INTEGRAL MULTIPLICATIVA E TEORIA DO CONTROLE EM GRUPOS DE LIE

LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

À memória de meu irmão

Santiago, o Bá.

INTEGRAL MULTIPLICATIVA E
TEORIA DO CONTROLE EM GRUPOS DE LIE

LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Orientador:

Prof. Dr. Antonio Viteslav Walter Kumpera

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Outubro/1982

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. A.Kumpera, pelo incentivo e pelas idéias.

À minha mulher Anita, pela leitura e correção do manuscrito e

À Célia, pelo excelente trabalho de datilografia.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

A teoria do controle se ocupa dos sistemas dinâmicos passíveis de serem controlados pela alteração de algum ou alguns parâmetros de controle. Tais sistemas são denominados de sistemas de controle. Mais especificamente, um sistema de controle é dado por uma família de equações diferenciais $\dot{x} = f(t,x,u)$ *dependente do parâmetro* u. *Se a cada instante* t, *associarmos um ponto de controle* $u(t)$, *conseguiremos que o sistema evolua segundo a equação diferencial* $\dot{x} = f(t,x,u(t))$, *correspondente ao controle* $u(t)$.

O estudo dos sistemas de controle se concentrou, inicialmente, nos sistemas lineares $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, *para os quais foi desenvolvida uma vasta teoria. A teoria do controle linear lança mão, fundamentalmente, dos métodos da Análise Funcional. Estes métodos são introduzidos na teoria por intermédio da fórmula da variação das constantes que fornece soluções para a equação diferencial* $\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t)$ *correspondente ao controle* u. *Em outras palavras, a fórmula da variação das constantes fornece explicitamente a aplicação de entrada-saída, controle→solução, para os sistemas lineares.*

Este trabalho trata de uma classe de sistemas de controles que poderíamos considerar como uma primeira ampliação da classe dos sistemas lineares. Esta é a classe dos sistemas de controle que podem ser obtidos pela imagem de um sistema invariante num grupo de Lie (veja § 2.1, especialmente (2.1.2)) de uma ação deste grupo em alguma variedade diferenciável.

Na análise desta classe de sistemas, diferenciamos basicamente dois tipos de problemas; o primeiro, diz respeito à sua caracterização, isto é, ao levantamento dos sistemas de controle que podem ser obtidos pela ação de um grupo de Lie. Este problema não será abordado neste trabalho. Aqui, trataremos apenas da análise dos sistemas invariantes em grupos de Lie.

É no estudo destes sistemas que entra em jogo o processo de integração multiplicativa. A idéia é obter, como para os sistemas lineares, uma aplicação explícita de entrada-saída para os sistemas invariantes. Não obstante, para que as integrais multiplicativas possam ser utilizadas desta forma, é necessário que se tenha uma teoria de integração multiplicativa em grupos de Lie mais geral do que a requerida por outros objetivos. A teoria de integral multiplicativa em grupos de Lie como desenvolvida por P.Boulos em [1] ou por J.Hamilton em [7] prevê a integração apenas de funções Riemann integráveis a valores na álgebra de Lie de um grupo de Lie. A integração desta classe de funções não basta à teoria do controle, uma vez que as funções de controle utilizadas são em geral funções integráveis à Lebesgue. Por esta razão, que desenvolvemos aqui um processo de integração multiplicativa de funções integráveis à Lebesgue com valores na álgebra de Lie de um grupo.

Este trabalho consta de quatro capítulos:

O Capítulo 0 é 0 e não I, pelas razões que o seu título pretende justificar: trata-se de lemas preliminares, isto é, que não fazem parte efetiva do que se quer, e notações. Em 0.1, além das notações relativas a um grupo de Lie, provamos o lema 0.1.1 que permite definir e desenvolver a idéia de integração multiplicativa independentemente de uma parametrização local fornecida pelo teorema de Ado. A demonstração deste lema não faz nenhum apelo à dimensão finita do grupo. O que se pretende com isto, é abrir o caminho para se considerar, futuramente, as integrais multiplicativas em grupos de Lie moldados em espaços de Banach de funções Bochner integráveis com valores em sua álgebra de Lie. O § 0.2 enuncia o que será utilizado posteriormente das funções integráveis com valores em espaços vetoriais e suas integrais (aditivas). É provado também o lema que garantirá a existência das integrais multiplicativas. Em 0.3 são definidas as noções de continuidade absoluta e convergência uniforme de funções contínuas com valores em grupos de Lie. Finalmente, em 0.4 são apresentados alguns resultados sobre as funções cujos valores são subconjuntos de grupos de Lie.

O Capítulo I é dedicado ao estudo das integrais multiplicativas. Além do teorema fundamental, sem o qual as integrais multiplicativas não nos interessariam, é dada uma generalização dos teoremas de integrais dependentes de parâmetro que aparecem em [4]. Estas generalizações são colocadas num contexto de diferenciabilidade e continuidade de uma aplicação entre um espaço de Banach e um grupo de Lie.

Os Capítulos II e III apresentam algumas propriedades qualitativas dos conjuntos de acessibilidade dos sistemas de controle invariantes à direita em grupos de Lie. No Capítulo II introduzimos os sistemas de controle invariantes à direita num gru-

po de Lie incluindo propriedades elementares dos conjuntos de acessibilidade relacionadas com o princípio do bang-bang como em [9] ou [16] ou com a existência de controles ótimos como em [9]. O Capítulo III é reservado aos sistemas autônomos e gira em torno dos conceitos de controlabilidade e acessibilidade. Os teoremas de densidade do interior dos conjuntos de acessibilidade foram demonstrados em [17]. Inclui-se neste Capítulo uma condição suficiente para que um ponto seja interior a um conjunto de acessibilidade. Esta condição suficiente é obtida com o auxílio das fórmulas de diferenciabilidade da integral multiplicativa desenvolvida no Capítulo I. É indicada também, a maneira pela qual esta condição suficiente pode ser utilizada para se obter critérios de controlabilidade para certos tipos de sistemas invariantes.

CAPÍTULO 0

LEMAS PRELIMINARES E NOTAÇÕES

0.1 GRUPOS DE LIE

Neste trabalho G denotará sempre um grupo de Lie sobre $\mathbb{R}$, o conjunto dos reais.

$L(x)$ e $R(x)$ denotarão as translações à esquerda e à direita por x:

$$\begin{aligned} L(x) : G &\to G \\ y &\to xy \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} R(x) : G &\to G \\ y &\to yx \end{aligned}$$

$L(x)$ e $R(x)$ são difeomorfismos de G e suas diferenciais

$$dL(x)_y : T_yG \to T_{xy}G \quad ; \quad dR(x)_y : T_yG \to T_{yx}G$$

são isomorfismos entre os espaços tangentes correspondentes.

A álgebra de Lie $\mathcal{L}(G)$ de G será pensada como sendo o espaço tangente T_eG a G na identidade e de G. Se $X \in T_eG$, $\tilde{X}$ denotará o campo invariante à *direita* obtido a partir de X por translações à direita:

$$\tilde{X}(x) = dR(x)_e(X) \in T_xG .$$

O colchete em $\mathcal{L}(G)$ é o induzido em T_eG pelo colchete destes campos invariantes à direita.

$Ad : G \to Gl(\mathcal{L}(G))$ e $ad : \mathcal{L}(G) \to End(\mathcal{L}(G))$ são as representações adjuntas de G e $\mathcal{L}(G)$ respectivamente:

$Ad(x) = d(L(x) \circ R(x^{-1}))_e : T_eG \to T_eG \quad ; \quad ad(X)(Y) = [Y,X]$ e

$d(Ad)_e = ad : T_eG \to End(\mathcal{L}(G))$.

$exp : \mathcal{L}(G) \to G$ é a aplicação exponencial de G ; exp é um difeormosfismo nas vizinhanças do $0 \in \mathcal{L}(G)$. Às vezes usaremos e^X por $exp(X)$.

Desde que G é um grupo de Lie, estes objetos podem ser supostos analíticos juntamente com a estrutura diferenciável de G .

$\mathcal{V}(e)$ denotará o conjunto de todas as vizinhanças abertas da identidade e de G .

Se $x_1,\ldots,x_m$ são elementos de G , o seu produto será representado por

$$\prod_{i=1}^{m} x_i = x_m\, x_{m-1} \ldots x_2\, x_1$$

na ordem inversa à dos índices. A escolha desta ordem é devida à definição de integral multiplicativa à direita.

$\mathcal{L}(G)$ é um espaço vetorial de dimensão finita. Vamos nos utilizar, na sequência, de uma norma $\| \; \| : \mathcal{L}(G) \to \mathbb{R}$ em $\mathcal{L}(G)$. Não especificaremos esta norma, já que todas as normas de $\mathcal{L}(G)$ são equivalentes.

Se E e F são espaços vetoriais normados, Hom (E,F) é o espaço de todas as aplicações lineares contínuas $:E \to F$. Em $Hom(E,F)$ considera-se a norma induzida pelas normas de E e de F da maneira usual. Se $u \in Hom(E_1,E_2)$ e $v \in Hom(E_2,E_3)$ então $\|v \circ u\| \leq \|v\| \; \|u\|$. Assim, uma vez fixada uma norma em $\mathcal{L}(G)$ faz sentido falar em $\|Ad(x)\|$ se $x \in G$, $\|ad(X)\|$ se

$X \in \mathcal{L}(G)$ e $\|ad\|$.

Os resultados da teoria dos grupos de Lie que serão utilizados são de caráter geral, e por isto os suporemos conhecidos. Estes resultados podem ser encontrados em [8], por exemplo. Neste parágrafo provaremos apenas o lema através do qual serão construídas as integrais multiplicativas de Volterra em grupos de Lie.

Este lema é uma adaptação do teorema utilizado por Hamilton em [7] para o desenvolvimento de sua teoria de integração multiplicativa. Em [7] ele é obtido pelo translado, através do teorema de Ado, de certas desigualdades válidas em álgebras de Banach. Aqui, no entanto, faremos uma demonstração direta, livrando o desenvolvimento da teoria das integrais multiplicativas em grupos do uso de representações locais em grupos de matrizes.

0.1.1 LEMA: Sejam M um real positivo e $V \in \mathcal{V}(e)$ uma vizinhança da identidade e de G. Existe então $\delta > 0$ tal que para qualquer par de sequências finitas de mesmo comprimento $X_1,\ldots,X_m$; $Y_1,\ldots,Y_m$ de $\mathcal{L}(G)$ que satisfaça a $\sum_{k=1}^{m} (\|X_k\| + \|Y_k\|) \leq M$, se tenha que

$$\sum_{k=1}^{m} \|X_k - Y_k\| < \delta \Rightarrow \left(\prod_{k=1}^{m} \exp Y_k\right)^{-1} \left(\prod_{k=1}^{m} \exp X_k\right) \in V .$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja (W,ϕ) com $\phi : W \to \mathbb{R}^n$ uma carta para a estrutura de variedade diferenciável de G tal que $W \subset V$ e $\phi(e) = 0$. Como $dL(x)_e : T_eG \to T_xG$ e $d\phi_x : T_xG \to \mathbb{R}^n$ dependem continuamente de x , podemos escolher W tal que $\|dL(x)_e\| < M_1$

e $\|d\phi_x\| < M_1$ para algum $M_1 > 0$ e para qualquer $x \in W$.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que a bola aberta $B(0,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ de centro em 0 e raio ε esteja contida em $\phi(W)$ e tome $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon \exp(-M\|ad\|)/2M_1^2$. Tomemos $X_1,\ldots,X_m$, $Y_1,\ldots,Y_m$ satisfazendo as hipóteses e tal que $\sum_{k=1}^{m} \|X_k - Y_k\| < \delta$. Sejam $\alpha : [0,m] \subset \mathbb{R} \to \mathcal{L}(G)$ e $g : [0,m] \subset \mathbb{R} \to G$ definidos por: α é constante em cada intervalo $[k-1,k) \subset [0,m]$ com k inteiro, e neste intervalo $\alpha(t) = X_k - Y_k$. $\alpha(m) = X_m - Y_m$. Em $[k-1,k)$ $k = 1,\ldots,m$ definimos g por

$$g(t) = \exp(-Y_1)\ldots\exp(-(t-(k-1))Y_k)\exp(t-(k-1))X_k\ldots\exp X_1$$

$$= L(e^{-Y_1}\ldots e^{-Y_{k-1}}) \circ R(e^{X_{k-1}}\ldots e^{X_1})(\exp(-t+(k-1))Y_k)\exp(t-(k-1))X_k$$

e $g(m) = (\prod_{k=1}^{m} \exp(-Y_k))^{-1} (\prod_{k=1}^{m} \exp X_k)$. Então g é contínua em $[0,m]$ e é diferenciável fora de um conjunto finito.

Seja $t_0 = \sup\{t \in [0,m]/g[0,t] \subset \phi^{-1}(B(0,\varepsilon))\}$, então $g[0,t_o) \subset W$. Defina $h : [0,t_o) \to \mathbb{R}^n$ por $h(t) = \phi(g(t))$. Se $t \in [0,t_o)$ e t não é inteiro, h é diferenciável em t e um cálculo simples mostra que

$$h'(t) = d\phi_{g(t)} \circ dL(g(t))_e \circ Ad(\exp(t-(k-1))X_k\ldots\exp X_1)(X_k - Y_k)$$

e portanto,

$$\|h'(t)\| \leq M_1^2 \|Ad(\exp(t-(k-1))X_k\ldots\exp X_1)\| \|X_k - Y_k\| .$$

Mas se $X \in \mathcal{L}(G)$, então $Ad(\exp X) = \exp(ad(X)) \in Gl(\mathcal{L}(G))$ e consequentemente,

$$\|h'(t)\| \le M_1^2 \, e^{M\|ad\|} \, \|X_k - Y_k\| = M_1^2 \, e^{M\|ad\|} \, \|\alpha(t)\| .$$

Se $\xi : [0,m] \to \mathbb{R}$ é definida por $\xi(t) = M_1^2 \, e^{M\|ad\|} \int_0^t \|\alpha(\tau)\| d\tau$, então ξ é diferenciável fora de um conjunto finito, e $\xi'(t) = M_1^2 \exp(M\|ad\|) \, \|\alpha(t)\|$, isto é $\|h'(t)\| \le \xi'(t)$. O teorema do valor médio (c.f. [3] §8.5.1) nos garante então que se $t < t_o$,

$$\|h(t)\| = \|h(t) - h(0)\| \le |\xi(t) - \xi(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e portanto, $t_o = m$ pois $\|h(t_o)\| \le \frac{\varepsilon}{2}$, isto é, $g(t_o)$ é interior a W. O que demonstra o lema. □

0.2 FUNÇÕES INTEGRÁVEIS COM VALORES EM ESPAÇOS VETORIAIS

No próximo capítulo estaremos calculando integrais multiplicativas de funções integráveis a valores na álgebra de Lie $\mathcal{L}(G)$ de um grupo G. Vamos introduzir aqui algumas notações e alguns resultados que serão utilizados então.

Seja E um espaço vetorial real de dimensão finita e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base para E. Uma aplicação $\alpha : I \to E$ pode ser escrita como $\alpha = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ com $\alpha_i : I \to \mathbb{R}$. Se I é um intervalo de $\mathbb{R}$, diremos que α é integrável em relação à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ se cada α_i o for, isto é, se α_i for mensurável e se $\int_I |\alpha_i(t)| dt < \infty$. Nestas condições, podemos definir

$$\int_I \alpha(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_I \alpha_i(t)dt\right) e_i .$$

É claro que esta noção de integrabilidade não depende da particular base de E escolhida. As propriedades das funções integráveis $\alpha_i : I \to \mathbb{R}$ se estendem para $\alpha : I \to E$.

Se $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ é uma norma em E, não é difícil mostrar que α é integrável se e somente se $\|\alpha\| : I \to \mathbb{R}$ o é, isto é, se $\int_I \|\alpha(t)\|dt < \infty$. Além do mais, tem-se que $\|\int_I \alpha(t)dt\| \leq \int_I \|\alpha(t)\| dt$.

Identificando, como é usual, as funções que são iguais a menos de um conjunto de medida nula, podemos considerar o espaço $L^1(I,E)$ das funções integráveis $\alpha : I \to E$. Se em E fixamos uma norma, a $L^1(I,E)$ podemos dar uma estrutura de espaço de Banach definindo $\|\alpha\|_1 = \int_I \|\alpha(t)\| dt$ para $\alpha \in L^1(I,E)$. $L^1(I,E)$ é isomorfo ao espaço de Banach $(L^1(I,\mathbb{R}))^n$.

Se $L^1(I,E)^*$ denota o dual (topológico) de $L^1(I,E)$ então $L^1(I,E)^* \simeq (L^1(I,\mathbb{R})^*)^n$.

Da mesma forma podemos definir o espaço das funções p-integráveis com $p > 1$: α é p-integrável se cada α_i o for, isto é, se $\int_I |\alpha_i(t)|^p dt < \infty$. Esta noção também é independente da base, e α é p-integrável se e só se $\int_I \|\alpha(t)\|^p dt < \infty$. Os espaços de Banach $L^p(I,E)$, $p > 1$ são definidos da mesma maneira, tomando $\| \ \|_p : L^p(I,E) \to \mathbb{R}$ como $\|\alpha\|_p = (\int_I \|\alpha(t)\|^p dt)^{1/p}$.

$L^p(I,E) \simeq (L^p(I,\mathbb{R}))^n$ e $L^p(I,E)^* \simeq (L^p(I,\mathbb{R})^*)^n$. Em particular, $L^2(I,E)^*$ é isomorfo a $L^2(I,E)$, isto é, $L^2(I,E)$ é um espaço de Banach reflexivo. Como $[a,b]$ é de medida finita, a inclusão $L^p([a,b],\mathcal{L}(G)) \to L^1([a,b],\mathcal{L}(G))$ é contínua.

Se F é outro espaço vetorial real e $T: E \to F$ é linear então $T\int_I \alpha(t)dt = \int_I T(\alpha(t))dt$. Além do mais, $\bar{T}: L^1(I,E) \to L^1(I,F)$ definida por $\bar{T}(\alpha)(t) = T(\alpha(t))$ é contínua e $\|\bar{T}\| = \|T\|$.

A idéia envolvida no conceito de integral multiplicativa, nos obriga a defini-la por aproximações de integrais multiplicativas de funções $\alpha : I \to \mathcal{L}(G)$ que são constantes por pedaços. Para isto, será necessário um teorema de aproximação de uma função integrável por funções constantes por pedaços.

Consideremos o espaço de Banach $L^1([a,b],E)$ com $b > a$. Seja $P = \{t_o,\ldots,t_m\}$ uma partição finita de $[a,b]$, isto é, $a = t_o < t_1 <\ldots< t_m = b$. O comprimento de P denotado por $|P|$ é o máx $\{t_k-t_{k-1} / k = 1,\ldots,m\}$. Para cada $\alpha \in L^1([a,b],E)$ podemos associar a função constante por pedaços $\alpha_P : [a,b] \to E$ definida por

$$(0.2.1) \qquad \alpha_P(t) = \frac{1}{t_k-t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \alpha(s)ds \qquad \text{se} \quad t \in [t_{k-1},t_k).$$

α_P é bem definida pois α é integrável sobre todo intervalo $[c,d] \subset [a,b]$. Além do mais é evidente que α_P é integrável e

$$\|\alpha_P\|_1 = \int_a^b \|\alpha_P(t)\|dt = \sum_{k=1}^m \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \alpha(s)ds\right\| \leq \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\alpha(s)\|ds = \|\alpha\|_1,$$

$$(\alpha+\beta)_P = \alpha_P + \beta_P$$

e se $\lambda \in \mathbb{R}$ então $(\lambda\alpha)_P = \lambda\alpha_P$.

Com o auxílio destas funções podemos mostrar que toda $\alpha \in L^1([a,b],E)$ pode ser aproximada por uma função constante por pedaços (c.f. [4] cap. 1).

0.2.2 LEMA: Com as notações acima, $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0$ tal que

$$|P| < \delta \Rightarrow \|\alpha - \alpha_P\|_1 < \varepsilon .$$

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que α é contínua. Neste caso,

$$\|\alpha_P - \alpha\|_1 = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Big\| \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \alpha(s)ds - \alpha(t) \Big\| dt \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\alpha(s) - \alpha(t)\| ds \right) dt$$

e sendo α contínua existe $\delta > 0$ tal que se $|t-s| < \delta$ então $\|\alpha(t) - \alpha(s)\| < \varepsilon/(b-a)$. E daí que se $|P| < \delta$ então

$$\|\alpha_P - \alpha\|_1 \leq \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\varepsilon}{b-a} ds \right) dt = \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon}{b-a} (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon .$$

Se α não é obrigatoriamente contínua, o teorema de Lusin (c.f. [6] ou [15]) nos garante que existe β contínua tal que $\|\alpha - \beta\|_1 < \varepsilon/3$. E daí que

$$\|\alpha - \alpha_P\|_1 \leq \|\alpha - \beta\|_1 + \|\beta - \beta_P\|_1 + \|\beta_P - \alpha_P\|_1 .$$

Escolha P com $|P|$ suficientemente pequeno para que $\|\beta-\beta_P\|_1 < \varepsilon/3$, então

$$\|\beta_P - \alpha_P\|_1 = \|(\beta-\alpha)_P\|_1 \leq \|\beta - \alpha\|_1 < \varepsilon/3$$

e portanto $\|\alpha - \alpha_P\|_1 < \varepsilon/3$. □

0.3 CONTINUIDADE ABSOLUTA E CONVERGÊNCIA UNIFORME

O tratamento que damos neste trabalho às integrais multiplicativas requer a noção de funções absolutamente contínuas com valores num grupo de Lie G e a de convergência uniforme de sequências de funções contínuas em G. O conceito de continuidade absoluta depende apenas da estrutura diferenciável de G. Por outro lado, para falar em convergência uniforme nos envolveremos somente com sua (de G) condição de grupo topológico.

Lembremos que $h : [c,d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é absolutamente contínua se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda sequência finita de intervalos (s_k, t_k) $k = 1,\dots,m$ dois a dois disjuntos de $[c,d]$, em que $\sum_{k=1}^{m} (t_k - s_k) < \delta$, se tenha que

$$\sum_{k=1}^{m} \|h(t_k) - h(s_k)\| < \varepsilon .$$

Em particular, h é contínua (c.f. Halmos [6]).

Consideremos então uma variedade diferenciável M (C^1 é suficiente) e uma função contínua $f : [a;b] \to M$. Tomemos

$t_o \in [a,b]$ e (V,ϕ) uma carta para M com $\phi(V) \subset \mathbb{R}^n$ e tal que $f(t_o) \in V$. Desde que f é contínua existe um intervalo $[c,d] \subset [a,b]$ de tal forma que $f[c,d] \subset V$. Restringindo-se f a $[c,d]$, é possível compor a carta ϕ com f obtendo-se $h = \phi \circ f : [c,d] \to \mathbb{R}^n$.

Diremos que f é localmente absolutamente contínua em $t_0 \in [a,b]$, se para toda carta (V,ϕ) em torno de $f(t_o)$ e $[c,d] \subset [a,b]$ com $f[c,d] \subset V$, $\phi \circ f : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ é absolutamente contínua. E f é absolutamente contínua se o for localmente em cada ponto. É claro, que $f : [a,b] \to M$ absolutamente contínua é a fortiori contínua.

