O ANEL DE VALORIZAÇÃO DE UM RETICULADO DISTRIBUTIVO

CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS

ORIENTADOR

PROF. DR. ROBERTO LEONARDO CIGNOLI

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este trabalho foi realizado com o auxílio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa no Estado de São Paulo (FAPESP).

A meus pais

A Lucila

AGRADEÇO

Ao prof. Roberto Leonardo Cignoli pela sugestão do tema, bem como por ter-me acompanhado durante a elaboração deste trabalho com sua orientação segura e extremamente dedicada.

Aos amigos, professores e demais funcionários, pelo apoio e incentivo, especialmente ao prof. Mário Tourasse que despertou em mim o interesse pelo estudo da Teoria dos Reticulados, a profa. Ayda Inês Arruda que leu os originais desta dissertação e orientou-me na redação da mesma, e a Iracema Gomes de Oliveira pelos serviços de datilografia.

À FAPESP, pela confiança em mim depositada e pelo apoio financeiro.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO . . . . (i)

CAPÍTULO I - VALORIZAÇÕES E ANÉIS DE VALORIZAÇÃO

1. Definições e exemplos 1
2. Anéis de Valorização 8
3. Valorizações e uma base para V(L) 14
4. Álgebras aumentadas 19

CAPÍTULO II - A ÁLGEBRA DE MÖBIUS

1. A função de Möbius - Definições e exemplos . 28
2. Definição de Álgebra de Möbius - Teorema de Davis 36
3. O Teorema de Greene 44

CAPÍTULO III - CÁLCULO DA FUNÇÃO DE MÖBIUS E UM TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO DE V(L, A)

1. Cálculo da função de Möbius 52
2. Uma Representação de V(L, A) 57
3. Aplicações do Teorema de Representação de Geissinger 64

CAPÍTULO IV - LINEARIZAÇÃO DE ÁLGEBRAS DE LUKASIEWICZ

1. Definições e propriedades principais 68
2. O anel de valorização de uma Álgebra de Lukasiewicz trivalente 71

BIBLIOGRAFIA 82

INTRODUÇÃO

É bem conhecida a equivalência entre as álgebras de Boole e os anéis comutativos com unidade de característica 2.

Recentemente, G. C. Rota obteve uma outra forma de associar um anel à uma álgebra de Boole. As vantagens do método de Rota são que o anel é sem torção (isto é, na=0 implica n=0 ou a=0), e que é aplicável ao importante domínio dos reticulados distributivos.

Basicamente, a idéia de Rota é representar todo reticulado distributivo L como subreticulado do reticulado Booleano dos idempotentes de um certo anel comutativo com unidade, sem torção e gerado por idempotentes. Este é chamado o anel de valorização do reticulado distributivo L, e é denotado por V(L). Notemos que V(L) não tem nenhuma vinculação com o conceito de anel de valorização estudado em Álgebra Comutativa.

Uma outra vantagem, talvez mais importante, da representação de Rota é que podemos considerar V(L) como um módulo, o que nos permite linearizar a teoria dos reticulados distributivos e álgebras de Boole.

Dividimos o nosso trabalho em quatro capítulos. No primeiro capítulo tentamos descrever o anel de valorização V(L). Damos a definição de V(L) e suas propriedades principais, construimos uma base para o módulo V(L), e estudamos u ma operação no anel de valorização análoga a complementação numa álgebra de Boole. O material contido neste capítulo é encontrado em [4] e [10]. Acreditamos, que foi possível obter uma exposição unificada, e mais clara que a encontrada nestes trabalhos; algumas das demonstrações apresentadas por nós são originais.

No capítulo II mostramos que os conceitos de álgebra de Möbius e anel de valorização, que foram criados idependentemente por Solomon e Rota respectivamente, se equivalem no caso finito. Usamos essa equivalência para provar certas propriedades que $V(L)$ possue. Conseguimos provar o bem conhecido teorema de representação de reticulados distributivos finitos, devido a Birkhoff, usando apenas a teoria dos anéis de valorização. Neste capítulo tentamos tornar mais claro e também, generalizar o material contido em [4] e [5].

No capítulo III damos uma fórmula para simplificar o cálculo da função de Möbius. Representam os $V(L)$ por funções características e usamos essa representação para provarmos certas propriedades interessantes de $V(L)$. O material contido neste capítulo é encontrado em [4] e [10].

No capítulo IV tentamos aplicar os métodos de Rota para estudar as álgebras de Lukasiewicz trivalentes. O operador de possibilidade ∇ e o de necessidade Δ passam a ser representados como operadores lineares e, seguindo as idéias contidas em [10], obtemos uma caracterização das extensões de Δ e

V. Tentamos também extender a negação e a implicação dadas na álgebra de Lukasiewicz, para o anel de valorização a ela associado. O material contido neste capítulo foi abordado pela primeira vez no presente trabalho.

Os resultados básicos da teoria dos reticulados que foram somente mencionados neste trabalho, são tratados de um modo mais detalhado e completo em [6].

CAPÍTULO I

VALORIZAÇÕES E ANÉIS DE VALORIZAÇÃO

Neste capítulo definiremos valorização e anel de valorização de um reticulado distributivo. Estudaremos neste anel uma propriedade análoga à operação de complementação numa álgebra de Boole. Construiremos uma base para o anel de valorização pensado como $\mathbb{Z}$-módulo e veremos alguns resultados básicos envolvendo valorizações.

1. DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

Daremos neste parágrafo as noções básicas de valorização e grupo de valorização e veremos que são satisfeitas algumas propriedades universais.

1.1. DEFINIÇÃO

Deja $(L, \vee, \wedge)$ um reticulado e $(G,+)$ um grupo abeliano. $\nu: L \longrightarrow G$ é dita uma valorização se
$\nu(a\vee b) + \nu(a\wedge b) = \nu(a) + \nu(b)$, $\forall a,b \in L$.

Como exemplos importantes de valorização podemos citar:

a) uma medida sob uma σ-álgebra

b) se considerarmos no reticulado dos subespaços vetoriais de um espaço vetorial de dimensão finita, a função que associa a cada subespaço a sua dimensão é uma valorização.

Vamos agora procurar definir grupo de valorização. Com esse propósito seja $(L, \vee, \wedge)$ um reticulado, $(\mathbb{Z},+,.)$ o anel dos inteiros e $f : L \longrightarrow \mathbb{Z}$ uma função. Chamamos de suppf ao conjunto dos pontos de L onde f não se anula, isto é, $\mathrm{supp}f = \{x \in L;\ f(x) \neq 0\}$. Consideremos $F(L) = \{f : L \longrightarrow \mathbb{Z};\ f$ é função e $\mathrm{supp}f < \infty\}$ e definamos a seguinte adição em $F(L)$:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, vemos fácilmente que $(F(L), +)$ é grupo abeliano.

Tomemos agora as funções da forma I_x, $x \in L$ definidas por: $I_x(y) = \delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y=x \\ 0 & \text{se } y \neq x \end{cases}$

Notamos que para cada $f \in (F(L), +)$ com $\mathrm{supp}f = \{x_1, \ldots, x_n\}$, se $f(x_i) = c_i \in \mathbb{Z}$ então $f = \sum_{i=1}^{n} c_i I_{x_i}$

Consideremos agora em $(F(L), +)$ o subgrupo $M(L)$ gerado pelos elementos da forma $I_{x \vee y} + I_{x \wedge y} - I_x - I_y$ com $x, y \in L$ (tal, subgrupo é normal pois $(F(L), +)$ é abeliano). Definamos neste ponto o conceito de grupo de valorização.

1.2. DEFINIÇÃO

Seja $V(L) = F(L)/_{M(L)}$ o grupo quociente de $(F(L), +)$

pelo subgrupo normal $M(L)$. $V(L)$ será chamado grupo de valorização do reticulado L. (Notamos que $V(L)$ pode ser pensado como um $\mathbb{Z}$- módulo de valorização).

Provaremos agora algumas propriedades universais que $V(L)$ possue.

1.3. PROPOSIÇÃO

A função $i : L \longrightarrow V(L)$ dada por $i(x)=I_x + M(L)$, é uma valorização universal sobre L, isto é, ela é valorização e toda valorização de L sobre um grupo abeliano $(G,+)$ se fatora unicamente como i seguido por um homomorfismo de grupos de $V(L)$ sobre G.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "\nu"] \arrow[dr, "i"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & G \\
& V(L) \arrow[ur, dashed, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração: i é valorização porque $i(x \vee y)+i(x \wedge y)=I_{x \vee y}+I_{x \wedge y} \equiv I_x+I_y$, pois $I_{x \vee y}+I_{x \wedge y}-I_x-I_y \in M(L)$, $\forall x, y \in L$; portanto em $V(L)$ $i(x \vee y) + i(x \wedge y) = i(x)+i(y)$.

Definimos o homomorfismo $\psi : V(L) \longrightarrow G$ por:

$$\psi\left(\Sigma_{i=1}^{n} c_i \, I_{x_i} + M(L)\right) = \Sigma_{i=1}^{n} c_i \nu(x_i).$$

ψ está bem definida pois se $f = g$ em $V(L)$ então $f-g \in M(L)$, isto é, $f-g = \Sigma_{i=1}^{n} c_i (I_{x_i \vee y_i} + I_{x_i \wedge y_i} - I_{x_i} - I_{y_i})$, então:

$\psi(f-g) = \Sigma_{i=1}^{n} c_i \nu(x_i \vee y_i) + \nu(x_i\ y_i) - \nu(x_i) - \nu(y_i) = 0$ (pois ν é valorização), então $\psi(f) = \psi(g)$

ψ é homomorfismo pois:

$$\psi\ [(\Sigma_i c_i\ I_{x_i} + M(L) + (\Sigma_i\ c'_i I_{x_i} + M(L))] = \psi[\ \Sigma_i (c_i + c'_i) I_{x_i} + M(L)] =$$

$$= \Sigma_i (c_i + c'_i) \nu(x_i) = \Sigma_i c_i \nu(x_i) + \Sigma_i c'_i \nu(x_i) = \psi(\ \Sigma_i c_i I_{x_i} + M(L)) +$$

$$+ \psi(\Sigma_i c'_i I_{x_i} + M(L)).$$

1.4. PROPOSIÇÃO

Um homomorfismo de reticulados $\phi: L_1 \longrightarrow L_2$ induz um único homomorfismo de grupos $\phi' : V(L_1) \longrightarrow V(L_2)$, tal que $\phi' . i_1 = i_2 . \phi$

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i_1"'] & L_2 \arrow[d, "i_2"] \\ V(L_1) \arrow[r, dashed, "\phi'"'] & V(L_2) \end{tikzcd}$$

Demonstração: Definimos $\phi' : V(L_1) \longrightarrow V(L_2)$ por:

$$\phi'(\Sigma_i c_i\ I_{x_i} + M(L_1)) = \Sigma_i\ c_i\ I_{\phi(x_i)} + M(L_2)$$

ϕ' está bem definida porque se $\Sigma_{i=1}^n c_i\ I_{t_i} + M(L_1) =$ $= \Sigma_{i=1}^n c_i'\ I_{t_i} + M(L_1)$, nós temos que $\Sigma_{i=1}^n (c_i - c_i')\ I_{t_i} \in M(L_1)$, isto é, $\Sigma_{i=1}^n (c_i - c_i')\ I_{t_i} = \Sigma_{i=1}^m c_j (I_{x_j \vee y_j} + I_{x_j \wedge y_j} - I_{x_j} - I_{y_j})$, $x_j, y_j \in L_1$

então temos:

$$\psi\ (\Sigma_i (c_i - c_i')\ I_{t_i} + M(L_1)) = \Sigma_j c_j (I_{\phi(x_j \vee y_j)} + I_{\phi(x_j \wedge y_j)} - I_{\phi(x_j)} - (I_{\phi(y_j)}) +$$

$$+ M(L_2) \xrightarrow[\text{hamo}]{\phi\ \text{é}} \Sigma_j\ c_j (I_{\phi(x_j) \vee \phi(y_j)} + I_{\phi(x_j) \wedge \phi(y_j)} - I_{\phi(x_j)} - I_{\phi(y_j)} +$$

$+ M(L_2) = M(L_2)$, portanto $\phi'(\Sigma_i c_i I_{t_i} + M(L_1)) = \phi'(\Sigma_i c_i' I_{t_i} + M(L_1))$, isto é, ϕ' está bem definida.

ϕ' é claramente um homomorfismo e ele é único, porque se existisse $\phi''\ V(L_1) \longrightarrow V(L_2)$ homomorfismo de grupos satisfazendo $\phi''.\ i_1 = i_2.\ \phi$, teríamos que:

$$\phi''(\Sigma_i c_i I_{x_i} + M(L_1)) = \Sigma_i c_i \phi''(I_{x_i} + M(L_1)) = \Sigma_i c_i \phi''.i_1(x_i) =$$

$$= \Sigma_i c_i i_2.\phi(x_i) = \Sigma_i c_i I_{\phi(x_i)} + M(L_2) = \phi'(\Sigma_i c_i I_{x_i} + M(L_1)).\,_{\shortparallel}$$

Observamos que $(V(L),+)$ é um grupo comutativo sem torção, isto é, se $nx=0$ com $n\in\mathbb{Z}$ e $x\in V(L)$, temos que $n = 0$ ou $x = 0$. Então se $\mathcal{L}$ é a categoria onde os objetos são os reticulados e os morfismos são os homomorfismos de reticulados e $\mathcal{G}$ é a categoria onde os objetos são grupos comutativos sem torção e os morfismos são os homomorfismos de grupos, tendo em mente a Proposição - I. 1.4., vemos que o grupo de valorização é um funtor covariante de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{G}$.

1.5. DEFINIÇÃO

Seja $(L, \vee, \wedge)$ um reticulado. Um subreticulado I de L é dito um ideal de L se $a\in I$ e $x\in L$ com $x\leq a$ isto implica $x\in I$. Dualmente, um subreticulado F de L é um filtro se $a\in F$ e $x\in L$ com $x\geq a$ implica que $x\in F$. Um filtro (ideal) é primo se: $F\neq L$ $(I\neq L)$ e se $a\vee b\in F$ $(a\wedge b\in I)$ acarretar que a ou $b\in F$ (a ou $b\in I$). Seja $[a)=\{x\in L;\ x\geq a\}$, $[a)$ é um filtro, dito filtro principal de L gerado por a; dualmente $(a]=\{x\in L;\ x\leq a\}$ será um ideal e o chamaremos de ideal principal de L gerado por a.

Provaremos agora um resultado que será muito útil posteriormente, pois nos habilitará provar a existência de uma base no $\mathbb{Z}$-módulo $V(L)$.

1.6. PROPOSIÇÃO

Seja F um filtro primo de L então $c_f\colon L \longrightarrow \mathbb{Z}$, a função característica de F, é uma valorização e cada elemento de $i(F)$ é linearmente independente dos elementos de $i(L-F)$. (Notamos que se trocamos o filtro por um ideal, a proposição, óbviamente, ainda vale).

<u>DEMONSTRAÇÃO:</u> $c_F : L \longrightarrow \mathbb{Z}$ é valorização pois:

(i) se $a, b \in F \Rightarrow a \vee b$ e $a \wedge b \in F \Rightarrow c_F(a \vee b) + c_F(a \wedge b) = 1 + 1 = c_F(a) + c_F(b)$

(ii) se $a \notin F$ e $b \in F$ então $a \vee b \in F$ pois $a \vee b \geq b$ e $b \in F$, vemos que $a \wedge b \notin F$, pois se $a \wedge b \in F \Rightarrow a \wedge b \leq a$ daí teríamos $a \in F$ o que é impossível, então temos: $c_F(a \vee b) + c_F(a \wedge b) = 1 + 0 = c_F(a) + c_F(b)$.

(iii) se $a \notin F$ e $b \notin F$ então $a \vee b \notin F$ pois F é primo, vemos também que $a \wedge b \notin F$ pois se $a \wedge b \in F$ como $a \geq a \wedge b$ então $a \in F$, absurdo , portanto $c_F(a \vee b) + c_F(a \wedge b) = 0 + 0 = c_F(a) + c_F(b)$.

Provaremos agora que os elementos de $i(F)$ e $i(L-F)$ são linearmente independentes. Se isto não fosse verdade, existiria $I_x \in i(F)$ e I_{y_i}, $i=1,\ldots,n$, $I_{y_i} \in i(L-F)$ tal que

$I_x = \Sigma_{i=1}^{n} c_i I_{y_i}$, então pela Proposição-I. 1.3. temos que:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "c_F"] \arrow[dr, "i"'] & & \mathbb{Z} \\ & V(L) \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

isto é, existe um homomorfismo $\psi : V(L) \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\psi . i = c_F$, então $\psi(I_x) = c_F(x) = 1$ (I); por outro lado temos que $\psi(I_x) =$ $= \psi(\Sigma_i c_i I_{y_i}) = \Sigma_i c_i c_F(y_i) = 0$ (II); portanto de (I) e (II) obtemos uma contradição, que surgiu de fato de supormos que os elementos de $i(F)$ e $i(L-F)$ não fossem linearmente independentes.▪

Finalmente nós notamos que se substituirmos $(\mathbb{Z},+,.)$ por um anel comutativo com indentidade arbitrário $(A,+,.;1)$, todos os resultados menos a Proposição-I. 1.3. permanecem válidos. Neste caso mais geral substituiremos as notações $F(L)$, $M(L)$ e $V(L)$ por $F(L,A)$, $M(L,A)$ e $V(L, A)$ respectivamente.

2. ANÉIS DE VALORIZAÇÃO

Neste parágrafo definiremos o conceito devido a Rota ([9]) de anel de valorização de um reticulado distributivo. A hipótese de distributividade é essencial para que $M(L)$ seja um ideal do anel de valorização.

Antes de iniciarmos a construção do anel de valorização, vejamos um interessante resultado.

2.1. PROPOSIÇÃO

Seja $i : L \longrightarrow V(L)$ dada por $i(x) = I_x + M(L)$. i é 1-1 se e somente se L é distributivo.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que i é 1-1. Por absurdo, se L não fosse distributivo saberíamos que ele conteria elementos distintos c, x, y com $c \wedge x = c \wedge y$ e $c \vee x = c \vee y$, então $i(x) = I_x + M(L) = I_y + M(L) = i(y)$ porque $I_y - I_x \in M(L)$, pois: $I_{c\wedge x} + I_{c\vee x} - I_c - I_x$, $I_{y\wedge c} + I_{y\vee c} - I_y - I_c \in M(L)$ como $M(L)$ é ideal nós temos que $(I_{c\wedge x} + I_{c\vee x} - I_c - I_x) + -(I_{y\wedge c} + I_{y\vee c} - I_c - I_y) = I_y - I_x \in M(L)$, portanto $i(x) = i(y)$ com $x \neq y$, absurdo, pois supuzemos inicialmente i injetora. Reciprocamente, se L é distributivo, por um bem conhecido teorema devido a Stone dados $x, y \in L$ existe um filtro primo F tal que $x \in F$ e $y \in L - F$, então pela Proposição-I. 1.6. $i(x)$ é linearmente independente de $i(y)$, em particular $i(x) \neq i(y)$, portanto i é 1-1.."

Pelo resultado acima, vemos que quando L é distributivo ele pode ser mergulhado em $V(L)$, por isso em muitos casos, quando não houver perigo de confusão, imaginaremos $L \subseteq V(L)$ indentificando x com $I_x + M(L)$.

Seja agora $(L, \vee, \wedge)$ um reticulado distributivo. Em $F(L)$ definimos o seguinte produto:

$$f \cdot_{\wedge} g = h \quad \text{onde se} \quad f = \Sigma_{i=1}^{n} c_i \, I_{x_i}, \; g = \Sigma_{i=1}^{n} c_i' \, I_{x_i}, c_i, c_i' \in \mathbb{Z},$$

definimos $h = \Sigma_{k=1}^{m} d_k \, I_{x_k}$ onde $d_k = \sum\limits_{x_i \wedge x_j = x_k} c_i . c_j'$. Vemos fácilmente que $(F(L), +, \cdot_{\wedge})$ é um anel comutativo sem torção.

