Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas
Campinas, SP. Brasil

Variedades Riemannianas Abertas.
Rigidez das Fronteiras Ideais e Geometria das
Variedades com Curvatura Minimal Radial Assintoticamente Não Negativa

Tese de Doutorado por

Newton Luís Santos

ORIENTADOR: Valery Marenich (Universidade de Kalmar -Suécia)
CO-ORIENTADOR: Francesco Mercuri (IMECC-UNICAMP)

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Variedades Riemannianas Abertas. Rigidez das Fronteiras Ideais e Geometria das Variedades com Curvatura Minimal Radial Assintoticamente Não Negativa

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Newton Luís Santos** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 30 de Novembro de 2001

.....
Prof. Dr. Valery Marenich
Orientador

.....
Prof. Dr. Fracesco Mercuri
Co-orientador

Banca Examinadora:

1- Prof. Dr. Francesco Mercuri (Co-orientador - UNICAMP)
2- Prof. Dr. Gregório Pacelli Bessa (UFC)
3- Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros (UNICAMP)
4- Prof. Dr. Sérgio José Xavier de Mendonça (UFF)
5- Profª. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin (UFSCar)

Tese apresentada ao **Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP,** como requisito parcial para obtenção do Título de **Doutor** em Matemática

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Santos, Newton Luís

Sa59v Variedades Riemannianas abertas; rigidez das fronteiras ideais e geometria das variedades com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa / Newton Luís Santos -- Campinas, [S.P.:s.n.], 2001.

Orientador : Valery Marenich

Co-Orientador: Francesco Mercuri

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Variedades riemanianas. 2. Curvatura. 3. Geometria diferencial. I. Marenich, V. II. Mercuri, F. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 30 de novembro de 2001 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). FRANCESCO MERCURI

Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS

Prof (a). Dr (a). YURIKO YAMAMOTO BALDIN

Prof (a). Dr (a). SÉRGIO JOSÉ XAVIER DE MENDONÇA

Prof (a). Dr (a). GREGÓRIO PACELLI FEITOSA BESSA

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

I

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer ao Professor Valery Marenich, meu orientador, pelos valiosos ensinamentos nesta área fascinante da Geometria, que é a Geometria Global das Variedades, por abrir-me um leque tão grande de possibilidades de estudos e pesquisas. Foi gratificante desenvolver este trabalho sob sua orientação. Árvore de raízes profundas.

Ao Professor Francesco Mercuri, por aceitar ser meu co-orientador, de quem, muita Geometria aprendi.

Ao Professor Caio J. C. Negreiros, pela sua posição aberta e pelas diversas ajudas. Confiança e amizade, valores inestimáveis.

Aos Professores da Unicamp com quem tive o prazer de estudar, particularmente, ao Professor Alexandre Ananin pelos preciosos ensinamentos, sementes que prometem muitos frutos.

Aos Professores Ivo M. da Costa e Yuriko Y. Baldin, da UFSCar, a quem muito devo minha paixão pela Matemática. O carinho com que uma semente é plantada já é meio caminho para se colher bons frutos.

Aos colegas do "predinho", que fizeram minha passagem pela Unicamp, ser uma experiência muito grata; de maneira particular ao Zé Carlos, Zhang, Leonardo Bilioti, Marcelo Muniz, Yurilev, Jones Colombo, Amauri, Emerson, Everaldo, Edson Terán, Richard Troncoso, Jose Minchola e Hermes Soto Segura. À Martha Dussán, pelas discussões interessantes sobre Geometria.

Aos meus pais e minha irmã pela pelo contínuo estímulo e torcida.

À esposa da minha alma, Maria, pelo amor e paciência com que me acompanhou neste trabalho.

Ao Professor Dmitri Alekseevsky, do Max-Planck Institut für Mathematik, pela cuidadosa leitura e comentários acerca do meu primeiro artigo, submetido para publicação.

À Högskolan i Kalmar -Suécia- que tão generosamente me convidou para desenvolver minhas pesquisas de doutorado em suas instalações, durante o mês de Julho de 2001. De modo particular, aos Professores Hans Veenhuizen, Staffan Carius e meu orientador, Valery Marenich, que tanto se empenharam para que isto se fizesse possível.

Aos funcionários das secretarias da Matemática e da Pós-Graduação, Cidinha, Ednaldo, Tânia e Reinaldo, pela sua prontidão e gentileza em ajudar-me nas questões burocráticas

Finalmente, mas de não menos importância, ao CNPq, que financiou o desenvolvimento deste trabalho de doutoramento, o meu mais profundo obrigado.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

ÍNDICE

RESUMO 01

ABSTRACT 02

INTRODUÇÃO 03

0.1. Lista de símbolos 03

0.2. Idéias gerais acerca da pesquisa em Geometria Riemanniana Global 05

0.3. Principais resultados da Tese 07

0.4. Ferramentas básicas 09

0.5. Curvatura minimal radial limitada inferiormente 20

Apêndice 1 25

Apêndice 2 27

CAPÍTULO 1 28

1.A. Introdução 28

1.B. Construção do Exemplo 31

1.C. Warp-products 32

CAPÍTULO 2 41

2.A. Principais resultados deste capítulo 41

2.B. Porque estudar variedades que são (radialmente) assintoticamente não negativa 42

2.C. Variedades com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa 44

2.D. Variedade de comparação - Teorema de Rauch 47

2.E. Triângulos e Teorema de Toponogov Generalizado 51

2.G. Analizando a condição de decaimento 59

2.H. Consequências do TCTG 64

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

III

CAPÍTULO 3 69

3.A. Principais resultados deste capítulo 69

3.B. Finitude Topológica de (M^n, o, g, k) 70

3.C. Comparação de Volumes em variedades CRANN 76

CAPÍTULO 4 87

4.A. Principal resultado deste capítulo 87

4.B. Existência e unicidade dos cones assintóticos para variedades CRANN 87

4.C. Questões 96

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 97

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

RESUMO

Nesta Tese apresentamos dois resultados, basicamente: (1) A construção, em $\mathbb{R}^8$, de uma métrica g, com curvatura de Ricci não negativa $Ric_g \geq 0$, tal que a variedade aberta $(\mathbb{R}^8, g)$ possui Fronteiras Ideais de diferentes dimensões (diferindo, neste apecto, das variedades com curvatura seccional $K \geq 0$); (2) Estudamos uma classe de variedades Riemannianas abertas e pontuadas (M^n, o, g) cuja curvatura minimal radial $K_o^{min} \geq -k(d_M(o,.))$, onde k é uma função não negativa de decaimento quadrático e $d_M(.,.)$ é a função distância em M^n induzida da métrica Riemanniana. Reescrevemos os Teoremas de Comparação de Rauch, Bishop-Gromov e Toponogov para esta classe de variedades, comparando-as com variedades M^n_{-k} rotacionalmente simétricas (difeomorfas ao espaço Euclideano) de curvatura $-k(t)$, ao invés de formas espaciais, como é tradicional. Como consequência do Teorema de Comparação de Rauch, mostramos a existência de uma contração métrica, $\Phi : M^n_{-k} \to M^n$, e aplicamos tal resultado fundamental, na demonstração de um Lema de Empacotamento, provando em seguida um Teorema de Existência e Unicidade dos Cones Tangentes no Infinito desta classe de variedades, o que mostra que tal classe deve possuir uma estrutura muito mais rigida que a classe das variedades com $Ric \geq 0$.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

ABSTRACT

In this Thesis we present two results, basically: (1) The construction on $\mathbb{R}^8$, of a metric g, of nonnegative Ricci curvature $Ric_g \geq 0$, such that the open manifold $(\mathbb{R}^8, g)$ has Ideal Boundaries of different dimensions (differing, in this sense, from the manifolds of nonnegative sectional curvature $K \geq 0$); (2) We study a class of pointed open Riemannian manifolds (M^n, o, g) whose minimal radial curvature $K_o^{min} \geq -k(d_M(o,.))$, where k is a nonnegative function of quadratic decay and $d_M(.,.)$ is the distance function on M^n induced by the Riemannian metric. We have rewritten the Rauch, Bishop-Gromov and Toponogov Comparison Theorems for this class of manifolds, comparing them with manifolds M^n_{-k}, rotationally symmetric (diffeomorphic to the Euclidean space) of curvature $-k(t)$, instead of space forms, as it is usual. As a consequence of Rauch Comparison Theorem, we have shown the existence of a metric contraction, $\Phi : M^n_{-k} \to M^n$, and then we applied such fundamental result, in the proof of a Packing Lemma, and subsequently Existence and Uniqueness Theorem for Tangent Cones at Infinity for this class of manifolds, what shows that such class must have a much more rigid structure then the class of manifolds with $Ric \geq 0$.

INTRODUÇÃO

0.1. Lista de símbolos

Para fixarmos as notações, apresentamos a seguir uma lista dos principais símbolos utilizados nesta Tese. A referência básica é o livro Geometria Riemanniana de M. P. do Carmo [dC].

1. M^n: variedade diferenciável de dimensão n (nesta Tese, todas as variedades consideradas são completas e conexas);
2. T_pM: espaço tangente a p em M^n;
3. TM: fibrado tangente de M^n;
4. $TN^{\perp}$: fibrado normal da subvariedade $N \subset M$;
5. $\angle(v,w)$: ângulo entre v e $w \in T_pM$;
6. (M^n, g): variedade Riemanniana munida de tensor métrico g. Também denotaremos o tensor métrico por $\langle .,. \rangle$;
7. $\|v\| := \sqrt{\langle v,v \rangle}$: norma do vetor $v \in T_pM$;
8. $d_M(p,q)$: distância entre dois pontos p, $q \in (M^n, g)$ induzida pela métrica. Quando um ponto p estiver fixado escreveremos simplesmente $r_p(.)$ ao invés de $d_M(p,.)$;
9. $B(x,t) = \{y \in M^n \mid d_M(x,y) < t\}$: bola aberta de centro em x e raio t;
10. $\overline{B(x,t)} = \{y \in M^n \mid d_M(x,y) \leq t\}$: bola fechada de centro em x e raio t;
11. $S(x,t)$ ou $S_t(x) = \{y \in M^n \mid d_M(x,y) = t\}$: esfera de centro em x e raio t;
12. $B(x,t;g)$: bola aberta de raio r e centro x, na métrica g;
13. $S(x,t;g)$: esfera de raio r e centro x, na métrica g;
14. $B_{M^n}(x,t)$: bola em M^n, centrada em x e com raio t
15. $L(c)$: comprimento de uma curva c;
16. ∂X: fronteira de X;
17. $diam(N) = \sup_{p,q \in N} d_M(p,q)$: diâmetro de um subconjunto N de M^n (pode, eventualmente, ser infinto);
18. $rad(N) = \inf_{p \in N} \sup_{q \in N} d_M(p,q)$: raio de um subconjunto N de M^n;
19. inj_N: raio de injetividade de um subconjunto N de M^n;
20. $Vol(N)$: volume Riemanniano de um subconjunto mensurável N de M^n;
21. (X,x): onde X é um conjunto (variedade ou espaço métrico, nas nossas aplicações) e $x \in X$ é um ponto fixado de X, será chamado de conjunto pontuado (resp. variedade pontuada, ou espaço métrico pontuado);
22. (M^n, p, g): n-variedade Riemanniana pontuada, com ponto base p e forma métrica g;
23. (M^n, p, g, k): variedade Riemanniana com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa;
24. $\mathcal{C}^{\infty}(M)$: espaço dos campos vetoriais (infinitamente) diferenciáveis sobre M^n;
25. $[X,Y] = XY - YX$: colchete dos campos vetoriais, X, Y;
26. ∇: conexão Riemanniana de (M^n, g);
27. R: tensor de curvatura de M, dado por $R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ com $X, Y, Z \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$;
28. $K_M(x,y)$: curvatura seccional de M^n, no ponto $p \in M^n$, segundo o plano gerado por x, $y \in T_pM$;
29. $ric_M(.,.)$ ou $ric(.,.)$: tensor de Ricci de M^n;
30. $Ric_M(.)$ ou $Ric(.)$: curvatura de Ricci de M^n;
31. K_o^{min}: curvatura minimal radial com ponto base o
32. Δ: operador de Laplace-Beltrami (Laplaciano) de M^n;
33. $|v_1 \dots v_n|$: determinante de $v_1, \dots, v_n \in T_pM$;
34. $\mathcal{C}_p$: "cut locus" do ponto $p \in M^n$;
35. $A \sqcup B$: união disjunta dos conjuntos A e B;
36. $\Delta(a,b,c)$: triângulo de vértices a, b e c (no caso de a, b e c serem pontos de M^n);

37. $\triangle(\alpha, \beta, \gamma)$: triângulo de lados α, β, γ (se α, β, γ forem segmentos geodésicos definindo um triângulo em M^n);

38. $K_M \geq \kappa$: para todo ponto p de M^n e todo 2-plano $\sigma \subset T_pM$ tem-se $K_M(\sigma) \geq \kappa$ ($\kappa \in \mathbb{R}$ um número real fixo);

39. M^n é aberta: se é conexa, completa e não compacta;

40. M^n_κ é uma forma espacial: se é uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional constante κ. Particularmente, estaremos interessados nos representantes simplesmente conexos $S^n(\kappa)$, $\mathbb{R}^n$ e $H^n(\kappa)$ (respectivamente: a n-esfera de curvatura $\kappa > 0$, o n-espaço Euclidiano e o espaço hiperbólico de curvatura $\kappa < 0$);

0.2. Idéias gerais acerca da pesquisa em Geometria Riemanniana Global

O objetivo central da Geometria Riemanniana Global é uma descrição das relações entre os invariantes locais e globais geométricos, e invariantes topológicos das variedades Riemannianas. Entre os invariantes geométricos locais mais importantes, nós encontramos as curvaturas seccional e Ricci. Invariantes globais geométricos são: diâmetro, volume, crescimento do volume, raio de injetividade, etc. Finalmente, alguns importantes invariantes topológicos são os grupos de homologia e homotopia, classes de homeomorfismo, difeomorfismo, etc. Esquematicamente, podemos dividir os principais resultados da Geometria Riemanniana Global em três classes:

a. Teoremas de reconhecimento - basicamente os Teoremas de Esfera; quando as condições geométricas definem a variedade Riemanniana completamente, do ponto de vista geométrico ou topológico.

b. Teoremas de estrutura - quando as condições geometricas implicam propriedades métricas e principalmente topológicas.

c. Teoremas de finitude ou compacidade - mostram a existência de apenas um número finito de tipos topológicos das variedades Riemannianas satisfazendo a certas propriedades geométricas pré-estabelecidas.

