \bar{\lambda}_i(f_i - \bar{v}_i g_i) + \sum_{j=1}^{m} \bar{\mu}_j h_j + k d_S)(\bar{x}) \\ &f_i(\bar{x}) - \bar{v}_i g_i(\bar{x}) = 0 \geq 0, \ i = 1, ..., m \end{aligned}$$

e, portanto, $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}) \in Y$. Por absurdo, suponha que $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v})$ não é solução fracamente eficiente de (DF). Então existe $(x, \lambda, \mu, v) \in Y$ tal que $v_i > \bar{v}_i$, $\forall i = 1, ..., m$, ou seja

$$\frac{f_i(\bar{x})}{g_i(\bar{x})} < v_i, \ \forall i = 1, ..., m$$

contrariando o Teorema 8.10 (dualidade fraca). ■

Teorema 8.12 *(dualidade inversa) Suponha que $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}) \in Y$ e $(VFP_{\bar{v}})$ é KT-invexo. Se $\bar{v} = \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$ para algum $\bar{x} \in X$, então $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (VFP). Se, além disso, para cada $(u, \lambda, \mu, v) \in Y$ o problema (VFP_v) é KT-invexo sobre o conjunto factível, então $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v})$ é solução fracamente eficiente de (DF).*

PROVA: Seja $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}) \in Y$. Suponha por absurdo que $\bar{x}$ não é solução fracamente eficiente de (VFP). Então, pela Proposição 8.2, existe $x \in X$ tal que

$$f_i(x) - \bar{v}_i g_i(x) < f_i(\bar{x}) - \bar{v}_i g_i(\bar{x}) = 0, \ \forall i = 1, ..., m$$

ou seja,

$$\frac{f(x)}{g(x)} < \bar{v}$$

o que contraria o Teorema 8.10 (dualidade fraca). Provaremos a segunda afirmação por absurdo. Para isto, suponha que $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v})$ não é solução fracamente eficiente de (DF). Então, existe $(u, \lambda, \mu, v) \in Y$ tal que

$$v_i > \frac{f_i(\bar{x})}{g_i(\bar{x})}, \ \forall i = 1, .., m$$

o que, novamente, contraria o Teorema 8.10. ■

Capítulo 9

O problema de tempo contínuo multiobjetivo

9.1 Introdução

Neste trabalho, consideraremos o problema de programação não linear multiobjetivo em tempo contínuo:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar } \phi(x) := (\int_0^T f_1(t,x(t))dt, ..., \int_0^T f_p(t,x(t))dt) & \\ \text{sujeito a:} & g_i(t,x(t)) \leq 0, \text{ q.t.p. } t \in [0,T] \\ & x \in X, \ i \in I := \{1, ..., m\}. \end{array} \tag{VCNP}$$

Aqui, X é um aberto, convexo e não vazio do espaço $L_\infty^n[0,T]$ das funções em $\mathbb{R}^n$, Lebesgue mensuráveis, essencialmente limitadas e definidas em $[0,T]$.

Em $L_\infty^n[0,T]$, consideraremos a norma $\|\cdot\|_\infty$, definida por

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \operatorname{ess\,sup}\{|x_j(t)|, 0 \leq t \leq T\}$$

onde para cada $t \in [0,T]$, $x_j(t)$ é a j-ésima componente do vetor $x(t)$.

Assumiremos que $g(t,x(t)) = \gamma(x)(t)$ e para cada $j \in J = \{1, ..., p\}$, $f_j(t,x(t)) =$

$\Gamma_j(x)(t)$, onde $\gamma : X \to \Lambda_1^m[0,T]$, $\Gamma_j : X \to \Lambda_1^1[0,T]$, onde $\Lambda_1^m[0,T]$ é o espaço das funções a valores em $\mathbb{R}^m$, definidas em $[0,T]$, que são Lebesgue-mensuráveis e essencialmente limitadas.

Em $\Lambda_1^m[0,T]$, consideraremos a norma $\|\cdot\|_1$,

$$\|y\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \int_0^T |y_j(t)|\, dt.$$

Denotaremos $\mathbb{F} := \{x \in X : g_i(t,x(t)) \leq 0, \text{ q.t.p. } t \in [0,T],\ i \in I\}$ ao conjunto factível de (VCNP) e $\phi_j(x) := \int_0^T f_i(t,x(t))dt$ $(j \in J)$.

Neste trabalho, consideraremos as seguintes noções de otimalidade para o problema (VCNP):

Definição 9.1 *Seja $\bar{x} \in \mathbb{F}$ um ponto dado.*

- *Dizemos que $\bar{x}$ é* ***solução local (global) eficiente*** *de (VCNP) se existe V vizinhança de $\bar{x}$ tal que não existe $x \in \mathbb{F} \cap V$ tal que $\phi_j(x) \leq \phi_j(\bar{x}), \forall j \in J$ com desigualdade estrita válida para algum $j \in J$. (resp. se não existe $x \in \mathbb{F}$ tal que $\phi_j(x) \leq \phi_j(\bar{x}), \forall j \in J$ com desigualdade estrita válida para algum $j \in J$.)*

- *Dizemos que $\bar{x}$ é* ***solução local (global) fracamente eficiente*** *de (VCNP) se existe V vizinhança de $\bar{x}$ tal que não existe $x \in \mathbb{F} \cap V$ tal que $\phi_j(x) < \phi_j(\bar{x}), \forall j \in J$ (resp. se não existe $x \in \mathbb{F}$ tal que $\phi_j(x) < \phi_j(\bar{x}), \forall j \in J$).*

- *Dizemos que $\bar{x}$ é* ***solução propriamente eficiente*** *de (VCNP) se é eficiente e se existe $M \geq 0$ tal que para cada $i \in J$ satisfazendo $\phi_i(x) < \phi_i(\bar{x})$, se verifica*

$$\frac{\phi_i(\bar{x}) - \phi_i(x)}{\phi_j(x) - \phi_j(\bar{x})} \leq M$$

para cada $x \in \mathbb{F}$, $\phi_j(\bar{x}) < \phi_j(x)$.

Salvo menção em contrário, por "minimizar " em (VCNP), compreenderemos encontrar as soluções fracamente eficientes /eficientes de (VCNP). O caso particular em que

$p = 1$ tem sido extensivamente estudado na literatura.

Esta classe de problemas foi introduzida por Bellman [10] e está relacionado com problemas de produção industrial, conhecidos por "botleneck processes". Desde então, muitos foram os autores que o têm estudado. Os melhores resultados para este caso (mono-objetivo) diferenciável, foram, talvez, obtidos por Zalmai em [99],[100], [101], [102], [103], [104]. O caso não diferenciável (Lipschitz-contínuo) foi discutido por Brandão et al. em [17], [87], através da Análise Não Diferenciável de Clarke [23].

Por outro lado, em muitas aplicações surge a necessidade de minimizar não apenas um único objetivo, mas vários deles, os quais, em geral são conflitantes. É por este motivo que estudamos o problema (VCNP), o qual não é apenas mais geral que o problema com um único objetivo, mas, também, é mais interessante para inúmeras aplicações.

O objetivo do nosso trabalho é obter condições necessárias e suficientes de otimalidade (eficiência) para uma classe de problemas de programação multiobjetivo em tempo contínuo Lipschitzianos, não diferenciável. Nossa abordagem é muito similar à empregada por Brandão et. al. [87], [17], que consideraram o caso $p = 1$.

Este Capítulo tem a seguinte estrutura: na Seção 9.2, recordaremos alguns resultados sobre integração de multifunções e obteremos condições necessárias para a otimalidade (eficiência fraca) para o problema (VCNP); na Seção 9.3, provaremos condições suficientes de otimalidade para a eficiência (própria e fraca) quando o problema é invexo.

9.2 Condições necessárias

Antes de iniciar o estudo do problema multiobjetivo em tempo contínuo (VCNP), recordamos alguns resultados sobre integração de multifunções, os quais serão amplamente utilizados ao longo deste Capítulo.

Dada uma multifunção $G : [0,T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, denotaremos $S^1([0,T])$ o conjunto das *seleções integráveis* de G, ou seja,

$$S^1([0,T]) := \{f \in L_1^n[0,T],\ f(t) \in G(t) \text{ q.t.p. } t \in [0,T]\}.$$

Define-se a *integral* de G :

$$\int_0^T G(t)dt := \{\int_0^T f(t)dt : f \in S^1([0,T])\}.$$

Uma multifunção de G é dita ser *integravelmente limitada* se G é mensurável e se existe uma função integrável $z : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ tal que

$$\|G(t)\| \leq z(t) \text{ q.t.p. em } [0,T].$$

Proposição 9.2 *Se G é uma função integravelmente limitada a valores compactos em $\mathbb{R}^n$ então*

$$\sigma_{\int_0^T G(t)dt}(v) = \int_0^T \sigma_{G(t)}(v)dt, \forall v \in \mathbb{R}^n,$$

onde $\sigma_{\int_0^T G(t)dt}(\cdot)$ é o funcional suporte do conjunto $\int_0^T G(t)dt$.

(Prova: Aubin e Frankowska [2].)

Voltemos ao problema (VCNP) mencionado na introdução:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar } \phi(x) := (\int_0^T f_1(t,x(t))dt, ..., \int_0^T f_p(t,x(t))dt) & \\ \text{sujeito a:} & \begin{array}{l} g_i(t,x(t)) \leq 0, \text{ q.t.p. } t \in [0,T] \\ x \in X, \ i \in I := \{1,...,m\}. \end{array} \end{array} \qquad \text{(VCNP)}$$

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto tal que

$$V \supset \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x \in \mathbb{F}, t \in [0,T]\}.$$

Assumiremos que f_j, g_i são funções definidas em $[0,T] \times V$.