Esta definição de continuidade absoluta é uma boa definição:

0.3.1 LEMA: Se $\theta : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 no aberto W e $h : [c,d] \to W$ é absolutamente contínua então $\theta \circ h : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ é absolutamente contínua.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $K = h[c,d]$. Então K é compacto de W e portanto existe W_1 aberto com $\bar{W}_1$ compacto e tal que $K \subset W_1 \subset \bar{W}_1 \subset W$. Sejam $\mu = \inf \{d(k, W_1^c) \,/\, k \in K\}$ e $M = \sup \{\|d\theta_x\| \,/\, x \in W_1\}$, então $\mu > 0$ e $M < \infty$. Se é dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta > 0$ tal que se (s_k, t_k) $k = 1,\dots,m$ é uma sequência finita de intervalos disjuntos com $\sum_{k=1}^{m} (t_k - s_k) < \delta$ então

$$\sum_{k=1}^{m} \|h(t_k) - h(s_k)\| < \min \{\mu, \frac{\varepsilon}{M}\}.$$

Nestas condições, o segmento que une $h(t_k)$ a $h(s_k)$ em $\mathbb{R}^n$ está contido em W_1. Pois se $0 \leq \lambda \leq 1$ então $\|\lambda h(t_k) + (1-\lambda)h(s_k) - h(s_k)\| \leq \|h(t_k) - h(s_k)\| < \mu$.

O teorema do valor médio nos garante então que

$$\|\theta \circ h(t_k) - \theta \circ h(s_k)\| \leq M \|h(s_k) - h(t_k)\| , \quad k = 1,\dots,m$$

e portanto

$$\sum_{k=1}^{m} \|\theta \circ h(t_k) - \theta \circ h(s_k)\| \leq M \sum_{k=1}^{m} \|h(t_k) - h(s_k)\| < \varepsilon$$

e $\theta \circ h$ é absolutamente contínua. □

Para as funções absolutamente contínuas em variedades também se tem diferenciabilidade fora de um conjunto de medida de Lebesgue nula. Outras propriedades das absolutamente contínuas em espaços lineares se estendem às absolutamente contínuas em variedades diferenciáveis. Adiante usaremos com frequência o fato de que se $f : [a,b] \to M$ é absolutamente contínua e sua derivada é nula quase sempre, então f é constante em $[a,b]$. Este fato pode ser provado facilmente a partir da definição dada acima e pela propriedade correspondente em $\mathbb{R}^n$.

Sejam agora G um grupo topológico (de Hausdorff), E um espaço topológico e $f_n : E \to G$ uma sequência de aplicações contínuas. Diremos que f_n converge uniformemente para $f : E \to G$ se para todo $V \in \mathcal{V}(e)$ existe n_o tal que se $n \geq n_o$ $f_n(x) \in Vf(x)$ $\forall x \in E$. Um artifício semelhante ao usado no caso dos espaços métricos mostra que f é contínua.

Estaremos interessados apenas na proposição seguinte:

0.3.2 PROPOSIÇÃO: Com as notações acima suponha que E é compacto, que (F,d) é um espaço métrico e $\phi : G \to F$ é contínua. Então $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ uniformemente em F se $f_n \to f$ uniformemente em G.

Esta proposição é consequência do seguinte lema topológico:

0.3.3 LEMA: Se $K \subset G$ é compacto e ε é um real positivo então existe uma vizinhança $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que $\forall k \in K$ $\phi(V_k) \subset B(\phi(k),\varepsilon)$.

DEMONSTRAÇÃO: Como ϕ é contínua, para cada $k \in K$ existe $V_k \in \mathcal{V}(e)$ tal que $\phi(V_k k) \subset B(\phi(k),\varepsilon/2)$. Seja $W_k \in \mathcal{V}(e)$ $W_k^2 \subset V_k$. A família de abertos $W_k k$ cobre o compacto K e portanto existem $k_1,\ldots,k_m$ tais que $K \subset W_{k_1} k_1 \cup \ldots \cup W_{k_m} k_m$. Tome $V = W_{k_1} \cap \ldots \cap W_{k_m}$ e sejam $k \in K$ e $x \in V$. Então $k \in W_{k_i} k_i$ para algum i, $1 \leq i \leq m$ e portanto $xk \in V W_{k_i} k_i \subset V_{k_i} k_i$. E daí que $\phi(xk) \in B(\phi(k_i),\varepsilon/2)$ e $\phi(k) \in B(\phi(k_i),\varepsilon/2)$, isto é $\phi(xk) \in B(\phi(k),\varepsilon)$. □

DEMONSTRAÇÃO DE 0.3.2: Como E é compacto e f é contínua, $f(E)$ é compacto em G. Seja $\varepsilon > 0$ e V como no lema para $K = f(E)$. Tome n_o tal que $f_n(x) \in V f(x)$ se $n \geq n_o$ e $x \in E$. Então se $n \geq n_o$, o lema nos garante que $\phi(f_n(x)) \in B(\phi(f(x)),\varepsilon)$ $\forall x \in E$, isto é, $f_n \to f$ uniformemente em F. □

0.4 FUNÇÕES CUJOS VALORES SÃO CONJUNTOS

Para o estudo dos sistemas de controle, no capítulo 2 faremos uso de algumas propriedades das funções da reta sobre as partes de um conjunto ($\mathbb{R}^n$ ou um grupo de Lie G). Vamos estabelecer aqui estas propriedades.

Seja G um grupo de Lie e considere a função $U : I \to \mathcal{P}(G)$ do intervalo $I \subset \mathbb{R}$ no conjunto das partes de G e tal que $\forall\, t \in I$, $U(t) \neq \emptyset$.

Queremos definir alguma espécie de continuidade para tais funções. A mais natural que se apresenta é:

"U é contínua em $t_o \in I$ em relação a G se para qualquer $V \in \mathcal{V}(e)$ existe $\delta > 0$ tal que se $|t - t_o| < \delta$ e $t \in I$, então $U(t) \subset VU(t_o) = \{xy \in G \,/\, x \in V \text{ e } y \in U(t_o)\}$".

No entanto, esta só é uma boa definição se $U(t_o)$ é compacto ou (enfraquecendo um pouco) relativamente compacto em G. Pois apenas nestes casos se pode garantir que a classe $\{V\,U\,(t_o) \subset G \,/\, V \in \mathcal{V}(e)\}$ forma um "sistema fundamental de vizinhanças" para $U(t_o)$, no sentido que $U(t_o)^- \subset V\,U\,(t_o)$ para cada $V \in \mathcal{V}(e)$, $\cap\{V\,U\,(t_o) \,/\, V \in \mathcal{V}(e)\} = U(t_o)^-$ e se W é um aberto de G tal que $U(t_o)^- \subset W$, então existe $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que $V\,U\,(t_o) \subset W$. De fato,

0.4.1 LEMA: Seja $S \subset G$ tal que S^- é compacto, então:

i) $S^- \subset VS$, $\forall\, V \in \mathcal{V}(e)$; ii) $\cap\{VS \,/\, V \in \mathcal{V}(e)\} = S^-$ e

iii) Se $S^- \subset W$ e W é aberto então existe $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que

$VS \subset W$.

DEMONSTRAÇÃO: i) e ii) não dependem da compacidade de S^-, e suas demonstrações são diretas.
Para iii) considere o produto $\mu : G\times G \to G$ de $G.\{e\} \times S^- \subset \mu^{-1}(W)$ e $\mu^{-1}(W)$ é um aberto de $G \times G$. Como $\{e\} \times S^-$ é compacto, existe $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que $V \times S^- \subset \mu^{-1}(W)$ e portanto $VS \subset VS^- \subset W$. $\square$

Vamos supor de agora em diante que a função com valores em conjuntos $U : I \to \mathcal{P}(G)$ é tal que $U(t) \neq \emptyset$ é relativamente compacto em G . Esta hipótese adicional não está em desacordo com as necessidades do capítulo 2: todas as funções com valores em conjuntos que consideraremos assumem valores em relativamente compactos não vazios.

Nestas condições, tanto faz definir a continuidade como acima ou inverter a ordem, isto é, pedir que $U(t) \subset U(t_o)V$ se $|t - t_o| < \delta$, pois para $W \in \mathcal{V}(e)$ existe $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que $V U(t_o) \subset U(t_o)W$.

Como é usual, diremos que $U : I \to \mathcal{P}(G)$ é uniformemente contínua se para $V \in \mathcal{V}(e)$ existe $\delta > 0$ tal que
$|t - s| < \delta \Rightarrow U(t) \subset V U(s)$.

No que diz respeito à composição por aplicações contínuas temos a

0.4.2 PROPOSIÇÃO: Se $\phi : G \to G'$ e $U : I \to \mathcal{P}(G)$ são contínuas então $U' : I \to \mathcal{P}(G')$ tal que $U'(t) = \phi(U(t))$ é contínua.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $W \in \mathcal{V}(e')$ onde e' é a identidade de G'. $\phi^{-1}(W U'(t_o))$ é um aberto que contém $U(t_o)^-$ e portanto existe $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que $V U(t_o) \subset \phi^{-1}(W U'(t_o))$. Seja $\delta > 0$ tal que $|t - t_o| < \delta \Rightarrow U(t) \subset V U(t_o)$ então se $t \in I$ e $|t-t_o|<\delta$,

$$U'(t) = \phi(U(t)) \subset \phi(V U(t_o)) \subset W U'(t_o).$$

□

0.4.3 PROPOSIÇÃO: Suponha que $U : I \to \mathcal{P}(G)$ é contínua e satisfaz as condições acima. Se $[a,b] \subset I$, existe um compacto K tal tal que $\bigcup_{t \in [a,b]} U(t) \subset K$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $t_o \in [a,b]$ existe $\delta > 0$ tal que todo $U(t)$ com $t \in (t_o-\delta,\ t_o+\delta) \cap [a,b]$ está contido em um compacto. De fato, seja $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que V^- é compacto e tome $\delta > 0$ tal que $U(t) \subset V U(t_o) \subset V^- U(t_o)^-$ se $|t - t_o| < \delta$. E como V^- e $U(t_o)^-$ são compactos, $V^- U(t_o)^-$ é compacto.

Isto é suficiente para mostrar a proposição pois a união finita de compactos é compacto e $[a,b]$ é um intervalo compacto.

□

Se cada $U(t)$ é compacto esta proposição pode ser melhorada

0.4.4 PROPOSIÇÃO: Nas mesmas condições de 0.4.3, $\bigcup_{t \in [a,b]} U(t)$ é compacto se cada $U(t)$ é compacto.

DEMONSTRAÇÃO: É suficiente mostrar que $U[a,b] = \bigcup_{t \in [a,b]} U(t)$ é fechado. Para isto, seja x_n uma sequência em $U[a,b]$ tal que $x_n \to x$ e $t_n \in [a,b]$ tal que $x_n \in U(t_n)$. Como $[a,b]$ é compacto, existe uma subsequência t_{n_k} de t_n tal que $t_{n_k} \to t_o \in [a,b]$. Mostremos que $x \in U(t_o)$.

De fato, se supormos o contrário poderemos encontrar $V \in \mathcal{V}(e)$ tal que V^- é compacto e tal que $x \notin V^- U(t_o)$. Mas isto não pode ocorrer, uma vez que se k é suficientemente grande, $V(t_{n_k}) \subset V^- U(t_o)$ e portanto $x_{n_k} \in V^- U(t_o)$. □

A noção de continuidade de funções a valores em subconjuntos de um grupo introduzida acima se aplica, em particular, ao caso em que $G = \mathbb{R}^n$ com sua estrutura de grupo abeliano. No entanto, se $U : I \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ assume valores em compactos de $\mathbb{R}^n$ podemos falar também na continuidade da U em relação à métrica de Hausdorff sobre os compactos de $\mathbb{R}^n$:

$$\rho(A,B) = \frac{1}{2}\left(\sup_{a\in A} d(a,B) + \sup_{b\in B} d(b,A)\right)$$

para A e B compactos.

Estas duas noções de continuidade não coincidem, como é ilustrado pelo exemplo em que $U : [0,1] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ é tal que $U(0) = \{0\} \times [0,2]$ e $U(t) = \{t\} \times [0,1]$ para $t \in (0,1]$. Esta U é contínua em relação ao grupo $\mathbb{R}^2$ e não é contínua na métrica de Hausdorff sobre os compactos de $\mathbb{R}^2$.

Na realidade, não é difícil ver que se $U(t)$ é compacto, $U : I \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é contínua na métrica de Hausdorff se e só se U é *uniformemente contínua* em todo intervalo compacto de I em relação ao grupo $\mathbb{R}^2$.

Seja $U : I \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ com $U(t) \neq \emptyset$ e compacto se $t \in I$. Se $\mathrm{Co}\, U(t)$ denota a cápsula convexa de $U(t)$ então $\mathrm{Co}\, U(t)$ também é compacto de $\mathbb{R}^n$. Encerraremos este parágrafo com a proposição abaixo que garante que se $t \to U(t)$ é contínua em relação à métrica de Hausdorff então $t \to \mathrm{Co}\, U(t)$ é contínua em relação à mesma métrica. Este fato será utilizado no capítulo 2.

0.4.5 PROPOSIÇÃO: $K \to \mathrm{Co}\, K$ é contínua na métrica de Hausdorff sobre os compactos de $\mathbb{R}^n$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam K e K_o compactos de $\mathbb{R}^n$. Será suficiente mostrar que

$$(0.4.5.1) \quad \sup \{d(x, \mathrm{Co}\, K_o) \,/\, x \in \mathrm{Co}\, K\} \leq 2 \sup \{d(x, K_o) \,/\, x \in K\}.$$

Se $K \subset K_o$ então $\mathrm{Co}\, K \subset \mathrm{Co}\, K_o$ e a desigualdade é trivial. Se $K - K_o \neq \emptyset$, sejam $x \in \mathrm{Co}\, K$, $a_1,\dots,a_m$ reais positivos e $x_1,\dots,x_m$ em K tais que $x = a_1 x_1 + \dots + a_m x_m$ e $a_1 + \dots + a_m = 1$. Desde que $K - K_o \neq \emptyset$, existem $y_1,\dots,y_m$ em K_o tais que $\|x_i - y_i\| = d(x_i, y_i) < 2 \sup \{d(x, K_o) \,/\, x \in K\}$. Seja $y = a_1 y_1 + \dots + a_m y_m \in \mathrm{Co}\, K_o$ então

$$\|x - y\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i (x_i - y_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^{m} a_i \|x_i - y_i\| <$$

$$< 2 \sup \{d(x, K_o) \,/\, x \in K\}$$

e daí a desigualdade de (0.4.5.1).

□

CAPÍTULO I

INTEGRAL MULTIPLICATIVA

1.1 DEFINIÇÃO

Como no capítulo anterior, seja G um grupo de Lie e $\mathcal{L}(G)$ sua álgebra de Lie. Vamos definir aqui as integrais multiplicativas $\prod_a^b \exp \alpha(s)ds \in G$ de funções integráveis à Lebesgue $\alpha : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$.

A estratégia que adotamos é a de definir inicialmente - as integrais multiplicativas de funções constantes por pedaços como um produto de exponenciais em G e, posteriormente, definir $\prod_a^b \exp \alpha(s)ds$ para α integrável qualquer como um limite de integrais (multiplicativas) de funções constantes por pedaços.

Uma função $\alpha : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ com $a < b$ é constante por pedaços se para alguma partição finita $P = \{t_o,\ldots,t_m\}$ de $[a,b]$ com $a = t_o < t_1 <\ldots< t_n = b$, α for constante em (t_{k-1},t_k) $k = 1,\ldots,m$. Como estaremos usando tais funções com frequência, a seguinte notação será conveniente: escreveremos $\alpha = \{X_1,\ldots,X_m;\ t_o,\ldots,t_m\} = \{X_k,t_k\}$ para representar $\alpha : [t_o,t_m] \to \mathcal{L}(G)$ constante por pedaços com $\alpha(t) = X_k$ se $t \in (t_{k-1},t_k)$. Os valores de α nos elementos da partição não são relevantes.

Assim, se $\alpha = \{X_1,\ldots,X_m;\ t_o,\ldots,t_m\}$ com $t_o = a$ e $t_m = b$, a integral multiplicativa à direita de α no intervalo $[a,b]$ é definida por

$$(1.1.1) \qquad \prod_a^b \exp \alpha(s)ds = \prod_{k=1}^m \exp (t_k - t_{k-1})X_k$$

$$= \exp((t_m - t_{m-1})X_m) \dots \exp((t_1 - t_o)X_1) \ .$$

E é claro que esta definição não depende da partição $\{t_o,\dots,t_m\}$ usada para definir α , isto é, se tivermos também $\alpha = \{Y_1,\dots,Y_\ell; \ s_o,\dots,s_\ell\}$ então $\prod_{k=1}^m \exp (t_k - t_{k-1})X_k = \prod_{k=1}^\ell \exp (s_k - s_{k-1})Y_k$.

Se α e β são constantes por pedaços, sempre é possível refinar as partições de tal forma que $\alpha = \{X_1,\dots,X_m; \ t_o,\dots,t_m\}$ e $\beta = \{Y_1,\dots,Y_m; \ t_o,\dots,t_m\}$. Em tal caso $\alpha - \beta = \{X_k - Y_k; \ t_k\}$ e $\|\alpha\|_1 = \int_a^b \|\alpha(t)\| dt = \sum_{k=1}^m \|(t_k - t_{k-1})X_k\|$.

1.1.2 LEMA: Seja $M > 0$ e $V \in \mathcal{V}(e)$ no grupo G . Então existe $\delta > 0$ tal que se $\alpha,\beta : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ são constantes por pedaços, $\|\alpha\|_1 < M$, $\|\beta\|_1 < M$ e $\|\alpha - \beta\|_1 < \delta$ então

$$\left(\prod_a^b \exp \alpha(s)ds\right)^{-1} \left(\prod_a^b \exp \beta(s)ds\right) \in V$$

DEMONSTRAÇÃO: Com as observações acima, é consequência imediata do lema 0.1.1.

□

Portanto, se $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência formada por funções constantes por pedaços e tal que $\lim_{n\to\infty} \|\alpha_n - \alpha\|_1 = 0$ então a sequência $(x_n)_{n\geq 1} \subset G$ com $x_n = \prod_a^b \exp \alpha_n(s)ds$ é de Cauchy em G, já que $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ é limitada e de Cauchy em $L^1([a,b],\mathcal{L}(G))$. Como G é um grupo de Lie, G é completo e portanto $(x_n)_{n\geq 1}$ é convergente em G, $\lim x_n = x$.

Além do mais, se $(\beta_n)_{n\geq 1}$ é outra sequência nas mesmas condições, então $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ e $(\beta_n)_{n\geq 1}$ são limitadas e $\lim\limits_{n\to\infty} \|\alpha_n - \beta_n\|_1 = 0$, e daí que $\lim \prod\limits_a^b \exp \alpha_n(s)ds = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_a^b \exp \beta_n(s)ds$.

Por outro lado, se $\alpha : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ é integrável, o lema 0.2.2 garante que existe uma sequência $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ de funções constantes por pedaços $\alpha_n : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\alpha_n - \alpha\|_1 = 0$.

Em vista disto podemos definir a integral multiplicativa à direita de $\alpha : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ integrável como

$$(1.1.3) \qquad \prod_a^b \exp \alpha(s)ds = \lim_{n\to\infty} \prod_a^b \exp \alpha_n(s)ds, \quad a < b$$

para qualquer $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ com $\alpha_n : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ constante por pedaços e tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\alpha_n - \alpha\|_1 = 0$.

Se $a \geq b$ podemos definir, como para as integrais aditivas

$$(1.1.3.1) \qquad \prod_a^a \exp \alpha(s)ds = e$$

$$(1.1.3.2) \qquad \prod_a^a \exp \alpha(s)ds = \left(\prod_a^b \exp \alpha(s)ds\right)^{-1} \quad \text{se } a < b.$$

Temos então uma noção de integral multiplicativa de fun ções integráveis a Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ que assumem valores em $\mathcal{L}(G)$. Apesar de que esta situação é conveniente para as aplicações às equações diferenciais, não é ainda a situação mais geral que poderíamos requerer para o desenvolvimento de uma teoria de integração multiplicativa.

Sob este aspecto, os seguintes comentários são esclarecedores:

i) A construção feita acima da integral multiplicativa depende, de maneira decisiva, da ordem de $\mathbb{R}$. De fato, fazemos uso de produtos em um grupo de Lie G , e como G é, em geral, não abeliano, estes produtos precisam ser tomados em uma determinada ordem para termos unicidade da integral multiplicativa. É por esta razão que somos forçados a considerar funções constantes por pedaços e não funções simples quaisquer como no caso das integrais aditivas, já que as partes das funções constantes por pedaços se ordenam naturalmente a partir da ordem de $\mathbb{R}$.

Porém, se (X,μ) é um espaço de medida arbitrário, não temos uma ordem natural em X e portanto, a noção de integral multiplicativa $\prod_X \exp \alpha$ para funções integráveis $\alpha : X \to \mathcal{L}(G)$ exige um tratamento diferente do adotado aqui. Um exemplo conhecido de uma generalização desse tipo é o das integrais multiplicativas de contorno, que são no entanto redutíveis às integrais multiplicativas sobre intervalos de $\mathbb{R}$ (c.f. [1] para as integrais de contorno em grupos de Lie e [4] para o caso particular dos grupos de matrizes).

ii) Mesmo no caso em que o espaço de medida é um intervalo de $\mathbb{R}$ com alguma medida μ diferente da medida de Lebesgue, surgem algumas dificuldades. Estas dificuldades não estão relacionadas com a construção feita acima, que é possível, mas sim com o teorema fundamental que demonstraremos a seguir (§ 1.3). Pois então teremos que considerar a diferenciabilidade de certas curvas em G. Se a medida em $\mathbb{R}$ é a medida de Lebesgue, estas curvas serão absolutamente contínuas e portanto deriváveis (no sentido usual) num conjunto suficiente de pontos. No entanto, se μ é uma medida não absolutamente contínua em $\mathbb{R}$, as curvas para as quais teremos que considerar a diferenciabilidade não serão absolutamente contínuas, sendo portanto necessária uma noção generalizada de diferencial de funções a valores em uma variedade diferenciável.

Em [4] é desenvolvida uma teoria de integrais multiplicativas sobre uma medida Boreliana de $\mathbb{R}$ em grupos de matrizes. Este caso é bastante facilitado pela imersão canônica do grupo linear em um espaço euclidiano.

Finalmente, se escrevermos $\prod_{k=1}^{m} x_k = x_1 \ldots x_m$ teremos uma teoria de integrais multiplicativas paralela à que desenvolvemos aqui. Esta integral poderia ser denominada integral multiplicativa à esquerda. As integrais à esquerda estão relacionadas com os campos invariantes à esquerda e portanto com atuações de G à direita, da mesma forma que as integrais à direita estão relacionadas com os campos à direita e com as atuações à esquerda. Demos preferência aqui às atuações à esquerda, isto é, para nós, funções se escrevem à esquerda dos argumentos (veja [1] para as integrais à esquerda).

1.2 PRIMEIRAS PROPRIEDADES

Inicialmente, lembremos que se $\phi : H \to G$ é um morfismo (global) de grupos de Lie então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(H) & \xrightarrow{d\phi_e} & \mathcal{L}(G) \\ \text{exp}\downarrow & & \downarrow\text{exp} \\ H & \xrightarrow{\phi} & G \end{array}$$

é comutativo. Como a integral multiplicativa é definida como um limite de produtos, não é difícil ver que se $\alpha : [a,b] \to \mathcal{L}(H)$ é integrável então $\beta : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$, definida por $\beta(t) = d\phi_e(\alpha(t))$, também é integrável e

(1.2.1) $$\phi(\prod_a^b \exp \alpha(s)ds) = \prod_a^b \exp d\phi_e(\alpha(s))ds \quad .$$

Em particular, se H é um subgrupo de Lie de G e $\alpha : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ é tal que $\alpha(t) \in \mathcal{L}(H) \subset \mathcal{L}(G)$, quase sempre então

$$\prod_a^b \exp \alpha(s)ds \in H \quad .$$

Adiante nos referiremos a esta propriedade dizendo que a integral multiplicativa se restringe a subgrupos (de Lie) de G.