Geralmente, as condições geométricas incluem restrições (desigualdades) sobre a curvatura seccional ou de Ricci. É claro que os resultados correspondentes com a curvatura seccional são muito mais restritivos que os correspondentes resultados sobre as variedades com restrições sobre a curvatura de Ricci. Comparemos alguns resultados clássicos deste tipo:

0.2.1. Resultados para variedades com restrição sobre a curvatura seccional.

a.1. Teoremas de reconhecimento (de esfera)

a.1.1. (Berger-Klingenberg, [B], [K]) Seja M^n uma n-variedade Riemanniana simplesmente conexa, $1/4 < K_M \leq 1$, então M^n é homeomorfa a S^n.

a.1.2. (Gromoll-Calabi-Sugimoto-Shiohama-Karcher-Ruh, [Gl], [KSS], [Ru]) Existe $\delta > 0$ tal que se M^n é uma n-variedade Riemanniana, completa, simplesmente conexa satisfazendo $\delta < K_M \leq 1$, então M^n é difeomorfa a S^n.

a.1.3. (Toponogov, [T1]) Se M^n satisfaz $K_M \geq 1$ e $diam(M) = \pi$, então M^n e isométrica a S^n.

a.1.4. (Grove-Shiohama, [GS]) Seja M^n com $K_M \geq 1$ e $diam(M) > \pi/2$, então M^n é homeomorfa a S^n.

b.1. Teoremas de estrutura

b.1.1. (Cartan-Hadamard, [dC]) Se $K_M \leq 0$, então o recobrimento universal de M^n, $\tilde{M}$, é difeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

b.1.2. (Cheeger-Gromoll, [CG1]) Se M^n é uma variedade aberta, com $K_M \geq 0$, então possui uma subvariedade S totalmente geodésica tal que M é difeomorfa ao espaço fibrado normal de S em M. S é chamada de "alma" de M.

b.1.3. (Toponogov, [T2]) M^n com $K_M \geq 0$ é isométrica ao produto direto $M \equiv N \times \mathbb{R}$, se M admite uma reta $l \subset M$.

b.1.4. (Greene-Wu, [GW2]) Dada (M^n, p) uma variedade aberta, com ponto de base p, $K_M \geq 0$ e decrescimento (decaimento) quadrático no infinito: para qualquer -sequência $\{q_n\}$ com $\rho_n := d_M(p, q_n) \to \infty$ e qualquer 2-plano $\sigma_n \subset T_{q_n}M$ temos $\lim K_M(\sigma_n)\rho_n^2 = 0$ quando $\rho_n \to \infty$, então M^n é isométrica a $\mathbb{R}^n$.

b.1.5. (Marenich, [Mr4]) Seja (M^n, p), uma variedade aberta com ponto base p, satisfazendo $K_M \geq 0$ e $\lim K_M(\sigma_n) = 0$, se $\rho_n \to \infty$ onde σ_n e ρ_n são como em (b.1.4) acima, então o recobrimento universal de M^n, $\tilde{M}$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

c.1. Teoremas de finitude

c.1.1. (Grove-Petersen, [GrP]) dados um inteiro $n \geq 2$, reais positivos d, V e κ um número real, a coleção das n-variedades fechadas que admitem métricas satisfazendo $diam(M) \leq D$, $Vol(M) \geq V$ e $K_M \geq \kappa$ contém somente um número finito dos tipos de homotopia.

c.1.2. (Gromov, [G1]) dados um inteiro $n \geq 2$, números reais $d > 0$, κ e um corpo qualquer $\mathbb{F}$, se $diam(M) \leq d$ e $K_M \geq \kappa$, então a soma dos números de Betti de M, $\sum b_i(M, \mathbb{F}) \leq const(n, \kappa.d^2)$.

d.1. Teoremas de compacidade

d.1.1. (Gromov, [GLP]) Dados um inteiro $n \geq 2$, reais $D > 0$, κ, então a classe das variedades n-dimensionais, compactas, satisfazendo $diam(M) \leq D$, $Vol(M) \geq V$ e curvatura seccional $|K_M| \leq \kappa^2$, com relação à topologia de Lipischitz, é relativamente compacta na classe das variedades $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, para todo $\alpha \in (0,1)$, n-dimensionais, com métricas $\mathcal{C}^0$.

0.2.2. Resultados para variedades com restrição sobre a curvatura de Ricci.

a.2. Teoremas de reconhecimento

a.2.1. (Shiohama, [S]) Sejam dados um inteiro $n \geq 2$ e reais $v > 0$, κ. Então existe uma constante $\delta = \delta(n, \kappa, v) > 0$ tal que se M^n é uma variedade com $Ric_M \geq (n-1)$, $K_M \geq -\kappa^2$, $Vol(M) \geq v$ e $diam(M) \geq \pi - \delta$ implica que M^n é homeomorfa a S^n (sem a restrição $K_M \geq -\kappa^2$, existem contra-exemplos devidos a Anderson e Otsu, [An], [O]).

a.2.2. (Cheng, [Cg]) Seja M^n tal que $Ric_M \geq (n-1)$ e $diam(M) = \pi$, então M^n é isométrica a S^n.

b.2. Teoremas de estrutura

b.2.1. (Bonnet-Myers,[Gr1]) Dada uma variedade Riemanniana M^n, com $Ric_M \geq (n-1)$, então $diam(M) \leq \pi$ e o grupo fundamental $\pi_1(M)$ é finito.

b.2.2. (Lohkamp, [Lo])) Dada variedade M^n, com $n \geq 3$ admite uma métrica g com $-c(n) \leq Ric_{(M,g)} \leq c(n)$.

b.2.3. (Cheeger-Gromoll, [CG2])) M, uma variedade aberta com $Ric_M \geq 0$, é isométrica ao produto $N \times \mathbb{R}$, se M admite uma reta.

b.2.4. (Colding, [Co]) Se $Ric_M \geq 0$, e o cone tangente no infinito $T_\infty(M)$ for isométrico a $\mathbb{R}^n$, então M^n é isométrica a $\mathbb{R}^n$

b.2.5. (do Carmo-Xia, [dCX]) Dados $\alpha > 0$, $i_0 > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Então existe $\varepsilon = \varepsilon(n, \alpha, i_0)$ tal que para toda n-variedade com $Ric_M \geq 0$, $inj_M \geq i_0$, $\alpha_M \geq \alpha$ e

$$\frac{Vol(B(p,r))}{w_n r^n} - \alpha_M < \frac{\varepsilon}{r^{n-1}} \qquad \text{para algum } p \in M^n \text{ e todo } r > 0 \tag{0.2}$$

tem-se que M^n é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$ (onde $\alpha_M = \lim_{r\to\infty} Vol(B(p,r))/w_n r^n$).

c.2. Teoremas de finitude

c.2.1.1. (Sha-Yang, [SY]) Dados números inteiros positivos n, $m \geq 2$ e N, a soma conexa $\Sigma := (S^m \times S^n)\# \ldots \#(S^m \times S^n)$ de N termos admite uma métrica com $Ric > 0$.

c.2.1.2. A variedade aberta Σ definida pela soma conexa de $\mathbb{R}^{m+n}$ com a soma conexa de infinitos termos $S^m \times S^n$, $\Sigma := \mathbb{R}^{m+n}\#(S^m \times S^n)\# \ldots \#(S^m \times S^n)\# \ldots$, admite métrica com $Ric_\Sigma > 0$

c.2.2. (Anderson-Cheeger, [AC])) O conjunto $\mathcal{M}^{i_0}_{H,V} := \{M^n$ variedade compacta, com $Ric_M \geq H$, $Vol(M) \leq V$, $inj_M \geq i_0\}$ tem um número finito de tipos de difeomorfismos (i.e., classes não difeomorfas).

d.2. Teoremas de compacidade

d.2.1. (Anderson, [An2]) Dados reais positivos λ, i_0, D e um inteiro $n \geq 2$, o espaço $\mathcal{M}(n,\ \lambda,\ i_0,\ D) := \{M^n \text{ com } |Ric_M| \leq \lambda,\ inj(M) \geq i_0,\ diam \leq D\}$ é compacto na topologia $\mathcal{C}^{1,\alpha}$.

0.3. Principais resultados da Tese

Seguindo a "filosofia" dos resultados acima, o primeiro resultado que apresentaremos, mostra que os dados geométricos: (a) dimensão da variedade e (b) curvatura de Ricci não negativa, não garantem que a dimensão da fronteira ideal (dado geométrico global) pode ser determinada de maneira única (em [P] prova-se que as fronteiras ideais de uma variedade satisfazendo (a) e (b) não necessitam ser isométricas - como acontece quando se impõe que a curvatura seccional é ≥ 0 -, mas nada se afirma sobre a dimensão das fronteiras ideais). Mais precisamente:

0.3.A. Teorema.
Existe uma métrica g, no espaço Euclidiano 8-dimensional $\mathbb{R}^8$, tal que $(\mathbb{R}^8, g)$ é uma variedade com curvatura Ricci não negativa e com fronteiras ideais de diferentes dimensões. Para alguma sequência $s_l \to \infty$ temos $\mathbb{R}^8(\infty)\{s_l\} = S^3$, enquanto para outra $r_m \to \infty$ vale que $\mathbb{R}^8(\infty)\{r_m\} = \{pt\}$.

Por outro lado, dados geométricos que impõem condições como curvatura minimal radial não negativa ou curvatura minimal radial assintoticamente não negativa, apesar de não serem tão restritivos como curvatura seccional não negativa (porém são mais restritivos que curvatura de Ricci não negativa), permitem-nos demonstrar uma série de resultados de rigidez, e inclusive existência e unicidade das fronteiras ideais.

0.3.B. Definição.
Dizemos que uma variedade Riemanniana pontuada (M^n, o, g) possui curvatura minimal radial assintoticamente não negativa se existe uma função não negativa $k : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que suas curvaturas minimais radiais K_o^{min} satisfazem

$$K_o^{min}(p) \geq -k(d_M(o,p)) \qquad e \qquad \int_0^\infty sk(s)\ ds < \infty \tag{0.3.1}$$

para qualquer ponto $p \in M^n$. Denotamos uma variedade satisfazendo a propriedade acima por (M^n, o, g, k), ou também, dizemos que M^n é uma variedade CRANN.

Para o estudo destas variedades é interessante considerarmos espaços de comparação convenientes: superfícies rotacionalmente simétricas $M^2_{-k} = (\mathbb{R}^2, 0, ds^2 = dt^2 + J_k(t)^2 d\phi^2)$ (onde (t,ϕ) são coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$, e J_k é a solução da equação: $J_k'' - kJ_k = 0$ satisfazendo $J_k(0) = 0$ e $J_k'(0) = 1$).

A condição integral sobre a curvatura permite-nos introduzir números importantes (os quais podem ser vistos como invariantes globais da variedade) definidos por $b_0(k) := \int_0^\infty tk(t)\ dt$ e $b_1(k) := \int_0^\infty u(t)\ dt$, onde u é solução da equação de Ricatti: $u' = u^2 - k$.

E, conforme anunciamos, vale um Teorema de Comparação de Toponogov para elas, que estudaremos no Capítulo 2:

0.3.C. Teorema (Teorema de comparação de Toponogov generalizado, ou TCTG).
Seja (M^n, o, g, k) uma variedade com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa (CRANN). Sob as hipóteses:

(H1) $\triangle(o, p_1, p_2)$ é um triângulo geodésico (generalizado) em (M^n, o, g);

(H2) em cada ponto $p \in M^n$ as curvaturas minimais radiais são limitadas inferiormente por $-k(d_M(o,p)) \leq 0$, onde $k : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma função contínua monótona e não negativa satisfazendo $\int_0^\infty tk(t)\, dt < \infty$;

(H3) o polo $\overline{o}$ de M^2_{-k} será um dos vértices do triângulo de comparação $\overline{\triangle}(\overline{o},\overline{p}_1,\overline{p}_2)$

então valem as seguintes conclusões:

(a) se $l_i = \overline{l}_i$ para todos os lados, então $\angle p_i \geq \angle \overline{p}_i$, para $i = 1,2$. E se $\angle p_1 = \angle \overline{p}_1$, então existe uma parte de superfície totalmente geodésica em M^n, delimitada pelos lados do triângulo, e de curvatura $-k(t)$ nos pontos distando t de p_0.

(b) se $l_0 = \overline{l}_0$, $l_1 = \overline{l}_1$, e $\angle p_2 \leq \angle \overline{p}_2$, então $l_2 \leq \overline{l}_2$.

(c) dada uma dobradiça (hinge) $(\gamma_1, \gamma_2, \theta)$ em M^n, onde $\theta = \angle(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$ então existe dobradiça em M^2_{-k}, $(\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2}, \theta)$ com $L(\gamma_i) = L(\overline{\gamma_i}) = l_i$, $i = 1,2$ e tal que

$$d_M(\gamma_1(l_1), \gamma_2(l_2)) \leq d_{-k}(\overline{\gamma_1}(l_1), \overline{\gamma_2}(l_2)) \tag{0.3.2}$$

onde $d_{-k}(.,.)$ é a função distância em M^2_{-k}. No caso de valer a igualdade, na desigualdade acima, então existe uma parte de superfície totalmente geodésica, S, limitada por γ_1, γ_2 e uma geodésica minimal ligando $\gamma_1(l_1)$ a $\gamma_2(l_2))$ tal que em cada ponto $p \in S$ a curvatura vale $-k(d_M(o,p))$.

Como consequências do TCTG

0.3.D. Teorema.
Sob as mesmas hipóteses do teorema anterior (TCTG), e assumindo que a geodésica que conecta p_1 a p_2, $\gamma_0 : [0,l] \to M^n$ é minimizante, valem as seguintes propriedades

(a) $d_M(o,\gamma_0(t)) \geq d_{-k}(\overline{o},\overline{\gamma}_0(t))$ para cada $t \in [0,l]$.

(b) (Convexidade de Alexandrov) Seja $\overline{\theta}_{s,t}$ o ângulo em $\overline{o}$ do triângulo de comparação $\overline{\triangle}(\overline{o},\overline{x}_s,\overline{y}_t)$ em M^2_{-k}, correspondendo a $\triangle(o,\sigma_1(s),\sigma_2(t))$ em M^n. Então $\overline{\theta}_{s,t}$ é uma função monótona não crescente em s, t.

Seguem também os resultados

0.3.E. Teorema.
Toda variedade CRANN, (M^n, o, g, k), possui no máximo um número finito de fins, em particular, o conjunto de pontos críticos da função distância de o, $d_M(o,.)$ é limitado e consequentemente, M^n é finitamente conexa. Podemos estimar o número de fins de M^n:

$$\#\{\text{fins } \mathcal{F} \text{ de } M^n\} \leq 2\pi^{n-1} \exp((n-1)b_1(k)) \tag{0.3.3}$$

onde $b_1(k)$ é o invariante definido na observação que segue a Definição 0.3.B (cf. também Lema 2.C.6-(b)).

0.3.F. Teorema.
Seja (M^n, o, g, k) variedade CRANN. Então, existe um número $\varepsilon > 0$ tal que se $b_0(k) < \varepsilon$, então M^n tem no máximo dois fins.

0.3.G. Teorema.

Nas mesmas hipóteses do Teorema 0.3.F., dado $\delta > 0$, existe um número $\varepsilon > 0$ tal que se $b_0(k) < \varepsilon$, e se o crescimento de volume Euclidiano satisfaz

$$\alpha_M := \lim_{r\to\infty} \frac{Vol(B(o,r))}{w_n r^n} \geq \frac{1}{2} + \delta \tag{0.3.4}$$

onde w_n é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$, então M^n é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

0.3.H. Teorema.

Para cada variedade (M^n, o, g, k) existe um único cone assintótico.

0.4. Ferramentas Básicas

Apresentaremos agora, as principais teorias, técnicas e nomenclaturas utilizadas para o desenvolvimento desta Tese. Começamos primeiramente com os

0.4.A. Teoremas de Comparação.

A principal idéia que envolve a Teoria de Comparação, é a de sermos capazes de estimar quantidades geométricas básicas como funções da distância, funções do volume, etc, para variedades Riemannianas gerais, sujeitas a restrições sobre sua curvatura, em termos das correspondentes quantidades, para formas espaciais - as quais possuem uma geometria muito mais simples de modo que podemos, com mais facilidade, calcular as desejadas quantidades. Entre os Teoremas de Comparação, talvez o mais conhecido, seja o

0.4.A.1. Teorema de Comparação de Rauch, [Gr1].

