

# Comportamento Assintótico e Distribuição de Energia em Magnetohidrodinâmica

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Adilson José Vieira Brandão e aprovada pela Comissão Julgadora. 733

Campinas, 06 de maio de 1994.



Prof. Dr. Geraldo Severo de Souza

Ávila 7/10.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

# Agradecimentos

- Aos meus pais Sr. Brandão e D. Neguinha e à minha esposa Maraisa e minha filha Caroline pelo apoio e carinho.
- Ao Prof. Dr. Ricardo A. Bacci pela amizade e incentivo desde a graduação.
- Ao Prof. Dr. Geraldo Severo de Souza Ávila pela orientação segura, pela amizade e acima de tudo por acreditar em mim.
- A todos os colegas e amigos pela convivência agradável neste período.
- À instituição CNPq pelo suporte financeiro.

# Resumo

O objetivo principal da dissertação é estudar o comportamento assintótico e alguns aspectos da distribuição da energia da solução de um Sistema Simétrico Hiperbólico de equações diferenciais parciais associado às equações linearizadas da Magnetohidrodinâmica. Para isto utilizaremos o Método da Fase Estacionária bem como propriedades da chamada Superfície de Vagrosidade. Antes porém faremos um estudo mais genérico sobre Sistemas Simétricos Hiperbólicos.

# Conteúdo

Introdução	1
1 Equações e exemplos	4
2 Propriedades das equações	11
3 Resolução do problema de Cauchy	17
3.1 Introdução . . . . .	17
3.2 Existência da solução . . . . .	18
3.3 O método da energia . . . . .	21
3.4 Unicidade e conservação da energia . . . . .	25
3.5 Extensão da solução . . . . .	29
4 Comportamento assintótico e distribuição de energia em mag- netohidrodinâmica	31
4.1 Introdução . . . . .	31
4.2 A superfície de vagarosidade . . . . .	34
4.3 Uma nova representação das soluções . . . . .	40
4.4 Aplicação do método da fase estacionária . . . . .	42
4.5 Convergência das funções de onda assintóticas . . . . .	50
4.6 Distribuição assintótica da energia . . . . .	52
4.7 A solução completa . . . . .	59
A Perfis estendidos	62
B Lemas do capítulo 4	66
Bibliografia	70

# Introdução

Muitos problemas de propagação de ondas originam-se de uma situação de repouso, quando, a partir de um determinado instante, algum mecanismo é acionado, provocando o surgimento de ondas e sua propagação. Assim, por exemplo, um transmissor de rádio produz uma corrente elétrica em sua antena, originando ondas eletromagnéticas que se propagam no espaço. Da mesma forma, quando uma perturbação mecânica é criada num fluido, uma onda acústica, em geral, é produzida, a qual, propaga-se como uma onda esférica expandindo-se com a velocidade do som no fluido. De maneira análogo são produzidas outros tipos de ondas tais como ondas sísmicas, ondas eletromagnéticas em cristais, etc.

Em nosso trabalho, apresentaremos alguns exemplos de equações que governam a geração e propagação desses diferentes tipos de ondas, colocando-as sob a forma unificada de um sistema simétrico hiperbólico de EDP. No decorrer do trabalho, obteremos propriedades importantes bem como uma expressão explícita da solução desse sistema. No entanto, esta é uma situação típica do fato que, não basta obter a solução; é preciso ter meios de explorá-la para obter informações relevantes na interpretação do fenômenos que ela descreve. O objetivo, então, é obter uma solução aproximada que nos permitirá exibir, com clareza, o fenômeno de propagação das ondas.

O caso da equação das ondas tridimensional

$$v_{tt} - c^2 \Delta v = 0,$$

ilustra bem esta idéia. A solução  $v(t, x)$  é assintoticamente igual a [A5]:

$$v^\infty(t, x) = \frac{F(|x| - ct, \theta)}{|x|},$$

onde  $x = |x| \theta \in R^3$  e  $c$  é a velocidade de propagação da onda.  $v^\infty$  é uma onda divergente de perfil  $F$  e amplitude  $|x|^{-1}$ , que se propaga radialmente com velocidade  $c$ .

A equação das ondas é um caso particular de uma classe de equações associadas a sistemas ditos fortemente propagativos. Este tipo de sistema foi estudada de um maneira bem geral por Wilcox em [W2]. No entanto, existem equações pertencentes a uma classe ainda mais ampla, como por exemplo as equações da magnetohidrodinâmica, que estão associadas a sistemas simétricos hiperbólicos que não são fortemente propagativos. Ávila, em [A4], estendeu os resultados obtidos por Wilcox, para sistemas fortemente propagativos, para o caso das equações da magnetohidrodinâmica. Uma parte importante de nosso trabalho é apresentar ao leitor os resultados obtidos por Ávila no estudo do comportamento assintótico e distribuição da energia no caso concreto das equações da magnetohidrodinâmica.

A dissertação propriamente dita é apresentada nos quatro primeiros capítulos. Além desses quatro capítulos existem dois apêndices que contém basicamente cálculos usados na demonstração de alguns resultados do capítulo 4. O objetivo de colocar estes cálculos em forma de apêndice foi o de facilitar a leitura e não prejudicar o desenvolvimento das idéias apresentadas no texto. Nosso intuito é dar ao leitor, nos três primeiros capítulos, um visão geral de sistemas simétricos hiperbólicos e ao final, no capítulo 4, estudarmos um caso concreto da ocorrência de tais sistemas, a saber, as equações da magnetohidrodinâmica. De uma forma geral a tese está organizada como segue. No capítulo 1 apresentaremos exemplos de equações e o sistema simétrico hiperbólico associado com as mesmas. No capítulo 2 daremos algumas importantes propriedades das equações. No capítulo 3 resolveremos o problema de Cauchy para o sistema apresentado no capítulo 1, com dados iniciais numa classe conveniente e utilizaremos o chamado método da energia para obtermos importantes propriedades da solução do sistema. No capítulo 4 estudaremos as equações da magnetohidrodinâmica de forma bem detalhada:

reformularemos o problema de Cauchy para o sistema associado, faremos um estudo da superfície de vagarosidade associada, além de usarmos o chamado método da fase estacionária para obtermos algumas estimativas que nos serão muito úteis no estudo do comportamento assintótico da solução, encontrando assim a solução aproximada; finalmente, analisaremos a distribuição de energia e daremos a solução completa. No apêndice A estudaremos a extensão dos perfis  $F_-$  usados no capítulo 4. No apêndice B demonstraremos alguns lemas usados no capítulo 4.

# Capítulo 1

## Equações e exemplos

Consideraremos Sistemas de Equações Diferenciais Parciais de primeira ordem do tipo

$$E(x) \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \quad (1.1)$$

onde:

$t \in R$ ;

$x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ ;

$u = u(t, x)$  é uma matriz  $k \times 1$  sobre  $C$ ;

as  $B_j$ 's são matrizes  $k \times k$  reais, simétricas e constantes;

$E(x)$  é matriz  $k \times k$ , simétrica e definida positiva.

A importância de se estudar estes sistemas reside no fato de que eles modelam muitos fenômenos de propagação de ondas da Física clássica. Seguem abaixo alguns exemplos concretos de ocorrência de sistemas do tipo (1.1):

(i) *Equação das ondas.*

A equação das ondas em três dimensões é dada por

$$v_{tt} - c^2 \Delta v = 0, \quad \text{onde } v = v(t, x_1, x_2, x_3).$$

Se introduzirmos  $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$  de modo que

$$u_0 = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad u_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

obtemos

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - c^2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

que é equivalente ao sistema

$$E \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0,$$

onde

$$E = \begin{bmatrix} c^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A generalização no caso da equação das ondas n-dimensional é facilmente verificada.

(ii) *As equações de Maxwell.*

As equações de Maxwell no espaço vazio têm a seguinte forma (veja [Jn]):

$$\nabla \times E + \mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

$$\nabla \times H - \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = 0,$$

onde  $E$  e  $H$  são os vetores campo elétrico e magnético respectivamente,  $\varepsilon$  e  $\mu$  são constantes escalares satisfazendo  $\varepsilon\mu = c^{-2}$ ,  $c$  a velocidade da luz.

Em meios materiais, as quantidades  $\varepsilon$  e  $\mu$  podem ser escalares (meio isotrópico) mas geralmente são matrizes  $3 \times 3$  simétricas como nos cristais e então o meio é dito anisotrópico. Se elas dependem da variável espacial  $x$  o meio é dito não homogêneo, caso contrário temos o meio homogêneo.

Em todos os casos, na ausência de cargas e correntes aplicadas, as equações de Maxwell são equivalentes ao sistema

$$E(x) \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0,$$

onde

$$u = (E, H) = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6),$$

$$E(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii) *Magnetohidrodinâmica.*

A magnetohidrodinâmica tem por objeto o estudo de perturbações ondulatórias num fluido condutor de eletricidade em presença de campos magnéticos. As equações da magnetohidrodinâmica constituem um importante sistema de equações diferenciais parciais da Física Matemática e que serão objeto de um estudo mais detalhado em nosso trabalho. Não vamos entrar nos detalhes de como essas equações são obtidas, limitando-nos apenas a apresentá-las (o leitor interessado em maiores informações pode consultar por exemplo [C] p.

613 e [T] p. 44). Essas equações são dadas por

$$\rho_t + u \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot u = 0,$$

$$\rho u_t + a^2 \nabla \rho + \rho(u \cdot \nabla)u + \mu^{-1} Z \times \nabla \times Z = 0,$$

$$Z_t + \nabla \times (Z \times u) = 0,$$

onde  $\rho$  é a densidade de massa,  $u = (u_1, u_2, u_3)$  é o vetor velocidade das partículas do fluido,  $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$  é o vetor campo magnético,  $\mu$  é a permeabilidade magnética e  $a$  é a velocidade do som.

Este sistema tem soluções constantes  $(\rho_0, u_0, Z_0)$ . Nós o linearizamos tomando

$$\rho = \rho_0 + s, \quad u = u_0 + v, \quad Z = Z_0 + b.$$

Podemos tomar  $u_0 = 0$  bastando, para isso, usar um sistema móvel de coordenadas com velocidade  $u_0$ :

$$S(t, x) = s(t, x + u_0 t).$$

Obtemos então o sistema linearizado

$$\begin{cases} s_t + \rho_0 \nabla \cdot v = 0, \\ v_t + \frac{a^2}{\rho_0} \nabla s + \frac{1}{\mu \rho_0} Z_0 \times \nabla \times b = 0, \\ b_t + \nabla \times (Z_0 \times v) = 0. \end{cases}$$

Por conveniência suporemos que o campo magnético aplicado  $Z_0$  está na direção do eixo  $x_3$ , isto é,  $Z_0 = (0, 0, Z_3)$ . É óbvio que podemos fazer esta suposição sem perda de generalidade, pois basta tomar uma rotação apropriada dos eixos coordenados.

Tomando  $u = (s, v_1, v_2, v_3, b_1, b_2, b_3)$  e multiplicando o lado esquerdo das equações pela matriz

$$E = \text{diag}\left(\frac{\mu a^2}{\rho_0}, \mu \rho_0, \mu \rho_0, \mu \rho_0, 1, 1, 1\right),$$

obtemos um sistema simétrico hiperbólico:

$$E \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0,$$

onde

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & \mu a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_3 & 0 \\ \mu a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Além destes exemplos, sistemas como (1.1) são encontrados em acústica, elasticidade, equações das linhas de transmissão, etc. É interessante notar que vários desses casos concretos realmente exibem dependência espacial apenas no primeiro coeficiente, aquele ligado à derivada  $\frac{\partial}{\partial t}$ ; os demais sendo constantes facilitam muito o tratamento de problemas que se formulam

para esses sistemas. Estaremos mais interessados em estudar sistemas onde  $E(\mathbf{x}) = E$  seja matriz constante. Isto equivale a dizer que o meio governado por (1.1) é homogêneo.

No próximo capítulo obteremos algumas propriedades do sistema (1.1).

## Capítulo 2

# Propriedades das equações

O sistema (1.1) com  $E(x) = E = \text{constante}$  é equivalente ao sistema

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \quad (2.1)$$

onde  $A_j = E^{-1}B_j$ , como se vê multiplicando (1.1) à esquerda por  $E^{-1}$ .

Seja  $p \in R^n$  e  $\tau$  real. Então a condição para que a função  $f(x \cdot p - \tau t)$  seja solução de (2.1) é que

$$(\tau I - \sum_{j=1}^n p_j A_j) f' = 0,$$

isto é,  $\tau$  é raiz da equação

$$P(p, \tau) = \det(\tau I - \sum_{j=1}^n p_j A_j) = 0. \quad (2.2)$$

A função  $f(x \cdot p - \tau t)$  permanece constante nos planos  $x \cdot p - \tau t = \text{constante}$ . Como estes planos se movem com velocidade  $\frac{\tau}{|p|}$  na direção  $p$ , soluções do tipo  $f(x \cdot p - \tau t)$  são chamadas soluções de ondas planas do sistema (2.1). Para cada direção  $p$  existem  $k$  velocidades de propagação  $\frac{\tau_j(p)}{|p|}$ , onde  $\tau_1(p), \dots, \tau_k(p)$  são as raízes da equação (2.2).

O fato de  $E, B_1, \dots, B_n$  serem reais, simétricas e além disso  $E$  ser definida positiva implica que para cada  $p \in R^n$ ,

$$\Lambda(p) = \sum_{j=1}^n p_j A_j$$

define um operador autoadjunto no espaço  $C_E^k$  das matrizes  $k \times 1$  sobre  $C$ , com produto interno

$$(\xi, \eta)_E = \xi^* E \eta. \quad (2.3)$$

Para verificar este fato basta observar que

$$\begin{aligned} (A_j \xi, \eta)_E &= (A_j \xi)^* E \eta \\ &= \xi^* A_j^* E \eta \\ &= \xi^* B_j^* E^{-1*} E \eta \\ &= \xi^* B_j E^{-1} E \eta \\ &= \xi^* B_j \eta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\xi, A_j \eta)_E &= \xi^* E A_j \eta \\ &= \xi^* E E^{-1} B_j \eta \\ &= \xi^* B_j \eta. \end{aligned}$$

Segue então que as raízes  $\tau(p)$  da equação (2.2), ou seja, os autovalores de  $\Lambda(p)$  são todos reais e existe um conjunto ortonormal completo de autovetores associados. Estes autovetores podem ser escolhidos de tal modo que sejam funções mensuráveis de  $p$  [W1].

Wilcox provou que os autovalores  $\tau(p)$  são funções contínuas de  $p$  [W1], e mais, se retirarmos de seu domínio de definição, os pontos  $p$ , onde um ou mais dos autovalores coincidem, então  $\tau$  será uma função analítica [W2].

Faremos a convenção de que os autovalores que não se anulam identicamente estão enumerados em ordem decrescente de grandeza, digamos, um total de  $r$ :

$$\tau_1(p) \geq \dots \geq \tau_r(p). \quad (2.4)$$

Os  $k - r$  autovalores restantes são identicamente nulos:

$$\tau_{r+1}(p) = \dots = \tau_k(p) \equiv 0.$$

Pode acontecer que nenhum autovalor se anule identicamente e neste caso  $r = k$ . Mas certamente  $r \geq 1$  pois do contrário teríamos  $A_1 = \dots = A_n = 0$ . Os autovalores que não se anulam identicamente podem se anular para certos pontos  $p$ . No entanto o conjunto dos pontos  $p$  tais que  $\tau(p) = 0$  é de medida nula (para uma demonstração deste resultado veja [A1], pp. 285-286).

