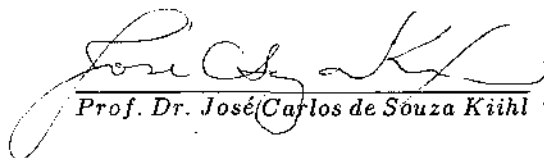


Uma caracterização dos torneios hamiltonianos com o número mínimo de triciclos.

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Vagner Fernandes e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 31 de Agosto de 1995



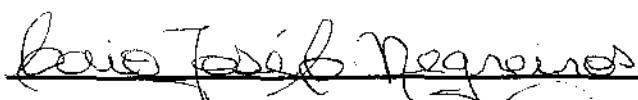
Prof. Dr. José Carlos de Souza Kiihl

Orientador

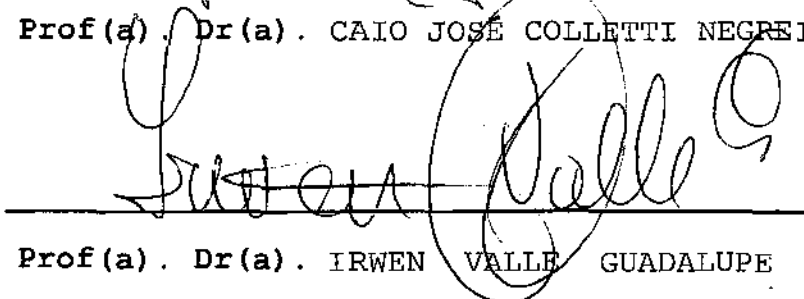
Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em MATEMÁTICA.

Tese defendida e aprovada em, 31 de 08 de 1995

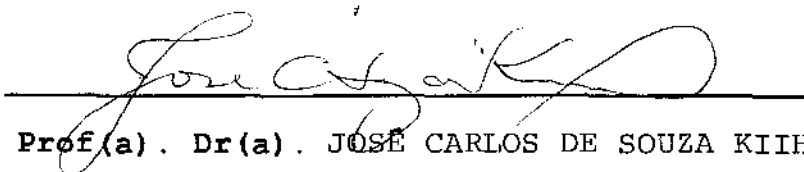
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS



Prof(a). Dr(a). IRWEN VALLE GUADALUPE



Prof(a). Dr(a). JOSÉ CARLOS DE SOUZA KIIHL

Dedicatória

Aos meus pais Ademar e Neide, pelos ensinamentos de vida que jamais esquecerei.

Agradecimentos

Ao CNPQ, por ter me auxiliado financeiramente, durante este período.

Ao amigo Nailson, pela sua inesgotável paciência e boa vontade nas correções do texto digitado.

Sumário

Capítulo	Página
Introdução	05
Definições	07
Motivação	10
Resultados Básicos	14
Teorema de Caracterização	20
Consequência	38
Referências Bibliográficas	43

INTRODUÇÃO

A meta deste trabalho é apresentar uma caracterização da família dos torneios Hamiltonianos com o menor número de 3-ciclos.

Nesta elaboração faremos uso de ferramentas que nos possibilitem ter uma idéia de como um torneio se comporta nas vizinhanças de seus vértices; para exemplificar vide [10] teorema 17. É como se fosse uma máquina que fotografa a estrutura topológica exibindo-a através de uma maneira combinatória, de modo que possamos dizer algo a mais do que anteriormente. Em [9] foi introduzido o conceito de 3-ciclos não projetados em um torneio, para se obter uma caracterização gráfica de torneios simplesmente desconexos, isto é, torneios cujo grupo fundamental é não trivial.

As etapas na confecção do trabalho serão as seguintes:

1. De início daremos uma sequência de definições dos conceitos básicos.

2. Motivação que levou ao aparecimento da teoria de homotopia regular de digrafos, alguns dos resultados obtidos e aparecimento natural do conceito de ciclo projetado.

3. Nesta etapa apresentaremos algumas proposições que serão utilizadas no teorema central (deixaremos tais proposições em parágrafo a parte com a finalidade de não sobrecarregar a demonstração do teorema).

4. Na quarta parte demonstraremos o teorema que caracteriza os torneios com menor número de 3-ciclos.

5. Ao término desta etapa tiramos como resultado uma caracterização da família B , através de uma sequência relacionada com cada um de seus vértices.

Chapter 1

Definições

Definição: Um torneio T é um digrafo, no qual cada par de vértices é unido por um e somente um arco.

Quando um dado torneio contém um ciclo através de cada um de seus vértices uma única vez damos o nome de torneio Hamiltoniano.

Designaremos $V(T)$ o conjunto $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dos vértices do torneio.

Quando dois vértices são unidos por um arco orientado de v_i para v_j , denotamos $v_i \longrightarrow v_j$, v_i é dito ser um predecessor de v_j e v_j um sucessor de v_i . Agora, se cada vértice de um subtorneio A é um predecessor de cada vértice de um subtorneio B , nós escreveremos $A \longrightarrow B$. Os vértices de um subtorneio são chamados equivalentes se e somente se para qualquer $q \in T_n \setminus A$ ou $q \longrightarrow A$ ou $A \longrightarrow q$.

Os vértices de T_n são particionados em subtorneios disjuntos $S^{(1)}, \dots, S^{(m)}$ de vértices equivalentes (vide [10] pag. 4) e denotaremos por R_m o torneio com m vértices $w_1, w_2, \dots, w_m$ no qual $w_i \longrightarrow w_j$ se e somente se $S^{(i)} \longrightarrow S^{(j)}$.

Denotamos: $T_n = R_m(S^{(1)}, \dots, S^{(m)})$ e dizemos que T_n é uma composição do quociente R_m com as componentes $S^{(1)}, \dots, S^{(m)}$.

Definição: Um vértice v de T_n é neutro se $T_n \setminus v$ é Hamiltoniano.

Definição: Seja A_n ($n \geq 4$) um torneio onde $V(A_n)$ é o conjunto dos vértices e o conjunto de arestas é $E(A_n) = \{(v_i, v_j) \mid j < i-1 \text{ ou } j = i-1\}$. Este torneio é chamado de bineutro (note que tal torneio possui somente dois vértices neutros). Las Vergnas provou que estes A_n 's são os únicos torneios com dois vértices neutros para $n \geq 4$ [12].

Definição: Um subtorneio T' de um torneio T é dito ser projetado por um vértice v se existir um vértice $v \in T \setminus T'$ tal que ou $v \longrightarrow T'$ ou $T' \longrightarrow v$. Caso contrário é dito ser não projetado.

Definição: Um ciclo C de T_n não projetado é minimal se para cada ciclo C' tal que $V(C') \subset V(C)$ é projetado no mínimo por um vértice de T_n .