Seja $(L^d, \cup, \cap)$ o reticulado distributivo dual de

$(L,\wedge,\vee)$ dado por $x\cap y=x\wedge y$, $x\cup y=x\vee y$, $\forall x, y\in L$. Denotaremos o anel comutativo sem torção $(F(L^d),+,\cdot_\wedge)$ por $(F(L),+,\cdot_\vee)$, pois observamos que ele equivale a usar na nossa definição de produto a operação "$\vee$" do reticulado distributivo L em vez da operação "$\wedge$". Daremos as definições e demonstrações para $(F(L),+,\cdot_\wedge)$, mas notamos que elas poderiam ser feitas de forma inteiramente análoga para $(F(L),+,\cdot_\vee)$.

Mostraremos agora que $M(L)$ é um ideal de $(F(L),+,\cdot_\wedge)$, e o anel quociente de $(F(L),+,\cdot_\wedge)$ por $M(L)$ será o anel de valorização do reticulado distributivo $(L, \vee, \wedge)$.

2.2. PROPOSIÇÃO

Se $(L, \vee, \wedge)$ é um reticulado distributivo então $M(L)$ é um ideal de $(F(L),+,\cdot_\wedge)$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Mostremos antes que $I_a \cdot_\wedge \pm(I_{x\vee y}+I_{x\wedge y}-I_x-I_y)\in M(L)$, $\forall x,y,a\in L$. $I_a\cdot_\wedge \pm(I_{x\vee y}+I_{x\wedge y} - I_x-I_y) = \pm (I_{a\wedge(x\vee y)}+ I_{a\wedge x\wedge y}-$

$- I_{a\wedge x} - I_{a\wedge y}) =$

$$\underset{\text{distrib.}}{\overset{L\ \text{é}}{=\!=}} \pm(I_{(a\wedge x)\vee(a\wedge y)}+I_{(a\wedge x)\wedge(a\wedge y)}-I_{a\wedge x}-I_{a\wedge y})\in M(L).$$

Seja agora $f = \Sigma_{i=1}^{n} c_i\, I_{x_i}\in F(L)$ e $a = \Sigma_{j=1}^{m} a_j \in M(L)$

onde $a_j = \pm (I_{x_j\vee y_j}+I_{x_j\wedge y_j}-I_{x_j}-I_{y_j})$, então temos:

$f\cdot_\Lambda a = \Sigma_i c_i I_{x_i} \cdot_\Lambda \Sigma_j a_j = c_1 I_{x_1} \cdot_\Lambda a_1 + \ldots + c_1 I_{x_n} \cdot_\Lambda a_m + \ldots +$

$+ c_n I_{x_n} \cdot_\Lambda a_1 + \ldots + c_n I_{x_n} \cdot_\Lambda a_m \in M(L)$, pois já vimos que cada parcela está em $M(L)$.

2.3. DEFINIÇÃO

Seja $V(L) = (F(L),+,\cdot_\Lambda)/(M(L)$. $V(L)$ será chamado anel de valorização do reticulado distributivo $(L, \vee, \wedge)$. (Podemos pensar em $V(L)$ como $\mathbb{Z}$-módulo).

2.4. PROPOSIÇÃO

Sejam L_1 e L_2 reticulados distributivos. Seja $\phi: L_1 \longrightarrow L_2$ um homomorfismo de reticulados, então ϕ induz um único homomorfismo de aneis $\bar{\phi}: V(L_1) \longrightarrow V(L_2)$ tal que $\bar{\phi}(L_1) \subseteq L_2$. Reciprocamente, se $\bar{\phi}: V(L_1) \longrightarrow V(L_2)$ é um homomorfismo de anéis tal que $\bar{\phi}(L_1) \subseteq L_2$, então $\bar{\phi}|_{L_1}: L_1 \longrightarrow L_2$ é um homomorfismo de reticulados.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Seja $\phi: L_1 \longrightarrow L_2$ um homomorfismo de reticulados então pela Proposição-I.1.4., $\bar{\phi}: V(L_1) \longrightarrow V(L_2)$ dada por

$\bar{\phi}(\Sigma_{i=1}^n c_i I_{x_i} + M(L_1)) = \Sigma_{i=1}^m c_i I_{\phi(x_i)} + M(L_2)$ está bem definida e

$\bar{\phi}(f+g) = \bar{\phi}(f) + \bar{\phi}(g)$. Obviamente $\bar{\phi}(L_1) \subseteq L_2$, e como $\phi(x \wedge y) = \phi(x) \wedge \phi(y)$, $\forall x,y \in L$, nós vemos fácilmente que $\bar{\phi}(f\cdot_\Lambda g) =$

$\bar{\phi}(f)\cdot_{\Lambda}\bar{\phi}(g)$, portanto $\bar{\phi}$ é o homomorfismo de anéis procurado. Reciprocamente, seja $\bar{\phi}: V(L_1) \longrightarrow V(L_2)$ um homomorfismo de anéis com $\bar{\phi}(L_1) \subseteq L_2$. Então $\bar{\bar{\phi}} = \bar{\phi}_{|L_1}: L_1 \longrightarrow L_2$ é um homomorfismo de reticulados, pois:

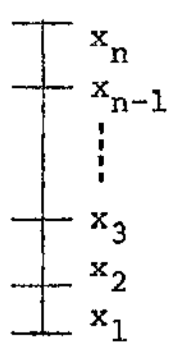
a) $\bar{\bar{\phi}}(x\wedge y) = \bar{\bar{\phi}}(x\cdot_{\Lambda} y) = \bar{\bar{\phi}}(x)\cdot_{\Lambda}\bar{\bar{\phi}}(y) = \bar{\bar{\phi}}(x) \wedge \bar{\bar{\phi}}(y)$

b) $\bar{\bar{\phi}}(x\vee y) = \bar{\bar{\phi}}(x+y-x\wedge y) = \bar{\bar{\phi}}(x)+\bar{\bar{\phi}}(y)-\bar{\bar{\phi}}(x)\wedge\bar{\bar{\phi}}(y)=\bar{\bar{\phi}}(x)\vee\bar{\bar{\phi}}(y)$. ∎

Sejam $\mathcal{L}$ a categoria onde os objetos são os reticulados distributivos e os morfismos são os homomorfismos de reticulados e $\mathcal{A}$ a categoria onde os objetos são os pares $(V(L), L)$ onde L é reticulado distributivo, e os morfismos são os homomorfismos de anéis $h:(V(L_1),+,\cdot_{\Lambda}) \longrightarrow (V(L_2),+,\cdot_{\Lambda})$ tais que $h(L_1) \subseteq L_2$. Nós vemos então pela Proposição acima que o anel de valorização é um funtor de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{A}$.

2.5. EXEMPLO

Seja $L = \{x_1,\ldots,x_n\}$ uma cadeia, isto é, um conjunto totalmente ordenado. Calculemos então $V(L)$

$L =$ 

Achemos primeiro qual é o ideal $M(L)$. Seja $I_{a\vee b}$ + $+ I_{a\wedge b} - I_a - I_b$, $a, b \in L$, como L é cadeia podemos supor $a \leq b$, então $I_{a\vee b} + I_{a\wedge b} - I_a - I_b = I_b + I_a - I_b = 0$, portanto $M(L)$ é o ideal gerado pelo zero, isto é, $M(L) = \{0\}$; daí como $F(L) = \{f: L \longrightarrow \mathbb{Z}$; f é função $\} \cong \mathbb{Z}^n$ então

$(V(L),+,\cdot_\wedge) \cong (\mathbb{Z}^n,+,\cdot_\wedge)/_{(0)} \cong (\mathbb{Z}^n,+,\cdot_\wedge)$.

Veremos agora uma importante proposição que nos ajudará a compreender melhor a construção de $V(L)$.

Seja $(A,+,.;1)$ um anel comutativo com unidade. Definimos em A as seguintes operações: $a\cup b = a+b-a.b$, $a\cap b = a.b$ e $a^*=1-a$.

Seja $J_A = \{a \in A;\ a^2 = a.a = a\}$ o conjunto dos idempotentes de A. Vemos facilmente que $(J_A, \cup, \cap; *)$ é uma álgebra de Boole com "$\cup$", "$\cap$" e "$*$" funcionando como as operações de "supremo", "ínfimo" e complementação, respectivamente.

2.6. PROPOSIÇÃO

Todo reticulado distributivo é isomorfo a um subreticulado do reticulado Booleano dos idempotentes de um anel comutativo sem torção.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $i : L \longrightarrow V(L)$ dada por:

$$x \xrightarrow{i} I_x + M(L) \in J_{V(L)}$$

Pela Proposição-I. 2.1., i é 1-1. Resta-nos ver que i é um homomorfismo de reticulados, que vai de $(L, \vee, \wedge)$ em $(J_{V(L)}, \cup, \cap)$, mas isto é verdade pois:

a) $i(x\wedge y)=I_{x\wedge y}+M(L)=(I_x+M(L))\cdot_{\wedge}(I_y+M(L))=i(x).i(y)=i(x)\cap i(y)$

b) $i(x\vee y)=I_{x\vee y}+M(L)=(I_x+I_y-I_{x\wedge y})+M(L)=(I_x+M(L))+(I_y+M(L))-$

$-(I_{x\wedge y}+M(L)) = i(x)+i(y)-i(x\wedge y)=i(x)+i(y)-i(x)\cdot_{\wedge}i(y) =$

$= i(x)\cup i(y)$."

3. VALORIZAÇÕES E UMA BASE PARA V(L)

Veremos neste parágrafo qual é a imagem, via funtor anel de valorização, das valorizações sobre reticulados distributivos. Provaremos também a existência de uma base para o $\mathbb{Z}$-módulo $V(L)$.

Começamos o parágrafo, demonstrando uma proposição que nos será extremamente útil daqui para frente.

3.1. PROPOSIÇÃO

Se $x_1,\dots,x_n \in L$, e L é um reticulado distributivo com unidade u, então $u - \vee_{i=1}^{n} x_i = \pi_{i=1}^{n} (u-x_i)$ em $V(L)$, isto é, $\vee_{i=1}^{n} x_i = \Sigma_{i=1}^{n} x_i - x_1\wedge x_2 + x_1\wedge x_2\wedge x_3 - x_1\wedge x_2\wedge x_3\wedge x_4 + \dots \pm$

$\pm (x_1\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_n)$.

DEMONSTRAÇÃO: Faremos a demonstração por indução sobre n. Se $n=2$, temos que $u-x_1 \vee x_2 = u-(x_1+x_2-x_1 \wedge x_2) = u-x_1-x_2+x_1 \wedge x_2 =$

$= (u-x_1) \cdot_\wedge (u-x_2)$.

Suponhamos agora o resultado válido para $n-1$ e mostremos que vale para n. Temos que $u - \vee_{i=1}^{n} x_i = u-(\vee_{i=1}^{n-1} x_i) \vee x_n =$

$= (u-\vee_{i=1}^{n-3} x_i) \cdot_\wedge (u-x_n) \underset{\text{de indução}}{\overset{\text{hip}}{=}} \pi_{i=1}^{n-1} (u-x_i) \cdot_\wedge (u-x_n) = \pi_{i=1}^{n} (u-x_i) \cdot_\wedge$

Nossos próximos passos serão dados no sentido de vermos qual é a imagem das valorizações pelo funtor $V(L)$, e também provarmos um interessante corolário deste resultado. Começamos com a seguinte definição.

3.2. DEFINIÇÃO

Seja $(L, \vee, \wedge)$ um reticulado. $p \in L$ é dito $\vee$-irredutível se $p = a \vee b$, $a, b \in L$ implica que $p=a$ ou $p=b$.

Mostraremos a seguir, que os elementos $\vee$-irredutíveis de L determinam uma valorização sobre L, e que eles formam uma base para $V(L)$ quando L é finito.

3.3. PROPOSIÇÃO

Se $(L, \vee, \wedge)$ é um reticulado finito então para $\forall a \in L$, temos que $a = \vee_{i=1}^{n} p_i$, p_i $\vee$-irredutível de L.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Seja $\sigma(a) = \{p \in L-\{z\}\ ;\ p \leq a$ e p v-irredutível$\}$, onde z é o zero de L. Se $\sigma(a)=1$ (então $a \in \sigma(a)$, isto é, a é v-irredutível) e $a=a\ va$.

Suponhamos agora, que é válido o resultado quando o número de elementos em $\sigma(a)$ é menor ou igual a $n-1$, e mostremos por indução que o resultado vale quando o número de elementos em $\sigma(a)$ é n. Se a é v-irredutível, o resultado é óbvio; caso contrário $a=bvc$ com $b<a$ e $c<a$, e temos que o número de v-irredutível em $\sigma(b)$ e $\sigma(c)$ é menor ou igual a $n-1$, então pela hipótese de indução vale a proposição para b e c e isto acarreta a sua validade também para a.$_{\shortparallel}$

3.4. TEOREMA

O funtor $V(L)$, que associa a cada reticulado distributivo o seu anel de valorização, induz uma correspondencia biunívoca natural entre valorizações sobrejetivas e funcionais lineares sobre o $\mathbb{Z}$-módulo $V(L)$. (Notamos que se a valorização for multiplicativa (isto é, $\nu(x \wedge y) = \nu(x)\,.\,\nu(y)$) então a transformação linear correspondente é também multiplicativa).

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Seja $\nu : L \longrightarrow \mathbb{Z}$ uma valorização. ν induz a seguinte função $\hat{\nu} : V(L) \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\hat{\nu}(\Sigma_{i=1}^{n} c_i I_{x_i} + M(L)) = \Sigma_{i=1}^{n} c_i \nu(x_i)$. Vemos que $\hat{\nu}$ está bem definida pois se $f=g$ em $V(L)$ então $f-g$ $M(L)$, isto é, $f-g = {}^{n}_{i=1} c_i(I_{x_i v y_i} + I_{x_i \wedge y_i} - I_{x_i} - I_{y_i})$ então $\hat{\nu}(f-g) =$

$= \Sigma_{i=1}^{n} c_i\, \nu(x_i \vee y_i) + \nu(x_i \wedge y_i) - \nu(x_i) - \nu(y_i) = 0$, pois ν é valorização, portanto $\hat{\nu}(f) = \hat{\nu}(g)$. Obviamente, $\hat{\nu}$ é linear portanto $\hat{\nu}$ é o funcional linear associado a ν, e também é claro que se $\nu(x\wedge y) = \nu(x) . \nu(y)$ então $\hat{\nu}(f ._{\wedge} g) = \hat{\nu}(f) . \hat{\nu}(g)$. Reciprocamente, dada $f : V(L) \longrightarrow \mathbb{Z}$, funcional linear, seja $\nu : L \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\nu(x) = f(I_x + M(L))$, ν está obviamente bem definida. ν é valorização pois:

$$\nu(x\vee y) + \nu(x\wedge y) = f(I_{x\vee y} + M(L)) + f(I_{x\wedge y} + M(L)) = f\left[(I_{x\vee y} + \right.$$

$$\left. + I_{x\wedge y}) + M(L)\right] = f((I_x + I_y + M(L)) = f(I_x + M(L)) + f(I_y + M(L)) =$$

$$= \nu(x) + \nu(y).$$

A partir desse momento identificamos ν e $\hat{\nu}$, e vemos pela Proposição-I. 3.1., que vale a seguinte formula:

$$\nu(\vee_{i=1}^{n} p_i) = \Sigma_{i=1}^{n} \nu(p_i) - \nu(p_1 \wedge p_2) + \nu(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) + \ldots \pm$$

$$\pm\ \nu(p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \qquad (A)$$

Temos então o seguinte corolário do teorema acima.

3.5. COROLÁRIO

Uma valorização ν sobre um reticulado distributivo finito L, é determinada univocamente por seus valores sobre o conjunto dos elementos $\vee$-irredutíveis de L, e estes valores podem ser arbitràriamente escolhidos.

DEMONSTRAÇÃO: Faremos a demonstração por indução sobre a ordem. Suporemos válido o corolário para os elementos abaixo de x, e mostremos que vale para x. Se x é v-irredutível, não há o que provar. Se x não é v-irredutível pela Proposição-I. 3.3. temos $x = \vee_{i=1}^{n} p_i$, com p_i v-irredutível. Como cada p_i está estritamente abaixo de x, pela hipótese de indução, ν está determinada para cada parcela de (A) por sua ação sob os v-irredutíveis, consequentemente $\nu(x)$ também está determinada por sua ação sob os v-irredutíveis.$_{\shortparallel}$

Provaremos agora a existência de uma base para o $\mathbb{Z}$-módulo $V(L)$, onde L é um reticulado distributivo finito e seja z o zero de L.

3.6. TEOREMA (GEISSINGER [4])

Se L é um reticulado distributivo finito então $P(L) = \{p \in L;\ p \text{ é v-irredutível}\} \cup \{z\}$ forma uma base para o $\mathbb{Z}$-módulo $V(L)$ e cada $x \in L$ está no subanel gerado por $\sigma(x) = \{p \in P(L),\ p \leq x\}$.

DEMONSTRAÇÃO: Para cada $x \in L$, pela Proposição-I.3.3. existe $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq P(L)$ tal que $x = \vee_{i=1}^{n} p_i$, então, pela Proposição-I.3.1., $x = \vee_{i=1}^{n} p_i = \Sigma_{i=1}^{n} p_i - p_1 \wedge p_2 + \dots \pm (p_1 \wedge \dots \wedge p_n)$.

Se $x \notin P(L)$, então, cada parcela de (A) está estritamente abaixo de x, portanto cada $x \in L$ é uma combinação linear em $V(L)$ de um número finito de elementos do subanel gerado em $V(L)$ por $\sigma(x)$, vemos então que $V(L)$ é gerado por $P(L)$. Mostremos agora que eles geram livremente $P(L)$. Para cada $\{p_1,\ldots,p_n\} \subseteq P(L)$ seja p_n elemento maximal deste conjunto então $\{p_1,\ldots,p_{n-1}\} \subseteq [p_n)^c$ então pela Proposição-I. 1.6., $p_1,\ldots,p_{n-1}$ e p_n são linearmente independentes. Repetindo o raciocínio para $\{p_1,\ldots,p_{n-1}\}$ e assim sucessivamente vemos que $p_1,\ldots,p_n$ são linearmente independentes, portanto realmente $P(L)$ é uma base para $V(L)$.॥

4. ÁLGEBRAS AUMENTADAS

Neste parágrafo consideraremos sempre L um reticulado distributivo com zero (z) e um (u). Tentaremos colocar em $V(L)$ uma operação análoga a complementação em álgebras de Boole. Veremos também a dualidade existente entre $(V(L),+,\cdot_\Lambda)$ e $(V(L),+,\cdot_V)$. Tendo em mente a Proposição-I. 2.1. imaginaremos $L \subseteq V(L)$, identificando x com I_x. Começamos o parágrafo com a seguinte proposição:

4.1. PROPOSIÇÃO

Seja $\varepsilon: (F(L),+,\cdot_\Lambda) \longrightarrow (\mathbb{Z},+,\cdot)$ dada por: $\varepsilon(\Sigma_{i=1}^n c_i x_i) = \Sigma_{i=1}^n c_i$, então nós temos:

(i) ε é um homomorfismo de anéis.