Suporemos que as funções $t \mapsto f_j(t,x(t))$ são Lebesgue-mensuráveis e integráveis, para cada $x \in X$ e cada $j \in J$. Suporemos, ainda que as funções $f_j(t,\cdot), g_i(t,\cdot)$ são localmente Lipschitz em V, $\forall t \in [0,T]$ (e, é claro, podemos supor a mesma constante de Lipschitz para todas as funções).

Dados $\bar{x} \in X$ e $h \in L_\infty^n[0,T]$, utilizaremos as noções de *derivadas generalizadas de Clarke para problemas de tempo contínuo*, as quais foram introduzidas por Brandão et al. em [17].

$$g_i^0(t,\bar{x}(t);h(t)) := \gamma_i^0(\bar{x},h)(t) := \limsup_{\substack{y\to x \\ \lambda\to 0^+}} \frac{\gamma_i(y+\lambda h)(t)-\gamma_i(y)}{\lambda}$$

$$f_j^0(t,\bar{x}(t);h(t)) := \Gamma_j^0(\bar{x},h)(t) := \limsup_{\substack{y\to x \\ \lambda\to 0^+}} \frac{\Gamma_j(y+\lambda h)(t)-\Gamma_j(y)}{\lambda}.$$

Das hipóteses feitas segue que as derivadas $g_i^0(t,\bar{x}(t);h(t))$, $f_j^0(t,\bar{x}(t);h(t))$ $(i \in I,$ $j \in J)$ são finitas q.t.p. $t \in [0,T]$ e também $\phi_j^0(\bar{x};h)$ é finita. Além disso, as funções $t \mapsto f_j^0(t,\bar{x}(t);h(t))$ e $t \mapsto g_i^0(t,\bar{x}(t);h(t))$ são Lebesgue-mensuráveis e integráveis, para cada $\bar{x} \in X$ e cada $h \in L_\infty^n[0,T]$.

A seguir, apresentaremos uma caracterização geométrica de eficiência fraca. Para isto, definiremos os seguintes cones:

$$\mathcal{K}(\phi_j,\bar{x}) := \{h \in L_\infty^n[0,T] : \phi_j^0(\bar{x};h) < 0\}$$

$$\mathcal{K}(g_i,\bar{x}) := \{h \in L_\infty^n[0,T] : g_i^0(t,\bar{x}(t);h(t)) < 0 \text{ q.t.p. } t \in A_i(\bar{x})\}$$

onde $A_i(\bar{x}) := \{t \in [0,T] : g_i(t,\bar{x}(t)) = 0\}$, $\bar{x} \in \mathbb{F}$ e $i \in I$.

Teorema 9.3 *Seja $\bar{x} \in \mathbb{F}$ solução local fracamente eficiente de (VCNP). Então:*

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{K}(g_i,\bar{x}) \cap \bigcap_{j\in J} \mathcal{K}(\phi_j,\bar{x}) = \varnothing. \tag{9.1}$$

PROVA: Por absurdo, suponhamos que $\bar{x}$ é solução local fracamente eficiente de (VCNP) e que a intersecção em (9.1) é não vazia. Seja $h \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{K}(g_i,\bar{x}) \cap \bigcap_{j\in J} \mathcal{K}(\phi_j,\bar{x})$. Então, para cada $j \in J$,

$$\phi_j^0(\bar{x};h) := \limsup_{\substack{y\to x \\ \lambda\to 0^+}} \frac{\phi_j(y+\lambda h)-\phi_j(y)}{\lambda} < 0$$

e das propriedades do lim sup segue que todo y suficientemente próximo a $\bar{x}$ e todo $\lambda > 0$ suficientemente pequeno satisfazem

$$\phi_j(y + \lambda h) - \phi_j(y) < 0.$$

Em particular:

$$\phi_j(\bar{x} + \lambda h) < \phi_j(\bar{x}). \tag{9.2}$$

Similarmente, para cada $i \in I$, temos

$$g_i(t, \bar{x}(t) + \lambda h(t)) \leq 0, \text{ q.t.p. } t \in [0, T] \tag{9.3}$$

para todo $\lambda > 0$ suficientemente pequeno e, portanto, (9.2) e (9.3) contrariam o fato de $\bar{x}$ ser solução local fracamente eficiente de (VCNP). ■

O seguinte resultado é uma generalização do Teorema de Gordan ao problema de tempo contínuo.

Proposição 9.4 *(Brandão et al. [17]) Seja $A \subset [0, T]$ um conjunto de medida de Lebesgue positiva e X um subconjunto convexo e não vazio de $L^n_\infty(A)$ e sejam $p_i : V \times A \to \mathbb{R}$, $i \in I = \{1, ..., m\}$ definidas por $p_i(t, x(t)) = \pi_i(x)(t)$ onde V é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $\pi = (\pi_1, ..., \pi_m)$ é uma função de X em $\Lambda^m_1(A)$ e suponha que p_i é convexa com respeito ao seu argumento em V em A. Então, exatamente um dos seguintes sistemas é consistente:*

(i) *Existe $x \in X$ tal que $p_i(t, x(t)) < 0$ q.t.p. $t \in A$, $i \in I$;*

(ii) *Existe uma função vetorial m-vetorial não nula $u \in L^m_\infty(A)$, $u_i(t) \geq 0$ q.t.p. $t \in A$, $i \in I$ tal que*

$$\int_0^T \sum_{i \in I} u_i(t) p_i(t, x(t)) dt \geq 0, \forall x \in X.$$

A seguir, utilizamos o Teorema 9.3 (caracterização geométrica de otimalidade) e a Proposição 9.4 na obtenção de uma caracterização funcional para a eficiência fraca. Trata-se de um Teorema de tipo Fritz-John, o qual generaliza os resultados obtidos por Zalmai [99] e Brandão et al. [17].

Teorema 9.5 ***(Condições Fritz-John)*** *Seja $\bar{x} \in \mathbb{F}$ solução local fracamente eficiente de (VCNP). Supor que $f_i(t,\cdot)$, $g_j(t,\cdot)$ são Lipschitz perto de $\bar{x}(t)$. Então existem $\bar{\mu}_j \in \mathbb{R}$, $\bar{\lambda}_i \in L_\infty[0,T]$ $(i \in I,\ j \in J)$ tais que*

$$0 \in \int_0^T \sum_{j\in J} \bar{\mu}_j \partial_x f_j(t,\bar{x}(t)) + \sum_{i\in I} \bar{\lambda}_i \partial_x g_i(t,\bar{x}(t)) \tag{9.4}$$

$$\bar{\mu}_j \geq 0,\ \bar{\lambda}_i(t) \geq 0 \ \ q.t.p.\ t \in [0,T],\ i \in I,\ j \in J \tag{9.5}$$

$$(\bar{\mu}_1, ..., \bar{\mu}_p, \bar{\lambda}_1(t), ..., \bar{\lambda}_m(t)) \neq 0 \ \ q.t.p.\ t \in [0,T] \tag{9.6}$$

$$\bar{\lambda}_i(t) g_i(t,x(t)) = 0 \ \ q.t.p.\ t \in [0,T],\ i \in I. \tag{9.7}$$

A prova deste Teorema é essencialmente a mesma que a dada por Brandão et al. para o correspondente resultado mono-objetivo. Primeiramente, simplificaremos o problema assumindo que o problema (VCNP) tem apenas uma restrição de desigualdade, ou seja, que (VCNP) satisfaz a seguinte *hipótese interina*,

(HI) Supor que (VCNP) tem apenas uma restrição de desigualdade, digamos,

$$g(t,x(t)) \leq 0,\ \text{q.t.p. } t \in [0,T].$$

Esta hipótese será removida ao término da prova. Denotaremos:

$$A(\bar{x}) := \{t \in [0,T] : g(t,\bar{x}(t)) = 0\}$$

$$\mathcal{K}(g,\bar{x}) := \{h \in L^n_\infty[0,T] : g^0(t,\bar{x}(t);h(t)) < 0,\ \text{q.t.p. } t \in A(\bar{x})\}.$$

Lema 9.6 *Seja $\bar{x} \in \mathbb{F}$. Suponha que (VCNP) satizfaz a hipótese interina e que as funções $f_j(t,\cdot)$, $g(t,\cdot)$ são Lipschitz perto de $\bar{x}(t)$ em $[0,T]$. Se $\bar{x}$ é solução local fracamente eficiente de (VCNP), então existem $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\lambda} \in L^\infty[0,T]$, tais que*

$$0 \leq \int_0^T [\sum_{j\in J} \bar{\mu}_j f_j^0(t,\bar{x}(t);h(t)) + \bar{\lambda}(t) g^0(t,x(t);h(t))]dt, \ \forall h \in L_\infty^n[0,T] \tag{9.8}$$

$$\mu_j \geq 0, \ j \in J; \ \bar{\lambda}(t) \geq 0 \ q.t.p. \ t \in [0,T] \tag{9.9}$$

$$(\bar{\mu}, \bar{\lambda}(t)) \neq 0 \ q.t.p. \ t \in [0,T] \tag{9.10}$$

$$\bar{\lambda}(t) g(t,\bar{x}(t)) = 0 \ q.t.p. \ t \in [0,T]. \tag{9.11}$$

PROVA: Supor que $\bar{x} \in \mathbb{F}$ é solução local fracamente eficiente de (VCNP). Então, pelo Teorema 9.3, não existe $L_\infty^n[0,T]$ tal que

$$\begin{cases} \phi_j^0(\bar{x};h) < 0, \ j \in J \\ g^0(t,\bar{x}(t);h(t)) < 0 \text{ q.t.p. } t \in A(\bar{x}). \end{cases}$$

Então, pela Proposição 9.4, existem funções $\mu_1, ..., \mu_p, \lambda \in L^\infty[0,T]$,não simultaneamente nulas, tais que $\mu_1(t), ..., \mu_p(t), \lambda(t) \geq 0$ q.t.p. $t \in A(\bar{x})$ satisfazendo

$$0 \leq \int_{A(\bar{x})} [\mu_j(t)\phi_j^0(\bar{x};h) + \lambda(t) g^0(t,\bar{x}(t);h(t))]dt, \ \forall h \in L_\infty^n[0,T]. \tag{9.12}$$