Sejam M^{n+k}, $\overline{M}^n$ duas variedades Riemannianas, $c : [0,l] \to M^{n+k}$, $\overline{c} : [0,l] \to \overline{M}^n$ duas geodésicas com mesma velocidade (i.e. $\|c'(t)\| = \|\overline{c}'(t)\|$, qualquer que seja t), c não tem pontos conjugados a $c(0)$ ao longo de c, e as curvaturas seccionais de M^{n+k}, $\overline{M}^n$ restritas a c, $\overline{c}$ satisfazem:

$$K_M(v, c'(t)) \geq K_{\overline{M}}(\overline{v}, \overline{c}'(t)) \tag{0.4.1}$$

quaisquer que sejam $v \in T_{c(t)}M$, $\overline{v} \in T_{\overline{c}(t)}\overline{M}$

Sejam Y, $\overline{Y}$ dois campos de Jacobi ao longo de c e $\overline{c}$ respectivamente, tais que $Y(0) = a.c'(0)$, $\overline{Y}(0) = a.\overline{c}'(0)$, $\langle Y'(0), c'(0)\rangle = \langle \overline{Y}'(0), \overline{c}'(0)\rangle$, e $\|Y'(0)\| = \|\overline{Y}'(0)\|$. Então

$$\|Y(t)\| \leq \|\overline{Y}(t)\|, \qquad 0 \leq t \leq l \tag{0.4.2}$$

Além disso, se para algum $t_0 \in (0,l]$, tem-se $\|Y(t_0)\| = \|\overline{Y}(t_0)\|$, então $K_M(v, c'(t)) = K_{\overline{M}}(\overline{v}, \overline{c}'(t))$ para todos $t \in [0, t_0]$, $v_t \in T_{c(t)}M$ e $\overline{v}_t \in T_{\overline{c}(t)}\overline{M}$

Para enunciar o Teorema de Comparação de Toponogov, necessitamos da seguinte

0.4.A.2. Definição, [Gr1].

Um triângulo geodésico $\triangle(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ em uma variedade Riemanniana M^n é uma configuração de três geodésicas normais $\gamma_i : [0, l_i] \to M^n$ (que são os lados do triângulo) tais que

$$\gamma_i(l_i) = \gamma_{i+1}(0)\ , \tag{0.4.2}$$

$$l_i + l_{i+1} \geq l_{i+2} \tag{0.4.3}$$

onde os índices estão sendo tomados módulo 3. Os pontos $p_i = \gamma_{i+2}(0)$ são chamados de vértices do triângulo e $\alpha_i = \angle(-\dot{\gamma}_{i+1}(l_{i+1}), \dot{\gamma}_{i+2}(0))$ os ângulos correspondentes.

Uma dobradiça (hinge) $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ em uma variedade Riemanniana é uma configuração de duas geodésicas normais $\gamma_i : [0, l_i] \to M^n$ que partem do ponto $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ formando aí um ângulo $\alpha = \angle(\dot{\gamma}_1(0), \dot{\gamma}_2(0))$

0.4.A.3. Teorema de Comparação de Toponogov, [Gr1].

Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K_M > \kappa$

(a) Seja $\triangle(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ um triângulo geodésico em M^n. Suponhamos que γ_1, γ_3 sejam minimais e, se $\kappa > 0$, suponhamos que $L(\gamma_2) = l_2 < \pi/\sqrt{\kappa}$. Então existe um triângulo geodésico $\triangle(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3)$ (chamado de triângulo de comparação) em M^2_κ (espaço de comparação), tal que

$$L(\gamma_i) = L(\tilde{\gamma}_i) \quad \textbf{para} \quad i = 1, 2, 3 \tag{0.4.4}$$

e

$$\tilde{\alpha}_1 \leq \alpha_1 \,, \qquad \tilde{\alpha}_3 \leq \alpha_3 \tag{0.4.4'}$$

(b) Seja $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ uma dobradiça em M^n. Suponhamos que γ_1 é minimal, e se $\kappa > 0$, suponhamos $L(\gamma_2) < \pi/\sqrt{\kappa}$. Seja $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \alpha)$ uma dobradiça (α é chamado de ângulo de comparação) em M^2_κ tal que $L(\gamma_i) = L(\tilde{\gamma}_i) = l_i$ para $i = 1, 2$. Então

$$d(\gamma_1(l_1), \gamma_2(l_2)) \leq d_\kappa(\tilde{\gamma}_1(l_1), \tilde{\gamma}_2(l_2)) \,. \tag{0.4.5}$$

Outro teorema de comparação, fundamental, quando se está estudando variedades Riemannianas com curvatura de Ricci limitada inferiormente é o

0.4.A.4 Teorema de Comparação de Bishop-Gromov, ([Gr1]).

Seja M^n uma n-variedade Riemanniana completa, com curvatura $Ric_M \geq (n-1)\kappa$.

(a) Para quaisquer $p \in M$, $\overline{p} \in M^n_\kappa$ e vetores unitários $v \in T_pM$, $\overline{v} \in T_{\overline{p}}M^n_\kappa$, a função

$$f(t) = \frac{\det(d \, \exp_p tv)}{\det(d \, \exp_{\overline{p}} t\overline{v})} \tag{0.4.6}$$

é uma função monótona não crescente.

(b) A desigualdade abaixo - chamada de desigualdade de Bishop-Gromov

$$\frac{Vol(B(p,r))}{Vol(B(\overline{p},r))} \geq \frac{Vol(B(p,R))}{Vol(B(\overline{p},R))} \tag{0.4.7}$$

é válida para todo $0 < r \leq R$.

Um outro Teorema de Comparação importante, devido a Cheeger é o Teorema de Comparação dos Laplacianos. Antes precisamos de uma definição:

0.4.A.5. Definição, [C2].

Uma barreira superior para uma função contínua f em um ponto x_0, é uma função C^2, g, definida em uma vizinhança de x_0, tal que $g \geq f$ e $g(x_0) = f(x_0)$.

0.4.A.6. Definição, [C2].

Dizemos que $\triangle f(x_0) \leq a$ (e $\triangle(-f(x_0)) \geq -a$) no sentido de barreira se para todo $\epsilon > 0$, existe uma barreira superior $f_{x_0,\epsilon}$ para f em x_0 com

$$\triangle f_{x_0,\epsilon} \leq a + \epsilon \, . \tag{0.4.8}$$

0.4.A.7. Teorema de Comparação dos Laplacianos [C2].

Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, com

$$Ric_M \geq (n-1)H \, . \tag{0.4.9}$$

(a) Se $f(r)$ satisfaz $f' \geq 0$, então no sentido de barreira,

$$\triangle f(r(x)) \leq \triangle_H f(r)|_{r=r(x)}. \tag{0.13}$$

onde $r(x) = dist(p,x)$, para um p fixo, e $\triangle_H$ é o Laplaciano na forma espacial (simplesmente conexa) M^n_H

(b) Se $f(r)$ satisfaz $f' \leq 0$, então no sentido de barreira,

$$\triangle f(r(x)) \geq \triangle_H f(r)|_{r=r(x)}. \tag{0.4.10}$$

A razão de havermos definido barreira superior, é para fazer o teorema acima ser válido inclusive nos pontos x pertencentes ao cut locus de p, onde a função distância deixa de ser diferenciável.

0.4.B. Teoria de convergência de Gromov-Hausdorff -principais propriedades .

Este conceito de fundamental importância em recentes trabalhos de Geometria Riemanniana Global foi definido por M. Gromov por volta de 1980, em seu trabalho "Groups of polynomial growth and expanding maps", [G2], onde estende a clássica distância de Hausdorff para o que, atualmente, chamamos de distância de Gromov-Hausdorff entre espaços métricos abstratos. Dois espaços métricos próximos, nesta métrica, não necessariamente são topologicamente semelhantes. Por outro lado, muito do que se tem feito é encontrar hipóteses geométricas e topológicas naturais que garantam que espaços próximos devem ser topologicamente parecidos. Assim, este conceito pode ser usado para mostrar como restrições geométricas em espaços métricos dão origem a restrições topológicas, o que tem permitido a obtenção de resultados expressivos em Geometria.

0.4.B.1. Distância de Gromov-Hausdorff .

Seja X um espaço métrico com métrica d^X, e A, $B \in X$, dois subconjuntos de X. A *distância de Hausdorff* entre estes subconjuntos é definida como

$$d^X_H(A,B) := \inf_{b\in B} \sup_{a\in A} d^X(a,b) + \inf_{a\in A} \sup_{b\in B} d^X(a,b) \tag{0.4.11}$$

ou, equivalentemente, se denotamos por $T_\varepsilon(A) = \{z \in X |\ d^X(z,A) < \varepsilon\}$ à ε-vizinhança de A, então

$$d^X_H(A,B) := \inf\{\varepsilon \mid T_\varepsilon(A) \supset B \text{ e } T_\varepsilon(B) \supset A\} \tag{0.4.12}$$

Esta "métrica" é apenas uma pseudo-métrica já que $d_H^X(A,B)=0$ implica apenas que $\bar{A}=\bar{B}$. Contudo nós obtemos uma métrica se nos restringimos a subconjuntos fechados (em particular, compactos) de X. Apesar deste conceito não ser recente (podemos encontrar trabalhos relativos a este assunto datando das décadas de 40 e 50 -confronte, por exemplo [Be], [Bo]), muito do que foi feito apenas recentemente vem sendo redescoberto por geômetras interessados no uso da distância de (Gromov-) Hausdorff em Geometria. Uma das razões para tal interesse, decorre do fato que, ao invés de considerarmos variedades Riemannianas "individualmente", pode ser de grande ajuda ver estas como parte de uma coleção maior de variedades (ou espaços métricos).

Sejam agora, X, Y, Z espaços métricos e $i_{X,Z}: X \hookrightarrow Z$, $i_{Y,Z}: Y \hookrightarrow Z$ imersões isométricas de X e Y em Z, respectivamente. A distância de Gromov-Hausdorff entre X e Y, $d_{GH}(X,Y)$, é o ínfimo entre todas tais imersões, em todos os possíveis espaços métricos, Z, da distância de Hausdorff entre $i_{X,Z}(X)$ e $i_{Y,Z}(Y)$, i.e.

$$d_{GH}(X,Y) := \inf_Z \Big(\inf_{i_{X,Z}, i_{Y,Z}} d_H^Z(X,Y) \Big) \tag{0.4.13}$$

acima, estamos identificando X, Y com suas imagens isométricas.

Alguns exemplos ([Gr1]) ajudam compreender melhor:

0.4.B.2 Exemplo trivial 1.

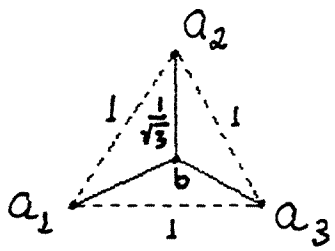
$$d_{GH}([0,1], \mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0 \tag{0.4.14}$$

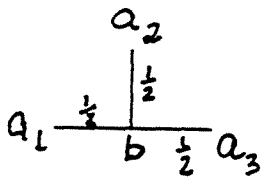
0.4.B.3. Exemplo trivial 2. *Seja $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ com métrica $d(a_i,a_j)=1$ para $i \neq j$ e seja $B=\{b\}$ um ponto. Para todos os mergulhos isométricos $f: A \to \mathbb{R}^n$, $g: B \to \mathbb{R}^n$ temos*

$$d_H^{\mathbb{R}^n}(f(A), g(B)) \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{0.4.15}$$

no entanto,

$$d_{GH}(A,B) = \frac{1}{2} \tag{0.4.16}$$





A importância deste conceito mora não tanto no fato de que temos uma função distância, mas em que temos uma forma de medir quando espaços métricos se assemelham. A definição seguinte, equivalente à acima, parece mais natural:

0.4.B.4 Definição.

$d_{GH}(X,Y) \leq \varepsilon$ se existe uma métrica em $X \amalg Y$ estendendo as métricas em X e Y e tal que $X \in T_\varepsilon(Y)$, $Y \in T_\varepsilon(X)$.

O espaço ambiente Z agora desapareceu e a questão é encontrar métricas na união disjunta de X e Y tal que X e Y parecem estar próximos um do outro.

No caso de espaços métricos compactos X, Y se $d_{GH}(X,Y) = 0$ então estes são isométricos. Desta maneira a distância de Gromov-Hausdorff é uma bem-definida distância no espaço de todas as classes de isometria de espaços métricos compactos, $\mathcal{M}$ (cf. [Pet]) - em particular, as (classes de isometria de) variedades Riemannianas compactas também estão contidas neste espaço.

Tendo estabelecido uma distância na classe dos espaços métricos compactos, é natural considerarmos sequências destes espaços, e estudarmos a estrutura dos limites, quando existem. Uma aplicação interessante, está em considerarmos subespaços particulares (por exemplo, o subespaço das variedades Riemannianas compactas munidas de restrições sobre sua curvatura seccional, ou curvatura Ricci, ou diâmetro, ou volume, ou raio de injetividade, etc) e estudarmos a estrutura geométrica das fronteiras destes subespaços, como por exemplo é feito em [F1], [F2]. Se temos uma sequência de espaços métricos compactos, definimos seu limite, na distância de Gromov-Hausdorff, como

0.4.B.5. Definição.
Uma sequência de espaços métricos compactos $\{X_i\}$ é dita convergir a um espaço métrico compacto X se $d_{GH}(X_i, X) \to 0$ conforme $i \to \infty$.