Definição: Ciclo característico é um ciclo que possui o menor comprimento dentre os ciclos minimais (pode existir mais do que um ciclo minimal em um dado torneio).

Damos o nome de característica cíclica de um torneio T_n ao comprimento de um ciclo característico, denotando por $cc(T_n)$. Diferença cíclica de T_n é definida por: $cd(T_n) = n - cc(T_n)$, onde n é a cardinalidade de $V(T_n)$.

Definição: Um torneio onde seu conjunto de vértices é dado por $V(\beta) = \{a_1, a_2, \dots, a_m, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}$ tal que:

1. o subtorneio induzido $\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ coincide com A_m . A_m é o torneio bineutro
2. $(x_i, x_j) \in E(\beta)$ e $(a_i, x_j) \in E(\beta)$ se $i > j$
3. $(x_j, a_i) \in E(\beta)$ se $i \leq j$ será denotado por β_{2m-1} .

Definição: Um torneio β obtido de β_{2m-1} pela extração de K ($0 \leq K \leq m-3$) dos vértices $x_2, \dots, x_{m-2}$ é chamado de torneio β -derivado. O conjunto de todos os torneios β -derivado denotaremos por B . O conjunto de todos os torneios Hamiltonianos com o menor número de 3-ciclos representaremos por B .

Chapter 2

Motivação

A Teoria de Homotopia Regular de Digrafos iniciou-se com os trabalhos de D. C. Demaria nos anos 70. Essa teoria em sua forma mais completa é apresentada nos artigos [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], trabalhos estes que são as referências básicas para tese de mestrado de Tomas Edson Barros [1].

Esta teoria surgiu de uma tentativa de se encontrar uma interpretação da Homotopia para Grafos, partindo das informações combinatórias fornecidas apenas pelos dados do Grafo "abstrato", $G = (V(G), E(G))$, sem a preocupação de uma particular realização (por exemplo, em $\mathcal{R}^3$).

No caso em que G é um certo torneio T , tomando um vértice $v \in V(T)$ fixado, um elemento seria

$\{ v \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v \}$ onde, vértices consecutivos são adjacentes (isto é, $v \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v$). A multiplicação seria dada por

$$\{v v_1 \dots v_n v\} \{v w_1 \dots w_r v\} = \{v v_1 \dots v_n v v w_1 \dots w_r v\}$$

e as homotopias permitidas seriam:

$$(1) v w z \sim v z \quad \text{sempre que } v \rightarrow w \rightarrow z \Rightarrow v \rightarrow z,$$

$$(2) v v \sim v$$

Isto levou à definição de aplicações o-regulares:

Se $D = (V(D), A(D))$ é um digrafo, uma aplicação do intervalo $I = [0,1]$ em $V(D)$

$$f: [0,1] \longrightarrow V(D)$$

é o-regular se $f^{-1}(a) \cap \overline{f^{-1}(b)} = \emptyset$ sempre que $a \rightarrow b$.

Com a generalização para aplicações o-regulares do n-cubo I^n em $V(D)$, e a respectiva noção de homotopia (o-regular), Demaria definiu o n-ésimo grupo de homotopia regular para um digrafo D , denotado por $Q_n(D, v)$

Esta teoria tem seu desenvolvimento coroado com o teorema:

Teorema (Demaria):

$$Q_n(D, v) \cong \Pi(|K_D|, v)$$

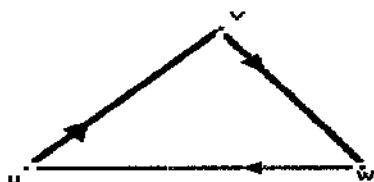
onde $|K_D|$ é o poliedro associado a um complexo simplicial "conveniente".

Observação: Dado um digrafo $D = (V(D), A(D))$, um subconjunto não vazio $X \subset V(D)$ é testado se existe $x \in X$ tal que $x \rightarrow X-x$. X é totalmente testado se para todo subconjunto não vazio $A \subset X$, A é testado. Os simplexes em K_D são aqueles gerados pelos subconjuntos totalmente testado de D .

Se D é um torneio T , os subconjuntos totalmente testados são os subtorneios transitivos (veja [1]).

Este teorema de Demaria nos permite o cálculo dos grupos de homotopia regular $Q_n (D,v)$ em termos da homotopia clássica de poliedros. Com este nosso tratamento o poliedro realiza um complexo simplicial onde podemos ter n -simplexos com $n > 1$, sendo que sua complexidade traduz a complexidade combinatória do digrafo em questão. Observamos ainda que a realização desse complexo simplicial é posterior, sendo que de início parte-se apenas dos dados combinatórios fornecidos pelo digrafo "abstrato".

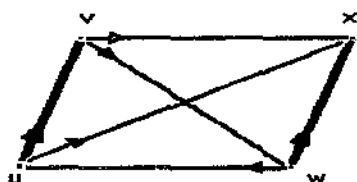
No caso em que o digrafo é um torneio, um 3-ciclo



é candidato natural a ser um gerador de $Q_n (T)$.

Contudo se existir um vértice x tal que $\langle u, v, w \rangle \longrightarrow x$ ou

$x \longrightarrow \langle u, v, w \rangle$



observamos que $\langle u, v, x \rangle$, $\langle v, w, x \rangle$ e $\langle u, w, x \rangle$ são todos transitivos e portanto geram 2-simplexos em $|K_T|$, sendo que neste caso o 3-ciclo $\langle u, v, w \rangle$ é homotopicamente nulo.

Isto levou a definição de n -ciclo projetado e não-projetado, conceitos estes que permitiram uma classificação de toda a classe H_n dos torneios hamiltonianos de ordem n (veja [13]).

Chapter 3

Resultados Básicos

Proposição 3.1: Se $B_n \in \mathcal{B}$ é a composição: $B_n = R_m(S^{(1)}, \dots, S^{(m)})$, então cada componente $S^{(i)}$ $i = 1, 2, \dots, m$ é transitiva.

Demonstração: Suponha que uma componente, por exemplo $S^{(1)}$, não seja transitiva. Então em $S^{(1)}$ existe no mínimo um 3-ciclo e B_n capaz de conter mais 3-ciclos do que o torneio com o mesmo quociente, o qual é obtido pela substituição da componente $S^{(1)}$ com a componente transitiva de mesma ordem.

Proposição 3.2: Se $B_n \in \mathcal{B}$, então cada m -subtorneio hamiltoniano H_m contém $m-2$ 3-ciclos (isto é, $H_m \in \mathcal{B}$), para cada m tal que $3 \leq m \leq n-1$.