Defina: $\bar{\mu}_j = \int_{A(\bar{x})} \mu_j(t)dt$, $j \in J$ e $\bar{\lambda}(t) = \begin{cases} \lambda(t), \ t \in A(\bar{x}) \\ 0, \ t \notin A(\bar{x}). \end{cases}$ Disto e de (9.12),

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{A(\bar{x})} [\mu_j(t)\phi_j^0(\bar{x};h) + \lambda(t) g^0(t,\bar{x}(t);h(t))]dt \\ &= \sum_{j\in J} \bar{\mu}_j \phi_j^0(\bar{x};h) + \int_0^T \bar{\lambda}(t) g^0(t,\bar{x}(t);h(t))dt \\ &\leq \int_0^T [\sum_{j\in J} \bar{\mu}_j f_j^0(t,\bar{x}(t);h(t)) + \bar{\lambda}(t) g^0(t,\bar{x}(t);h(t))]dt, \forall h \in L_\infty^n[0,T] \end{aligned}$$

(onde a segunda desigualdade segue do Lema de Fatou). Por construção, valem (9.9)-(9.11). ■

Lema 9.7 *Seja $\bar{x} \in \mathbb{F}$. Suponha que (VCNP) satizfaz a hipótese interina e que as funções $f_j(t,\cdot)$, $g(t,\cdot)$ são Lipschitz perto de $\bar{x}(t)$ em $[0,T]$. Se $\bar{x}$ é solução local fracamente eficiente de (VCNP), então existem $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\lambda} \in L^\infty[0,T]$, tais que*

$$0 \in \int_0^T [\sum_{j\in J} \bar{\mu}_j \partial_x f_j(t,\bar{x}(t)) + \bar{\lambda}(t)\partial_x g(t,\bar{x}(t))]dt \tag{9.13}$$

$$\bar{\mu}_j \geq 0,\ j \in J;\ \bar{\lambda}(t) \geq 0\ q.t.p.\ t \in [0,T] \tag{9.14}$$

$$(\bar{\mu}, \bar{\lambda}(t)) \neq 0\ q.t.p.\ t \in [0,T] \tag{9.15}$$

$$\bar{\lambda}(t)g(t,\bar{x}(t)) = 0\ q.t.p.\ t \in [0,T]. \tag{9.16}$$

PROVA: Seja $\bar{x}$ solução fracamente eficiente de (CVNP). Pelo Lema 9.6, existe $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$ e $\bar{\lambda} \in L^\infty[0,T]$ satisfazendo (9.8). Mas (9.8) pode ser rescrito como:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^T [\sum_{j\in J} \bar{\mu}_j \sigma_{\partial_x f_j(t,\bar{x}(t))}(h(t)) + \bar{\lambda}(t)\sigma_{\partial_x g(t,\bar{x}(t))}(h(t))]dt \\ &= \int_0^T \sigma_{[\sum_{j\in J} \bar{\mu}_j \partial_x f_j(t,\bar{x}(t)) + \bar{\lambda}\partial_x g(t,\bar{x}(t))]}(h(t))dt, \forall h \in L^n_\infty[0,T] \end{aligned} \tag{9.17}$$

(onde a igualdade segue da Proposição 9.2). Em particular a equação (9.17) vale para funções constantes, $h(t) \equiv v \in \mathbb{R}^n$. Por outro lado, a multifunção $t \mapsto \sum_{j\in J} \bar{\mu}_j \partial_x f_j(t,\bar{x}(t)) + \bar{\lambda}(t)\partial_x g(t,\bar{x}(t))$ é integravelmente limitada, e portanto

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^T [\sum_{j\in J} \bar{\mu}_j \sigma_{\partial_x f_j(t,\bar{x}(t))}(v) + \bar{\lambda}(t)\sigma_{\partial_x g(t,\bar{x}(t))}(v)]dt \\ &= \sigma_{\int_0^T [\sum_{j\in J} \bar{\mu}_j \partial_x f_j(t,\bar{x}(t)) + \bar{\lambda}(t)\partial_x g(t,\bar{x}(t))]dt}(v), \forall v \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{9.18}$$

(onde a igualdade segue da Proposição 9.2). De (9.18) segue (9.13). ■

Lema 9.8 *Seja* $g(t,x(t)) := \max_{i\in I} g_i(t,x(t))$. *Se existem* $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$ *e* $\bar{\lambda} \in L_\infty[0,T]$ *satisfazendo (9.13), então existe uma função mensurável* $e : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, $e(t) \in \partial_x g(t,x(t))$ *q.t.p.* $t \in [0,T]$ *tal que*

$$0 \in \int_0^T [\sum_{j\in J} \bar{\mu}_j \partial_x f_j(t,\bar{x}(t)) + u(t)e(t)]dt.$$

Além disso, para cada tal e, *existe* $v \in L^m_\infty[0,T]$, $v(t) \geq 0$ *q.t.p.* $t \in [0,T]$, *a qual satisfaz:*

(1) $v_i(t) = 0$, *quando* $g_i(t,\bar{x}(t)) \neq g(t,\bar{x}(t))$, $i \in I$;

(2) $\sum_{i\in I} v_i(t) = 1$ *q.t.p.* $t \in [0,T]$;

(3) $e(t) \in \sum_{i=1}^m v_i(t)\partial_x g_i(t,\bar{x}(t))$ *q.t.p.* $t \in [0,T]$.

PROVA: Seja $t \in [0,T]$ tal que $\partial_x g(t,\bar{x}(t)) \neq \varnothing$. Então (veja Clarke, [23]) $\partial_x g(t,\bar{x}(t)) \subset \text{co}\{\partial_x g_i(t,\bar{x}(t)) : i \in I(t,\bar{x}(t))\}$. Com maior razão, $e(t) \in \text{co}\{\partial_x g_i(t,\bar{x}(t)) : i \in I(t,\bar{x}(t))\}$. Para cada $t \in [0,T]$, defina o conjunto

$$V(t) := \{(v_1,...,v_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m v_i = 1, v_i \geq 0, v_i = 0 \text{ se } g_i(t,\bar{x}(t)) < g(t,\bar{x}(t)) \text{ e } e(t) \in \sum_{i=1}^m v_i \partial_x g_i(t,\bar{x}(t))\}.$$

Portanto, $V(t)$ é não vazio e fechado, q.t.p. $t \in [0,T]$ e V é uma multifunção mensurável. Pelo Teorema de Seleção Mensurável [2], existem funções mensuráveis $v_1,...,v_m$ tais que $(v_1(t),...,v_m(t)) \in V(t)$, q.t.p. $t \in [0,T]$, o que prova o Lema. ■

PROVA DO TEOREMA 9.5:[Remoção da hipótese interina]. Suporemos agora que (VCNP) tem m restrições de desigualdade, digamos, $g_i(t,x(t)) \leq 0$ q.t.p. $t \in [0,T]$, $i \in I = \{1,...,m\}$. Defina:

$$g(t,x(t)) := \max_{i\in I} g_i(t,x(t)).$$

Então o problema (VCNP) é equivalente ao problema com uma única restrição:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar } \phi(x) := (\int_0^T f_1(t,x(t))dt, ..., \int_0^T f_p(t,x(t))dt) \\ \text{sujeito a:} & g(t,x(t)) \leq 0, \text{ q.t.p. } t \in [0,T] \\ & x \in X. \end{array}$$

Seja $I(t,x) := \{i \in I : g_i(t,x(t)) = g(t,x(t))\}$. Deste modo, o problema modificado satisfaz a hipótese interina. Então, existem $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$ e $\bar{\lambda} \in L_\infty[0,T]$ satisfazendo (9.13). Pelo Lema 9.8, existe uma função mensurável $e : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, $e(t) \in \partial_x g(t,x(t))$ q.t.p. $t \in [0,T]$ satisfazendo (1)-(3). Defina: $\widehat{\lambda}_i(t) := \bar{\lambda}_i(t)v_i(t)$, $i \in I$. Então, por (9.13), temos

$$0 \in \int_0^T [\sum_{j\in J} \bar{\mu}_j \partial_x f_j(t,\bar{x}(t)) + \sum_{i\in I} \widehat{\lambda}_i(t)\partial_x g_i(t,\bar{x}(t))]dt.$$

Renomeando, $\widehat{\lambda}_i(t) := \bar{\lambda}_i(t)$, temos que $\bar{\mu}, \bar{\lambda}$ satisfazem (9.5)-(9.7), o que conclui a prova. ∎

As condições necessárias de otimalidade dadas no Teorema 9.5, não garantem que o multiplicador $\bar{\mu}$ associado à função objetivo seja não nulo. Para que isto ocorra, é necessário assumir alguma hipótese de regularidade nas restrições do problema. Assumiremos a seguinte *qualificação de restrição* (QR):

$$\bigcap_{i\in I} K(g_i,\bar{x}) \neq \varnothing. \tag{QR}$$

Teorema 9.9 ***(Condições de Karush-Kuhn-Tucker)*** *Seja $\bar{x} \in \mathbb{F}$ e suponha que (VCNP) satisfaz a qualificação de restrição (QR). Se $\bar{x}$ é solução local fracamente eficiente de (VCNP), então existem $\widehat{\mu}_j \in \mathbb{R}$, $\widehat{\lambda}_i \in L^\infty[0,T]$, $i \in I$, $j \in J$, com $\widehat{\mu} \neq 0$, os quais satisfazem:*

$$0 \in \int_0^T \sum_{j\in J} \bar{\mu}_j \partial_x f_j(t,\bar{x}(t)) + \sum_{i\in I} \bar{\lambda}_i \partial_x g_i(t,\bar{x}(t)) \tag{9.19}$$

$$\bar{\mu}_j \geq 0,\ \bar{\lambda}_i(t) \geq 0\ q.t.p.\ t \in [0,T],\ i \in I,\ j \in J \tag{9.20}$$

$$(\bar{\mu}_1, ..., \bar{\mu}_p, \bar{\lambda}_1(t), ..., \bar{\lambda}_m(t)) \neq 0\ q.t.p.\ t \in [0,T] \tag{9.21}$$

$$\bar{\lambda}_i(t) g_i(t, x(t)) = 0\ q.t.p.\ t \in [0,T],\ i \in I. \tag{9.22}$$