Apesar de ser muito difícil calcular a distância de Gromov-Hausdorff exatamente, sempre é possível obter limitantes superiores, conforme mostram os seguintes exemplos (extraídos do artigo de P. Petersen V [Pet]):

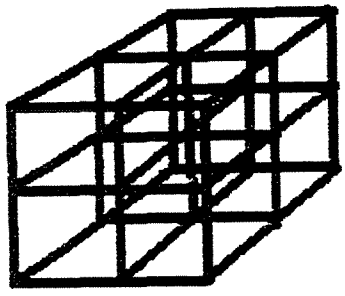
0.4.B.6. Exemplo 1. *Sejam X, Y espaços métricos compactos com diâmetro $\leq D$. Defina uma distância em $X \amalg Y$ como sendo $d(x,y) := D/2$ se $x \in X$, $y \in Y$. É fácil ver que esta é uma bem definida métrica na união disjunta e que $X \subset T_{\frac{D}{2}}(Y)$, $Y \subset T_{\frac{D}{2}}(X)$. Daí $d_{GH}(X,Y) \leq D/2$.*

0.4.B.7. Exemplo 2. *Sejam X, Y espaços métricos compactos. Suponha que existem $\varepsilon > 0$, $x_1, \ldots, x_n \in X$, $y_1, \ldots, y_n \in Y$ com $|d(x_i, x_j) - d(y_i, y_j)| < \varepsilon$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$, $T_\varepsilon(x_i) = X$, e $T_\varepsilon(y_i) = Y$. Defina $d(x,y) := \min\{d(x,x_i) + \varepsilon + d(y,y_i)|\ i = 1, \ldots, n\}$ para $x \in X$ e $y \in Y$. Fica assim definida uma métrica em $X \amalg Y$, com $X \subset T_{2\varepsilon}Y$ e $Y \subset T_{2\varepsilon}X$. Desta forma $d_{GH}(X,Y) < 2\varepsilon$.*

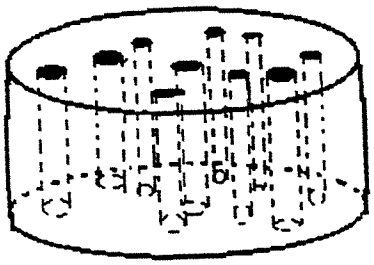
0.4.B.8. Exemplo 3 (Berger). *Considere a esfera unitária $S^3 \subset \mathbb{C}^2$, com S^1 agindo em S^3 da forma canônica. O grupo cíclico $\mathbb{Z}_n$ de ordem n está naturalmente contido em S^1. Denote por L_n, o espaço lenticular $S^3/\mathbb{Z}_n$. Conforme $n \to \infty$, $\mathbb{Z}_n$ "preenche" S^1 e $L_n \underset{\text{GH}}{\to} S^3/S^1 = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ com curvatura $= 4$. É possível também contrair a fibra S^1 em S^3 e, desta maneira, obter uma sequência de métricas g_ε em S^3 (as quais denominamos de esferas de Berger) tais que $(S^3, g_\varepsilon) \to S^2$. Este fenômeno é chamado de colapso pois a dimensão do limite é menor que a dimensão dos elementos da sequência.*

Mesmo quando consideramos sequências de espaços "razoáveis", os exemplos seguintes mostram alguns dos tipos de patologias que podem ocorrer nos espaços limites:

0.4.B.9. Exemplo patológico 1. [Pet]. *Considere no cubo unitário $[0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ a grade $X_n = \{(x,y,z) \in [0,1]^3$: pelo menos duas coordenadas são números racionais com n no denominador $\}$ e a superfície de gênero arbitrariamente alto $Y_n = \partial T_{2^{-n}}(X_n)$. Conforme $n \to \infty$, tanto X_n quanto Y_n preenchem $[0,1]^3$, ou seja $X_n \to [0,1]^3$, $Y_n \to [0,1]^3$. Este fenômeno é chamado de explosão, pois o espaço limite tem dimensão maior que os elementos da sequência.*



0.4.B.10. Exemplo patológico 2(queijo suiço)[C2]. *Considere a superfície de um bloco cilíndrico sólido com um grande número, j,de cilindros (com os raios tendendo a 0) removidos*



Os ângulos (quinas) podem ser suavizados de modo a obtermos uma variedade M_j^2, com $Vol(M_j^2) \geq V$, $diam(M_j^2) \leq d$, qualquer que seja j, mas com curvatura ilimitada inferiormente, $\inf K_{M_j^2} \to -\infty$, *conforme* $j \to \infty$. *Para estes espaços, o primeiro número de Betti é* $b_1(M_j^2) = 2j \to \infty$, *se* $j \to \infty$. *Sob um outro ponto de vista, podemos reescalar as métricas da sequência* $\{M_j^2\}$ *de modo que* $K_{M_j^2} \geq -1$, *mas então* $Vol(M_j^2) \to \infty$ *e, consequentemente,* $diam(M_j^2) \to \infty$.

É possivel controlar estes (e outros) tipos de patologias quando impomos certas restrições aos espaços considerados, i.e., existem resultados de regularidade e pré-compacidade que garantem uma certa regularidade aos espaços limite ou, pelo menos, a existência de subsequências convergentes (cf [GLP], [Pet], [Gr1], [C2]).

Quando estudamos variedades abertas, não mais é verdade dizer que a d_{GH} é, de fato uma distância, e, por isso, é necessário ter um pouco de cuidado para definir o que se entende por limite de uma sequência de variedades abertas. Afim de contornar este problema, dada uma família, digamos $\mathcal{A}$, de variedades abertas de dimensão finita, fixamos um ponto em cada variedade $M \in \mathcal{A}$ a ser comparada pela d_{GH} e comparamos as bolas centradas nestes pontos (como as bolas fechadas são compactas, então podemos usar a d_{GH} como uma distância de fato. Por esta razão, ao estudarmos limites de variedades abertas, na distância de Gromov-Hausdorff, consideraremos apenas variedades com ponto base (pontuadas), ou seja, trabalharemos com a classe dos espaços métricos pontuados. Seja $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma família de espaços métricos e $a_m \in X_m$ um ponto

0.4.B.11 Definição.

Diz-se que $(X_m,\ a_m)$ *tende a* $(X,\ a)$ *no sentido de Gromov-Hausdorff se para todo* $r > 0$, $B(a_n,\ r+\epsilon_n)$ *tende a* $B(a,\ r)$ *no sentido de Gromov-Hausdorff para uma sequência* $\epsilon_n \to 0$.

0.4.B.12 Definição.

Uma família de espaços métricos de comprimento, pontuados (X_i, x_i) *é pré-compacta se para todo* $R > 0$, *a família* $B^{X_i}(x_i, R)$ *é pré-compacta para a distância de Gromov-Hausdorff.*

Onde, por *Espaço Métrico de Comprimento*, entendemos um espaço métrico (X, d), tal que a distância entre dois pontos quaisquer é dada pelo ínfimo dos comprimentos de todos os caminhos que conectam estes pontos (existe uma vasta literatura acerca da geometria que envolve tais espaços, veja por exemplos trabalhos de Plaut [Pl], Berestrowski [Bw1], [Bw2] e Burago-Gromov-Perelman [BGP]).

Dentre os vários resultados de pré-compacidade existentes, vale citar, por exemplo:

0.4.B.13 Proposição, [Pet].

Se $\mathcal{M}$ *é a classe de todos os espaços métricos compactos, então* $(\mathcal{M}, d_{GH})$ *é completo*

0.4.B.14 Proposição, [Gr1].

Sejam dados $\kappa \in \mathbb{R}$ e $D > 0$. A classe de todas as variedades Riemannianas compactas de dimensão n, (M^n, g), com $\mathrm{Ric}_{(M,g)} \geq (n-1)\kappa g$, e $\mathrm{diam}(M) \leq D$, forma um subconjunto pré-compacto na distância de Gromov-Hausdorff.

Talvez o mais importante resultado acerca de pré compacidade, seja o Teorema de Compacidade de Gromov. Para enunciá-lo precisamos, antes, definir alguns conceitos. Sejam X, um espaço métrico compacto e $\varepsilon > 0$ um real fixo, definimos $\mathrm{Cov}(X,\varepsilon) := \min\{n|\ X$ é coberto por n ε-bolas fechadas $\}$ e $\mathrm{Cap}(X,\varepsilon) := \max\{n|\ X$ contém n $\frac{\varepsilon}{2}$-bolas disjuntas $\}$. Claramente $\mathrm{Cov}(X,\varepsilon) \leq \mathrm{Cap}(X,\varepsilon)$. Se X e Y são dois espaços métricos compactos com $d_{GH}(X,Y) < \delta$ então não é difícil verificar que

$$\mathrm{Cov}(X,\varepsilon) \geq \mathrm{Cov}(Y,\varepsilon+2\delta) \tag{0.4.17}$$

$$\mathrm{Cap}(X,\varepsilon) \geq \mathrm{Cap}(Y,\varepsilon+2\delta) \tag{0.4.18}$$

Com isto, temos o

0.4.B.15 Teorema de Compacidade de Gromov,[G2, Pet].

Seja $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ uma classe de espaços métricos compactos. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\mathcal{C}$ é pré-compacta, i.e., toda sequência em $\mathcal{C}$ contém uma subsequência que converge em $\mathcal{M}$.

(b) Existe uma função $N : (0,\beta) \to (0,\infty)$ tal que: $\mathrm{Cap}(X,\varepsilon) \leq N(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in (0,\beta)$ e $X \in \mathcal{C}$.

(c) Existe uma função $N : (0,\beta) \to (0,\infty)$ tal que: $\mathrm{Cov}(X,\varepsilon) \leq N(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in (0,\beta)$ e $X \in \mathcal{C}$.

Um outro Teorema de Pré-compacidade de grande importância para o estudo da classe das variedades com curvatura Ricci limitada inferiormente (e dos espaços que são limite de Gromov-Hausdorff de sequências de variedades pertencentes a esta classe) é o

0.4.B.16 Teorema. [GLP]

Sejam n, um inteiro positivo e $r \in \mathbb{R}$, um real fixado. A classe de todas as variedades Riemannianas pontuadas de dimensão n, satisfazendo à desigualdade

$$Ric_{(M,g)} \geq (n-1)rg \tag{0.4.19}$$

onde g é a métrica Riemanniana de M, formam um conjunto pré- compacto para a distância de Gromov-Hausdorff pontuada.

0.4.C. Geometria no infinito, invariantes globais no infinito.

Ao estudarmos a geometria das variedades abertas, um dos problemas básicos consiste em conhecer o comportamento assintótico destes espaços, quer dizer, se fixamos um ponto qualquer, digamos p, de uma dada variedade Riemanniana M^n, o que ocorre com os domínios exteriores a bolas centradas em p, $M^n \setminus B(p,r)$, conforme r torna-se arbitrariamente grande? Mais ainda, conhecendo-se o comportamento asssintótico de M^n é possivel obter informações sobre M^n como um todo? Muito se tem feito neste sentido (veja, por exemplo [GK], [GP], [Co], [Sy2], [dCX]). As principais ferramentas para realizar este estudo são: Teoria dos Pontos Críticos para Funções Distância [Gr2] , Teoremas de Comparação tipo Toponogov, estudo de Invariantes Globais no Infinito e sua relação com a geometria da variedade. No estudo do comportamento assintótico das variedades abertas, o conhecimento de invariantes globais no infinito nos permite inferir, não somente informações acerca do comportamento da variedade no infinito, como também da variedade como um todo. Alguns destes invariantes são: Cones Tangentes no Infinito, Fronteiras Ideais, Crescimento do Volume no Infinito, Curvatura no Infinito. A seguir, definiremos estes invariantes e daremos algumas das propriedades que eles satisfazem.

0.4.C.1. Crescimento do volume no infinito.

O Teorema de Comparação de Bishop-Gromov diz-nos que se M^n é uma variedade (aberta) com curvatura Ricci limitada inferiormente $Ric_M \geq (n-1)k$, então, a função

$$r \mapsto \frac{Vol(B(p,r))}{Vol_k(B(\overline{p},r))} \leq 1 \tag{0.4.20}$$

é monótona não crescente e compara o crescimento de volume de M^n com o de M^n_k. O número α_M definido por

$$\alpha_M := \lim_{r\to\infty} \frac{Vol(B(p,r))}{Vol_k(B(\overline{p},r))} \leq 1 \tag{0.4.21}$$

(o qual independe de p) é um invariante geométrico chamado de *Crescimento do Volume no Infinito.*

0.4.C.2 Curvatura no infinito.

Outro invariante que descreve o comportamento de uma variedade (M^n, g) no infinito é a "curvatura no infinito", K_∞ de M^n, definida como sendo o limite (caso ele exista)

$$K_\infty := \lim_{\rho\to\infty} \rho^{-2} K(\rho) \tag{0.4.22}$$

onde $K(\rho)$ é o máximo do valor absoluto das curvaturas seccionais de M^n sobre pontos que distam ρ de algum ponto base o.

0.4.C.3. Cones tangentes no infinito, fronteiras ideais.

0.4.C.3.1. Definição.

Seja (M^n, x_0, g) uma n-variedade Riemanniana pontuada e aberta. Definimos o Cone Tangente no Infinito , ou Cone Assintótico de M^n, $T_\infty(M^n, g)$, sob uma sequência divergente, $r_i \to \infty$, de números reais, como sendo o limite, no sentido de Gromov-Hausdorff, da sequência de bolas fechadas unitárias munidas do tensor métrico g de M^n, reescalado por um fator r_i^{-2}, $\{\overline{(B(x_0,1)}, r_i^{-2}g)\}_{i\in\mathbb{N}}$, e

$$T_\infty(M^n, g) := \lim_{GH} (\overline{B(x_0,1)}, r_i^{-2} g) \tag{0.4.23}$$

se tal limite existe. Chamamos a fronteira de $T_\infty(M^n,\ g)$ de uma Fronteira Ideal de M^n, e a denotamos por $M^n(\infty)$.

A definição de fronteira ideal acima dada, é devida a Gromov [G2], e por isso é também chamada de *fronteira de Gromov*, contudo, vale observar aqui que existem outras definições de fronteira ideal (fazemos uma pequena exposição deste tópico no apêndice a esta introdução).

Importante observar que o conhecimento da estrutura geométrica dos cones tangentes no infinito e fronteiras ideais de uma dada variedade aberta descrevem o possível comportamento de sua geometria no infinito, permite-nos inquirir informações topológicas e geométricas acerca da variedade e melhor compreensão da estrutura da classe das variedades de curvatura Ricci não negativa. Por exemplo, V. Marenich e G. P. Bessa, em [BM] mostraram os seguintes resultados:

0.4.C.3.2 Teorema (Marenich-Bessa).

Seja (M^n, p, g) uma variedade Riemanniana aberta, pontuada, satisfazendo

$$Ric_M \geq 0\,, \qquad K_M(q) \geq -const.d_M(p,q)^{-2} \tag{0.4.24}$$

Se $T_\infty(M,g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{can}})$ então $(M^n, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{can}})$ (i.e., são variedades isométricas).

onde g_{can} é a métrica canônica de $\mathbb{R}^n$.

No artigo de Colding [Co], o mesmo resultado foi obtido sem a hipótese de decaimento quadrático da curvatura seccional.

0.4.C.3.3. Teorema (Marenich-Bessa).

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana aberta n-dimensional com curvatura de Ricci não negativa. Se $T_\infty(M,g) = (\mathbb{R}^k, g_{\text{can}})$, $k \leq n$, então

(a) ou $M^n = \overline{M}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$, onde $\overline{M}^{n-k}$ é compacta,

(b) ou o fator sem-linha de $(M^n,\ g)$ tem dimensão $\dim(\overline{M}) \geq 3$ e máximo crescimento de diâmetro , i.e. $\lim_{r\to\infty} \frac{D_{\overline{M}}(x_0,\ r)}{r} = 2$.

(c) No caso de crescimento de diâmentro máximo, se garantimos que $T_\infty(\overline{M},\ g_{\overline{M}})$ é um cone métrico, então $T_\infty(\overline{M},\ g_{\overline{M}}) = C(N) \times \mathbb{R}$, onde $C(N)$ é um cone sobre um espaço de comprimento compacto N.

No teorema acima $D_{\overline{M}}(x_0, r)$ é o supremo sobre todos os diâmetros dos componentes de fronteira de $M^n - B(x_0,\ r)$.

Outros resultados interessantes sobre fronteiras ideais, cones tangentes no infinito e suas relações com a geometria da variedade podem ser encontrados nos trabalhos de A. Kasue [Ka1], L. Guijarro e V. Kapovitch [GK], W. Ballmann, M. Gromov and V. Schroeder [BGS], T. Shioya [Sy1], [Sy2], etc.

Não unicidade de $T_\infty(M^n, g)$:

Pelo Teorema de Pré-Compacidade de Gromov (0.4.B.16) o conjunto $\mathcal{M}^n_\alpha$ de todas as n-variedades Riemannianas com curvatura de Ricci limitada inferiormente por alguma constante $\alpha \in \mathbb{R}$ é pré-compacto na distância de Gromov-Hausdorff. Em particular, notemos que se (M^n, g) tem curvatura de Ricci não negativa, então uma deformação homotética desta métrica não altera o sinal da curvatura de Ricci, i.e., as variedades $(M^n, r_i^{-2}g)$ também possuem curvatura de Ricci não negativa, e por conseguinte, a sequência $\{(\overline{B(x_0,1)}, r_i^{-2}g)\}_{i\in\mathbb{N}}$ é pré-compacta, de onde segue a existência de $T_\infty(M,\ g)$ para alguma subsequência de $\{r_i\}$ (observe que se existir o limite, para alguma outra subsequência, não é verdade que os espaços limite sejam sequer homeomorfos). Por outro lado, se houvéssemos imposto a condição mais restritiva, sobre a curvatura seccional: $K_M \geq 0$, então, além da existência de $T_\infty(M,\ g)$, também valeria a unicidade. Mas, geralmente, $T_\infty(M,\ g)$ depende da particular sequência $r_i \to \infty$ que escolhemos. Denotemos tal dependência por $T_\infty(M,\ g)\{r_i\}$ e a fronteira ideal associada por $M^n(\infty)\{r_i\}$.