Demonstração:

Suponha que um subtorneio Hamiltoniano H_{n-1} contém $m > n-3$ 3-ciclos. Considere o vértice v tal que $H_{n-1} = B_n \setminus v$. (Desde que v (*) está contido em um 3-ciclo, B_n terá mais do que $n-2$ 3-ciclos, mas $B_n \in \mathcal{B}$, portanto, obtemos

uma contradição). *

Então, todos os subtorneios $H_{n-1} \in \mathcal{B}$. Agora, considere um subtorneio H_m com $3 \leq m \leq n-1$.

São duas as possibilidades a serem consideradas:

I. Existe uma cadeia de subtorneios Hamiltonianos $H'_{m-1}, H'_{m+2}, \dots, H'_{n-1}$ tal que $V(H_m) \subset V(H'_{m+1}) \subset \dots \subset V(H'_{n-1}) \subset V(H_n)$.

Utilizando o mesmo argumento de (*) em cada uma das inclusões acima chegamos a:

$$H'_{n-1} \in \mathcal{B}, H'_{n-2} \in \mathcal{B}, \dots, H_m \in \mathcal{B}$$

II. Existe um subtorneio Hamiltoniano H'_s ($m \leq s \leq n-1$) tal que entre H_m e H'_s existe uma cadeia de subtorneios Hamiltoniano assim como em (I). Para cada subtorneio T'_{s+1} tal que $V(H'_s) \subset V(T'_{s+1})$, T'_{s+1} não é Hamiltoniano, isto é, H'_s é conado por todos os vértices de

$V(H_n) \setminus V(H'_s) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-s}\}$. Então, H_s pode ser colocado sob a forma $H_n = H'_{n-s+1}(\{v_1\}, \dots, \{v_{n-s}\}, H'_s)$, a qual é uma contradição pela proposição (3.1)

Proposição 3.3: Seja $\tilde{\beta}$ um torneio β_{2m-1} derivado. então:

3.3.1. Para cada x_i $i = 1, 2, \dots, m-1$ de $\tilde{\beta}$ existe somente um 3-ciclo através de x_i , a saber x_i, a_i, a_{i+1}, x_i

Demonstração:

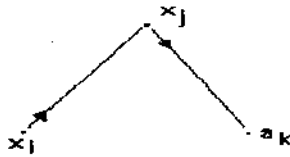
A construção será feita por exclusão no modo de combinar a sequência dos vértices:

A) $x_i \rightarrow x_j \rightarrow x_k$ onde $i > j > k$ (hipótese)



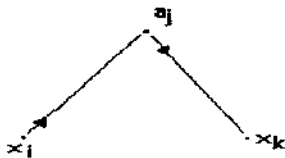
Para que se possa completar o 3-ciclo através de x_i seria necessário que $x_k \rightarrow x_i$. Agora, pela construção de $\tilde{\beta}$ $x_k \rightarrow x_i$ se e somente se $k > i$, mas por hipótese, $i > k$. Contradição.

B) $x_i \rightarrow x_j \rightarrow a_k$ onde $i > j$, $k \leq j$ (hipótese)



Para obter o 3-ciclo através de x_i teríamos que $a_k \rightarrow x_i$. Da construção de $\tilde{\beta}_{2m-1}$ $a_k \rightarrow a_i$ se e somente se $k > i$. Contradição $i > j \geq k$.

C) $x_i \rightarrow a_j \rightarrow x_k$ onde $i \geq j > k$ (hipótese)



Para montar o 3-ciclo através de x_i seria preciso que $x_k \rightarrow x_i$, mas isto só seria possível se $k > i$, o que contradiz a hipótese.

D) $x_i \longrightarrow a_j \longrightarrow a_k$ onde $i \geq j$ e $k = 1, 2, \dots, j-2$ (hipótese).



Para obtermos o 3-ciclo seria necessário que $a_k \longrightarrow x_i$, mas isto só ocorrerá se $k > i$. Agora, da hipótese temos que $i \geq j > k$. Portanto, $i > k$. Contradição.

E) $x_i \longrightarrow a_j \longrightarrow a_{j+1}$ onde $j \leq i$



Sabemos que $j+1 > j$ e $j \leq i$.

(*) se $j < i$:

- $j+1 > i \Rightarrow j \geq i$. Contradiz (*).
- $j+1 = i \Rightarrow x_i, a_j, a_{j+1}$ não formaria um 3-ciclo, pois $a_{j+1} \neq x_i$
- $j+1 < i \Rightarrow x_i, a_j, a_{j+1}$ não formaria um 3-ciclo, pois $a_{j+1} \neq x_i$

Logo, só nos resta testar $i = j$:



$x_i \rightarrow a_i$: pode ocorrer pois $x_j \rightarrow a_i$ se e somente se $j \geq i$

$a_i \rightarrow a_{i+1}$: pela construção de A_m

$a_{i+1} \rightarrow x_i$: pode ocorrer pois $a_j \rightarrow x_i$ se e somente se $j > i$

Portanto, existe somente um 3-ciclo através de x_i .

$$x_i \rightarrow a_i \rightarrow a_{i+1} \rightarrow x_i$$

3.3.2: $\tilde{\beta} \in B$

Demonstração:

Temos que $V(\tilde{\beta}) = (a_1, \dots, a_m, x_1, \dots, x_{m-1})$ onde deletamos k ($0 \leq k \leq m-3$) dos vértices $x_2, \dots, x_{m-2}$.

I - A_m possui $m-2$ 3-ciclos [14]

II - $\tilde{\beta}$ tem $n = 2m - 1 - k$ vértices, $0 \leq k \leq m-3$

III - Pela proposição 3.3.1, I e II acima temos que $\tilde{\beta}$ possui

$$(m-2) + (m-1-k) = (2m-1-k) - 2 = n-2$$

$n-2$ 3-ciclos, logo $\tilde{\beta} \in B$.

Chapter 4

O Teorema de Caracterização

Teorema de Caracterização: Um torneio H_n contém o menor número de 3-ciclos se e somente se H_n é uma das duas composições:

1. $H_n = B_3(S, \{a\}, \{b\})$, onde a componente S é transitiva e B_3 é um 3-ciclo;

2. $H_n = \tilde{\beta}(\{a_1\}, \dots, \{a_m\}, S^{(1)}, \dots, S^{(m-1)})$, onde $\tilde{\beta} \in B$ e H_n é obtido de $\tilde{\beta}$

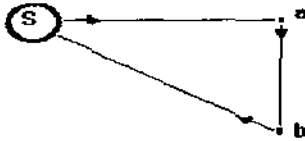
pelas substituições dos vértices $x_i \in V(\tilde{\beta})$ por qualquer componente transitiva.