Como $Ad : G \to Gl(\mathcal{L}(G))$ é um morfismo de grupos de

Lie com $d(\mathrm{Ad})_e = \mathrm{ad}$, temos também que

$$\mathrm{Ad}\,(\prod_a^b \exp \alpha(s)ds) = \prod_a^b \exp \mathrm{ad}(\alpha(s))ds \quad .$$

Quanto à integração multiplicativa em subintervalos de $[a,b]$, vale a seguinte propriedade:

1.2.2 PROPOSIÇÃO: Sejam $\alpha : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ e $c \in (a,b)$. Então α é integrável sobre $[a,c]$ e $[c,b]$ e

$$\prod_a^b \exp \alpha(s)ds = (\prod_c^b \exp \alpha(s)ds)\,(\prod_a^c \exp \alpha(s)ds)$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja P_n uma sequência de partições de $[a,b]$ com $|P_n| \to 0$ quando $n \to \infty$ e tal que $c \in P_n$. Se $P_n' = P_n \cap [a,c]$ e $P_n'' = P_n \cap [c,b]$ então é claro que $|P_n'| \to 0$ e $|P_n''| \to 0$. Defina α_{P_n}, $\alpha_{P_n'}$ e $\alpha_{P_n''}$ como em (0.1.1), então α_{P_n} é igual a $\alpha_{P_n'}$ em $[a,c]$ e a $\alpha_{P_n''}$ em $[c,b]$ e portanto,

$$\prod_a^b \exp \alpha_{P_n}(s)ds = (\prod_c^b \exp \alpha_{P_n''}(s)ds)\,(\prod_a^c \exp \alpha_{P_n'}(s)ds) \quad .$$

A igualdade do enunciado é obtida tomando-se limites nesta última igualdade. □

E portanto, se $\alpha : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ é integrável e $t_1, t_2, t_3 \in [a,b]$, as definições (1.1.3.1) e (1.1.3.2) e a proposição anterior garantem que

$$\prod_{t_1}^{t_2} \exp \alpha(s)ds = (\prod_{t_3}^{t_2} \exp \alpha(s)ds)\,(\prod_{t_1}^{t_3} \exp \alpha(s)ds) \tag{1.2.3}$$

Quando G é abeliano, ou ainda, quando os valores de $\alpha : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ comutam em $\mathcal{L}(G)$, o cálculo da integral multiplicativa se reduz ao de uma integral aditiva. Os valores de α comutam quase sempre, isto é, $[\alpha(s),\alpha(t)] = 0$ quase sempre em $[a,b]$ se $\alpha(s)$ e $\alpha(t)$ comutam para todo s,t fora de um conjunto de medida de Lebesgue nula de $[a,b]$.

1.2.4 PROPOSIÇÃO: Seja $\alpha : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ integrável. Se $[\alpha(s),\alpha(t)] = 0$ quase sempre, então

$$\prod_a^b \exp \alpha(s)ds = \exp \int_a^b \alpha(s)ds$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja P uma partição de $[a,b]$ e tome α_P como definida anteriormente. Então

$$\prod_a^b \exp \alpha_P(s)ds = \prod_{k=1}^m \exp \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \alpha(s)ds\right) .$$

Se mostrarmos que para $c_1,d_1,c_2,d_2 \in [a,b]$ $\left[\int_{c_1}^{d_1} \alpha(s)ds, \int_{c_2}^{d_2} \alpha(s)ds\right] = 0$, teremos que

$$\prod_a^b \exp \alpha_P(s)ds = \exp \int_a^b \alpha(s)ds$$

e portanto, o que se pede no enunciado.

Mostremos então que $\left[\int_{c_1}^{d_1} \alpha(s)ds, \int_{c_2}^{d_2} \alpha(s)ds\right] = 0$. Temos que

$$[\int_{c_1}^{d_1} \alpha(s)ds, \int_{c_2}^{d_2} \alpha(\sigma)d\sigma] = \text{ad}\,(\int_{c_2}^{d_2} \alpha(\sigma)d\sigma) \int_{c_1}^{d_1} \alpha(s)ds =$$

$$= \int_{c_1}^{d_1} (\int_{c_2}^{d_2} [\alpha(s),\alpha(\sigma)]d\sigma)ds$$

e devido à hipótese esta integral se anula, concluindo a demonstração. □

É conhecido o fato de que se $\alpha : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ é integrável então α é integrável sobre $[a,t]$ com $t \in [a,b]$ e sua integral aditiva $\beta(t) = \int_a^t \alpha(s)ds$ é absolutamente contínua e portanto contínua em $[a,b]$. Este tipo de coisa também vale para as integrais multiplicativas. Veremos aqui que $g_\alpha : [a,b] \to G$ definida por $g_\alpha(t) = \prod_a^t \exp \alpha(s)ds$ é uma curva contínua em G. O próximo parágrafo será dedicado ao lado absolutamente contínuo de g_α. A continuidade de g_α é consequência da proposição abaixo, que será utilizada também em futuras considerações sobre a continuidade da integral multiplicativa.

1.2.5 PROPOSIÇÃO: Para todo $V \in \mathcal{V}(e)$ existe $\delta_V > 0$ tal que se $\alpha \in L^1([a,b],\mathcal{L}(G))$ então

$$\|\alpha\|_1 < \delta \implies \forall\, s,t \in [a,b],\ \prod_s^t \exp \alpha(\sigma)d\sigma \in V .$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $W \in \mathcal{V}(e)$ tal que $W^- \subset V \cap V^{-1}$. O lema 0.1.1 garante que existe $\delta_W > 0$ tal que se $\beta : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ é constantes por pedaços e $\|\beta\|_1 < \delta_W$ então $\prod_a^b \exp \beta(\sigma)d\sigma \in W$.

Tome $\delta_V = \delta_W$. Para $\alpha \in L^1([a,b],\mathcal{L}(G))$ construa a sequência α_{P_n} associada a α e às partições $(P_n)_{n\geq 1}$ com $|P_n| \to 0$, como em 0.2.1. Se $\|\alpha\|_1 < \delta_V = \delta_W$, então $\|\alpha_{P_n}\|_1 \leq \|\alpha\|_1 < \delta_W$ e portanto,

$$\prod_a^b \exp \alpha_{P_n}(\sigma)d\sigma \in W ,$$

para $n \geq 1$. Como $\prod_a^b \exp \alpha(\sigma)d\sigma = \lim \prod_a^b \exp \alpha_{P_n}(\sigma)d\sigma$, temos o que se pede se $s = a$ e $t = b$.

Se $a \leq s \leq t \leq b$ é qualquer, tome $\bar{\alpha} : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ tal que $\bar{\alpha}(\sigma) = 0$ se $\sigma \notin [s,t]$ e $\bar{\alpha}(\sigma) = \alpha(\sigma)$ se $\sigma \in [s,t]$, então $\|\bar{\alpha}\|_1 \leq \|\alpha\|_1$ e é claro que

$$\prod_s^t \exp \alpha(\sigma)d\sigma = \prod_a^b \exp \bar{\alpha}(\sigma)d\sigma \in V .$$

Finalmente, se $s > t$, $\prod_t^s \exp \alpha(\sigma)d\sigma \in W \subset V^{-1}$ e portanto $\prod_s^t \exp \alpha(\sigma)d\sigma \in V$. □

1.2.6 COROLÁRIO: Se $\alpha \in L^1([a,b],\mathcal{L}(G))$ então $g : [a,b] \to G$ definida por $g(t) = \prod_a^t \exp \alpha(s)ds$ é uma curva contínua em G .

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $t_o \in [a,b]$ e $V \in \mathcal{V}(e)$. É suficiente mostrar que se $|t-t_o|$ é suficientemente pequeno então $g(t) \in Vg(t_o)$.

Como

$$g(t) = \prod_a^t \exp \alpha(s)ds = (\prod_{t_o}^t \exp \alpha(s)ds)\ g(t_o) ,$$

basta mostrar que se t pertence a alguma vizinhança de t_o então $\prod_{t_o}^t \exp \alpha(s)ds \in V$.

Seja então $\xi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $\xi(t) = \int_a^t \|\alpha(s)\|ds$. Como ξ é contínua, se $|t-t_o|$ é suficientemente pequeno, então

$$\left|\int_{t_o}^t \|\alpha(s)\| ds\right| = |\xi(t) - \xi(t_o)|$$

é pequeno e o resultado segue agora da proposição, com α restrita a $[t_o,t]$ ou a $[t,t_o]$ conforme $t \geq t_o$ ou $t \leq t_o$. □

1.3 O TEOREMA FUNDAMENTAL

O objetivo deste parágrafo é relacionar a operação de integração multiplicativa de funções integráveis em $\mathcal{L}(G)$ com a diferenciação de curvas em G , demonstrando um teorema no estilo do teorema fundamental para o cálculo das integrais aditivas (c.f. [6] ou [15]).

Seja $\alpha : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ e consideremos, como no parágrafo anterior, $g : [a,b] \to G$ definida por intermédio da integral multiplicativa:

$$g(t) = \prod_a^t \exp \alpha(s)ds .$$

Vimos em 1.2.6 que g é uma curva contínua em G. A questão que se apresenta agora é quanto à diferenciabilidade de g. Mostraremos adiante que g é diferenciável em quase todos os pontos de $[a,b]$, mostrando que g é absolutamente contínua em $[a,b]$.

Por enquanto, vejamos o que se passa se α é constante por pedaços.

1.3.1 PROPOSIÇÃO: Suponha que $\beta = \{X_1,\ldots,X_m; t_o,\ldots,t_m\}$ com $t_o = a$ e $t_m = b$ é constante por pedaços em $\mathcal{L}(G)$. Então $g : [a,b] \to G$ definida por $g(t) = \prod_a^t \exp \beta(s)ds$ é diferenciável em $t \neq t_k$, $k = 1,\ldots,m$ e

$$g'(t) = dR(g(t))_e \cdot \beta(t) .$$

DEMONSTRAÇÃO: Se $t \in (t_{k-1},t_k)$ então

$$\begin{aligned} g(t) &= \exp ((t-t_{k-1})X_k)\ldots\exp (t_1-t_o)X_1 \\ &= R(g(t_{k-1}))\ (\exp((t-t_{k-1})X_k)) . \end{aligned}$$

E portanto, g é diferenciável em t e

$$\begin{aligned} g'(t) &= dR(g(t_{k-1}))_{\exp(t-t_{k-1})X_k} \circ dR\ (\exp(t-t_{k-1})X_k)_e\ X_k = \\ &= dR(g(t))_e(X_k) = dR(g(t))_e\ (\beta(t)) . \end{aligned}$$ □

Para estendermos esta proposição às funções integráveis quaisquer, necessitaremos dos lemas a seguir de aproximação uniforme de integrais multiplicativas.

Seja então $\alpha \in L^1([a,b],\mathcal{L}(G))$. Como antes, temos que $\alpha_{P_n} \to \alpha$ na norma deste espaço se $(P_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de partições de $[a,b]$ com $|P_n| \to 0$. Defina $g_n(t) = \prod_a^t \exp \alpha_{P_n}(s)ds$. Então,

1.3.2 LEMA: Se $g(t) = \prod_a^t \exp \alpha(s)ds$ então $g_n \to g$ uniformemente em G (c.f. §0.3).

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $V,W \in \mathcal{V}(e)$ tal que $W^3 \subset V$. Fixando $t_o \in [a,b]$ podemos escolher:

i) $\delta_1 > 0$ tal que se $|t-t_o| < \delta_1$ e $t \in [a,b]$ então $g(t) \in W^{-1}g(t_o)$, já que g é contínua.

ii) $\delta_W > 0$ como em 1.2.5.

iii) $\delta_2 > 0$ tal que se $|t-t_o| < \delta_2$ e $t \in [a,b]$ então $\left|\int_{t_o}^t \|\alpha(s)\| ds\right| < \delta_W$.

iv) $n_o \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq n_o$ então $g_n(t_o) \in Wg(t_o)$, pois $g_n(t_o) \to g(t_o)$.

Se $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$, $|t-t_o| < \delta$, $t \in [a,b]$ e $n \geq n_o$, em virtude de 1.2.5 temos que

$$g_n(t) = \left(\prod_{t_o}^{t} \exp \alpha_{P_n}(s)ds\right) g_n(t_o) \in W\, g_n(t_o)$$

porém,

$$Wg_n(t_o) \subset W^2 g(t_o) \subset W^3 g(t) \subset Vg(t)$$

pois se $g(t) \in W^{-1}g(t_o)$ então $g(t_o) \in Wg(t)$.

Temos então que $g_n(t) \in Vg(t)$ para todo t numa vizinhança de t_o em $[a,b]$. Fazendo váriar t_o , por ser $[a,b]$ compacto, podemos encontrar $I_1,\ldots,I_m$ abertos de $[a,b]$ que o cobrem e de tal forma que se $t \in I_i$ e $n \geq n_i$ então $g_n(t) \in Wg(t)$. Tomando $N \geq \text{máx}\{n_i / i = 1,\ldots,m\}$ concluímos que $g_n \to g$ uniformemente. □

A demonstração do lema mostra também o

1.3.3 COROLÁRIO: Com as notações acima, seja $V \in V(e)$ e $t_o \in [a,b]$. Então existe $[c,d] \subset [a,b]$ com $c \neq d$, $t_0 \in [c,d]$ e tal que

$$g([c,d]) \subset Vg(t_o) \quad \text{e} \quad g_n([c,d]) \subset Vg(t_o)$$

se n é suficientemente grande. □

Se $t_o \in [a,b]$, seja (V,ϕ) uma carta para a variedade subjacente ao grupo de Lie G com $\phi(V) \subset \mathbb{R}^q$ e $g(t_o) \in V$. Pelo corolário acima, existe $[c,d] \subset [a,b]$ tal que $g_n[c,d] \subset V$, sendo possível então compor $\phi \circ (g_n\big|_{[c,d]})$ e $\phi \circ (g\big|_{[c,d]})$. Pelos resultados de 0.3, temos

1.3.4 LEMA: $h_n = \phi \circ (g_n\big|_{[c,d]}) \to h = \phi \circ (g\big|_{[c,d]})$ em $\mathbb{R}^q$. □

Agora podemos enunciar e demonstrar os teoremas centrais deste parágrafo.

1.3.5 TEOREMA: Seja $\alpha : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ integrável . Se

$g : [a,b] \to G$ é definida por $g(t) = \prod_a^t \exp \alpha(s)ds$ então g é absolutamente contínua e nos pontos em que $g'(t)$ existe, temos

$$g'(t) = dR(g(t))_e \, (\alpha(t)) \quad . \tag{1.3.5.1}$$

DEMONSTRAÇÃO: Utilizemos as mesmas notações acima. Por 1.3.1, temos que

$$g_n'(t) = d\,R(g_n(t))_e \, (\alpha_{P_n}(t))$$

fora de um conjunto finito de $[a,b]$. E portanto, a menos de um conjunto finito de $[c,d]$, temos

$$\begin{aligned} h_n'(t) &= d\phi_{g_n(t)} \circ dR(g_n(t))_e \, (\alpha_{P_n}(t)) \\ &= d(\phi \circ R(g_n(t)))_e \, (\alpha_{P_n}(t)) \end{aligned}$$

e daí que

$$h_n(t) = h_n(c) + \int_c^t d(\phi \circ R(g_n(s)))_e \, (\alpha_{P_n}(s))ds \quad .$$

No entanto, $h_n(t) = \phi(g_n(t)) \to h(t) = \phi(g(t))$ e portanto, para concluir a demonstração do teorema é suficiente mostrar que $\forall\, t \in [a,b]$

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_c^t d(\phi \circ R(g_n(s)))_e \, (\alpha_{P_n}(s))ds = \int_c^t d(\phi \circ R(g(s)))_e \, (\alpha(s))ds \quad .$$

Pois, nestas condições,

$$h(t) = h(c) + \int_c^t d(\phi \circ R(g(s)))_e \, (\alpha(s))ds, \quad t \in [c,d] \tag{1.3.5.2}$$

isto é, h é absolutamente contínua em $[c,d]$ com $h'(t) = d(\phi \circ R(g(t)))_e\,(\alpha(t))$ q.s. em $[c,d]$, o mesmo ocorrendo com g e tendo-se

$$g'(t) = dR(g(t))_e\,(\alpha(t))$$

o que mostra o teorema.

Para calcular o limite (*), consideremos a aplicação $\theta : V \to \mathrm{Hom}\,(\mathcal{L}(G),\mathbb{R}^q)$ dada por

$$\theta(x) = d(\phi \circ R(x))_e \quad .$$

Então θ é uma derivada parcial de $\phi \circ p : p^{-1}(V) \to \mathbb{R}^q$ onde $p : G \times G \to G$ é o produto em G, $p(x,y) = x\,y$ e portanto θ é contínua. Pela proposição 0.3.2 $\theta \circ g_n \to \theta \circ g$ uniformemente em $\mathrm{Hom}\,(\mathcal{L}(G),\mathbb{R}^q)$. E daí,

$$\left\| \int_c^t \theta(g_n(s))(\alpha_{P_n}(s))ds - \int_c^t \theta(g(s))(\alpha(s))ds \right\| \leq$$

$$\leq \int_c^d \| \theta(g_n(s))(\alpha_{P_n}(s)) - \theta(g(s))(\alpha(s)) \| ds \leq$$

$$\leq \int_c^d \| \theta(g_n(s)) - \theta(g(s)) \| \; \| \alpha_{P_n}(s) \| ds + \int_c^d \| \theta(g_n(s)) \| \; \| \alpha_{P_n}(s) - \alpha(s) \| ds$$

$$\leq \Big(\sup_{s \in [c,d]} \| \theta(g_n(s)) - \theta(g(s)) \| \Big) \; \| \alpha \|_1 + \Big(\sup_{s \in [c,d]} \| \theta(g(s)) \| \Big) \; \| \alpha_{P_n} - \alpha \|_1$$

Esta última expressão tem limite 0 quando $n \to \infty$, mostrando (*) e o teorema. □

Por outro lado, seja $g : [a,b] \to G$ absolutamente contínua. Então g é quase sempre diferenciável em $[a,b]$, sendo possível, portanto, definir $\alpha : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ por

$$\alpha(t) = dR(g(t)^{-1})_{g(t)} (g'(t)) \in T_eG$$

se g é diferenciável em t e atribuir a α um valor qualquer ($0 \in \mathcal{L}(G)$ por exemplo) no conjunto de medida nula de $[a,b]$ em que $g'(t)$ não existe. O teorema seguinte relaciona α com g completando o teorema fundamental para as integrais multiplicativas em grupos de Lie.

1.3.6 TEOREMA: Se g e α são como acima, então $\alpha : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ é integrável e para todo $t \in [a,b]$

(1.3.6.1)
$$g(t) = (\prod_a^t \exp \alpha(s)ds)\ g(a)$$

DEMONSTRAÇÃO: Para $t_o \in [a,b]$ sejam (V,ϕ) carta para G em torno de $g(t_o)$ e $h = \phi \circ (g|_{[c,d]})$ com $[c,d] \subset [a,b]$, $c \neq d$, $t_o \in [c,d]$ e $g([c,d]) \subset V$.

Pela hipótese sobre g, h é absolutamente contínua e portanto existe $h'(t)$ quase sempre em $[c,d]$, h' é integrável e

$$h'(t) = d\phi_{g(t)} \circ dR(g(t))_e\ (\alpha(t)) = d(\phi \circ R(g(t)))_e\ (\alpha(t))$$
$$= A(t)\ (\alpha(t))$$

onde $A : [c,d] \to \mathrm{Hom}\ (\mathcal{L}(G), \mathbb{R}^q)$ é tal que $A(t) = d(\phi \circ R(g(t)))_e$. Mas ϕ e $R(x)$ são difeomorfismos e portanto $A(t)$ é inversível para $t \in [c,d]$ e $A(t)^{-1}$ depende continuamente de t. Daí que

$$\alpha(t) = A(t)^{-1}(h'(t))$$

é integrável em $\mathcal{L}(G)$.

Para mostrar (1.3.6.1), sejam $\bar{g},\bar{\bar{g}} : [a,b] \to G$ definidas por

$$\bar{g}(t) = \prod_a^t \exp \alpha(s)ds \ ; \qquad \bar{\bar{g}}(t) = g(t)^{-1}\,\bar{g}(t) \ .$$

$\bar{g}$ e $\bar{\bar{g}}$ são absolutamente contínuas e se $j : G \to G$ é $j(x) = x^{-1}$, para os pontos em que g, $\bar{g}$ e $\bar{\bar{g}}$ são diferenciáveis tem-se, em virtude de (1.3.5.1), que

$$\begin{aligned}\bar{\bar{g}}'(t) &= dL(g(t)^{-1})_{\bar{g}(t)} \circ d(R(\bar{g}(t)))_e\,(\alpha(t)) + \\ &\quad + dR(\bar{g}(t))_{g(t)^{-1}} \circ dj_{g(t)} \circ dR(g(t))_e\,(\alpha(t)) \\ &= d(L(g(t)^{-1}) \circ R(\bar{g}(t)))_e\,(\alpha(t)) + \\ &\quad + d(R(\bar{g}(t)) \circ j \circ R(g(t)))_e\,(\alpha(t)) \ .\end{aligned}$$

Porém, se $x,y \in G$, então $j \circ R(x) = L(x^{-1}) \circ j$ e $L(x) \circ R(y) = R(y) \circ L(x)$ e portanto,

$$\begin{aligned}\bar{\bar{g}}'(t) &= d(L(g(t)^{-1} \circ R(\bar{g}(t)))_e\,(\alpha(t)) + \\ &\quad + d(R(\bar{g}(t)) \circ L(g(t)^{-1}))_e \circ dj_e\,(\alpha(t)) = 0\end{aligned}$$

pois $dj_e = -id_{\mathcal{L}(G)}$. E portanto, $\bar{\bar{g}}$ é constante em $[a,b]$ e como $\bar{\bar{g}}(a) = g(a)^{-1}$, $g(t) = \bar{g}(t)g(a)$, isto é, (1.3.6.1). $\square$

Como foi dito anteriormente, os teoremas 1.3.5 e 1.3.6 formam o equivalente para as integrais multiplicativas do teorema fundamental do cálculo integral. Este ponto de vista merece algum esclarecimento. Lembremos que o teorema fundamental do cálculo diz que derivando a integral à Lebesgue de uma função integrável, restabelece-se esta função. O mesmo ocorrendo com a integração da derivada de uma função absolutamente contínua sobre um intervalo de $\mathbb{R}$.

Em contraposição às integrais multiplicativas, podemos definir as derivadas multiplicativas:

Seja $g : [a,b] \to G$ uma curva contínua no grupo G que tem derivada $g'(t_o) \in T_{g(t_o)}G$ num ponto $t_o \in [a,b]$ (se t_o é a ou b, $g'(t_o)$ é derivada lateral). A derivada multiplicativa de g em t_o é definida por

$$Dg(t_o) = d(R(g(t_o)^{-1}))_{g(t_o)} (g'(t_o)) \in \mathcal{L}(G)$$

Os teoremas 1.3.5 e 1.3.6 refraseam então, o teorema fundamental do cálculo, acrescentando às palavras integral e derivada o adjetivo multiplicativa.

OBSERVAÇÃO: Esta é a derivada multiplicativa à direita. A derivada multiplicativa à esquerda é definida de maneira análoga. A derivada multiplicativa definida acima é a derivada de Darboux (como em [3], vol. 4) ou a derivada logarítmica (em contraposição à integral exponencial), que é o termo utilizado em [1] e [7].