O primeiro exemplo de uma variedade aberta de curvatura Ricci não negativa, tendo diferentes cones no infinito é devido a G. Perelman [P] (no capítulo 1, temos uma descrição desta construção). Mas até agora, em todos tais exemplos, os cones no infinito têm uma mesma dimensão. Recentemente, em [CC], J. Cheeger e T. Colding construiram uma série de exemplos de fenômenos possíveis quando se considera limites de variedades (também no capítulo 1, encontramos a descrição de alguns destes possíveis fenômenos)

No capítulo 1, mostramos que a dimensão dos cones tangentes no infinito de uma variedade com curvatura Ricci não negativa pode variar (ou seja, os invariantes geométricos: dimensão da variedade e curvatura de Ricci não negativa não são suficientes para garantir unicidade da dimensão dos cones tangentes no infinito). Nosso resultado é o seguinte

0.4.C.3.4. Teorema.

Existe uma métrica g, no espaço Euclidiano 8-dimensional $\mathbb{R}^8$, tal que $(\mathbb{R}^8, g)$ é uma variedade com curvatura Ricci não negativa e com fronteiras ideais de diferentes dimensões. Para alguma sequência $s_l \to \infty$ temos $\mathbb{R}^8(\infty)\{s_l\} = S^3$, enquanto para outra $r_m \to \infty$ vale que $\mathbb{R}^8(\infty)\{r_m\} = \{pt\}$.

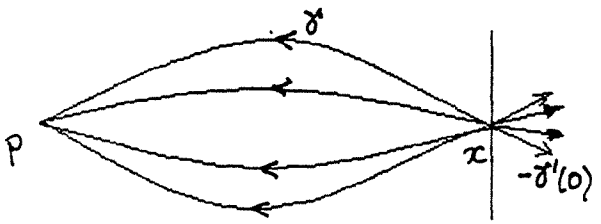
0.4.D. Pontos críticos da função distância.

Uma outra ferramenta de indiscutível importância no estudo da geometria global das variedades Riemannianas é o estudo dos pontos críticos da função distância. Fixado um ponto p em uma variedade Riemanniana M^n, talvez a função mais natural (depois das funções constantes) que se define sobre M^n seja a função distância $d_M(p,.) : M^n \to \mathbb{R}$ que, apesar de não ser diferenciável (no cut locus C_p de p), nos dá significativas informações acerca da geometria da variedade.

É um fato bem estabelecido que a topologia de uma variedade diferenciável está intimamente relacianada com suas funções diferenciáveis, através da Teoria de Morse (veja, por exemplo [Mi]). Aplicando este fato a funções relacionadas a uma variedade enquanto espaço métrico, tais como as funções distância, seria razoável esperarmos uma ponte entre a geometria e a topologia da variedade. O único problema neste programa, é que, em geral, as funções distância não são diferenciáveis e tampouco de Morse. Apesar disto, existe uma noção de pontos regulares e pontos críticos para funções distância e que é equivalente para funções diferenciáveis. A importância desta idéia, concebida no artigo de K. Grove e K. Shiohama [GS], reside na observação de que alguns dos princípios básicos válidos para funções diferenciáveis, também permanecem válidos para funções distância. Em particular, o conjunto de nível de um valor regular é uma subvariedade topológica, e também vale o Lema de Isotopia. Precisamente

0.4.D.1. Definição, [Gr2], [dCX].

Um ponto q ($\neq p$) é dito ser um ponto crítico de $r_p := d_M(p,.)$ se existe, para toda direção não nula, $v \in T_qM$, uma geodésica minimizante γ, conectando q a p e fazendo um ângulo $\angle(v, \gamma'(0)) \leq \pi/2$ com v (em outras palavras, o conjunto das direções definidas pelas geodésicas que conectam q a p em T_qM não pode estar contido em um único semi-espaço de T_qM). Um ponto x é dito ser regular se não for crítico, ou seja, se existe uma direção $v \in T_xM$ tal que todas as geodésicas minimizantes, conectando x a p posssuem suas direções iniciais contidas em um mesmo semi-espaço.



Valem os seguintes resultados, extraídos do artigo "Critical point theory for distance functions" de K. Grove, [Gr2] (veja também [C2])

0.4.D.2. Proposição.

Todo ponto máximo local de r_p é crítico.

0.4.D.3. Lema da Isotopia, [Gr2].

Suponha que o intervalo $[r_1, r_2] \subset \mathbb{R}_+$ *possua somente valores regulares da função distância* r_p. *Então todos os níveis* $r_p^{-1}(r)$, *com* $r \in [r_1, r_2]$, *são homeomorfos, e o anel*

$$R(r_1, r_2) = \overline{B(p, r_2)} \setminus B(p, r_1) = \{q \in M^n \mid r_1 \leq r_p(q) \leq r_2\} \tag{0.4.25}$$

é homeomorfo a $r_p^{-1}(r_1) \times [r_1, r_2]$

O Lema da Isotopia tem várias consequências importantes, como por exemplo

0.4.D.4. Teorema do Disco.

Seja M^n *uma n-variedade Riemanniana aberta. Se existe um ponto* $p \in M^n$ *tal que* r_p *não tem pontos críticos (além do próprio p), então* M^n *é difeomorfa a* $\mathbb{R}^n$.

0.4.D.5. Teorema da Esfera.

Seja M^n *uma n-variedade Riemanniana fechada. Se existe um ponto* $p \in M^n$ *tal que* r_p *tem um único ponto crítico (além do próprio p), então* M^n *é difeomorfa a* S^n.

O Teorema do Disco (resp. da Esfera) desempenha um papel de fundamental importância em questões em que se deseja verificar quando, sob certas condições geométricas, tem-se uma variedade difeomorfa a $\mathbb{R}^n$ (resp. S^n) e é usado, geralmente em presença do Teorema de Comparação de Toponogv, ou alguma generalização deste.

0.4.E. Produtos torcidos.

Uma das grandes fontes para a construção de exemplos e contra-exemplos em Geometria Riemanniana são os produtos torcidos (warped products) de variedades. Produtos torcidos são, essencialmente, generalizações do produto Riemanniano de variedades. Mais precisamente:

0.4.E.1. Definição.

Sejam $(M_1^{n_1}, g_1)$, $(M_2^{n_2}, g_2)$ *variedades Riemannianas e* $u : M_1^{n_1} \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável positiva. O produto torcido de* $(M_1^{n_1}, g_1)$ *por* $(M_2^{n_2}, g_2)$, *com função de torção dada por u, denotado por* $(M_1^{n_1} \times_u M_2^{n_2}$, *é definido como sendo a varidade produto* $(M_1^{n_1} \times M_2^{n_2}$ *munida de tensor métrico* $g_u := g_1 + u^2.g_2)$

Esta definição admite generalização para um número maior de fatores. Nesta Tese (capítulo 1), utilizamos uma generalização de produto torcido, desenvolvida por J. Cheeger e T. H. Colding em [CC], onde não precisamos ter um produto de variedades para, então, deformar a métrica do produto, mas consideramos uma variedade que admite uma decomposição de seu fibrado tangente como uma soma direta com algumas propriedades, e usando tal decomposição, deformamos, a métrica da variedade (em particular os resultados que são obtidos via tal decomposição também valem para produtos torcidos). Para a descrição da construção destes produtos torcidos generalizados, veja §1.C, no Capítulo 1.

0.5. Curvatura minimal radial limitada inferiormente e Curvatura minimal radial assintoticamente não negativa.

0.5.A. Curvatura minimal radial limitada inferiormente

O interesse no estudo de tais variedades iniciou com o trabalho de W. Klingenberg, "Manifolds with restricted conjugate locus" [K1], onde mostrou um Teorema da Esfera e estudou uma classe de variedades "semelhantes" à esfera) sem precisar fazer restrições sobre as curvaturas seccionais sobre todos os 2-planos de M^n, mas apenas sobre certos planos. A idéia fundamental que gerou do artigo de Klingenberg é que não é necessário, para a demonstração de alguns dos teoremas clássicos acerca da geometria das variedades com curvatura limitada inferiormente, que todas as curvaturas de uma variedade M^n sejam limitadas inferiormente, mas apenas que as curvaturas sejam limitadas sobre certos subconjuntos da Grassmaniana de 2-planos $G_{n,2}(M^n)$ (considerando a curvatura K_M como uma função sobre $G_{n,2}(M^n)$). Definimos então

0.5.A.1. Definição (Curvatura Minimal Radial).
Seja (M^n, o) uma variedade Riemanniana pontuada. A curvatura seccional K_M, de M^n restrita aos planos tangentes a geodésicas minimizantes partindo de o é chamada de curvatura minimal radial de M^n com ponto base o, e denotada por K_o^{min}.

Dado um número real κ, Dizemos que uma variedade Riemanniana pontuada, (M^n, o), tem curvatura minimal radial limitada inferiormente por κ, $K_p^{min} \geq \kappa$, se para qualquer ponto $q \in M^n$ e qualquer geodésica minimizante $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq t_0$ conectando o a q, a curvatura seccional de M^n, em qualquer 2-plano, $\sigma \subset T_qM$ (que denominaremos de plano radial) contendo $\dot{\gamma}(t_0)$ não é menor que κ.

Conforme foi notado recentemente por Y. Machigashira e K. Shiohama (cf. [MS], [Ms1], [Ms2]) alguns conhecidos resultados acerca da geometria das variedades com curvatura limitada inferiormente, como o Teorema de Comparação de Toponogov, Teorema da Esfera podem ser generalizados para variedades com curvatura minimal radial limitada inferiormente. Em particular, a generalização do Teorema de Comparação de Toponogov permitiu um significativo avanço no conhecimento da geometria das variedades com curvatura minimal radial limitada inferiormente. Fundamental, então, começar apresentando o principal resultado de Machigashira e Shiohama:

0.5.A.2. Teorema de Comparação de Toponogov-Machigashira-Shiohama (TCTMS).
Seja (M^n, o) uma variedade Riemanniana com curvatura minimal radial limitada inferiormente, $K_o^{min} \geq \delta$, para algum $\delta \in \mathbb{R}$.

(a) Comparação de triângulos: sejam γ_1 e γ_2 segmentos geodésicos em M, com $\gamma_1(0) = \gamma_2(1) = o$ e seja γ_0 um segmento geodésico minimizante tal que $\gamma_0(0) = \gamma_1(1)$ e $\gamma_0(1) = \gamma_2(0)$. Então existem segmentos geodésicos minimizantes $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ e $\tilde{\gamma}_0$ em M_δ^2 com $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(1)$, $\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(1)$ $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_2(1)$ e satisfazem as seguintes propriedades:

$$L(\gamma_i) = L(\tilde{\gamma}_i) \qquad \text{para} \quad i = 0, 1, 2 \tag{0.5.1}$$

e

$$\begin{aligned} \theta_1 &:= \angle(-\dot{\gamma}_1(1), \dot{\gamma}_0(0)) \geq \angle(-\dot{\tilde{\gamma}}_1(1), \dot{\tilde{\gamma}}_0(0)) =: \tilde{\theta}_1 \\ \theta_2 &:= \angle(-\dot{\gamma}_0(1), \dot{\gamma}_2(0)) \geq \angle(-\dot{\tilde{\gamma}}_0(1), \dot{\tilde{\gamma}}_2(0)) =: \tilde{\theta}_2 \end{aligned} \tag{0.5.2}$$

Mais ainda, se $\theta_1 = \tilde{\theta}_1 \neq \pi$, então existe uma parte de superfície totalmente geodésica de curvatura constante δ limitada por γ_1 e γ_0 e uma geodésica minimizante conectando p a $\gamma_0(1)$ (que não é necessariamente γ_2) em M.

(b) Comparação de dobradiças: para quaisquer geodésicas minimizantes $\sigma_i : [0,1] \to M$, com $i = 1,2$, partindo de p, i.e. $\sigma_1(0) = \sigma(0) = p$, temos os seguintes resultados

(b1) Sejam $\tilde{\sigma}_i : [0,1] \to M_2^\delta$, com $i = 1,2$, geodésicas minimizantes partindo de um mesmo ponto, tais que

$$L(\sigma_1) = L(\sigma_2) \qquad \text{para} \quad i = 1,2 \tag{0.5.3}$$

e

$$\angle(-\dot{\sigma}_1(0), \dot{\sigma}_2(0)) = \angle(-\dot{\tilde{\sigma}}_1(0), \dot{\tilde{\sigma}}_2(0)) \tag{0.5.4}$$

Então

$$d_M(\sigma_1(1), \sigma_2(1)) \leq d_\delta(\tilde{\sigma}_1(1), \tilde{\sigma}_2(1)) \tag{0.5.5}$$

onde d_M e d_δ são, respectivamente, as distâncias em M e M_δ^2

(b2) (Convexidade de Alexandrov). Seja $\tilde{\theta}_{s,t}$ o ângulo em $\tilde{p}$ do triângulo $\tilde{\triangle}(\tilde{p}, \tilde{x}_s, \tilde{y}_t)$ em M_δ^2 correspondendo ao triângulo $\triangle(p, \sigma_1(s), \sigma_2(t))$ em M. Então $\tilde{\theta}_{s,t}$ é monótona não crescente em s, t.

(b3) Se em (1), vale a igualdade, então existe uma parte de superfície totalmente geodésica de curvatura constante δ limitada por σ_1 e σ_2 e uma geodésica minimal conectando $\sigma_1(1)$ a $\sigma_2(1)$.

Por exemplo, como aplicação do TCTMS, temos que se M^n é uma variedade Riemanniana completa, compacta com $K_o^{min} \geq 1$, então $\text{rad}(M^n) \leq \text{diam}(M^n) \leq \pi$ e no caso de valer a igualdade implica que M^n é isométrica a esfera de curvatura constante 1, S^n. Vários resultados -do tipo teoremas de reconhecimento- foram recentemente obtidos por V. Marenich e S. Mendonça (veja [Mr1], [Mr2], [MM]). Para ilustrar, vejamos alguns destes resultados:

0.5.A.3. Teorema [MM].

Seja M^n uma variedade Riemanniana n-dimensional, compacta, sem fronteira, com curvatura minimal radial $K_p^{min} \geq 1$ e $\text{rad}(M^n) > \pi - \varepsilon$. Então:

(1) para ε suficientemente pequeno M^n é homeomorfa a S^n e

(2) para a distância de Gromov-Hausdorff entre M^n e S^n temos

$$d_{GH}(M^n, S^n) \leq C(\varepsilon) \tag{0.5.6}$$

para alguma função $C(\varepsilon) \to 0$ conforme $\varepsilon \to 0$

0.5.A.4. Teorema [MM].