Demonstração:

$\Leftarrow$) Considere primeiro, o caso em que

$$H_n = B_3(S, \{a\}, \{b\}),$$

por 1 sabemos que B_3 é um 3-ciclo, logo temos o seguinte diagrama:



então para cada $x \in S$ temos x, a, b, x é um 3-ciclo

Sendo S por hipótese transitiva não existe 3-ciclo através de x em S . Portanto o número de 3-ciclos de H_n é $n-2$, já que para cada um dos $n-2$ vértices de S , existe somente um 3-ciclo. $H_n \in B$.

Considere o segundo caso:

$$H_n = \tilde{\beta}(\{a_1\}, \dots, \{a_m\}, S^{(1)}, \dots, S^{(m-1)})$$

Desde que para cada x_i , existe em $\tilde{\beta}$ somente um 3-ciclo através de x_i, a saber: x_i, a_i, a_{i+1}, x_i (Proposição 3.3.1)

$S^{(i)} \rightarrow a_i \rightarrow a_{i+1} \rightarrow S^{(i)}$ temos para cada $y \in S^{(i)}$ um 3-ciclo através de y , já que em $S^{(i)}$ não pode existir um 3-ciclo através de y , pois, $S^{(i)}$ é uma componente transitiva.

O número de vértices existentes em $S^1, S^2, \dots, S^{(m-1)}$ é $n-m$, pois, H_n possui n vértices e $\{a_1\}, \dots, \{a_m\}$ contribui com m vértices, logo o restante está em $S^1, \dots, S^{(m-1)}$.

Então, como para cada um dos $n-m$ vértices de $S^1, \dots, S^{(m-1)}$, existe somente um 3-ciclo através destes, concluímos que a quantidade de 3-ciclos é $n-m$.

Como A_m possui o menor número de 3-ciclos, então existem $m - k + 1$ 3-ciclos, ou seja, $m - 3 + 1 = m - 2$.

Portanto, o número de 3-ciclos de H_n é a quantidade de 3-ciclos de A_m mais a quantidade de 3-ciclos devido a $S^{(1)}, \dots, S^{(m-1)}$. Assim $m - 2 + n - m = n - 2 \Rightarrow H_n \in B$ pois em um torneio de n vértices o menor número de 3-ciclos é $n - k + 1 = n - 3 + 1 = n - 2$.

6) Procedimento: Indução sobre a ordem n

Suponha que cada $B_n \in B$ é uma das duas composições (1), (2) e seja $B_{n+1} \in B$.

Considere um vértice v de B_{n+1} tal que $B_n = B_{n+1} \setminus v$ é Hamiltoniano (v é vértice de exatamente um 3-ciclo de B_{n+1}).

Podemos supor que $a \longrightarrow b$. São quatro as possibilidades de adjacências de v, a, b :

1a.) $v \longrightarrow a$ e $b \longrightarrow v$

2a.) $v \longrightarrow a$ e $v \longrightarrow b$

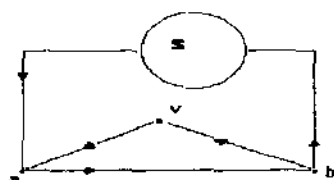
3a.) $a \longrightarrow v$ e $b \longrightarrow v$

4a.) $a \longrightarrow v$ e $v \longrightarrow b$

De acordo com a hipótese de indução B_n é uma das duas composições (1), (2).

$$1) B_n = B_3(S, \{a\}, \{b\})$$

1a.)



já que B_3 é um 3-ciclo

Observe que a, b, v forma um 3-ciclo através de v em B_{n+1} . Além disto, podemos notar através do diagrama que

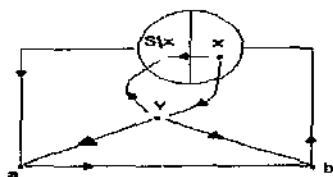
$\langle V(S) \cup \{v\} \rangle = S'$ é transitiva.

Logo a composição de B_{n+1} é da forma

$$B_{n+1} = B_3(S', \{a\}, \{b\})$$

Veja que $S' \rightarrow \{a\} \rightarrow \{b\} \rightarrow S'$

2a.) $v \rightarrow a$ e $v \rightarrow b$



Como existe exatamente um 3-ciclo que passa através de v , existe $x \in S$ tal que $x \rightarrow v$ e $v \rightarrow S \setminus x$, senão para cada $y \in S$ poderíamos construir o 3-ciclo v, b, y, v .

Então v, b, x, v é o 3-ciclo através de v .

Notar que:

$$v \longrightarrow a \quad v \longrightarrow b \quad v \longrightarrow S \setminus x$$

$$x \longrightarrow a \quad \text{já que } S \longrightarrow a \quad \text{e } x \in S$$

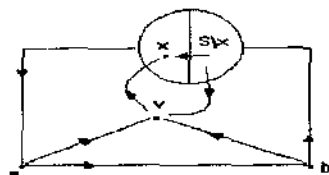
$$b \longrightarrow S \setminus x$$

$$S \setminus x \longrightarrow a \longrightarrow b \longrightarrow x \longrightarrow v$$

com isto, concluímos que o torneio quociente é A_5 , pois, estas são as propriedades satisfeitas por ele.

$$B_{n+1} = A_5(S \setminus x, \{a\}, \{b\}, \{x\}, \{v\})$$

$$3a.) \quad a \longrightarrow v \quad \text{e} \quad b \longrightarrow v$$



Devido ao fato que por v passa exatamente um 3-ciclo, temos que existe um $x \in S$ tal que $v \longrightarrow x$ e $S \setminus x \longrightarrow v$.

Caso contrário poderíamos construir através de cada vértice $y \in S$ o 3-ciclo $v \longrightarrow y \longrightarrow a \longrightarrow v$.

Assim sendo, v, x, a, v é o 3-ciclo através de v .

Observar:

$$S \setminus x \longrightarrow a \quad S \setminus x \longrightarrow v$$

$$b \longrightarrow x \quad b \longrightarrow v$$

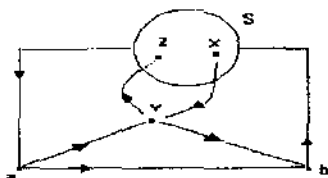
$$a \longrightarrow v$$

$$v \longrightarrow x \longrightarrow a \longrightarrow b \longrightarrow S \setminus x$$

Logo, o torneio quociente desta composição é A_5 .

$$B_{n+1} = A_5 (\{v\}, \{x\}, \{a\}, \{b\}, S \setminus x)$$

$$4a.) \quad a \longrightarrow v \text{ e } v \longrightarrow b$$



O subtorneio induzido pelos vértices de S não podem ser conados por v , senão existiriam no mínimo dois 3-ciclos através de v .