(ii) $\operatorname{Ker} \varepsilon$ é o ideal gerado pelos elementos da forma $x-y$ com $x, y \in L$

(iii) $M(L) \subseteq \operatorname{Ker} \varepsilon$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Seja $f = \Sigma_{i=1}^{n} c_i x_i$ e $g = \Sigma_{i=1}^{n} c_i' x_i$, nós temos que $f+g = \Sigma_{i=1}^{n} (c_i+c_i')x_i$ e $f \cdot_\wedge g = \Sigma_{k=1}^{m} d_k x_k$ onde $d_k = \displaystyle = \sum_{x_i \wedge x_j = x_k} c_i . c_j'$, vemos que ε é homomorfismo pois:

$$\varepsilon(f+g) = \varepsilon(\Sigma_i (c_i+c_i')x_i) = \Sigma_i c_i + c_i' = \Sigma_i c_i + \Sigma_i c_i' = \varepsilon(f) + \varepsilon(g) \text{ e}$$

$$\varepsilon(f \cdot_\wedge g) = \varepsilon(\Sigma_{k=1}^{m} d_k\, x_k) = \Sigma_k\, d_k = \sum_{x_i \wedge x_j = x_k} c_i . c_j' = \Sigma_i\, c_i . \Sigma_i c_i' =$$

$$= \varepsilon(f) . \varepsilon(g).$$

(ii) Seja I o ideal gerado pelos elementos da forma $x-y$ com x e $y \in L$. Óbviamente $I \subseteq \operatorname{Ker} \varepsilon$. Recíprocamente, se $f = \Sigma_{i=1}^{n} c_i\, x_i \in \operatorname{Ker} \varepsilon$, então nós temos que $\Sigma_{i=1}^{n} c_i = 0$. Suponhamos que rearranjamos esta soma de modo que para $i \leq k$ temos que $c_i > 0$ e para $k+1 \leq i \leq n$, $c_i \leq 0$. Então:

$$\Sigma_{i=1}^{n} c_i\, x_i = \underbrace{x_1 + \ldots + x_1}_{c_1 \text{ vezes}} + \ldots + \underbrace{x_k + \ldots + x_k}_{c_k \text{ vezes}} - \underbrace{(x_{k+1} + \ldots + x_{k+1})}_{-c_{k+1} \text{ vezes}} - \underbrace{(x_n + \ldots + x_n)}_{-c_n \text{ vezes}}$$

e como $\Sigma_{i=1}^{k} c_i = - \Sigma_{i=k+1}^{n} c_i$, nós realmente temos que

$f = \Sigma_{i=1}^{m} x_i - y_i$, x_i, $y_i \in L$, isto é, $f \in I$

(iii) $M(L)$ é gerado pelos elementos da forma $x\vee y+x\wedge y-x-y=$ $=(x\vee y-x)+(x\wedge y-x)$, $\forall x,y\in L$. Portanto $M(L)$ está contido no ideal gerado pelos elementos da forma $a-b$, com $a,b\in L$, então por (ii) $M(L)\subseteq \mathrm{Ker}\ \varepsilon$.״

Como $M(L)\subseteq \mathrm{Ker}\ \varepsilon$, nós temos que ε se extende a $V(L)$, então $\varepsilon:(V(L),+,\cdot_\wedge)\longrightarrow(\mathbb{Z},+,.)$ é dada por: $\varepsilon(\Sigma_{i=1}^{n} c_i x_i)=\Sigma_{i=1}^{n} c_i$. Portanto ε é um homomorfismo de anéis e o chamaremos de uma aumentação. A proposição seguinte caracteriza ε.

4.2. PROPOSIÇÃO

$\varepsilon: V(L)\longrightarrow \mathbb{Z}$ está caracterizada por:

(i) ε é homomorfismo de anéis, (ii) $\varepsilon(z)=1$.

DEMONSTRAÇÃO: É claro que $\varepsilon: V(L)\longrightarrow\mathbb{Z}$ satisfaz (i) e (ii). Reciprocamente, seja $\phi: V(L)\longrightarrow\mathbb{Z}$ satisfazendo (i) e (ii), então $\phi(x)=1$, para $\forall x\in L$ pois: $1=\phi(z)=\phi(x\wedge z)=\phi(x\cdot_\wedge z)=$ $=\phi(x).\phi(z)=\phi(x).1=\phi(x)$. Então $\phi(\Sigma_i c_i x_i)=\Sigma c_i\phi(x_i)=\Sigma_i c_i$ $=\varepsilon(\Sigma_i c_i x_i)$, portanto $\phi=\varepsilon$.״

Vamos agora procurar definir a nossa desejada operação de complementação. Tomemos $\tau'': L\longrightarrow F(L)$ dada por: $\tau''(x)=u+z-x$. τ'' induz $\tau': F(L)\longrightarrow F(L)$ dada por: $\tau'(\Sigma_i c_i x_i)=\Sigma_i c_i\ \tau''(x_i)$. Como $\tau'(M(L))=M(L)$, temos que

τ' induz $\tau : V(L) \longrightarrow V(L)$ definida por: $\tau(\Sigma_{i=1}^{n} c_i\, x_i) =$
$= \Sigma_{i=1}^{n} c_i\, \tau''(x_i) = \varepsilon(f)(u+z)-f$. De fato:

$\tau(\Sigma_i\, c_i\, x_i) = \Sigma_i\, c_i\, \tau''(x_i) = \Sigma_i\, c_i(u+z-x) = \Sigma_i\, c_i(u+z) - \Sigma_i\, x_i =$
$= \varepsilon(f)(u+z)-f.$

A nossa próxima proposição caracteriza a operação τ.

4.3. PROPOSIÇÃO

τ é caracterizada por : (i) $\tau(c)=-c$, $\forall c \in \operatorname{Ker} \varepsilon$ e (ii) $\tau(u)=z$ (ou $\tau(z) = u$).

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: τ satisfaz (i) e (ii) pois se $f \in \operatorname{Ker} \varepsilon$ nós temos que $\tau(f) = \varepsilon(f)\ (u+z)-f = -f$ porque $\varepsilon(f) = 0$, $\tau(u) =$ $= u + z - u = z$. Reciprocamente, se τ_o é um homomorfismo de anéis satisfazendo (i) e (ii), nós temos que para $\forall x \in L, \tau_o(x) =$ $= \tau_o(x-z+z) = \tau_o(x-z) + \tau_o(z) = z-x+u=u+z-x = \tau(x)$. Portanto, $\tau_o = \tau$.

4.4. DEFINIÇÃO

(i) Seja $(A,.)$ uma K-álgebra onde $(K,+,.)$ é um anel. Se existe um homomorfismo ε de $(A,.)$ em $(K,.)$ diremos que A é uma K-álgebra aumentada e a denotaremos por $(A,.,\varepsilon)$. ε será chamada uma aumentação.

(ii) Sejam $(A,.,\varepsilon)$ e $(A',*,\varepsilon')$ duas K-álgebras aumentadas.

$\phi:(A,.,\varepsilon) \longrightarrow (A',*,\varepsilon')$ será chamada de isomorfismo de K-álgebras aumentadas se ϕ for um isomorfismo de K-álgebras, e tornar comutativo o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & & A' \arrow[dl, "\varepsilon'"] \\ & K & \end{tikzcd}$$ isto é, $\varepsilon'\phi = \varepsilon$

4.5. PROPOSIÇÃO

$\tau : (V(L), +, ._{\Lambda}, \varepsilon) \longrightarrow (V(L), +, ._{\Lambda}, \varepsilon)$ é um isomorfismo de $\mathbb{Z}$-álgebras aumentadas com $\tau^2 = id$. (Esta proposição desempenha um papel análogo às leis de Morgan na lógica clássica).

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: $\tau^2(f) = \tau.\tau(f) = \tau(\varepsilon(f)\ (u+z) - f) = \varepsilon(f)\ \tau(u+z) - \tau(f) = \varepsilon(f)(u+z) - \varepsilon(f)(u+z) + f = f$. Então τ é bijetiva e sua inversa é ela mesma.

Provemos agora que τ é um isomorfismo de $\mathbb{Z}$-álgebras aumentadas:

a) $\tau(f+g) = \varepsilon(f+g)(u+z) - (f+g) = (\varepsilon(f) + \varepsilon(g)(u+z) - f - g =$

$= \varepsilon(f)(u+z) - f + \varepsilon(g)(u+z) - g = \tau(f) + \tau(g)$.

b) Se $x, y \in L$, nós temos que $\tau(x ._{\Lambda} y) = \tau(x \wedge y) = u+z - x \wedge y =$

$= (u+z-x) ._{\Lambda} (u+z-y) = \tau(x) ._{\Lambda}\ \tau(y)$. Mais geralmente se $f = \Sigma_{i=1}^{n} c_i x_i$

e $g = \Sigma_{i=1}^{n} c_i x_i$, nós temos que $f \cdot_{\wedge} g = \Sigma_{k=1}^{n} d_k x_k$ onde $d_k =$

$= \sum_{x_i \wedge x_j = x_k} c_i \cdot c_j'$ então $\tau(f \cdot_{\wedge} g) = \Sigma_k d_k \tau(x_i \cdot_{\wedge} x_j) = \Sigma_k d_k \tau(x_i) \cdot_{\vee} \tau(x_j) =$

$= \tau(f) \cdot_{\vee} \tau(g)$.

(c) $\varepsilon\ \tau(f) = \varepsilon(\varepsilon(f)\ (u+z-f) = 2\varepsilon(f) - \varepsilon(f) = \varepsilon(f)$, $\forall f \in V(L)$, portanto $\varepsilon\ \tau = \varepsilon$.$_{\shortparallel}$

4.6. OBSERVAÇÕES

(i) τ é o análogo algébrico do complemento, pois se L é Booleano então $x + x' - x\vee x' - x\wedge x' = x + x' - u - z \in M(L)$ então $x' = u + z - x$, isto é, $x' = \tau(x)$.

(ii) para cada elemento x no intervalo $[v, w]$ de L, nós temos que $\tau(x)$ age como o complemento relativo de x nesse intervalo pois:

$x \cdot_{\wedge} \tau(x) = x \cdot_{\wedge}(v+w-x) = x+w - x = w$ e $x \cdot_{\wedge} \tau(x) = x \cdot_{\wedge}(v+w-x) =$

$= v + x - x = v$.$_{\shortparallel}$

Nós notamos que certas propriedades que $(V(L), +, \cdot_{\wedge}, \varepsilon)$ possue, não decorrem do fato dele ser o anel de valorização de um reticulado distributivo e sim dele ser uma K-álgebra aumentada. Vejamos então, quais são estas propriedades que valem deste ponto de vista mais geral. Começamos pela seguinte proposição.

4.7. PROPOSIÇÃO

Se $(A,.,\varepsilon)$ é uma K-álgebra aumentada e $a \in A$ com $\varepsilon(a) = 1$, então $A = \operatorname{Ker} \varepsilon \oplus Ka$.

DEMONSTRAÇÃO: Para cada $x \in A$, nós temos que $x = x - \varepsilon(x)a + \varepsilon(x)a \in \operatorname{Ker} \varepsilon + Ka$, portanto $A = \operatorname{Ker} \varepsilon + Ka$. Vemos também que $\operatorname{Ker} \varepsilon \cap Ka = \{0\}$, pois se $x = ka \in \operatorname{Ker} \varepsilon$ então $0 = \varepsilon(x) = k\varepsilon(a) = k$, portanto $x = 0$, daí nós temos que qualquer x em A se escreve de modo único como $i + ka$ com $i \in \operatorname{Ker} \varepsilon$ e $ka \in Ka$.„

Seja $(A,.,\varepsilon)$ uma K-álgebra aumentada. Podemos colocar em A uma outra operação "$*$" fazendo $a*b = \varepsilon(b)a + \varepsilon(a)b - a.b$. Como $\varepsilon(a*b) = \varepsilon(a).\varepsilon(b)$, nós temos que $(A,*,\varepsilon)$ também é uma K-álgebra aumentada.

Notemos que se $(A,.)$ tem unidade u e $\varepsilon(u)=1$ então $b*u = \varepsilon(b)u + \varepsilon(u)b - b.u = \varepsilon(b)u + b - b = \varepsilon(b)u$, análogamente vemos que $u*b = b*u = \varepsilon(b)u$. Reciprocamente, se z é uma unidade para $(A,*)$ e $\varepsilon(z)=1$, nós temos que $a.z = z.a = \varepsilon(a).z$, pois $a = a*z = \varepsilon(a)z + \varepsilon(z)a - a.z = \varepsilon(a)z + a - a.z$, então realmente $a.z = \varepsilon(a).z$. Um elemento z com estas propriedades é conhecido como uma integral para $(A,.,\varepsilon)$.

Seja $(A,.,+,\varepsilon)$, uma K-álgebra aumentada. Seja

$\phi: (\operatorname{Ker} \varepsilon,.,+,\varepsilon) \longrightarrow (\operatorname{Ker} \varepsilon,*,+,\varepsilon)$ tal que: (K_1) $\phi(a.b) = \phi(a)*\phi(b)$. (Observamos que $\phi(a)*\phi(b) = -\phi(a).\phi(b)$)

(K_2) $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ e $\phi(k.a) = k.\phi(a)$, $\forall k \in K$ e $a,b \in \operatorname{Ker} \varepsilon$ (ϕ é linear).

Nós vemos que $\tau : (\mathrm{Ker}\,\varepsilon\,,.,+,\varepsilon) \longrightarrow (\mathrm{Ker}\,\varepsilon,*,+,\varepsilon)$ dada por $\tau(f) = -f$, é um exemplo particular de uma ϕ. Tentemos ver quando ϕ se extende a toda K-álgebra aumentada.

4.8. PROPOSIÇÃO

Seja $(A,.,\varepsilon)$ uma K-álgebra aumentada com unidade u. Consideremos uma $\phi:(\mathrm{Ker}\ \varepsilon,.,+,\varepsilon) \longrightarrow (\mathrm{Ker}\ \varepsilon,*,+,\varepsilon)$ satisfazendo (K_1) e (K_2) acima especificados. ϕ se extende a um homomorfismo ϕ^e de $(A,.,+,\varepsilon)$ em $(A,*,+,\varepsilon)$ se, e somente se existe uma integral z para $(A,.,\varepsilon)$. Além disso, se ϕ for inversível ϕ^e também o será.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Suponhamos inicialmente que ϕ se extenda a um isomorfismo ϕ^e de $(A,.,\varepsilon)$ sobre $(A,*,\varepsilon)$. Tomemos $z = \phi^e(u)$ e vemos que z é uma integral para $(A,.,\varepsilon)$, pois $\varepsilon(z)=\varepsilon\phi^e(u)= = \varepsilon(u) = 1$, e além disso $\forall a' \in (A,*)$ como ϕ^e sobre existe $a \in (A,.)$ tal que $\phi^e(a)=a'$. Então $a'*z = a'* \phi^e(u) = \phi^e(u)= = \phi^e(c_i.u) = \phi^e(a) = a'$. Reciprocamente, suponhamos que exista uma integral z para $(A,.,\varepsilon)$ então tendo em mente a Proposição-I.4.7., nós temos a seguinte extensão de ϕ :

$$\phi^e : (\mathrm{Ker}\,\varepsilon \oplus K_u,.,+) \longrightarrow (\mathrm{Ker}\,\varepsilon \oplus K_z,*,+) \text{ dada por}$$

$$\phi^e(i+ku) = \phi(i) + kz$$

Obviamente, ϕ^e está bem definida, é linear e $\varepsilon\phi^e=\varepsilon$. Só nos resta provar que ϕ^e é homomorfismo, façamos isto então. Nós temos que:

$(i + ku).(i'+k'u) = i.i'+k'i+ki' + k.k'u$ então $\phi^e[(i+ku).(i'+k'u)] =$

$= \phi(i.i') + k'\phi(i) + k\phi(i') + kk'z = -\phi(i)-\phi(i') + k\phi(i') + k'\phi(i) +$

$+ kk'z$ (I). Por outro lado temos:

$$\phi^e(i+ku) * \phi^e(i'+k'u) = (\phi(i) + kz) * (\phi(i')+k'z) =$$

$= \varepsilon(\phi u)+kz)\ (\phi(i')+k'z) + \varepsilon(\phi(i')+k'z)\ (\phi(i)+kz) - (\phi(i)+kz).\phi(i')+$

$+ k'z) = k\phi(i') + kk\,z+k'\phi(i)+kk'z - \phi(i).\phi(i') - k'\phi(i)z -$

$- k\phi(i')z - kk'z \quad \dfrac{z \text{ é}}{\text{integral}} \quad -\phi(i).\phi(i')+k\phi(i') + k'\phi(i) +$

$+ kk'z - k\varepsilon(\phi(i))z - k\varepsilon(\phi(i'))z = -\phi(i).\phi(i') + k\phi(i') + k'\phi(i)+$

$+ k.k'z$ (II). De (I) e (II) obtemos que ϕ^e é homomorfismo.

Finalmente, se ϕ é inversível então ϕ^e também o é pois: seja $\psi\colon (\mathrm{Ker}\,\varepsilon \oplus kz, *, +) \longrightarrow (\mathrm{Ker}\,\varepsilon \oplus ku, ., +)$ dada por:

$\psi\ (i+kz) = \phi^{-1}(i) + ku \quad = (\phi^e)^{-1}$ porque:

$\psi \circ \phi^e(i+ku) = \psi(\phi(i)+kz) = \phi\ \phi^{-1}(i)+ku = i+ku$ e

$\phi^e \circ \psi(i+kz) = \phi^e(\phi^{-1}(i)+ku) = \phi\ \phi^{-1}(i)+kz = i+kz.$ //

CAPÍTULO II

A ÁLGEBRA DE MÖBIUS

O conceito de álgebra de Möbius introduzido por Solomon e o de anel de valorização proposto por Rota [9], foram criados e estudados independentemente. Só mais tarde foi visto que no caso finito estes conceitos equivalem, e isto será mostrado neste capítulo. O interesse desse isomorfismo reside no fato que na álgebra de Möbius nós temos uma base formada por indempotentes ortogonais e então via isomorfismo, transferimos esta base para $V(L)$.

Veremos também um resultado devido a Greene [7], que estabelece condições para que uma função $f: X \longrightarrow Y$, se extenda a um homomorfismo da álgebra de Möbius de X na álgebra de Möbius de Y.

1. A FUNÇÃO DE MÖBIUS - DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

Veremos neste parágrafo a definição e algumas propriedades da função de Möbius, as quais claramente requerem alguma hipótese de finitude. Daremos as definições para o caso em que o conjunto parcialmente ordenado $(X,\leq)$ for finito, mas observamos que elas se ajustam perfeitamente para $(X,\leq)$, localmente finito (isto é, $\forall x, y \in X$ temos que $[x, y]$ $\{t \in X;\ x \leq t \leq y\}$ é finito. Como exemplos importantes de conjuntos parcialmente ordenados e finitos temos o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. Posteriormente, será visto que a definição de função de Möbius dada neste parágrafo generaliza a definição clássica em teoria dos números (ver Observação III.1.5.)

Seja $(X,\leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $(A,+,.)$ um anel comutativo com identidade. Consideremos o conjunto $\mathcal{Q}(X, A) = \{\alpha : X \times X \longrightarrow A$ tal que $\alpha(x,y) = 0$ se $x \not\leq y\}$.

Definimos em $\mathcal{Q}(X, A)$ duas operações e uma multiplicação por escalar, do seguinte modo:

$$(\alpha+\beta)\ (x,y) = \alpha(x,y) + \beta(x,y),\ \forall (x,y) \in X \times X$$

$$(\alpha * \beta)\ (x,y) = \sum_{(x\leq)t(\leq y)} \alpha(x,t) \cdot \beta(t,y)\ ,\ \forall (x,y) \in X \times X$$

e $(a.\alpha)(x,y) = a.\alpha(x,y)$, $\forall x, y \in X \times X$ e $a \in A$. Vemos facilmente que $\mathcal{Q}(X,A)$ relativamente as operações "+" e "*" e o produto por escalar "." é uma A-álgebra onde a identidade de "*" é a função $\sigma(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=y \\ 0 & \text{se } x\neq y \end{cases}$

1.1. DEFINIÇÃO

$\mathcal{Q}(X, A)$ munido com as operações "+" e "*" e o produto por escalar "." será chamada a A-álgebra de incidencia de $(X,\leq)$.

1.2. EXEMPLO

Seja $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ com a ordem usual. Cada $x \in \mathcal{Q}(X, A)$ pode ser interpretada como uma matriz triangular

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Nós vemos que para quaisquer α e β em $\mathcal{Q}(X, A)$, $\alpha * \beta$ é igual ao produto usual destas matrizes.„

Tentaremos agora generalizar o exemplo acima, obtendo para cada α em $\mathcal{Q}(X, A)$, onde $(X, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado e finito, uma representação "matricial" de α. Comecemos por construir o A-módulo livremente gerado por $(X, \leq)$.

Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $(A, +, .)$ um anel comutativo com elemento unidade. Consideremos o conjunto $\mathcal{M}(X, A) = \{ f: X \longrightarrow A$ tal que f é função e $\text{supp } f < \infty \}$. Observamos que a definição de $F(L, A)$ dada no primeiro capítulo é praticamente a mesma de $\mathcal{M}(X, A)$. A única diferença reside no fato de que $\mathcal{M}(X, A)$ generaliza, para conjuntos parcialmente ordenados, a definição de $F(L, A)$ que só está dada para reticulados.

Definamos em $\mathcal{M}(X, A)$ uma soma e um produto por escalar, que tornará $\mathcal{M}(X, A)$ um A-módulo, a saber:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(a.f)(x) = a.f(x)$, $\forall x \in X$ e $a \in A$.