É fácil verificar que  $\Lambda(p)$  é matriz homogênea de grau 1. Isto implica que se  $\tau(p)$  é um autovalor de  $\Lambda(p)$  então  $\alpha\tau(p)$  é um autovalor de  $\Lambda(\alpha p)$ . Como consequência disto e de (2.4) seguem algumas propriedades importantes. Uma delas é que os autovalores  $\tau_j(p)$  são homogêneos positivos de grau 1:

$$\tau_j(\alpha p) = \alpha\tau_j(p), \quad \alpha \geq 0 \quad j = 1, \dots, k.$$

Para provar este fato basta observar que multiplicando (2.4) por  $\alpha > 0$  obtemos

$$\alpha\tau_1(p) \geq \dots \geq \alpha\tau_r(p),$$

que sabemos serem os autovalores de  $\Lambda(\alpha p)$ . No entanto, também sabemos que os autovalores de  $\Lambda(\alpha p)$  podem ser enumerados como segue:

$$\tau_1(\alpha p) \geq \dots \geq \tau_r(\alpha p).$$

Portanto,

$$\alpha\tau_1(p) = \tau_1(\alpha p), \dots, \alpha\tau_r(p) = \tau_r(\alpha p).$$

Uma outra propriedade é que os conjuntos

$$\{\tau_1(p), \dots, \tau_r(p)\} \text{ e } \{-\tau_1(-p), \dots, -\tau_r(-p)\}$$

coincidem para todo  $p$  e vale

$$\tau_j(p) = -\tau_{r-j+1}(-p), \quad j = 1, \dots, r.$$

Para provar isto observemos que  $\Lambda(-p) = -\Lambda(p)$ . Logo  $-\tau(p)$  é autovalor de  $\Lambda(-p)$ . Multiplicando (2.4) por  $-1$  obtemos

$$-\tau_1(p) \leq \dots \leq -\tau_r(p),$$

que sabemos serem os autovalores de  $\Lambda(-p)$ . No entanto, também sabemos que os autovalores de  $\Lambda(-p)$  podem ser enumerados como segue:

$$\tau_1(-p) \geq \dots \geq \tau_r(-p).$$

Portanto,

$$-\tau_1(-p) = \tau_r(p), \dots, -\tau_r(-p) = \tau_1(p).$$

Notemos que, se essas raízes nunca se anularem, então seu número  $r$  será par, com  $r/2$  raízes estritamente positivas e  $r/2$  raízes estritamente negativas (veja [W1] e [L], pp. 178–182).

Vamos agora ilustrar algumas das idéias desenvolvidas aqui retomando exemplos do capítulo 1.

No caso da equação das ondas a equação (2.2) nos dá

$$\tau^4 - |p|^2 c^2 \tau^2 = 0.$$

Temos então duas raízes que se anulam identicamente, uma raiz estritamente negativa  $\tau(p) = -c |p|$  e uma raiz estritamente positiva  $\tau(p) = c |p|$ . É fácil verificar também que a velocidade de propagação é constante e igual a  $c$  em qualquer direção  $p$ .

Nas equações de Maxwell (veja [A1], p. 297), vamos considerar o caso de propagação de ondas em cristais, onde  $\mu$  é um múltiplo da identidade:  $\mu = \mu_0 I$ . Uma rotação dos eixos coordenados reduz  $\varepsilon$  a uma forma diagonal:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Então a equação (2.2) nos dá

$$P(p, \tau) = \tau^2[\tau^4 - \phi(p)\tau^2 + |p|^2\psi(p)] = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} \phi(p) &= c_1^2(p_2^2 + p_3^2) + c_2^2(p_1^2 + p_3^2) + c_3^2(p_1^2 + p_2^2), \\ \psi(p) &= c_2^2c_3^2p_1^2 + c_1^2c_3^2p_2^2 + c_1^2c_2^2p_3^2, \\ c_i^2 &= 1/\mu_0\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Temos então duas raízes que se anulam identicamente, duas raízes estritamente positivas e duas estritamente negativas. Quando  $c_1 \geq c_2 \geq c_3$ , as raízes positivas (negativas) tomam o mesmo valor se e somente se  $\phi^2(p) = 4p\psi(p)$ , isto é, se e só se

$$p_2 = 0 \quad \text{e} \quad (c_1^2 - c_2^2)p_3^2 = (c_2^2 - c_3^2)p_1^2.$$

Isto significa que existe uma única direção  $\omega_0$ —o chamado eixo ótico do cristal—tal que  $\tau_1(\omega_0) = \tau_2(\omega_0)$ . Ao mesmo tempo nós temos, para as raízes negativas,  $\tau_3(-\omega_0) = \tau_4(-\omega_0)$ .

A propagação de ondas eletromagnéticas no espaço vazio é um caso particular do exemplo anterior. Sua equação característica é dada por

$$P(p, \tau) = \tau^2[\tau^4 - 2c^2|p|^2\tau^2 + c^4|p|^4] = 0.$$

Segue que existem duas raízes identicamente nulas, duas raízes estritamente positivas  $\tau(p) = c|p|$  e duas raízes estritamente negativas  $\tau(p) = -c|p|$ . Como na equação das ondas a velocidade de propagação é constante em todas as direções.

As equações da magnetohidrodinâmica nos dão o polinômio característico (veja [A4], p. 36)

$$\tau(\tau^2 - \tau_A(p)^2)(\tau^2 - \tau_+(p)^2)(\tau^2 - \tau_-(p)^2),$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \frac{Z_3}{\sqrt{\mu\rho_0}}, \quad \tau_A(p) = Ap_3, \\ \tau_{\pm}(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (A^2 + a^2) |p|^2 \pm \sqrt{(A^2 + a^2) |p|^4 - 4A^2 a^2 |p|^2 p_3^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Então as raízes do polinômio característico são

$$\tau = 0, \quad \tau = \pm\tau_+(p), \quad \tau = \pm\tau_A(p), \quad \tau = \pm\tau_-(p). \quad (2.6)$$

A primeira destas raízes se anula identicamente, a segunda e a terceira se anulam somente para  $p = 0$  e as quatro restantes se anulam para  $p$  no plano  $p_3 = 0$  que é evidentemente um conjunto de medida nula no  $R^3$ .

## Capítulo 3

# Resolução do problema de Cauchy

### 3.1 Introdução

Neste capítulo resolveremos o problema de Cauchy para o sistema (2.1) através do uso da transformada de Fourier provando a existência da solução. Posteriormente utilizaremos o chamado método da energia para mostrar que o problema é bem posto no sentido de Hadamard, isto é, para dados iniciais numa certa classe existe uma única solução numa certa classe; além disso a solução depende continuamente dos dados iniciais. Ao final estenderemos a solução para uma classe de funções mais ampla. Cometeremos um pequeno abuso de notação escrevendo

$$f \in C_0^\infty \text{ ao invés de } f \in [C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^k,$$

ou

$$u \in C^\infty \text{ ao invés de } u \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k,$$

o mesmo ocorrendo com outros espaços de função tais como  $S$  ou  $L_2$ .

## 3.2 Existência da solução

As fórmulas básicas que enunciaremos abaixo se aplicam diretamente às funções do espaço de Schwartz  $\mathcal{S}$ , isto é, funções  $f \in C^\infty$  tais que, juntamente com suas derivadas de todas as ordens, tendem a zero, com  $|x| \rightarrow \infty$ , mais rapidamente que qualquer potência negativa de  $|x|$ . Como estamos inicialmente interessados em soluções de suporte compacto, vamos restringir nossos dados iniciais ao espaço  $C_0^\infty$  que, como  $\mathcal{S}$ , é denso em  $L_2$ . É claro que  $f \in C_0^\infty$  implica  $f \in \mathcal{S}$ . Então a transformada de Fourier de  $f$  é dada por

$$\hat{f}(p) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot p} f(x) dx.$$

A função  $f$  é obtida de  $\hat{f}$  pela fórmula inversa

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot p} \hat{f}(p) dp.$$

Uma das vantagens do uso da Transformada de Fourier é que ela transforma a derivação em relação a  $x_j$  em multiplicação por  $ip_j$ . Assim se  $\hat{u}(t, p)$  é a transformada de  $u(t, x)$ , o sistema (2.1) transforma-se em

$$\hat{u}_t + i\Lambda(p)\hat{u} = 0 \tag{3.1}$$

onde

$$\Lambda(p) = \sum_{j=1}^n p_j A_j.$$

A condição inicial  $u(0, x) = f(x)$  transforma-se em  $\hat{u}(0, p) = \hat{f}(p)$ . Seja  $\{v_j(p)\}$  um conjunto ortonormal completo de autovetores de  $\Lambda(p)$  associado aos autovalores  $\tau_j(p)$ . Tomemos

$$\hat{u}_j(t, p) = \hat{u}(t, p) \cdot v_j(p) \quad \text{e} \quad \hat{f}_j(p) = \hat{f}(p) \cdot v_j(p).$$

Então a equação (3.1) nos dá, através do produto escalar por  $v_j(p)$ ,

$$\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial t} + i\tau_j(p)\hat{u}_j(p) = 0.$$

A solução desta equação que satisfaz a condição inicial  $\hat{u}_j(0, p) = \hat{f}_j(p)$  é

$$\hat{u}_j(t, p) = \hat{f}_j(p)e^{-i\tau_j(p)t}.$$

Segue então que

$$\hat{u}(t, p) = \sum_{j=1}^k \hat{f}_j(p)e^{-i\tau_j(p)t}v_j(p).$$

Tomando a transformada inversa na última expressão obtemos

$$u(t, x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} e^{ix \cdot p} \hat{u}(t, p) dp.$$

Portanto

$$u(t, x) = (2\pi)^{-n/2} \sum_{j=1}^k \int_{R^n} \hat{f}_j(p) e^{i(x \cdot p - \tau_j(p)t)} v_j(p) dp. \quad (3.2)$$

O procedimento usado para chegarmos à expressão (3.2) é puramente formal e carece de justificativa. Todavia, é mais fácil verificar diretamente que (3.2) é uma solução do problema de Cauchy como faremos no seguinte teorema:

**Teorema 3.1 (Existência da solução)** *O problema de Cauchy para o sistema (2.1) com dado inicial  $f \in C_0^\infty$  tem uma solução  $u \in C^\infty$  dada pela expressão (3.2).*

*Prova.* Lembremos que  $f \in C_0^\infty$  implica  $\hat{f} \in \mathcal{S}$ . Logo, existem  $m \in \mathbb{N}$  e uma constante positiva  $C_m$  tais que

$$|\hat{f}(p)| \leq \frac{C_m}{(1 + |p|)^m}.$$

Também sabemos que as funções  $v_j(p)$  são mensuráveis com  $|v_j(p)| = 1$ . Portanto o integrando em (3.2) é majorado por

$$\frac{C_m}{(1 + |p|)^m},$$

e isto prova que a integral em (3.2) converge uniformemente em  $x$  e  $t$  e define  $u(t, x)$  como uma função contínua. Provemos agora que  $u(t, x)$  é infinitamente diferenciável. Lembremos que

$$\tau_j(p) = |p| \tau_j(\omega), \quad |\omega| = 1.$$

Seja

$$M = \max |\tau_j(\omega)|.$$

Temos então que

$$\begin{aligned} & \left| \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\gamma D^\alpha \{ \widehat{f}_j(p) e^{i(x \cdot p - \tau_j(p)t)} v_j(p) \} \right| = \\ & = |\tau_j(p)|^\gamma |p^\alpha| |\widehat{f}_j(p)| \leq |p|^\gamma M^\gamma |p^\alpha| |\widehat{f}(p)| \leq \frac{C_m}{(1 + |p|)^m}, \end{aligned}$$

para um  $m$  conveniente. Isto mostra que as derivações em (3.2), sob o sinal de integração, também resultam em integrais que convergem uniformemente. Fica provado assim que  $u(t, x)$ , dada em (3.2), é de classe  $C^\infty$  e as derivações, de todas as ordens, podem ser efetuadas sob o sinal da integral. Agora fica fácil ver que  $u(t, x)$  satisfaz a equação (2.1) e a condição inicial  $u(0, x) = f(x)$  completando assim a prova do teorema.

A fórmula (3.2) mostra que  $u$  é a superposição de  $k$  ondas: cada uma das quais é a superposição—dada pela integração sobre o  $p$ -espaço—das ondas planas

$$(2\pi)^{-n/2} \widehat{f}_j(p) e^{i(x \cdot p - \tau_j(p)t)} v_j(p).$$

Esta onda é um sinal que se propaga na direção  $p$  com velocidade  $\frac{\tau_j(p)}{|p|}$ .

### 3.3 O método da energia

Seja  $u$  uma solução de classe  $C^2$  da equação (2.1),  $x \in R^n, t \geq 0$ . Fazendo o produto interno, dado em (2.3), de  $u$  pela equação (2.1) obtemos

$$u^* E u_t + \sum_{j=1}^n u^* E A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0,$$

donde

$$u^* E u_t + \sum_{j=1}^n u^* E E^{-1} B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0,$$

logo,

$$u^* E u_t + \sum_{j=1}^n u^* B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0. \quad (3.3)$$

Agora fazendo o produto interno da equação (2.1) por  $u$  obtemos

$$u_t^* E u + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u^*}{\partial x_j} A_j^* E u = 0,$$

donde

$$u_t^* E u + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u^*}{\partial x_j} B_j E^{-1} E u = 0,$$

portanto,

$$u_t^* E u + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u^*}{\partial x_j} B_j^* u = 0. \quad (3.4)$$

Somando (3.3) e (3.4) encontramos

$$\frac{\partial}{\partial t} |u|_E^2 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (u^* B_j u) = 0. \quad (3.5)$$

Doravante, por questão de simplificação, usaremos a notação  $|\cdot|$  para a norma  $|\cdot|_E$  dada pelo produto interno definido em (2.3). Esse mesmo símbolo é usado para denotar o valor absoluto, mas isto ficará claro no próprio contexto, não devendo causar confusão.

Integrando a identidade (3.5) sobre o cone truncado no espaço  $(t, x)$  dado por

$$0 \leq t \leq T, \quad |x - x_0| \leq R - ct$$

e usando o Teorema da Divergência obtemos

$$\begin{aligned} \int_{|x-x_0| \leq R-ct} |u(T, x)|^2 dx - \int_{|x-x_0| \leq R} |u(0, x)|^2 dx = \\ = - \int_{\Sigma} [|u|^2 \nu_t + u^* B(\nu) u] d\Sigma \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde  $\Sigma$  é o manto lateral do cone truncado ilustrado na figura (3.1);  $(\nu_t, \nu) = (\nu_t, \nu_1, \dots, \nu_n)$  é a normal unitária exterior no manto;  $d\Sigma$  é o elemento de superfície.