Seja M^n uma variedade Riemanniana compacta, sem fronteira, com curvatura minimal radial $K_p^{min} \geq 1$, $\text{rad}(M^n) > \pi - \varepsilon$ e curvatura seccional limitada inferiormente, $K_{M^n} > -\kappa^2$. Então:

(1) para ε suficientemente pequeno M^n é difeomorfa a S^n e

(2) para a distância de Lipschitz entre M^n e S^n temos

$$d_{Lip}(M^n, S^n) \leq C(\varepsilon, \kappa) \tag{0.5.7}$$

para alguma função $C(\varepsilon, \kappa) \to 0$ conforme $\varepsilon \to 0$

0.5.A.5. Teorema [Mr1].
Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, compacta, sem fronteira, com curvatura minimal radial $K_p^{min} \geq 1$ e $\mathrm{Vol}(M^n) \geq \mathrm{Vol}(S^n) - \varepsilon$. Então $d_{GH}(M^n, S^n) < C(\varepsilon)$ para alguma função $C(\varepsilon) \to 0$, conforme $\varepsilon \to 0$

0.5.A.6. Teorema [Mr2].
Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, compacta, sem fronteira, com curvatura minimal radial $K_p^{min} \geq 1$ e $\mathrm{Vol}(M^n) > \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(S^n)$. Então M^n é homeomorfa a S^n

0.5.A.7. Teorema [Mr2].
Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, compacta, sem fronteira, com curvatura minimal radial $K_p^{min} \geq 1$ e $\mathrm{rad}(M^n) > \pi/2$. Então M^n é homeomorfa a S^n

No caso de variedades abertas com curvatura minimal radial limitada inferiormente, pouco está feito. Por exemplo, no artigo de M. P. do Carmo e C. Xia (cf. [dCX], [MS]) vemos demonstrado o seguinte:

0.5.A.8. Teorema.
Seja M^n é uma variedade Riemanniana aberta n-dimensional com curvatura minimal radial não negativa e ponto base p. Se o crescimento de volume α_M de M^n satisfizer

$$\alpha_M := \lim_{r\to\infty} \frac{Vol(B(p,r))}{w_n r^n} \geq \frac{1}{2} \tag{0.5.8}$$

então M^n é difeomorfo a $\mathbb{R}^n$

Em [MS] temos o

0.5.A.9. Teorema.
Uma variedade Riemanniana aberta, M^n, que contém um ponto p tal que a curvatura $K_p^{min} > 0$ possui exatamente um fim.

E, no caso em que $K_p^{min} \geq 0$ temos o

0.5.A.10. Teorema ([Ms2 -Main Theorem]).
Seja M^n uma variedade aberta. Assuma que $K_o^{min} \geq 0$, para algum $o \in M^n$. Então

(a) O conjunto de pontos críticos da função distância de o, $d_M(o,.)$ é limitado e consequentemente, M^n é finitamente conexo.

(b) M^n tem no máximo dois fins.

(c) Se M^n possui uma linha, então M^n é difeomorfo a $N \times \mathbb{R}$, onde N é uma hipersuperfície de M^n. Mais ainda, a projeção $M^n \to \mathbb{R}$ é uma submersão Riemanniana.

0.5.B. Curvatura minimal radial assintoticamente não negativa

Baseados principalmente nos artigos de A. Kasue [Ka1], U. Abresch [Ab], S.-H. Zhu [Z] e T. Shioya [Sy2] definimos a seguinte noção, mais fraca de curvatura radial assintoticamente não negativa:

0.5.B.1. Definição.
Uma variedade Riemanniana completa (M^n, g) com ponto base o é dita ser uma variedade com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa, ou simplesmente uma variedade CRANN, se existe uma função monótona decrescente $k : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que

(a) $b_0(k) := \int_0^\infty rk(r)dr < \infty$

(b) as curvaturas minimais radiais em cada ponto $p \in M^n$ *são limitadas inferiormente por* $-k(d(o,p))$.

Podemos então provar os seguintes resultados enunciados no §0.3 desta introdução:

0.5.B.2. Teorema (Teorema de comparação de Toponogov generalizado, ou TCTG).
Se (M^n, o, g) *é uma variedade com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa. Sob as hipóteses:*

(H1) Seja $\triangle(o, p_1, p_2)$ *um triângulo geodésico (generalizado) em uma variedade Riemanniana* (M^n, o, g)*; suponhamos que os os lados* γ_1 *e* γ_2 *sejam minimizantes (*γ_0 *basta ser uma geodésica;*

(H2) em cada ponto $p \in M^n$ *as curvaturas minimais radiais são limitadas inferiormente por* $-k(d(o,p)) \leq 0$;

(H3) o polo $\overline{o}$ *de* M^2_{-k} *será um dos vértices do triângulo de comparação* $\overline{\triangle}(\overline{o}, \overline{p}_1, \overline{p}_2)$

Então valem as seguintes conclusões:

(a) se $l_i = \bar{l}_i$ *para todos os lados, então* $\angle p_1 \geq \angle \overline{p}_1$ *e* $\angle p_2 \geq \angle \overline{p}_2$. *E se* $\angle p_1 = \angle \overline{p}_1$*, então existe uma parte de superfície totalmente geodésica em* M^n*, delimitada pelos lados do triângulo, e de curvatura* $-k(t)$ *nos pontos distando* t *de* p_0

(b) se $l_0 = \bar{l}_0$, $l_1 = \bar{l}_1$, *e* $\angle p_2 \leq \angle \overline{p}_2$, *então* $l_2 \leq \bar{l}_2$

(c) dada uma dobradiça (hinge) $(\gamma_1, \gamma_2, \theta)$ *em* M^n*, onde* $\theta = \angle(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$ *então existe dobradiça em* M^2_{-k}*,* $(\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2}, \theta)$ *com* $L(\gamma_i) = L(\overline{\gamma_i}) = l_i$, $i = 1, 2$ *e tal que*

$$d_M(\gamma_1(l_1), \gamma_2(l_2)) \leq d_{-k}(\overline{\gamma_1}(l_1), \overline{\gamma_2}(l_2)) \tag{0.5.9}$$

(d) (Convexidade de Alexandrov) Seja $\overline{\theta}_{s,t}$ *o ângulo em* $\overline{o}$ *do triângulo de comparação* $\overline{\triangle}(\overline{o}, \overline{x}_s, \overline{y}_t)$ *em* M^2_{-k}*, correspondendo a* $\triangle(o, \sigma_1(s), \sigma_2(t))$ *em* M^n*. Então* $\overline{\theta}_{s,t}$ *é uma função monótona não crescente em* s, t.

Em particular seguem os seguintes resultados

0.5.B.3. Teorema.
Toda variedade Riemanniana,(M^n, o, g, k)*, com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa possui no máximo um número finito de fins. Podemos estimar o número de fins de* M^n*:*

$$\#\{\text{fins } \mathcal{F} \text{ de } M^n\} \leq 2\pi^{n-1} \exp((n-1)b_1(k)) \tag{0.5.10}$$

onde $b_1(k)$ *é o invariante definido na discussão que segue a definição 0.3.B.*

0.5.B.4. Teorema.
Seja (M^n, o, g, k) *como no Teorema 0.5.B.3. Então, existe um número* $\varepsilon > 0$ *tal que se* $b_0(k) < \varepsilon$*, valem as seguintes conclusões:*

(a) O conjunto de pontos críticos da função distância de o*,* $d_M(o, .)$ *é limitado e consequentemente,* M^n *é finitamente conexo.*

(b) M^n tem no máximo dois fins.

0.5.B.5. Teorema.
Nas mesmas hipóteses do teorema anterior, dado $\delta > 0$, existe um número $\varepsilon > 0$ tal que se $b_0(k) < \varepsilon$, e se o crescimento de volume Euclidiano satisfaz

$$\alpha_M := \lim_{r\to\infty} \frac{Vol(B(o,r))}{w_n r^n} \geq \frac{1}{2} + \delta \tag{0.5.11}$$

onde w_n é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$, então M^n é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Acerca do comportamento de uma variedade CRANN, no infinito, temos o seguinte resultado

0.5.B.6. Teorema.
Cada variedade CRANN, (M^n, o, g, k), possui uma única fronteira ideal $M^n(\infty)$.

Apêndice 1

Conforme observado por S. Mendonça em comunicação informal (veja também Machigashira [Ms1]), a classe das variedades Riemannianas com curvatura minimal radial $\geq k_0$, contém estritamente a classe da variedades Riemannianas com curvatura seccional $\geq k_0$. Todavia não encontramos em nenhum dos trabalhos estudados um exemplo de variedade Riemanniana que possua curvatura minimal radial não negativa e curvatura seccional de sinal variável. Afim de suprir esta falta, apresentarei a seguir um tal exemplo. A idéia da construção é simples: consideramos $\mathbb{R}^3$ como sendo o quociente $[0,\infty) \times S^2/(\{0\} \times S^2)$ e dotamos este espaço com métrica produdo torcido, g, tipo paraboloide, i.e.

$$g = (1+4x^2)dx^2 + x^2 g^{S^2} \ , \tag{a.1}$$

para fazer com que as curvaturas radias sejam positivas, onde g^{S^2} corresponde a uma métrica de curvatura com sinal variável sobre a esfera S^2, obtida facilmente por meio de um produto torcido conveniente. Passemos à construção:

1. Munindo a esfera com métrica de curvatura com sinal variável.

Seja a curva diferenciável $c : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, parametrizada pelo comprimento de arco e dada por:

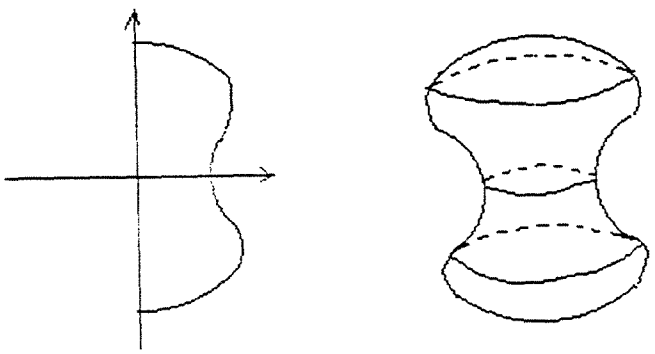
$$c(t) = (c_1(t), c_2(t)) := \begin{cases} \alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), & \text{se} \quad t \in [-\pi/2, -\pi/4] \cup [\pi/4, \pi/2] \\ \beta(t) = (\beta_1(t)\beta_2(t)), & \text{se} \quad t \in [-\pi/4, -\pi/6] \cup [\pi/6, \pi/4] \\ \gamma(t) = (\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} - \cos t, \operatorname{sen} t), & \text{se} \quad t \in [-\pi/6, \pi/6] \end{cases} \tag{a.2}$$

onde $\beta(t)$ é a união de duas pequenas curvas diferenciáveis (por exemplo, curvas cuja curvatura mude de sinal uma única vez) conectando $\alpha(-\pi/4)$ a $\gamma(-\pi/6)$ e $\gamma(\pi/6)$ a $\alpha(\pi/4)$.

Não é difícil notar que a superfície de revolução gerada por esta esta curva é difeomorfa a esfera S^2. Temos assim, uma parametrização local para esta esfera, dada por

$$\begin{aligned} X : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2.\pi) &\to S^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ (t, \theta) &\mapsto (c_1(t)\cos\theta, c_1(t)\operatorname{sen}\theta, c_2(t)) \end{aligned} \tag{a.3}$$

(esta parametrização cobre a esfera menos um meridiano e dois polos) as outras cartas são simples de se obter.



Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental, nesta parametrização, obtemos:

$$E(t,\theta) = \langle X_t, X_t \rangle = 1 \ , \qquad F(t,\theta) = \langle X_t, X_\theta \rangle = 0 \ ,$$

$$G(t,\theta) = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = c_1(t)^2 \tag{a.4}$$

Portanto, a métrica desta esfera é da forma $g^{S^2} = dt^2 + c_1(t)^2 \ d\theta^2$. É facil ver que (S^2, g^{S^2}) tem curvatura Gaussiana de sinal variável.

1. Munindo $(\mathbb{R}^3, 0)$ com métrica de curvatura $K_o^{min} \geq 0$ mas curvatura seccional com sinal variável.

Considerando uma carta local para $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{aligned} Y : (0,\infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2.\pi) &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,t,\theta) &\mapsto (xc_1(t)\cos\theta, xc_1(t)\,\mathrm{sen}\,\theta, xc_2(t)) \end{aligned} \tag{a.5}$$

usando a carta acima, definimos agora, em $\mathbb{R}^3$, a seguinte métrica:

$$g = (1+4x^2)dx^2 + x^2 g^{S^2} = (1+4x^2)dx^2 + x^2 dt^2 + x^2 c_1(t)^2 d\theta^2 \tag{a.6}$$

Um referencial ortonormal local para $(\mathbb{R}^3, g)$ é dado pelo sistema

$$e_1 = (1+4x^2)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x} \ , \qquad e_2 = x^{-1}\frac{\partial}{\partial t} \ , \qquad e_3 = (xc_1(t))^{-1}\frac{\partial}{\partial \theta} \ , \tag{a.7}$$

e o co-referencial associado é dado por

$$\omega_1 = \sqrt{1+4x^2}\ dx \ , \qquad \omega_2 = x\ dt \ , \qquad \omega_3 = xc_1(t)d\theta \tag{a.8}$$

Usando as equações de estrutura

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \ , \qquad d\omega_i = -\sum_{i=1}^{3} \omega_j \wedge \omega_{ij} \ , \qquad d\omega_{ij} = -\sum_{l=1}^{3} \omega_{il} \wedge \omega_{lj} - \Omega_{ij} \tag{Eq de estrut.}$$

podemos determinar as formas ω_{ij}, a saber:

$$\omega_{12} = \frac{1}{x\sqrt{1+4x^2}}\omega_2 \ , \qquad \omega_{13} = \frac{1}{x\sqrt{1+4x^2}}\omega_3 \ , \qquad \omega_{23} = \frac{c_1'(t)}{xc_1(t)}\omega_3 \tag{a.9}$$

e as formas de curvatura Ω_{ij} tomam a forma

$$\Omega_{12} = \frac{4}{(1+4x^2)^2}\omega_1 \wedge \omega_2 \ , \quad \Omega_{13} = \frac{4}{(1+4x^2)^2}\omega_1 \wedge \omega_3 \ , \quad \Omega_{23} = -\frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{(1+4x^2)} + \frac{c_1'{}'(t)}{c_1(t)}\right]\omega_2 \wedge \omega_3 \tag{a.10}$$

Como $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l$, segue que as curvaturas radiais R_{1212} e R_{1313} são positivas e dadas por

$$R_{1212} = R_{1313} = \frac{4}{(1+4x^2)^2} \tag{a.11}$$

enquanto que

(a.12)

$$R_{2323} = -\frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{(1+4x^2)} + \frac{c_1'{}'(t)}{c_1(t)}\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\left[1 - \dfrac{1}{(1+4x^2)}\right] > 0, & \text{se} \quad t \in (-\pi/2, -\pi/4] \cup [\pi/4, \pi/2) \\ -\dfrac{1}{x^2}\left[\dfrac{1}{(1+4x^2)} + \dfrac{\beta_1'{}'(t)}{\beta_1(t)}\right], & \text{se} \quad t \in [-\pi/4, -\pi/6] \cup [\pi/6, \pi/4] \\ -\dfrac{1}{x^2}\left[\dfrac{1}{(1+4x^2)} + \dfrac{\cos t}{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} - \cos t}\right] < 0, & \text{se} \quad t \in [-\pi/6, \pi/6] \end{cases}$$

□

Apêndice 2.

Dado (X, d) um espaço métrico completo (em particular, uma variedade Riemanniana completa), a função distância determina um mergulho isométrico, $x \mapsto d(x, .)$, de X no espaço $\mathcal{C}(X)$ das aplicações contínuas em X. Considere o espaço quociente $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}(X)$, munido com a topologia da convergência uniforme sobre conjuntos limitados em X, pelo subespaço composto de todas as funções constantes. O espaço X está mergulhado em $\mathcal{C}'$ e podemos definir o seu fecho $Cl(X)$ e sua fronteira $\partial X = Cl(X) \setminus X$. Este conjunto,$\partial X$, pode ser muito grande, de modo que é usual considerar subconjuntos convenientes que possam dar mais informações sobre X.