Seja $I_x \in \mathcal{M}(X, A)$ com $x \in X$, definida por:

$$I_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=y \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

. Vemos claramente que os $\{I_x\}_{x \in X}$ formam uma base para o A-módulo $\mathcal{M}(X, A)$, isto é, $\mathcal{M}(X, A)$ é livremente gerado pelos $\{I_x\}_{x \in X}$.

Consideremos agora, o conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{M}(X, A), \mathcal{M}(X, A)) = \{ L : \mathcal{M}(X, A) \longrightarrow \mathcal{M}(X, A);\ L \text{ é linear}\}$. Definimos em $\mathcal{L}(\mathcal{M}(X, A), \mathcal{M}(X, A))$ duas operações e um produto por escalar, do seguinte modo:

$(L + L')(f) = L(f) + L'(f)$, $(L \circ L')(f) = L(L'(f))$ e $(a.L)(f) = a.L(f)$ para $\forall f \in \mathcal{M}(X, A)$ e $a \in A$. Vemos imediatamente que $\mathcal{L}(\mathcal{M}(X, A), \mathcal{M}(X, A))$ com as operações "+" e "o" e o produto por escalar "." é uma A-álgebra.

Temos então a seguinte proposição que representa "matricialmente" cada α em $\mathcal{Q}(X, A)$, isto é, lineariza a álgebra de incidencia para $(X, \leq)$ finito.

1.3. PROPOSIÇÃO

A A-álgebra de incidencia $\mathcal{Q}(X, A)$ é isomorfa a uma subalgebra da A-álgebra $\mathcal{L}(\mathcal{M}(X, A), \mathcal{M}(X, A))$ quando $(X, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado e finito.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $T : \mathcal{Q}(X, A) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}(X, A), \mathcal{M}(X, A))$ dada por: $T(\alpha) = T_\alpha$ onde $T_\alpha(f)(x) = \Sigma_{t(\leq x)} \alpha(t,x)f(t)$.

É imediato que T_α é linear. T é 1.1 pois se $\alpha \neq \beta$ então existe $(x_0, y_0) \in X \times X$ com $x_0 \leq y_0$ tal que $\alpha(x_0,y_0) \neq \neq \beta(x_0,y_0)$. Seja $f_{y_0} \in \mathcal{M}(X, A)$ dada por:

$f_{y_0}(x_0) = 1$ e $f_{y_0}(x) = 0$ para $x \neq x_0$. Então temos:

$T_\alpha(f_{y_0})(y_0) = \Sigma_{t(\leq y_0)} \alpha(t,y_0) f_{y_0}(t) = \alpha(x_0,y_0) \neq \beta(x_0,y_0) =$

$= \Sigma_{t(\ y_0)} \beta(t,y_0) f_{y_0}(t) = T_\beta(f_{y_0})(y_0)$, portanto $T_\alpha \neq T_\beta$ se $\alpha \neq \beta$

T preserva as operações pois:

a) $T_{\alpha+\beta}(f)(x) = \Sigma_t(\alpha+\beta)(t,x) f(t) = \Sigma_t\alpha(t,x) f(t) + \Sigma_t\beta(t,x) f(t) =$ $= T_\alpha(f)(x) + T_\beta(f)(x)$, para $\forall x \in X$, portanto $T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta)$, $\forall \alpha,\beta \in \mathcal{Q}(X, A)$.

b) $T_{a\alpha}(f)(x) = \Sigma_t\ a\alpha(t,x)f(t) = a.\ \Sigma_t\ \alpha(t,x)\ f(t) = a\ T_\alpha(f)(x)$, $\forall x \in X$, portanto $T(a\alpha) = aT(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathcal{Q}(X, A)$ e $a \in A$.

c) $T_{\alpha*\beta}(f)(x) = \Sigma_t\ \alpha*\beta(t,x)f(t) = \Sigma_t(\Sigma_s\alpha(t,s)\beta(s,x))\ f(t) =$

$= \Sigma_s \beta(s,x) . \Sigma_t \alpha(t,x)\ f(t) = \Sigma_s\ \beta(s,x)\ T_\alpha(f)(x) = T_\beta(T_\alpha)(f)(x) =$

$= T_\beta o\ T_\alpha(f)(x),\ \forall x \in X$, portanto $T(\alpha * \beta) = T(\alpha) o\ T(\beta),\ \forall \alpha, \beta \in$ $\mathcal{A}(X, A)$.

De a), b) e c) vemos que $\mathcal{L}' = \{T_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}(X, A)\}$ é uma subalgebra de $\mathcal{L}(\mathfrak{M}(X, A), \mathfrak{M}(X, A))$ e também que $\mathcal{A}(X, A)$ é isomorfo a $\mathcal{L}'$.■

Definamos agora a função de Möbius de um conjunto parcialmente ordenado e finito $(X, \leq)$. Comecemos por definir a função "ζ" do seguinte modo:

$$\zeta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq y \\ 0 & \text{se } x \not\leq y \end{cases}$$ e definamos $\mu \in \mathcal{A}(X, A)$

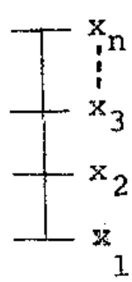
por indução, do seguinte modo:

$\mu(x,x) = 1$, e se $\mu(x,t)$ é conhecida para $\forall t \in (x,y)$ definimos $\mu(x,y) = - \Sigma_{x \leq t \leq y}\ \mu(x,t)$. Assim, notamos que para

$x \neq y\ \ \Sigma_{(x \leq) t (\leq y)}\ \mu(x,t) = 0$.

1.4. DEFINIÇÃO

$\mu(x,y)$ é chamada função de Möbius do conjunto parcialmente ordenado e finito $(X, \leq)$.

1.5. Exemplo Seja $X =$ 

, uma cadeia finita com n elementos.

Calculemos a função de Möbius para pontos de $X \times X$. Assim, temos que $\mu(x_1,x_1)=1$, $\mu(x_1,x_2) = -\mu(x_1,x_1)=-1$ e $\mu(x_1,x_3) = -[\mu(x_1,x_1) + \mu(x_1,x_2)] - (1-1) = 0$ e vemos então que para $\forall x_n$ com $n \geq 3$, $\mu(x_1,x_n) = 0$."

1.6. PROPOSIÇÃO

A função de Möbius μ é a inversa de ζ relativamente a "*", isto é, $[\mu * \zeta](x,y) = [\zeta * \mu](x,y) = \delta(x,y)$.

DEMONSTRAÇÃO: $\mu * \zeta\, (x,y) = \Sigma_{(x \leq) t\ (\leq y)}\, \mu(x,t)\, \zeta(t,y) =$

$$= \Sigma_{(x \leq) t\ (\leq y)} \mu(t,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq y \\ 1 & \text{se } x = y \end{cases} = \delta(x,y).$$

$$\zeta * \mu(x,y) = \Sigma_{(x \leq) t\ (\leq y)}\, \zeta(x,t) \mu(t,y) = \Sigma_{x \leq t (x,y)}\, \mu(x,t) \quad \text{(A)}$$

Mostremos agora que $\Sigma_{x<t(\leq y)}\, \mu(t,y) = -\mu(x,y)$. Faremos a demonstração por indução. Se não existe elemento no intervalo (x,y) então $\Sigma_{x \leq t (\leq y)}\, \mu(t,y) = \mu(y,y) = -\mu(x,y)$. Suponhamos o resultado verdadeiro para qualquer $a<y$ e mostremos que vale para y. Tomemos um a menor que y tal que vale a hipótese de indução, isto é, $\Sigma_{x<t(\leq a)}\, \mu(t,a) = -\mu(x,a)$, então temos:

$$\Sigma_{x<t(\leq y)}\, \mu(t,y) = \mu(y,y) + \Sigma_{x<t<y}\, (- \Sigma_{(t \leq)\ a<y}\, \mu(t,a)) =$$

$$= \mu(x,x) - \Sigma_{x<\ a \leq y}\, (\Sigma_{x<t(\leq a)}\, \mu(t,a)) = \mu(x,x) + \Sigma_{x<\ a<y}\, \mu(x,a) =$$

$\Sigma_{x \leq a < y} \mu(x,a) = - \mu(x,y)$.

Voltando a (A) temos que $\zeta * \mu\ (x,y) =$

$$= \Sigma_{x \leq t (\leq y)} \mu(t,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=y \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases} = \delta(x,y).$$

A importancia da função de Möbius decorre do seguinte resultado:

1.7. PROPOSIÇÃO

(Fórmula da inversão de Möbius). Seja $(G,+)$ um grupo abeliano e $f : X \longrightarrow G$ uma função, onde $(X,\leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado. Seja $p \in X$ tal que $f(x) = 0$ a menos que $x \geq p$. Tomemos $g(x) = \Sigma_{(p \leq) y \leq x} f(y)$ então $f(x) =$ $= \Sigma_{y (\leq x)} g(y)\ \mu(y,x)$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: $\Sigma_{y (\leq x)} g(y)\ \mu(y,x) =$

$$= \Sigma_{y (\leq x)} (\Sigma_{t \leq y} f(t)) \mu(y,x) = \Sigma_y (\Sigma_t f(t)\ \zeta(t,y)) \mu(y,x)) =$$

$$= \Sigma_t f(t)\ \Sigma_y \zeta(t,y) \mu(y,x) = \Sigma_t \delta(t,x)\ f(t) = f(x).$$

1.8. EXEMPLO

Vejamos agora que a proposição acima desempenha um papel análogo ao teorema fundamental do cálculo na análise.

Seja $(\mathbb{N},\leq)$ o conjunto parcialmente ordenado dos números naturais, como $(\mathbb{N},\leq)$ é localmente finito nós vemos que a função de Möbius μ também pode ser definida sobre $\mathbb{N}$. Tendo em mente a Proposição-II.1.5. vemos que $\mu(m,n)=1$, $\mu(n-1,n) = -1$ e $\mu(m,n) = 0$ se $m \neq n, n-1$. Pela proposição acima, dada $f : \mathbb{N} \longrightarrow G$, seja $g(m) = \Sigma_{(0\leq)a\leq m} f(a)$ (que seria o análogo discreto da integral), nós temos que $f(n) = \Sigma_{m(\leq n)} \mu(m,n)g(m) = g(n) - g(n-1)$ (que seria o análogo discreto da derivada).

2. DEFINIÇÃO DE ÁLGEBRA DE MÖBIUS - TEOREMA DE DAVIS

Neste parágrafo definiremos a álgebra de Möbius de um conjunto parcialmente ordenado e finito $(X,\leq)$. Se X for um reticulado distributivo finito veremos que a álgebra de Möbius e o anel de valorização de X são isomorfos. Em todo esse parágrafo $(X,\leq)$ será considerado finito.

Consideremos agora o A-módulo livremente gerado pelos $\{I_x\}_{x\in X}$ $\mathfrak{M}(X, A)$, que foi definido no parágrafo anterior.

Tendo presente a demonstração da Proposição-II.1.3. consideramos a mudança de base dada pela função T_μ, isto é, seja $D_x = T_\mu(I_x)$, $x\in X$. Efetivamente o conjunto dos $\{D_x\}_{x\in X}$ formam uma base para $\mathfrak{M}(X, A)$ pois μ é inversível pela Proposição-II.1.6. Provaremos na proposição abaixo de modo mais explícito, que os $\{D_x\}_{x\in X}$ geram livremente o A-módulo $\mathfrak{M}(X, A)$.

2.1. PROPOSIÇÃO

Se $D_x = T_\mu(I_x) = \Sigma_{y(\leq x)} \mu(y,x)\, I_y$, nós temos que:

(i) $D_x(a) = \mu(a,x)$

(ii) $I_x = \Sigma_t D_t \zeta(t,x) = \Sigma_{t\leq x} D_t$

(iii) $\{D_x\}_{x\in X}$ formam uma base para $\mathfrak{M}(X, A)$

DEMONSTRAÇÃO: (i) $D_x = \Sigma_y \mu(y,x) I_y$ então $D_x(a) = \Sigma_y \mu(y,x) I_y(a) = \mu(a,x)$.

(ii) $\Sigma_t \mu(y,t) \zeta(t,x) = \delta(y,x) = I_x(y)$ então $\Sigma_{t\leq x} D_t = I_x$.

(iii) Por (ii) vemos que os $\{D_x\}_{x\in X}$ geram $\mathfrak{M}(X, A)$, mostremos então que eles são linearmente independentes. Temos que:
$c_1 D_{x_1} +\ldots+ c_n D_{x_n} = 0 \iff c_1 T_\mu(I_{x_1}) + \ldots + c_n T_\mu(I_{x_n}) = 0 \iff$

$\iff T_\mu(c_1 I_{x_1} +\ldots+ c_n I_{x_n}) = 0$, multiplicando por $T_{\mu^{-1}}$ ambos os lados da igualdade, vemos que $c_1 I_{x_1} + \ldots + c_n I_{x_n} = 0$ e como $\{I_x\}_{x\in X}$ são linearmente independentes, isto implica $c_1 = \ldots = c_n = 0$. ∎

Seja M um A-módulo e $\{w_i\}_{i=1}^n$ uma base de M. Definimos em M o seguinte produto: se $a = \Sigma_{i=1}^n a_i w_i$ e $b = \Sigma_{i=1}^n b_i w_i$ então $a \cdot_w b = \Sigma_{i=1}^n a_i b_i w_i$, obviamente este produto depende da base $\{w_i\}_{i=1}^n$. Nós vemos que relativamente a este produto os $\{w_i\}_{i=1}^n$ são idempotentes ortogonais, isto é, $w_i \cdot_w w_i = w_i$ e

$w_i \cdot_W w_j = 0$ se $i \neq j$. De fato: $w_1 = 1w_i$ então $w_i \cdot_W w_i =$ $= 1.1\, w_i = w_i$ e $w_i = 1w_i + 0w_j$, $w_j = 0w_i + 1w_j$ então $w_i \cdot_W w_j = 1.0\, w_j + 0.1w_j = 0$ se $i \neq j$.

De modo particular podemos definir o produto acima para o A-módulo $\mathfrak{M}(X, A)$ com base formada pelos $\{D_x\}_{x \in X}$, isto é, se $f = \Sigma_{i=1}^n a_i D_{x_i}$ e $g = \Sigma_{i=1}^n b_i D_{x_i}$ definimos $f \cdot_D g =$ $= \Sigma_{i=1}^n a_i b_i D_{x_i}$. Estamos aptos agora para definir a álgebra de Möbius de $(X,\leq)$.

2.2. DEFINIÇÃO

O A-módulo $\mathfrak{M}(X, A)$ munido com o produto "$\cdot_D$" será chamado álgebra de Möbius do conjunto parcialmente ordenado e finito $(X,\leq)$. (Quando A estiver fixado usaremos a notação $\mathfrak{M}_{\cdot_D}(X)$ ou simplesmente $\mathfrak{M}(X)$.

2.3. PROPOSIÇÃO

Se existe $x \wedge y$ em $(X,\leq)$ então $I_x \cdot_D I_y = I_{x \wedge y}$.

Em geral, tem-se que $I_a \cdot_D I_y = \Sigma_{s(\leq t)} \Big(\Sigma_{\substack{(s)\leq t\leq x \\ (s)\leq t\leq y}} \mu(s,t)\Big) I_s$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $\exists x \wedge y$ teremos:

$I_x \cdot_D I_y = \Sigma_t\, \zeta(t,x)\, \zeta(t,y) D_t = \Sigma_t\, \zeta(t,x \wedge y) D_y = I_{x \wedge y}$.

No caso geral temos:

$$I_x \cdot_D I_y = \Sigma_t\ \zeta(t,x)\ \zeta(t,y) D_t = \Sigma_t\ \zeta(t,x)\ \zeta(t,y)\ (\Sigma_s \mu(s,t) I_s) =$$

$$= \Sigma_{s(\leq t)}\ (\Sigma_t \zeta(t,x)\ \zeta(t,y)\ \mu(s,t)) I_s = \Sigma_{s(\leq t)} (\Sigma_{\substack{(s\leq)t\leq x \\ (s\leq)t\leq y}} \mu(s,t)) I_s ."$$

Pela proposição acima vemos que se L é um reticulado distributivo finito, como $\mathfrak{M}(L, A) = F(L, A)$ e $I_x \cdot_D I_y = I_{x \wedge y}$ nós temos que $(V(L, A), +, \cdot_\wedge) = (\mathfrak{M}(L,A)/_{M(L,A)}, +, \cdot_D) = (\mathfrak{M}(L, A)/(M(L, A), +, \cdot_\wedge)$. O teorema abaixo nos dá a relação precisa entre o anel de valorização e a álgebra de Möbius onde L é um reticulado distributivo finito.

2.4. TEOREMA

(Davis [7]) Seja L um reticulado distributivo finito então $V(L, A) \cong \mathfrak{M}_{\cdot D}(P(L), A)$, onde $P(L)$ é o parcialmente ordenado dos $\vee$-irredutíveis de L.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Notemos primeiro que como os $\{D_t\}_{t \in L}$ formam uma base para o A-módulo $\mathfrak{M}(L, A)$ e são ortogonais dois a dois (isto é, $D_{t_1} \cdot_D D_{t_2} = 0$ se $t_1 \neq t_2$), o ideal $M(L)$ é gerado pelos D_t tal que existe um $\alpha \in M(L)$ com $D_t \cdot_D \alpha \neq 0$. Com efeito, se $D_t \in M(L)$ então $D_t \cdot_D D_t = D_t \neq 0$. Reciprocamente, se $D_t \notin M(L)$ então para $\forall \alpha \in M(L)$ nós temos que $\alpha = \Sigma_{i=1}^n D_{t_i}$,

então $D_{t_i} \cdot_D \alpha = D_{t_i}$, como $M(L)$ é um ideal nós temos que $D_{t_i} \in M(L)$, para $\forall i$ e como $D_t \notin M(L)$ ocorre que $D_t \cdot_D D_{t_i} = 0$, $\forall i$, então $D_t \cdot_D \alpha = 0$, $\forall \alpha \in M(L)$.

Vejamos agora que $I_{x\vee y} + I_{x\wedge y} - I_x - I_y = \sum_{\substack{t\leq x\vee y \\ t\nleq x \\ t\nleq y}} D_t$.

De fato:

$$I_{x\vee y} = \sum_{t\leq x\vee y} D_t = \sum_{t\leq x} + \sum_{t\leq y} D_t - \sum_{t\leq x\wedge y} D_t +$$

$$+ \sum_{\substack{t\leq x\vee y \\ t\nleq x \\ t\nleq y}} D_t \quad \text{então} \quad \sum_{\substack{t\leq x\vee y \\ t\nleq x \\ t\nleq y}} D_t = \sum_{t\leq x\vee y} D_t + \sum_{t\leq x\wedge y} D_t -$$

$$- \sum_{t\leq x} D_t - \sum_{t\leq y} D_t = I_{x\vee y} + I_{x\wedge y} - I_x - I_y.$$

Notamos também que $M(L)$ é gerado pelos D_t com t v-redutível, pois se t é v-redutível existem $x,y<t$ (portanto $t\nleq x$ e $t\nleq y$) com $t = x\vee y$, então seja $I = I_{x\vee y} + I_{x\wedge y} - I_x - I_y =$

$= \sum_{\substack{k<x\vee y \\ k\nleq x \\ k\nleq y}} D_k + D_t$ então $D_t \cdot_D I = D_t \neq 0$, e pelo resultado aci-ma vemos que $D_t \in M(L)$. Reciprocamente, se $D_t \in M(L)$ então exis-te $I = I_{x\vee y} + I_{x\wedge y} - I_x - I_y$ tal que $D_t \cdot_D I \neq 0$ logo $D_t \cdot_D I = \sum_{\substack{k\leq x\vee y \\ k\nleq x \\ k\nleq y}} D_t \cdot D_k \neq 0$ portanto existe k tal que $k = t$, isto é,

$t \leq x \vee y$ e $t \not\leq x$ nem $t \not\leq y$ então t é v-redutível.