Então, em $V(S)$ existe um vértice x tal que $x \longrightarrow v$ e um vértice z tal que $v \longrightarrow z$. Isto nos leva a uma contradição já que podemos construir os seguintes 3-ciclos:

$$x \longrightarrow v \longrightarrow b \longrightarrow x$$

$$v \longrightarrow z \longrightarrow a \longrightarrow v$$

$$II) \quad B_n = \bar{\beta} (\{a_1\}, \dots, \{a_m\}, S^{(1)}, \dots, S^{(m-1)})$$

Afirmção:

$a_1, a_2, \dots, a_m, a_1$ ciclo característico de $\bar{\beta}$.

Demonstração - Etapa 1:

Não existe $x \in \tilde{\beta}$ tal que $x \rightarrow A_m$, pois, $x_i \rightarrow a_j$, se e somente se $i \geq j$.

Fazendo $j = m$ vemos que é impossível que tal exigência ($i \geq m$) seja satisfeita já que $1 \leq i \leq m-1$.

Não existe $y \in \tilde{\beta}$ tal que $A_m \rightarrow y$, pois, $a_i \rightarrow x_j$, se e somente se, $i > j$.

Admitindo que $i=1$, tal exigência ($i > j$) não se cumpre, já que $1 \leq j \leq m-1$.

(*) A_m não é projetado por nenhum vértice de $\tilde{\beta}$.

Etapa 2:

Seja $a_{j_1}, \dots, a_{j_k}$ (**) $3 \leq k \leq m-1$, um k -ciclo em $\langle \{a_1\}, \dots, \{a_m\} \rangle$.

Tome $t = \min \{j_1, \dots, j_k\}$

$r = \max \{j_1, \dots, j_k\}$

a) Se $r \neq m$, temos que $x_r \rightarrow a_l \forall l \in \{j_1, \dots, j_k\}$

b) Se $r=m$ e $t \neq 1$, temos que $a_t \rightarrow x_{t-1} \forall l \in \{j_1, \dots, j_k\}$

c) Se $r=m$ e $t=1$, então $a_1, a_2, \dots, a_m$ será o único ciclo possível. Porém, obtemos uma contradição com (**) pois aqui $k=m$. Logo tal situação não é admitida.

(***) Em virtude dos itens a, b, c, concluímos que qualquer que seja o ciclo contido em A_m , este é projetado por algum vértice de $\tilde{\beta}$.

Portanto, $a_1, a_2, \dots, a_m, a_1$ é um ciclo minimal por (*) e (***)

Etapa 3:

Para que possamos retirar um dos a_j e os vértices restantes continuem constituindo um $m-1$ ciclo se faz necessário que $j=1$ ou $j=m$. Ao omitirmos a_1 , então $a_2, \dots, a_m$ será projetado por x_1 (Lembrar que, nem x_1 e nem x_{m-1} podem ser

retirados na confecção de $\bar{\beta}$).

Ao omitirmos a_m , então $a_1, \dots, a_{m-1}$, será projetado por x_{m-1} . Porém, para que um $m-1$ ciclo seja minimal, é necessário que não seja projetado.

Assim sendo, $a_1, \dots, a_m$, é um ciclo característico de $\bar{\beta}$.

Vamos considerar 3 casos:

1o.) $v \longrightarrow a_i \forall i = 1, 2, \dots, m$

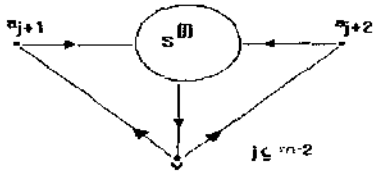
2o.) $a_i \longrightarrow v \forall i = 1, 2, \dots, m$

3o.) $a_1, \dots, a_m$ não é conado por v .

1o. Caso:

Desde que B_{n+1} é Hamiltoniano, existem j ($1 \leq j \leq m-1$) e $x \in V(S^j)$ tal que $x \longrightarrow v$, senão não seria possível fechar um ciclo através de todos os vértices de B_{n+1} .

a) $j = m - 1$ Suponha que $j \neq m - 1$ $j \leq m - 2$



Como $j+1 > j$, temos que $a_{j+1} \rightarrow x$

$j+2 > j$, logo $a_{j+2} \rightarrow x$

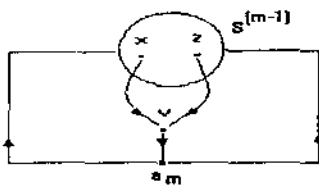
Agora $v \rightarrow a_j \forall j = 1, 2, \dots, m$ por hipótese.

Assim construímos dois 3-ciclos através de v

x, v, a_{j+1}, x e x, v, a_{j+2}, x

Portanto, chegamos a uma contradição, logo $j = m - 1$

b) Em $S^{(m-1)}$ somente existe um vértice x tal que $x \rightarrow v$. Do contrário existiriam no mínimo $x, z \in S^{(m-1)}$ tal que $x \rightarrow v$ e $z \rightarrow v$.



$a_m \rightarrow x$ pois $m > m - 1$

$a_m \rightarrow z$ pois $m > m - 1$

logo, $z \rightarrow v \rightarrow a_m \rightarrow z$ e

$x \rightarrow v \rightarrow a_m \rightarrow x$ são dois 3-ciclos através de v , contradição.

Notar que:

$x \longrightarrow a_k$ para $k = 1, 2, \dots, m-1$ pois $x \in S^{(m-1)}$ e $m-1 \geq k$

$a_m \longrightarrow x$ pois $x \in S^{(m-1)}$ e $m > m-1$

$v \longrightarrow S^{(j)}$ $j = 1, 2, \dots, m-2$ pela parte a)

$v \longrightarrow S^{(m-1)} \setminus x$ pela parte a) e b)

$x \longrightarrow v$, por b)

Considere $a'_i = a_i \forall i = 1, 2, \dots, m$

$a'_{m+1} = x$

$S'^{(j)} = S^{(j)} \forall j = 1, 2, \dots, m-2$

$S'^{(m-1)} = S^{(m-1)} \setminus x$

$S'^{(m)} = \{v\}$

Logo, o torneio quociente de B_{n+1} é um torneio β -derivado $\tilde{\beta}'$.