PROVA: Novamente, iniciamos supondo que o problema (VCNP) satisfaz a hipótese interina. Pelo Lema 9.6, existem $\widehat{\mu}_j \in \mathbb{R}$, $\widehat{\lambda}_i \in L^\infty[0,T]$, $i \in I$, $j \in J$ satisfazendo

$$0 \leq \int_0^T [\sum_{j \in J} \widehat{\mu}_j f_j^0(t, \bar{x}(t); h(t)) + \widehat{\lambda}(t) g^0(t, \bar{x}(t); h(t))] dt,\ \forall h \in L_\infty^n[0,T] \tag{9.23}$$

$$\widehat{\mu}_j \geq 0,\ j \in J;\ \widehat{\lambda}(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0,T] \tag{9.24}$$

$$(\widehat{\mu}, \widehat{\lambda}(t)) \neq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0,T] \tag{9.25}$$

$$\widehat{\mu}(t) g(t, \bar{x}(t)) = 0 \text{ q.t.p. } t \in [0,T]. \tag{9.26}$$

Por absurdo, suponhamos $\widehat{\mu} = 0$. Segue de (9.23) que $\widehat{\lambda} \neq 0$ e

$$0 \leq \int_0^T \widehat{\lambda}(t) g^0(t, \bar{x}(t); h(t)) dt,\ \forall h \in L_\infty^n[0,T].$$

Pela Proposição 9.4, não existe $h \in L_\infty^n[0,T]$ tal que $g^0(t, \bar{x}(t); h(t)) < 0$ q.t.p. $t \in [0,T]$ o que contraria a qualificação de restrição (QR). Portanto, $\widehat{\mu}$ é não nulo. Defina

$$g(t, x(t)) := \max_{i \in I} g_i(t, x(t)). \tag{9.27}$$

Então, a qualificação de restrição (QR) implica $K(g, \bar{x}) \neq \varnothing$, quando g é definido por (9.27) (veja Brandão et. al. [17]). Repetindo o argumento utilizado na prova do Teorema 9.5, obtemos o resultado desejado. ■

Defindo-se a *função Lagrangeana* $L : X \times \mathbb{R}^p \times L_\infty^m[0,T] \to \mathbb{R}$ por

$$L(x, \mu, \lambda) := \int_0^T [\sum_{j \in J} \mu_j f_j(t, x(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) g_i(t, x(t))] dt \tag{9.28}$$

denotaremos $L'_x(\bar{x}, \mu, \lambda; h)$ a derivada direcional usual de $L(\cdot, \mu, \lambda)$ em $\bar{x}$ na direção $h \in L^n_\infty[0,T]$ e $\partial_x L(\bar{x}, \mu, \lambda)$ denota o gradiente deneralizado de Clarke de $L(\cdot, \mu, \lambda)$. Se as funções $f_j(t,\cdot)$, $g_i(t,\cdot)$ $(i \in I,\ j \in J)$ são Clarke regulares, então a condição (9.4) equivale a $0 \in \partial_x L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$. Formalmente, obtemos os seguintes resultados:

Corolário 9.10 *Sejam as funções $f_j(t,\cdot)$, $g_i(t,\cdot)$ $(i \in I,\ j \in J)$ em (VCNP) Clarke regulares e seja $\bar{x} \in \mathbb{F}$ solução local fracamente eficiente de (VCNP). Supor que $f_i(t,\cdot)$, $g_j(t,\cdot)$ são Lipschitz perto de $\bar{x}(t)$. Então existem $\bar{\mu}_j \in \mathbb{R}$, $\bar{\lambda}_i \in L_\infty[0,T]$ $(i \in I,\ j \in J)$ tais que*

$$0 \in \partial_x L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$$

$$\bar{\mu}_j \geq 0,\ \bar{\lambda}_i(t) \geq 0 \ q.t.p.\ t \in [0,T],\ i \in I,\ j \in J$$

$$(\bar{\mu}_1, ..., \bar{\mu}_p, \bar{\lambda}_1(t), ..., \bar{\lambda}_m(t)) \neq 0 \ q.t.p.\ t \in [0,T]$$

$$\bar{\lambda}_i(t) g_i(t, x(t)) = 0 \ q.t.p.\ t \in [0,T],\ i \in I.$$

Corolário 9.11 *Sejam as funções $f_j(t,\cdot)$, $g_i(t,\cdot)$ $(i \in I,\ j \in J)$ em (VCNP) Clarke regulares e seja $\bar{x} \in \mathbb{F}$ solução local fracamente eficiente de (VCNP). Supor que $f_i(t,\cdot)$, $g_j(t,\cdot)$ são Lipschitz perto de $\bar{x}(t)$ e que (VCNP) satisfaz a qualificação de restrição (QR). Então existem $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, $\bar{\lambda}_i \in L_\infty[0,T]$ $(i \in I,\ j \in J)$ tais que*

$$0 \in \partial_x L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$$

$$\bar{\mu}_j \geq 0,\ \bar{\lambda}_i(t) \geq 0 \ q.t.p.\ t \in [0,T],\ i \in I,\ j \in J$$

$$(\bar{\mu}_1, ..., \bar{\mu}_p, \bar{\lambda}_1(t), ..., \bar{\lambda}_m(t)) \neq 0 \ q.t.p.\ t \in [0,T]$$

$$\bar{\lambda}_i(t) g_i(t, x(t)) = 0 \ q.t.p.\ t \in [0,T],\ i \in I.$$

9.3 Condições suficientes

Nesta seção, obteremos condições suficientes de otimalidade global (no sentido da eficiência fraca e da eficiência própria) para o caso em que as funções do problema (VCNP) são localmente Lipschitz, não convexas. Para este fim, utilizaremos a noção de invexidade introduzida por Brandão et al. em [17], e que é uma adaptação da noção clássica de invexidade ao contexto do problema de otimização em tempo contínuo não diferenciável.

Definição 9.12 *(Brandão et al. [17]) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in X$, $\psi : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\psi(t,\cdot)$ é localmente Lipschitz para cada $t \in [0,T]$. dizemos que $\psi(t,\cdot)$ é* ***invexa*** *em $\bar{x}(t)$ (com respeito a U) se existe uma função vetorial $\eta : U \times U \to \mathbb{R}^n$ tal que a função $t \mapsto \eta(x(t), \bar{x}(t))$ está em $L^n_\infty[0,T]$ e*

$$\psi(t, x(t)) - \psi(t, \bar{x}(t)) \geq \psi^0(t, \bar{x}(t); \eta(x(t), \bar{x}(t))) \ q.t.p. \ t \in [0,T]$$

para cada $x \in X$. E dizemos que ψ é ***estritamente invexa*** *se a desigualdade acima é estrita para cada $x \in X$, com $x(t) \neq \bar{x}(t)$ q.t.p. $t \in [0,T]$.*

Utilizando esta noção de invexidade, obteremos condições suficientes de otimalidade para o problema (VCNP).

Teorema 9.13 *(suficiência das condições Fritz-John) Seja $\bar{x} \in \mathbb{F}$ e suponha que as funções $f_j(t,\cdot)$ $(j \in J)$ são invexas em $\bar{x}(t)$ (com respeito a V) e $g_i(t,\cdot)$ $(i \in I)$ são funções estritamente invexas em $\bar{x}(t)$ (com respeito a V) com mesma função η para todas as funções do problema. Suponha, ainda, que existe $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\lambda} \in L^m_\infty[0,T]$ tais que*

$$0 \leq \int_0^T [\sum_{j \in J} \bar{\mu}_j f_j^0(t, \bar{x}(t); h(t)) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i(t) g_i^0(t, \bar{x}(t); h(t))] dt, \forall h \in L^n_\infty[0,T] \tag{9.29}$$

$$\bar{\mu}_j \geq 0, \ j \in J; \ \bar{\lambda}_i(t) \geq 0 \ q.t.p. \ t \in [0,T], \ i \in I \tag{9.30}$$

$$(\bar{\mu}, \bar{\lambda}(t)) \neq 0 \ q.t.p. \ t \in [0,T], \ i \in I. \tag{9.31}$$

$$\bar{\lambda}_i(t)g_i(t,\bar{x}(t)) = 0 \ q.t.p. \ t \in [0,T], \ i \in I \tag{9.32}$$

Então, $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (VPNC).