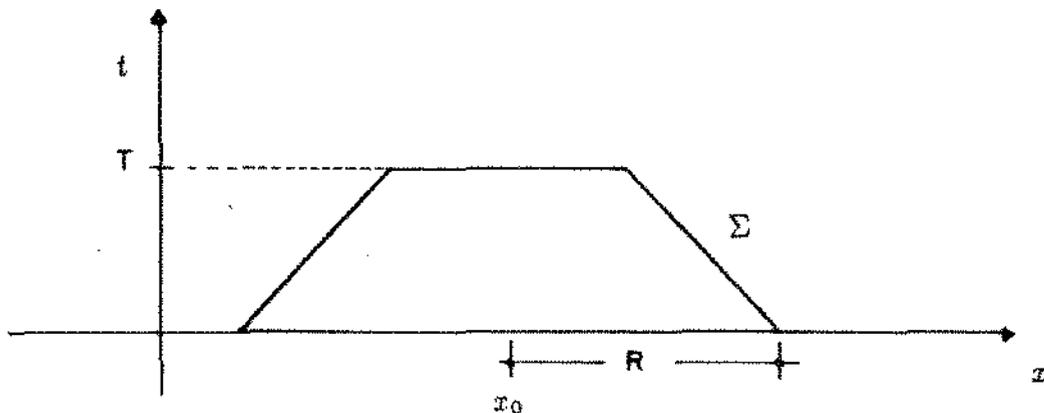


Figura 3.1

Seja

$$c = \max \left\{ \tau_j \left( \frac{p}{|p|} \right) : p \neq 0, 1 \leq j \leq k \right\}$$

Então temos que

$$\begin{aligned} |u^* B \left( \frac{\nu}{|\nu|} \right) u| &= |u^* E E^{-1} B \left( \frac{\nu}{|\nu|} \right) u| \\ &= |u^* E A \left( \frac{\nu}{|\nu|} \right) u| \\ &= | (u, A \left( \frac{\nu}{|\nu|} \right) u )_E | \\ &\leq c(u, u)_E. \end{aligned}$$

Concluimos então que

$$|u^* B \left( \frac{\nu}{|\nu|} \right) u| \leq c |u|^2.$$

Esta última desigualdade nos dá, sucessivamente,

$$-c |u|^2 \leq u^* B \left( \frac{\nu}{|\nu|} \right) u,$$

$$-c |\nu| |u|^2 \leq u^* |\nu| B \left( \frac{\nu}{|\nu|} \right) u,$$

$$|u|^2 \nu_t - c |\nu| |u|^2 \leq |u|^2 \nu_t + u^* B(\nu) u.$$

Portanto

$$|u|^2 (\nu_t - c |\nu|) \leq |u|^2 \nu_t + u^* B(\nu) u. \quad (3.7)$$

Vamos nos deter neste instante para calcular o valor da expressão  $\nu_t - c |\nu|$  no lado esquerdo da desigualdade (3.7). A superfície do cone é dada por

$$\varphi(t, x) = |x - x_0|^2 - |R - ct|^2 = 0$$

e a normal unitária exterior é

$$(\nu_t, \nu) = (\varphi_t, \nabla\varphi)k,$$

$k$  constante positiva de normalização. Então

$$|\nu| = |\nabla\varphi|k \quad \text{e} \quad \nu_t = \varphi_t k.$$

Logo

$$|\nu| = 2k|x - x_0| \quad \text{e} \quad \nu_t = 2ck(R - ct),$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \nu_t - c|\nu| &= 2ck(R - ct) - 2ck|x - x_0| \\ &= 2ck[(R - ct) - |x - x_0|] \\ &= 2ck0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então a desigualdade (3.7) nos dá, sucessivamente,

$$0 \leq |u|^2 \nu_t + u^* B(\nu)u,$$

$$0 \leq \int_{\Sigma} [|u|^2 \nu_t + u^* B(\nu)u] d\Sigma,$$

$$0 \geq - \int_{\Sigma} [|u|^2 \nu_t + u^* B(\nu)u] d\Sigma.$$

Daqui e de (3.6) segue que

$$\int_{|x-x_0| \leq R-cT} |u(T, x)|^2 dx - \int_{|x-x_0| \leq R} |u(0, x)|^2 dx \leq 0,$$

donde

$$\int_{|x-x_0| \leq R-cT} |u(T, x)|^2 dx \leq \int_{|x-x_0| \leq R} |u(0, x)|^2 dx. \quad (3.8)$$

### 3.4 Unicidade e conservação da energia

A integral

$$\mathcal{E}(u, K, t) = \int_K |u|^2 dx = \int_K u^* E u dx$$

é chamada a energia de  $u$  contida em  $K$ . Então a desigualdade (3.8) expressa o fato de que a energia de  $u$  no tempo  $T$  dentro da bola  $|x - x_0| \leq R - cT$ , não é maior que a energia no tempo  $t = 0$  dentro da bola  $|x - x_0| \leq R$ . Este fato tem implicações de grande importância como veremos a seguir.

**Teorema 3.2** *Se  $u(0, x) = 0$  na bola  $|x - x_0| \leq R$ , então  $u(T, x) = 0$  na bola  $|x - x_0| \leq R - cT$ .*

*Prova.* Basta usar a desigualdade (3.8) e a continuidade da solução  $u$ .

**Corolário 3.1** *Se um dado inicial  $u(0, x) = f(x)$  tem suporte compacto, digamos, em  $|x - x_0| \leq R$ , então a solução tem suporte no domínio*

$$D(x_0, R) = \{(t, x) : |x - x_0| \leq R + ct, t > 0\}.$$

$D(x_0, R)$  é chamado o domínio de influência de  $|x - x_0| \leq R$  (veja fig. 3.2).

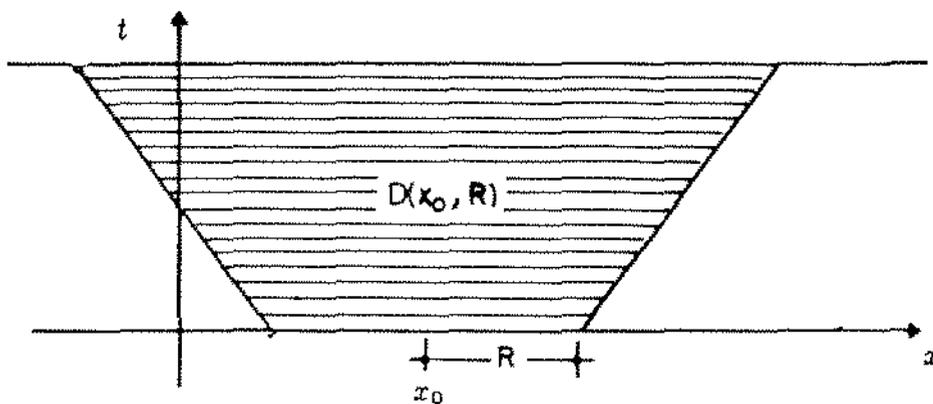


Figura 3.2

O corolário 3.1 nos leva a concluir que os sinais não se propagam com velocidade superior a  $c$ . Para verificar isto, suponha que  $x$  seja a posição de um observador a uma distância  $d$  do  $\text{supp}f$ . Então para o observador perceber algum sinal ele deve esperar pelo menos o tempo  $T$  correspondente a  $x$  na equação  $|x - x_0| = R + ct$  (veja fig. 3.3). Para  $t_0 < T$  o ponto  $(t_0, x)$  estará fora do suporte de  $u$  e neste caso  $u(t_0, x) = 0$ , ou seja, o observador não perceberá nenhum sinal. Portanto qualquer sinal se propaga com velocidade  $v \leq \frac{d}{T} = c$ .

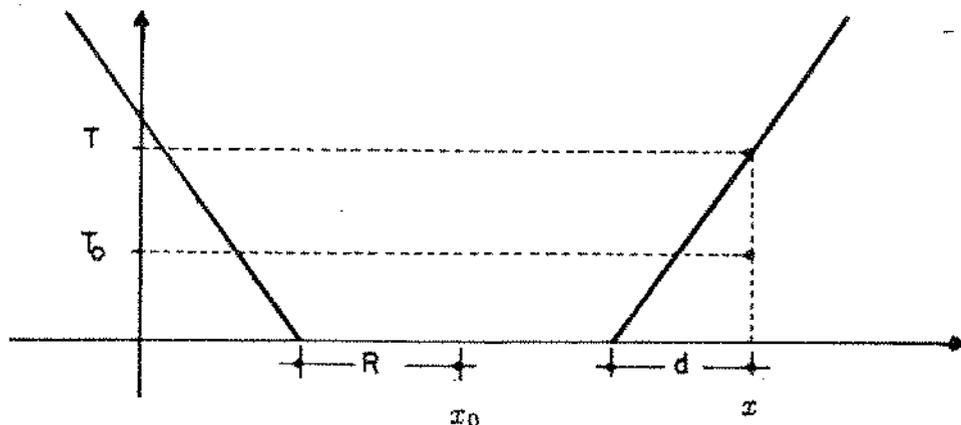


Figura 3.3

**Teorema 3.3 (Unicidade da solução)** *Existe uma única solução do problema de Cauchy para o sistema (2.1).*

*Prova.* Suponha que  $u_1(t, x)$  e  $u_2(t, x)$  sejam soluções de classe  $C^2$  de (2.1) com mesmo dado inicial  $u_1(0, x) = u_2(0, x) = f(x)$ . Então  $u(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$  também é solução de (2.1) e satisfaz a desigualdade (3.8) com  $u(0, x) = 0$  e  $R, T$  arbitrários. Concluimos então que  $u(t, x) = 0$ . Portanto,

$$u_1(t, x) = u_2(t, x).$$

A desigualdade (3.8) expressa o fato de que a energia é não crescente. Podemos melhorar este resultado estabelecendo a conservação da energia da solução como enunciaremos no teorema seguinte.

**Teorema 3.4 (Conservação da energia)** *A energia associada com a solução  $u$ , de classe  $C^2$ , do sistema (2.1) é constante, isto é,*

$$\int_{R^n} |u(t, x)|^2 dx = \int_{R^n} |u(0, x)|^2 dx = \int_{R^n} |f(x)|^2 dx = \text{constante}.$$

*Prova.* Suponha que o dado inicial  $f$  tenha suporte compacto, digamos,  $|x| \leq R$ . Segue então que, para cada  $t \geq 0$  fixado, a solução tem suporte compacto  $|x| \leq R + ct$ . Integrando a expressão (3.5) sobre o cone truncado

$$|x| \leq R_0 + ct, \quad 0 \leq t \leq T,$$

onde  $R_0 > R$ , e procedendo como na obtenção da expressão (3.6) encontramos,

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq R_0 + cT} |u(T, x)|^2 dx - \int_{|x| \leq R_0} |u(0, x)|^2 dx &= \\ &= - \int_{\Sigma} [|u|^2 \nu_t + u^* B(\nu) u] d\Sigma, \end{aligned}$$

onde  $\Sigma$  é o manto do cone truncado descrito acima (veja fig. 3.4). Como  $\Sigma$  é uma superfície que não intercepta o suporte de  $u$  (pois  $R_0 > R$ ), então o lado direito da igualdade acima é nulo e obtemos

$$\int_{|x| \leq R_0 + cT} |u(T, x)|^2 dx = \int_{|x| \leq R_0} |u(0, x)|^2 dx,$$

donde

$$\int_{R^n} |u(T, x)|^2 dx = \int_{R^n} |u(0, x)|^2 dx.$$

Como  $T$  é arbitrário concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(0, x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \text{constante} . \quad (3.9)$$

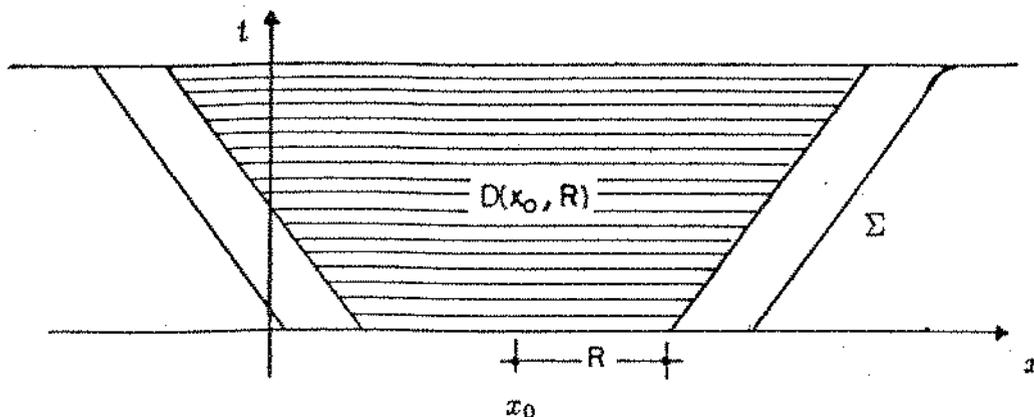


Figura 3.4

A lei da conservação (3.9) implica que

$$\|u(t, \cdot)\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}.$$

Esta igualdade nos permite concluir que a solução depende continuamente dos dados iniciais. Com os resultados obtidos até aqui demonstramos o seguinte teorema:

**Teorema 3.5** *O problema de Cauchy para o sistema (2.1), com dado inicial  $f \in C_0^\infty$ , é bem posto e a solução  $u$  é de classe  $C^\infty$ ; além disso,  $u$  é de suporte compacto em  $x$  para cada  $t$ .*

### 3.5 Extensão da solução

lembramos que para cada  $t \geq 0$  fixado,  $u(t, \cdot) \in C_0^\infty$  e  $u(t, \cdot)$  depende linearmente de  $f$ . Então é natural construirmos o operador linear

$$U_0(t) : C_0^\infty \longrightarrow C_0^\infty,$$

que associa a cada dado inicial  $u(0, \cdot) = f$ , a solução

$$u(t, \cdot) = U_0(t)f, \quad t \geq 0.$$

A família uniparamétrica  $\{U_0(t), t \geq 0\}$  dos operadores lineares em  $C_0^\infty$  tem as seguintes propriedades, facilmente verificadas:

- (i)  $U_0(0) = I$ ;
- (ii)  $U_0(t_1 + t_2) = U_0(t_2)U_0(t_1)$ ;

Dizemos que a família  $\{U_0(t), t \geq 0\}$  forma um semigrupo em  $C_0^\infty$ .

A lei de conservação (3.9) é equivalente a dizer que o operador solução  $U_0(t)$  é unitário e nos permite estender os dados iniciais para todas as funções  $f \in L_2$ . Utilizaremos o fato de que o espaço  $L_2$  é completo e de que  $C_0^\infty$  é denso em  $L_2$ . Seja  $f \in L_2$ . Então existe uma sequência  $f_j \in C_0^\infty$  com

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f - f_j\|_{L_2} = 0.$$

Como

$$\|U_0(t)f_j - U_0(t)f_k\|_{L_2} = \|f_j - f_k\|_{L_2} \rightarrow 0,$$

segue que a sequência  $u_j(t, \cdot) = U_0(t)f_j$  converge em  $L_2$ , qualquer que seja  $t$  fixado. Também o limite

$$u(t, \cdot) := \lim_{j \rightarrow \infty} U_0(t)f_j$$

não depende da escolha da sequência  $f_j$ : Se  $g_j \in C_0^\infty$  é outra sequência com  $g_j \rightarrow f$  então

$$\|U_0(t)f_j - U_0(t)g_j\|_{L_2} = \|f_j - g_j\|_{L_2} \rightarrow 0.$$

Portanto, a construção acima define uma única função  $u(t, \cdot) \in L_2$  para cada  $f \in L_2$ :

$$u(t, \cdot) = \lim_{j \rightarrow \infty} U_0(t) f_j.$$

A função  $u$  é chamada a *solução generalizada* do problema de Cauchy. Escreveremos

$$u(t, \cdot) = U(t)f, \quad U(t) : L_2 \longrightarrow L_2,$$

e chamaremos a família uniparamétrica  $\{U(t), t \geq 0\}$ , o semigrupo dos operadores solução generalizada. Para cada  $t$  fixado, a construção acima nada mais é do que a extensão usual de um operador linear unitário densamente definido. Como veremos adiante,  $f$  ainda deve ficar restrita a um domínio adequado para que  $u(t, \cdot)$  seja diferenciável no sentido generalizado.

No próximo capítulo faremos um estudo do comportamento assintótico e distribuição da energia no caso das equações da magnetohidrodinâmica.

# Capítulo 4

## Comportamento assintótico e distribuição de energia em magnetohidrodinâmica

### 4.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos as equações da magnetohidrodinâmica, apresentadas no capítulo 1, exemplo (iii), pp. 7-9. Estas equações são equivalentes a um sistema do tipo (1.1), (2.1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \quad (4.1)$$

onde  $u(t, x)$  é matriz  $7 \times 1$  e  $A_j$  é matriz  $7 \times 7$ .

Os resultados obtidos no capítulo anterior nos possibilita exibir a solução do problema de Cauchy para o sistema (4.1) com dado inicial  $f \in L_2$ . No entanto, por uma conveniência futura, daremos um novo enfoque no problema. Um caminho natural é colocarmos o sistema (4.1) como uma equação de evolução no espaço de Hilbert  $H = [L_2(R^3)]^7$ . Então, (4.1) pode ser escrito na forma

$$u_t = -i\Lambda u$$

onde

$$\Lambda u = -i \sum_{j=1}^3 A_j \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Fazendo uso da transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  encontramos

$$\Lambda f = \mathcal{F}^{-1} \Lambda(\cdot) \mathcal{F} f,$$

onde

$$\Lambda(p) = \sum_{j=1}^3 A_j p_j.$$

Se definirmos o domínio do operador  $\Lambda$  como

$$D(\Lambda) = \{f \in H : \Lambda(\cdot) \hat{f} \in H\},$$

então  $\Lambda$  será autoadjunto [A2]. Logo o Teorema de Stone ([K], p.481ss) nos garante que as soluções com energia finita do sistema (4.1) são dadas por

$$u(t, \cdot) = U(t)f = e^{-it\Lambda} f, \quad f \in D(\Lambda).$$

Convém observar que a exigência  $f \in D(\Lambda)$  é necessária para assegurar que  $U(t)f$  seja fortemente derivável ([K], p. 481) e satisfaça a equação diferencial. É claro que  $U(t)f$  está definida para todo  $f \in H$ , mas não é necessariamente derivável.