Observamos também que $I_x = \Sigma_{p \leq x} D_p + M(L)$, pois:

$$I_x = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in P(L)}} D_p + \sum_{\substack{t \leq x \\ t \text{ é v-redutível}}} D_t \quad \text{então}$$

$$I_x - \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in P(L)}} D_p \in M(L), \text{ portanto } I_x = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in P(L)}} D_p + M(L).$$

Dos resultados acima decorre que os D_p, $p \in P(L)$, formam uma base para $\mathfrak{M}(L, A)$, então a aplicação que associa $D_p + M(L)$ à D_p, se extende a um isomorfismo de $\mathfrak{M}(P(L), A)$ em $V(L, A)$, o qual leva cada $I_p \in \mathfrak{M}(P(L), A)$ em $I_p + M(L, A) \in V(L, A)$. De fato, essa aplicação é um isomorfismo, pois é imediato que ela preserva as operações; ela é sobre por acima, e é 1-1 pois se $D_p + M(L, A) = M(L, A)$ então $D_p \in M(L, A)$, o que é impossível, porque p é v-irredutível."

2.5. COROLÁRIO

Seja L um reticulado distributivo finito, e z o zero de L. Então existe em $V(L, A)$ uma base $\{e(p)\}_{p \in P(L)} \cup \{z\}$ formada por idempotentes ortogonais tal que $I_x + M(L, A) = I_z + \Sigma_{p \leq x}\, e(p)$, $\forall x \in L$. Todo elemento desta base será chamado um idempotente canônico.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos o isomorfismo ϕ do teorema anterior, isto é, $\phi: \mathfrak{M}(P(L), A) \longrightarrow V(L, A)$ e $\phi(I_p) = I_p + M(L, A)$. Então para qualquer x em L o teorema anterior afirma que $I_x + M(L, A) = \phi(\Sigma_{p\leq x} D_p) = \Sigma_{p\leq x} \phi(D_p)$, logo se fizermos $e(p) = \phi(D_p)$ nós provamos imediatamente este corolário.„

Usando os idempotentes canônicos, daremos agora um critério para saber quando é que f em $V(L, A)$ é um elemento de L. Seja $(X,\leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. $D\subseteq X$ é dito decrescente (crescente) se $y\in D$ e $x\in X$ com $x\leq y (y\leq x)$ então $x\in D$.

2.6. PROPOSIÇÃO

$f\in V(L, A)$ é um elemento de L se e só se existe um conjunto decrescente $D\subseteq P(L)$ tal que $f = z+\Sigma_p a(p)\, e(p)$ com $a(p) = 1$ se $p\in D$ e $a(p) = 0$ se $p\notin D$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $f\in V(L, A)$ é um elemento de L, nós sabemos que $f = z + \Sigma_p a(p)\, e(p)$ com $a(p) = 1$ se $p\leq f$ e $a(p) = 0$ se $p\nleq f$. Se $q\leq p$ e $a(p) = 1$ é claro que $a(q)=1$, portanto $\{p\in P(L);\ a(p) = 1\}$ é um subconjunto decrescente de $P(L)$. Reciprocamente, seja D um subconjunto decrescente de $P(L)$ e escrevamos $y = z + \Sigma_p a(p)\, e(p)$ com $a(p) = 1$ se $p\in D$ e $a(p) =0$ se $p\notin D$, e vejamos que $y\in L$. Seja $x = V(D \cup \{z\})$, em L. Logo $x = z + \Sigma_{q\leq x} e(q)$, resultando imediatamente que $y = x\in L$.„

Vemos assim que os elementos de L estão em correspondência biunívoca com as funções características dos subconjuntos decrescentes de $P(L)$. Este fato fornece uma prova do seguinte resultado clássico devido a Birkhoff.

2.7. COROLÁRIO

(Teorema de Birkhoff) Seja L um reticulado distributivo finito. Então L é isomorfo ao anel formado pelos subconjuntos decrescentes de $P(L)$.

Faremos agora duas interessantes observações, que nos auxiliará a entender melhor os idempotentes canônicos.

2.8. OBSERVAÇÃO

Notamos que a base $\{e(p)\}_{p\in P(L)} \cup \{z\}$ está caracterizada por: (i) $\{e(p)\}_{p\in P(L)} \cup \{z\}$ são idempotentes ortogonais, (ii) $\forall x\in L$, temos que $I_x + M(L, A) = \Sigma_{p\leq x}\, e(p)$. De fato, seja

$\{e'(p)\}_{p\in P(L)} \cup \{z\}$ uma base formada por idempotentes ortogonais, tal que para $\forall x\in L$, $I_x + M(L, A) = I_z + \Sigma_{p\leq x}\, e'(p)$. Consideremos $I: P(L) \longrightarrow V(L, A)$ dada por $i(x) = I_x + M(L, A)$ e $e' : P(L) \longrightarrow V(L, A)$ definida por $e'(p) = e'(p)$. Nós temos por hipótese que $i(p) = \Sigma_{q\leq p}\, e'(p)$ então pela fórmula de inversão de Möbius (Proposição-II.1.7) nós temos que:

$$e'(p) = \Sigma_{r\leq p}\, \mu(r,p)\; i(r) = \Sigma_{r\leq p}\, \mu(r,p)(I + M(L, A) = e(p).$$

2.9. OBSERVAÇÃO

Seja $x \in L$, e consideremos $x^o = \vee\{y \in L;\ y<x\}$. É claro que $x^o \leq x$. Temos que $x \neq x^o$ $(x^o<x)$ se e somente se $x \in P(L)$. Com efeito, se $x \in P(L)$ e $x = x^o$ então $x^o \leq y$ para algum $y<x$, absurdo. Se $x^o<x$, existe $p \in P(L)$ tal que $p \leq x$ e $p \nleq x^o$. Mas $p<x$ implica $p \leq x^o$, portanto $p=x$.

Vejamos que $e(p) = p - p^o$, para todo $p \in P(L)$. De fato, $p = \Sigma_{q \leq p}\, e(p) = \Sigma_{q \leq p^o}\, e(q) + e(p) = p^o + e(p)$, portanto $e(p) = p - p^o$. Temos assim um método bem simples, para calcular os idempotentes canônicos de um reticulado distributivo finito.

3. O TEOREMA DE GREENE

Neste parágrafo provaremos um resultado que estabelece condições para que uma função $\phi(X,\leq) \longrightarrow (Y,\leq)$ se extenda a um homomorfismo de $\mathfrak{M}_{\cdot D}(X, A)$, em $\mathfrak{M}_{\cdot D}(Y, A)$, onde $(X,\leq)$ e $(Y,\leq)$ são conjuntos parcialmente ordenados e finitos. Este resultado terá um corolário que nos será extremamente útil para o cálculo da função de Möbius.

Começamos o parágrafo com a seguinte proposição.

3.1. PROPOSIÇÃO

Seja $\phi:(X,\leq) \longrightarrow (Y,\leq)$ uma função, onde $(X,\leq)$ e $(Y,\leq)$ são conjuntos parcialmente ordenados. São equivalentes as seguintes condições: (i) ϕ e isótona (isto é, se $x \leq x' \Rightarrow$ $\Rightarrow \phi(x) \leq \phi(x')$) e existe $\psi:(Y,\leq) \longrightarrow (X,\leq)$ isótona tal que

$\psi \circ \phi \leq 1_X$ e $\phi \circ \psi \geq 1_Y$. (ii) $\phi^{-1}[y)$ é um filtro principal de $(X,\leq)$.

DEMONSTRAÇÃO: (i) $\longrightarrow$ (ii)

Notamos que $\phi^{-1}[y) \subseteq [\psi(y))$ (I), pois se $y' \in \phi^{-1}[y)$ então $\phi(y') \geq y \Rightarrow y' \geq \psi \circ \phi(y') \geq \psi(y)$ logo $y' \in [\psi(y))$. Por outro lado, temos que $[\psi(y)) \subseteq \phi^{-1}[y)$ (II), porque se $y' \in [\psi(y))$ então $y' \geq \psi(y)$ logo $\phi(y') \geq \phi \circ \psi(y) \geq y$ então $y' \in \phi^{-1}[y)$; de (I) e (II) concluimos que $\phi^{-1}[y) = [\psi(y))$, portanto $\phi^{-1}[(y)$ é filtro principal de $(X,\leq)$, isto é, vale (ii)

(ii) $\longrightarrow$ (i)

Se ϕ satisfizer (ii) ela é isótona, pois se $x \leq x'$ como $\phi^{-1}[\phi(x))$ que é filtro (principal) necessàriamente teremos que $x' \in \phi^{-1}[\phi(x))$, isto é, $\phi(x') \geq \phi(x)$. Seja $\psi : (Y,\leq) \longrightarrow$ $\longrightarrow (X,\leq)$ definida por : $\psi(y)$ é tal que $[\psi(y)) = \phi^{-1}[y)$. ψ é isótona porque se $y \leq y'$ então $[\psi(y')) = \phi^{-1}[y') \subseteq \phi^{-1}[y) = [\psi(y))$ então $\psi(y') \geq \psi(y)$.

$[\psi \circ \phi(x)) = \phi^{-1}[\phi(x))$ e como $x \in \phi^{-1}[\phi(x))$ nós temos que $x \in [\psi \circ \phi(x))$ então $\psi \circ \phi(x) \leq x$, isto é, $\psi \circ \phi \leq 1_X$.

$[\psi(y)) = \phi^{-1}[y)$ então $\psi(y) \in \phi^{-1}[y)$ então $\phi \circ \psi(y) \geq y$, portanto $\phi \circ \psi \geq 1_Y$.∎

3.2. DEFINIÇÃO

ϕ satisfazendo (i) ou (ii) da proposição acima é dita residuada.

Dada $\phi : (X,\leq) \longrightarrow (Y,\leq)$ uma função, onde $(X,\leq)$ e $(Y,\leq)$ são conjuntos parcialmente ordenados e finitos, seja $I : (X,\leq) \longrightarrow \mathcal{M}_{\cdot D}(X, A)$ dada por: $I(x) = I_x$ e $I : (Y,\leq) \longrightarrow \mathcal{M}_{\cdot D}(Y, A)$ definida também por $I(y) = I_y$, queremos obter o homomorfismo $h : \mathcal{M}_{\cdot D}(X, A) \longrightarrow \mathcal{M}_{\cdot D}(Y, A)$, tal que o diagrama abaixo comute

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "I"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "I"] \\ \mathcal{M}_{\cdot D}(X) \arrow[r, dashed] & \mathcal{M}_{\cdot D}(Y) \end{tikzcd}$$

(A), isto é, $h(I_x) = I_{\phi(x)}$

O teorema seguinte estabelece precisamente quais são as condições para que exista h satisfazendo (A).

3.3. TEOREMA

(Greene [7]) Sejam $(X,\leq)$ e $(Y,\leq)$ conjuntos parcialmente ordenados e finitos. Uma função $\phi : (X,\leq) \longrightarrow (Y,\leq)$ se extende a um homomorfismo da álgebra de Mobius de $(X,\leq)$ na álgebra de Mobius de $(Y,\leq)$ satisfazendo o diagrama (A) se e somente se ϕ é residuada. (Interpretamos $\phi : X \longrightarrow Y_o$, onde $Y_o = \{ y;\ \phi^{-1}[y) \neq \emptyset \}$. Vemos que $\mathrm{Im}\ \phi \subseteq Y_o$).

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: ($\Rightarrow$) Mostremos que ϕ ser residuada é uma condi-

ção necessária, isto é, vejamos que para cada $y \in Y_o$, $\phi^{-1}[y)$ tem um mínimo, portanto ele é um filtro principal. Se $x \in \phi^{-1}[y)$ então $\phi(x) \geq y$, logo: $\Sigma_{k\leq\phi(x)} D_k = I_{\phi(x)} = h(I_x) = h(\Sigma_{t\leq x} D_t) = \Sigma_{t\leq x} h(D_t)$ (1)

Como $y \leq \phi(x)$ então D_y ocorre como parcela em (1) então $\exists\, t_x \leq x$ tal que em (1) $h(D_{t_x}) = D_y + \Sigma$---(notemos que a base $\{D_x\}_{x\in X}$ é formada por elementos idempotentes ortogonais). Mostremos agora que $\exists!\, t_o$ tal que $t_o \leq x$, para $\forall x \in X$ e $h(D_{t_o}) = D_y + \Sigma$---. Isto é realmente verdade pois para x existe $t_x \leq x$ tal que $h(D_{t_x}) = D_y + \Sigma$---, e para x' existe $t_{x'} \leq x'$ tal que $h(D_{t_{x'}}) = D_y + \Sigma$---, então se $t_x \neq t_{x'}$ teríamos que:

$0 = h(D_{t_x} \cdot_D D_{t_{x'}}) = h(D_{t_x}) \cdot_D h(D_{t_{x'}}) = D_y + \Sigma$---, então $D_y = 0$, o que é um absurdo. Portanto $t_x = t_{x'}$ então nós realmente temos que para $\forall x \in X$, $\exists!\, t_o \leq x$ tal que $h(D_{t_o}) = D_y + \Sigma$---,

Mostremos agora que $t_o = \min\{x; \phi(x) \geq y\}$. Vemos pela própria definição de t_o, que para $\forall x \in X$ com $\phi(x) \geq y$ nós temos que $t_o \leq x$. Resta-nos apenas ver que $\phi(t_o) \geq y$. Mas isto é verdade pois:

$$\Sigma_{k\leq\phi(t_o)} D_k = I_{\phi(t_o)} = h(I_{t_o}) = h(\Sigma_{t\leq t_o} D_t) = h(D_{t_o}) + $$

$+\Sigma_{t\leq t_o} h(D_t) = D_y + \Sigma$---, então $\exists\, k \leq \phi(t_o)$ e $k=y$ logo $y \leq \phi(t_o)$.

(<=) Mostremos agora que ser residuada é também uma condição suficiente. Se ϕ é residuada, nós temos:

$X \xrightarrow{\phi} Y_o \xrightarrow{\psi} X$, ψ é isótona e $K_1 = \psi o\, \phi \leq 1_X$ e $K_2 =$ $= \phi o \psi \geq 1_{Y_o}$. Seja $h : \mathcal{M}._D(X, A) \longrightarrow \mathcal{M}._D(Y, A)$ definida na base de $\mathcal{M}._D(X)$ por:

$$h(D_x) = \begin{cases} 0 & \text{se } K_1(x) < x \\ \Sigma_{\substack{y \in Y \\ K_2(y) = \phi(x)}} D_y & \text{se } K_1(x) = x \end{cases}$$

Mostremos que h satisfaz o diagrama (A), isto é,

$$h(I_x) = h(\Sigma_{k \leq x} D_k) = \Sigma_{k \leq x} h(D_k) =$$

$= \Sigma_{\substack{k \leq x \\ K_1(k) = k}} h(D_k) = \Sigma_{\substack{k \leq x \\ K_1(k) = k}} (\Sigma_{\substack{t \\ K_2(t) = \phi(k)}} D_t)$ (1), temos também que $I_{\phi(x)} = \Sigma_{v \leq \phi(x)} D_v$ (2). Mostremos que os elementos que ocorrem como parcelas em (1) e (2) são os mesmos.

Se D_t ocorre em (1) então $t \leq K_2(t) \leq \phi(x)$, daí temos que D_t é uma parcela em (2). Reciprocamente se D_v ocorre como parcela em (2) seja $k = \psi(v)$ então $K_2(v) = \phi o \psi(v) = \phi(k))$ e nós temos que $v \leq \phi(x)$ então $\psi(v) \leq \psi o \phi(x) \leq x$, além disso temos que $K_1 k = k$ pois: $\psi o \phi(k) \leq k$ e $\phi o \psi(v) \geq v$ então $\psi o \phi o \psi(v) \geq \psi(v)$ então $K_1(k) \geq k$. Portanto D_v ocorre como parcela em (1).,,

A seguir daremos um corolário do teorema de Greene útil no cálculo da função de Mobius. Começaremos por dar algumas definições:

$K : (L,v,\wedge) \longrightarrow (L,v,\wedge)$, onde $(L, v,\wedge)$ é um reticulado, será chamado um operador de interior se:

(i) $K(x)\leq x$, (ii) $KK(x)$ e (iii) se $x\leq y \Rightarrow K(x)\leq K(y)$, para $\forall x,y \in L$.

K é um operador de interior seja $L/_K = \{x; K(x) = x\}$, cada x em $L/_K$ será chamado um aberto. Em $L/_K$ definimos as seguintes operações: $x \cup y = x v y$ e $x \cap y = K(x \wedge y)$. Nós vemos que $(L/_K, \cup, \cap)$ é um reticulado, dito o reticulado quociente de L por K. Temos então o seguinte resultado.

3.4. COROLÁRIO

(Rota [9]). Seja $(L/_K, \cup, \cap)$ o reticulado quociente de L por K então:

$$\sum_{\substack{t \\ K(t)=v}} \mu(t,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } K(y)<y \\ \mu_{L/_K}(v,y) & \text{se } K(y) = y \end{cases}$$

equivalente $\qquad \sum_t \delta(v,K(t))\mu(t,y) = \delta(K(y),y)\, \mu_{L/_K}(v,K(y))$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: $\phi : L \longrightarrow L/_K$ dada por: $\phi(x) = K(x)$

ϕ é residuada pois se escolhermos $\psi: L/_K \longrightarrow L/_K$

dada por $\psi(x) = x$, isto é, $\psi = id_{L/_K}$)

nós temos que : $\phi o \psi(x) = K(x) = x \geq x$ e $\psi o \phi(x) = K(x) \leq x$

Como ϕ é residuada pelo teorema acima nós temos o seguinte homomorfismo de $\mathcal{M}_D(L, A)$ em $\mathcal{M}_D(L/_K, A)$:

$$\Theta(D_x) = \begin{cases} 0 & \text{se } K(x) \leq x \\ \Sigma_{y \in L/_K} D_y & \text{se } K(x)=x \\ y=K(y)=K(x)=x & \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } K(x)<x \\ \\ D_x & \text{se } K(x)=x \end{cases}$$

então $\Theta : \mathcal{M}_D(L, A) \longrightarrow \mathcal{M}_D(L/_K, A)$ é dada por

$$I_x \xrightarrow{\Theta} I_{K(x)}$$

$$D_x \xrightarrow{\Theta} \delta(x, K(x) D_x$$

daí temos o resultado procurado pois:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{v;v \text{ é aberto}} \; I_v \mu_{L/_K}(v,y)\delta(K(y),y) & & \\ \| & & \\ \Sigma_y \; D_y \delta(K(y),\; y) & \xleftarrow{\quad\Theta\quad} & D_y \\ & & \| \\ \Sigma_t \; I_{K(t)} \mu(t,y) & \xleftarrow{\quad\Theta\quad} & \Sigma_t \; I_t \mu(t,y) \\ \| & & \\ \Sigma_v \; I_v \delta(v,\; K(y)\mu(t,y). & & \end{array}$$

Comparando os coeficientes dos I_v nós temos:

$$\Sigma_v \, \mu_{L/K} \delta(v,y) \; (K(y),y) = \Sigma_t \delta(v,K(t)) \mu(t,y) .$$ "

CAPÍTULO III

CÁLCULO DA FUNÇÃO DE MÖBIUS E UM TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO DE V(L, A).

Neste capítulo daremos um procedimento simples para se calcular a função de Möbius de um reticulado distributivo finito. Veremos também que todo anel de valorização pode ser interpretado como o anel gerado por certas funções características, e usando esta representação de $V(L, A)$ obteremos alguns interessantes resultados.

1. CÁLCULO DA FUNÇÃO DE MÖBIUS

Neste parágrafo daremos uma fórmula, que nos ajudará no cálculo da função de Möbius de qualquer reticulado distributivo finito. Começemos mostrando alguns resultados úteis nesta direção.

1.1. PROPOSIÇÃO

A função de Möbius de qualquer intervalo $[x, y]$ de $(P,\leq)$ é igual a função de Mobius de P restrita a $[x,y]$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Se $t, v \in [x,y]$ então $\mu_P(t, v) =$

$$\Sigma_{x\leq t\leq a<v\leq y} \mu_P(t,a) = \mu_{[x,y]}(t,v).$$

1.2. PROPOSIÇÃO

Sejam $(P,\leq)$ e $(Q,\leq)$ conjuntos parcialmente ordenados e finitos. A função de Mobius de $P \times Q$ é dada por:

$$\mu_{PxQ}\ [(x_1,x_2),(y_1,y_2)] = \mu_P(x_1,y_1)\cdot {}_Q(x_2,y_2),\ \forall x_1,\ y_1 \in P \text{ e } x_2,\ y_2 \in Q$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Seja $\psi\ [(x_1,x_2),(y_1,y_2)] = \mu_P(x_1,y_1)\cdot\mu_Q(x_2,y_2)$ $\forall x_1, y_1 \in P$ e $x_2,\ y_2 \in Q$. Mostremos que $\psi = \mu_{PxQ}$, isto é, que $\psi * \zeta_{PxQ}(x,y) = \delta(x,y) = \zeta_{PxQ} * \psi\,(x,y)$. Provaremos somente que $\psi * \zeta_{PxQ}(x,y) = \delta(x,y)$, pois a demonstração que $\zeta_{PxQ} * \psi\,(x,y) = \delta(x,y)$, é inteiramente análoga.