Seja $\{a_n\}$ uma sequência de pontos tal que para algum ponto fixado $o \in X$, $d(o, a_n) \to \infty$, e o limite

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} \big(d(o, a_n) - d(x, a_n)\big) \tag{b.1}$$

existe na topologia compacto-aberta (em verdade sempre existe uma subsequência que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de X). Então, definimos uma *horofunção* como a classe de equivalência da função $h(x)$ relativa à relação de equivalência $h_1(x) \cong h_2(x)$, se $h_1(x) - h_2(x) \equiv$ const, i.e., a projeção de h em $\mathcal{C}'$. Chamamos o espaço de todas tais classes de *espaço das horofunções*, e o denotamos por $O(X)$. Este espaço define uma fronteira ideal para X

Uma outra noção interessante de fronteira ideal, está em considerarmos um subconjunto particular de $O(X)$, o conjunto das *funções de Busemann*, $B(X)$: dado $\gamma : [0, \infty) \to X$, um raio (quer dizer, uma curva tal que qualquer segmento seu é uma geodésica minimizante), a função de Busemann associada a γ, F_γ, é definida como o limite

$$F_\gamma(x) = \lim_{t\to\infty} \big(t - d(x, \gamma(t))\big) \tag{b.2}$$

e, o espaço das funções de Busemann, é o espaço de todas tais funções, projetado em $\mathcal{C}'$.

No caso de variedades de Hadamard (abertas, de curvatura seccional não positiva e simplesmente conexas) estas definições, $M(\infty)$, $O(X)$, $B(X)$ são equivalentes [BGS], contudo, para o caso de variedades com curvatura não negativa, estas definições podem nos conduzir a espaços não mutuamente homeomorfos (veja, por exemplo o artigo de V. Marenich [M]). Cabe então perguntar, no caso de variedades com curvatura seccional ≥ 0, se existem relações entre a geometria da variedade e as propriedades de suas diferentes fronteiras ideais. Este é um problema ainda não resolvido.

CAPÍTULO 1

1.A. Introdução

O principal objetivo deste capítulo é provarmos o seguinte resultado de não unicidade das fronteiras ideais (ou dos cones tangentes no infinito) de variedades Riemannianas de curvatura de Ricci não negativa.

1.A.1 Teorema. *Existe uma métrica g, no espaço Euclidiano 8-dimensional $\mathbb{R}^8$, tal que $(\mathbb{R}^8, g)$ é uma variedade com curvatura Ricci não negativa e com fronteiras ideais de diferentes dimensões. Para alguma sequência $s_l \to \infty$ temos $\mathbb{R}^8(\infty)\{s_l\} = S^3$, enquanto para outra $r_m \to \infty$ vale que $\mathbb{R}^8(\infty)\{r_m\} = \{pt\}$.*

A métrica g no Teorema 1.A.1 pode ser construída como sendo de classe C^k, para qualquer k ou mesmo, como sendo de classe C^∞. Nossa construção segue basicamente a técnica desenvolvida em [CC] (e que descreveremos na seção §1.C.1). Como em [CC], nosso exemplo é do tipo produto torcido generalizado, onde a métrica deformada depende de certas funções de torção, u e v. Para provar o nosso resultado, devemos determinar convenientemente u e v de modo que: (1) a métrica possua curvatura de Ricci positiva (para isto, tais funções devem resolver o sistema de equções (1.3.28)), e (2) para sequências divergentes $\{s_l\}$ e $\{r_m\}$ convenientemente escolhidas temos $\mathbb{R}^8(\infty)\{s_l\} = S^3$ enquanto que $\mathbb{R}^8(\infty)\{r_m\} = \{\text{pt}\}$.

Recordemos aqui, a definição de cone tangente e de fronteira ideal dada na introdução:

1.A.2. Definição. *Seja (M^n, x_0, g) uma n-variedade Riemanniana pontuada e aberta, de curvatura Ricci não negativa, $Ric(M^n) \geq 0$. O Cone Tangente no Infinito de M^n, $T_\infty(M^n, g)\{r_i\}$, sob uma sequência divergente de números reais, $r_i \to \infty$, é o limite, no sentido de Gromov-Hausdorff, da sequência de bolas fechadas unitárias $\{\overline{(B(x_0, 1)}, r_i^{-2} g)\}_{i \in \mathbb{N}}$, munidas do tensor métrico $r_i^{-2} g$, ou seja*

$$T_\infty(M^n, g)\{r_i\} := \lim_{GH} (\overline{B(x_0, 1)}, r_i^{-2} g) \tag{1.1.1}$$

se tal limite existe. Chamamos a fronteira de $T_\infty(M^n, g)$ de uma Fronteira Ideal de M^n, e a denotamos por $M^n(\infty)$ (ou, $M^n(\infty)\{r_i\}$, para indicar a dependência da sequência $\{r_i\}$).

Um dos resultados que motivaram a elaboração do exemplo enunciado no Teorema 1.A.1 foi a construção de Perelman, de uma métrica para $\mathbb{R}^4$ com fronteiras ideais diferentes (não isométricas). Por fins didáticos, descrevemos esta em seguida:

1.A.3. Construção do exemplo de Perelman [P].

Considere, em $\mathbb{R}^4$, uma métrica definida por

$$g^{\mathbb{R}^4} = dt^2 + A(t)\, dx^2 + B(t)\, dy^2 + C(t)\, dz^2 \tag{1.1.2}$$

onde t define a coordenada radial, x, y, z são "coordenadas esféricas" com

$$[X, T] = [Y, T] = [Z, T] = 0, \qquad [X, Y] = Z,\ [Y, Z] = X,\ [Z, X] = Y \tag{1.1.3}$$

(Tomando $A(t) = B(t) = C(t) = t/2$ obtemos a métrica Euclidiana canônica) Um cálculo direto nos mostra

que

$$\langle R(X,T)T,X\rangle = -\frac{A''}{A}\|X\|^2\|T\|^2,\ \langle R(Y,T)T,Y\rangle = -\frac{B''}{B}\|Y\|^2\|T\|^2,\ \langle R(Z,T)T,Z\rangle = -\frac{C''}{C}\|Z\|^2\|T\|^2,$$

$$\langle R(X,Y)Z,T\rangle = \frac{1}{ABC}\left(-\frac{A'}{2A}(C^2+A^2-B^2)+\frac{B'}{B}(A^2-B^2-C^2)+CC'\right)\|X\|\|Y\|\|Z\|\|T\|,$$

$$\langle R(X,Y)Y,X\rangle = \left(-\frac{A'B'}{AB}+\frac{1}{4A^2B^2C^2}(A^4+B^4-3C^4+2A^2C^2+2B^2C^2-2A^2B^2)\right)\|X\|^2\|Y\|^2,$$

(1.1.4)
$$\langle R(X,Z)Z,X\rangle = \left(-\frac{A'C'}{AC}+\frac{1}{4A^2B^2C^2}(A^4+C^4-3B^4+2A^2B^2+2C^2B^2-2A^2C^2)\right)\|X\|^2\|Z\|^2,$$

$$\langle R(Y,Z)Z,Y\rangle = \left(-\frac{B'C'}{BC}+\frac{1}{4A^2B^2C^2}(B^4+C^4-3A^4+2B^2A^2+2C^2A^2-2B^2C^2)\right)\|Y\|^2\|Z\|^2,$$

$$\langle R(X,T)T,Y\rangle = \langle R(Y,T)T,Z\rangle = \langle R(Z,T)T,X\rangle = \langle R(X,Y)Y,Z\rangle\ =$$

$$\langle R(Y,Z)Z,X\rangle = \langle R(Z,X)X,Y\rangle = \langle R(T,X)X,Y\rangle = \langle R(T,X)X,Z\rangle\ =$$

$$\langle R(T,Y)Y,X\rangle = \langle R(T,Y)Y,Z\rangle = \langle R(T,Z)Z,X\rangle = \langle R(T,Z)Z,Y\rangle\ =\ 0$$

Em particular a matriz do tensor de Ricci, nestas coordenadas é diagonal.

Tomemos agora

(1.1.5)
$$A(t)=\frac{1}{10}t\big(1+\varphi(t)\,\mathrm{sen}(\ln\ln t)\big),\quad B(t)=\frac{1}{10}t\big(1+\varphi(t)\,\mathrm{sen}(\ln\ln t)\big)^{-1},\quad C(t)=\frac{1}{10}t\big(1+\frac{\varphi(t)}{\ln\ln t}\big),$$

onde $\varphi(t)$ é uma função suave satisfazendo $\varphi(t)=0$ para $t\in[0,T]$, $\varphi(t)>0$ para $t>T$, $0\le\varphi'(t)\le\ t^{-2}$, $|\varphi''(t)|\le t^{-3}$, onde $T>0$ é um número suficientemente grande.

Um cálculo direto, mostra que $Ric(T)\ge\frac{c}{t^2\ln t\ln\ln t}$ enquanto que $Ric(X)$, $Ric(Y)$, $Ric(Z)\ge\frac{c}{t^2}$. Também é claro que o cone assintótico não é único. Para finalizar, resta apenas suavizar o vértice $t=0$, onde nosso espaço é isométrico a um cone sobre uma esfera com curvatura constante 25, de fato no interior da bola aberta $B(0,t)$, a métrica possui a forma

(1.1.6)
$$g^{\mathbb{R}^4}\big|_{B(0,t)} = dt^2+\frac{1}{10}\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)\ .$$

Isto termina esta construção. □

1.A.4. Observação. *Não apenas os cones tangentes no infinito, mas, mais geralmente, limites de Gromov-Hausdorff de variedades com a condição geométrica: curvatura de Ricci limitada inferiormente, podem admitir vários tipos de anomalias. No artigo de Cheeger e Colding,* [CC §8] *são elaborados vários destes exemplos. Cito em seguida alguns deles:*

(a) Cones tangentes que não são cones métricos

Seja h uma função positiva tal que

(1.1.7)
$$|h-\frac{1}{2}|\le\delta,\qquad |h'|,\ |h''|,\ |h'''|\le\delta$$

É possível construir uma métrica g, com curvatura de Ricci positiva, em $\mathbb{R}^8$, que, para $r\ge1$, é da forma

(1.1.7)
$$g = dr^2+(r^{1-\eta})^2k_1+(rh(\log r))^2k_2\ .$$

Tais métricas possuem cones tangentes no infinito da forma

(1.1.8)
$$dr^2+\frac{1}{4}(rh_\infty)^2g^{S^4}\ .$$

Se, por exemplo, h é periódica, então h_∞ é algum transladado de h. Mas, a menos que h seja constante, nenhum cone tangente é um cone métrico.

(b) Dimensão tender a infinito

Considere um espaço dado pelo produto torcido, $\mathbb{R} \times_f S^2$, *onde* S^2 *tem métrica* g^{S^2} *e* f *é dada por*

$$f|_{(-\infty,-1]} \equiv \frac{1}{2}, \qquad f|_{[1,\infty)} \equiv 1 \qquad e \qquad \left|\frac{f'}{f}\right| < 1 \tag{1.1.9}$$

Seja $\{h_j\}$ *uma sequência de funções,* $h_j : (-j, j) \to \mathbb{R}_+$, *tais que*

$$\lim_{r\to -j} h_j = \lim_{r\to j} h_j = 0, \qquad -\frac{h_j''}{h_j} > 0, \qquad \lim_{j\to\infty} h_j = 0, \qquad \text{uniformemente} \tag{1.1.10}$$

e $dr^2 + h_j^2 g^{S^{n_j}}$, *define uma métrica suave de curvatura estritamente positiva em* S^{n_j+1}, *onde* $\{n_j\}_j$ *é uma sequência divergindo para infinito*

Para j *suficientemente grande, a métrica de produto torcido duplo*

$$g_j = dr^2 + h_j^2 g^{S^{n_j}} + f^2 g^{S^2}, \tag{1.1.11}$$

em $S^{n_j+1} \times S^2$, *tem curvatura de Ricci positiva. Conforme* $j \to \infty$, *a sequência* $\{(S^{n_j+1} \times S^2, g_j)\}$ *converge, no sentido de Gromov-Hausdorff pontuado para um espaço suave, do tipo produto torcido,* $\mathbb{R} \times_f S^2$. *Apesar deste espaço conter linhas geodésicas, ele não cinde isometricamente e, portanto, não pode ser considerado legitimamente um espaço com curvatura Ricci não negativa, em qualquer sentido generalizado (pelo Teorema de cisão de Toponogov)*

(c) Geodésicas mutuamente tangentes, chifres

Sejam $\epsilon > 0$, $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *a função definida por* $h(r) = r^{1+\epsilon}$. *Então como* $-\frac{h''}{h} < 0$, *vem que a métrica*

$$dr^2 + \frac{1}{4} h^2 g^{S^4} \tag{1.1.12}$$

tem curvatura Ricci negativa, na direção radial. Escolhendo $0 < \eta < 1$ *e fixando um* ϵ *suficientemente pequeno, de modo que*

$$-3\eta(1-\eta) + 4\epsilon(1+\epsilon) < 0 \tag{1.1.13}$$

observamos que a métrica produto torcido duplo em $\mathbb{R}^8$,

$$dr^2 + (\chi r^{1-\eta})^2 k_1 + (r^{1+\epsilon})^2 k_2 \tag{1.1.14}$$

tem curvatura de Ricci estritamente positiva para todo $r > 0$, *desde que* χ *seja suficientemente pequeno.*

Usando um processo de colagem descrito no exemplo 8.41 de [CC], *podemos deformar a métrica de modo a obtermos uma métrica suave em* $\mathbb{R}^8$, *e tomando o limite* $\chi \to 0$ *obtemos a métrica limite*

$$g^Y = dr^2 + (r^{1+\epsilon})^2 g^{S^4} \tag{1.1.15}$$

chamada de métrica chifruda. O espaço 5-dimensional resultante, (Y, g^Y) *tem por cone tangente na origem um raio. Assim, as geodésicas emanando da origem são todas mutuamente tangentes.*

Ao leitor interessado remeto a leitura da seção 8 de [CC], *onde ainda são descritos outros fenômenos, como espaços limites topologicamente singulares, pontos com cones tangentes de diferentes dimensões, etc.*

A nossa construção é baseada nos métodos desenvolvidos no artigo de J. Cheeger e T. H. Colding [CC] (neste artigo, é estudada de forma bastante abrangente a estrutura dos espaços métricos que são limites, no sentido de Gromov-Hausdorff, de sequências de variedades Riemannianas pontuadas, (M_i, p_i), conexas, completas, cujas curvaturas de Ricci estão limitadas inferiormente por $Ric_{M_i} \geq -(n-1)$; essencialmente, estaremos interessados nos métodos descritos na seção §8 de [CC]), onde se dão exemplos de cones tangentes no infinito metricamente não equivalentes, mas mantendo suas dimensões fixadas.

1.B Construção do Exemplo

Antes de começarmos a construção do exemplo, se nós perguntarmos: existe alguma variedade aberta M^n possuindo fronteiras ideais de diferentes dimensões? O primeiro fato interessante a se notar é que, em tal exemplo, nenhuma fronteira ideal poderia ter a dimensão máxima $n-1$. Por exemplo, no nosso caso, se temos $n=8$ e uma variedade M^8 com fronteiras ideais de diferentes dimensões, então nenhuma destas dimensões pode igual a 7.