$B_{n+1} = \tilde{\beta}'(\{a'_1\}, \dots, \{a'_m\}, \{a'_{m+1}\}, S'^{(1)}, \dots, S'^{(m)})$

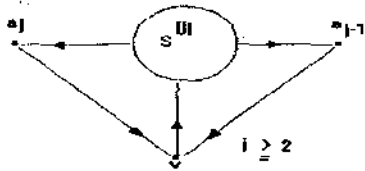
2o. Caso:

$a_i \longrightarrow v \forall i = 1, 2, \dots, m$

B_{n+1} é Hamiltoniano, logo deve existir j ($1 \leq j \leq m-1$) e $x \in V(S^{(j)})$ tal que

$v \longrightarrow x$.

c) $j = 1$ Suponha $j \neq 1$ $j \geq 2$



Como $j \geq j$ temos

$$x \longrightarrow a_j$$

sendo $j > j-1$

$$x \longrightarrow a_{j-1}$$

Sabemos que $a_k \longrightarrow v \forall k = 1, 2, \dots, m$

Portanto, podemos construir dois 3-ciclos através de v , a saber: x, a_j, v, x e

x, a_{j-1}, v, x

Assim, chegamos a uma contradição:

Portanto $j = 1$

Com esta caracterização notamos que o torneio quociente é um torneio β -derivado:

$$B_{n+1} = \tilde{\beta}^n(\{a''_1\}, \dots, \{a''_{m+1}\}, S^{n(1)}, \dots, S^{n(m)})$$

3o. Caso:

$a_1, a_2, \dots, a_m, a_1$ não é conado por v .

Considerando $\alpha \in S^{(m-1)}$ e $w \in S^{(1)}$ são os possíveis subcasos a analisar:

$$(1) v \longrightarrow \alpha \quad w \longrightarrow v$$

$$(2) v \longrightarrow \alpha \quad v \longrightarrow w$$

$$(3) \alpha \longrightarrow v \quad w \longrightarrow v$$

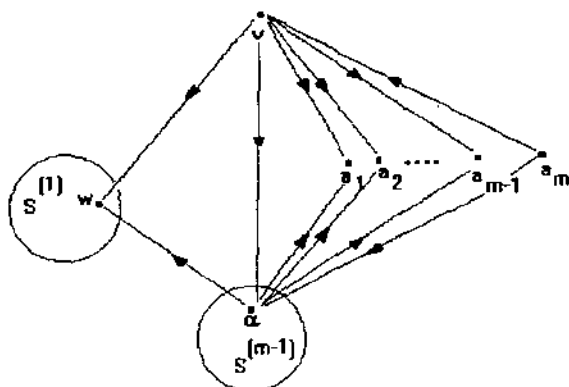
$$(4) \alpha \longrightarrow v \quad v \longrightarrow w$$

$$(1) v \longrightarrow \alpha \quad w \longrightarrow v$$



$\alpha \longrightarrow w$ já que $m-1 > 1$. Assim, podemos construir dois diferentes 3-ciclos: v, α, w, v através do vértice v e um 3-ciclo contido no subtorneio Hamiltoniano $\langle v, a_1, \dots, a_m \rangle$. Portanto obtemos uma contradição, pois, existe um único 3-ciclo através de $v \in B_{n+1}$

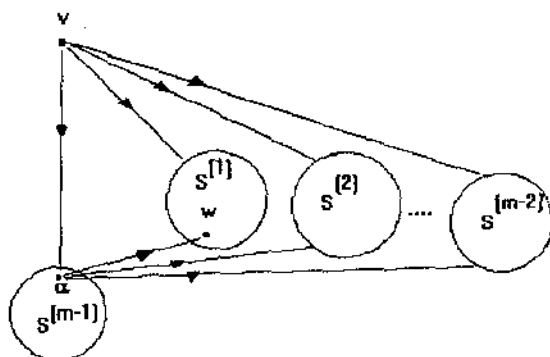
$$(2) v \longrightarrow \alpha \quad v \longrightarrow w$$



2.1 $\alpha \longrightarrow a_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, m-1$ pois $\alpha \in S^{(m-1)}$ e $m-1 \geq k$. Portanto, $v \longrightarrow a_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m-1$ senão o 3-ciclo v, α, a_i, v pode ser construído. Isto vem do fato de sabermos que o 3-ciclo através de v está contido em $\langle v, a_1, \dots, a_m \rangle$ e este é único.

2.2 $\alpha_m \longrightarrow v$, pois senão $a_1, a_2, \dots, a_m, a_1$ seria conado por v . Assim sendo, o único 3-ciclo através de v será v, a_{m-1}, a_m, v .

2.3 -



Como $x_i \longrightarrow x_j$ quando $i > j$ temos que:

$$\alpha \longrightarrow S^{(k)} \forall k = 1, 2, \dots, m-2 \text{ pois } \alpha \in S^{(m-1)}$$

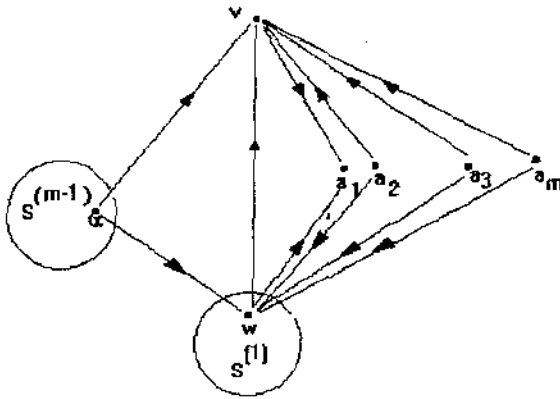
$$\text{Logo } v \longrightarrow S^{(j)} \forall j = 1, 2, \dots, m-2$$

Do contrário, para cada $x \in S^{(j)}$ poderíamos construir o 3-ciclo v, α, x, v .

Portanto:

$$B_{n+1} = \tilde{\beta}(\{a_1\}, \dots, \{a_m\}, S^{(1)}, \dots, S^{(m-2)}, S^{(m-1)} \cup \{v\})$$

$$(3) \alpha \longrightarrow v \ w \longrightarrow v$$

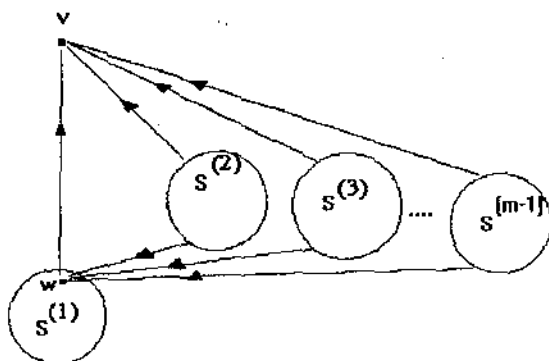


Desde que v é um vértice de exatamente um 3-ciclo contido em $\langle v, \{a_1\}, \dots, \{a_m\} \rangle$

temos:

3.1 - Como $w \in S^{(1)}$ $a_i \longrightarrow w \forall i = 2, 3, \dots, m$ logo $a_i \longrightarrow v \forall i = 2, 3, \dots, m$, senão o 3-ciclo v, a_i, w, v pode ser construído o qual não está contido em $\langle v, \{a_1\}, \dots, \{a_m\} \rangle$.