PROVA: Por absurdo, supor que $\bar{x}$ não é solução fracamente eficiente de (VCNP). Então, existe $\widetilde{x} \in \mathbb{F} \setminus \{\bar{x}\}$ tal que

$$\int_0^T f_j(t,\widetilde{x}(t))dt < \int_0^T f_j(t,\bar{x}(t))dt, \ \forall j \in J. \tag{9.33}$$

Como as $f_j(t,\cdot)$ são invexas em $\bar{x}(t)$, temos

$$f_j(t,\widetilde{x}(t)) - f_j(t,\bar{x}(t)) \geq f_j^0(t,\bar{x}(t);\eta(\widetilde{x}(t),\bar{x}(t)) \tag{9.34}$$

q.t.p. $t \in [0,T]$ e, sendo as $g_i(t,\cdot)$ estritamente invexas em $\bar{x}(t)$

$$g_i(t,\widetilde{x}(t)) - g_i(t,\bar{x}(t)) \geq g_i^0(t,\bar{x}(t);\eta(\widetilde{x}(t),\bar{x}(t))) \tag{9.35}$$

q.t.p. $t \in [0,T]$. Então,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^T [\sum_{j\in J} \bar{\mu}_j f_j^0(t,\bar{x}(t);\eta(\widetilde{x}(t),\bar{x}(t))) + \sum_{i\in I} \bar{\lambda}_i(t) g_i^0(t,\bar{x}(t);\eta(\widetilde{x}(t),\bar{x}(t)))]dt \\ &\leq \sum_{j\in J} \bar{\mu}_j \int_0^T [f_j(t,\widetilde{x}(t)) - f_j(t,\bar{x}(t))]dt + \sum_{i\in I} \int_0^T \bar{\lambda}_i(t)[g_i(t,\widetilde{x}(t)) - g_i(t,\bar{x}(t))]dt \\ &= \sum_{j\in J} \bar{\mu}_j \int_0^T [f_j(t,\widetilde{x}(t)) - f_j(t,\bar{x}(t))]dt + \sum_{i\in I} \int_0^T \bar{\lambda}_i(t) g_i(t,\widetilde{x}(t))dt \end{aligned} \tag{9.36}$$

onde a primeira desigualdade segue de (9.29); a segunda, de (9.34) e (9.35) e a igualdade, de (9.32). Mas:

$$\sum_{j\in J} \bar{\mu}_j \int_0^T [f_j(t,\widetilde{x}(t)) - f_j(t,\bar{x}(t))]dt + \sum_{i\in I} \int_0^T \bar{\lambda}_i(t) g_i(t,\widetilde{x}(t))dt \leq \sum_{j\in J} \bar{\mu}_j \int_0^T [f_j(t,\widetilde{x}(t)) - f_j(t,\bar{x}(t))]dt. \tag{9.37}$$

Afirmamos que $\bar{\mu} \neq 0$. Se fosse $\bar{\mu} = 0$, teríamos $\bar{\lambda} \neq 0$ em um conjunto de medida positiva e de (9.29),

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i \in I} \int_0^T \bar{\lambda}_i(t) g_i^0(t, \bar{x}(t); \eta(\widetilde{x}(t), \bar{x}(t)) dt < \int_0^T \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i(t) [g_i(t, \widetilde{x}(t)) - g_i(t, \bar{x}(t))] dt \\ &= \sum_{i \in I} \int_0^T \bar{\lambda}_i(t) g_i(t, \widetilde{x}(t)) dt \leq 0 \end{aligned}$$

o que é absurdo. Portanto, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}$ e, de (9.33)

$$\sum_{j \in J} \bar{\mu}_j \int_0^T [f_j(t, \widetilde{x}(t)) - f_j(t, \bar{x}(t))] dt < 0$$

e, disto e de (9.37),

$$\sum_{j \in J} \bar{\mu}_j \int_0^T [f_j(t, \widetilde{x}(t)) - f_j(t, \bar{x}(t))] dt + \sum_{i \in I} \int_0^T \bar{\lambda}_i(t) g_i(t, \widetilde{x}(t)) dt < 0$$

o que contraria (9.36). Logo, $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (VCNP). ■

Nos seguintes dois teoremas são discutidos a suficiência das condições Karush-Kuhn-Tucker, isto é, quando o multiplicador associado à função objetivo é não nulo.

Teorema 9.14 ***(Suficiência das condições Karush-Kuhn-Tucker)*** *Seja $\bar{x} \in \mathbb{F}$ tal que as funções $f_j(t, \cdot), g_i(t, \cdot)$ $(i \in I,\ j \in J)$ são invexas em $\bar{x}(t)$ (com respeito a V), $\forall t \in [0, T]$, com mesma função η para todas as funções do problema. Suponha que existem $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, $\bar{\lambda} \in L^m_\infty[0, T]$ tais que (9.29)-(9.32). Então $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (VCNP).*

PROVA: Seja $x \in \mathbb{F}$. É claro que

$$\bar{\lambda}_i(t) g_i(t, x(t)) \leq 0 = \bar{\lambda}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) \text{ q.t.p. } t \in [0, T],\ i \in I.$$

Também é verdade que $\bar{\lambda}_i(t)g_i(t,\cdot)$ é invexa em $\bar{x}(t)$ e disto e da desigualdade acima, obtemos

$$\bar{\lambda}_i(t)g_i^0(t,\bar{x}(t);\eta(x(t),\bar{x}(t))) \leq 0, \text{ q.t.p. } t \in [0,T],\ i \in I. \tag{9.38}$$

Tomando $h(t) = \eta(x(t),\bar{x}(t))$ em (9.29), obtemos,

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^T [\sum_{j\in J} \bar{\mu}_j f_j^0(t,\bar{x}(t);\eta(x(t),\bar{x}(t)) + \sum_{i\in I} \bar{\lambda}_i(t) g_i^0(t,\bar{x}(t);\eta(x(t),\bar{x}(t))]dt \\ \leq \int_0^T \sum_{j\in J} \bar{\mu}_j f_j^0(t,\bar{x}(t);\eta(x(t),\bar{x}(t))dt \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\int_0^T \sum_{j\in J} \bar{\mu}_j f_j^0(t,\bar{x}(t);\eta(x(t),\bar{x}(t))dt \geq 0, \forall x \in \mathbb{F}. \tag{9.39}$$

Por absurdo, suponhamos que $\bar{x}$ não é solução fracamente eficiente de (CVNP). Então, existe $x \in \mathbb{F}$ tal que

$$\int_0^T f_j(t,x(t))dt < \int_0^T f_j(t,\bar{x}(t))dt,\ \forall j \in J. \tag{9.40}$$

Mas $\bar{\mu} \in \mathbb{R}_+^p \setminus \{0\}$ e, da invexidade de $f_j(t,\cdot)$ em $\bar{x}(t)$ e de (9.40) segue que

$$\sum_{j\in J} \bar{\mu}_j \int_0^T f_j^0(t,\bar{x}(t);\eta(x(t),\bar{x}(t)) \leq \sum_{j\in J} \bar{\mu}_j \int_0^T [f_j(t,x(t)) - f_j(t,\bar{x}(t))]dt < 0$$

a qual contraria (9.39). Portanto, $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (VCNP). ■

Se no Teorema 9.14 tivermos $\bar{\mu}_j > 0, \forall j \in J$, podemos garantir $\bar{x}$ não é apenas solução fracamente eficiente de (VCNP), mas é propriamente eficiente.

Teorema 9.15 *Seja $\bar{x} \in \mathbb{F}$ tal que as funções $f_j(t,\cdot), g_i(t,\cdot)$ $(i \in I,\ j \in J)$ são invexas em $\bar{x}(t)$ (com respeito a V), $\forall t \in [0,T]$, com mesma função η para todas as funções do*

problema. Suponha que existem $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\lambda} \in L^n_\infty[0,T]$ *tais que*

$$0 \leq \int_0^T [\sum_{j\in J} \bar{\mu}_j f_j^0(t, \bar{x}(t); h(t)) + \sum_{i\in I} \bar{\lambda}_i(t) g_i^0(t, \bar{x}(t); h(t))]dt, \forall h \in L^n_\infty[0,T] \tag{9.41}$$

$$\bar{\mu}_j > 0,\ j \in J;\ \bar{\lambda}_i(t) \geq 0\ q.t.p.\ t \in [0,T],\ i \in I \tag{9.42}$$

$$(\bar{\mu}, \bar{\lambda}(t)) \neq 0\ q.t.p.\ t \in [0,T],\ i \in I. \tag{9.43}$$

$$\bar{\lambda}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) = 0\ q.t.p.\ t \in [0,T],\ i \in I \tag{9.44}$$

Então $\bar{x}$ *é solução propriamente eficiente de (VCNP).*

PROVA: Primeiramente, provaremos que $\bar{x}$ é solução eficiente de (VCNP). De fato, se não fosse eficiente, existiria um $x \in \mathbb{F}$ tal que $\phi_j(x) \leq \phi_j(\bar{x})$, $\forall j \in J$, com desigualdade estrita válida para pelo menos um índice $j_0 \in J$. Como $f_j(t,\cdot)$, $g_i(t,\cdot)$ são invexas em $\bar{x}(t)$,

$$f_j(t, x(t)) - f_j(t, \bar{x}(t)) \geq f_j^0(t, \bar{x}(t); \eta(x(t), \bar{x}(t))) \tag{9.45}$$

$$g_i(t, x(t)) - g_i(t, \bar{x}(t)) \geq g_i^0(t, \bar{x}(t); \eta(x(t), \bar{x}(t)))$$

q.t.p. $t \in [0,T]$, $\forall i \in I$, $j \in J$ e $t \mapsto \eta(x(t), \bar{x}(t))$ está em $L^n_\infty[0,T]$. De (9.41) segue

$$0 \leq \int_0^T [\sum_{j\in J} \bar{\mu}_j f_j^0(t, \bar{x}(t); \eta(x(t), \bar{x}(t))) + \sum_{i\in I} \bar{\lambda}_i(t) g_i^0(t, \bar{x}(t); \eta(x(t), \bar{x}(t)))]dt. \tag{9.46}$$

Por outro lado, como $\bar{\mu}_j > 0, \forall j \in J$ e $\phi_j(x) \leq \phi_j(\bar{x})$, $\forall j \in J$ com desigualdade estrita para algum $j_0 \in J$, temos

$$\int_0^T \sum_{j\in J} \bar{\mu}_j [f_j(t, x(t)) - f_j(t, \bar{x}(t))]dt < 0. \tag{9.47}$$

Além disso:

$$0 \ \geq\ \bar{\lambda}_i(t) g_i(t, x(t)) = \bar{\lambda}_i(t) g_i(t, x(t)) - \bar{\lambda}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t))$$

$$\geq \quad \bar{\lambda}_i(t) g_i^0(t, \bar{x}(t); \eta(x(t), \bar{x}(t))), \text{ q.t.p. } t \in [0, T], \ i \in I$$

e, portanto,

$$\int_0^T \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i(t) g_i^0(t, \bar{x}(t); \eta(x(t), \bar{x}(t)))dt \leq 0. \tag{9.48}$$