Seja $x = (x_1,\ x_2)$ e $y = (y_1,\ y_2)$ dois elementos quaisquer de PxQ e $t = (u,v) \in PxQ$, então temos:

$$\psi * \zeta_{PxQ}(x,y) = \Sigma_{(x\leq)t(\leq y)}\ \psi(x,t)\zeta(t,y) = \Sigma_{(x\leq)t\leq y}\ \psi(x,t) =$$

$$= \Sigma_{(x_1\leq)k\leq y_1}\ \mu_P(x_1,k)\ .\ \Sigma_{(x_2\leq)v\leq y_2}\ \mu_Q(x_2,v) =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 = y_1 \text{ e } x_2 = y_2, \text{ isto é, se } x = y \\ 0 & \text{se } x_1 \neq y_1 \text{ ou } x_2 \neq y_2, \text{ isto é, se } x \neq y \end{cases} = \delta(x,y)$$

1.3. COROLÁRIO

Sejam $(P_1,\leq)$, ---, $(P_n,\leq)$ conjuntos parcialmente ordenados e finitos. Então:

$$\mu_{P_1 x P_2 x --- x P_n}[(x_1,---,x_n),\ (y_1,---,y_n)] =$$

$$= \mu_{P_1}(x_1,\ y_1).---.\ \mu_{P_n}(x_n,y_n)$$

DEMONSTRAÇÃO: Por indução. "

1.4. COROLÁRIO

(Princípio da exclusão-inclusão).Seja P a álgebra Booleana de todos os subconjuntos do conjunto finito $\{a_1,---,a_n\}$. Então para $\forall X,\ Y \in P$ com $X \leq Y$ (isto é $X \subseteq Y$),

$\mu(X,\ Y) = (-1)^{n(Y)-n(X)}$, onde $n(X)$ denota o número de elementos do conjunto X.

DEMONSTRAÇÃO: Se a cada $X \in P$ associamos a n-upla $(x_1,---,x_n)$ tal que $x_i=1$ se $a_i \in P$ e $x_i = 0$ se $a_i \notin P$, vemos então que P é isomorfo ao produto carteziano de $\{0,1\}$ n vezes. Sejam $X \cong (x_1,---,x_n)$ e $Y \cong (y_1,---,y_n)$ em P com $X \leq Y$ isto é, $X \subseteq Y$) logo $x_i \leq y_i$, $\forall i$, portanto:

$\mu(X,Y) = \mu[(x_1,---,x_n),\ (y_1,...,y_n)] = \mu(x_1,y_1).---.\mu(x_n,y_n) =$
$= (-1)^{n(Y)-n(X)}$, pois os fatores deste produto são somente

1 ou -1, e eles valem -1 apenas quando $x_i = 0$ e $y_i = 1$, isto é, $a_i \in Y - X$."

Agora estamos aptos a calcular $\mu(x, y)$ para $\forall x, y \in L$, onde L é um reticulado distributivo finito. Comecemos definindo para cada a L o operador $K(a) = \bigvee_{\substack{a_i \leq a \\ a_i \text{ átomo}}} a_i$. Vemos que K é um operador de interior pois:

(a) $K(a) = \bigvee_{\substack{a_i \leq a \\ a_i \text{ átomo}}} a_i \leq a$

(b) se $a \leq b$ então qualquer átomo a_i com $a_i \leq a$ nós temos que $a_i \leq b$ então $K(a) \leq K(b)$

(c) $K(K(a)) = \bigvee_{\substack{a_i \leq K(a) \\ a_i \text{ átomo}}} a_i$, mas se $a_i \leq a$ e a_i é um átomo isto implica $a_i \leq K(a)$ então $K(K(a)) \geq K(a)$, mas por (a) sabemos que $K(K(a)) \leq K(a)$ logo $K(K(a)) = K(a)$, portanto realmente K é um operador de interior.

Tendo em mente o Corolário-II.3.4., consideremos o reticulado quociente de L por K $(L/_K, \cup, \cap)$. Seja $X = \{a;\ a$ é um átomo de $L\}$ e $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ a álgebra Booleana das partes de X. Notamos que $\phi : L/_K \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ definida por $\phi(a) = \{a_1, ---, a_n\}$ onde $a = K(a) = \bigvee^{n}_{\substack{i=1 \\ a_i \leq a \\ a_i \text{ átomo}}}$, é um isomorfismo.Portanto, $L/_K$ é isomorfo a uma álgebra Booleana, então poderemos, quando for necessário, lançar mão do Corolário-III-1.3 para calcular $\mu(a,b)$, $\forall a, b \in L/_K$.

Para calcular $\mu(x,y)$ basta, pela Proposição-III.1.1, considerarmos a restrição de μ a $[x,y]$, então, no intervalo $[x,y]$ x passa a ser o zero e os elementos que cobrem x tornam-se átomos. Então pelo Corolário-III.3.4 temos:

$$\mu(x,y) = -\Sigma_{x<t(\leq y)}\ \mu(t,y) = -\Sigma_v(\Sigma_{\substack{x<t(\leq y)\\ K(t)=v}}\ \mu(t,y))$$

Seja $\mu_o = \mu/L/_K$, se $K(y) \leq y$ então $\mu_o(v,y) = 0$ para $\forall v$, logo $\mu(x,y) = 0$. Já se $K(y) = y$ ocorre o seguinte:

$$-\Sigma_v(\Sigma_{\substack{x<t(\leq y)\\ K(t)=v}}\ \mu(t,y)) = -\Sigma_v\ \mu_o(v,y) = -\Sigma_v(-1)^{n(y)-n(v)} =$$

$=-\Sigma_{h=1}^{n(y)} \binom{n(y)}{h} (-1)^{n(y)-h}$. Por outro lado temos que

$(1+(-1))^{n(y)} = \Sigma_{h=0}^{n(y)} \binom{n(y)}{h} 1^{n(y)}.(-1)^{n(y)-h}$ então

$0 = \binom{n(y)}{0} . (-1)^{n(y)} + \Sigma_{h=1}^{n(y)} \binom{n(y)}{h}. (-1)^{n(y)-h}$ logo

$0 = (-1)^{n(y)} - \mu(x,y)$, então $\mu(x,y) = (-1)^{n(y)}$.

Portanto, concluimos pelo que foi feito que:

$\mu(x,y) = 0$ se $K(y)<y$, isto é, se y não for o supremo dos elementos que cobrem x; e $\mu(x,y) = (-1)^n$ se y é o supremo de n elementos que cobrem x.

1.4. OBSERVAÇÃO

A função de Möbius clássica $\mu(n)$ é definida como $(-1)^k$ se n é o produto de k primos distintos e 0 em caso contrário. Esta fórmula pode ser considerada como um caso particular da definição de função de Möbius dada no capítulo-II. De fato, definamos em $\mathbb{N}$ a seguinte relação de ordem:

$a \leq b$ em $\mathbb{N} \iff a/b$ (a divide b). Vemos que $(\mathbb{N}, \leq)$ é localmente finito, $a \vee b = \text{m.m.c}\{a,b\}$ e $a \wedge b = \text{md.c}\{a,b\}$, portanto $(\mathbb{N}, \vee, \wedge)$ é um reticulado distributivo localmente finito, então se definirmos $\mu(n) = \mu(o,n)$ temos que: $\mu(n) = \mu(o,n) = 0$ se n não é supremo de primos distintos (que são átomos) abaixo de n cobrindo 0 e $\mu(n) = (-1)^k$ se n é o supremo de k primos distintos cobrindo 0, isto é, $n = p_1 \cdot --- \cdot p_k$ com p_i primo, portanto realmente a definição de função de Möbius dada no capítulo-II generaliza a definição clássica em teoria dos números. ‖

2. UMA REPRESENTAÇÃO DE $V(L, A)$.

Veremos neste parágrafo que se $\lambda: K \longrightarrow L$ é um monomorfismo entre reticulados distributivos finitos, então λ induz um monomorfismo $\lambda^e: (V(K),A) \longrightarrow (V(L),A)$.

Daremos também, uma representação de $V(L, A)$ como um anel gerado por função características. Iniciamos a nossa tarefa com a importante proposição seguinte.

2.1. PROPOSIÇÃO

Sejam K, L reticulados distributivos finitos e consideremos um monomorfismo $\lambda: K \longrightarrow L$. Então a aplicação λ^e induzida por λ dada por $\lambda^e : V(K, A) \longrightarrow V(L, A)$ com $\lambda^e(\Sigma_{i=1}^n \; a_i \; I_{x_i} + M(K, A)) = \Sigma_{i=1}^n \; a_i \; I_{\lambda(x_i)} + M(L, A)$, é também um monomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $p \in P(L)$ (conjunto dos V-irredutíveis de L), então $\lambda^{-1}[p)$ é um filtro primo de K, e como K é finito então ele é gerado por um certo $q \in P(K)$ (conjunto dos V-irredutíveis de K). Logo está bem definida a função $\phi : P(L) \longrightarrow$ $\longrightarrow P(K)$ dada por: $\phi(p) = \Lambda(k \in K;\ \lambda(k) \geq p) = q$, onde $[q) = \lambda^{-1}[p)$.

Mostremos agora que ϕ é sobre. Com esse propósito vamos dividir a demonstração em dois casos:

(i) se $\lambda(q) \in P(L)$, com q em $P(K)$, e (ii) se $\lambda(q) \notin P(L)$, com q em $P(K)$.

(i) se $\lambda(q) \in P(L)$ tomemos $p = \lambda(q)$ e mostremos que $\phi(p) = q$. Isto é verdade pois: $\lambda(k) \geq \lambda(q) \iff \lambda(k) \vee \lambda(q) = \lambda(k) \iff$ $\iff \lambda(k \vee q) = \lambda(k) \underset{1-1}{\overset{\lambda \text{ é}}{\iff}} k \vee q = k \iff k \geq q$, logo $\phi(p) = \phi(\lambda(q)) =$ $= \Lambda(k \in K;\ \lambda(k) \geq \lambda(q)) = q$.

(ii) se $\lambda(q)\notin P(L)$ então $\lambda(q) = \bigvee_{i=1}^{n} p_i$, mostremos que existe i, $1\leq i\leq n$ tal que: $\lambda(k)\geq p_i$ implica $k\geq q$ Por absurdo, suponhamos que existam $k_1,\dots,k_n$ em K tais que: $\lambda(k_i)\geq p_i$ e $k_i\not\geq q$, para $\forall i$, temos então:

$$\lambda(\bigvee_{i=1}^{n} k_i) = \bigvee_{i=1}^{n} \lambda(k_i) \geq \bigvee_{i=1}^{n} p_i = \lambda(q)$$

logo como λ é 1-1 ocorre que $\bigvee_{i=1}^{n} k_i\geq q$, e como $q\in P(K)$ isto acarreta $q\leq k_i$ para algum i, o que é absurdo. Portanto, tomemos um i_o tal que $\lambda(k)\geq p_{i_o}$ implique $k\geq q$, para $\forall k\in K$, e vemos imediatamente que $\phi(p_{i_o})=q$. Logo ϕ é sobre.

Seja $\lambda^{e'}: \mathfrak{M}(P(K), A) \longrightarrow \mathfrak{M}(P(L),A)$ o seguinte homomorfismo, definido na base de $\mathfrak{M}(P(K),A)$ por: $\lambda^{e'}(D_q) = \sum_{\substack{p\\ \phi(p)=a}} D_p$. Vemos que $\lambda^{e'}$ é 1-1 pois: se $D_{q_1}\neq D_{q_2}$ temos que $q_1\neq q_2$, e como ϕ é sobre existem p_1 e $p_2\in P(L)$ tais que $\phi(p_1) = q_1$ e $\phi(p_2) = q_2$, então resulta imediatamente que $\lambda^{e'}(D_{q_1}) \neq \lambda^{e'}(D_{q_2})$.

Temos agora o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V(K,A) \arrow[r, dashed, "\lambda^{e}"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (V(L,A)) \arrow[d, "s"] \\
\mathfrak{M}(P(K),A) \arrow[r, "\lambda^{e'}"'] & \mathfrak{M}(P(L),A)
\end{tikzcd}$$

onde h,s são os isomorfismos dado pelo Teorema-II.2.4.

Tomemos $\lambda^e = s^{-1} \circ \lambda^{e'} \circ h\colon V(K, A) \longrightarrow V(L, A)$. Vemos que λ^e é isomorfismo como composta de monomorfismos. Mostremos que $\lambda^e(I_x + M(K, A)) = I_{\lambda(x)} + M(L, A)$, mas isto é verdade pois:

$$I_x + M(K, A) = \Sigma_{\substack{q\leq x\\ q\in P(K)}} D_q + M(K, A) \xrightarrow{h} \Sigma_{\substack{q\leq x\\ q\in P(K)^-}} D_q \xrightarrow{\lambda e'}$$

$$\xrightarrow{\lambda^{e'}} \Sigma_{\substack{q\leq x\\ q\in P(K)}} (\Sigma_{\substack{p\\ \phi(p)=q\\ p\in P(L)}} D_p) \xrightarrow{s^{-1}} \Sigma_{\substack{q\leq x\\ q\in P(K)}} (\Sigma_{\substack{p\\ \phi(p)=q}} D_p) + M(L,A) \quad (I)$$

Por outro lado $I_{\lambda(x)} + M(L,A) = \Sigma_{\substack{p\leq\lambda(x)\\ p\in P(L)}} D_p + M(L, A)$ (II).

Queremos provar que os elementos que ocorrem em (I) e (II) são os mesmos, mas isso é realmente verdade; pois se D_p é uma parcela de (I) temos que $q\leq x$ então $\lambda(q)\leq\lambda(x)$ e como $\phi(p) = q = \Lambda(k\in K;\ \lambda(k)\geq p)$, isto acarreta $\lambda(q)\geq p$ então $\lambda(x)\geq p$, portanto D_p ocorre como parcela em (II). Reciprocamente, se D_p é uma parcela de (II) então $p\leq\lambda(x)$, com x em K, logo $q = \phi(p)\leq x$ então D_p ocorre como parcela em (I), portanto $\lambda^e(I_x + M(K, A)) = I_{\lambda(x)} + M(L, A)$, e mais geralmente para qualquer $\Sigma_{i=1}^n a_i I_{x_i} + M(K, A) \in V(K, A)$ nós temos que:

$$\lambda^e(\Sigma_{i=1}^n a_i I_{x_i} + M(K, A)) = \Sigma_{i=1}^n a_i\lambda^e(I_{x_i} + M(K, A)) =$$

$= \Sigma_{i=1}^{n} a_i I_{\lambda(x_i)} + M(L, A)$, que é justamente o que queríamos provar.„

2.2. COROLÁRIO

Sejam $B_1, ---, B_r$ elementos de um reticulado distributivo L. Se $\Sigma_{i=1}^{r} a_i B_i = 0$ $(\neq 0)$ em $V(L, A)$ seja M o subreticulado finito gerado por $B_1, ---, B_r$ então

$$\Sigma_{i=1}^{r} a_i B_i = 0 (\neq 0) \quad \text{em} \quad V(M, A).$$

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que em $V(L, A)$, $\Sigma_{k=1}^{r} a_k B_k = 0 (\neq 0)$. Da construção do anel de valorização resulta que $\Sigma_k a_k B_k$ é uma combinação linear de elementos da forma $C_i \vee D_i + C_i \wedge D_i - C_i - D_i$, C_i e $D_i \in L$ (se $\Sigma_k a_k B_k \neq 0$, então não é combinação linear dos C_i e D_i). Seja N o subreticulado finito gerado por todos os B_k, C_i e D_i, logo em $V(N, A)$ temos que $\Sigma_k a_k B_k = 0$ $(\neq 0)$. Mas como N é finito e $M \subseteq N$ então $i^e: V(M, A) \longrightarrow V(N,A)$ dada por $i^e (I_x + M(M, A)) = I_x + M(N, A)$, temos pela proposição acima que i^e é monomorfismo logo $\Sigma_k a_k B_k = 0 (\neq 0)$ em $V(M, A) \iff \Sigma_k a_k B_k = 0 (\neq 0)$ em $V(N, A) \iff \Sigma_k a_k B_k = 0 (\neq 0)$ em $V(L, A)$.„

Nossos próximos passos serão dados no sentido de representarmos $V(L, A)$ por um anel formado de funções características. Com esse propósito seja L um reticulado distributivo formado por subconjuntos de um conjunto X. Para cada A_i em L seja $C_{A_i}: X \longrightarrow (A,+,.)$ dada por $C_{A_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A_i \\ 0 & \text{se } x \notin A_i \end{cases}$

Seja $S(L, A) = \{ \Sigma_{i=1}^{n} a_i C_{A_i}, A_i \in L, a_i \in A \}$. Definimos em $S(L, A)$ uma soma e um produto, do seguinte modo:

$$(\Sigma_{i=1}^{n} a_i C_{A_i} + \Sigma_{i=1}^{n} a_i' C_{A_i})(x) = \Sigma_{i=1}^{n} a_i C_{A_i}(x) + \Sigma_{i=1}^{n} a_i' C_{A_i}(x)$$

$$(\Sigma_{i=1}^{n} a_i C_{A_i} . \Sigma a_i' C_{A_i})(x) = \Sigma_{i=1}^{n} a_i C_{A_i}(x) . \Sigma_{i=1}^{n} a_i' C_{A_i}(x)$$

Resulta imediatamente que $(S(L, A),+,.)$ é um anel, o qual chamaremos de anel das funções simples gerado sobre $(A,+,.)$ pelas funções características de elementos em L.

Tendo em mente que qualquer reticulado distributivo é isomorfo a um reticulado distributivo formado por subconjuntos de um conjunto X, então o teorema seguinte estabelece um isomorfismo de $V(L, A)$ em $S(L, A)$, para qualquer reticulado distributivo L.

2.3. TEOREMA (Geissinger [4])

Seja L um reticulado de subconjuntos de um conjunto X, então $(V(L, A), +, \cdot_A) \cong (S(L, A),+,.)$.

<u>DEMONSTRAÇÃO:</u> Seja $\phi : L \longrightarrow S(L)$ dada por: $\phi(A) = C_A$.

ϕ é valorização pois $\phi(A \cup B) + \phi(A \cap B) = C_{A \cup B} + C_{A \cap B} = C_A + C_B =$ $= \phi(A) + \phi(B)$, ϕ preserva o produto porque $\phi(A.B) = C_{A \cap B} =$ $C_A \cdot C_B = \phi(A) . \phi(B)$, então vemos imediatamente que ϕ se extende a um homomorfismo linear $\hat{\phi} : V(L) \longrightarrow S(L)$ dado por:

$\hat{\phi}\ (\Sigma_{i=1}^{n} a_i A_i + M(L, A)) = \Sigma_{i=1}^{n} a_i \phi(A_i) = \Sigma_{i=1}^{n} a_i C_{A_i}$. É óbvio $\hat{\phi}$ é sobre, resta-nos ver que ela é 1-1, isto é, se $\Sigma_{i=1}^{n} a_i C_{A_i} = 0$ queremos provar que $\Sigma_{i=1}^{n} a_i, A_i = 0$ em $V(L)$.