1.4 CONSEQUÊNCIAS DO TEOREMA FUNDAMENTAL

Da mesma forma que para as integrais aditivas em espaços lineares, o teorema fundamental é o canal através do qual se introduz, no estudo das integrais multiplicativas, os métodos do cálculo diferencial. Pela introdução deste método vamos estabelecer algumas fórmulas úteis para o cálculo das integrais multiplicativas, que nos servirão adiante.

Para a integral multiplicativa da soma de duas funções, temos a seguinte proposição:

1.4.1 PROPOSIÇÃO: Sejam $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ integráveis, então $\alpha+\beta$ é integrável e

$$(1.4.1.1) \quad \prod_a^b \exp\,(\alpha(s)+\beta(s))ds = (\prod_a^b \exp\,\alpha(s)ds)\,(\prod_a^b \exp\,Ad(g(s)^{-1})\,(\beta(s))ds)$$

onde $g(t) = \prod_a^t \exp\,\alpha(s)ds$.

DEMONSTRAÇÃO: Antes de mais nada, calculemos $D(gh)(t)$ se g e h são curvas absolutamente contínuas em G e g e h são deriváveis em t. Omitindo t nos cálculos, temos

$$\begin{aligned} D(gh) &= dR((gh)^{-1})_{gh}\,((gh)') \\ &= dR(g^{-1})_g \circ dR(h^{-1})_{gh}\,(dL(g)_h(h') + dR(h)_g(g')) = \\ &= d(R(g^{-1}) \circ L(g))_e \circ dR(h^{-1})_h(h') + dR(g^{-1})_g(g') = \\ &= Ad(g)(Dh) + Dg \end{aligned}$$

Tomemos agora g e h como

$$g(t) = \prod_a^t \exp\,\alpha(s)ds \quad ; \quad h(t) = \prod_a^t \exp\,Ad(g(s)^{-1})\,(\beta(s))ds\ ,$$

então $Dg(t) = \alpha(t)$ e $Dh(t) = Ad(g(t)^{-1})(\beta(t))$ e portanto,

$$\begin{aligned} D(gh)(t) &= Ad(g(t)) \circ Ad(g(t)^{-1}) \ (\beta(t)) + Dg(t) = \\ &= \alpha(t) + \beta(t) \end{aligned}$$

e daí que

$$\begin{aligned} \prod_a^b \exp (\alpha(s) + \beta(s))ds &= \prod_a^b \exp D(gh)(s)ds = (gh)(b)(gh)(a)^{-1} \\ &= g(b)h(b) = (\prod_a^b \exp \alpha(s)ds) (\prod_a^b \exp Ad(g(s)^{-1}) \ (\beta(s))ds) . \end{aligned}$$

$\square$

O cálculo de $D(gh)$ na demonstração desta proposição, nos permite obter uma outra fórmula útil:

Sejam $g : [a,b] \to G$ absolutamente contínua e $\beta: [a,b] \to \mathcal{L}(G)$. Se definirmos $h(t) = \prod_a^t \exp \beta(s)ds$, então por (1.3.6.1) temos que

$$\begin{aligned} (gh)(b)(gh(a))^{-1} &= \prod_a^b \exp D(gh)(s)ds = \\ &= \prod_a^b \exp (Dg(s) + Ad(g(s))(\beta(s)))ds \end{aligned}$$

isto é, (c.f. [4]),

$$(1.4.2) \quad g(b) (\prod_a^b \exp \beta(s)ds)g(a)^{-1} = \prod_a^b \exp (Dg(s) + Ad(g(s)) \ (\beta(s)))ds .$$

Estas fórmulas facilitam bastante certos cálculos com as integrais multiplicativas. Como exemplo de aplicação de (1.4.1.1) e (1.4.2), vamos obter a conhecida fórmula do produto de Lie

$$(1.4.3) \qquad \exp(X+Y) = \lim_{n\to\infty} \left(\exp\left(\frac{X}{n}\right) \exp\left(\frac{Y}{n}\right)\right)^n$$

(c.f. [7]).

Observemos antes de mais nada, que se em (1.4.2) g e β são constantes e iguais a x e X respectivamente e se $[a,b] = [0,1]$, então o primeiro membro se reduz a $x(\exp X)x^{-1}$ e o segundo membro a $\exp(Ad(x)(X))$, isto é,

$$\exp(Ad(x)(X)) = x(\exp X)x^{-1}.$$

Agora, por (1.4.2.1) temos que

$$\exp(X+Y) = \prod_0^1 \exp(X+Y)ds = (\exp Y)\left(\prod_0^1 \exp(Ad(e^{-sY})X)ds\right)$$

já que $\prod_0^1 \exp Yds = \exp\left(\int_0^1 Yds\right) = \exp Y$. Se definirmos $\alpha_n : [0,1] \to \mathcal{L}(G)$ por

$$\alpha_n(t) = \{Ad\left(\exp\left(-\frac{Y}{n}\right)\right)X, \ldots, Ad\left(\exp\left(-\frac{k}{n}Y\right)\right)X, \ldots, Ad(e^{-Y})X;\ 0, \frac{1}{n}, \ldots, 1\}$$

então é claro que $\lim_{n\to\infty} \|\alpha_n - \alpha\|_1 = 0$, onde $\alpha(t) = Ad(e^{-tY})(X)$. E portanto,

$$\begin{aligned}\exp(X+Y) &= e^Y \lim_{n\to\infty} \prod_0^1 \exp \alpha_n(s)\, ds = \\ &= e^Y \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n \exp\left(-\frac{k}{n}Y\right) \exp\left(\frac{1}{n}X\right) \exp\left(\frac{k}{n}Y\right)\end{aligned}$$

e daí que

$$\exp(X+Y) = e^Y \lim_{n\to\infty} e^{-Y} \prod_{k=1}^{n} (\exp \tfrac{X}{n})(\exp \tfrac{Y}{n}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} ((\exp \tfrac{X}{n})(\exp \tfrac{Y}{n}))^n \quad .$$

Com o auxílio do teorema fundamental podemos obter, como para as integrais aditivas, a fórmula de mudança de variável:

1.4.4 PROPOSIÇÃO: Seja $\alpha : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ integrável. Se $\xi : [c,d] \to [a,b]$ é absolutamente contínua então

$$\prod_c^d \exp(\xi'(s)\alpha(\xi(s)))ds = \prod_{\xi(c)}^{\xi(d)} \exp(\alpha(s))ds$$

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $g(t) = \prod_c^t \exp(\xi'(s)\alpha(s))ds$ e $h(t) = \prod_{\xi(c)}^{\xi(t)} \exp \alpha(s)ds$. Então

$$g'(t) = dR(g(t))_e(\xi'(t)\alpha(\xi(t))) = \xi'(t)dR(g(t))_e(\alpha(\xi(t)))$$

e

$$h'(t) = \xi'(t)\, dR(h(t))_e(\alpha(t))$$

e por cálculos análogos aos desenvolvidos na demonstração de (1.3.6.1), mostra-se que $g(t) = h(t)$ e portanto, $g(b) = h(b)$. $\square$

1.5 INTEGRAL MULTIPLICATIVA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Dedicaremos este parágrafo à construção, por intermédio das integrais multiplicativas, de soluções para certas equações diferenciais em variedades diferenciáveis. O que entendemos aqui por uma equação diferencial numa variedade M é uma equação do tipo

$$\dot{\xi} = f(t,\xi)$$

onde f é uma aplicação de um subconjunto de $\mathbb{R} \times M$ no fibrado tangente TM com $f(t,\xi) \in T_\xi M$ para cada t e para cada ξ. Uma solução para esta equação diferencial é uma função ξ definida num intervalo de $\mathbb{R}$, com valores em M e tal que $\xi'(t) = f(t,\xi(t))$, onde $\xi'(t) \in T_{\xi(t)}M$ é a derivada de ξ em t, que pode não existir em todos os valores de t.

As equações diferenciais que consideraremos serão obtidas através de ações de um grupo de Lie numa variedade diferenciável.

Uma ação local à esquerda do grupo de Lie G sobre a variedade M é uma aplicação diferenciável (C^1) de um aberto $V \subset G \times M$ em M

$$\psi : V \to M$$

tal que i) $\{e\} \times M \subset V$; ii) Se $x,y \in G$ e $\xi \in M$ são tais que (xy,ξ), (y,ξ) e $(x,\psi(y,\xi)) \in V$ então $\psi(xy,\xi) = \psi(x,\psi(y,\xi))$ e iii) $\psi(e,\xi) = \xi \quad \forall \xi \in M$.

Às vezes denotaremos $\psi(x,\xi)$ por $x.\xi$ ou $x(\xi)$. Se $\xi \in M$, $\psi_\xi : V_\xi \subset G \to M$ é a secção $\psi_\xi(x) = \psi(x,\xi)$ de ψ, onde $V_\xi \neq \emptyset$ é o aberto de G dado por $V_\xi = \{x \in G \,/\, (x,\xi) \in V\}$. Da mesma forma, para $x \in G$ pode-se definir $\psi_x : V_x \subset M \to M$ por

$\psi_x(\xi) = \psi(x,\xi)$ se $V_x = \{\xi \in M \,/\, (x,\xi) \in V\}$ é não vazio em M.

Tomemos $\alpha : [a,b] \to \mathcal{L}(G) = T_eG$ e a equação diferencial

$$(1.5.1) \qquad \dot{\xi} = d(\psi_\xi)_e\,(\alpha(t)) \qquad \xi \in M, \quad t \in [a,b]$$

em M.

Vamos construir uma solução absolutamente contínua ξ para (1.5.1) com $\xi(t_o) = \xi_o$; $t_o \in [a,b]$ e $\xi_o \in M$.

Seja $g : [a,b] \to G$ tal que $g(t) = \prod_{t_o}^{t} \exp \alpha(s)ds$. Como $g(t) = (\prod_{a}^{t} \exp \alpha(s)ds)(\prod_{a}^{t_o} \exp \alpha(s)ds)^{-1}$, g é contínua em $[a,b]$ e portanto $g^{-1}(V_{\xi_o})$ é um aberto de $[a,b]$. Se I_{t_o,ξ_o} é a componente conexa de $g^{-1}(V_{\xi_o})$ em $[a,b]$ que contém t_o, então I_{t_o,ξ_o} é um intervalo de $\mathbb{R}$ e é um aberto de $[a,b]$.

Nestas condições, é possível definir $h : I_{t_o,\xi_o} \to M$ como

$$(1.5.2) \qquad h(t) = g(t)\,.\,\xi_o = (\prod_{t_o}^{t} \exp \alpha(s)ds)\,.\,\xi_o$$

E sendo ψ_{ξ_o} diferenciável e g absolutamente contínua em I_{t_o,ξ_o}, h também é absolutamente contínua e, em virtude de (1.3.5.1), temos que para quase todo t em I_{t_o,ξ_o},

$$\begin{aligned} h'(t) &= d(\psi_{\xi_o})_{g(t)}\,(g'(t)) = d(\psi_\xi)_{g(t)} \circ dR(g(t))_e(\alpha(t)) \\ &= d(\psi_{\xi_o} \circ R(g(t)))_e(\alpha(t)) = d(\psi_{h(t)})_e\,(\alpha(t)) \end{aligned}$$

já que $\psi_{\xi_o} \circ R(g(t)) = \psi_{g(t).\xi_o} = \psi_{h(t)}$.

Isto é, 1.5.2 é uma solução absolutamente contínua para 1.5.1. Mostremos que não existe outra:

Se $\bar{h} : I \subset I_{t_o,\xi_o} \to M$ é absolutamente contínua no intervalo I que contém t_o , $\bar{h}(t_o) = \xi_o$ e $\bar{h}$ é solução de 1.5.1, então $\bar{h}(t) = h(t)$. De fato, se $\bar{\bar{h}} : I \to M$ é dada por $\bar{\bar{h}}(t) = (g(t))^{-1}.\bar{h}(t)$ então $\bar{\bar{h}}$ é absolutamente contínua em I, e um cálculo fácil mostra que $\bar{\bar{h}}'(t) = 0$ quase sempre em I . Isto é, $\bar{\bar{h}}$ é constante em I e como $\bar{\bar{h}}(t_o) = (g(t_o))^{-1}.\bar{h}(t_o) = \xi_o$, concluímos que $\bar{h}(t) = g(t).\xi_o$, se $t \in I$.

O teorema fundamental das integrais multiplicativas fornece assim uma solução única no intervalo I_{t_o,ξ_o} uma vez fixadas as condições iniciais $\xi(t_o) = \xi_o$. Observe, no entanto, que não excluímos a possibilidade de existirem soluções de (1.5.1) que estendem (1.5.2) a intervalos maiores que I_{t_o,ξ_o}. Isto é devido ao fato de que os intervalos I_{t_o,ξ_o} dependem do aberto V de definição de ψ , enquanto (1.5.1) depende apenas do valor de ψ nas vizinhanças de $(e,\xi) \in G \times M$.

Se ψ é uma ação global, isto é, se $V = G \times M$ então para qualquer $t_o \in [a,b]$ e $\xi_o \in M$, $I_{t_o,\xi_o} = [a,b]$ e (1.5.2) fornece então a única solução absolutamente contínua de 1.5.1, definida em $[a,b]$, com condições iniciais t_o, ξ_o .

No caso particular em que $M = G$ e $\psi = p : G \times G \to G$ é o produto em G , a secção ψ_ξ, $\xi \in G$ é dada por $R(\xi)$, e portanto (1.5.1) e (1.5.2) se transformam em

$$\overset{\circ}{x} = dR(x)_e\,(\alpha(t)) \qquad t \in [a,b], \quad x \in G \tag{1.5.3}$$

e

$$h(t) = \left(\prod_{t_o}^{t} \exp \alpha(s)ds\right)x_o \tag{1.5.4}$$

para $t_o \in [a,b]$ e $x_o \in G$.

1.6 EXEMPLOS

1.6.1 SISTEMAS LINEARES: Seja $G = Gl(n) \times \mathbb{R}^n$ com o produto $(P,x)(Q,y) = (PQ, Py+x)$ $(e = (id,0);$ $(P,x)^{-1} = (P^{-1}, -P^{-1}x))$. A álgebra de Lie de G é identificada com $M_n \times \mathbb{R}^n$ e $[(X,x),(Y,y)] = (YX-XY,\ Yx-Xy)$. A exponencial em G é definida por $\exp t(X,x) = (e^{tX},\ e^{tX}\int_0^t e^{-sX}x\,ds)$ onde e^{sX} é a exponencial da matriz $n \times n$ $X \in M_n$. A representação adjunta de G é dada por

$$Ad(P,y)(X,x) = (PXP^{-1},\ -PXP^{-1}y + Px)\ .$$

$Gl(n) \cong Gl(n) \times \{0\}$ e $\mathbb{R}^n \cong \{id\} \times \mathbb{R}^n$ são subgrupos de Lie de G . Suas álgebras de Lie são identificadas respectivamente com $M_n \times \{0\}$ e $\{0\} \times \mathbb{R}^n$.

Considere a ação $G \times \mathbb{R}^n = (Gl(n) \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $((P,x),y) \to Py + x$.

Se $\alpha : [a,b] \to M_n$ é $\alpha(t) = (A(t),u(t))$ com $A(t) = (\alpha_{ij}(t))_{i,j}$ e $u(t) \in \mathbb{R}^n$, α é integrável se e só se $\alpha_{ij} : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ são integráveis.

Neste caso, (1.5.1) se transforma no sistema linear

$$(1.6.1.1) \qquad \dot{x} = A(t)x + u(t) \; ; \qquad t \in [a,b]$$

de $\mathbb{R}^n$. E por (1.5.2), a solução deste sistema linear, com condição inicial $x(t_o) = x_o$, $t_o \in [a,b]$, é

$$(1.6.1.2) \qquad x(t) = \left(\prod_{t_o}^{t} \exp \alpha(s)ds\right)(x_o) \; .$$

Denote por $E(t,t_o) = \prod_{t_o}^{t} \exp A(s)ds$, com a integral multiplicativa em $Gl(n)$. Então,

Se $t > t_o$

$$\prod_{t_o}^{t} \exp \alpha(s)ds = \left(\prod_{t_o}^{t} (A(s),0)ds\right)\left(\prod_{t_o}^{t} \exp Ad(g(s)^{-1})(0,u(s))ds\right)$$

Com $g(s) = \prod_{t_o}^{s} \exp (A(\sigma),0)d\sigma$. Porém, como a integral multiplicativa se restringe a subgrupos (c.f. § 1.2), temos que $g(s) = (E(s,t_o),0)$. E portanto,

$$(1.6.1.3) \qquad \prod_{t_o}^{t} \exp \alpha(s)ds = (E(t,t_o),0)\left(id, \int_{t_o}^{t} E(s,t_o)^{-1}u(s)ds\right) =$$

$$= \left(E(t,t_o), E(t,t_o)\int_{t_o}^{t} E(s,t_o)^{-1}u(s)ds\right) \; .$$

E, calculando as inversas, podemos mostrar que (1.6.1.2) vale mesmo no caso em que $t \leq t_o$.

Finalmente, temos a expressão

$$x(t) = E(t,t_o)x_o + \int_{t_o}^{t} E(s,t_o)^{-1}u(s)ds$$

para (1.6.1.2), que é a conhecida fórmula da variação das constantes para os sistemas lineares.

1.6.2 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE RICCATI: Consideremos o grupo das transformações lineares em $\mathbb{R}$ fornecido pela ação de $Gl(2)$ em $\mathbb{R}$ dada por

$$\psi : V \subset Gl(2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}, x \right) \to \frac{c_1 \ x + c_2}{c_3 \ x + c_4}$$

onde $V = \left\{ \left(\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}, x \right) \in Gl(2) \times \mathbb{R} \ / \ c_3 \ x + c_4 \neq 0 \right\}$ é o aberto domínio de definição de ψ .

Identificando $Gl(2)$ a um aberto de $\mathbb{R}^4$, temos para $x \in \mathbb{R}$ que

$$d(\psi_x)_e (d_1, d_2, d_3, d_4) = - d_3 \ x^2 + (d_1 + d_4) x + d_2 \ .$$

Se $\alpha : [a,b] \to M_2 \cong \mathcal{L}(Gl(2))$ é integrável, $\alpha(t) = \begin{vmatrix} \alpha_1(t) & \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) & \alpha_4(t) \end{vmatrix}$, $\alpha_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável. Nestas condições, (1.5.1) se torna

$$\text{(1.6.2.1)} \qquad \dot{x} = - \alpha_3(t) x_2 + (\alpha_1(t) + \alpha_4(t)) x + \alpha_2(t)$$

que é uma equação diferencial de Riccati com coeficientes integrá veis. Se $E(t,t_o) = (E_{ij}(t,t_o))$, então a solução de (1.6.2.1) com condições iniciais $t_o \in [a,b]$, $x_o \in \mathbb{R}$ é

$$x(t) = \frac{E_{11}(t,t_o)x_o + E_{12}(t,t_o)}{E_{21}(t,t_o)x_o + E_{22}(t,t_o)}$$

definida no intervalo I_{t_o,x_o} de $[a,b]$.

1.7 A APLICAÇÃO π

A integral multiplicativa associa a cada função integrável do espaço de Banach $L^1([a,b],\mathcal{L}(G))$ um elemento do grupo de Lie G . Com isto, podemos definir a aplicação π_a^b ou apenas π por

$$\pi : L^1([a,b],\mathcal{L}(G)) \to G$$
$$\alpha \to \prod_a^b \exp \alpha(s)\, ds$$

da mesma forma que a integral aditiva pode ser vista como uma aplicação linear de um espaço de Banach em outro.

Neste parágrafo vamos analisar as propriedades desta aplicação π e no próximo capítulo veremos como estas propriedades são aplicadas ao estudo de algumas questões da teoria do controle.

Antes de mais nada, mostramos que a análise das propriedades locais de π se reduz à análise de π numa vizinhança da origem de $L^1([a,b],\mathcal{L}(G))$.

Por (1.4.1.1), podemos escrever, para $\alpha,\beta \in L^1([a,b],\mathcal{L}(G))$, $\pi(\alpha+\beta) = \pi(\alpha)(\gamma)$, com $\gamma(t) = \mathrm{Ad}((\prod_a^t \exp \alpha(s)ds)^{-1})(\beta(t))$.

Seja então $g : [a,b] \to G$ uma curva contínua qualquer e definamos o operador linear $\theta_g : L^1([a,b],\mathcal{L}(G)) \to L^1([a,b],\mathcal{L}(G))$ por

$$\theta_g(\beta)(t) = \mathrm{Ad}(g(t)^{-1})(\beta(t)) \tag{1.7.1}$$

Este operador linear é contínuo, pois

$$\begin{aligned} \|\theta_g(\beta)\|_1 &= \int_a^b \|\mathrm{Ad}(g(t)^{-1})(\beta(t))\| dt \\ &\leq \int_a^b \|\mathrm{Ad}(g(t)^{-1})\| \; \|\beta(t)\| dt \leq M\|\beta\|_1 \end{aligned}$$

onde $M = \sup\{\|\mathrm{Ad}(g(t)^{-1})\| \,/\, t \in [a,b]\}$ que é finito uma vez que $t \to \mathrm{Ad}(g(t)^{-1}) \in \mathrm{Gl}(\mathcal{L}(G))$ é contínua. Além do mais, é claro que $\|\theta_g\| \leq M$.

Escrevendo $\theta_\alpha = \theta_g$ se $g(t) = \prod_a^t \exp \alpha(s)ds$, temos que

$$\pi(\alpha+\beta) = (\pi(\alpha))(\pi(\theta_\alpha(\beta))) = L(\pi(\alpha)) \circ \pi \circ \theta_\alpha(\beta)$$

e se T_α é a translação por α, $T_\alpha(\beta) = \alpha+\beta$ então

$$\pi \circ T_\alpha = L(\pi(\alpha)) \circ \pi \circ \theta_\alpha \qquad \forall \alpha \in L^1([a,b],\mathcal{L}(G)) . \tag{1.7.2}$$

Esta igualdade nos permite transladar π de uma vizinhança de α para uma vizinhança da origem de $L^1([a,b],\mathcal{L}(G))$.

Com isto, podemos mostrar a

1.7.3 PROPOSIÇÃO: A aplicação $\pi : L^1([a,b],\mathcal{L}(G)) \to G$ é contínua.

DEMONSTRAÇÃO: π é contínua em $0 \in L^1([a,b],\mathcal{L}(G))$ como mostra a proposição 1.2.5. Para o caso geral, sejam $V \in \mathcal{V}(e)$ e $\alpha \in L^1([a,b],\mathcal{L}(G))$, então desde que π é contínua na origem, existe $\delta > 0$ tal que $\pi(B(0,\|\theta_\alpha\|\delta)) \subset V$. E portanto,

$$\pi(B(\alpha,\delta)) = \pi \circ T_\alpha(B(0,\delta)) = L(\pi(\alpha)) \circ \pi \circ \theta_\alpha(B(0,\delta))$$
$$\subset L(\pi(\alpha)) \circ \pi(B(0,\|\theta_\alpha\|\delta)) \subset \pi(\alpha)V$$

Isto é, π é contínua em qualquer α. $\square$

Consequentemente, se $\alpha_n \to \alpha$ então $\pi(\alpha_n) \to \pi(\alpha)$. Na realidade, a demonstração de 1.7.3 poderia ser utilizada para mostrar que $\prod_a^t \exp \alpha_n(s)ds$ converge uniformemente para $\prod_a^t \exp \alpha(s)ds$ se $\alpha_n \to \alpha$. No entanto, isto será mostrado adiante na demonstração da continuidade fraca de π.