Mas: (9.47) e (9.45) implicam

$$0 > \int_0^T \sum_{j \in J} \mu_j f_j^0(t, \bar{x}(t); \eta(x(t), \bar{x}(t))dt \tag{9.49}$$

e, somando (9.48) e (9.49), obtemos

$$0 > \int_0^T [\sum_{j \in J} \bar{\mu}_j f_j^0(t, \bar{x}(t); h(t)) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i(t) g_i^0(t, \bar{x}(t); h(t))]dt, \forall h \in L_\infty^n[0, T]$$

o que contraria (9.41). Logo, $\bar{x}$ é solução eficiente de (VCNP). Defina:

$$M := (p-1) \max_{i,j \in J} \frac{\bar{\mu}_j}{\bar{\mu}_i} \tag{9.50}$$

(estamos supondo $p \geq 2$). Afirmamos que $\bar{x}$ é solução propriamente eficiente de (CVNP), com M definido pela fórmula (9.50). De fato, se não fosse, existiriam um $i \in J$ e um $x \in \mathbb{F}$ tais que

$$\phi_i(\bar{x}) - \phi_i(x) > M(\phi_j(x) - \phi_j(\bar{x}))$$

para cada $j \in J$ satisfazendo $\phi_j(x) > \phi_j(\bar{x})$. Portanto, teríamos

$$\phi_i(\bar{x}) - \phi_i(x) > M(\phi_j(x) - \phi_j(\bar{x})), \ \forall j \neq i.$$

Com maior razão,

$$\phi_i(\bar{x}) - \phi_i(x) > (p-1)\frac{\bar{\mu}_j}{\bar{\mu}_i}(\phi_j(x) - \phi_j(\bar{x})), \forall j \neq i$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\bar{\mu}_i}{p-1}(\phi_i(x)-\phi_i(\bar{x})) > \bar{\mu}_j(\phi_j(x)-\phi_j(\bar{x})), \forall j \neq i$$

e, somando sobre $j \neq i$, obtemos

$$\bar{\mu}_i(\phi_i(\bar{x})-\phi_i(x)) > \sum_{\substack{j\in J \\ j\neq i}} \bar{\mu}_j(\phi_j(x)-\phi_j(x))$$

e, portanto

$$\sum_{j\in J} \bar{\mu}_j(\phi_j(x)-\phi_j(\bar{x})) < 0. \tag{9.51}$$

De (9.41)-(9.44), da hipóteses de invexidade e de (9.51), segue que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^T [\sum_{j\in J} \bar{\mu}_j f_j^0(t,\bar{x}(t);\eta(x(t),\bar{x}(t))) + \sum_{i\in I} \bar{\lambda}_i(t) g_i^0(t,\bar{x}(t);\eta(x(t),\bar{x}(t)))\\
&\leq \int_0^T [\sum_{j\in J} \bar{\mu}_j(f_j(t,x(t)) - f_j(t,\bar{x}(t))) + \sum_{i\in I} \bar{\lambda}_i(g_i(t,x(t)) - g_i(t,\bar{x}(t)))]dt\\
&= \sum_{j\in J} \bar{\mu}_j(\phi_j(x)-\phi_j(\bar{x})) + \int_0^T \sum_{i\in I} \bar{\lambda}_i(t) g_i(t,x(t))dt \leq \sum_{j\in J} \bar{\mu}_j(\phi_j(x)-\phi_j(\bar{x}))\\
&< 0
\end{aligned}$$

o que é absurdo. Logo, $\bar{x}$ é solução propriamente eficiente de (VCNP). ■

Suponhamos que as funções $f_j(t,\cdot)$, $g_j(t,\cdot)$ $(j \in J, i \in I)$ são Clarke regulares, então a condição (9.29) equivale a

$$L'_x(\bar{x},\bar{\mu},\bar{\lambda};h) \geq 0, \forall h \in L^n_\infty[0,T]$$

a qual equivale, em tal caso a

$$L^0_x(\bar{x},\bar{\mu},\bar{\lambda};h) \geq 0, \forall h \in L^n_\infty[0,T]$$

ou, o que é o mesmo,

$$0 \in \partial_x L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$$

(onde L é a função Lagrangeana, definida por (9.28)).

Desta observação e dos Teoremas 9.13- 9.15, obtemos os seguintes corolários:

Corolário 9.16 *Seja $\bar{x} \in \mathbb{F}$ e suponha que as funções $f_j(t,\cdot)$ $(j \in J)$ e $g_i(t,\cdot)$ $(i \in I)$ são funções Clarke-regulares, $g_i(t,\cdot)$ $(i \in I)$ estritamente invexas em $\bar{x}(t)$, $f_j(t,\cdot)$ $(j \in J)$ são invexas (com respeito a V) com mesma função η para todas as funções do problema. Suponha, ainda, que existe $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\lambda} \in L^m_\infty[0,T]$ tais que*

$$0 \in \partial_x L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$$

$$\bar{\mu}_j \geq 0,\ j \in J;\ \bar{\lambda}_i(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0,T],\ i \in I$$

$$(\bar{\mu}, \bar{\lambda}(t)) \neq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0,T],\ i \in I$$

$$\bar{\lambda}_i(t) g_i(t, x(t)) = 0 \text{ q.t.p. } t \in [0,T],\ i \in I$$

Então, $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (VPNC).

Corolário 9.17 *Seja $\bar{x} \in \mathbb{F}$ e suponha que as funções $f_j(t,\cdot)$ $(j \in J)$ e $g_i(t,\cdot)$ $(i \in I)$ são funções Clarke-regulares, invexas (com respeito a V) com mesma função η para todas as funções do problema. Suponha, ainda, que existe $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, $\bar{\lambda} \in L^m_\infty[0,T]$ tais que*

$$0 \in \partial_x L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$$

$$\bar{\mu}_j \geq 0,\ j \in J;\ \bar{\lambda}_i(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0,T],\ i \in I$$

$$(\bar{\mu}, \bar{\lambda}(t)) \neq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0,T],\ i \in I.$$

$$\bar{\lambda}_i(t) g_i(t, x(t)) = 0 \text{ q.t.p. } t \in [0,T],\ i \in I$$

Então, $\bar{x}$ é solução fracamente eficiente de (VPNC).

Corolário 9.18 *Seja $\bar{x} \in \mathbb{F}$ e suponha que as funções $f_j(t,\cdot)$ $(j \in J)$ e $g_i(t,\cdot)$ $(i \in I)$ são funções Clarke-regulares, invexas (com respeito a V) com mesma função η para todas as funções do problema. Suponha, ainda, que existe $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\mu}_j > 0, \forall j \in J$ e $\bar{\lambda} \in L^m_\infty[0,T]$ tais que*

$$0 \in \partial_x L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\lambda})$$

$$\bar{\lambda}_i(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0,T],\ i \in I$$

$$\bar{\lambda}_i(t) g_i(t, x(t)) = 0 \text{ q.t.p. } t \in [0,T],\ i \in I$$

Então, $\bar{x}$ é solução propriamente eficiente de (VPNC).

CONCLUSÕES: Neste Capítulo, obtivemos condições necessárias de tipo Fritz-John e de Karush-Kuhn-Tucker para a eficiência fraca em problemas multiobjetivo não diferenciáveis em tempo contínuo. Utilizando a noção de invexidade em contexto da Programação Não Linear em Tempo Contínuo, proposta por Brandão et al. [17], obtivemos condições suficientes de otimalidade (eficiência fraca e eficiência própria) para tais problemas. Nossos resultados generalizam os obtidos por Zalmai [99], [101] (caso diferenciável) e por Brandão et al. [17], Rojas-Medar et al. [87] (caso não diferenciável), em que os autores tratam de problemas com um único objetivo.

Capítulo 10

Conclusões e possibilidades de trabalho futuro

10.1 Conclusões

- Empregamos diversas noções de convexidades genera- lizadas no estudo do problema de otimização vetorial.
- Caracterização de eficiência fraca em termos de pontos críticos através de uma noção conveniente de KT-invexidade;
- Existência de soluções fracamente eficientes;
- Caracterização de eficiência via desigualdades quase variacionais;
- Condições de tipo Ponto de Sela e condições de 2a. ordem (generalizada) para a eficiência fraca;
- Condições necessárias e suficientes para a eficiência fraca para o problema fracionário multiobjetivo e para o problema de tempo contínuo multiobjetivo (não-diferenciáveis, Lipschitz- contínuos).

10.2 Possibilidades de trabalho futuro

A seguir, apresentamos uma lista de possibilidades de prosseguimento para este trabalho de pesquisa.

(1) Invexidade e Aplicações

De todo o exposto neste trabalho, o leitor deve ter notado que o conceito de invexidade é muito potente e com grandes perspectivas de aplicações. Uma possibilidade de trabalho futuro é tentar aplicar o conceito de invexidade (e suas diversas generalizações) a problemas de Controle Ótimo, Otimização Fuzzy e outros temas em que o conceito de convexidade pertinente poderia, talvez, ser substituído por alguma noção de invexidade.

Em termos mais práticos, é importante mostrar quais são as condições sob as quais se pode garantir que um problema de programação matemática é invexo, com respeito a uma função η comum. Em [51] Hanson e Rueda fornecem condições suficientes para a existência da função η para o programa invexo cujas funções são duas vezes diferenciável, utilizando técnicas de Programação Linear. Além disso, sob certas hipóteses, eles constroem a função η, tornando o método mais eficaz que outros disponíveis na literatura. Um problema em aberto é obter resultados similares aos de Hanson e Rueda, mas enfraquecendo as hipóteses de diferenciabilidade das funções envolvidas.