Seja  $\hat{P}(p)$  projeção ortogonal de  $C_E^7$  no autoespaço de  $\Lambda(p)$  associada com  $\tau(p)$  e tomemos

$$P = \mathcal{F}^{-1} \hat{P}(\cdot) \mathcal{F},$$

projeção ortogonal em  $H$ . Então,

$$\Lambda(p) = \sum \tau(p) \hat{P}(p),$$

onde o somatório estende-se sobre os sete valores de  $\hat{P}(p)$  e correspondentes valores de  $\tau(p)$ .

Como um operador em  $H$ ,  $\Lambda(\cdot)$  também é autoadjunto com domínio

$$\mathcal{F}[D(\Lambda)] = \{\hat{f} \in H : \Lambda(\cdot)\hat{f} \in H\}.$$

Ainda mais,  $\Lambda$  e  $\Lambda(\cdot)$  são unitariamente equivalentes pela transformada de Fourier, que nos dá a resolução espectral de  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \mathcal{F}^{-1}\Lambda(\cdot)\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1} \sum \tau(\cdot)\hat{P}(\cdot)\mathcal{F}.$$

Finalmente a solução pode ser escrita na forma

$$u(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum \int_{R^3} e^{i(x \cdot p - \tau(p)t)} \hat{P}(p) \hat{f}(p) dp,$$

que é exatamente a mesma solução que seria obtida pelos resultados do capítulo anterior.

Em nosso trabalho estudaremos o comportamento assintótico e a distribuição da energia apenas da parte da solução, obtida acima, associada com os autovalores  $\pm\tau_{\pm}(p)$  (dados em (2.5), (2.6), p. 14) e que escreveremos na seguinte forma:

$$u_{\pm}^{+}(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{R^3} e^{i(x \cdot p - \tau_{\pm}(p)t)} \hat{P}_{\pm}^{+}(p) \hat{f}(p) dp;$$

$$u_{\pm}^{-}(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{R^3} e^{i(x \cdot p + \tau_{\pm}(p)t)} \hat{P}_{\pm}^{-}(p) \hat{f}(p) dp.$$

Ao final do capítulo faremos alguns comentários sobre o solução completa.

O objetivo principal é obter uma solução aproximada para  $u_{\pm} = u_{\pm}^{+} + u_{\pm}^{-}$ , a chamada função de onda assintótica. O próximo passo é apresentar alguns resultados sobre a distribuição assintótica da energia da solução  $u_{\pm}$ . Para isto utilizaremos o método da fase estacionária bem como propriedades da chamada superfície de vagarosidade.

## 4.2 A superfície de vagarosidade

Para podermos estudar o comportamento assintótico da solução  $u(t, x)$  do sistema (4.1), teremos que usar certas propriedades da chamada superfície de vagarosidade, definida a partir dos autovalores positivos  $\tau_j(p)$  de  $\Lambda(p)$  ([W2], p. 285):

$$S = \bigcup S_j,$$

$$S_j = \{p \in R^n : \tau_j(p) = 1\}.$$

O nome superfície de vagarosidade é motivado pelo fato de que dado  $p \in S$ , a velocidade de propagação da onda nesta direção é igual ao inverso da distância do ponto  $p$  à origem, isto é,

$$p \in S \text{ se e somente se } \frac{1}{|p|} = v(p) = \frac{\tau(p)}{|p|}.$$

Lembremos que num meio anisotrópico a velocidade de propagação varia de acordo com a direção considerada. Ao contrário num meio isotrópico a velocidade de propagação independe da direção. Então o formato de  $S$  caracteriza e é caracterizado pela anisotropia do meio governado por (4.1). Podemos concluir então que um meio é isotrópico, se e somente se, as folhas de  $S$  são esferas concêntricas centradas na origem. Um exemplo que ilustra bem este caso é a equação das ondas tridimensional, onde a velocidade de propagação é constantemente igual a  $c$  e temos apenas um autovalor positivo  $c|p|$ . Segue então que  $S$  é constituída de uma única folha:

$$S = \{p \in R^3 : c|p| = 1\},$$

que é, evidentemente, a esfera de raio  $\frac{1}{c}$ . A equação das ondas é um caso particular de sistemas ditos fortemente propagativos, nos quais cada autovalor de  $\Lambda(p)$  ou é identicamente nulo ou nunca se anula para  $p \neq 0$ . Neste tipo de sistema,  $S$  será sempre limitada, pois dado  $p \in S, p = |p|\omega, |\omega| = 1$  e então  $\tau(p) = 1$  é equivalente a  $\tau(|p|\omega) = 1$ . Como  $\tau$  é positivamente homogêneo então  $|p|\tau(\omega) = 1$  ou seja

$$\tau(\omega) = \frac{1}{|p|}.$$

$\tau(\omega)$  é contínua num compacto logo, assume máximo, digamos,  $\tau(\omega) \leq M$ . Concluimos então que  $S$  é limitada. É fácil verificar que a recíproca é verdadeira: se  $S$  é limitada então o sistema é fortemente propagativo. Este tipo de sistema foi estudado de uma forma bem geral por Wilcox em [W2], bem como a superfície de vagarosidade associada. No entanto para sistemas simétricos hiperbólicos mais genéricos,  $S$  não é necessariamente limitada. Um exemplo disto são as equações da magnetohidrodinâmica em que algumas folhas de  $S$  são ilimitadas. O estudo da superfície de vagarosidade  $S$  associada às equações da magnetohidrodinâmica foi feito em detalhes por Ávila em [A4]. Faremos aqui, uma apresentação dos resultados obtidos, sem nos determos em todas as demonstrações, porém, enfatizando o aspecto geométrico. Como já observamos no capítulo 2, existem três autovalores simples positivos associados ao sistema (4.1) e que sabemos serem funções bem regulares de  $p$ . Segue então, que  $S$  é constituída por três folhas: uma folha limitada associada ao autovalor  $\tau_+(p)$ :

$$S_+ = \{p \in R^3 : \tau_+(p) = 1\};$$

uma folha ilimitada associada ao autovalor  $\tau_-(p)$ :

$$S_- = \{p \in R^3 : \tau_-(p) = 1\}$$

e plano  $p_3 = \frac{1}{A}$  associado ao autovalor  $\tau_A(p)$ :

$$S_A = \{p \in R^3 : \tau_A(p) = 1\}.$$

Em vista de (2.5) e (2.6) vemos que estas três partes são superfícies de revolução em torno do eixo  $p_3$ , simétricas em relação à origem e ao plano  $p_3 = 0$ . Estaremos interessados somente na folha  $S_-$  associada ao autovalor  $\tau_-(p)$ . Tomemos  $p = |p| \omega = r\omega$  onde  $|\omega| = 1$  e  $r > 0$ . Vemos que  $p \in S_-$  é equivalente a  $r = \frac{1}{\tau_-(\omega)}$ . Sejam  $\gamma = \omega_3$  e

$$\begin{aligned} R &= \frac{A}{a} \text{ e } \rho = ar \text{ se } A \geq a, \\ R &= \frac{a}{A} \text{ e } \rho = Ar \text{ se } a \geq A. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Então  $r = \frac{1}{\tau_-(\omega)}$  fica

$$\rho = \rho(\gamma) = \sqrt{2} \left( R^2 + 1 - \sqrt{(R^2 + 1)^2 - 4R^2\gamma^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.3)$$

Considere agora a curva  $C$  no plano  $p_2 = 0$  em coordenadas polares

$$p_1 = \rho \cos \theta, \quad p_3 = \rho \sin \theta, \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

onde  $\rho = \rho(\gamma)$  e  $\sin \theta = \gamma$ . Então,  $C$  fica

$$p_1 = \rho(\gamma)\sqrt{1 - \gamma^2}, \quad p_3 = \rho(\gamma)\gamma, \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (4.4)$$

Considere também a superfície de revolução  $\Omega_1$  obtida pela rotação da curva  $C$  em torno do eixo  $p_3$ . Seja  $\Omega_2$  a reflexão de  $\Omega_1$  com respeito à origem e  $\Omega_- = \Omega_1 \cup \Omega_2$  (Figs. 4.1 e 4.2). Então, através de (4.2) vemos que  $S_-$  está relacionada com  $\Omega_-$  por um fator de multiplicação, isto é,

$$p \in S_- \iff s = \alpha p \in \Omega_-,$$

onde  $\alpha = a$  se  $A \geq a$  e  $\alpha = A$  se  $a \geq A$ . Portanto, as propriedades de  $S_-$  podem ser recuperadas das propriedades de  $\Omega_-$ .

**Teorema 4.1** *Suponha  $R > 1$ . A curva  $C: p_3 = p_3(p_1), 0 \leq p_1 < \infty$ , dada por (4.3) e (4.4), tem inclinação crescente de  $p_1 = 0$  até um certo ponto  $p_1 = p_1^0 > 0$ , e decrescente para  $p_1 > p_1^0$ . Concluimos então que  $P_0 = (p_1^0, p_3(p_1^0))$  é o único ponto de inflexão de  $C$ . Quando  $p_1 \rightarrow \infty$  a inclinação de  $C$  tende a zero e  $p_3 \rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{R^2}}$  (fig. 4.1).*

Seja  $Z_1$  o círculo em  $\Omega_1$  gerado pela rotação do ponto de inflexão  $P_0$  em torno do eixo  $p_3$  (fig. 4.2).  $\Omega_1$  é composta, além de  $Z_1$ , por uma parte limitada tendo  $Z_1$  como fronteira e que denotaremos por  $\Omega_1^0$  e uma parte ilimitada que denotaremos por  $\Omega_1^\infty$ . No caso de  $\Omega_2$  temos decomposição e notação análogas (figs. 4.3).

**Teorema 4.2** *A curvatura Gaussiana de  $\Omega_- = \Omega_1 \cup \Omega_2$  é positiva em  $\Omega_-^0 = \Omega_1^0 \cup \Omega_2^0$ , negativa em  $\Omega_-^\infty = \Omega_1^\infty \cup \Omega_2^\infty$  e nula nos círculos  $Z_1$  e  $Z_2$  (fig 4.3).*

**Teorema 4.3** *No caso em que  $R = 1$ , a curva  $C$  é concava para todo  $p_1 \geq 0$  e a superfície  $\Omega_-$  tem pontos angulares em  $(0, 0, \pm 1)$  e curvatura negativa em todos os outros pontos (fig. 4.4).*

( Para uma demonstração dos teoremas acima veja [A4], pp. 36-40 )

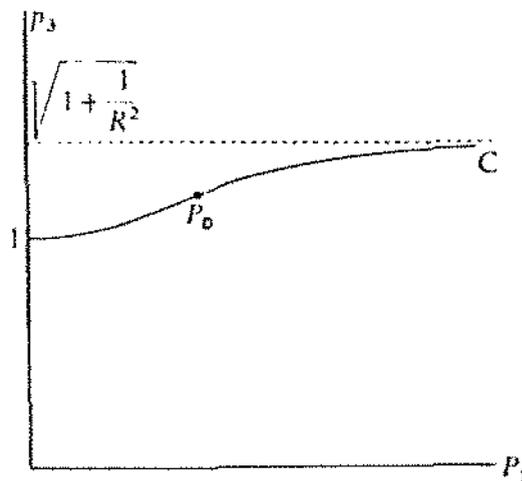


Figura 4.1

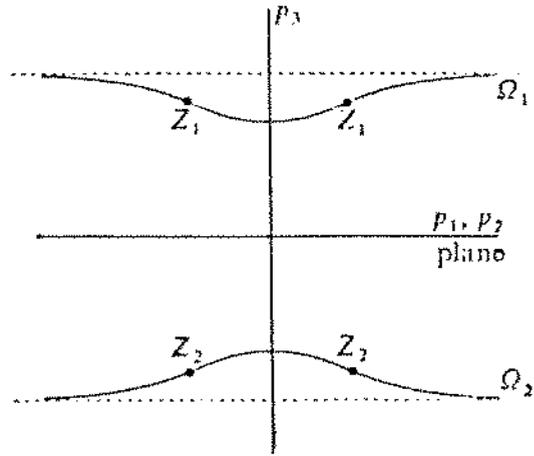


Figura 4.2

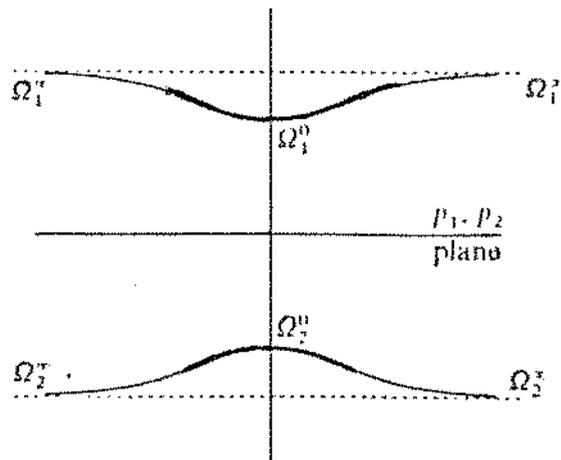


Figura 4.3

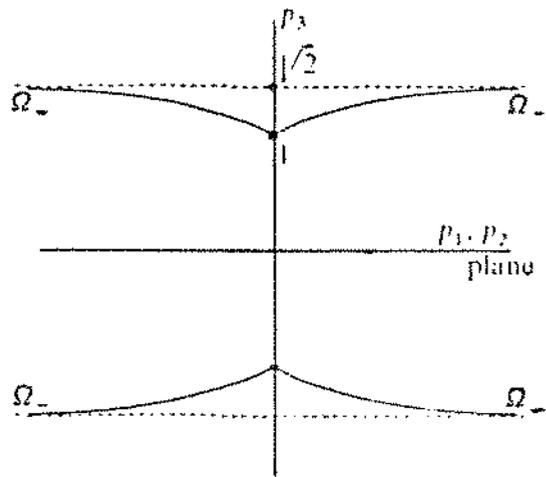


Figura 4.4

### 4.3 Uma nova representação das soluções

Vamos considerar o caso  $R > 1$ . Relembramos que  $Z_1$  é o subconjunto de  $\Omega_1$  onde a curvatura Gaussiana se anula. Seja  $Z$  o cone

$$Z = \{p = \lambda s : \lambda \in R, s \in Z_1\}$$

e

$$Z^* = Z \cup \{p : p_3 = 0\}$$

(Claramente  $Z \cap \Omega_2 = Z_2$  é o subconjunto de  $\Omega_2$  onde a curvatura Gaussiana se anula). Agora introduziremos o conjunto de dados  $f$

$$S_\Omega = \{f \in H : \hat{f} \in [C_0^\infty(R^3)]^7 \text{ e } \text{supp } \hat{f} \subset R^3 - Z^*\}.$$

Evidentemente  $S_\Omega$  é denso em  $H$ , pois  $Z^*$  é de medida nula [W2]. Sejam  $u_+^+$  e  $u_-^-$  as contribuições de  $u$  associadas com os autovalores  $\tau_-(p)$  e  $-\tau_-(p)$  respectivamente. O fato de  $S_-$  ser uma superfície regular, implica que a correspondência  $p \iff (\lambda, s)$  define um sistema de coordenadas não singular em  $R^3$ , baseado na folha  $S_-$  [W2]. Como  $p \in S_- \iff s = \alpha p \in \Omega_-$ , então  $\tau_-(s) = \alpha$ . Como  $\tau_-(p)$  é homogêneo positivo de grau 1 temos que  $s \cdot \nabla \tau_-(s) = \alpha$ . Portanto tomando  $p = \lambda s, \lambda \geq 0$  e denotando por  $dS$  o elemento de área em  $\Omega_-$  no ponto  $s \in \Omega_-$  obtemos

$$dp = \frac{\alpha \lambda^2}{|\nabla \tau_-(s)|} dS d\lambda.$$

Notemos também que  $\hat{P}_-^+(\lambda s) = \hat{P}_-^+(s)$ , para  $\lambda > 0$ . Concluimos então que

$$u_-^+(t, x) = \frac{\alpha}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty e^{-i\alpha \lambda t} \lambda^2 \int_{\Omega_-} e^{i\lambda x \cdot s} \frac{\hat{P}_-^+(s) \hat{f}(\lambda s)}{|\nabla \tau_-(s)|} dS d\lambda. \quad (4.5)$$