3.2 - $v \rightarrow a_1$ do contrário $a_1, a_2, \dots, a_m, a_1$ será conado por v . Com isto o único 3-ciclo através de v será v, a_1, a_2, v .



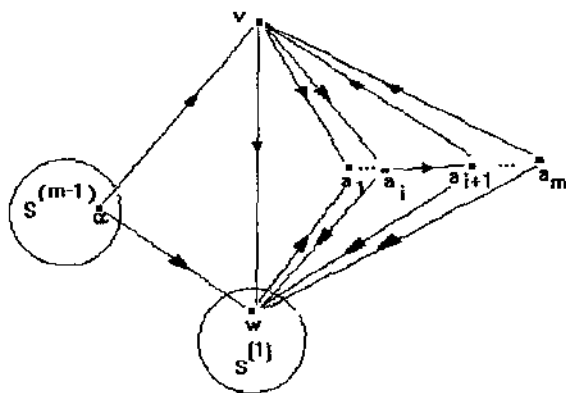
3.3 - Para $\forall i = 2, \dots, m-1$ temos que $S^{(i)} \rightarrow w$ pois $i > 1$.

Então, $S^{(i)} \rightarrow v \forall i = 2, 3, \dots, m-1$ senão para

cada $x \in S^{(i)}$ o 3-ciclo x, w, v, x poderá ser construído.

$$B_{n+1} = \tilde{\beta}(\{a_1\}, \dots, \{a_m\}, S^{(1)} \cup \{v\}, S^{(2)}, \dots, S^{(m-1)})$$

$$(4) \alpha \rightarrow v \rightarrow w$$



4.1 - Sabemos que $x_i \rightarrow a_j$ quando $i \geq j$

logo $S^{(1)} \rightarrow a_1$ e $a_m \rightarrow S^{(m-1)}$ pois $a_i \rightarrow x_j$ quando $i > j$ no caso $i =$

$$m, j = m - 1$$

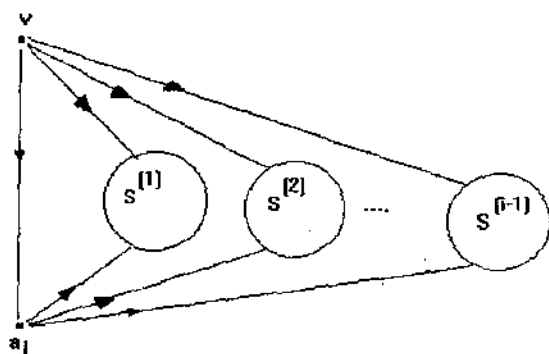
Desde que v é um vértice de exatamente um 3-ciclo contido em $\langle v, a_1, \dots, a_m \rangle$ temos que $v \rightarrow a_1$, caso contrário podemos construir o 3-ciclo v, w, a_1 , v o qual não está contido em $\langle v, a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$.

$a_m \rightarrow v$ senão v, a_m, a , v , pode ser construído.

4.2 - Existe exatamente um índice i tal que $v \rightarrow a_i$, $a_{i-1} \rightarrow v$ e v, a_i, a_{i+1} , v é o 3-ciclo através de v .

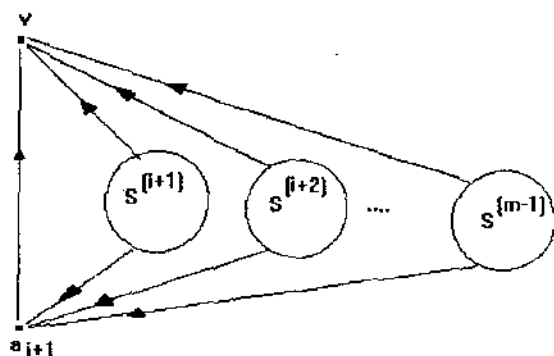
4.3 - $v \rightarrow S^{(j)} \forall j = 1, 2, \dots, i-1$

Pelo ítem anterior já obtemos o índice i tal que v, a_i, a_{i-1} , v forma o 3-ciclo.



$a_i \rightarrow S^{(j)}$ se $i > j$, logo $v \rightarrow S^{(j)}$ para $\forall j = 1, 2, \dots, i-1$, pois, caso contrário podemos construir o 3-ciclo v, a_i, x, v , para cada $x \in S^{(j)}$

$$4.4 - S^{(k)} \longrightarrow v \quad \forall k = i+1, \dots, m-1$$



$$S^{(k)} \longrightarrow a_{i+1} \text{ se } k \geq i+1.$$

Assim, $S^{(k)} \longrightarrow v \quad \forall k = i+1, \dots, m-1$, do contrário podemos construir o 3-ciclo v, y, a_{i+1}, v , para cada $y \in S^{(k)}$.

4.5 - $\langle v \cup V(S^{(i)}) \rangle$ é um torneio transitivo.

Se tal torneio não fosse transitivo, então existiria um 3-ciclo através de v contido nele, mas isto levaria a uma contradição com 4.2. Assim:

$$B_{n+1} = \bar{\beta}(\{a_1\}, \dots, \{a_2\}, S^{(1)}, \dots, S^{(i-1)}, S^{(i)} \cup \{v\}, S^{(i-1)}, \dots, S^{(m-1)})$$

Chapter 5

Consequência

Corolário: Um torneio H_n contém o menor número de 3-ciclos se e somente se H_n tem a sequência de adjacência 1, 1, 2, 3, ..., $n-3$, $n-2$, $n-2$.

Demonstração:

Seja $H_n \in \mathcal{B}$. Pelo teorema de caracterização H_n é uma das seguintes posições:

1 - Se $H_n = B_3 (S, \{a\}, \{b\})$, podemos supor que $a \longrightarrow b$. Como B_3 é um 3-ciclo temos o diagrama:



Note que do vértice a sai somente um arco orientado $od(a) = 1$

Sabemos que existem n vértices, logo em S temos n-2 já que $a \notin S$ e $b \notin S$.

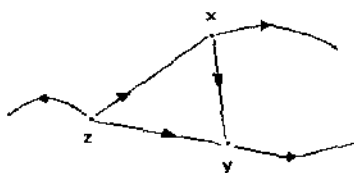
Mas de b os arcos orientados saem.

Assim $od(b) = n - 2$ (od: grau de saída)

Vamos analisar os elementos de S:

Caso $|V(S)| = 3$

$od(y) = 1$



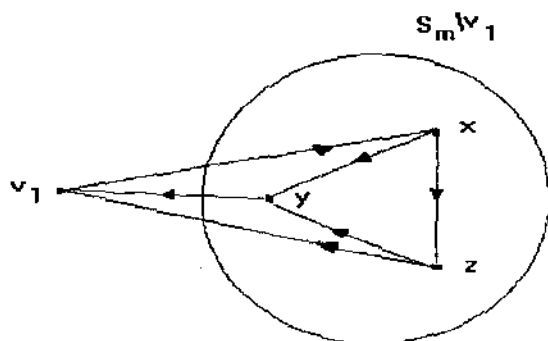
$od(x) = 2$ $od(z) = 3$

Caso $|V(S)| = m, m \geq 4$

Seja $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m$ os vértices de S_m onde S_m é transitivo.