Uma proposta ainda mais ambiciosa é a de tentar construir uma teoria de Análise Invexa, nos moldes da Análise Convexa clássica [86]. Isto nos parece um desafio muito grande, pois ainda não estamos seguros de que os conceitos de conjunto invexo e de funções invexas, da maneira usual em que são concebidas, são os mais apropriados para este propósito. Em [30] Yang e Craven introduzem uma noção de subdiferencial invexo, e de certa maneira iniciam tal proposta. Entretanto, o referido trabalho apresenta alguns erros e deixam algumas questões em aberto.

(2) KT-invexidade para problemas de tempo contínuo

Seria interessante estabelecer contrapartidas dos resultados de Martin [72] e de Osuna-Gómez et al. [77] para o problema de tempo contínuo, considerado no Capítulo 9. Cremos

que, para o caso particular em que o problema é diferenciável, os resultados do Capítulo 2 possam ser extendidos ao problema de tempo contínuo, sem maiores dificuldades. Nada existe na literatura especializada a este respeito.

(3) Invexidade em contexto fuzzy

A Teoria Fuzzy tem se mostrado uma promissora área de pesquisa. Nos últimos anos, muitos avanços têm sido feitos na tentativa de se obter resultados análogos aos da Análise Convexa e da Teoria de Otimização ao contexto fuzzy. Seria interessante obter extensões dos resultados de caracterização de ótimos globais para problemas com ou sem restrições a problemas de programação matemática com variáveis fuzzy.

(4) Problemas anormais

Os chamados problemas anormais surgem quando o multiplicador associado à função objetivo é nulo. Neste caso, as regras de multiplicadores usuais (Multiplicadores de Lagrange, Princípio de Máximo de Pontryagin) são de pouca valia na busca de soluções ótimas. No caso diferenciável, Avakov [5] e Izmailov [57] consideram, respectivamente, os problemas com restrições de igualdade e de desigualdade e conseguem estender as regras usuais de multiplicadores usuais a alguns casos anormais. Entretanto, os resultados obtidos pelos autores exigem um maior grau de diferenciabilidade das funções envolvidas. Uma questão interessante ainda em aberto é: seria possível extender tais resultados para o problema não diferenciável ou, pelo menos, diminuindo o grau de diferenciabilidade das funções do problema?

(5) Técnicas de deformação

Uma interessante técnica empregada na obtenção de condições de otimalidade para problemas de programação não linear são os chamados Métodos de Deformação. O método consiste, grosso modo, em "deformar" um problema de otimização em um problema mais simples. Entre outras hipóteses, esta deformação deve preservar os pontos ótimos. Bobylev [13], [14] estudou vários problemas de deformação. Um problema interessante-

e até agora não estudado- seria adaptar o método de deformação ao problema de tempo contínuo.

Bibliografia

[1] Q. H. ANSARI; A. H. SIDDIQI. (1995) A generalized vector variational-like inequality and optimization over a efficient set. In: Functional Analysis with current applications in Science, Technology and Industry (Aligargh, 1995), Pitman Res. Notes Math. Ser., 377, pp. 177-191.

[2] J. P. AUBIN. Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential equations, in Math. Anal. and Appl., L. Nachbin, ed., Academic Press, New York, 1981, pp. 159-229.

[3] J. AUBIN; H. FRANKOWSKA. Set-valued analysis. Birkhauser, Boston, 1990.

[4] J. P. AUBIN ; I. EKELAND. Applied nonlinear analysis. John Wiley, New York (1984).

[5] E. R. AVAKOV. (1985) Extremum conditions for smooth problems with equality-type constraints. U. S. R. R. Comput. Maths. Math. Phys., Vol. 25, no. 3, pp. 24-32.

[6] C. BAIOCCHI; A. CAPELO. Variational and quasivariational inequalities: applications to the free boundary problems. John Wiley & Sons, Inc., New York (1984).

[7] D. BATHIA; N. DATTA. (1985) Necessary conditions and subgradient duality for non-differentiable and non-convex multiobjective programming problem. Cahiers du C. E. R. O. 27, pp. 131-139.

[8] D. BATHIA; S. PANDEY (1991) A note on multiobjective fractional programming. Cahiers du C. E. R. O. 33, pp. 3-11.

[9] D. BATHIA; S. PANDEY (1991) Subgradient duality and duality for multiobjective fractional programming involving invex functions. Cahiers du C. E. R. O. 33, pp. 167-181.

[10] R. BELLMAN. Bottleneck problems and dynamics programming. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 39, pp.947-951.

[11] A. BEN-ISRAEL; B. MOND (1986) What is invexity? J. Austral. Math. Soc. Ser. B, 28, pp. 1-9.

[12] A. BEN-TAL; J. ZOWE. (1982) A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces. Math. programming Stud.,19 , p. 39-76.

[13] N. A. BOBYLEV (1989) "Deformation method of investigation of nonlinear programming problems I ", Automation and Remote Control, pp. 917-924, v. 50, no. 7, Part I.

[14] N. A. BOBYLEV (1989) "Deformation method of investigation of nonlinear programming problems II ", Automation and Remote Control, pp. 1018-106, v. 50, no.8, Part I.

[15] A. J. V. BRANDÃO; M. A. ROJAS-MEDAR; G. N. SILVA (1999) Optimality conditions for nonsmooth nonconvex programming in Banach spaces. J. Optim. Theory Appl. 103, no. 1, pp. 65-73.

[16] A. J. V. BRANDÃO; M. A. ROJAS-MEDAR; G. N. SILVA (2000) Invex nonsmooth alternative theorem and applications. Optimization 48, no.2, pp. 239-253.

[17] A. J. V. BRANDÃO; M. A. ROJAS-MEDAR; G. N. SILVA. (2001) Nonsmooth continuous-time optimization problems: necessary conditions. Comput. Math. Appl. 41 (2001), no. 12, pp. 1477-1486.

[18] M. CASTELLANI. (2001) Nonsmooth invex functiuons and sufficient optimality conditions. J. Math. Anal. Appl., 255, 319–332.

[19] R. W. CHANEY. (1987) Second order directional derivatives for nonsmooth functions. J. Math. Anal. Appl. 128, 495-511.

[20] V. CHANKONG; Y. Y. HAIMES: Multiobjective decision making: theory and methodology. North- Holland Publ., Amsterdam (1985).

[21] G. Y. CHEN; S. LI. (1996) existence of solutions for generalized vector quasivariational inequality. J. Optim. Theory and Appl., vol. 90, pp. 331-33.

[22] G. Y. CHEN; B. D. CRAVEN. (1994) Existence and continuity of solutions for vector optimization. J. Optim. Theory Appl., vol. 81, pp. 459-468.

[23] F. H. CLARKE. Optimization and nonsmooth analysis. Wiley Interscience (1983).

[24] F. H. CLARKE. (1975) Generalized gradients and applications. Trans. A. M. S., 205, 247–262.

[25] R. COMINETTI; R. CORREA. (1990) A generalized second-order derivative in nonsmooth optimization. SIAM J. Control Optim. 28, no. 4, pp. 789-809.

[26] B. D. CRAVEN. Control and Optimization. Chapman & Hall (1995).

[27] B. D. CRAVEN. (1977) Lagrangean conditions and quasiduality. Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol. 16, pp. 325-339.

[28] B. D. CRAVEN (1988) Fractional programming- a survey. Opsearch 25, no. 3, pp. 165-176.

[29] B. D. CRAVEN; B. MOND (1999) Fractional programming with invexity. Progress in Optimization, pp. 79-89. Appl. Optim., 30. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.

[30] B. D. CRAVEN; X. Q. YANG (1991) A nonsmooth version of alternative theorem and nonsmooth multiobjective programming. Utilitas Math. 40, pp. 117- 128.

[31] B. D. CRAVEN; B. M. GLOVER (1985). Invex functions and duality. J. Austral. Math. Soc. Ser. A 39, no. 1, pp. 1-20.

[32] S. DAFERMOS. (1990) Exchange price equilibrium and variational inequalities. Math. Programming 46 , pp. 391-402.

[33] W. DINKLEBACH. (1967) On nonlinear fractional programming. Management Science, 137, pp. 492-498.

[34] A. J. DUBOVITSKJI; A. A. MILJUTIN. (1965) Extremum problems in the presence of restrictions. Vychisl. Mat. i Fiz., 5 3, 395–453, (in Russian).

[35] N. DUNFORT; J. SCHWARZ. Linear operators, part I. Interscience Publishers (1957).

[36] G. DUVAULT; J. L. LIONS. Les inequations en mécanique et en physique. Dunod, Paris (1972).

[37] B. EL-ABDOUNI; T. THIBAULT. (1992) Lagrange multipliers for Pareto nonsmooth programming problems in Banach spaces, Optimization 26, pp. 277-285.

[38] K. H. ELSTER; J. THIERFELDER. (1988) Abstract cone approximations and generalized differentiability in nonsmooth optimization. Optimization, 19, 315–341.

[39] K. H. ELSTER; J. THIERFELDER: A general concept of cone approximations in nondifferentiable optimization, in: Nondifferentiable optimization: motivations and applications, V. F. Demjanov and D. Palllaschke (eds.), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 255, Springer-Verlag (1984).

[40] K. H. ELSTER; J. THIERFELDER. (1988) Abstract cone approximations and generalized differentiability in nonsmooth optimization. Optimization, 19, pp. 315-341.

[41] FAN, K. (1961) A generalization of Tichonoffs Fixed- Point Theorem, Mathematics Annals, 142, pp. 305-310.

[42] R. FLETCHER; G. WATSON. (1980) First and second order conditions for a class of nondifferentiable optimization problems. Math. programming 18 , pp. 291-307.

[43] A. M. GEOFFRION (1968). Properly efficiency and the theory of a vector maximization. J. Math. Anal. Appl., vol. 22, pp. 618-630.

[44] F. GIANESSI (1980). Theorems of alternative , quadratic programs and complementarity problems. In: Variational Inequalities and complementarity problems. Eds.: R. W. Cottle et al., pp. 151-186, John Wiley and Sons.

[45] F. GIANESSI (1997). On Minty variational principle. In: New Trends in Mathematical Programming. Kluwer.