Podemos tratar  $u_-^-$  de modo similar. Fazendo a mudança de variável  $p \rightarrow -p$  e observando que  $\hat{P}_-^+(-p) = \hat{P}_-^+(p)$  obtemos

$$u_-^-(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{R^3} e^{-i(x \cdot p - t\tau_-(p))} \hat{P}_-^+(p) \hat{f}(-p) dp.$$

Introduzindo coordenadas baseadas em  $\Omega_-$  obtemos:

$$u_-(t, x) = \frac{\alpha}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty e^{i\alpha\lambda t} \lambda^2 \int_{\Omega_-} e^{-i\lambda x \cdot s} \frac{\hat{P}_-^+(s) \hat{f}(-\lambda s)}{|\nabla\tau_-(s)|} dS d\lambda.$$

Finalmente, fazendo a mudança de variável  $\lambda \rightarrow -\lambda$ , encontramos:

$$u_-(t, x) = \frac{\alpha}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^0 e^{-i\alpha\lambda t} \lambda^2 \int_{\Omega_-} e^{i\lambda x \cdot s} \frac{\hat{P}_-^+(s) \hat{f}(\lambda s)}{|\nabla\tau_-(s)|} dS d\lambda. \quad (4.6)$$

Somando (4.5) e (4.6) obtemos a contribuição  $u_- = u_-^+ + u_-^-$  da solução devida aos autovalores  $\pm\tau_-(p)$  na forma

$$u_-(t, x) = \int_{-\infty}^\infty e^{-i\alpha\lambda t} v_-(\lambda x, \lambda) \lambda^2 d\lambda, \quad (4.7)$$

onde

$$v_-(x, \lambda) = \frac{\alpha}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Omega_-} e^{ix \cdot s} \frac{\hat{P}_-^+(s) \hat{f}(\lambda s)}{|\nabla\tau_-(s)|} dS, \quad (4.8)$$

e  $f \in S_\Omega$ .

As representações (4.7) e (4.8) serão usadas na próxima seção para obtermos o comportamento de  $u_-(t, x)$  quando  $t \rightarrow \infty$  através do método da fase estacionária.

## 4.4 Aplicação do método da fase estacionária

Estudaremos o comportamento assintótico de  $v_-(x, \lambda)$  com  $|x| \rightarrow \infty$  usando o chamado método da fase estacionária. Na verdade este método nos dá uma expressão assintótica para  $v_-(x, \lambda)$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ . De acordo com este método, a principal contribuição à integral em (4.8) é devida aos pontos  $s \in \Omega_-$  onde a fase  $x \cdot s$  é estacionária, ou seja, os pontos  $s \in \Omega_-$  onde a fase torna-se praticamente constante numa vizinhança destes pontos. Seja  $\eta = \frac{x}{|x|}$  para  $x \neq 0$ . Então  $x \cdot s$  será estacionária nos pontos  $s \in \Omega_-$  onde a normal unitária  $N(s)$  (A aplicação de Gauss de  $\Omega_-$ ) é igual a  $\eta$  ou a  $-\eta$ . Para uma superfície limitada e convexa, dado  $\eta$  existe um único ponto  $s$  na superfície onde a fase  $x \cdot s$  é estacionária. No caso da superfície  $\Omega_-$  a situação é um pouco mais complexa, como veremos a seguir.

Quando  $N(s)$  percorre  $\Omega_-$ , a direção  $\eta$  da normal faz um ângulo com o eixo vertical de no máximo  $\phi$ , onde  $\phi$  é o ângulo cuja tangente é igual à inclinação da curva  $C$  no seu ponto de inflexão  $P_0$  (veja fig. 4.5). Então, estaremos interessados somente nos pontos  $x = |x| \eta$  tais que

$$\left| \frac{\eta \cdot e_3}{|\eta| |e_3|} \right| > \cos \phi,$$

onde  $e_3$  é o vetor unitário na direção do eixo vertical. Isto implica que

$$|\eta_3| > \cos \phi.$$

É natural então introduzirmos o cone

$$\Gamma = \{x = |x| \eta \neq 0 : |\eta_3| > \cos \phi\}.$$

Sejam também

$$\Sigma_1 = \{\eta \in S^2 : \eta \in \Gamma, \eta_3 > 0\}$$

e

$$\Sigma_2 = \{-\eta : \eta \in \Sigma_1\}.$$

(veja fig. 4.6)

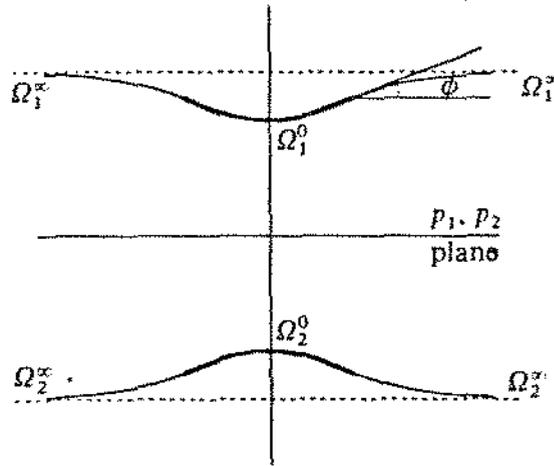


Figura 4.5

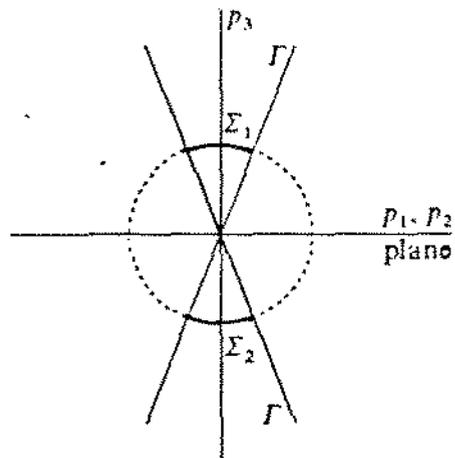


Figura 4.6

Em vista dos resultados da seção 4.2, é fácil ver que a aplicação de Gauss de  $\Omega_-$  na esfera unitária  $S^2$ , isto é,

$$N : s \in \Omega_- \longrightarrow \eta = N(s) = \frac{x}{|x|} = \frac{\nabla \tau_-(s)}{|\nabla \tau_-(s)|} \in S^2,$$

é injetiva quando restrita a cada uma das superfícies

$$\Omega_-^0 = \Omega_1^0 \cup \Omega_2^0 \quad \text{e} \quad \Omega_-^\infty = \Omega_1^\infty \cup \Omega_2^\infty.$$

Além disso ela aplica

$$\Omega_1^0 \text{ sobre } \Sigma_1,$$

$$\Omega_1^\infty \text{ sobre } \Sigma_1 - \{(0, 0, 1)\},$$

$$\Omega_2^0 \text{ sobre } \Sigma_2,$$

$$\Omega_2^\infty \text{ sobre } \Sigma_2 - \{(0, 0, -1)\}.$$

Temos então que

$$s_0 = s_0(\eta) \in \Omega_-^0 \iff \eta = N(s_0) \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2;$$

$$s_\infty = s_\infty(\eta) \in \Omega_-^\infty \iff \eta = N(s_\infty)$$

$$\in (\Sigma_1 - \{(0, 0, 1)\}) \cup (\Sigma_2 - \{(0, 0, -1)\});$$

$$s_0(-\eta) = -s_0(\eta);$$

$$s_\infty(-\eta) = -s_\infty(\eta).$$

O método da fase estacionária foi apresentado por Wilcox ([W2], pp. 292–293) numa forma que é apropriada para nossa expressão (4.8) e que não

repetiremos aqui, mas aplicaremos diretamente na presente situação, sem demonstração. Notemos que se  $x \neq 0$  está fora do cone  $\Gamma$  então não existe  $s \in \Omega_-$  onde  $x \cdot s$  é estacionária. Ao contrário, se  $x = |x| \eta \in \Gamma$ ,  $x \cdot s$  será estacionária nos pontos  $\pm s_0 = s_0(\pm\eta)$  e  $\pm s_\infty = s_\infty(\pm\eta)$ . Além disso,

$$s_0(\pm\eta) \rightarrow (0, 0, \pm 1) \quad \text{e} \quad s_\infty(\pm\eta) \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad \eta \rightarrow (0, 0, 1).$$

(veja as figs. 4.5 e 4.6)

O método da fase estacionária nos dá uma expressão assintótica para  $v_-(x, \lambda)$  quando  $|x| \rightarrow \infty$  :

$$v_{\pm}^{\pm\infty}(x, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin \Gamma, \\ \frac{1}{|x|} \sum' \frac{\alpha \psi(\pm s) \hat{P}_{\pm}^+(\pm s) \hat{f}(\pm \lambda s)}{\sqrt{2\pi} |K(s)| |\nabla \tau_{\pm}(s)|} e^{ix \cdot s} & \text{se } x = |x| \eta \in \Gamma, \end{cases} \quad (4.9)$$

onde  $\sum'$  significa a soma de dois termos, um com  $s = s_0 = s_0(\eta)$  e outro com  $s = s_\infty = s_\infty(\eta)$ ;  $K(s)$  é a curvatura da superfície  $\Omega_-$  no ponto  $s$ ;  $\psi(\pm s_0) = i$  e  $\psi(\pm s_\infty) = 1$ .

Agora podemos estabelecer o resultado sobre o comportamento assintótico de  $v_-(x, \lambda)$  que é necessário no estudo de  $u_-(t, x)$ . Aqui e no que segue  $C_f$  denota uma constante que depende de  $f$ , não necessariamente a mesma cada vez que aparecer.

**Teorema 4.4** *Seja  $f \in S_{\Omega}$  e defina  $q(x, \lambda)$  por*

$$v_-(x, \lambda) = v_-^{\infty}(x, \lambda) + v_-^{-\infty}(x, \lambda) + q(x, \lambda), \quad (4.10)$$

onde  $v_-$  é a função dada por (4.8) e  $v_{\pm}^{\pm\infty}$  é dada por (4.9). Então existe uma constante  $C_f$  tal que

$$|q(x, \lambda)| \leq C_f |x|^{-2}, \quad \text{para todo } x \neq 0. \quad (4.11)$$

Uma expressão para  $u_-(t, x)$  correspondente a (4.10) é obtida substituindo-se (4.10) em (4.7). Então

$$u_-(t, x) = u_-^\infty(t, x) + u_-^{-\infty}(t, x) + q_1(t, x), \quad (4.12)$$

onde, em vista de (4.9),

$$u_-^{\pm\infty}(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin \Gamma, \\ \frac{1}{|x|} \sum' F_-(\pm x \cdot s - \alpha t, \pm s) & \text{se } x = |x| \eta \in \Gamma, \end{cases} \quad (4.13)$$

e o perfil  $F_-$  é dado por

$$F_-(\theta, s) = \frac{\alpha \psi(s) \hat{P}_-^+(s)}{\sqrt{2\pi} |K(s)| |\nabla \tau_-(s)|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda \theta} \hat{f}(\lambda s) |\lambda| d\lambda. \quad (4.14)$$

Uma estimativa como (4.11) vale para  $q_1(t, x)$  como provaremos a seguir.

**Teorema 4.5** *Se  $f \in S_\Omega$  então existe uma constante  $C_f$  tal que*

$$|q_1(t, x)| \leq C_f |x|^{-2}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0. \quad (4.15)$$

*Prova.* Substituindo (4.10) em (4.7) encontramos

$$q_1(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha \lambda t} q(\lambda x, \lambda) |\lambda|^2 d\lambda. \quad (4.16)$$

Notemos que a definição de  $S_\Omega$  implica que  $\text{supp } \hat{f}$  é um conjunto compacto que não intercepta o plano  $p_3 = 0$  e, em particular, não contém a origem. Segue disto e das propriedades de  $\Omega_-$  que existem constantes positivas  $c_1$ ,  $C_1$  e  $M$  tais que

$$\text{supp } \hat{f} \subset \{p : c_1 \leq |p| \leq C_1\},$$

$$A = \{s \in \Omega_- : p = \lambda s \in \text{supp } \hat{f} \text{ para algum } \lambda\} \subset \{s : 1 \leq |s| \leq M\}.$$

Consequentemente, se  $s \in A$  e se tomarmos  $p = \lambda s$  com  $\lambda$  tal que  $C_1 < |\lambda| < c_1/M$ , então

$$|\lambda| < c_1/M \implies |\lambda s| < c_1$$

e

$$|\lambda| > C_1 \implies |\lambda s| > C_1.$$

Portanto, com  $s \in A$ , o suporte de  $\hat{f}(\lambda s)$ , como função de  $\lambda$ , está contido no conjunto

$$B = \{\lambda \in \mathbb{R} : c_1 M^{-1} \leq |\lambda| \leq C_1\}.$$

Logo, a integração em (4.16) é na verdade uma integração sobre  $B$ . Segue disto que

$$|q_1(t, x)| \leq C_f |x|^{-2} \int_B |\lambda|^2 d\lambda,$$

e portanto vale (4.15), o que completa a prova.

Provaremos agora que para  $t > 0$  a função  $u_-^\infty(t, x)$  satisfaz uma desigualdade como (4.15) para  $q_1(t, x)$ . O significado disso é que  $u_-^\infty(t, x)$  dá a principal contribuição para  $u_-(t, x)$  quando  $t > 0$  e  $|x|$  é grande.

**Teorema 4.6** *Dado  $f \in S_\Omega$  existe uma constante  $C_f$  tal que*

$$|u_-^\infty(t, x)| \leq C_f |x|^{-2}, \text{ para todo } t > 0 \text{ e } x \neq 0.$$

*Prova.* Se  $x \notin \Gamma$  nada temos a provar. Suponha  $x \in \Gamma$ . O argumento usado na prova do Teorema (4.5) mostra que o integrando em (4.14) é zero se  $s \notin A$ . Se  $s \in A$ , a integração é finita sobre o conjunto  $B$ . Em vista disto somente consideraremos  $s$  no compacto  $A$ . Como consequência,  $K(s)$  e  $|\nabla \tau_-(s)|$  são limitadas longe do zero. Então, escrevendo

$$e^{i\lambda\theta} = \frac{1}{i\theta} \frac{\partial(e^{i\lambda\theta})}{\partial\lambda}$$

e integrando por partes em (4.14) obtemos a estimativa

$$|F_-(\theta, s)| \leq \frac{C_f}{|\theta|}.$$

Segue disto e de (4.13) que

$$|u_-^{-\infty}(t, x)| \leq \frac{C_f}{|x|} \left( \frac{1}{|x| |s_0(\eta) \cdot \eta + \alpha t|} + \frac{1}{|x| |s_\infty(\eta) \cdot \eta + \alpha t|} \right),$$

onde o último termo é ausente se  $\eta = (0, 0, \pm 1)$ .