Seja M o subreticulado finito gerado por $A_1, ---, A_n$ então é suficiente provarmos que $V(M, A) \cong S(M, A)$; pois se isto ocorrer temos que $\Sigma_{i=1}^{n} a_i C_{A_i} = 0$ em $V(M, A)$, logo pelo Corolário-III.2.2. $\Sigma_{i=1}^{n} a_i A_i = 0$ em $V(L, A)$ e então $\hat{\phi}$ é 1-1. Resta-nos ver somente que $V(M, A) \cong S(M, A)$, mas isto é verdade pois se B é V-irredutível seja B^o elemento maximal de M propriamente contido em B, se $x \in B - B^o$ então $x \notin A$ para qualquer $A \in M$ com $A \not\supseteq B$, porque se x pertencesse a $A \in M$ com $A \not\supseteq B$, se considerássemo B^o $A \cap B$, teríamos que $x \notin A \cap B$ e $x \in B^o$ logo $B^o \subsetneqq$ $\subsetneqq B^o \cup A\ B = B$, e como B^o é maximal ocorre que $B = B^o \cup A\ B$ com $B^o \neq B$ e $A \cap B \neq B$, o que nos leva a um absurdo, pois B é v-irredutível.

Vemos agora que C_B é linearmente independente de C_A, para qualquer A não vazio em M com $A \not\supseteq B$ pois: se $a\ C_A +$ $+ b\ C_B = 0$, seja $x \in B - B^o$ logo $x \notin A$, então $a\ C_A(x) + b\ C_B(x) =$ $= b\ C_B(x) = b = 0$, e como A não é vazio concluímos também que

$a = 0$.

Finalmente, vejamos que os C_B, com $B \in P(M)$ (conjunto dos V-irredutíveis de M) são linearmente independentes. Seja $\{B_1, ---, B_r\} \subseteq P(M)$; tomando B_r como um elemento maximal desse conjunto, então $B_i \not\supseteq B_r$ se $i \neq r$, considerando $x_r \in B_r - B_r^o$, temos que $c_r \notin B_i$ para $\forall i \neq r$, logo se $b_1 C_{B_1} + --- + b_r C_{B_r} = 0$ então $b_1 C_{B_1}(x_r) + --- + b_r C_{B_r}(x_r) = 0$ e isto acarreta $b_r = 0$. Repetindo o argumento para $\{B_1, ---, B_{r-1}\}$, vemos que $b_1 = b_2 = --- = b_{r-1} = b_r = 0$, portanto $\{C_{B_i}\}_{i=1}^r$ são linearmente independentes, concluímos então que os C_B, $B \in P(M)$ formam uma base para $S(M, A)$.

Vemos então que $V(M, A)$ e $S(M, A)$ tem a mesma dimensão pois os B, $B \in P(M)$ formam uma base para $V(M, A)$ pelo Teorema-I.36. Além disso, seja $\phi|_{V(M,A)}: V(M, A) \longrightarrow S(M, A)$ dado por: $\phi|_{V(M,A)} (\Sigma_{i=1}^n a_i M_i) = \Sigma_{i=1}^n a_i C_{M_i}$. $\phi|_{V(M,A)}$ é obviamente sobre e como $\dim V(M,A) = \dim S(M,A) < \infty$, $\phi|_{V(M,A)}$ é o isomorfismo procurado.„

3. APLICAÇÕES DO TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO DE GEISSINGER.

Veremos neste parágrafo que $V(L_1, A)$ pode ser isomorfo a $V(L_2, A)$ sem que L_1 seja isomorfo a L_2. Calcularemos $V(\wp(X), A)$, onde $(\wp(X), \cup, \cap)$ é o reticulado das partes de um conjunto finito X.

Seja $(X,\leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. $D \subseteq X$ é dito decrescente se $x \in D$ e $y \in X$ com $y \leq x$, nós temos necessariamente que $y \in D$. Seja $L(X) = \{D \subseteq X ; D$ é decrescente$\}$, observamos que se $D_1, D_2 \; L(X)$ então $D_1 \cup D_2$ e $D_1 \cap D_2 \in L(X)$, portanto $(L(X),\cup,\cap)$ é um reticulado distributivo formado de partes de um conjunto parcialmente ordenado $(X,\leq)$. Temos então o seguinte resultado.

3.1. TEOREMA

Seja $(L(X),\cup\ \cap)$ o reticulado distributivo dos subconjuntos decrescentes do conjunto parcialmente ordenado $(X,\leq)$. Se $(B,\cup,\cap)$ é a álgebra de Boole gerada por $(L(X),\cup,\cap)$ então $V(L(X),\ A) \cong V(B,A)$. Notamos que quando $(X,\leq)$ é finito, B será a álgebra de Boole de todos os subconjuntos de X.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Pelo Teorema-III.2.3., basta provarmos que $S(L(X),\ A) \cong S(B,\ A)$. Como $L(X) \subseteq B$, consideremos $i : S(L(X),\ A) \xrightarrow{\text{inclusão}} B$ dada por: $i(x) = x$. É claro que i é monomorfismo. Resta-nos ver que i é sobre. Observamos que $C_{A^c} \in \operatorname{Im} i$ para qualquer A em $L(X)$, pois $i(C_X - C_A) = C_X - C_{A^c}$. Se $A \in B$ então $A = \cap_{j=1}^{m}(\cup_{i=1}^{n} A_{ij})$, com $A_j \in L(X)$ ou $A_j^c \in L(X)$. Logo, temos:

$$C_{\cup_{i=1}^{n} A_{ij}} = \Sigma_{i=1}^{n} C_{A_{ij}} - C_{\cap_{i=1}^{n} A_{ij}} = \Sigma_{i=1}^{n} C_{A_{ij}} - \pi_{i=1}^{n} C_{A_{ij}} \in$$

Im i, porque cada parcela ou fator está na imagem de i, então:

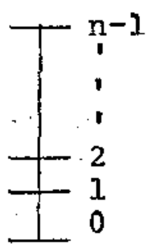
$C_A = C_{\bigcap_{j=1}^{m}(\bigcup_{i=1}^{n} A_{ij})} = \pi_{j=1}^{m}\, C_{\bigcup_{j=1}^{m} A_{ij}} \in \mathrm{Im}\, i$, porque cada fator está na imagem de i, portanto i é o isomorfismo desejado.

3.2. COROLÁRIO

Seja $L = \wp(X)$ o reticulado distributivo das partes de um conjunto X com n elementos, então $V(\wp(X), A) \cong A^{n+1}$

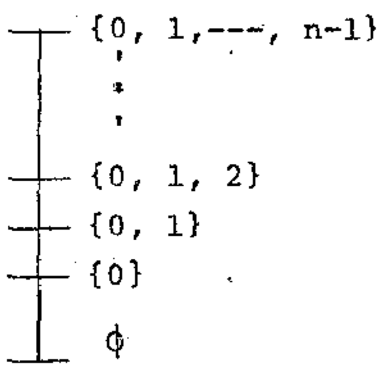
<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Seja $X = \{0, 1, 2, ---, n-1\}$ uma cadeia com n elementos.

X =



Temos que $L(X)$ é igual a uma cadeia com n+1 elementos

L(X) =

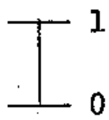


então pelo Exemplo-I.2.5. $V(L(X), A) \cong (A^{n+1}, +, \cdot_A)$. Como a álgebra de Boole gerada por $L(X)$ é igual a $\wp(X)$, temos pelo teorema acima que $V(\wp(X), A) \cong V(L(X), A)$, portanto $V(\wp(X), A) \cong$
$\cong V(L(X), A)$, portanto $V(\wp(X), A) \cong A^{n+1}$.∎

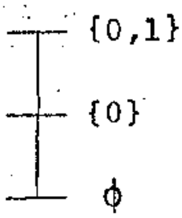
Vamos agora terminar o parágrafo com uma interessante observação.

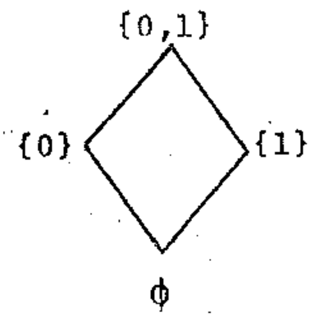
3.3. OBSERVAÇÃO

Notamos que $V(L_1)$ pode ser isomorfo a $V(L_2)$ sem que L_1 seja isomorfo a L_2, como o exemplo abaixo nos mostra.

Se $X =$ 

uma cadeia com 2 elementos então

$L_1 = L(X) =$ 

e $L_2 = B = (X) =$ 

e vemos que $L_1 = L(X) \ncong B = \wp(X)$, pois $L(X)$ tem três elementos e B quatro, no entanto pelo Teorema-III.3.1. $V(L_1,A) = V(L(X), A) \cong V(B, A)$. Esta observação justifica o fato de que os objetos na categoria dos anéis de valorização sejam pares $(V(L), L)$, pois se eles fossem somente os $V(L)$, teríamos que o funtor anel de valorização não seria injetivo.

CAPÍTULO IV

LINEARIZAÇÃO DE ÁLGEBRAS DE LUKASIEWICZ

Neste capítulo tentaremos linearizar as álgebras de Lukasiewicz trivalentes, isto é, associaremos a cada álgebra de Lukasiewicz trivalente A o seu $\mathbb{Z}$-módulo de valorização $V(A)$. As definições dos operadores de possibilidade (∇) e necessidade (Δ), de negação e de implicação de Lukasiewicz dadas em A, serão extendidos para $V(A)$. Quando A for finito, obteremos uma caracterização das extensões de ∇ e Δ seguindo as idéias contidas em [10].

1. DEFINIÇÕESE PROPRIEDADES PRINCIPAIS

Neste parágrafo daremos as principais definições e propriedades das álgebras de Lukasiewicz trivalentes. Um estudo mais detalhado e completo do material contido neste parágrafo será encontrado em [1], [2] e [8].

1.1. DEFINIÇÃO

Seja $(A, \vee, \wedge)$ um reticulado distributivo. Se definimos sobre A uma operação unária "$\sim$", tal que:

(M1) $\sim\sim x = x$ (M2) $\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$, chamaremos o sistema $(A, \vee, \wedge, \sim)$ de um reticulado de De Morgan. Se a o peração unária também verificar a condição (K) $x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y$, diremos que $(A, \vee, \wedge, \sim)$ é um reticulado de Kleene.

1.2. DEFINIÇÃO

Uma álgebra de Lukasiewicz trivalente é um sistema $(A, u, z, \vee, \wedge, \sim, \nabla)$ tal que $(A, u, z, \vee, \wedge, \sim)$ é uma álgebra de Kleene com zero (z) e um (u), e ∇ é um operador unário definido sobre A, que satisfaz os seguintes axiomas:

(L_1) $\nabla(x \wedge y) \leq \nabla x \wedge \nabla y$

(L_2) $\sim x \vee \nabla_x = 1$

(L_3) $x \wedge \sim x = \sim x \vee \nabla x$

Seja B(A) o conjunto dos elementos Booleanos de A, isto é, $B(A) = \{x \in A;\ \exists - x \in A$ tal que $x \vee - x = u$ e $x \wedge - x = z\}$. Por [1], sabemos que uma álgebra de Lukasiewicz trivalente tem as seguintes propriedades:

(L_4) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$

(L_5) $\nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$

(L_6) $x \leq \nabla x$

(L_7) $\nabla\nabla x = \nabla x$

(L_8) $\nabla x = x$ se e só se $x \in B(A)$

(L_9) $\nabla z = z$ e $\nabla u = u$

(L_{10}) $\nabla x = \min \{b \in B(A);\ x \leq b\}$

(L_{11}) se definimos $\Delta x = \max \{b \in B(A);\ b \leq x\}$ então $x \leq y \iff$

$\Delta x \leq \Delta y$ e $\nabla x \leq \nabla y$ (princípio de determinação de Moisil)

Vamos agora enunciar um teorema que nos será útil no parágrafo seguinte:

1.3. TEOREMA([2])

Consideremos um sistema $(A, u, z, v, \wedge, \sim, \nabla, \Delta)$, onde $(A, u, z, v, \wedge)$ é um reticulado distributivo com zero (z) e um (u). Além disso, $\nabla : A \longrightarrow A$ satisfaz as seguintes condições:

(1) $\nabla z = z$ (2) $\nabla(x v y) = \nabla x \; v \; \nabla y$

(2) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$ (4) $x \leq \nabla x$

(5) $\nabla\nabla x = \nabla x$ (6) $\nabla x \in B(A)$.

Dualmente, $\Delta : A \longrightarrow A$ satisfaz as seguintes condições:

(1') $\Delta u = u$ (2') $\Delta(x v y) = \Delta x \; v \; \Delta y$

(3') $\Delta(x \wedge y) = \Delta x \wedge \Delta y$ (4') $\Delta x \leq x$

(5') $\Delta\Delta x = \Delta x$ (6') $\Delta x \in B(A)$

(M) se $\Delta x = \Delta y$ e $\nabla x = \nabla y$ então $x = y$

Se definimos $\sim x = (-\Delta x \wedge x) v - \nabla x$, então o sistema

$(A, u, z, v, \wedge, \sim, \nabla)$ é uma álgebra de Lukasiewicz trivalente. Reciprocamente, seja $(A, u, z, v, \wedge, \nabla)$ uma ágebra de Lukasiewicz trivalente, se definimos $\Delta x = \sim \nabla(\sim x)$, então o sistema $(A, u, x, v, \wedge, \sim, \Delta, \nabla)$ é tal que, $(A, u, z, v, \wedge)$ é um reticulado distributivo com zero e um, além disso vale (1)-(6), (1')-(6') e (M).."

Numa álgebra de Lukasiewicz trivalente A, podemos definir uma implicação chamada de implicação fraca, dada por: $a \longmapsto b = \nabla(\sim a) \vee b$. Se todo elemento de A tem complemento, a implicação fraca coincide com a implicação da lógica clássica. Definimos a implicação de Lukasiewicz "$\rightarrowtail$" em A, do seguinte modo (Ver [8]):

$$a \rightarrowtail b = (a \longmapsto b) \wedge (\sim b \longmapsto \sim a) = [\nabla(\sim a) \vee b] \wedge [\nabla(b) \vee \sim a]$$

2. O ANEL DE VALORIZAÇÃO DE UMA ÁLGEBRA DE LUKASIEWICZ TRIVALENTE.

Neste parágrafo tentaremos extender as definições de ∇, Δ, $\sim$ e $\rightarrowtail$ para o anel $V(A)$, e estudaremos também algumas propriedades dessas extensões. Obteremos uma caracterização das extensões dos operadores ∇ e Δ. Para facilitar a redação, consideraremos em todo esse parágrafo $A \subseteq V(A)$, identificando I_x com $I_x + M(A)$.

Seja A uma álgebra de Lukasiewicz trivalente. Como

$\nabla: A \longrightarrow A$ ($\Delta : A \longrightarrow A$) é um homomorfismo de reticulados, pela Preposição-I.1.4. sabemos que ele se extende a um homomorfismo de anéis $\bar{\nabla} : V(A) \longrightarrow V(A)$ ($\bar{\Delta} : V(A)$ definido por: $\bar{\nabla}(\Sigma_{i=1}^{n} c_i x_i) = \Sigma_{i=1}^{n} c_i \nabla(x_i)$ $(\bar{\Delta}(\Sigma_{i=1}^{n} c_i x_i) = \Sigma_{i=1}^{n} c_i \Delta x_i)$.

As principais propriedades de $\bar{\nabla}$ e $\bar{\Delta}$, estão resumidas na seguinte proposição.

2.1. PROPOSIÇÃO

Seja $\bar{\nabla} : V(A) \longrightarrow V(A)$ dada por: $\bar{\nabla}(\Sigma_i c_i x_i) = \Sigma_i c_i \nabla x_i$. $\bar{\nabla}$ satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\bar{\nabla}$ é linear

(b) se $x \in A \Rightarrow \bar{\nabla}x \in A$

(c) $\bar{\nabla}z = z$ e $\bar{\nabla}u = u$

(d) $\bar{\nabla}(f \cdot_{\wedge} g) = \bar{\nabla}f \cdot_{\wedge} \bar{\nabla}g$, $\forall f,g \in V(A)$

(e) $\bar{\nabla}x \geq x$, se $x \in A$

(f) $\bar{\nabla}^2 = \bar{\nabla}$

(g) $\bar{\nabla}x$ é Booleano, para $\forall x \in A$

(h) $\bar{\nabla}f = f \Longleftrightarrow f \in \operatorname{Im}\bar{\nabla}$

(i) $\varepsilon(\bar{\nabla}f) = \varepsilon(f)$

(j) $f \in \operatorname{Im}\bar{\nabla} \Rightarrow \tau(f) \in \operatorname{Im}\bar{\nabla}$.

Dualmente, seja $\bar{\Delta} : V(A) \longrightarrow V(A)$ definida por: $\bar{\Delta}(\Sigma_i c_i x_i) = \Sigma_i c_i \Delta x_i$. $\bar{\Delta}$ satisfaz (a)-(d), (f)-(j), e ainda:

(e') $\bar{\Delta}x \leq x$, para $\forall x \in A$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: (a) $\bar{\nabla}$ é linear, pois se $f = \Sigma_i c_i x_i$ e $g = \Sigma_i c_i' x_i$ então $\bar{\nabla}(f+g) = \bar{\nabla}(\Sigma_i (c_i+c_i')x_i) = \Sigma_i (c_i+c_i') \nabla x_i =$

$= \Sigma_i c_i x_i + \Sigma_i c_i' x_i = \bar{\nabla}f + \bar{\nabla}g$. Se $k \in \mathbb{Z}$ então $\bar{\nabla}(k.f) =$

$= \bar{\nabla}(\Sigma_i k\, c_i\, x_i) = \Sigma_i k\, c_i\, \nabla x_i = k\, \Sigma_i c_i\, \nabla x_i = k.\bar{\nabla}f.$

(b) se $x \in A$ então $\bar{\nabla}x = \nabla x \in A$

(c) $\bar{\nabla}z = \nabla z = z$ e $\bar{\nabla}u = \bar{\nabla}u = u$

(d) como $\bar{\nabla}(x \wedge y) = \nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y = \bar{\nabla}x ._{\wedge} \bar{\nabla}y$, decorre imediatamente que $\bar{\nabla}(f ._{\wedge} g) = \bar{\nabla}f ._{\wedge} \bar{\nabla}g$

(e) $\bar{\nabla}x = \nabla x \geq x$, $\forall x \in A$

(f) seja $f = \Sigma_i c_i x_i \in V(A)$, então: $\bar{\nabla}\,\bar{\nabla}(f) = \bar{\nabla}(\Sigma_i c_i \nabla x_i) =$

$= \Sigma_i c_i \nabla\nabla x_i = \Sigma_i c_i \nabla x_i = \bar{\nabla}f$, portanto $\bar{\nabla}\,\bar{\nabla}f = \bar{\nabla}f$, $\forall f \in V(A)$

logo $\bar{\nabla}^2 = \bar{\nabla}$.

(g) $\bar{\nabla}x = \nabla x$ que é Booleano para todo x em A

(h) se $\bar{\nabla}f = f$, é claro que $f \in \mathrm{Im}\,\bar{\nabla}$. Reciprocamente, se $f \in \mathrm{Im}\bar{\nabla}$, então existe g em $V(A)$ tal que $\bar{\nabla}g = f$, logo:

$$\bar{\nabla}f = \bar{\nabla}(\bar{\nabla}g) = \bar{\nabla}\,\bar{\nabla}g = \bar{\nabla}g = f.$$

(i) $\varepsilon(\bar{\nabla}f) = \varepsilon(\Sigma_i c_i \nabla x_i) = \Sigma_i c_i = \varepsilon(f)$ pois $0 \neq \nabla x_i \in A$, $\forall i$

(j) seja $f \in \mathrm{Im}\,\bar{\nabla}$, $\tau(f) = \varepsilon(f)(u+z)-f$ então $\bar{\nabla}(\tau(f)) =$

$= \varepsilon(f)(u+z) - \bar{\nabla}(f) \xrightarrow{f \in \mathrm{Im}\, \bar{\nabla}} \varepsilon(f)(u+z) - f = \tau(f)$, portanto por (h) $\tau(f) \in \mathrm{Im}\, \bar{\nabla}$.

Mostramos de modo inteiramente análogo que $\bar{\Delta}$ também satisfaz estas propriedades.„

Provaremos agora que a imagem do operador $\bar{\nabla}(\bar{\Delta})$ ainda é um anel de valorização de um subreticulado distributivo de A, mais precisamente, o anel de valorização de B(A).