Da mesma forma que para a continuidade, a análise da diferenciabilidade de π em um ponto qualquer $\alpha \in L^1([a,b],\mathcal{L}(G))$ pode ser reduzida à mesma análise numa vizinhança da origem. Isto é possível porque a menos da composição por $L(\pi(\alpha))$, que é um isomorfismo de G, π numa vizinhança de α é a mesma coisa que π numa vizinhança da origem: $\pi\big|_{B(0,\delta)} = L(\pi(\alpha)) \circ (\pi\big|_{B(0,\|\theta_\alpha\|\delta)})$.

Por (1.7.2), teremos além do mais que

$$d(\pi)_\alpha \circ d(T_\alpha)_o = d(\pi \circ T_\alpha)_o = d(L(\pi(\alpha)) \circ \pi \circ \theta_\alpha)_o =$$
$$= d(L(\pi(\alpha)))_e \circ d(\pi)_o \circ d(\theta_\alpha)_o$$

e como $d(T_\alpha)_o = id$ e $d(\theta_\alpha)_o = \theta_\alpha$,

(1.7.4) $$d(\pi)_\alpha = dL(\pi(\alpha))_e \circ d\pi_o \circ \theta_\alpha \ .$$

Suponha que π é diferenciável, então se $\beta \in L^1([a,b],\mathcal{L}(G))$, $d\pi_o(\beta) = \frac{d}{dt}\pi(t\beta)\big|_o$. Para $\beta = \{X_1,\ldots,X_m;\ t_o,\ldots,t_m\}$ constante por pedaços,

$$\pi(t\beta) = \prod_{k=1}^{m} \exp t(t_k - t_{k-1})X_k$$

e prescindindo dos pontos em que são calculadas as diferenciais,

$$\frac{d}{dt}(\pi(t\beta))\Big|_t =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} dL\Big(\prod_{i=k+1}^{m} \exp t(t_i-t_{i-1})X_i \circ dR\Big(\prod_{i=1}^{k-1} \exp t(t_i-t_{i-1})X_i\Big)\ ((t_k-t_{k-1})X_k)$$

onde os produtos que aparecem são iguais a e se $k+1 > m$ ou $k-1 < 1$. Em todo caso, para $t = 0$

$$\frac{dt}{dt}(\pi(t\beta))\Big|_o = \sum_{k=1}^{m} (t_k-t_{k-1})X_k = \int_a^b \beta(s)ds \ .$$

No caso geral, temos o (c.f. [4], § 1.5)

1.7.5 TEOREMA: $\pi : L^1([a,b],\mathcal{L}(G)) \to G$ é diferenciável. Sua diferencial é dada por

(1.7.5.1) $$d\pi_\alpha(\beta) = dL(\pi(\alpha))_e \int_a^b Ad\Big(\Big(\prod_a^t \exp \alpha(s)ds\Big)^{-1}\Big)(\beta(t))dt$$

DEMONSTRAÇÃO: Em particular, $d(\pi)_o(\beta) = \int_a^b \beta(s)ds$.

Seja (V,ϕ) uma carta para a estrutura de variedade de G com $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ e $e \in V$. Como π é contínua e $\pi(0) = e$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\pi(B(0,\delta_1)) \subset V$. Mostremos que

$$(*) \qquad \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\|\alpha\|_1} \|\phi \circ \pi(\alpha) - \phi \circ \pi(0) - d\phi_e\left(\int_a^b \alpha(s)ds\right)\| = 0$$

Se $\alpha \in B(0,\delta_1)$ então, se $\alpha_t : [a,b] \to \mathcal{L}(G)$ é tal que $\alpha_t(s) = \alpha(s)$ para $s \in [a,t]$ e $\alpha_t(s) = 0$ para $s \in (t,b]$, $\|\alpha_t\|_1 \leq \|\alpha\|_1 < \delta_1$, isto é, $\alpha_t \in B(0,\delta_1)$ para $t \in [a,b]$. E portanto, $g_\alpha(t) = \prod_a^t \exp \alpha(s)ds \in V$, se $t \in [a,b]$.

E por (1.3.5.2),

$$\phi \circ \pi(\alpha) = \phi(e) + \int_a^b d(\phi \circ R(g_\alpha(s)))_e(\alpha(s))ds \ ,$$

portanto,

$$\frac{1}{\|\alpha\|_1} \|\phi \circ \pi(\alpha) - \phi \circ \pi(0) - d\phi_e\left(\int_a^b \alpha(s)ds\right)\| =$$

$$= \frac{1}{\|\alpha\|_1} \left\|\int_a^b (d(\phi \circ R(g_\alpha(s)))_e - d\phi_e)(\alpha(s))ds\right\|$$

$$\leq \sup_{s\in[a,b]} \|d(\phi \circ R(g_\alpha(s)))_e - d\phi_e\|$$

Suponha agora que ε é um real positivo.

Como $x \to d(\phi \circ R(x))_e \in \mathrm{Hom}\,(\mathcal{L}(G),\mathbb{R}^n)$, é contínua, existe um aberto W de G tal que $e \in W$ e

$$\sup_{x\in W} \|d(\phi \circ R(x))_e - d\phi_e\| = \sup_{x\in W} \|d(\phi \circ R(x))_e - d(\phi \circ R(e))_e\| < \varepsilon \quad .$$

Tome $\delta < \delta_1$ tal que se $\|\alpha\|_1 < \delta$, então $\pi(\alpha) \in W \cap V$.

E daí, que se $\|\alpha\|_1 < \delta$ então

$$\frac{1}{\|\alpha\|_1} \|\phi \circ \pi(\alpha) - \phi \circ \pi(0) - d\phi_e \left(\int_a^b \alpha(s)ds\right)\| < \varepsilon ,$$

mostrando (*). Porém, (*) diz justamente que $\phi \circ \pi$ é diferenciável em 0 e que

$$d(\phi \circ \pi)_o(\alpha) = d\phi_e \left(\int_a^b \alpha(s)ds\right) \quad .$$

Como ϕ é difeomorfismo, concluímos que $d(\pi)_o(\alpha) = \int_a^b \alpha(s)ds$.
(1.7.5.1) é agora consequência de (1.7.4). □

A expressão para a diferencial de π dada pelo teorema acima, nos permite obter uma fórmula para a diferencial, em um ponto qualquer de $\mathcal{L}(G)$, da exponencial de um grupo de Lie (c.f. [8]):

Seja I a inclusão

$$I : \mathcal{L}(G) \to L^1([0,1], \mathcal{L}(G))$$
$$X \to \alpha_X ; \quad \alpha_X(t) = X, \quad \forall t \in [0,1] \quad .$$

I é evidentemente uma aplicação linear e contínua entre dois espaços de Banach e $\pi \circ I = \exp : \mathcal{L}(G) \to G$. Portanto,

$$d(\exp)_X(Y) = d(\pi)_{I(X)} \circ dI_X(Y) = d(\pi)_{I(X)}(I(Y))$$

e daí que

$$d(\exp)_X(Y) = dL(\exp X)_e \left(\int_0^1 \mathrm{Ad}\,(e^{-tX})(Y)dt\right) =$$
$$= dL(\exp X)_e \left(\int_0^1 (\exp\,(-t\,\mathrm{ad}(X)))(Y)dt\right) .$$

A exp sob o sinal de integração nesta última expressão é a exponencial em $Gl(\mathcal{L}(G))$, que admite um desenvolvimento em série . Realizando este desenvolvimento e integrando termo a termo, descobrimos que

$$d(\exp)_X = dL(e^X)_e \circ \left(\sum_{k\geq 0} \frac{(-\mathrm{ad}\,(X))^k}{(k+1)!}\right) .$$

Que é a conhecida fórmula para a diferencial da exponencial. □

Vejamos agora um outro tipo de continuidade de π .

Consideremos os espaços $L^p([a,b], \mathcal{L}(G)) \subset L^1([a,b], \mathcal{L}(G))$ com $p \geq 1$. Vimos anteriormente que a inclusão $L^p([a,b], \mathcal{L}(G)) \to L^1([a,b], \mathcal{L}(G))$ é contínua, e portanto, $\pi_p : L^p([a,b], \mathcal{L}(G)) \to G$, com $\pi_p(\alpha) = \pi(\alpha)$ é contínua na norma destes espaços de Banach.

Observemos, no entanto, que a integral multiplicativa - de uma $\alpha \in L^1([a,b], \mathcal{L}(G))$ depende essencialmente de sua integral aditiva em $\mathcal{L}(G)$: no caso extremo em que $[\alpha(s),\alpha(t)] = 0$ q.s., vimos que $\prod_a^b \exp \alpha(s)ds = \exp \int_a^b \alpha(s)ds$. A continuidade de π depende então da continuidade da integral aditiva como fun ção do integrando. Mas a integral aditiva não é contínua apenas na topologia da norma de $L^p([a,b],\mathcal{L}(G))$, como também na topologia fraca de L^p. Veremos a seguir, que efetivamente, a integral multiplicativa é contínua na topologia fraca de $L^p([a,b],\mathcal{L}(G))$.

Antes porém, demonstraremos um lema que nos permite localizar a convergência fraca em $L^p([a,b],\mathcal{L}(G))$ em uma vizinhança forte deste espaço.

1.7.6 LEMA: Sejam $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ e $(\beta_n)_{n\geq 1}$ sequências limitadas em $L^1([a,b],\mathcal{L}(G))$. Defina g_n, h_n, d_n, $\tilde{e} : [a,b] \to G$ por

$$g_n(t) = \prod_a^t \exp \alpha_n(s)ds \; ; \qquad h_n(t) = \prod_a^t \exp \beta_n(s)ds$$

$$d_n(t) = \prod_a^t \exp (\alpha_n(s)+\beta_n(s))ds \; ; \qquad \tilde{e}(t) = e \quad .$$

Se g_n e h_n convergem uniformemente para $\tilde{e}$ em G, então $d_n \to \tilde{e}$ uniformemente.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $V \in \mathcal{V}(e)$ e tomemos $W_1, W_2 \in \mathcal{V}(e)$, ε e δ reais positivos e $n_o \in \mathbb{N}$ tais que

i) $W_1^2 \subset V$

ii) Se $\|\gamma\|_1 < \varepsilon$ então $\pi(\gamma) \in W_1$

iii) $W_2^2 \subset W_1$ e se $x \in W_2^{-1}$ então $\|Ad(x)-id_{\mathcal{L}(G)}\| < \delta$

iv) $(\delta+1)\delta M \leq \varepsilon$, onde $M = \sup_{n\geq 1} \|\beta_n\|_1$

v) Se $n \geq n_o$ então $g_n(t), h_n(t) \in W_2$, $\forall t \in [a,b]$.

Aplicando (1.4.1.1) reiteradamente, obtemos

$$d_n(t) = (\prod_a^t \exp \alpha_n(s)ds)\ (\prod_a^t \exp \beta_n(s)ds)\ (\prod_a^t \exp \gamma_n(s)ds)$$

onde $\gamma_n(s) = Ad(h_n(s)^{-1}) \circ (Ad(g_n(s)^{-1})-id)(\beta_n(s))$. E se $n \geq n_o$, por v), iii) e iv) temos que

$$\|\gamma_n\|_1 \leq \int_a^b \|Ad(h_n(t)^{-1})\|\ \ \|Ad(g_n(t)^{-1})-id\|\ \ \|\beta_n(t)\|\,dt$$

$$\leq (1+\delta)\delta M < \varepsilon$$

já que $\|Ad(h_n(t)^{-1})\| \leq \|id\| + \|Ad(h_n(t)^{-1})-id\|$. Consequentemente, $\prod_a^t \exp \gamma_n(s)ds \in W_1$, $\forall t \in [a,b]$ se $n \geq n_o$, em razão de ii). E em virtude de iii) e i), concluimos que $d_n(t) \in V$, $\forall t \in [a,b]$ se $n \geq n_o$. E como V foi tomado arbitrariamente, $d_n \to \tilde{e}$ uniformemente em G. □

Agora podemos mostrar a continuidade fraca de π_p (c.f. [16]).

1.7.7 TEOREMA: Se $p \geq 1$ então $\pi_p : L^p([a,b],\mathcal{L}(G)) \to G$ é fracamente contínua.

DEMONSTRAÇÃO: Como $L^p([a,b],\mathcal{L}(G))$, $p \geq 1$ é espaço de Banach separável, levando-se em conta 1.7.2, é suficiente mostrar que se $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de $L^p([a,b],\mathcal{L}(G))$ que converge fracamente para zero, então $\pi(\alpha_n) \to e$.

Tomemos uma tal sequência. O teorema de Banach-Steinhaus nos garante que existe $M_1 > 0$ tal que $\|\alpha_n\|_p \leq M_1$, se $n \geq 1$, e portanto existe $M > 0$ tal que $\|\alpha_n\|_1 \leq M$, se $n \geq 1$.

Seja (V,ϕ) um sistema de coordenadas para G tal que $V \in \mathcal{V}(e)$ e $\phi(e) = 0$. Tome $W \subset V$, $W \in \mathcal{V}(e)$ tal que se $x \in W$ então $\|d(\phi \circ R(x))_e\| \leq M_2$ para algum $M_2 > 0$. Existe então um inteiro N suficientemente grande, de tal forma que se $\beta_n = \alpha_n/N$ então $\prod_a^t \exp \beta_n(s)ds \in W$, $\forall t \in [a,b]$, $n \geq 1$.

Se mostrarmos que $\prod_a^t \exp \beta_n(s)ds$ converge uniformemente para $\tilde{e}(\tilde{e}(t) = e)$, podemos dar por concluída a demonstração do teorema, pois então o lema anterior e um processo simples de indução permitem mostrar que $\prod_a^t \exp \alpha_n(s)ds$ converge uniformemente para $\tilde{e}$.

Seja então $h_n(t) = \phi(\prod_a^t \exp \beta_n(s)ds)$. Mostremos que toda subsequência de $(h_n)_{n\geq 1}$ admite uma subsequência que converge uniformemente para zero. Por (1.3.5.2), h_n satisfaz a

$$h_n(t) = \int_a^t d(\phi \circ R(\phi^{-1}(h_n(s))))_e(\beta_n(s))ds$$

e portanto, $\|h_n(t)\| \leq M_2M/N$. Além do mais, se $t_1,t_2 \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}\|h_n(t_1)-h_n(t_2)\| &\leq \|\beta_n\|_p \left(\left|\int_{t_1}^{t_2} \|d(\phi \circ R(\phi^{-1}(h_n(s))))_e\|^q ds\right|\right)^{1/q} \\ &\leq \frac{M_1}{N} M_2 \, |t_1 - t_2|^q\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, e portanto h_n é uma família equicontínua de funções contínuas. E daí que, em virtude do teorema de Arzelá-

Ascoli, toda subsequência de $(h_n)_{n\geq 1}$ admite uma (sub) subsequência h_{n_k} convergente para algum h e portanto $h_n \to h$.

Podemos concluir então que

$$(*) \qquad \int_a^t d(\phi \circ R(\phi^{-1}(h_{n_k}(s))))_e(\beta_{n_k}(s))ds \;\to\; 0$$

para todo $t \in [a,b]$, já que $\beta_{n_k} \to 0$ fracamente e $d(\phi \circ R(\phi^{-1}(h_{n_k}(s))))_e$ é uniformemente convergente e portanto, o integrando de (*) é o produto de um elemento de uma sequência que converge uniformemente por uma que converge fracamente.

Temos então que $h_n(t) \to 0$ $\forall t \in [a,b]$ e portanto $h_n \to 0$ uniformemente e daí que $\prod_a^t \exp \beta_n(s)ds \to e$ uniformemente. □

A demonstração do teorema deixa claro o

1.7.8 COROLÁRIO: Se $\alpha_n \to \alpha$ fracamente em $L^p([a,b],\mathcal{L}(G))$, $p\geq 1$ então $\prod_a^t \exp \alpha_n(s)$ converge uniformemente para $\prod_a^t \exp \alpha(s)ds$. □

CAPÍTULO II

TEORIA DO CONTROLE EM GRUPOS DE LIE

2.1 INTRODUÇÃO

Um sistema diferencial de controle ou apenas sistema de controle em uma variedade diferenciável M é dado por uma aplicação $f : \mathbb{R}^+ \times M \times \Delta \to TM$ para a qual se tem $f(t,\xi,u) \in T_\xi M$ para cada $(t,\xi,u) \in \mathbb{R}^+ \times M \times \Delta$; onde Δ é a princípio um conjunto arbitrário denominado de espaço dos controles.

Os termos diferencial e controle são devidos ao fato de que se $u : \mathbb{R}^+ \to \Delta$ é uma aplicação qualquer, que denominaremos de controle do sistema, então a u e a f temos associada a equação diferencial

$$(2.1.1) \qquad \dot{\xi} = f(t,\xi,u(t)) \; ; \qquad t \in \mathbb{R}^+, \quad u(t) \in \Delta$$

em M.

Um sistema diferencial de controle é uma família de equações do tipo (2.1.1). Se f é independente de t, diremos que o sistema é autônomo.

Vamos deixar de lado, por enquanto, as questões de existência (e unicidade) de soluções para (2.1.1), e tomemos $\xi_o \in M$. Diremos que $\xi_1 \in M$ é acessível a partir de ξ_o num tempo $T > 0$ (para o sistema (2.1.1)), se existir um controle $u : [0,T] \to \Delta$ e uma solução $\xi : [0,T] \to M$ de (2.1.1), correspondente a este controle e tal que $\xi(0) = \xi_o$ e $\xi(T) = \xi_1$.

No que segue, estaremos envolvidos, com a análise dos conjuntos de acessibilidade a partir de $\xi_o \in M$ por um sistema de controle (2.1.1):

$A(T,\xi_o)$: É o conjunto dos pontos acessíveis a partir de ξ_o em tempo T.

$A([0,T],\xi_o)$: É o conjunto dos pontos acessíveis a partir de ξ_o num tempo $\leq T$, isto é, $A([0,T],\xi_o) = \bigcup_{0\leq t\leq T} A(t,\xi_o)$.

$A(\xi_o)$: É o conjunto dos pontos acessíveis a partir de ξ_o em um tempo qualquer, isto é, $A(\xi_o) = \bigcup_{t\geq 0} A(t,\xi_o)$.

Diremos que um sistema (2.1.1) tem a propriedade de acessibilidade (resp. prop. de acessibilidade em tempo T; resp. prop. de acessibilidade em tempo menor ou igual a T) a partir de ξ_o se $\text{int}\, A(\xi_o) \neq \emptyset$ (resp. $\text{int}\, A(T,\xi_o) \neq \emptyset$; resp. $\text{int}\, A([0,T],\xi_o) \neq \emptyset$).

Um sistema (2.1.1) será dito controlável (resp. controlável em tempo T; resp. controlável em tempo menor ou igual a T) a partir de ξ_o se $A(\xi_o) = M$ (resp. $A(T,\xi_o) = M$; resp. $A([0,T],\xi_o) = M$).

Para um sistema de controle dado, não vamos utilizar todos os controles admissíveis, isto é, as funções $u:\mathbb{R}^+ \to \Delta$. De fato, só nos interessam aqueles controles u para os quais (2.1.1) admite uma solução (ao menos) para uma condição inicial dada. Tomaremos então apenas um subconjunto do conjunto dos controles e a este subconjunto denominaremos de conjunto dos controles admissíveis. Um controle neste conjunto é um controle admissível.

Na realidade, outras condições, além da integrabilidade de (2.1.1), são exigidas normalmente para a construção do conjunto dos controles (c.f. [14], cap. 3). Aqui, quando tomarmos os controles admissíveis para os sistemas que nos interessam, já nos colocaremos nestas condições usuais.

Vejamos quais os sistemas de controle que nos interessarão.

Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathcal{L}(G)$ e consideremos uma aplicação contínua $A : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p \to \mathcal{L}(G)$. Esta aplicação induz, através das translações à direita do grupo o sistema de controle

$$(2.1.2) \qquad \dot{x} = dR(x)_e(A(t,u(t))) \,, \qquad u(t) \in \mathbb{R}^p$$

em G, que denominaremos de sistema de controle invariante à direita em G. Para estes sistemas, o espaço dos controles será sempre um espaço linear de dimensão finita $\mathbb{R}^p$, e o conjunto dos controles admissíveis, um subconjunto das aplicações $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^p$ mensuráveis à Lebesgue e limitadas sobre todo compacto de $\mathbb{R}^+$.

Nestas condições, a aplicação $A(.,u(.)) : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(G)$ é localmente integrável em $\mathbb{R}^+$, e portanto integrável sobre todo intervalo do tipo $[0,T] \subset \mathbb{R}^+$. Existe portanto a integral multiplicativa $\prod_0^T \exp A(s,u(s))ds$ para todo controle admissível u e para todo $T > 0$. E pelo § 1.5, a única solução $x : [0,T] \to G$ absolutamente contínua de (2.1.2) com condição inicial $x(0) = x_0$ é dada por

$$(2.1.3) \qquad x(t) = \left(\prod_{0}^{t} \exp A(s,u(s))ds\right)x_o , \qquad t \in [0,T]$$

E daí, $x_1 \in G$ é acessível a partir de x_o em tempo T se e somente se $x_1 = \prod_{0}^{T} \exp A(s,u(s))ds$ para algum controle admissível u. E portanto, os conjuntos de acessibilidade a partir de um elemento x_o qualquer de G estão relacionados com os conjuntos de acessibilidade a partir da identidade e do grupo através das relações

$$(2.1.4) \qquad \mathcal{A}(T,x_o) = \mathcal{A}(T,e)x_o; \quad \mathcal{A}([0,T],x_o) = \mathcal{A}([0,T],e)x_o; \quad \mathcal{A}(x_o) = \mathcal{A}(e)x_o$$

Isto é, os conjuntos $\mathcal{A}(T,x_o)$, etc. são os transladados à direita, por $R(x_o)$, de $\mathcal{A}(T,e)$, etc. Consequentemente, as propriedades topológicas dos conjuntos de acessibilidade a partir de x_o coincidem com as dos conjuntos de acessibilidade a partir de e.

Em vista deste privilégio concedido aos conjuntos de acessibilidade a partir da identidade, simplificaremos as notações escrevendo apenas $\mathcal{A}(T)$, $\mathcal{A}[0,T]$ e $\mathcal{A}$ para $\mathcal{A}(T,e)$, $\mathcal{A}([0,T],e)$ e $\mathcal{A}(e)$ respectivamente, e nos referiremos a estes conjuntos apenas como os conjuntos de acessibilidade.

Os controles admissíveis para os sistemas (2.1.2) serão sempre tomados da seguinte forma: seja $U : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$ uma função de conjuntos, que denominaremos de função dos controles. Os controles admissíveis serão então todas as aplicações $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^p$ mensuráveis e localmente limitadas tais que $u(t) \in U(t)$. É claro, que dependendo da função dos controles U, o conjunto dos controles admissíveis pode ser vazio, por exemplo, no caso em que $U(t) = \{u(t)\}$ e u não é mensurável.

Para garantir a existência de uma quantidade suficiente de controles admissíveis, faremos certas restrições a U tais como a da continuidade de U em relação à métrica de Haussdorff em $\mathbb{R}^p$ se cada $U(t)$ é compacto, ou então, tomaremos U como sendo constante igual a $U_o \neq \emptyset$. Neste último caso, é claro que existem controles admissíveis. Se U é contínua em relação à métrica de Hausdorff, veremos adiante como consequência do lema de Filippov (veja 2.2.1), que existem também controles admissíveis.

Se o sistema é autônomo, a função dos controles será sempre constante.

Se $\psi : G \times M \to M$ é uma ação à esquerda (global) de G em M, associado a $A(t,u)$ temos, além de (2.1.2), o sistema

$$\dot{\xi} = d(\psi_\xi)_e(A(t,u)) \tag{2.1.5}$$

em M. Em virtude do § 1.5, as propriedades topológicas dos conjuntos de acessibilidade a partir de $e \in G$ se estendem, como em (2.1.4) aos conjuntos de acessibilidade para (2.1.5).