Sabemos pelo estudo da superfície  $\Omega_-$  que  $s_0(\eta) \cdot \eta = s_0 \cdot N(s_0)$  assume seu valor mínimo  $b$  quando  $s_0$  pertence aos círculos  $Z_1$  ou  $Z_2$ . Mas  $s \cdot \nabla \tau_-(s) = \alpha$  para  $s \in \Omega_-$ . Então

$$s_0(\eta) \cdot \eta = s_0 \cdot N(s_0) = s_0 \cdot \frac{\nabla \tau_-(s_0)}{|\nabla \tau_-(s_0)|} = \frac{\alpha}{|\nabla \tau_-(s_0)|} > 0.$$

Portanto  $b > 0$ . Como  $t > 0$ , temos que

$$|x| |s_0(\eta) \cdot \eta + \alpha t| > |x| b.$$

Analogamente

$$|x| |s_\infty(\eta) \cdot \eta + \alpha t| > |x| b.$$

Concluimos então que

$$|u_-^{-\infty}(t, x)| \leq \frac{C_f}{|x|} \left( \frac{1}{b|x|} + \frac{1}{b|x|} \right),$$

o que completa a prova do Teorema.

**Corolário 4.1** *Dado  $f \in S_\Omega$  existe uma constante  $C_f$  tal que*

$$u_-(t, x) = u_-^{-\infty}(t, x) + q_2(t, x),$$

onde

$$|q_2(t, x)| \leq C_f |x|^{-2} \text{ para todo } t > 0 \text{ e } x \neq 0.$$

Notemos que (4.14) associa um perfil  $F_-$  para cada  $f \in S_\Omega$ . O perfil estendido  $F_-$  é obtido construindo

$$\widehat{F}_-(\lambda, s) = \frac{\alpha\psi(s) |\lambda| \widehat{P}_-^+(s) \widehat{f}(\lambda s)}{\sqrt{|K(s)| |\nabla\tau_-(s)|}}, \quad f \in H,$$

e tomando  $F_-$  como sendo a transformada inversa de  $\widehat{F}_-$ . Quando  $f \in S_\Omega$ ,  $F_-$  coincide com (4.14). Para maiores detalhes sobre a extensão dos perfis  $F_-$ , veja o apêndice A.

Em vista do corolário (4.1),  $u_-^\infty(t, x)$  é a função de onda relevante no estudo do comportamento assintótico de  $u_-(t, x)$  para  $t \rightarrow +\infty$ . Estenderemos agora esta função usando os perfis estendidos  $F_-$ .

**Definição 4.1** *Dado  $f \in H$ , definimos a correspondente função de onda assintótica  $u_-^\infty$  por*

$$u_-^\infty(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \Gamma, \\ \frac{1}{|x|} \sum' F_-(x \cdot s - \alpha t, s), & \text{se } x = |x| \eta \in \Gamma, \end{cases}$$

onde  $F_-$  é o perfil estendido e  $\sum'$  tem o mesmo significado que em (4.9).

Na próxima seção mostraremos que a solução  $u_-$  é assintoticamente igual à função de onda assintótica, definida acima, no sentido de que a energia de suas diferenças tende a zero com  $t \rightarrow +\infty$ .

## 4.5 Convergência das funções de onda assintóticas

Nesta seção apresentaremos o seguinte teorema, que mostra, para  $t \rightarrow +\infty$ , que  $u_-$  e  $u_-^\infty$  são assintoticamente iguais, no sentido da norma  $H$ . Este resultado justifica a denominação, para  $u_-^\infty$ , de função de onda assintótica.

**Teorema 4.7** *Dado  $f \in H$ , a função de onda  $u_-(t, \cdot) = U(t)P_-f$  é assintoticamente igual a  $u_-^\infty(t, \cdot) = U_-^\infty(t)f$  em  $H$ , quando  $t \rightarrow +\infty$ , isto é,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| u_-(t, \cdot) - u_-^\infty(t, \cdot) \|_H = 0.$$

(Daqui por diante usaremos a notação  $\| \cdot \|$  para a norma  $\| \cdot \|_H$ . Em algum contexto do trabalho poderemos utilizar a notação original sem perigo de confusão).

*Prova.* Vamos tomar primeiramente,  $f \in S_\Omega$ . É claro que  $u_- \in H$  e também  $u_-^\infty \in H$  (apêndice B, lema B.1). Segue então que

$$q_2(t, x) = u_-(t, x) - u_-^\infty(t, x) \in H.$$

Pelo corolário (4.1), temos que

$$|q_2(t, x)| \leq \frac{C_f}{|x|^2}, \text{ para todo } t > 0 \text{ e } x \neq 0. \quad (4.17)$$

Agora, dado  $R > 0$ ,

$$\|q_2(t, \cdot)\|^2 = \int_{|x| < R} q_2(t, x)^* E q_2(t, x) dx + \int_{|x| \geq R} q_2(t, x)^* E q_2(t, x) dx.$$

Em vista de (4.17), dado  $\varepsilon > 0$ , podemos escolher  $R$  suficientemente grande tal que

$$\int_{|x| \geq R} q_2(t, x)^* E q_2(t, x) dx < \frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (4.18)$$

Por outro lado, de acordo com os lemas B.3 e B.4 do apêndice B, fixado  $R$ , existe  $t_0 > 0$  tal que

$$t > t_0 \implies \int_{|x| < R} q_2(t, x)^* E q_2(t, x) dx < \frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (4.19)$$

Concluimos então, de (4.18) e (4.19), que

$$t > t_0 \implies \| q_2(t, \cdot) \| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| u_-(t, \cdot) - u_-^\infty(t, \cdot) \| = 0, \text{ quando } f \in S_\Omega.$$

Quando  $f$  é um elemento qualquer em  $H$ , não necessariamente em  $S_\Omega$ , basta usar um argumento de aproximação. Para isto tome

$$u_-(t, \cdot) - u_-^\infty(t, \cdot) = T(t)f,$$

onde  $T(t) = U(t)P_- - U_-^\infty(t)$ . Como  $U(t)$  é um operador unitário e  $\| U_-^\infty(t) \| \leq 2$  (apêndice B, lema B.2) então o operador  $T(t)$  tem norma no máximo três. Dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $f_\varepsilon \in S_\Omega$  tal que

$$\| f - f_\varepsilon \| \leq \frac{\varepsilon}{6},$$

e tome  $t_0 > 0$  tal que

$$\| T(t)f_\varepsilon \| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para } t > t_0.$$

Então temos, para  $t > t_0$ ,

$$\begin{aligned} \| u_-(t, \cdot) - u_-^\infty(t, \cdot) \| &= \| T(t)(f - f_\varepsilon) + T(t)f_\varepsilon \| \\ &\leq 3 \| f - f_\varepsilon \| + \| T(t)f_\varepsilon \| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| u_-(t, \cdot) - u_-^\infty(t, \cdot) \| = 0, \text{ com } f \in H.$$

O teorema (4.7) será fundamental no estudo da distribuição de energia, como veremos na próxima seção.

## 4.6 Distribuição assintótica da energia

Lembremos que dado qualquer conjunto mensurável  $K \subset \mathbb{R}^3$ , a energia de  $u_-$  em  $K$  no tempo  $t$  é definida pela expressão

$$\mathcal{E}(u_-, K, t) = \int_K u_-(t, x)^* E u_-(t, x) dx.$$

É claro que  $\mathcal{E}(u_-, K, t)$  é menor ou igual à energia total:

$$\mathcal{E}(u_-, K, t) \leq \mathcal{E}(u_-, \mathbb{R}^3, t) = \| u_-(t, \cdot) \|^2$$

$$= \| U(t)P_- f \|^2 = \| P_- f \|^2 \leq \| f \|^2.$$

A energia de  $u_-$  é estimada trocando  $u_-$  por  $u_-^\infty$ . Isto é possível em virtude do seguinte lema:

**lema 4.1** *Seja  $K(t)$  um conjunto mensurável que pode depender de  $t$ , para  $t > t_0$ . Então*

$$\mathcal{E}(u_-, K(t), t) = \mathcal{E}(u_-^\infty, K(t), t) + \varepsilon(t), \quad (4.20)$$

onde  $\varepsilon(t)$  tende a zero com  $t \rightarrow +\infty$ , uniformemente com respeito à família  $\{K(t)\}$ .

*Prova.* Como  $\mathcal{E}(u_-, K(t), t)^{\frac{1}{2}}$  é uma semi-norma,

$$| \mathcal{E}(u_-, K(t), t)^{\frac{1}{2}} - \mathcal{E}(u_-^\infty, K(t), t)^{\frac{1}{2}} | \leq \mathcal{E}(u_- - u_-^\infty, K(t), t)^{\frac{1}{2}}.$$

Também,

$$\mathcal{E}(u_- - u_-^\infty, K(t), t)^{\frac{1}{2}} \leq \| u_-(t, \cdot) - u_-^\infty(t, \cdot) \|^{\frac{1}{2}}$$

e pelo teorema 4.7, esta última expressão tende a zero com  $t \rightarrow +\infty$ , independente de  $K(t)$ . Isto prova que

$$\mathcal{E}(u_-, K(t), t)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{E}(u_-^\infty, K(t), t)^{\frac{1}{2}} + \varphi(t),$$

onde  $\varphi(t) \rightarrow 0$  com  $t \rightarrow \infty$ . Então

$$\mathcal{E}(u_-, K(t), t) = \mathcal{E}(u_-^\infty, K(t), t) + \varphi(t)[\varphi(t) + 2\mathcal{E}(u_-^\infty, K(t), t)],$$

o que prova o lema, pois  $\mathcal{E}(u_-^\infty, K(t), t)$  é limitada.

O teorema seguinte mostra que a energia de  $u_-$  concentra-se no cone  $\Gamma$  com  $t \rightarrow +\infty$ .

**Teorema 4.8** *Se  $K(t) \cap \Gamma = \emptyset$ , então*

$$\mathcal{E}(u_-, K(t), t) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow +\infty,$$

*uniformemente com respeito à família  $\{K(t)\}$ .*

*Prova.* Isto é uma consequência imediata de (4.20) e do fato que  $u_-^\infty(t, x) = 0$  para  $x \notin \Gamma$ .

Em vista deste teorema, no cômputo da energia de  $u_-$ , para  $t$  grande, somente consideraremos os conjuntos  $K(t) \subset \Gamma$ . Lembremos que a superfície de onda  $W$  é definida como sendo a recíproca polar com respeito à esfera unitária da superfície de vagarosidade  $S$  ([W2], p. 279); todo ponto  $p \in S$  gera um ponto

$$w = \frac{N(p)}{N(p) \cdot p} \in W, \quad (4.21)$$

onde  $p \rightarrow N(p)$  é a aplicação de Gauss de  $S$ . Agora, quando  $p$  percorre  $S_-$ , a expressão (4.21) descreve uma porção correspondente  $W_-$  da superfície de onda. Em vista do fator de multiplicação  $\alpha$ , podemos escrever (4.21) como

$$w = \frac{\alpha N(s)}{N(s) \cdot s} \in W_-,$$

onde  $s$  percorre  $\Omega_-$  e  $s \rightarrow N(s) = \eta$  é a aplicação de Gauss de  $\Omega_-$ . É fácil verificar que  $W_-$  é a união de

$$W_-^1 = \left\{ w = \frac{\alpha N(s)}{N(s) \cdot s} : s \in \Omega_-^0 = \Omega_1^0 \cup \Omega_2^0 \right\}$$

e

$$W_-^2 = \left\{ w = \frac{\alpha N(s)}{N(s) \cdot s} : s \in \Omega_-^\infty = \Omega_1^\infty \cup \Omega_2^\infty \right\}.$$

O cone de onda é definido como sendo o conjunto

$$tW_- = \{x = tw : w \in W_- \text{ e } t \in R\}.$$

Um dos principais resultados que estabeleceremos sobre a distribuição assintótica da energia é que, para  $t$  grande, a energia concentra-se no cone de onda. A idéia da demonstração é construir certos conjuntos  $B_i^t$ , que se aproximam do cone de onda e que concentram a energia.

Introduziremos a seguinte decomposição de  $u_-(t, x)$ , primeiro para  $f \in S_\Omega$ :

$$u_-(t, x) = u_-^1(t, x) + u_-^2(t, x), \quad (4.22)$$

onde  $u_-^1(t, x)$  é dado por (4.7) quando a integração em (4.8) é restrita a  $\Omega_-^0$ ; analogamente,  $u_-^2(t, x)$  é dado por (4.7) quando a integração em (4.8) é restrita a  $\Omega_-^\infty$ . Introduziremos agora os cones

$$C^1 = \{p = \lambda s : \lambda \in R \text{ e } s \in \Omega_-^0\},$$

$$C^2 = \{p = \lambda s : \lambda \in R \text{ e } s \in \Omega_-^\infty\}.$$

Sejam  $\chi_1(p)$  e  $\chi_2(p)$  suas respectivas funções características, e

$$\hat{P}_i(p) = \chi_i(p) \hat{P}_-(p), \quad i = 1, 2,$$

$$P_i = \mathcal{F}^* \hat{P}_i(\cdot) \mathcal{F}, \quad i = 1, 2.$$

Então a decomposição (4.22) pode ser estendida para todo  $f \in H$  se definirmos:

$$u_-^i(t, x) = U(t) P_i f, \quad i = 1, 2.$$

A decomposição das funções de onda assintóticas correspondentes é:

$$u_-^\infty(t, x) = u_-^{\infty,1}(t, x) + u_-^{\infty,2}(t, x),$$

onde  $u_-^{\infty,1}$  e  $u_-^{\infty,2}$  são as contribuições na definição (4.1) correspondentes a  $s_0(\eta)$  e  $s_\infty(\eta)$  respectivamente. Isto significa que o teorema (4.7), o lema (4.1) e o teorema (4.8) permanecem válidos se trocarmos  $u_-$  por  $u_-^i$  e  $u_-^\infty$  por  $u_-^{\infty,i}$ .

Vamos introduzir agora os conjuntos

$$B_1(\lambda_1, \lambda_2) = \{x = |x| \mid \eta \in \Gamma : \alpha\lambda_1 \leq x \cdot s_0(\eta) \leq \alpha\lambda_2\},$$

$$B_2(\lambda_1, \lambda_2) = \{x = |x| \mid \eta \in \Gamma : \alpha\lambda_1 \leq x \cdot s_\infty(\eta) \leq \alpha\lambda_2\},$$

onde  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ . Como

$$x \cdot s_0(\eta) = |x| \eta \cdot s_0(\eta) = \alpha\lambda \iff x = \lambda \left( \frac{\alpha\eta}{\eta \cdot s_0(\eta)} \right),$$

então, em vista da definição de  $W_-^1$ , vemos que

$$B_1(\lambda_1, \lambda_2) = \bigcup \{ \lambda W_-^1 : \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 \}.$$

Analogamente, em vista da definição de  $W_-^2$ ,

$$B_2(\lambda_1, \lambda_2) = \bigcup \{ \lambda W_-^2 : \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 \}.$$

Se tomarmos,  $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$ , então estas folhas  $B_1$  e  $B_2$  são regiões em torno das folhas de onda  $W_-^1$  e  $W_-^2$  respectivamente.

O seguinte teorema nos dá uma estimativa da distribuição da energia para  $u_-^1$  e  $u_-^2$ .