Suponha que não exista $v_1 \in V(S_m)$ tal que $v_1 \longrightarrow S_m \setminus v_1$. Então existem

vértices x, y e $z \in V(S_m \setminus v_1)$ tal que o diagrama abaixo se verifica.



Assim construímos o 3-ciclo v_1, x, z, v_1 mas, S_m é transitivo. Contradição.

Portanto, existe um vértice $v_1 \in V(S_m)$ tal que $v_1 \rightarrow S_m \setminus v_1$.

Considere o torneio $S_{m-1} = S_m \setminus v_1$. Pelo argumento precedente temos que existe $v_2 \in V(S_{m-1})$ tal que $v_2 \rightarrow S_{m-1} \setminus v_2$.

Repetindo sucessivamente o raciocínio chegaremos a:

$\forall i \in \{1, 2, \dots, m-1\} \exists v_i \in V(S_{m-i+1})$ tal que $v_i \rightarrow S_{m-i+1} \setminus v_i$ onde

$$S_{m-i+1} = S_m \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$$

Logo, $\text{od}(v_i) = m-i$ em S_m .

Sendo $H_n = B_3(S, \{a\}, \{b\})$ temos que $S \rightarrow a$ ou seja, todos os elementos de S tem pelo menos grau de saída igual a 1.

Tomando no resultado acima $m = n-2$ obtemos $\text{od}(v_i) = n-2-i$ para cada $v_i \in S_{n-2}$ em S_{n-2} .

Portanto, $\text{od}(v_i) = n-2-i+1 = n-1-i$ em H_n para cada $v_i \in S_{n-2}$. Com isto

a sequência associada aos vértices de H_n é:

$$1, 1, 2, 3, \dots, n-3, n-2, n-2.$$

$$2-H_n = \tilde{\beta}(\{a_1\}, \dots, \{a_m\}, S^{(1)}, \dots, S^{(m-1)})$$

Nós podemos ordenar $V(H_n) \setminus \{a_1, a_m\}$ do seguinte modo:

$S^{(1)}, a_2, S^{(2)}, a_3, \dots, S^{(m-2)}, a_{m-1}, S^{(m-1)}$ onde para cada $v, w \in S^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, $v < w$ se $\text{od}(v) < \text{od}(w)$. Desta forma os vértices podem ser rotulados com $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$ de modo que $\text{od}(v_i) = i$, para todo $v_i \in V(H_n) \setminus \{a_1, a_m\}$.

Para cada $v \in S^{(k)}$, v é adjacente a a_1 e todos os predecessores nesta ordem, o mesmo ocorrendo com cada a_i , com exceção de a_{i-1} , substituído por a_{i-1} .

Além disto, $\text{od}(a_1) = 1$ ($a_2 \rightarrow a_1$ única possibilidade) e $\text{od}(a_m) = n - 2$.
então a sequência de H_n é:

$$1, 1, 2, \dots, n-3, n-2, n-2$$

Exemplificando:

	s^1	s^2	s^3	s^4	s^5
a_1					
a_2					
a_3					
a_4					
a_5					
a_6					
s^1					
s^2					
s^3					
s^4					

Reciprocamente: seja $1, 1, 2, \dots, n-3, n-2, n-2$ sequência associada aos vértices de H_n . Desde que o número de 3-ciclos é determinado pela sua sequência, todos os torneios com a sequência anterior terá o mesmo número de 3-ciclos. (Veja [2], Teorema 4.5)

Observe que no torneio bineutro A_n $od(a_1) = 1$ $od(a_2) = 1$ $od(a_3) = 2$ $od(a_4) = 3 \dots od(a_{n-1}) = n-2$ $od(a_n) = n-2$.

Logo, A_n possui uma sequência igual aquela associada H_n . Sabemos que $A_n \in B$ (possui o menor número de 3-ciclos) logo, $H_n \in B$.

Referências Bibliográficas

[1]: Barros, T. E., Homotopia Regular de Grafos, tese de mestrado, Departamento de Matemática IMECC-UNICAMP, 1990.

[2]: Beineke, L. M. and Reid K. B., Tournaments, Selected Topics in Graph Theory. Academic Press, Neé York (1979).

[3]: Burzio M. and Demaria D. C., A normalization theorem for regular homotopy of finite directed graphs. Rend. Circ. Mat. Palermo, (2), 30 (1981), 255-286.

[4]: Burzio M. and Demaria D. C., The first normalization theorem for regular homotopy of finite directed graphs. Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, 13 (1981), 38-50.

[5]: Burzio M. and Demaria D. C., Duality theorems for regular homotopy of finite directed graphs. Rend Circ. Mat. Palermo, (2), 31 (1982), 371-400.

[6]: Burzio M. and Demaria D. C., The second and third normalization theorems for regular homotopy of finite directed graphs. Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, 15 (1983), 61-82.

[7]: Burzio M. and Demaria D. C., Homotopy of polyhedra and regular homotopy of digraphs. Atti II . Conv. Topologia, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, (2). n. 12 (1986), 189-204.

[8]: Burzio M. and Demaria D. C., On simply disconnected tournaments. Ars Combin. 24a(1988), 149-161.

[9]: Burzio M. and Demaria D. C., Characterization of tournaments by coned

3-cycles. Acta Univ. Carolin., Math. Phys. 28 (1989), 25-30.

[10]: Burzio M. e Demaria D. C., On Classification of Hamiltonian Tournaments, Acta Universitatis Caroline - Mathematica at Physica, vol 29, n. 2 (1988), 3-14.

[11]: Burzio M. e Demaria D. C., Hamiltonian Tournaments with the least number of 3-cycles, J. Graph Theory, vol. 14, n. 6 (1990), 663-672

[12]: Las Vergnas M., Sur le nombre de circuit dans un tournoi fortement connex. Cahurs du CERO, Bruxelles 17 (1975), 261-265.

[13]: Lima, N. A., Uma Classificação para os Torneios Hamiltonianos, Tese de Mestrado, Departamento de Matemática, IMECC-UNICAMP, 1995.

[14]: Moon, J. W., On Subtournaments of tournament. Canad. Math. Bull. 9 (1966) 297-301

[15]: R. J., Douglas, Tournaments that admit exactly one Hamiltonian circuit. Proc. London Math. Soc. 21 (1970) 716-730