[46] G. GIORGI; A. GUERRAGIO (1996). Various types of nonsmooth invex functions. J. Inf. Optim. Sci., 17, pp. 137-150.

[47] I. V. GIRSANOV. Lectures on mathematical theory of extremum problems. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 67, Springer- Verlag (1972).

[48] R. GLOWINSKI; J. L. LIONS; R. TRÉMOLIÈRES (1976). Numerical analysis of variational inequalities. North-Holland.

[49] M. A. HANSON (1981) On the sufficiency of Kuhn-Tucker conditions. J. Math. Anal. Appl., vol. 80, pp. 545-550 .

[50] M. A. HANSON; B. MOND (1987) Convex transformable programming problems and invexity. Journal of Information and Optimization Sciences, 8 (1987), 201-207.

[51] N. G. RUEDA; M. A. HANSON, C. SINGH (1995) Optimality and duality with generalized convexity. Journal of Optimization Theory and Applications, 86, no. 2, pp. 491-500.

[52] P. T. HARKER; J. S. PANG. (1990) Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory. Mathematical Proggraming, 48, pp. 161-220.

[53] J. B. HIRIART-URRUTY (1984) Approximating a second-order directional derivative for nonsmooth convex functions. SIAM J. Control Optim., 22 , pp. 43-56.

[54] J. B. HIRIART- URRUTY (1978) On optimality conditions in nondifferential programming. Mathematical Programming, 14, pp. 73–86.

[55] L. HÖRMANDER (1959) Sur la fonction d 'apui des ensembles convexes dans un espace localment convexe. Ark. Math. 3 , pp. 181-186.

[56] A. IOFFE (1981) Nonsmooth Analysis: differential calculus of nondifferentiable mappings. Trans. Amer. Math. Soc., 266 , pp. 1-55.

[57] A. F. IZMAILOV (1994) Optimality conditions for degenerate extremum problems with inequality- type constraints. Comp. Maths Math. Phys., Vol. 34, no. 6, pp. 723-736.

[58] R. JAGANNATHAN (1973) Duality for nonlinear fractional programming. Zeitschrift fur Operations Research, 17, pp. 1-3.

[59] J. JEYAKUMAR (1986). A generalization of a minimax theorem of Fan via a theorem of alternative. J. Optim. Theory Appl., vol. 48, pp. 525-533.

[60] R. N. KAUL; S. KAUR (1985) Optimality criteria in nonlinear programming involving nonconvex functions. J. Math. Anal. Appl., 105 , 104–112.

[61] K. R. KAZMI (1998) Some remarks on vector optimization problems. Journal Optimization Theory and Applications, 96 , pp. 133-138.

[62] D. KINDERLEHRER; G. STAMPACCHIA. An introduction to variational inequalities and their applications. Academic Press. London, 1980.

[63] I. V. KONNOV; J. C. YAO (1997). On the generalized vector variational inequality problem. J. Math. Anal. Appl., vol. 206, pp. 42-58.

[64] J. P. LAURENT. Approximation et optimisation. Herman, Paris (1972).

[65] G. M. LEE (2000). On relations between vector variational inequality and vector optmization problem. In: Progress in Optimization. Eds.: X. Yang et al., Kluwer.

[66] G. M. LEE; D. S. LEE; B. S. LEE; N. D. YEN (1998). Vector variational inequality as a tool for sudying vector optimization problems. Nonlinear Anal. Th. Math. Appl., 104, no. 2, pp. 745-765.

[67] G. M. LEE; S KUM (2000) On implicit vector variational inequalities. J. Optim. Theory Appl., 104, no. 2, pp. 409-425.

[68] G. M. LEE; D. S. KIM; H. KUK (1998) Existence of solutions for vector optimization problems. J. Math. Anal. Appl., vol. 220, pp. 90-98.

[69] D. G. LUENBERGER. Optimization by vector spaces methods. John Wiley & Sons (1969).

[70] O. G. MANCINO; G. STAMPACCHIA (1972) Convex programming and variational inequalities. J. Otim. Theory Appl., 9 , pp. 3-23.

[71] O. L. MANGASARIAN. Nonlinear Programming. Mac Garw-Hill, New York, (1969).

[72] D. H. MARTIN (1985) The essence of invexity. J. Optim. Theory Appl., vol. 47, no. 1, pp. 65-76 .

[73] M. MINAMI (1983) Weak Pareto-optimal necessary conditions in a nondifferentiable multi-objective program on a Banach space. J. Optim. Theory Appl., 41 451–461.

[74] H. MOULIN; F. FOGELMAN-SOULIÉ. La convexité dans les mathématiques de la décision (1979). Hermann, Paris.

[75] R. OSUNA-GÓMEZ; A. RUFIÁN-LIZANA; P. RUIZ-CANALES (2001) Duality in nondifferntiable vector programming. J. Math. Anal. Appl., 259 , pp. 462-475.

[76] R. OSUNA GÓMEZ; A. BEATO-MORENO; A. RUFIÁN-LIZANA (1999) A generalized convexity in multiobjective programming. J. Math. Anal. Appl. 233 , no. 1, pp. 205-220.

[77] R. OSUNA-GÓMEZ; A. RUFIÁN-LIZANA; P. RUIZ-CANALES (1998) Invex functions and generalized convexity in multiobjective programming. J. Optim. Theory Appl. 98 , no. 3, pp. 651-661.

[78] R. OSUNA-GÓMEZ. Programación con objectivos múltiples: dualidad. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, 1995.

[79] R. OSUNA-GÓMEZ; A. RUFIÁN-LIZANA; P. RUIZ-CANALES (2000) Multiobjective fractional programming with generalized convexity. Sociedad de Estadística e Investigación operativa TOP, vol. 8, no. 1, pp. 97-110.

[80] V. PARETO. Cours d'Economie Politique. Rouge (1886).

[81] J. PARIDA; M. SAHOO; A. KUMAR (1989) A variational-like inequality problem. Bull. Austral. Math. Soc., 39 , pp. 225-231.

[82] S. PARK (1992) Some coincidence theorems on acyclic multifunctions and applications to KKM theory. In: Fixed Point Theory and Applications, pp. 248-277.

[83] T. D. PHUONG; P. H. SACH; N. D. YEN (1995) Strict lower semicontinuity of the level sets and invexity of a locally Lipschitz function. J. Optim. Theory and Appl., 87, pp. 579-594.

[84] R. PINI (1991) Invexity and generalized convexity. Optimization, 22, pp. 513-525.

[85] T. W. REILAND (1990). Nonsmooth invexity. Bull. Austral. Math. Soc., 42, pp. 437-446.

[86] R. T. ROCKAFELLAR. Convex analysis. Princeton (1970).

[87] M. A. ROJAS-MEDAR; A. J. V. BRANDÃO; G. N. SILVA (1998) Nonsmooth continuous-time optimization problems: sufficient conditions. J. Math. Anal. Appl., 227 , pp. 305-318.

[88] G. RUIZ-GARZÓN; R. OSUNA-GÓMEZ; A. RUFIÁN-LIZANA. Relationships between vector variational-like inequality and optimization problems (a aparecer).

[89] G. RUIZ-GARZÓN; R. OSUNA-GÓMEZ; A. RUFIÁN-LIZANA (2003) Generalized invex monomoticity. European Journal of Operational Research, 144 , pp. 501-512.

[90] Y. SAWARAGI; H. NAKAYAMA; T. TANINO: Theory of multiobjective optimization. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 176. Academic Press, Orlando FL (1985).

[91] S. SCHAIBLE (1976) Fractional programming 1: duality. Management Science, 22, pp. 858-867.

[92] S. SCHAIBLE. A Survey of fractional programming. In: Generalized concavity in Optimization and Economics. Eds: S. Schaible; W. T. Ziemba. Academic Press, New York.

[93] L. THIBAULT (1980) Subdifferentials of compactly Lipschitzian vector-valued functions, Ann. Math. Pura Appl.,125, pp. 157-192 .

[94] L. THIBAULT (1982) On generalized differentiels and subdifferentiels of Lipschitz vector-valued functions, Nonlinear Analysis,6, pp. 1037-1053 .

[95] X. YANG (1992) Alternative theorems and optimality conditions with weakned convexity. Opsearch, vol. 29, no. 2, pp. 125-135.

[96] X. Q. YANG; C. J. GOH (1997) On vector variational inequalities: application to vector equilibria. Journal Optimization Theory and Applications, 95 , pp. 431-443.

[97] X. Q. YANG (2000) On some equivalent conditions of vector variational inequalities and vector equilibria. In: F. Gianessi (ed), Vector variational inequalities and vector equilibria: mathematical theories. Collection: Nonconvex optimization and its applications, vol. 38. Kluwer Academic Publishers. London, pp. 423-432.

[98] X. Q. YANG (1993) Generalized convex functions and vector variational inequalities. J. Optim. Theory Appl., vol. 79, pp. 563-580.

[99] G. J. ZALMAI (1995) The Fritz John and Kuhn-Tucker optimality conditions in continuous-time nonlinear programming. J. Math. Anal. Appl. 110 , pp. 503-518.

[100] G. J. ZALMAI (1985) Optimality conditions and Lagrangian duality in continuous-time nonlinear programming. J. Math. Anal. Appl. 109 , pp. 426-452.

[101] G. J. ZALMAI (1985) Sufficient optimality conditions in continuous-time nonlinear programming. J. Math. Anal. Appl. 111 , pp. 130-147.

[102] G. J. ZALMAI (1998) Duality in continuous-time homogeneous programming. J. Math. Anal. Appl. 227 , pp. 305-318.

[103] G. J. ZALMAI (1985) Sufficient optimality conditions in continuous-time nonlinear programming. J. Math. Anal. Appl. 111 , pp. 130-147.

[104] G. J. ZALMAI (1985) Duality in continuous-time homogeous programming. J. Math. Anal. Appl. 111 , pp. 433-448.