**Teorema 4.9** *Seja  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  constantes ou funções de  $t$ , tais que*

$$t + \lambda_1 \leq t + \lambda_2 \leq +\infty$$

*para todo  $t$  maior do que um certo  $t_0$ . Dados  $f \in H$ ,  $F_-$  perfil estendido,*

$u_-^i = U(t)P_i f$  e  $B_i(t, \lambda_1, \lambda_2) = B_i(t + \lambda_1, t + \lambda_2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  
então,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u_-^1, B_1(t, \lambda_1, \lambda_2), t) &= \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\Omega_-^0} F_-(\lambda, s)^* E F_-(\lambda, s) \frac{|K(s) \nabla \tau_-(s)|}{\alpha} dS d\lambda + \varepsilon_1(t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u_-^2, B_2(t, \lambda_1, \lambda_2), t) &= \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\Omega_-^\infty} F_-(\lambda, s)^* E F_-(\lambda, s) \frac{|K(s) \nabla \tau_-(s)|}{\alpha} dS d\lambda + \varepsilon_2(t), \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde  $\varepsilon_1(t)$  e  $\varepsilon_2(t)$  tendem a zero quando  $t \rightarrow +\infty$ , uniformemente com respeito a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

*Prova.* Em vista do lema (4.1),

$$\mathcal{E}(u_-^1, B_1(t, \lambda_1, \lambda_2), t) = \mathcal{E}(u_-^{\infty,1}, B_1(t, \lambda_1, \lambda_2), t) + \varepsilon(t).$$

Usando coordenadas esféricas e procedendo como na prova do lema B.1, obtemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u_-^{\infty,1}, B_1(t, \lambda_1, \lambda_2), t) &= \\ &= \int_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \int_{\frac{\alpha(t+\lambda_1)}{\eta \cdot s_0(\eta)}}^{\frac{\alpha(t+\lambda_2)}{\eta \cdot s_0(\eta)}} F_-(x \cdot s_0(\eta) - \alpha t, s)^* E F_-(x \cdot s_0(\eta) - \alpha t, s) d|x| dS^2 = \\ &= \int_{\Omega_-^0} \int_{(t+\lambda_1)|\nabla \tau_-(s)|}^{(t+\lambda_2)|\nabla \tau_-(s)|} F_-\left(\frac{\alpha|x|}{|\nabla \tau_-(s)|} - \alpha t, s\right)^* E F_-\left(\frac{\alpha|x|}{|\nabla \tau_-(s)|} - \alpha t, s\right) |K(s)| d|x| dS = \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\Omega_-^0} F_-(\lambda, s)^* E F_-(\lambda, s) \frac{|K(s) \nabla \tau_-(s)|}{\alpha} dS d\lambda, \end{aligned}$$

o que prova (4.23). A prova de (4.24) é inteiramente análoga.

**Corolário 4.2** *Suponha que*

$$\lambda_i = \lambda_i(t), \lambda_1(t) \rightarrow -\infty, \lambda_2(t) \rightarrow +\infty \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

*Então, para  $i = 1, 2$ , temos que:*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(u_-^i, B_i(t, \lambda_1, \lambda_2), t) = \mathcal{E}(u_-^i, R^3, 0) = \|P_i f\|^2.$$

*Prova.* Para a demonstração usaremos o seguinte resultado (apêndice B, lema B.5): Dados  $f \in H$  e  $F_-$  perfil estendido, então

$$\mathcal{E}(u_-^1, R^3, 0) = \int_R \int_{\Omega_-^0} F_-(\lambda, s)^* E F_-(\lambda, s) \frac{|K(s) \nabla \tau_-(s)|}{\alpha} dS d\lambda \quad (4.25)$$

e

$$\mathcal{E}(u_-^2, R^3, 0) = \int_R \int_{\Omega_-^\infty} F_-(\lambda, s)^* E F_-(\lambda, s) \frac{|K(s) \nabla \tau_-(s)|}{\alpha} dS d\lambda$$

Em posse destas informações, basta aplicar o teorema anterior e a prova estará completa. O próximo corolário prova que a energia concentra-se nos conjuntos  $B'_i$ s.

**Corolário 4.3** *Dados  $f \in H$  e  $\varepsilon > 0$ , existem constantes  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $t_0$ ,  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , tais que*

$$\mathcal{E}(u_-^i, R^3, 0) - \varepsilon \leq \mathcal{E}(u_-^i, B_i(t, \lambda_1, \lambda_2), t) \leq \mathcal{E}(u_-^i, R^3, 0)$$

*para todo  $t > t_0$ .*

*Prova.* Faremos a prova para  $i = 1$  pois o caso  $i = 2$  é análogo. O corolário 4.2 e o teorema 4.9 implicam que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u_-^1, R^3, 0) &= \mathcal{E}(u_-^1, B_1(t, \lambda_1, \lambda_2), t) \\ &+ \left( \int_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \right) \int_{\Omega_-^0} F_-(\lambda, s)^* E F_-(\lambda, s) \frac{|K(s) \nabla \tau_-(s)|}{\alpha} dS d\lambda - \varepsilon_1(t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{E}(u_-^1, \mathbb{R}^3, 0) \leq \mathcal{E}(u_-^1, B_1(t, \lambda_1, \lambda_2), t) + \varepsilon,$$

o que prova o corolário.

Segue da definição de  $B_1$  e  $B_2$  que

$$\begin{aligned} B_i(t, \lambda_1, \lambda_2) &= \cup\{\lambda W_-^i : t + \lambda_1 \leq \lambda \leq t + \lambda_2\} \\ &= \cup\{\lambda(tW_-^i) : 1 + \frac{\lambda_1}{t} \leq \lambda \leq 1 + \frac{\lambda_2}{t}\}. \end{aligned}$$

Logo, os conjuntos  $B_i(t, \lambda_1, \lambda_2)$  são regiões em torno dos cones de onda  $tW_-^i$  e que, quanto maior o valor de  $t$ , mais se aproximam dos cones de onda. Então, tendo em vista o corolário (4.3), a energia de  $u_-^i$  concentra-se próxima do cone de onda  $tW_-^i$ , tanto mais próxima quanto maior o valor de  $t$ .

**Corolário 4.4** *Para qualquer conjunto mensurável  $K$  e qualquer  $f \in H$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(u_-, K, t) = 0.$$

*Prova.* Isto é uma consequência fácil do lema B.3, apêndice B, quando  $f \in S_\Omega$ . No caso em que  $f \in H$ , observemos que para  $t$  suficientemente grande,

$$K \cap B_i(t, \lambda_1, \lambda_2) = \emptyset.$$

Em vista disto, é fácil ver que a energia de  $u_-^i$  em  $K$  pode ser feita arbitrariamente pequena com  $t$  grande. Portanto, o mesmo é verdade para  $u_-$ , e isto prova completamente o corolário.

## 4.7 A solução completa

Em nosso trabalho, restringimos nossa investigação à parte  $u_-$  da solução do sistema (4.1), correspondente aos autovalores  $\pm\tau_-(p)$ . Também supomos  $R > 1$ . Vamos contemplar os outros casos dando uma breve explicação sobre os mesmos, obtendo assim a solução completa.

Consideremos as seguintes projeções

$$\widehat{P}_A(p) = \widehat{P}_A^+(p) \oplus \widehat{P}_A^-(p),$$

$$\widehat{P}_+(p) = \widehat{P}_+^+(p) \oplus \widehat{P}_+^-(p).$$

Podemos decompor a solução  $u$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} u(t, \cdot) &= U(t)P_0f + U(t)P_Af + U(t)P_+f + U(t)P_-f = \\ &= u_0(t, \cdot) + u_A(t, \cdot) + u_+(t, \cdot) + u_-(t, \cdot). \end{aligned}$$

O primeiro desses termos é simplesmente  $P_0f$ , a chamada solução estática ou não propagativa, que não depende do tempo e pertence ao núcleo do operador  $\Lambda$ .

As ondas de Alfvén. O segundo termo acima, consiste de duas partes, as chamadas ondas de Alfvén,

$$u_A^+(t, \cdot) = U(t)P_A^+f \text{ e } u_A^-(t, \cdot) = U(t)P_A^-f,$$

de modo que  $u_A = u_A^+ + u_A^-$ . Usando a transformada de Fourier obtemos, pelo menos para funções suaves  $f$ :

$$\begin{aligned} u_A^+ &= 2\pi^{-\frac{3}{2}} \int_{R^3} e^{i(p \cdot x - Ap_3 t)} \widehat{P}_A^+(p) \widehat{f}(p) dp = \\ &= 2\pi^{-\frac{3}{2}} \int_{R^2} e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} dp_1 dp_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip_3(x_3 - At)} \widehat{P}_A^+(p) \widehat{f}(p) dp_3. \end{aligned}$$

Isto nos leva imediatamente a

$$u_A^+(t, x) = (P_A^+ f)(x_1, x_2, x_3 - At).$$

Analogamente,

$$u_A^-(t, x) = (P_A^- f)(x_1, x_2, x_3 + At).$$

As fórmulas acima mostram que  $u_A^+$  e  $u_A^-$  são ondas que se propagam com velocidade  $A$ , a primeira na direção positiva e a segunda na direção negativa de eixo  $x_3$ .

A onda  $u_+(t, x)$ . A parte da solução correspondente a  $u_+(t, x)$ , associada aos autovalores  $\pm\tau_+(p)$ , pode ser estudada por um procedimento similar ao usado no estudo de  $u_-$ . A situação agora é mais simples pois  $\Omega_+$  é uma superfície limitada. Lembremos que a função de onda  $u_-^\infty$  introduzida na definição 4.1, contém dois termos  $u_-^{\infty,1}$  e  $u_-^{\infty,2}$ , correspondentes aos pontos  $s_0 \in \Omega_-^0$  e  $s_\infty \in \Omega_-^\infty$  respectivamente. Isto foi devido ao fato de que a curva  $C$  dada em (4.3), (4.4), que gera a superfície  $\Omega_-$ , tem uma parte limitada que produz  $\Omega_-^0$  e uma parte ilimitada que produz  $\Omega_-^\infty$ . A superfície  $\Omega_+$  por outro lado é estritamente limitada e então a aplicação de Gauss  $N : s \in \Omega_+ \rightarrow \eta = N(s) \in S^2$  é estritamente bijetiva. Como consequência, dado  $x = |x| \eta \neq 0$ , existe um único ponto  $s = s(\eta) \in \Omega_+$  tal que  $N(s) = \eta$ . Este ponto  $s(\eta)$  gera a função de onda assintótica  $u_+^\infty$  associada com  $u_+$ . A figura 4.7 ilustra os perfis de  $\Omega_- = \Omega_1 \cup \Omega_2$  e  $\Omega_+$ , no caso  $R > 1$ .

O caso  $R = 1$ . O caso  $R = 1$  corresponde à situação na qual a velocidade do som e a velocidade de Alfvén  $A$  coincidem. Neste caso a parte  $\Omega_-^0$  da superfície  $\Omega_-$  desaparece; ao mesmo tempo  $\Omega_+$  permanece convexa e toca  $\Omega_-$  em dois pontos angulares. A figura 4.8 ilustra os perfis de  $\Omega_-$  e  $\Omega_+$ , no caso  $R = 1$ . É fácil verificar que,  $u_-^\infty$  tem somente o termo  $u_-^{\infty,2}$ , que ainda se anula fora do cone  $\Gamma$ .  $u_+^\infty$ , por outro lado, se anula em  $\Gamma$ . Então, a passagem de  $R > 1$  para  $R = 1$  é singular no sentido de que perdemos não somente  $u_-^{\infty,1}$ , mas também  $u_+^\infty$  dentro do cone  $\Gamma$ .

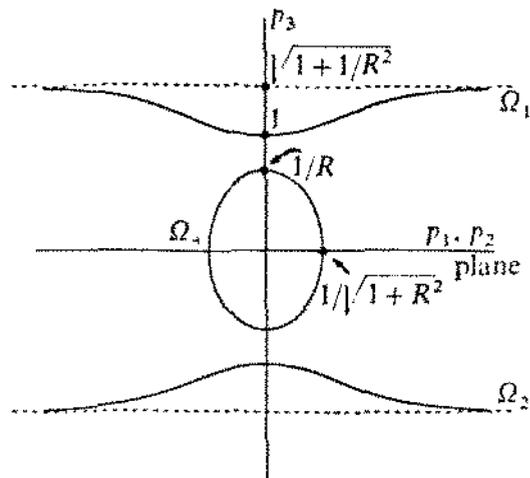


Figura 4.7

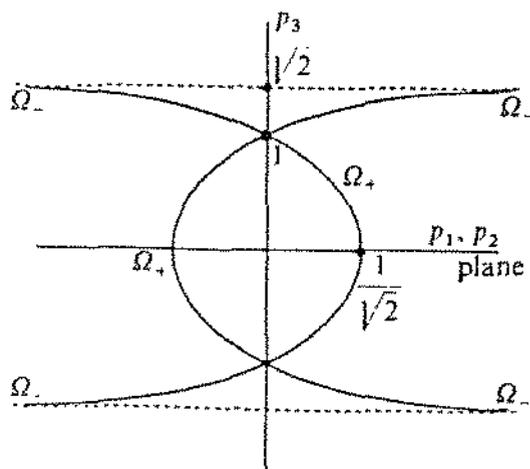


Figura 4.8

# Apêndice A

## Perfis estendidos

A correspondência  $f \rightarrow F_-$  definida em (4.14) será estendida agora para toda  $f \in H$ , e o seguinte lema é uma preparação para isto. Para facilitar sua formulação é conveniente definir:

$$\hat{P}_-(p) = \hat{P}_-^+(p) + \hat{P}_-^-(p) \text{ e } P_- = P_-^+ + P_-^-. \quad (\text{A.1})$$

É óbvio, que  $\hat{P}_-(p)$  é a projeção ortogonal do espaço  $C_E^7$  sobre o subespaço gerado pelo autovetores de  $\Lambda(p)$  associados com os autovalores  $\pm\tau_-(p)$ , e  $P_-$  é uma projeção ortogonal em  $H$ .

**lema A.1** Para toda  $f \in S_\Omega$ , o perfil  $F_-$  definido por (4.14) satisfaz

$$\int_R \int_{\Omega_-} F_-(\lambda, s)^* E F_-(\lambda, s) \frac{|K(s) \nabla \tau_-(s)|}{\alpha} dS d\lambda = \|P_- f\|^2. \quad (\text{A.2})$$

*Prova.* Com coordenadas baseadas na superfície  $\Omega_-$  obtemos:

$$\|P_-^+ f\|^2 = \|\hat{P}_-^+ \hat{f}\|^2 = \int_{R^3} \hat{f}(p)^* E \hat{P}_-^+(p) \hat{f}(p) dp =$$

$$\int_0^\infty \int_{\Omega_-} \hat{f}(\lambda s)^* E \hat{P}_-^+(s) \hat{f}(\lambda s) \frac{\alpha \lambda^2}{|\nabla \tau_-(s)|} dS d\lambda.$$

Similarmente, procedendo como na seção 3 do capítulo 4, encontramos

$$\|P_-^- f\|^2 = \int_{-\infty}^0 \int_{\Omega_-} \hat{f}(\lambda s)^* E \hat{P}_-^-(s) \hat{f}(\lambda s) \frac{\alpha \lambda^2}{|\nabla \tau_-(s)|} dS d\lambda.$$

Colocando juntas essas duas últimas expressões e observando que

$$\| P_- f \|^2 = \| \hat{P}_-^+ \hat{f} \|^2 + \| \hat{P}_-^- \hat{f} \|^2,$$

obtemos

$$\| P_- f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_-} \hat{f}(\lambda s)^* E \hat{P}_-^+(s) \hat{f}(\lambda s) \frac{\alpha \lambda^2}{|\nabla \tau_-(s)|} dS d\lambda. \quad (\text{A.3})$$

Seja  $\hat{F}_-(\lambda, s)$  a transformada de Fourier de  $F_-(\lambda, s)$  como uma função da primeira variável. (4.14) mostra claramente que

$$\hat{F}_-(\lambda, s) = \frac{\alpha \psi(s) |\lambda| \hat{P}_-^+(s) \hat{f}(\lambda s)}{\sqrt{|K(s)| |\nabla \tau_-(s)|}}. \quad (\text{A.4})$$

Agora, esta expressão é usada para eliminar  $\hat{f}(\lambda s)$  em (A.3), e o resultado é:

$$\| P_- f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_-} \hat{F}_-(\lambda, s)^* E \hat{F}_-(\lambda, s) \frac{|K(s) \nabla \tau_-(s)|}{\alpha} dS d\lambda. \quad (\text{A.5})$$

Aplicando a fórmula de Parseval unidimensional, finalmente obtemos o resultado desejado (A.2).

A igualdade (A.2) mostra que o perfil  $F_-$  é um elemento do espaço de Hilbert

$$H(\Omega_-) = L_2(R \times \Omega_-, C_E^{\bar{r}}, \frac{|K(s) \nabla \tau_-(s)|}{\alpha} dS d\lambda),$$

isto é, o espaço das funções definidas em  $R \times \Omega_-$ , com valores em  $C_E^{\bar{r}}$ , que é de quadrado integrável com respeito à medida indicada. Como um elemento deste espaço, o quadrado da norma de  $F_-$  é a expressão no lado esquerdo de (A.2). Segue de (4.14) que

$$\hat{P}_-^+ F_-(\lambda, s) = F_-(\lambda, s) \text{ a.e. em } R \times \Omega_-, \quad (\text{A.6})$$

e que o perfil  $F_-$  realmente pertence a um subconjunto de  $H(\Omega_-)$ , nominalmente,

$$H_0(\Omega_-) = H(\Omega_-) \cap \{F_- : (\text{A.6}) \text{ vale}\}.$$

É fácil ver que  $H_0(\Omega_-)$  é um subespaço (fechado) de  $H(\Omega_-)$ .