2.1.6 EXEMPLOS

2.1.6.1 SISTEMAS BILINEARES: Se em 1.6.1 tomarmos $A(t,u) = (A_o + u_1 A_1 + \ldots + u_p A_p, 0)$ com $A_1, \ldots, A_p$ matrizes $n \times n$ e $u = (u_1, \ldots, u_p)$, temos o sistema de controle

$$\dot{x} = (A_1 + u_1 A_1 + \ldots + u_p A_p) x$$

em $\mathbb{R}^n$. Estes são os chamados sistemas bilineares.

2.1.6.2 SISTEMAS LINEARES: Ainda em 1.6.1, tomamos $A(t,u) = (A_1(t), B(t)u)$ com $A_1(t)$ matriz $n \times n$ para cada t e $B_1(t)$ matriz $n \times p$ para cada $t \geq 0$. Obtemos o sistema

$$\dot{x} = A_1(t)x + B(t)u \tag{2.1.6.2.1}$$

em $\mathbb{R}^n$, que é um sistema de controle linear. Para tais sistemas, existe uma vasta teoria desenvolvida (veja por exemplo [9] ou [14]). Adiante, vamos utilizar alguns resultados da teoria dos sistemas lineares. Entre estes, necessitaremos do clássico princípio do Bang-Bang:

(2.1.6.2.2) TEOREMA: Se a função dos controles $U : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$ para (2.1.6.2.1) é contínua na métrica de Hausdorff com $U(t)$ compacto para $t \geq 0$, então o conjunto dos pontos acessíveis num tempo T a partir da origem de $\mathbb{R}^n$ é o mesmo que obteríamos se tivéssemos tomado por função dos controles a $t \to \mathrm{Co}\, U(t)$. Em tal caso, $\mathcal{A}(t)$ é compacto e convexo de $\mathbb{R}^n$.

DEMONSTRAÇÃO: Veja teorema de Aumann ([9] teo. 8.4). □

Em particular, tomando $A_1(t) = 0$ e $B(t) = id$ $\forall t \in \mathbb{R}^+$, podemos concluir que para cada $u : [a,b] \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ com $u(t) \in \mathrm{Co}\, U(t)$ existe $v : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ com $v(t) \in U(t)$ tal que

$$\int_a^b u(s)ds = \int_a^b v(s)ds .$$

2.2 PROPRIEDADE DOS CONJUNTOS DE ACESSIBILIDADE

Vamos estudar neste parágrafo os conjuntos de acessibilidade para os sistemas (2.1.2), supondo que a função dos controles $U : \mathbb{R}^+ \to P(\mathbb{R}^p)$ é tal que $U(t) \neq \emptyset$ é compacto para $t \geq 0$ e que U é contínua na métrica de Hausdorff sobre os compactos de $\mathbb{R}^p$.

Devido a (2.1.3), temos que

$$A(t) = \{(\prod_{0}^{T} \exp A(s,u(s))ds \in G \;/\; u \text{ é controle admissível}\}.$$

No entanto, temos uma descrição mais cômoda para os conjuntos de acessibilidade. Seja $R(t) = \{A(t,u) \in \mathcal{L}(G)/u \in U(t)\}$. Então, como A é contínua, $R(T) \subset \mathcal{L}(G)$ é compacto e $t \to R(t)$ é contínua em relação à métrica de Haussdorff sobre os compactos de $\mathcal{L}(G)$. Temos, naturalmente, que se $\alpha(t) = A(t,u(t))$ para algum controle admissível u, então $\alpha(t) \in R(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$. Por outro lado, temos o seguinte lema devido a A.F. Filippov.

2.2.1 LEMA: Sejam $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ contínua, I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $U : I \to P(\mathbb{R}^p)$ tal que $\forall t \in I$, $U(t)$ é compacto não vazio de $\mathbb{R}^p$ e U é contínua na métrica de Haussdorff. Defina $R(t) = F(U(t))$ e suponha que $\alpha : I \to \mathbb{R}^q$, mensurável é tal que $\alpha(t) \in R(t)$, $\forall t \in I$. Então existe $u : I \to \mathbb{R}^p$ mensurável com $u(t) \in U(t)$ e tal que $\alpha(t) = F(u(t))$.

DEMONSTRAÇÃO: Veja [5] ou [9]. $\square$

E portanto, se $U(t)$ é compacto e U contínua, tomando, no lema $F(x) = 0$ e $\alpha(t) = 0$, obtemos $u : I \to \mathbb{R}^p$ mensurável tal que $u(t) \in U(t)$, isto é, um controle admissível.

Sejam agora as conjuntos

$$\text{(2.2.2)} \qquad \Omega(A,U,I) = \{A(.,u(.)) \in L^1(I,\mathcal{L}(G))/u \text{ é controle admissível}\}$$
$$\Omega(R,I) = \{\alpha \in L^1(I,\mathcal{L}(G))/\alpha(t) \in R(t),\ \forall t \in I\}$$

onde I é um intervalo qualquer de $\mathbb{R}^+$. Observe que na definição de $\Omega(A,U,I)$ tomamos, na realidade, a restrição de u a I; fora de I, u pode assumir qualquer valor.

O lema de Filippov nos diz que $\Omega(A,U,I) = \Omega(R,I)$ se A,U,R estão relacionados como acima. Então, os conjuntos de acessibilidade para o sistema A com função de controle U são descritos através de

$$\text{(2.2.2.2)} \qquad A(T) = \pi(\Omega(A,U,[0,T])) = \pi(\Omega(R,[0,T]))$$

onde $\pi = \pi^T = \pi_o^T : L^1([0,T],\mathcal{L}(G)) \to G$ é a aplicação do § 1.7.

Na análise dos conjuntos de acessibilidade, podemos portanto, substituir um sistema de controle A com função de controle U por uma função $R : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(G)$ contínua na topologia de Haussdorff e tal que $R(t) \neq \emptyset$ é compacto para $t \geq 0$. No que segue, chamaremos, às vezes, de sistema de controle uma tal aplicação R e às funções $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(G)$ mensuráveis com $\alpha(t) \in R(t)$, chamaremos também de controles admissíveis.

Os conjuntos de acessibilidade $A(t)$ definem uma função $: \mathbb{R}^+ \to P(G)$.

2.2.3 PROPOSIÇÃO: $\mathcal{A} : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{P}(G)$ é uniformemente contínua sobre todo compacto de $\mathbb{R}^+$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam K um compacto de $\mathbb{R}^+$ e $V \in \mathcal{V}(e)$. Como $\mathcal{R}$ é contínua, $\bigcup_{t\in K} \mathcal{R}(t)$ é um compacto em $\mathcal{L}(G)$, pelo lema abaixo, temos que se $t_1, t_2 \in K$, $|t_1-t_2|$ é suficientemente pequeno e α é controle admissível, então $\prod_{t_1}^{t_2} \exp \alpha(s)ds \in V$. No entanto

$$\prod_{0}^{t_2} \exp \alpha(s)ds = \Big(\prod_{t_1}^{t_2} \exp \alpha(s)ds\Big)\Big(\prod_{0}^{t_1} \exp \alpha(s)ds\Big)$$

e portanto $\mathcal{A}(t_2) \subset V\mathcal{A}(t_1)$. Da mesma forma, $\mathcal{A}(t_1) \subset V\mathcal{A}(t_2)$ se $|t_1-t_2|$ é pequeno, o que mostra que $\mathcal{A}$ é uniformemente contínua. □

2.2.4 LEMA: Seja $\Omega \subset L^1([a,b],\mathcal{L}(G))$. Suponhamos que existe $M > 0$ tal que se $\alpha \in \Omega$ então $\|\alpha(t)\| \le M$ quase sempre em $[a,b]$. Então, dado $V \in \mathcal{V}(e)$, existe $\delta_V > 0$ tal que se $t_1, t_2 \in [a,b]$, $|t_1-t_2| < \delta_V$ e $\alpha \in \Omega$ então

$$\prod_{t_1}^{t_2} \exp \alpha(s)ds \in V.$$

DEMONSTRAÇÃO: É consequência imediata de 1.2.5, observando que

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} \|\alpha(s)\|ds\right| \le M|t_1-t_2|. \qquad \square$$

É importante para certos problemas de otimização, saber se os conjuntos $\mathcal{A}(T)$ e $\mathcal{A}[0,T]$ são ou não fechados. Nesta linha, temos o seguinte teorema:

2.2.5 TEOREMA: Se para o sistema de controle $\mathcal{R} : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{P}(\mathcal{L}(G))$ tem-se que, para cada $t \geq 0$, $\mathcal{R}(t)$ além de compacto é *convexo* em $\mathcal{L}(G)$, então $\forall T \geq 0$, $\mathcal{A}(T) \subset G$ *é compacto.*

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos o conjunto $\Omega(\mathcal{R},[0,T]) \subset L^1([0,T],\mathcal{L}(G))$ como definido em (2.2.2).

Este conjunto é evidentemente convexo, e como é formado por funções limitadas, $\Omega(\mathcal{R},[0,T]) \subset L^2([0,T],\mathcal{L}(G))$. Desde que $\bigcup_{t\in[0,T]} \mathcal{R}(t)$ é compacto, existe $M > 0$ tal que se $\alpha \in \Omega(\mathcal{R},[0,T])$ então $\|\alpha\|_2 \leq M$, isto é, $\Omega(\mathcal{R},[0,T])$ é limitado como subconjunto de $L^2([0,T],\mathcal{L}(G))$.

Seja $(\alpha_k)_{k\geq 1} \subset \Omega(\mathcal{R},[0,T])$ tal que $\alpha_k \to \alpha$ em $L^2([0,T],\mathcal{L}(G))$. Então existe uma subsequência $(\alpha_{k_i})_{i\geq 1}$ de α_k tal que $\alpha_{k_i}(t) \to \alpha(t)$ para quase todo $t \in [0,T]$. E como $\mathcal{R}(t)$ é compacto, $\alpha(t) \in \mathcal{R}(t)$.

Temos então que $\Omega(\mathcal{R},[0,T])$ como subconjunto de $L^2([0,T],\mathcal{L}(G))$ é convexo, limitado e fechado na topologia forte, e portanto limitado e fechado na topologia fraca de $L^2([0,T],\mathcal{L}(G))$. E como este espaço é reflexivo, $\Omega(\mathcal{R},[0,T])$ é compacto na topologia fraca. E daí que, em virtude de 1.7.7,

$$\mathcal{A}(T) = \pi^T(\Omega(\mathcal{R},[0,T]))$$

é compacto em G. $\square$

E o mesmo vale para $\mathcal{A}[0,T]$:

2.2.6 COROLÁRIO: Nas mesmas condições da proposição, $\mathcal{A}[0,T]$ é compacto em G .

DEMONSTRAÇÃO: É só lembrar que $\mathcal{A}$ é contínua e que pela proposição $\mathcal{A}(t)$ é compacto. □

O conjunto $\mathcal{A} = \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{A}(t)$ não é, em geral, compacto. O exemplo simples abaixo mostra que $\mathcal{A}$ pode não ser sequer fechado.

2.2.7 EXEMPLO: Seja G o grupo aditivo dos reais com sua álgebra de Lie (comutativa) identificada a $\mathbb{R}$. Em G, tome o sistema $A : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $A(t,u) = e^{-t}$. Então $\mathcal{R}(T) = \{\exp(-T)\}$ é compacto e convexo, e $\mathcal{A}(T) = \{\int_0^T \exp(-s)ds = \{1 - \exp(-T)\}$, e portanto $\mathcal{A} = [0,1)$ que não é fechado.

2.2.8 EXEMPLO: Sejam dados em G além de um sistema de controle, uma curva contínua $h : \mathbb{R}^+ \to G$ que desempenhará o papel de objetivo a ser atingido pelo sistema. Vejamos que um teorema de existência de "controle otimal" pode ser obtido por intermédio de 2.2.5.

Suponhamos que h é atingida em algum instante pelo sistema, isto é, que para algum $t \geq 0$, $h(t) \in \mathcal{A}(t)$ e mostremos que é possível atingir h em tempo mínimo, isto é, que existe $\bar{t} \geq 0$ tal que $h(\bar{t}) \in \mathcal{A}(\bar{t})$ e tal que se $0 \leq s < \bar{t}$ então $h(s) \notin \mathcal{A}(s)$ (c.f. [9]).

2.2.8.1 COROLÁRIO (de 2.2.5): Nas condições do teorema 2.2.5, se h pode ser atingida, então existe um tempo mínimo.

DEMONSTRAÇÃO: Por hipótese, $\{t \in \mathbb{R}^+ \, / \, h(t) \in A(t)\} \neq \emptyset$. Sejam $\bar{t} = \inf \{t \in \mathbb{R}^+ \, / \, h(t) \in A(t)\}$, $t_n \to \bar{t}$ com $h(t_n) \in A(t_n)$ e α_n controles admissíveis tais que $h(t_n) = \prod_{o}^{t_n} \exp \alpha_n(s)ds$. Então,

$$\prod_{o}^{\bar{t}} \exp \alpha_n(s)ds = \left(\prod_{t_n}^{\bar{t}} \exp \alpha_n(s)ds \right) \left(\prod_{o}^{t_n} \exp \alpha_n(s)ds \right)$$

$$= \left(\prod_{t_n}^{\bar{t}} \exp \alpha_n(s)ds \right) h(t_n)$$

Como h é contínua, $h(t_n) \to h(\bar{t})$ e pelo lema 2.2.4, $\prod_{t_n}^{\bar{t}} \exp \alpha_n(s)ds \to e$. Isto é,

$$h(\bar{t}) = \lim_{n\to\infty} \prod_{o}^{\bar{t}} \exp \alpha_n(s)ds \in A(\bar{t})$$

pois $A(\bar{t})$ é fechado. □

Veremos adiante, através de exemplos, que se $R(t)$ não é convexo, $A(t)$ pode não ser compacto. Não obstante, dado um sistema de controle $R : [0,\infty) \to P(\mathcal{L}(G))$, consideremos a função com valores em conjuntos $\mathrm{Co}\, R : [0,\infty) \to P(\mathcal{L}(G))$ dada por $(\mathrm{Co}\, R)(t) = \mathrm{Co}\,(R(t))$, a cápsula convexa de $R(t)$. Sendo $R(t)$ compacto, sua cápsula convexa também é um compacto e, como vimos anteriormente, $\mathrm{Co}\, R$ também é contínua com a métrica de Hausdorff sobre os compactos de $\mathcal{L}(G)$.

Segundo o teorema 2.2.5, $\pi(\Omega(\mathrm{Co}\ \mathcal{R},[0,T]))$ é compacto em G, e como $\mathcal{A}(T) \subset \pi(\Omega(\mathrm{Co}\ \mathcal{R},[0,T]))$, tem-se claramente que $\mathcal{A}(T)^{-} \subset \pi(\Omega(\mathrm{Co}\ \mathcal{R},[0,T]))$. Vejamos agora, que esta desigualdade é de fato uma igualdade. Este fato é uma generalização do princípio do Bang-Bang (teorema de Aumann) que enunciamos em 2.1.6.2.

2.2.9 LEMA: $\Omega(\mathcal{R},[0,T])^{-} = \Omega(\mathrm{Co}\ \mathcal{R},[0,T])$ se o fecho é tomado na topologia fraca de $L^2([0,T],\mathcal{L}(G))$.

DEMONSTRAÇÃO: Antes de mais nada, seja $M > 0$ tal que $\mathrm{Co}\ \mathcal{R}(t) \subset B(0,M)$ $\forall t \in [0,T]$. Tomemos $\alpha : [0,T] \to \mathcal{L}(G)$ mensurável, tal que $\alpha(t) \in \mathrm{Co}\ \mathcal{R}(t)$ se $t \in [0,T]$ e mostremos a existência de uma sequência $(\beta_n)_{n\geq 1}$ tal que $\beta_n \to \alpha$ fracamente em $L^2([0,T],\mathcal{L}(G))$ e $\beta_n(t) \in \mathcal{R}(t)$ se $t \in [0,T]$ e $n \geq 1$.

Definição de β_n: Tome a partição $P_n = \{kT/n \in [0,T] : k = 0,1,\dots,n\}$ de $[0,T]$. Pelo teorema de Aumann, existe $\gamma_{n,k} : [(k-1)T/n, kT/n] \to \mathcal{L}(G)$ com $\gamma_{n,k}(t) \in \mathcal{R}(t)$ tal que

$$\int_{\frac{(k-1)T}{n}}^{kT/n} \gamma_{n,k}(s)ds = \int_{\frac{(k-1)T}{n}}^{kT/n} \alpha(s)ds \quad .$$

Defina $\beta_n(t) = \gamma_{n,k}(t)$ se $t \in [(k-1)T/n, kT/n)$.

Agora, é claro que

$$\int_0^{kT/n} \beta_n(s)ds = \int_0^{kT/n} \alpha(s)ds$$

e portanto, se $t \in [0,T]$ e $t \in [(k-1)T/n, kT/n)$ então

$$\left\|\int_0^t (\beta_n(s)-\alpha(s))ds\right\| = \left\|\int_{\frac{(k-1)T}{n}}^t (\beta_n(s)-\alpha(s))ds\right\|$$

$$\leq \frac{2M}{n} .$$

Daí que $\forall t \in [0,T]$, $\int_0^t \beta_n(s)ds \to \int_0^t \alpha(s)ds$. E como $(\beta_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência limitada de $L^2([0,T],\mathcal{L}(G))$, $\beta_n \to \alpha$ fracamente, demonstrando o lema. □

2.2.10 PROPOSIÇÃO: $\mathcal{A}(T)^- = \pi(\Omega(\mathrm{Co}\,\mathcal{R},[0,T]))$.

DEMONSTRAÇÃO: É imediata a partir do lema e de 1.7.7. □

Uma outra propriedade útil dos conjuntos de acessibilidade é dada pelo teorema abaixo.

2.2.11 TEOREMA: Os conjuntos de acessibilidade $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}(t)$ e $\mathcal{A}[0,T]$ são conexos por caminhos.

DEMONSTRAÇÃO: $\mathcal{A}[0,T]$ e $\mathcal{A}$ são conexos por caminhos, uma vez que todo ponto nestes conjuntos se unem por um caminho contínuo a e.

Para mostrar que $\mathcal{A}(T)$ é conexo por caminhos, mostremos que $\Omega(\mathcal{R},[0,T])$ o é em $L^1([0,T],\mathcal{L}(G))$. Sejam então α e β em $\Omega(\mathcal{R},[0,T])$ e $\phi : [0,T] \to L^1([0,T],\mathcal{L}(G))$ definida por

$$\phi(t)(s) = \begin{cases} \alpha(s) & \text{se } 0 \leq s \leq t \\ \beta(s) & \text{se } t < s \leq T \end{cases} ;$$

então $\phi(0) = \beta$ e $\phi(T) = \alpha$; além do mais, ϕ é contínua pois

$$\|\phi(t_1) - \phi(t_2)\|_1 = \left| \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha(s) - \beta(s)\| ds \right| .$$

E portanto, ϕ é um caminho contínuo entre α e β e $\phi(t) \in \Omega(R,[0,T])$ para cada $t \in [0,T]$. E como $A(T) = \pi(\Omega(R,[0,T]))$, $A(T)$ é conexo por caminhos. $\square$

2.2.12 EXEMPLO: Em $Gl(4)$ considere o sistema de controle $R : [0,\infty) \to M_4$ dado por $R(t) = R_o$ onde R_o é o conjunto das matrizes $(a_{ij})_{4x4}$ tal que $a_{12} = a_{23}$, $|a_{12}| = |a_{23}| = 1$, $a_{31} = 1$ e $a_{ij} = 0$ em outros casos. O fecho convexo de R_o, $Co\, R_o$ é dado pelas matrizes $(a_{ij})_{4x4}$ tal que $a_{12} = a_{23}$, $a_{31} = 1$ e $|a_{12}| \leq 1$. Se α é um controle admissível para este sistema, então α é dado por

$$(2.2.12.1) \qquad \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para alguma função localmente integrável $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, com $|u(t)| = 1$ se $t \in [0,\infty)$. E não é difícil ver que $\prod_0^T \exp \alpha(s)ds$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & f_\alpha(T) & \frac{1}{2} f_\alpha(T)^2 & h_\alpha(T) \\ 0 & 1 & f_\alpha(T) & g_\alpha(T) \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $f_\alpha(t) = \int_0^t u(s)ds$, $g_\alpha(t) = \int_0^t s\,u(s)ds$, $h_\alpha(t) = \int_0^t u(s)\, g_\alpha(s)ds = f_\alpha(t)\, g_\alpha(t) - \frac{1}{2} t\, f_\alpha(t)^2 + \frac{1}{2} \int_0^t f_\alpha(s)^2 ds$. Se para algum $T > 0$ $f_\alpha(T) = g_\alpha(T) = h_\alpha(T) = 0$, então $\int_0^T f_\alpha(s)^2 ds = 0$ e portanto $f_\alpha(t) = 0$ em $[0,T]$ e daí que $u = 0$ quase sempre em $[0,T]$.

Consequentemente, se $\beta : [0,\infty) \to M_4$ é dado por (2.2.12.1) com $u(t) = 0$, então β é controle admissível para Co R e não existe controle admissível α para R tal que $\prod_0^T \exp \alpha(s)ds = \prod_0^T \exp \beta(s)ds$ se $T > 0$.

Temos então, em virtude de 2.2.5, que o conjunto dos pontos acessíveis em tempo T por R não é fechado. Este exemplo aparece em [17]. $\square$

CAPÍTULO III

SISTEMAS AUTÔNOMOS

3.1 INTRODUÇÃO

Tomemos num grupo de Lie G um sistema de controle invariante à direita autônomo, isto é, um sistema do tipo (2.1.2) em que $A(t,u) = A(u)$ é independente de t e a função dos controles $U : \mathbb{R}^+ \to P(\mathcal{L}(G))$ é constante, $U(t) = U_o$, $\forall t \geq 0$. O lema de Filippov nos diz que se U_o é compacto, então o conjunto dos pontos acessíveis a partir da identidade depende apenas de $R_o = A(U_o)$, isto é, $A(T) = \pi(\Omega(R_o,[0,T]))$.

Alteremos um pouco esta situação, chamando de sistema de controle (autônomo) invariante à direita em G a qualquer subconjunto $R \subset \mathcal{L}(G)$. Os controles admissíveis para um tal sistema são todas as aplicações localmente integráveis $\alpha : [0,\infty) \to \mathcal{L}(G)$ tal que $\alpha(t) \in R$, $\forall t \geq 0$. Para estes sistemas, podemos introduzir as mesmas noções já definidas para os sistemas de controle do tipo (2.1.2), tais como os conceitos de conjunto de acessibilidade, controlabilidade, propriedade de acessibilidade etc... Denotaremos por $A_R(T)$ ou $A(T)$, $A_R[0,T]$ ou $A[0,T]$, A_R ou apenas A aos conjuntos de acessibilidade associados ao sistema de controle R.

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas propriedades topológicas dos conjuntos A_R, $A_R[0,T]$ e $A_R(T)$, relacionadas com as noções de controlabilidade e de acessibilidade para o sistema de controle R.