2.2. PROPOSIÇÃO

Seja A uma álgebra de Lukasiewicz trivalente. Consideremos $\bar{\nabla} : V(A) \longrightarrow V(A)$ $(\bar{\Delta} : V(A) \longrightarrow V(A))$ definida por: $\bar{\nabla}(\Sigma_i\, c_i\, x_i) = \Sigma_i\, c_i\, \nabla x_i$ $(\bar{\Delta}(\Sigma_i\, c_i\, x_i) = \Sigma_i\, c_i\, x_i\, \Delta x_i)$. Então $\mathrm{Im}\, \bar{\nabla} = V(\mathrm{Im}\, \nabla)$ $(\mathrm{Im}\, \bar{\Delta} = V(\mathrm{Im}\, \Delta))$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Mostremos primeiramente que $\mathrm{Im}\, \bar{\nabla} \subseteq V(\mathrm{Im}\, \nabla)$. De De fato, se $f \in \mathrm{Im}\, \bar{\nabla}$ então $f = \bar{\nabla} f = \Sigma_i\, c_i\, \nabla x_i \in V(\mathrm{Im}\, \nabla)$ pois cada $\nabla x_i \in \mathrm{Im}\, \nabla$, portanto $\mathrm{Im}\, \bar{\nabla} \subseteq V(\mathrm{Im}\, \nabla)$ (I).

Reciprocamente, se $f \in V(\mathrm{Im}\, \nabla)$ então $f = \Sigma_i\, c_i\, x_i$, $x_i \in \mathrm{Im}\, \nabla$, logo $\bar{\nabla} f = \Sigma_i\, c_i\, \nabla x_i \xrightarrow{x_i \in \mathrm{Im}\, \nabla} \Sigma_i\, c_i\, x_i = f$, portanto $V(\mathrm{Im}\, \nabla) \subseteq \mathrm{Im}\, \bar{\nabla}$ (II).

De (I) e (II) temos que $V(\mathrm{Im}\, \nabla) = \mathrm{Im}\, \bar{\nabla}$. Analogamente, mostramos que $V(\mathrm{Im}\, \Delta) = \mathrm{Im}\, \bar{\Delta}$.„

Tentaremos caracterizar $\bar{\nabla}(\bar{\Delta})$, seguindo as idéias contidas em [10], em termos das propriedades (a) -(f)((a) -(d), (e'), (f)), dadas pela Proposição-IV.2.1. Faremos a caracterização de $\bar{\nabla}(\bar{\Delta})$, de um ponto de vista mais geral, de acordo com a seguinte definição.

2.3. DEFINIÇÃO

Seja A uma álgebra de Lukasiewicz trivalente. Uma função $\psi: V(A) \longrightarrow V(\psi(A))$, onde $\psi(A)$ é um subreticulado de A, é dita um operador linear de passibilidade se:

(1) ψ é linear (2) $\psi(z)=z$ e $\psi(u)=u$

(3) $\psi(f \cdot_A g) = \psi(f) \cdot_A \psi(g)$ (4) $\psi(x) \geq x$, para $\forall x \in A$

(5) $\psi^2 = \psi$ (6) $\psi(x)$ é Booleano, para $\forall x \in A$

Dualmente, $\phi : V(A) \longrightarrow V(\phi(A))$, onde $\phi(A)$ é um subreticulado de A, é dita um operador linear de necessidade se ϕ satisfaz (1)-(3), (5)-(6) e (4') $\phi x \leq x$, para $\forall x \in A$.

Um exemplo importante de um operador linear de possibilidade (necessidade) é $\bar{\nabla} : V(A) \longrightarrow V(\mathrm{Im}\,\nabla)$ ($\bar{\Delta}: V(A) \longrightarrow V(\mathrm{Im}\,\Delta)$).

Se A é finita, pelo Corolário-II.2.5., temos para $x \in A$ que:

$\psi(x) = \Sigma_{e(p) \in E(\psi(A))}\ c(x,e(p))e(p)$ (I) $(\phi(A) =$

$\Sigma_{e(p) \in E(\phi(A))} d(x,e(p))e(p)$ (I')), onde $E(\psi(A))$ $(E(\phi(A)))$ é o conjunto dos idempotentes canonicos de $V(\psi(A))$ $(V(\phi(A)))$, e $p \in P'$ onde P' é o conjunto dos v-irredutíveis de $\psi(A)$ $(\phi(A))$. Temos então a seguinte proposição.

2.4. PROPOSIÇÃO

Seja A uma álgebra de Lukasiewicz trivalente finita. Um operador linear de possibilidade é caracterizado pelas seguintes propriedades dos coeficients $c(x, e(p))$:

(P1) $c(x \vee y, e(p)) + c(x \wedge y), e(p)) = c(x, e(p)) + c(y, e(p))$, $\forall x, y \in A$ e $e(p) \in E(\psi(A))$.

(P2) $c(x+y, e(p)) = c(x, e(p)) + c(y, e(p))$ e $c(k.x, e(p)) = k(x, e(p))$ $\forall x, y \in A$, $e(p) \in E(\psi(A))$ e $k \in \mathbb{Z}$.

(P3) existe $a' \geq x$, $a' \in A'$ tal que $c(x, e(p)) = 1$ se $p \leq a'$ e $c(x, e(p)) = 0$ se $p \nleq a'$, onde $a' = \wedge(y \in A'; y \geq x)$, e $A' = \psi(A)$

(P4) $c(x \wedge y, e(p)) = c(x, e(p)).\ c(y, e(p))$, $\forall x \in A$, $e(p) \in E(\psi(A))$

(P5) $c(e(p), e(q)) = 1$ se $p = q$ e $c(e(p), e(q)) = 0$ o se $p \neq q$

(P6) dado $x \in A$, existe $y \in A$ tal que $c(y, e(p)) = - c(x, e(p))$, $\forall e(p) \in E(\psi(A))$.

Dualmente, um operador linear de necessidade é caracterizado pelas seguintes propriedades dos coeficientes

$d(x, e(p))$: (P1),(P2), (P4),(P5),(P6) e P3') existe $a' \leq x$, a' A' tal que $d(x, e(p)) = 1$ se $p \leq a'$ e $d(x, e(p)) = 0$ se $p \nleq a'$, e $a' = V(y \in A', y \leq x)$, onde $A' = \phi(A)$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\psi : V(A) \longrightarrow V(A')$ um operador linear de possibilidade. Por (I), se $x \in A$ temos que $\psi(x) =$ $= \Sigma_{e(p)}\ c(x, e(p))\ e(p)$. Mostremos agora que ψ satisfaz (P1)-(P6). De fato, como $x \vee y + x \wedge y = x+y$ em $V(A)$, temos que $\psi(x \vee y)+\psi(x \wedge y) =$ $= \Sigma_{e(p)}\ c(x \vee y, e(p))\ e(p) + \Sigma_{e(p)}\ c(x \wedge y, e(p))\ e(p) = \psi(x) +$ $+ \psi(y) = \Sigma_{e(p)}\ c(x, e(p))\ e(p) + \Sigma_{e(p)}\ c(y, e(p))\ e(p)$. Como os $e(p)$ são idempotentes ortogonais, temos que:

$c(x \vee y, e(p)) + c(x \wedge y, e(p)) = c(x, e(p)) + c(y, e(p))$, portanto ψ satisfaz (P1).

$$\psi(x+y) = \Sigma_{e(p)}\ c(x+y, e(p))\ e(p) = \psi(x) + \psi(y) =$$

$= \Sigma_{e(p)}\ c(x, e(p))\ e(p) + \Sigma_{e(p)}\ c(y, e(p))\ e(p)$ então: $c(x+$ $+ y, e(p)) = c(x, e(p)) + c(y, e(p))$, analogamente, de $\psi(kx) =$ $= k\ \psi(x)$, concluímos que $c(kx, e(p)) = k\ c(x, e(p))$, portanto ψ satisfaz (P2).

Se tomarmos $a' = \psi(x)$, então $a' \geq \psi(x)$ e pelo Corolário-II.2.5. decorre que $\psi(x) = \Sigma_{p \leq \psi(x)}\ e(p)$, logo $c(x, e(p)) =$ $= 1$ se $p \leq a' = \psi(x)$ e $c(x, e(p)) = 0$, em caso contrário, logo ψ satisfaz (P3)

Vemos que (P4) é uma simples consequência de $\psi(x \wedge y) = \psi(x) \wedge \psi(y)$. Como $e(p) \in \psi(A)$, então existe $a \in A$ tal que $\psi(a) = e(p)$, como $\psi^2 = \psi$ concluímos que $\psi(e(p)) = e(p)$, logo $\psi(e(p)) = \Sigma_{e(q)} c(e(p), e(q))\, e(q) = e(p)$ então $c(e(p), e(q)) = 1$ se $p = q$ e $c(e(p), e(q)) = 0$ em caso contrário, portanto ψ satisfaz (P5).

Como $\psi(x)$ é Booleano, seja y o complemento de $\psi(y)$. Pela Observação-I.4.6., sabemos que $\tau[\psi(x)] = y$, $\psi(y) = y$ pois $\psi(y) = \psi[\tau(\psi(x))] = \psi(u+z-\psi(x)) = \psi(u) + \psi(z) - \psi^2 x = u + z - \psi(x) = \tau(\psi(x)) = y$. Além disso, $\tau(e(p)) = -e(p)$, porque $e(p) \in \operatorname{Ker} \varepsilon$, pois pela Observação-II.2.9. sabemos que $e(p)$ é da forma $p - p^o$, com $p, p^o \in P'$ (conjunto dos v-irredutíveis de $\psi(A)$). Então temos: $\tau(\psi(x)) = \Sigma_{e(p)} c(x\ e(p))\, \tau(e(p)) = $
$= \Sigma_{e(p)} c(x, e(p))\, (-e(p)) = y = \psi(y) = \Sigma_{e(p)} c(y, e(p))\, e(p)$, portanto $c(x, e(p)) = -c(y, e(p))$, $\forall\, e(p) \in E(\psi(A))$, isto é, ψ satisfaz (P6).

Reciprocamente, se $\psi: V(A) \longrightarrow V(\psi(A))$ está dada por: $\psi(x) = \Sigma_{e(p)} c(x, e(p))\, e(p)$. Além disso, ψ satisfaz (P1)-(P6), então ψ é um operador linear de possibilidade, isto é, satisfaz (1)-(6) da Definição-IV.2.3. Com efeito, se $f = g$ então $f - g \in M(A)$, isto é, $f - g = \Sigma_i n_i (x_i \vee y_i + x_i \wedge y_i - x_i - y_i)$, com $x_i\ y_i \in A$ e $n_i \in \mathbb{Z}$, logo: $\psi(f-g) = \Sigma_{e(p)} c(\Sigma_i n_i (x_i \vee y_i + x_i \wedge y_i - x_i - y_i), e(p))\, e(p) =$

$$\stackrel{(P2)}{=} \Sigma_{e(p)} [\, \Sigma_i n_i (c(x_i \vee y_i, e(p)) + c(x_i \wedge y_i, e(p)) - c(x_i, e(p)) -$$

$- c(y_i, e(p)))] e(p) =$

$\overset{(P2)}{=}$ 0, portanto $\psi(f) = \psi(g)$, isto é ψ está bem definida. Vejamos agora que satisfaz (1)-(6) da definição de operador de possibilidade. Sejam $f = \Sigma_i c_i x_i$, $g = \Sigma_i c_i' x_i$ então:

(1) $\psi(f+g) = \Sigma_{e(p)} c(\Sigma_i (c_i+c_i')x_i, e(p)) \overset{(P2)}{=} \Sigma_{e(p)} (\Sigma_i (c_i+c_i') c(x_i, e(p))) e(p) = \Sigma_{e(p)} (\Sigma c_i c(x_i, e(p))) e(p) + \Sigma_{e(p)} (\Sigma_i c_i' c(x_i, e(p)))$ $e(p) = \psi(f) + \psi(g)$. Analogamente vemos que $\psi(kf) = k\psi(f)$.

(2) $\psi(z) \overset{(P3)}{=} \Sigma_{\substack{p \le a' \\ a' \ge z}} c(z, e(p)) e(p)$ então $a' = z$, portanto $\psi(z) = z$

$\psi(u) \overset{(P3)}{=} \Sigma_{\substack{p \le a' \\ a' \ge u}} c(u, e(p)) e(p)$, então $a' = u$, portanto $\psi(u) = u$

(3) De (P4) concluímos que $\psi(x \wedge y) = \psi(x) \wedge \psi(y)$, então é imediato que $\psi(f \cdot_\wedge g) = \psi(f) \cdot_\wedge \psi(g)$.

(4) $\psi(x) = \Sigma_{e(p)} c(x, e(p)) e(p) \overset{(P3)}{=} \Sigma_{p \le a'} e(p) = a' \ge x$

(5) $\psi^2 x = \psi(\psi(x)) = \psi(\Sigma_{e(p)} c(x, e(p)) = \Sigma_{e(p)} c(x , e(p)) \psi(e(p)) =$

$\overset{(P5)}{=} \Sigma_{e(p)} c(x, e(p)) e(p) = \psi(x)$, então é óbvio que $\psi^2 f = \psi f$.

(6) dado $x \in A$, $\psi(x)$ é Booleano pois:

$\tau(\psi(x)) = \Sigma_{e(p)} c(x, e(p)) \tau(e(p)) = \Sigma_{e(p)} c(x, e(p)) (-e(p)) =$

$= \Sigma_{e(p)} - c(x,e(p))\, e(p) \overset{(P6)}{=} \Sigma_{e(p)}\, c(y,e(p))\, e(p) = \psi(y)$, então $\psi(y)$ é o complemento de $\psi(x)$.

De modo inteiramente análogo, provamos que um operador linear de necessidade está caracterizadp por (P1), (P2), (P3'), (P4), (P5) e (P6)."

Vemos pelo princípio de determinação de Moisil que se

$$(M')\quad \begin{cases} c(x,\, e(p)) = c(y,\, e(p)),\ \forall\, e(p) \in E(\nabla(A)) \\ d(x,\, e(p)) = d(y,\, e(p)),\ \forall\, e(p) \in E(\Delta(A)) \end{cases} \quad \text{então} \quad x = y$$

Notamos então, que uma álgebra de Lukasiewicz trivalente finita fica determinada pelas funções $c(\ ,e(p))$, $d(\ ,e(p))$ que satisfazem (P1)-(P6), (P3') e (M').

Para cada $x \in A$, temos que $\sim x = (-\Delta x \wedge x) \vee -\nabla x$. Extenderemos essa negação para todo $V(A)$, do seguinte modo:

$N(f) = f + \varepsilon(f)(u+z) - \bar{\nabla}(f) - \bar{\Delta}(f)$. Então N satisfaz as seguintes propriedades

2.5. PROPOSIÇÃO

Seja $N : V(A) \longrightarrow V(A)$ dada por: $N(f) = f + \varepsilon(f)(u+z) - \bar{\nabla} f - \bar{\Delta} f$. Então N satisfaz as seguintes propriedades:

(N1) se $f \in \operatorname{Im} \bar{\nabla} \cap \operatorname{Im} \bar{\Delta}$ então $N(f) = \tau(f)$

(N2) $\bar{\nabla}(N(f)) = \tau(\bar{\Delta}(f))$ e $\bar{\Delta}(N(f)) = \tau(\bar{\nabla}(f))$

(N3) $\varepsilon(N(f)) = \varepsilon(f)$

(N4) $N^2 = id$

DEMONSTRAÇÃO: (N1) se $f \in \mathrm{Im}\,\bar{\nabla} \cap \mathrm{Im}\,\bar{\Delta}$, então $\bar{\Delta}(f) = \bar{\nabla}(f) = f$, logo $N(f) = f + \varepsilon(f)\,(u+z) - \bar{\nabla}(f) - \bar{\Delta}(f) = f + \varepsilon(f)(u+z) - f - f = \varepsilon(f)(u+z) - f = \tau(f)$.

(N2) $\bar{\nabla}(N(f)) = \bar{\nabla}(f + \varepsilon(f)(u+z) - \bar{\Delta}(f) - \bar{\nabla}(f)) = \bar{\nabla}f - \varepsilon(f)(u+z) - \bar{\Delta}(f) - \bar{\nabla}(f) = \varepsilon(f)(u+z) - \bar{\Delta}(f) = \tau(\bar{\Delta}(f))$. Analogamente, vemos que $\bar{\Delta}(N(f)) = \tau(\bar{\nabla}(f))$.

(N3) $\varepsilon(N(f)) = \varepsilon(f + \varepsilon(f)(u+z) - \bar{\Delta}(f) - \bar{\nabla}(f)) = \varepsilon(f) + 2\varepsilon(f) - \varepsilon(f) - \varepsilon(f) = \varepsilon(f)$.

(N4) $NN(f) = N(f) + \varepsilon(N(f))\,(u+z) - \bar{\Delta}(N(f)) - \bar{\nabla}(N(f)) = f + \varepsilon(f)(u+z) - \bar{\Delta}(f) - \bar{\nabla}(f) + \varepsilon(f)(u+z) - \tau(\bar{\Delta}(f)) - (\bar{\nabla}(f)) = f + 2\varepsilon(f)(u+z) - \bar{\Delta}(f) - \varepsilon(f)(u+z) + \bar{\Delta}(f) - \varepsilon(f)(u+z) + \bar{\nabla}(f) = f$.//

Sabemos que a implicação de Lukasiewicz é dada em A por: $a \rightarrowtail b = [\nabla(\sim a) \vee b] \wedge [\nabla(b) \vee \sim a]$. Daremos em V(A), um análogo dessa definição.

$a \rightarrowtail b = (u + z - \Delta a \vee b) \wedge (\nabla b \vee a + u + \nabla b - \nabla b \vee \Delta a - \nabla(a \vee b))$.

Temos então a seguinte proposição.

2.6. PROPOSIÇÃO (TEOREMA DA DEDUÇÃO)

Se $a \le b$ então $a \rightarrowtail b = u$

DEMONSTRAÇÃO: $a \rightarrowtail b = (u+b-\Delta a \vee b) \wedge (\nabla b \vee a + u + \nabla b - \nabla b \vee \Delta a - \nabla(a \vee b)) = (u+b-b) \wedge (\nabla b + u + \nabla b - \nabla b - \nabla b) = u \wedge u = u$.//

BIBLIOGRAFIA

[1] ROBERTO CIGNOLI, Boolean Elements In Lukasiewicz Álgebras-I, Proceedings of the Japan Academy, Vol. 41, Nº 8, (1965), 670-675. Este trabalho foi reproduzido em: Notas de Lógica Matemática Nº 23, Universidad Nacional Del Sur, Bahia Blanca, Argentina, (1974).

[2] ROBERTO CIGNOLI and ANTONIO MONTEIRO, Boolean Elements In Lukasiewicz Álgebras-II, Proceedings of the Japan Academy, Vol. 41, Nº 8, (1965), 676 - 680. Este trabalho foi reproduzido em: Notas de Lógica Matemática Nº 24, Universidad Nacional Del Sur, Bahia Blanca, Argentina, (1974).

[3] A. L. FOSTER, The Theory of Boolean-like rings. Am. Math. Soc-59, 166-176, (1946).

[4] LADNOR GEISSINGER, Valuations on Distributive Lattices I, II e III - Archiv Der Mathematik, Vol. XXIV, 230-239, 337-345, 475-481, (1973)

[5] HENRY CRAPO, Deatails of 3 Proofs in Curtis Greene's Paper, Proc. Univ. of Waterloo - Möbius Álegebras Conf., (1971)

[6] GEORGE GRÄTZER, Lattice Theory, W. H. Freeman and Company, (1971)

[7] CURTIS GREENE, On the Möbius Álgebra of a Partially Ordered Set, Proc. of Waterloo - Möbius Algebras Conf., 1971 - Advances in Math. 10, 177-187, (1973).

[8] ANTONIO MONTEIRO, Construction des Algebres de Lukasiewicz Trivalentes Dans les algebres de Boole Monadiques I, Mathematica Japonicae, Vol. 12, Nº 1, 1-23, (1967)- Este trabalho foi reproduzido em: Notas de Lógica Matemática Nº 11 - Universidad Nacional Del Sur, Bahia Blanca, Argentina, (1974)

[9] G. C. ROTA, On the combinatories of the Euler characteristic, Studies in Pure Mathematics, 221-233, London, (1971).

[10] G. C. ROTA, The Valuation Ring of a Distributive Lattice, Proc. Univ. of Houston, Lattice Theory Conf., (1973).