Em vista do teorema de Fubini, a norma de  $F_-$  como um elemento de  $H(\Omega_-)$  é a igual à sua norma como um elemento de  $L_2(R, h(\Omega_-))$ , onde

$$h(\Omega_-) = L_2(\Omega_-, C_E^7, \frac{|K(s)\nabla\tau_-(s)|}{\alpha} dS).$$

Portanto, é possível fazer a identificação:

$$H(\Omega_-) = L_2(R, h(\Omega_-)).$$

De modo similar, tomando

$$h_0(\Omega_-) = h(\Omega_-) \cap \{F_-(s) : \hat{P}_-^+ F(s) = F(s) \text{ a.e. em } \Omega_-\},$$

faremos a identificação:

$$H_0(\Omega_-) = L_2(R, h_0(\Omega_-)).$$

O próximo passo é estender a correspondência  $f \rightarrow F_-$ , definida em (4.14) para  $f \in S_\Omega$ , para todo  $f \in H$ . O procedimento consiste no seguinte: dado  $f \in H$ , construímos  $\hat{F}_-$  por (A.4), isto é,

$$\hat{F}_-(\lambda, s) = \frac{\alpha\psi(s) |\lambda| \hat{P}_-^+(s) \hat{f}(\lambda s)}{\sqrt{|K(s)| |\nabla\tau_-(s)|}}, \text{ para } f \in H. \quad (\text{A.7})$$

Então a prova do lema A.1 permanece válida até (A.5) e implica que  $\hat{F}_- \in H_0(\Omega_-) = L_2(R, h_0(\Omega_-))$ . Finalmente  $F_-$  é definida como sendo a transformada de Fourier inversa de  $\hat{F}_-$  em  $L_2(R, h_0(\Omega_-))$ . É fácil ver que  $F_-$  assim definida coincide com a  $F_-$  de (4.14) quando  $f \in S_\Omega$  e que ela satisfaz (A.2), isto é,

$$\int_R \|F_-(\lambda, \cdot)\|_{h_0(\Omega_-)}^2 d\lambda = \|P_- f\|_H^2, \text{ para todo } f \in H. \quad (\text{A.8})$$

Então, construímos um operador linear

$$J_- : H \rightarrow H_0(\Omega_-) = L_2(R, h_0(\Omega_-)) \quad (\text{A.9})$$

tal que

$$J_- f = F_- \text{ para todo } f \in H. \quad (\text{A.10})$$

Este operador é uma isometria como mostraremos a seguir.

**lema A.2** *O operador  $J_-$  de (A.9), (A.10) é uma isometria parcial com conjunto inicial  $P_-H$  e conjunto final  $H_0(\Omega_-)$ .*

*Prova.* (A.8) implica que

$$\| F_- \|_{H_0(\Omega_-)} = \| J_- f \|_{H_0(\Omega_-)} = \| P_- f \|_H$$

e isto prova que  $J_-$  é uma isometria com conjunto inicial  $P_-H$ . A prova de que  $H_0(\Omega_-)$  é o conjunto final é um pouco longa e omitiremos em nosso trabalho. Ao leitor curioso em conhecer o restante da demonstração, remetemos a ([A4], pp. 48-50).

# Apêndice B

## Lemas do capítulo 4

lema B.1 Para todo  $f \in H$  e  $t \in R$ ,

$$u_{-}^{\infty}(t, \cdot) \in H \text{ e } \|u_{-}^{\infty}(t, \cdot)\|_H \leq 2\|F_{-}\|_{H_0(\Omega_{-})}. \quad (\text{B.1})$$

*Prova.* Tomemos  $x = |x| \eta \in \Gamma$  e  $u_{-}^{\infty,1}, u_{-}^{\infty,2}$  as contribuições a  $u_{-}^{\infty}$  na definição 4.1, correspondentes a  $s = s_0(\eta)$  e  $s = s_{\infty}(\eta)$  respectivamente. Usando coordenadas esféricas,

$$x = |x| \eta, dx = |x|^2 dS^2 d|x|,$$

e levando em conta a definição 4.1, vemos que

$$\|u_{-}^{\infty,1}(t, \cdot)\|_H^2 = \int_0^{\infty} \int_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} F_{-}(x \cdot s_0(\eta) - \alpha t, s)^* E F_{-}(x \cdot s_0(\eta) - \alpha t, s) dS^2 d|x|,$$

onde  $dS^2$  é o elemento de área na esfera unitária e  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são as porções da esfera unitária introduzidas no capítulo 4, seção 4. Usaremos a correspondência  $s_0 \leftrightarrow \eta$  desta mesma seção 4, que transforma a integral sobre  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  em integrais sobre  $\Omega_{-}^0 = \Omega_{-1}^0 \cup \Omega_{-2}^0$ . Denotando por  $dS$  o elemento de área em  $\Omega_{-}^0$  e observando que  $dS^2 = K(s)dS$ ,

$$x \cdot s_0(\eta) = |x| \eta \cdot s_0(\eta) = |x| s_0 \cdot \frac{\nabla \tau_{-}(s_0)}{|\nabla \tau_{-}(s_0)|} = \frac{\alpha |x|}{|\nabla \tau_{-}(s_0)|}.$$

Sabemos que  $1 \leq |s|$  para  $s \in \Omega_{-}$ , logo,

$$\begin{aligned}
\| u_-^{\infty,1}(t, \cdot) \|_H^2 &= \int_0^\infty \int_{\Omega_-^0} F_- \left( \frac{\alpha |x|}{|\nabla \tau_-(s)|} - \alpha t, s \right)^* E F_- \left( \frac{\alpha |x|}{|\nabla \tau_-(s)|} - \alpha t, s \right) |K(s)| dS d|s| \\
&= \int_{-\alpha t}^\infty \int_{\Omega_-^0} F_-(\lambda, s)^* E F_-(\lambda, s) \frac{|K(s) \nabla \tau_-(s)|}{\alpha} dS d\lambda \\
&\leq \int_{-\infty}^\infty \int_{\Omega_-^0} F_-(\lambda, s)^* E F_-(\lambda, s) \frac{|K(s) \nabla \tau_-(s)|}{\alpha} dS d\lambda = \| F_- \|_{H_0(\Omega_-)}^2.
\end{aligned}$$

O mesmo procedimento pode ser usado para mostrar que

$$\| u_-^{\infty,2}(t, \cdot) \|_H^2 = \int_{-\alpha t}^\infty \int_{\Omega_-^\infty} F_-(\lambda, s)^* E F_-(\lambda, s) \frac{|K(s) \nabla \tau_-(s)|}{\alpha} dS d\lambda \leq \| F_- \|_{H_0(\Omega_-)}^2.$$

Portanto, desde que  $u_-^\infty = u_-^{\infty,1} + u_-^{\infty,2}$ , o lema segue das últimas desigualdades.

**lema B.2** *Seja  $U_-^\infty(t)$  o operador linear em  $H$  definido por  $U_-^\infty(t)f = u_-^\infty(t, \cdot)$ . Então  $\| U_-^\infty(t) \|_H \leq 2$ .*

*Prova.* Consequência imediata dos lemas B.1 e A.2.

**lema B.3** *Se  $f \in S_\Omega$  e  $R > 0$ , então*

$$\mathcal{E}(u_-, B_R, t) = \int_{|x| \leq R} u_-(t, x)^* E u_-(t, x) dx \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty. \quad (\text{B.2})$$

*Prova.* Quando  $f \in S_\Omega$  e  $v_-(x, \lambda)$  é considerada como uma função de  $\lambda$ , seu suporte é o compacto  $B$ . Portanto, escrevendo

$$-e^{-i\alpha\lambda t} = \frac{1}{i\alpha t} \frac{\partial e^{-i\alpha\lambda t}}{\partial \lambda}$$

e integrando por partes, encontramos

$$u_-(t, x) = -\frac{1}{i\alpha t} \int_B e^{-i\alpha\lambda t} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda^2 v_-(\lambda x, \lambda)) d\lambda,$$

da qual obtemos a estimativa:

$$|u_-(t, x)| \leq \frac{C_f}{|t|}, \text{ para todo } x \in R^3 \text{ e } t \neq 0.$$

O resultado procurado (B.2) é um consequência imediata desta estimativa.

lema B.4 Se  $f \in S_\Omega$  e  $R > 0$ , então

$$\mathcal{E}(u_-^\infty, B_R, t) = \int_{|x| \leq R} u_-^\infty(t, x)^* E u_-^\infty(t, x) dx \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty. \quad (\text{B.3})$$

*Prova.* Provaremos (B.3) separadamente para as funções  $u_-^{\infty,1}$  e  $u_-^{\infty,2}$  introduzidas na prova do lema B.1. Com cálculos similares aos usado no lema B.1 encontramos:

$$\mathcal{E}(u_-^{\infty,1}, B_R, t) = \int_{\Omega_-^0} \int_{-\alpha t}^{-\alpha t + \frac{\alpha R}{|\nabla \tau_-(s)|}} F_-(\lambda, s)^* E F_-(\lambda, s) \frac{|K(s) \nabla \tau_-(s)|}{\alpha} d\lambda dS. \quad (\text{B.4})$$

Mas, com  $s \in \Omega_-$ ,

$$\alpha = s \cdot \nabla \tau_-(s) \leq |s| |\nabla \tau_-(s)|.$$

Por outro lado, como  $f \in S_\Omega$ , na superfície integral anterior,  $s \in A$  Logo  $1 \leq |s| \leq M$ . Portanto,

$$\frac{1}{|\nabla \tau_-(s)|} \leq \frac{M}{\alpha}, \text{ e então } -\alpha t + \frac{\alpha R}{|\nabla \tau_-(s)|} \leq -\alpha t + MR.$$

Com esta última desigualdade e  $1 \leq |s|$ , (B.4) fica

$$\mathcal{E}(u_-^{\infty,1}, B_R, t) \leq \int_{-\alpha t}^{-\alpha t + MR} \int_{\Omega_-} F_-(\lambda, s)^* E F_-(\lambda, s) \frac{|K(s) \nabla \tau_-(s)|}{\alpha} dS d\lambda.$$

Evidentemente, esta última integral tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$ , o que prova o resultado desejado para  $u_-^{\infty,1}$ .

A prova para  $u_-^{\infty,2}$  é análoga. Finalmente desde que  $\mathcal{E}(u, B_R, t)^{\frac{1}{2}}$  é uma semi-norma e  $u_-^\infty = u_-^{\infty,1} + u_-^{\infty,2}$ , a conclusão do lema é óbvia.

lema B.5 Dado  $f \in H$ , seja  $F_- = J_- f$  e  $u_-^i = U(t) P_i f, i = 1, 2$ . Então,

$$\mathcal{E}(u_-^1, R^3, 0) = \int_R \int_{\Omega_-^0} F_-(\lambda, s)^* E F_-(\lambda, s) \frac{|K(s) \nabla \tau_-(s)|}{\alpha} dS d\lambda \quad (\text{B.5})$$

e

$$\mathcal{E}(u_-^2, R^3, 0) = \int_R \int_{\Omega_-^\infty} F_-(\lambda, s)^* E F_-(\lambda, s) \frac{|K(s) \nabla \tau_-(s)|}{\alpha} dS d\lambda. \quad (\text{B.6})$$

*Prova.* Se tomarmos  $F_-^1 = J_- P_1 f$ , então o lema A.2 nos permite escrever:

$$\mathcal{E}(u_-^1, R^3, 0) = \| P_1 f \|_H^2 = \| F_-^1 \|_{H_0(\Omega_-)}^2. \quad (\text{B.7})$$

Agora, de acordo com a definição de  $J_-$ , a construção (A.7) mostra que:

$$\widehat{F}_-^1(\lambda, s) = \frac{\alpha \psi(s) \widehat{P}_-^+(s) (\widehat{P}_1 f)(\lambda s) |\lambda|}{\sqrt{|K(s)| |\nabla \tau_-(s)|}}.$$

De acordo com a definição das projeções  $\widehat{P}_i(p)$  dadas no capítulo 4, seção 6, a expressão acima é zero para  $s \in \Omega_-^\infty$ , donde obtemos,

$$\widehat{F}_-^1(\lambda, s) = \frac{\alpha \psi(s) \widehat{P}_-^+(s) \widehat{P}_-(\lambda s) \widehat{f}(\lambda s) |\lambda|}{\sqrt{|K(s)| |\nabla \tau_-(s)|}}, \text{ se } s \in \Omega_-^0. \quad (\text{B.8})$$

Lembremos que  $\widehat{P}_-(\lambda s) = \widehat{P}_-^+(\lambda s) + \widehat{P}_-^-(\lambda s)$  e que em qualquer caso,  $\lambda > 0$  ou  $\lambda < 0$ , vale

$$\widehat{P}_-^+(\lambda s) = \widehat{P}_-^+(s), \widehat{P}_-^-(\lambda s) = \widehat{P}_-^-(s).$$

Portanto,  $\widehat{P}_-(\lambda s) = \widehat{P}_-^+(s) + \widehat{P}_-^-(s)$ . Como consequência,

$$\widehat{P}_-^+(s) \widehat{P}_-(\lambda s) = \widehat{P}_-^+(s).$$

Substituindo isto em (B.8) e lembrando (A.7) encontramos,

$$\widehat{F}_-^1(\lambda, s) = \begin{cases} \widehat{F}_-^1(\lambda, s) & \text{se } s \in \Omega_-^0, \\ 0 & \text{se } s \in \Omega_-^\infty. \end{cases}$$

Então, o resultado desejado segue pela aplicação da relação de Parseval em  $L_2(R, h_0(\Omega_-)) = H_0(\Omega_-)$  e pela expressão (B.7). A demonstração da igualdade (B.6) é inteiramente análoga, e portanto, a prova do lema está completa.

# Bibliografia

- [A1] G. Ávila, *Spectral Resolution of Differential Operators Associated with Symmetric Hyperbolic Systems*, *Applicable Anal.* 1 (1972), 283–299.
- [A2] G. Ávila, *Topics in Wave Propagation*, Lectures given at the Análise Funcional held at the Unicamp, 1974.
- [A3] G. Ávila, *Decay of Solutions of Symmetric Hyperbolic Systems of Partial Differential Equations*, *Rocky Mountain Math. J.* 9 (1979), 405–413.
- [A4] G. Ávila, *Asymptotic Wave Functions and Energy Distribution in Magnetodynamics*, *J. Reine Angew. Math.* 379 (1987), 31–63.
- [A5] G. Ávila, *Solução Assintótica do Problema de Cauchy para a Equação das Ondas*, *Matemática Universitária* 12 (1990), 43–55.
- [C] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics 2*, New York 1962.
- [Jh] F. John, *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag 1982.
- [Jn] D. S. Jones, *The Theory of Electromagnetism*, Pergamon Press 1964.
- [K] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag 1984.

[L] H. Kreiss and J. Lorenz, *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes equations*, Boston: Academic Press, C 1989.

[T] H. Tamura, *The Principle of Limiting Absorption and Decay of Local Energy for the Linearized Equations of Magnetogasdynamics*, Nagoya Math. J. 89 (1983), 13–45.

[W1] C. H. Wilcox, *Measurable Eigenvectors for Hermitian Matrix-valued Polynomials*, J. Math. Anal. Applications 40 (1972), 12–19.

[W2] C. H. Wilcox, *Asymptotic Wave Functions and Energy Distributions in Strongly Propagative Anisotropic Media*, J. Math. Pures et Appliquées 57 (1978), 275–321.

[Y] K. Yosida, *Funcional Analysis*, Springer Verlag.