3.2 PROPRIEDADE DE ACESSIBILIDADE

A independência de R em relação a t faz com que o conjunto de acessibilidade A_R tenha características algébricas herdadas da estrutura algébrica de G :

3.2.1 PROPOSIÇÃO: O conjunto dos pontos acessíveis em tempo qualquer A_R , é um semi-grupo. Mais especificamente, $\forall\, t,s \geq 0$, $A_R(t)A_R(s) = A_R(s)\ A_R(t) = A_R(t+s)$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $x \in A(t+s)$, então $x = \prod_{0}^{t+s} \exp \alpha(\sigma)d\sigma$ para algum controle admissível α . Então

$$x = \left(\prod_{t}^{t+s} \exp \alpha(\sigma)d\sigma\right)\left(\prod_{0}^{t} \exp \alpha(\sigma)d\sigma\right)$$

tomando-se os controles admissíveis β_1 e β_2 definidos por $\beta_1(\sigma) = \alpha(\sigma)$ e $\beta_2(\sigma) = \alpha(\sigma+s)$, vê-se que

$$x = \left(\prod_{0}^{s} \exp \beta_2(\sigma)d\sigma\right)\left(\prod_{0}^{t} \exp \beta_1(\sigma)d\sigma\right)$$

e portanto $x \in A(s)A(t)$. Reciprocamente, se

$$x = \left(\prod_{0}^{s} \exp \beta_1(\sigma)d\sigma\right)\left(\prod_{0}^{t} \exp \beta_2(\sigma)d\sigma\right),$$

então se $\alpha(\sigma) = \beta_2(\sigma)$ para $0 \leq \sigma \leq t$ e $\alpha(\sigma) = \beta_1(\sigma-t)$ para $\sigma > t$ tem-se que

$$x = \left(\prod_{t}^{t+s} \exp \alpha(\sigma)d\sigma\right)\left(\prod_{0}^{t} \exp \alpha(\sigma)d\sigma\right) = \prod_{0}^{t+s} \exp \alpha(\sigma)d\sigma$$

isto é, $x \in \mathcal{A}(t+s)$. □

Em geral, para sistemas não autônomos, o conjunto dos pontos acessíveis não é um semi-grupo:

3.2.2 EXEMPLO: Em $Gl(2)$ tome o sistema de controle $A : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to M_2$ com A contínua e tal que

$$A(t,u) = \begin{cases} u A_1 & \text{se} \quad t \in [0,1] \\ \text{e} & \\ u A_2 & \text{se} \quad t \in [2,4] \end{cases}$$

onde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

A função dos controles $U : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ para este sistema é dada por

$$U(t) = \begin{cases} \{0\} & \text{se} \quad t \in [1,2] \quad \text{ou} \quad t \geq 4 \\ [0,2] & \text{se} \quad t \in [0,1/2] \quad \text{ou} \quad t \in [5/2,3] \\ [0,-4(t-1)] & \text{se} \quad t \in [1/2,1] \\ [0,4(t-2)] & \text{se} \quad t \in [2,5/2] \\ [0,-2(t-4)] & \text{se} \quad t \in [3,4] \end{cases} \quad .$$

Sejam u_1 e u_2 controles admissíveis tais que $u_1(t) = 2$ se $t \in [0,1/2]$ e $u_1(t) = 0$ se $t \notin [0,1/2]$; $u_2(t) = \pi/2$ se $t \in [5/2,3]$ e 0 nos outros pontos. Então,

$$\left(\prod_{0}^{4} \exp A(s,u_1(s))ds\right)\left(\prod_{0}^{4} \exp A(s,u_2(s))ds\right) = (\exp A_1)\ \exp\left(\frac{\pi}{4} A_2\right) .$$

E se u_3 é um controle admissível qualquer, então é claro que

$$\prod_{0}^{8} \exp A(s,u_3(s))ds = \left(\exp\left(\int_0^1 u_3(s)ds)A_2\right)\right)\ \left(\exp\left(\int_2^4 u_3(s)ds)A_1\right)\right) =$$

$$= (\exp kA_2)\ (\exp \ell A_1) .$$

para algum k e ℓ. No entanto, é fácil verificar que

$$(\exp k\, A_2)(\exp \ell\, A_1) = (\exp A_1)(\exp \frac{\pi}{4} A_2)$$

não tem solução para k e ℓ reais. □

O conjunto de acessibilidade A_R para R não é sempre um grupo. Veremos adiante, no próximo parágrafo, que o fato de A_R ser um grupo, está estreitamente relacionado com a controlabilidade de R. Por enquanto, vejamos o que se passa com a propriedade de acessibilidade de um sistema autônomo.

Uma condição necessária de acessibilidade (isto é, int $A_R \neq \emptyset$) de R é obtida diretamente do fato de π se restringir a subgrupos. De fato, seja H a subálgebra de Lie de $\mathcal{L}(G)$ gerada por R, então como π se restringe a subgrupos, o conjunto de acessibilidade A_R está contido no subgrupo de Lie conexo H de G que tem H por álgebra de Lie. Daí, que se R tem a propriedade de acessibilidade, então a álgebra de Lie gerada por R tem que ser $\mathcal{L}(G)$, já que então H é de interior não vazio em G e é portanto a componente conexa da identidade de G, isto é, $\mathcal{H} = \mathcal{L}(G)$.

Esta condição, é no entanto suficiente, como mostra o teorema a seguir, devido a A.J. Krener e C.Lobry (c.f. [2]).

3.2.3 TEOREMA: Se a álgebra de Lie gerada por $\mathcal{R}$ é $\mathcal{L}(G)$ então $\mathcal{R}$ tem a propriedade de acessibilidade.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $n = \dim G$. Vamos mostrar que se $V \in \mathcal{V}(e)$ então $V \cap \mathcal{A}_{\mathcal{R}}[0,T]$ tem interior não vazio para todo $T > 0$. Para isto, vamos construir uma subvariedade M de G tal que $\dim M = n$ e $M \subset V \cap \mathcal{A}_{\mathcal{R}}[0,T]$.

A variedade M será obtida automaticamente se mostrarmos que existem n elementos de $\mathcal{R}$; $X_1,\ldots,X_n$ tal que a aplicação $: \mathbb{R}^n \to G$ definida por $(t_1,\ldots,t_n) \to (\exp t_nX_n)\ldots(\exp t_1X_1)$ é uma submersão em algum aberto $W \subset \{(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ t_i \geq 0$ e $t_1+\ldots+t_n < T\}$ e tal que $(\exp (t_nX_n)\ldots\exp (t_1X_1)) \in V$ para $(t_1,\ldots,t_n) \in W$, já que os elementos de G da forma $(\exp t_nX_n)\ldots(\exp t_1X_1)$ com $t_i \geq 0$ são acessíveis a partir de e por $\mathcal{R}$.

A sequência $X_1,\ldots,X_n$ será construída, por indução , esquematizado abaixo:

Seja $X_1 \in \mathcal{R}$ tal que $X_1 \neq 0$. Desde que $\mathcal{R}$ gera a álgebra $\mathcal{L}(G)$, existem $X_2 \in \mathcal{R}$ e um intervalo $(\tau_1^1, \tau_2^1) \subset [0,T/n]$ tal que $\exp(s X_1) \in V$ e se $s \in (\tau_1^1, \tau_2^1)$ e $\tilde{X}_2$ não é tangente em nenhum ponto à subvariedade $M_1 = \{\exp (s X_1) \in G/ \ s \in (\tau_1^1,\tau_2^1)\}$ de dimensão 1. Se $n = 2$, o teorema está demonstrado, pois nestas condições a aplicação $: \mathbb{R}^2 \to G$ definida por $(t_2, t_1) \to$

$(\exp t_2X_2)(\exp t_1X_1)$ é uma submersão se $t_1 \in (\tau_1^1, \tau_2^1)$ e t_2 é próximo de zero.

Se $n > 2$, existem $X_3 \in \mathcal{R}$, $(\bar{\tau}_1^1, \bar{\tau}_2^1) \subset (\tau_1^1, \tau_2^1)$ e $(\tau_1^2, \tau_2^2) \subset [0,T/n]$ tal que $\exp(s_2X_2)\exp(s_1X_1) \in V$ se $(s_1,s_2) \in (\tau_1^2, \tau_2^2) \times (\bar{\tau}_1^1, \bar{\tau}_2^1)$ e $\tilde{X}_3$ não é tangente à subvariedade $M_2 = \{\exp(s_2X_2)\exp(s_1X_1) \in G / (s_1,s_2) \in (\tau_1^2, \tau_2^2)\times(\bar{\tau}_1^1, \bar{\tau}_2^1)\}$ de dimensão 2, já que $\mathcal{R}$ gera $\mathcal{L}(G)$ e o conjunto dos campos tangentes a uma subvariedade é fechado pelo colchete. □

O enunciado deste teorema não explicita, mas fica claro na demonstração, que $e \in \mathcal{A}[0,T]$ é aderente a $\operatorname{int} \mathcal{A}[0,T]$. Temos, de fato, o corolário seguinte:

3.2.4 COROLÁRIO: Se $\mathcal{R}$ gera $\mathcal{L}(G)$ então para todo $T > 0$ $\operatorname{int} \mathcal{A}[0,T]$ é denso em $\mathcal{A}[0,T]$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $x \in \mathcal{A}[0,T]$ e $V \in \mathcal{V}(e)$.

Se $x \in \mathcal{A}(t)$ para algum $t < T$, então existe $\delta > 0$ tal que $t+\delta < T$, e portanto se $0 \leq s \leq \delta$, $\mathcal{A}(s)x \subset \mathcal{A}(s)\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(s+t) \subset \mathcal{A}[0,T]$, isto é, $(\mathcal{A}[0,\delta])x \subset \mathcal{A}[0,T]$. Pelo teorema, $V \cap \mathcal{A}[0,\delta]$ tem interior não vazio e daí que

$$\begin{aligned} \operatorname{int}((Vx) \cap \mathcal{A}[0,T]) &\supset \operatorname{int}((Vx) \cap (\mathcal{A}[0,\delta]x)) = \\ &= \operatorname{int}((V \cap \mathcal{A}[0,\delta])x) = (\operatorname{int}(V \cap \mathcal{A}[0,\delta]))x \neq \emptyset \end{aligned}$$

isto é, x é limite de pontos interiores de $\mathcal{A}[0,T]$.

Se $x \in \mathcal{A}(T)$, $x = \prod_0^T \exp \alpha(s)ds$ para algum controle admissível α e portanto

$$x = \lim_{n\to\infty} \left(\prod_{o}^{t_n} \exp \alpha(s)ds \right) = \lim x_n$$

se $t_n \to T$ e onde $x_n = \prod_{o}^{t_n} \exp \alpha(s)ds$. Se $t_n < T$, então $x_n \in (\operatorname{int} A[0,T])^-$, e portanto x também é limite de pontos interiores de $A[0,T]$. □

No caso em que R não gera $\mathcal{L}(G)$, temos uma situação parecida:

3.2.5 COROLÁRIO: Sejam H a álgebra de Lie gerada por R e H o único subgrupo conexo de G que tem H por álgebra de Lie. Então $A_R[0,T] \subset H$ e na topologia de H , $\operatorname{int} A_R[0,T]$ é denso em $A_R[0,T]$.

DEMONSTRAÇÃO: É só lembrar que as integrais multiplicativas se restringem a subgrupos e usar o corolário anterior. □

Temos então que a cada sistema $R \subset \mathcal{L}(G)$ está associada uma subvariedade de G , aliás um subgrupo de Lie de G que localiza $A_R[0,T]$: Este subgrupo contém $A_R[0,T]$ e é minimal entre os que satisfazem a esta propriedade, uma vez que $A_R[0,T]$ tem interior não vazio neste subgrupo.

É evidente que a mesma situação, com o mesmo subgrupo ocorre para o conjunto A dos pontos acessíveis por R , a partir de e , em tempo qualquer.

Para os conjuntos de acessibilidade $A_R(t)$, temos também este tipo de localização.

Suponhamos, para facilitar as notações e sem atrapalhar em nada a generalidade, que R gera $\mathcal{L}(G)$. Vamos construir um subgrupo normal G que será utilizado na lozalização de $A(t)$.

Seja E a subvariedade afim de $\mathcal{L}(G)$ gerada por R e F o subespaço vetorial tangente a E. Isto é, E é o subespaço afim de $\mathcal{L}(G)$ formado por todos os elementos do tipo $a_1X_1+\ldots+a_kX_k$ com $X_i \in R$ e $a_1+\ldots+a_k = 1$ e F é o subespaço vetorial $E - X_o$ para algum $X_o \in E$. F é formado por todos os elementos da forma $a_1X_1+\ldots+a_kX_k$ com $X_i \in R$ e $a_1+\ldots+a_k = 0$.

Se $F_o = [R,R]$ denota a subálgebra de $\mathcal{L}(G)$ gerada por $\{[X,Y] \in \mathcal{L}(G) \,/\, X,Y \in R\}$, seja $\mathcal{L}_o$ definido por

$$\mathcal{L}_o = F + F_o \quad .$$

Então $\mathcal{L}_o$ é um ideal de $\mathcal{L}(G)$ de codimensão 0 ou 1 em $\mathcal{L}(G)$. De fato, verifica-se facilmente que $\mathcal{L}_o$ é um ideal de $\mathcal{L}(G)$ e se $X \in R \cap \mathcal{L}_o$ então $Y \in R$ é tal que

$$Y = X + (Y - X) \in \mathcal{L}_o$$

isto é, $R \subset \mathcal{L}_o$ e como $\mathcal{L}_o$ é ideal, $\mathcal{L}_o = \mathcal{L}(G)$. E se $R \cap \mathcal{L}_o = \emptyset$ então $R \subset \mathcal{L}_o + \{\lambda X \in \mathcal{L}(G) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ para qualquer $X \in R$ pois $R \subset F_o + \{\lambda X \in \mathcal{L}(G) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}$, e portanto $\mathcal{L}_o$ é de codimensão 1 em $\mathcal{L}(G)$. É claro, que todo gerador afim de E também é gerador de $\mathcal{L}(G)$.

A partir do ideal $\mathcal{L}_o$ pode-se construir a distribuição (de Frobenius) $D : x \in G \to dL(x)_e(\mathcal{L}_o)$. D é integrável e suas variedades integrais maximais são as classes laterais do subgrupo normal G_o que é a única variedade integral maximal de D que passa pela origem de G. A álgebra de Lie de G_o é $\mathcal{L}_o$. As classes laterais de G_o são difeomorfas a G_o pelas translações à esquerda (ou à direita pois G_o é normal) de G. Os conjuntos de acessibilidade $A_R(t)$ serão localizados nas classes laterais de G_o.

Antes porém, consideremos o subespaço afim E_o, de codimensão 0 ou 1, obtido por translação de $\mathcal{L}_o$ por um elemento qualquer de R (ou E). $E \subset E_o$ e o subespaço tangente a E_o é $\mathcal{L}_o$.

Para cada $T \geq 0$, o conjunto $\Omega(E_o, [0,T])$ é uma subvariedade afim fechada de $L^1([0,T],\mathcal{L}(G))$ cujo espaço tangente é o subespaço fechado $\Omega(\mathcal{L}_o, [0,T])$. Este subespaço é complementável em $L^1([0,T],\mathcal{L}(G))$ por $\Omega(\bar{\mathcal{L}}_o, [0,T])$, onde $\bar{\mathcal{L}}_o$ é um complementar de $\mathcal{L}_o$ em $\mathcal{L}(G)$. Portanto, $\Omega(E_o, [0,T])$ admite uma estrutura de variedade diferenciável de Banach que o torna subvariedade de $L^1([0,T],\mathcal{L}(G))$. O seu subespaço tangente é canonicamente identificado com $\Omega(\mathcal{L}_o, [0,T])$ (c.f. [12]). As mesmas observações cabem a $\Omega(E, [0,T])$ com espaço tangente a $\Omega(F, [0,T])$.

Nestas condições temos o lema seguinte:

3.2.6 LEMA: Se $T > 0$, existe uma classe lateral de G_o, denotada por G_o^T, tal que $\pi(\Omega(\mathcal{L}_o, [0,T])) \subset G_o^T$. Além do mais, $\pi_{E_o} = \pi|_{E_o} : \Omega(E_o, [0,T]) \to G_o^T$ é diferenciável quando a G_o^T se dá a estrutura de subvariedade (imersa) de G. Tem-se também, que se $\alpha \in \Omega(E_o, [0,T])$ então

$$(3.2.6.1) \qquad d\left(\pi_{E_o}\right)_\alpha (\beta) = dL(\pi(\alpha))_e \int_o^T \theta_\alpha(\beta)(s)ds \in T_{\pi(\alpha)} G_o^T$$

para todo $\beta \in \Omega(\mathcal{L}_o, [0,T])$.

DEMONSTRAÇÃO: Fixando-se $\alpha \in \Omega(E_o, [0,T])$, podemos escrever

$$\pi_{E_o}(\beta) = \pi(\alpha + \beta - \alpha) = L(\pi(\alpha)) \circ \pi \circ \theta_\alpha(\beta - \alpha)$$

para qualquer $\beta \in \Omega(E_o, [0,T])$. As duas primeiras partes do lema seguem então do fato de que π se restringe a subgrupos e que $L(\pi(\alpha)) : G_o \to G_o^T$ é difeomorfismo. A última parte segue da expressão da diferencial para π . □

Consequentemente, π_{E_o} é contínua.

3.2.7 COROLÁRIO: Com as notações acima, $A_R(T) \subset G_o^T$.

DEMONSTRAÇÃO: $A_R(T) \subset \pi_{E_o}(\Omega(E_o, [0,T]))$. □

Este corolário é a localização de $A_R(T)$ que anunciamos. De fato, para estes conjuntos de acessibilidade temos também um equivalente do teorema de Krener-Lobry (c.f. [17]).

3.2.8 TEOREMA: Na topologia de G_o^T , tem-se que int $A_R(T)$ é denso em $A_R(T)$, se $T > 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\beta_o \in \Omega(R, [0,T])$ controle admissível , $x_o = \pi(\beta_o)$ e V um aberto de G_o^T que contém x_o . Pela continuidade de π_{E_o} , existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\|\gamma - \beta_o\|_1 < \varepsilon$ e $\gamma \in \Omega(E_o, [0,T])$ então $\pi_{E_o}(\gamma) \in V$.

Tomemos $S = \{X_1,\ldots,X_k\} \subset R$ que ainda seja gerador afim de E e portanto gerador de $\mathcal{L}(G)$.

Podemos escolher t_o suficientemente pequeno tal que se $\alpha(s) \in S$ para $s \in [0,t_o]$ então $\int_o^{t_o} \|\alpha(s)-\beta(s)\| ds < \varepsilon$. E portanto, se γ é tal que $\gamma(s) \in S$ para $s \in [0,t_o)$ e $\gamma(s) = \beta_o(s)$ para $s > t_o$ então $\|\gamma-\beta_o\|_1 < \varepsilon$ e daí que $\pi_E(\gamma) \in V$. Se mostrarmos que o conjunto dos pontos acessíveis por controles do tipo de γ contém um aberto, o teorema estará demonstrado , pois teremos mostrado que x_o é limite de pontos interiores (relativos a G_o^T) de $A_R(T)$.

Porém, para γ como acima temos que

$$\prod_o^T \exp \gamma(s)ds = \left(\prod_{t_o}^T \exp \beta_o(s)ds\right) \left(\prod_o^{t_o} \exp \gamma(s)ds\right) .$$

E como $L\left(\prod_{t_o}^T \exp \beta(s)ds\right)$ é um isomorfismo ente $G_o^{t_o}$ e G_o^T, é suficiente mostrar que o conjunto dos pontos acessíveis por S em tempo t_o contém um aberto de $G_o^{t_o}$.

No entanto, se $\alpha \in \Omega(S,[0,t_o])$ e $X \in S$,

$$\prod_o^{t_o} \exp \alpha(s)ds = \prod_o^{t_o} \exp (\alpha(s) - X+X)ds =$$

$$= (\exp (t_oX)) \prod_o^{t_o} \exp \mathrm{Ad}(e^{-sX})(\alpha(s)-X)ds$$

e como $L(\exp (t_oX))$ é um isomorfismo entre G_o e $G_o^{t_o}$, o resultado segue do lema abaixo. $\square$

3.2.9 LEMA: Usando as mesmas notações que no teorema, o sistema de controle

$$\dot{x} = dR(x)_e(Ad(e^{-tX})(u(t))) ; \quad u(t) \in S-X \subset \mathcal{L}_o$$

em G_o é tal que se $t_o > 0$ então $\operatorname{int} A(t_o) \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO: Antes de mais nada, observemos que para este sistema de controle $A(t_o) = A[0,t_o]$ uma vez que $0 \in S-X$.

Por outro lado, se $\{Y_1,\dots,Y_m\} \subset S$ e $t_1,\dots,t_m$ são reais positivos tais que $t_1+\dots+t_m \leq t_o$ então

$$\prod_{i=1}^{m} \exp(-t_i X) \exp(t_i Y_i) \in A(t_o) .$$

De fato, seja α o controle admissível constante por pedaços igual a Y_1-X em $[0,t_1)$, Y_2-X em $[t_1, t_1+t_2)$ etc... e 0 em $[t_1+\dots+t_m,\infty)$. Como

$$\prod_{t_1+\dots+t_{i-1}}^{t_1+\dots+t_i} \exp Ad(e^{-sX})(Y_i-X)ds = \exp(-t_iX)\exp(t_iY_i)$$

é claro que

$$\prod_{o}^{t_o} \exp Ad(e^{-sX})(Y_i-X)ds = \prod_{i=1}^{m} e^{-t_iX} e^{t_iY_i} \in A(t_o) .$$

Isto posto, provaremos, com uma técnica parecida com a da demonstração do teorema 3.2.3 que o conjunto dos pontos do tipo $\prod_{i=1}^{m} \exp(-t_iX)\exp(t_iY_i)$ cobre um aberto de G_o .

Seja $m = \dim \mathcal{L}_o = \dim G_o$. Se $m > 0$, S contém $Y_1 \neq X$ e portanto

$$\begin{aligned} \xi_1 : \mathbb{R} &\to G_o \\ t &\to \xi_1(t) = e^{-tX} e^{tY_1} \end{aligned}$$

é de posto 1 num intervalo do tipo $(0,\tau)$ com $\tau < t_o/m$, já que $\xi_1'(t) = dR(\xi_1(t))_e\ (Ad(\exp(-tX))(Y_1)-X)$, isto é, $\xi_1'(0) = Y_1 - X$. Se $m = 1$, nossa demonstração está concluída.

Se $m > 1$, para cada $Y \in S$ defina

$$\begin{aligned} \xi_2^Y : \mathbb{R}^2 &\to G_o \\ (s,t) &\to \xi_2^Y(s,t) = e^{-sX} e^{sY} e^{-tX} e^{tY} . \end{aligned}$$

Mostremos que para algum $Y \in S$, tem-se que posto $(\xi_2^Y) = 2$ em algum aberto de $(0,t_o/m) \times (0,\tau)$.

De fato, suponha que $\forall Y \in S$ e $\forall (s,t) \in (0,t_o/m)\times(0,\tau)$ se tenha posto $(\xi_2^Y)(s,t) < 2$. Então, como ξ_2^Y é *analítica* , posto $(\xi_2^Y)(s,t) < 2$ para $(s,t) \in (-t_o/n,\ t_o/n) \times (0,\tau)$. Seja $\bar{t} \in (0,\tau)$, então se $Y \in S$, posto $(\xi_2^Y)(0,\bar{t}) = 1$ e portanto para cada $Y \in S$ existe um aberto $W_1^Y \subset (-t_o/m,\ t_o/m) \times (0,\tau)$ tal que ξ_2^Y é uma subimersão em W_1^Y e $\xi_2^Y(W_1^Y)$ é subvariedade de dimensão 1 de G_o. Porém, $M^Y = \xi_2^Y(W_1^Y \cap (\{0\} \times \mathbb{R}))$ é uma subvariedade de dimensão 1 e portanto $W_2^Y = (\xi_2^Y)^{-1}(M_2^Y)$ é um aberto de W_1^Y que contém $(0,\bar{t})$.

Seja $W = \bigcap_{Y \in S} W_2^Y$, então W é um aberto de $(-t_o/m,\ t_o/m) \times (0,\tau)$ que contém $(0,\bar{t})$ e sua imagem por

ξ_2^Y está contida na subvariedade $\xi_1((0,\tau))$ de dimensão 1 de G_o. Seja $\delta > 0$ tal que $(s,\bar{t}) \in W$ para $|s| < \delta$.

Um cálculo simples mostra que

$$\frac{\partial}{\partial s} \xi_2^Y (s,\bar{t}) = dR(\xi_2^Y(s,\bar{t}))_e \ (Ad(e^{-sX})(Y)-X) \ ,$$

e portanto os campos (invariantes à direita) $(Ad(exp(-sX)(Y)-X))^{\sim}$ são tangentes a uma subvariedade de dimensão 1 se $Y \in S$ e $|s| < \delta$. Em particular, os campos $(Y-X)^{\sim}$ e portanto os campos invariantes à direita gerados por $[Y-X, \bar{Y}-X] = [Y,\bar{Y}]-[Y,X]-[X,Y]$ para cada Y, $\bar{Y} \in S$, são também tangentes à subvariedade. No entanto,

$$[X,Y] = \frac{d}{ds} (Ad(exp\ (-sX))(Y)-X)$$

e daí que os campos $[X,Y]^{\sim}$ também o são à subvariedade de dimensão 1. Consequentemente, são tangentes os campos $(Y-X)^{\sim}$ e $[Y,\bar{Y}]^{\sim}$ com $Y,\bar{Y} \in S$, o que contradiz a hipótese de que $m > 1$.

Continuando este processo a dimensões maiores, mostra-se o lema. □

Por fim, vejamos uma condição suficiente para que $x \in G$ seja interior a um dos conjuntos de acessibilidade.

3.2.10 TEOREMA: Suponha que R é subespaço afim de $\mathcal{L}(G)$, isto é, que $R = E$ e sejam $x_o \in A(T)$ e $\alpha_o \in \Omega(E,[0,T])$ tal que $\pi_{E_o}^T(\alpha_o) = x_o$. Para que x_o seja interior a $A(T)$ relativo à topologia de G_o^T é suficiente que o sistema de controle linear

$$(3.2.10.1) \qquad \dot{x} = \mathrm{ad}(\alpha_o(t))x + u(t) \ ; \quad u(t) \in F$$

em $\mathcal{L}_o$ seja controlável em tempo T a partir da origem de $\mathcal{L}_o$.

OBSERVAÇÃO: Como $\mathcal{L}_o$ é um ideal, $\mathrm{ad}(\alpha(t))(\mathcal{L}_o) \subset \mathcal{L}_o$, isto é, $\mathrm{ad}(\alpha(t))$ se restringe a $\mathcal{L}_o$ para cada t.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\pi_E = \pi_{E_o}\Big|_{\Omega(E,[0,T])}$. É suficiente mostrar que $\mathrm{im}\, d\left(\pi_E\right)_{\alpha_o} = T_{x_o} G_o^T$, pois nestas condições $x_o \in \mathrm{int}(\mathrm{im}\, \pi_E)$. Porém,

$$d\left(\pi_E\right)_{\alpha_o}(\beta) = dL(\pi(\alpha_o))_e \cdot \int_o^T \mathrm{Ad}(g(s)^{-1})(\beta(s))ds$$

com $\beta \in \Omega(F,[0,T])$ e onde $g(s) = \prod_o^s \exp \alpha_o(\sigma)d\sigma$. Por outro lado, o conjunto dos pontos acessíveis em tempo T a partir da origem para o sistema (3.2.10.1) é dado por

$$\mathrm{Ad}(g(T)) \int_o^T \mathrm{Ad}(g(s)^{-1})(u(s))ds \ , \quad u(s) \in F \ ,$$

já que $\mathrm{Ad}(g(s)^{-1}) = (\prod_o^s \exp \mathrm{ad}\ (\alpha(\sigma))d\sigma)^{-1} \in \mathrm{Gl}(\mathcal{L}(G))$. É claro então, que se (3.2.10.1) é controlável em tempo T então $d(\pi_E^T)_{\alpha_o}$ é sobrejetora, mostrando o teorema. □

A condição deste teorema também é uma condição suficiente para que um ponto de G seja interior ao conjunto de acessibilidade. Antes de mostrarmos isto, provemos o seguinte lema da teoria do controle linear.

3.2.11 LEMA: Se (3.2.10.1) é controlável em tempo $T > 0$ a par tir da origem, então é controlável em tempo $T-s$ se $0 < s < \delta$ para algum $\delta < T$.

DEMONSTRAÇÃO: Denote por $\mathcal{A}'(t)$ o correspondente conjunto de acessibilidade para (3.2.10.1). Não é difícil ver que $\mathcal{A}'(t)$ é convexo em $\mathcal{L}_o$ e que se $t_1 < t_2$ então $\mathcal{A}'(t_1) \subset \mathcal{A}'(t_2)$ e portanto, $\mathcal{A}'[0,t] = \mathcal{A}'(t)$.

Como $\mathcal{A}'(t)$ é convexo e $0 \in \mathcal{A}'(t)$, existe um subespaço $E(t)$ de dimensão mínima que contém $\mathcal{A}'(t)$. Se r é a maior das dimensões de $E(t)$ para $0 \leq t < T$ e $t_o \in [0,T)$ é tal que $\dim E(t_o) = r$ então $E(t) = E(t_o)$ para $t \geq t_o$.

Se para nenhum $t < T$, (3.2.10.1) é controlável, então $r < \dim \mathcal{L}_o$ e $\mathcal{A}'(t)$ está contido em um subespaço próprio de $\mathcal{L}_o$ para todo $t < T$ e portanto, o sistema não pode ser controlável em tempo T. Daí, que para $t_1 < T$ o sistema é controlável e portanto para todo $t \geq t_1$. □

3.2.12 **TEOREMA:** Com as condições e as notações do teorema 3.2.10, x_o é interior (na topologia de G) ao conjunto $\mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO: Admita que para qualquer $X \in \mathcal{R}$ existe $t_o > 0$, $t_o < T$ tal que $y_o = (\exp(-t_oX))x_o$ é interior (relativo a $G_o^{T-t_o}$) a $\mathcal{A}(T-t_o)$ (mostraremos abaixo a existência deste t_o) e defina

$$\phi : \mathbb{R} \times G_o^{T-t_o} \to G$$

$$(t,y) \to \phi(t,y) = \exp(tX)y .$$

Desde que $G_o^{T-t_o}$ é uma subvariedade (imersa) de G, ϕ é uma aplicação diferenciável. Além do mais, $\phi(t_o,y_o) = \exp(t_oX)\exp(-t_oX)x_o = x_o$. Por outro lado, se $t \in \mathbb{R}$ e $Y \in T_{y_o} G_o^{T-t_o}$, não é difícil ver que, se identificarmos $T_{y_o} G_o^{T-t_o}$ a um subespaço de $T_{y_o} G$ então

$$(*) \quad d\phi_{(t_o,y_o)}(t,Y) = dL(e^{t_oX})_e(Y) + dR(y_o)_{e^{t_oX}} \circ dR(e^{t_oX})(tX)$$

$$= dR(x_o)(Ad(x_o)(\bar{Y}) + tX)$$

onde $\bar{Y} = dL(y_o^{-1})_{y_o}(Y) \in T_eG$.

Por (*) e pela definição de $\mathcal{L}_o$, vê-se que ϕ é uma submersão em (t_o,y_o) . Existem portanto $\delta > 0$, $\delta < t_o$ e V aberto de $G_o^{T-t_o}$ tal que $y_o \in V \subset A(T-t_o)$ e ϕ é submersão em $(t_o-\delta,\ t_o+\delta) \times V$. E daí, que $\phi((t_o-\delta,\ t_o+\delta) \times V)$ é um aberto de G que contém x_o e como é claro que $\phi((t_o-\delta,\ t_o+\delta) \times V) \subset A$ se $\delta < t_o$, temos que $x_o \in \mathrm{int}\, A$.

Mostremos agora a existência de t_o .

Para isto, observemos que para todo α integrável com $\alpha(t) \in R = E$ e para todo $t > 0$, $(\prod_0^t \exp \alpha(s)ds)^{-1}$ está em uma única classe lateral $'G_o^t$ de G_o . Isto é devido ao fato de que $\prod_0^t \exp \alpha(s)ds \in G_o^t$ e G_o é um subgrupo normal de G . No entanto, temos mais, a aplicação $\alpha \in \Omega(E,[0,t]) \to (\prod_0^t \exp \alpha(s)ds)^{-1} \in {'G_o^t}$ é contínua. De fato, consideremos o grupo de Lie G^*, dual de G, isto é, G^* é a mesma variedade diferenciável que G, só que o produto em G^* é dado por $(x,y) \to yx$. Então a inversão $j : G \to G^*$, $j(x) = x^{-1}$, é um isomorfismo entre G e G^* e $dj_e = -id_{T_eG}$. G_o também é subgrupo de Lie normal de G^* e suas classes laterais em G^* coincidem com suas classes laterais em G. Agora, a continuidade enunciada acima é clara, uma vez que

$$\left(\prod_0^t \exp \alpha(s)ds\right)^{-1} = j\left(\prod_0^t \exp \alpha(s)ds\right) = \prod_0^t \exp(-\alpha(s))ds$$

onde a última integral multiplicativa é tomada em G^*.

Pelo lema anterior, existe $t_1 > 0$, $t_1 < T$ tal que (3.2.10.1) é controlável em tempo $T-t_1$, e portanto $\prod_0^{T-t_1} \exp \alpha_o(s)ds$ é interior (relativo a $G_o^{T-t_1}$) de $A(T-t_1)$.

Consideremos a aplicação $\psi : [T-t_1,T] \to \Omega(E,[T-t_1,T])$ tal que

$$\psi(t)(s) = \begin{cases} \alpha_o(s) & \text{se} \quad T-t_1 \leq s < t \\ X & \text{se} \quad t \leq s \leq T \end{cases}.$$

Por um argumento semelhante ao utilizado na demonstração de 2.2.11, pode-se mostrar que ψ é uma curva contínua em $\Omega(E,[T-t_1,T])$, e portanto pelos argumentos acima (depois de uma mudança de variáveis na integral multiplicativa) a aplicação

$$t \to \prod_{T-t_1}^{T} \exp \psi(t)(s)ds\,, \quad t \in [T-t_1,T]$$

assume valores em uma única classe lateral de G_o e é contínua como função de t na topologia desta classe lateral.

Isto posto, a curva

$$g : [T-t_1, T] \to G$$

$$t \to g(t) = \left(\prod_{T-t_1}^{T} \exp \psi(t)(s)ds\right)^{-1} x_o$$

assume valores em $G_o^{T-t_1}$ e é contínua na topologia de $G_o^{T-t_1}$, uma vez que

$$g(T) = \left(\prod_{T-t_1}^{T} \exp \alpha_o(s)ds\right)^{-1} \left(\prod_{o}^{T} \exp \alpha_o(s)ds\right)$$

$$= \prod_{o}^{T-t_1} \exp \alpha_o(s)ds .$$

Existe então $t_o > 0$, $t_o < t_1$ tal que $g(T-t_o)$ é interior a $A(T-t_1)$. Assim, tomamos $y_o = \left(\prod_{T-t_1}^{T-t_o} \exp \alpha_o(s)ds\right) g(T-t_o)$. Então y_o pertence ao interior relativo de $A(T-t_o)$, já que $L\left(\prod_{T-t_1}^{T-t_o} \exp \alpha_o(s)ds\right)$ é um difeomorfismo entre $G_o^{T-t_1}$ e $G_o^{T-t_o}$ e $g(T-t_o)$ é interior a $A(T-t_1)$. E também,

$$e^{t_oX} y_o = e^{t_oX} \left(\prod_{T-t_1}^{T-t_o} \exp \alpha_o(s)ds\right) g(T-t_o) =$$

$$= e^{t_oX} \left(\prod_{T-t_1}^{T-t_o} \exp \alpha_o(s)ds\right) \left(\prod_{T-t_1}^{T-t_o} \alpha_o(s)ds\right)^{-1} e^{-t_oX} x_o$$

$$= x_o$$

concluindo a demonstração do teorema. □

A condição prévia dos teoremas 3.2.10 e 3.2.12 de que R é uma subvariedade afim é satisfeita pelos sistemas invariantes à direita autônomos que são lineares, isto é, dados por

$A : \mathbb{R}^q \to \mathcal{L}(G)$ tal que $A(u) = X_o + \sum_{k=1}^{q} u_k X_k$ com $X_o, \ldots, X_q$ em $\mathcal{L}(G)$ e $u = (u_1, \ldots, u_q)$. Estes são os sistemas tratados em [10] e [11].

Não é difícil ver que a condição de controlabilidade de (3.2.10.1) não é uma condição necessária para que x_o seja interior a A. No próximo parágrafo, veremos através de um exemplo que esta condição não é realmente necessária.

3.3 CONTROLABILIDADE

Veremos neste parágrafo algumas condições para que um sistema invariante à direita $R \subset \mathcal{L}(G)$ seja controlável a partir da identidade e de G, isto é, que $A_R = G$.

A controlabilidade de um sistema de controle $R \subset \mathcal{L}(G)$ depende de dois fatores. Por um lado, podemos garantir a controlabilidade de R em função de suas propriedades algébricas e geométricas como subconjunto de $\mathcal{L}(G)$. Por outro lado, a controlabilidade de R depende, e aparentemente de maneira essencial, das características geométricas do grupo G. Compare por exemplo, o sistema $R = \{1\} \subset \mathbb{R}$ quando $\mathbb{R}$ é visto, em primeiro lugar, como a álgebra de Lie do grupo aditivo dos reais e posteriormente do grupo S^1 (o círculo). No primeiro caso, R não é controlável e no segundo, temos a controlabilidade de R devido à "periodicidade" de S^1.

Apresentaremos aqui apenas algumas condições gerais de controlabilidade, de sistemas invariantes. Estas condições não se aproveitam de um conhecimento mais detalhado da estrutura do grupo de Lie em questão. Resultados mais finos, que fornecem condições mais manipuláveis para a classe dos sistemas invariantes lineares, podem ser encontrados nos recentes trabalhos de I.Kupka e V.Jurdjevic (veja [11]) .

Vamos supor neste parágrafo que G é conexo e que R gera a álgebra de Lie $\mathcal{L}(G)$.

Na seção anterior mostramos que o conjunto dos pontos acessíveis A_R é um semi-grupo. No entanto, se um semi-grupo de um grupo G contém uma vizinhança da identidade e , este semi-grupo é todo G . Daí, que se $e \in \text{int}\, A_R$ então R é controlável. Consequentemente,

3.3.1 PROPOSIÇÃO: R é controlável se e só se A_R é um subgrupo (algébrico) de G .

DEMONSTRAÇÃO: De fato, por 3.2.3 existe um aberto de G , $V \subset A_R$. Se $x \in V$ então, como A_R é um subgrupo, $x^{-1}V \subset A_R$. Porém, $x^{-1}V \in V(e)$, isto é, A_R contém uma vizinhança de e e portanto R é controlável. Se R é controlável, $A_R = G$. □

Da mesma forma,

3.3.2 PROPOSIÇÃO: R é controlável se e só se A_R é denso em G.

DEMONSTRAÇÃO: Se R é controlável, é claro que A_R é denso em G . Por outro lado, seja V aberto de G tal que $V \subset A_R$. Então, V^{-1} é aberto de G e portanto $V^{-1} \cap A_R \neq \emptyset$. Seja $x \in V^{-1} \cap A_R$, então $e \in Vx$, Vx é aberto e como A_R é um semi-grupo, $Vx \subset A_R$. E portanto, R é controlável. □

Se o grupo G além de conexo é compacto, todo sistema de controle $\mathcal{R}$ que gera $\mathcal{L}(G)$ é controlável.

3.3.3 PROPOSIÇÃO: Se G é compacto, $\mathcal{R}$ é controlável.

DEMONSTRAÇÃO (c.f. [10]): Sejam V um aberto de G e $x \in V$ tal que $V \subset A_{\mathcal{R}}$. Considere a sequência $y_n = x^n$ em G. Como G é compacto, y_n admite uma subsequência y_{n_k} convergente com $n_k > n_{k-1}$ para todo k. Se $z_k = y_{n_k} y_{n_{k-1}}^{-1} = x^{n_k - n_{k-1}}$, então $\lim_{k\to\infty} z_k = e$, e portanto existe um inteiro k_o tal que $e \in z_{k_o}V$. Porém, desde que $n_{k_o} > n_{k_o-1}$, $z_{k_o} \in A_{\mathcal{R}}$ e como $A_{\mathcal{R}}$ é semi-grupo e $V \subset A_{\mathcal{R}}$, $z_{k_o}V \subset A_{\mathcal{R}}$. Mas $z_{k_o}V$ é aberto e $e \in z_{k_o}V$, de onde se conclui que $\mathcal{R}$ é controlável. □

Para finalizar, vamos indicar de que forma 3.2.12 pode ser utilizado para se obter condições suficientes de controlabilidade para um sistema de controle $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}(G)$.

Suponha que $\mathcal{R}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(G)$. Utilizando 3.2.12, mostremos que $\mathcal{R}$ é controlável (c.f. [10], teo. 5.1).

3.3.4 LEMA: Suponha que $\mathcal{R} = E = F$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(G)$. Então existe uma sequência finita $X_1,\dots,X_m$ de F tal que se $\alpha = \{X_1,\dots,X_m;\ 0,1,\dots,m\}$ em $[0,m]$ e $\alpha(t) = 0$ se $t > m$ então (3.2.10.1) é controlável a partir da origem de $\mathcal{L}_o$ em tempo m.

DEMONSTRAÇÃO: Vamos construir esta sequência por indução.

Seja $X_1 \in F$ tal que $X_1 \neq 0$ e $\alpha_1 : [0,\infty) \to \mathcal{L}(G)$ tal que $\alpha_1(t) = X_1$ se $t \in [0,1]$ e $\alpha_1(t) = 0$ caso contrário.

Não é difícil ver que o conjunto $A_1(1)$ dos pontos acessíveis em tempo 1 a partir da origem por (3.2.10.1) com $\alpha = \alpha_1$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}_o$ (veja a fórmula da variação das constantes). Temos que $F \subset A_1(1)$. De fato, desde que $0 \in R = F$, se $t < 1$ então $A_1(t) \subset A_1(1)$. Tome um controle constante $u(t) = u_o \in F$. A única solução de (3.2.10.1) com $\alpha = \alpha_1$ relativa a este controle que para $t = 0$ vale 0 é continuamente diferenciável em $[0,1]$, está contida em $A_1(1)$ e sua derivada na origem é u_o. Consequentemente, $u_o \in A_1(1)$ e $F \subset A_1(1)$.

Se $A_1(1) = \mathcal{L}_o$, não há mais o que mostrar. Suponha então que $A_1(1) \neq \mathcal{L}_o$ e mostremos que existe $X_2 \in F$ tal que se $\alpha_2 = \{X_1, X_2;\ 0,1,2\}$ em $[0,2]$ e $\alpha_2(t) = 0$ para $t > 2$ então $A_2(2) \neq A_2(1) = A_1(1)$, onde A_2 representa o conjunto de acessibilidade correspondente a α_2.

Se para todo $X_2 \in F$ $A_2(2) = A_1(1)$ então para qualquer $X \in A_2(1) = A_1(1)$, $\mathrm{ad}(X_2)(X) + u \in A_1(1)$ para todo $u \in F$. E como $F \subset A_1(1)$, $\mathrm{ad}(X_2)(X) \in A_1(1)$, isto é, $[X_2, X] \in A_1(1)$ o que não é possível em virtude da definição de $\mathcal{L}_o$.

Como $F \subset A_1(1) \subset A_2(2)$, podemos continuar este processo até construir a sequência desejada. □

Agora podemos mostrar o

3.3.5 TEOREMA: Se R é um subespaço vetorial (R gera $\mathcal{L}(G)$ e G é conexo), então R é controlável.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $X_1, \ldots, X_m$ como no lema e tome

$$\alpha = \{X_1, -X_1, X_2, -X_2, \ldots, X_m, -X_m; 0,1,\ldots,2m\}$$

em $[0,2m]$ e $\alpha(t) = 0$ se $t > 2m$, como controle admissível. Pelo lema, o sistema (3.2.10.1) com esta α é controlável em tempo 2T. De fato, já é controlável se tomarmos apenas os controles u que são nulos nos intervalos do tipo $(2k-1, 2k)$, $k = 1,\ldots,m$ (veja a fórmula da variação das constantes correspondente a estes controles). Por outro lado,

$$\prod_{o}^{2T} \exp \alpha(s)ds = e^{-X_m} e^{X_m} \ldots e^{-X_1} e^{X_1} = e$$

e portanto $e \in \operatorname{int} A$ e daí que R é controlável. $\square$

3.3.6 **EXEMPLO:** Em $Gl(4)$ tome $R \subset M_4$ como sendo o subespaço gerado por

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de dimensão 3. Desde que $[X_2,X_3] + X_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, R gera $\mathcal{L}(G) = M_4$. E pelo teorema anterior, este sistema é controlável. No entanto, se tomarmos $\alpha(t) = 0$, o sistema (3.2.10.1) não é controlável já que o conjunto dos pontos acessíveis por este sistema linear é $F = R$ e neste caso $\mathcal{L}_o = \mathcal{L}(G) = M_4$.

REFERÊNCIAS

[1] BOULOS, P.: "Integral Multiplicativa e Cinemática em Grupos de Lie". Tese Livre-Docência. USP-SP. (1979).

[2] BACCIOTTI, A.; BIANCHINI; STEFANI; ZECCA: "Multivalued Fields and Families of Vector Fields: Two APPROACHES to Nonlinear CONTROLABILITY". Rapporto 5. Universitá di Firenze (1980).

[3] DIEUDONNÉ, J.: "Élements D'Analyse". Vols. 1,2,3,4.

[4] DOLLARD, J.D. e FRIEDMAN, C.N.: "Product Integration with Applications to Differential Equations". Addison-Wesley, (1979).

[5] FILIPPOV, A.F.: "On Certain Questions in the theory of Optimal Control". SIAM on Control. Vol. 1 nº 1 (1962).

[6] HALMOS, P.: "Measure Theory". Springer-Verlag (1974).

[7] HAMILTON, J.F.: "Multiplicative Riemann Integration and Logarithmic Differenciation in Lie Algebras and Lie Groups". Tese Ph.D. Indiana University (1973).

[8] HELGASON, S.: "Differential Geometry and Symmetric Spaces". Academic Press (1963).

[9] HERMES, M. e LASALLE, J.P.: "Functional Analysis and Time Optimal Control". Academic Press (1969).

[10] JURDJEVIC, V. e SUSSMANN, M.: "Control Systems on Lie Groups".

Journal of Diff. Eq. 12, 313-329 (1972).

[11] JURDJEVIC, V. e KUPKA, I.: "Control Syst. Subordinated to a Group Action: Accessibility". J. Diff. Eq. 39, 186-211.

[12] LANG, S.: "Diff. Manifolds". Addison-Wesley.

[13] LEE, E.B. e MARKUS, L.: "Foundations of Optimal Control Theory". John Wiley (1968).

[14] PONTRYAGIN, BOLTYANSKII, GAMKRELIDZE e MISHCHENKO: "The Mathematical Theory of Optimal Processes". John Wiley (1962).

[15] RUDIN, W.: "Real and Complex Analysis".

[16] SUSSMANN, H.: "The Bang-Bang Problem for Certain Control Systems in $Gl(n,\mathbb{R})$". SIAM on Control. Vol. 10 nº 3. (1972).

[17] SUSSMANN, H. e JURDJEVIC, V.: "Controllability of Nonlinear Systems". J. Diff. Eq. 12, 95-116 (1972).