Com efeito, para qualquer sequência divergente de números reais $\{r_i\}$ com $r_i \to \infty$, dois fenômenos podem acontecer: (1) a sequência $(M^n, x_0, r_i^{-2}g)$ colapsa, quer dizer, o limite do volume da bola unitária tende a zero, $\lim_{i\to\infty} Vol(B(x_0,1), r_i^{-2}g) = 0$, ou (2) a sequência é não colapsante, ou seja, existe uma constante positiva v, tal que $Vol(B(x_0,1), r_i^{-2}g) > v$ para todo i. No caso colapsante, (1), temos o seguinte resultado de [CC-Teorema 5.2], que nos mostra que $\dim T_\infty(M^n, g)\{r_i\} \leq n-1$ e, em particular, $\dim M^n(\infty) \leq n-2$:

1.B.1. Teorema (Cheeger-Colding). *Se (Y^m, y) é o limite de Gromov-Hausdorff de uma sequência pontuada $\{(M_i^n, m_i)\}$, com $\lim_{i\to\infty} Vol(B(q_i,1), r_i^{-2}g) = 0$, então $\dim Y^m \leq n-1$.*

E, para o caso (2) temos o seguinte

Teorema 1.B.2 (Marenich). *Seja (M^n, g) Uma variedade Riemanniana aberta de curvatura Ricci não negativa. Se para alguma sequência $r_j \to \infty$, vale $\dim T_\infty(M^n, g)\{r_j\} = n$, então para qualquer outra sequência $r_l \to \infty$, também vale que $\dim T_\infty(M^n, g)\{r_l\} = n$.*

Afim de provar este fato, precisamos do seguinte resultado (adaptado para os nossos fins) de [CC, teorema 5.9]

Lema 1.B.3. (Cheeger-Colding). *Se (Y, y) é o limite de Gromov-Hausdorff de uma sequência pontuada $\{(M_i^n, p_i)\}$ de variedades Riemannianas n-dimensionais satisfazendo*

$$Ric_{M_i^n} \geq 0 \quad \text{e} \quad Vol(B(p_i,1)) \geq v > 0\,, \tag{1.2.1}$$

então $\dim Y = n$. Mais ainda, para todo $R > 0$ e $q_i \xrightarrow{d_{GH}} z$,

$$\lim_{i\to\infty} Vol(B(q_i,R)) = \mathcal{H}^n(B(z,R)) \tag{1.2.2}$$

onde $\mathcal{H}^n$ é a medida de Hausdorff n-dimensional.

Demonstração do Teorema 1.B.2. Por definição, $T_\infty(M,g)\{r_i\}$ é limite de Gromov-Hausdorff das bolas unitárias com métrica reescalada, $\{(\overline{B(x_0,1)}, r_j^{-2}g)\}$. Por outro lado, pelo Teorema de Comparação dos Volumes, de Bishop-Gromov [GLP], sabe-se que a função

$$\frac{Vol(\overline{B(x_0,r)}, g)}{r^n} \tag{1.2.3}$$

é monótona decrescente em r.

Como estamos assumindo que para alguma sequência $r_j \to \infty$

$$(\overline{B(x_0,1)}, r_j^{-2}g) \longrightarrow T_\infty(M,g)\{r_j\}) \tag{1.2.4}$$

pelo Lema 1.B.3

$$\frac{Vol(\overline{B(x_0,r_j)},\ g)}{r_j^n} = Vol(\overline{B(x_0,1)}, r_j^{-2}g) \to \mathcal{H}^n(T_\infty(M,g)\{r_j\}) = \alpha > 0\ , \quad \text{se } j \to \infty \tag{1.2.5}$$

Então, se $T_\infty(M,\ g)\{r_l\}$ é o cone tangente cone no infinito sob outra sequência $r_l \to \infty$, pela monotonicidade do Teorema de Comparação de Bishop-Gromov segue que

$$Vol(\overline{B(x_0,r_l)},\ r_l^{-2}g) = \frac{Vol(\overline{B(x_0,r_l)},g)}{r_l^n} \to \alpha, \quad \text{conforme } l \to \infty \tag{1.2.6}$$

e portanto

$$\mathcal{H}^n(T_\infty(M,\ g)) = \alpha > 0 \tag{1.2.7}$$

ou seja, todos os cones no infinito possuem mesmo volume, e a mesma dimensão n. Isto encerra a prova do Teorema 1.B.2. □

Os Teoremas 1.B.1, 1.B.2 e 1.B.3 acima, implicam que se (M^n, g) é uma variedade Riemanniana aberta com curvatura Ricci não negativa, então seus cones tangentes no infinito satisfazem $\dim T_\infty(M^n) \leq n$ (ou, suas fronteiras ideais satisfazem $\dim M^n(\infty) \leq n-1$) e, no caso de $\dim M^n(\infty)\{r_l\} < n-1$, para alguma sequência $r_l \to \infty$, então para qualquer outra sequência, $\{s_l\}$, tendendo a infinito também valerá $\dim M^n(\infty)\{s_l\} < n-1$.

1.C. Warp-products ou produtos torcidos generalizados.

Todas as variedades consideradas a seguir, são generalizações de uma classe de variedades conhecida por warp-product, ou produto torcido (que, por sua vez, generaliza o conceito de variedade produto), mas o nosso caso difere da definição clássica de produto torcido pois não temos decomposição da variedade como um produto, mas sim do fibrado tangente, como uma soma, e é a partir desta decomposição que deformamos a métrica da variedade. Recordamos aqui a descrição desta construção, extraída de [CC], assim como as fórmulas para a curvatura de Ricci para produtos torcidos generalizados, veja (1.3.24) e (1.3.27) adiante (em particular, quando temos um produto torcido no sentido clássico, estas fórmulas se aplicam, posto que o fibrado tangente de uma variedade produto possui decomposição natural em soma de Whitney de fibrados).[1] A curvatura de Ricci de um produto torcido depende de certas funções, chamadas de funções de torção (warping functions), e construiremos nosso exemplo verificando que para uma particular escolha destas funções, as afirmações do nosso teorema principal deste capítulo, Teorema 1.A.1, são verdadeiras.

[1] uma descrição muito boa de produtos torcidos pode ser encontrada no livro de O'Neil [O'N], e para produto torcido duplo, veja por exemplo [A]

1.C.1 A construção de Cheeger e Colding.

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e Z uma variedade. Considere uma família de métricas Riemannianas, $g^Z(r)$ em Z, parametrizadas por $r \in I$. Assuma que para cada $p \in Z$, as métricas $g^Z(r)|Z_p$ podem ser, todas, simultaneamente diagonalizadas com respeito a uma alguma métrica fixada no espaço tangente, Z_p. Assim, podemos encontrar um referencial local ortonormal, $\{\tilde{y}_i\}$, em uma vizinhança de p, tal que para certas funções positivas, $u_i(r)$, os campos vetoriais, $\{y_i\}$, definidos por $y_i := \frac{\tilde{y}_i}{u_i}$ são ortonormais para $g_Z(r)$.

Considere a métrica

$$g = dr^2 + g^Z(r) \tag{1.3.1}$$

em $I \times Z$. No sentido de simplificar a discussão, procuraremos uma condição suficiente para que o vetor, $n = \frac{\partial}{\partial r}$ seja um autovetor para a aplicação linear associada ao tensor de Ricci de g, ou seja, se $\{e_i\}$ é um referencial ortonormal local, v, w campos vetoriais quaisquer, definidos em mesmo domínio que e_i, podemos escrever $ric(v,w) = \langle \sum_i R(v,e_i)e_i, w\rangle = \langle r(v), w\rangle$, assim, o que estamos querendo é encontrar uma condição suficiente para que $r(\frac{\partial}{\partial r}) = \lambda \frac{\partial}{\partial r}$.

Considerando os campos vetoriais, y_i, como estando definidos em $I \times Z$, então seus colchetes de Lie devem satisfazer

$$[n, y_i] = [n, \frac{\tilde{y}_i}{u_i}] = \frac{1}{u_i}[n, \tilde{y}_i] + n(\frac{1}{u_i})\tilde{y}_i = -\frac{u_i'}{u_i} y_i \tag{1.3.2}$$

ou seja

$$[n, y_i] = -\frac{u_i'}{u_i} y_i \tag{1.3.3}$$

e

$$\langle [y_i, y_j], n\rangle = 0 \tag{1.3.4}$$

Se A, B, C são campos vetoriais cujos produtos internos com relação à métrica, $g = \langle ., . \rangle$, são constantes, a fórmula de Koszul (0.1.19) toma a seguinte forma

$$\langle \nabla_A B, C\rangle = \frac{1}{2}\{\langle [A,B], C\rangle - \langle [A,C], B\rangle - \langle [B,C], A\rangle\} \ , \tag{1.3.5}$$

Usando (1.3.3) e (1.3.4) em (1.3.5), nós obtemos $\langle \nabla_n y_i, y_j\rangle = 0$ e $\langle \nabla_n y_i, n\rangle = 0$, consequentemente

$$\nabla_n y_i = 0 \ , \quad \text{para todo } i \tag{1.3.6}$$

(quer dizer, o referencial $\{y_i\}$ é paralelo ao longo da geodésica determinada por n) Logo, temos

$$\langle \nabla_n \nabla_{y_i} y_i, y_j\rangle = n\langle \nabla_{y_i} y_i, y_j\rangle, \tag{1.3.7}$$

$$\langle \nabla_{y_i} \nabla_n y_i, y_j\rangle = 0, \tag{1.3.8}$$

$$\langle \nabla_{[n,y_i]} y_i, y_j\rangle = -\frac{u_i'}{u_i}\langle \nabla_{y_i} y_i, y_j\rangle. \tag{1.3.9.}$$

e daí, $\langle R(n,y_i)y_i,y_j\rangle = n\langle\nabla_{y_i}y_i,y_j\rangle + \frac{u_i'}{u_i}\langle\nabla_{y_i}y_i,y_j\rangle$.

Portanto, se $\langle\nabla_{y_i}y_i,y_j\rangle \equiv 0$, segue que

$$\langle R(n,y_i)y_i,y_j\rangle = 0 \tag{1.3.10}$$

e em particular, que n é um auto-vetor de r.

Suponha, agora, que a métrica $g^Z(r)$ é da forma

$$g^Z(r) = u_1^2k_1 + \ldots + u_d^2k_d \tag{1.3.11}$$

onde o fibrado tangente TZ admite a seguinte decomposição

$$TZ = E_1 \oplus \ldots \oplus E_d \tag{1.3.12}$$

tal que, $g^Z(r)\big|_{E_i} = u_i^2(r)k_i$, e k_i anula E_j para $i \neq j$.

Assumamos ainda que, para a métrica $k_1+\ldots+k_d$, sempre que uma geodésica, γ satisfaz $\gamma'(0) \in E_i$ (para algum i) então $\gamma'(t) \in E_i$ para todo t. Equivalentemente, para todo i, a parte simétrica da segunda forma fundamental de E_i se anula. Segue então de (1.3.5) que para r fixo, o mesmo vale para a métrica $u_1^2(r)k_1 + \ldots + u_d^2(r)k_d$. Assim, é claro que a condição $\langle\nabla_{y_i}y_i,y_j\rangle = 0$ é válida. Logo, neste caso, (1.3.10) também vale.

Em particular, se E_1, E_2 denotam os subfibrados vertical e horizontal para a submersão Riemanniana $X^l \to Z^{l+m} \xrightarrow{\pi} W^m$, com fibras totalmente geodésicas, então (1.3.10) vale.

Como os campos $\tilde{y}_i$, são campos de Jacobi sobre a geodésica φ definida por $\dot{\varphi} = \frac{\partial}{\partial r}$:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_i'' + R(\tilde{y}_i,n)n &= \nabla_n\nabla_n(u_iy_i) + u_iR(y_i,n)n = \\ &= u_i''y_i + u_i(\nabla_{y_i}\nabla_n n - \nabla_n\nabla_{y_i}n - \nabla_{[y_i,n]}n) = \\ &= 0\end{aligned} \tag{1.3.13}$$

por (1.3.3) e (1.3.6). Levando em conta que $\langle y_i,y_j\rangle = \delta_{ij}$, $\nabla_n y_i = 0$ e $\tilde{y}_i = u_iy_i$ fica claro que $\nabla_n\tilde{y}_i = \tilde{y}_i' = u_i'y_i$, e portanto $\nabla_n\nabla_n\tilde{y}_i = u_i''y_i$, implicando que

$$\langle R(y_i,n)n,y_i\rangle = \frac{1}{u_i}\langle R(\tilde{y}_i,n)n,y_i\rangle = -\frac{1}{u_i}\langle\tilde{y}_i'',y_i\rangle = -\frac{u_i''}{u_i}\langle y_i,y_i\rangle = -\frac{u_i''}{u_i} \tag{1.3.14}$$

Agora, podemos facilmente calcular a curvatura de Ricci na direção "radial", n:

$$Ric(n) = \sum_{i=1}^{n-1}\langle R(y_i,n)n,y_i\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{u_i''}{u_i} \tag{1.3.15}$$

Agora, para r_0 fixo, como $(Z,g^Z(r_0))$ está isometricamente imerso em $(I\times Z, dr^2 + g^Z(r))$ usando a equação de Gauss, que relaciona os tensores de curvatura destes dois espaços:

$$\langle\overline{R}(X,Y)W,T\rangle = \langle R(X,Y)W,T\rangle + \langle II(Y,T),II(X,W)\rangle - \langle II(X,T),II(Y,W)\rangle \tag{1.3.16}$$

onde R, $\overline{R}$ são, respectivamente, os tensores de curvatura de $(Z,g^Z(r_0))$ e $(I\times Z, dr^2+g^Z(r))$, II denota a segunda forma fundamental da imersão e X, Y, W, T, são campos quaisquer em $\mathcal{C}^\infty(TZ) \subset \mathcal{C}^\infty(T(I\times Z))$. Desta forma, podemos relacionar os tensores de Ricci de Z e $I\times Z$:

$$
\begin{aligned}
\overline{ric}(V,X) &= \sum_i \langle \overline{R}(y_i,V)X,y_i\rangle + \langle \overline{R}(n,V)X,n\rangle = \\
&= \sum_i \langle R(y_i,V)X,y_i\rangle + \langle \overline{R}(n,V)X,n\rangle + \sum_i \big(\langle II(V,y_i),II(y_i,X)\rangle - \langle II(y_i,y_i),II(V,X)\rangle\big) = \\
&= ric(V,X) + \langle \overline{R}(n,V)X,n\rangle + \sum_i \big(\langle II(V,y_i),II(y_i,X)\rangle - \langle II(y_i,y_i),II(V,X)\rangle\big)
\end{aligned} \tag{1.3.17}
$$

de (1.3.4)-(1.3.6), vemos que a segunda forma da hiperfície $(Z, g^Z(r_0))$, é dada por

$$
II(y_i,y_j) = \begin{cases} -\dfrac{u_i'}{u_i}n, & \text{se } i=j \\ 0, & \text{se } i\neq j \end{cases} \tag{1.3.18}
$$

além disso, se $i \neq j$, usando fórmula (4) calculamos $\langle \nabla_{y_i} y_j, n\rangle = 0$ o que nos leva facilmente a

$$
\begin{aligned}
\langle \overline{R}(n,y_i)y_j,n\rangle &= \langle \nabla_n \nabla_{y_i} y_j - \nabla_{y_i}\nabla_n y_j - \nabla_{[n,y_i]}y_j, n\rangle = \\
&= n\langle \nabla_{y_i}y_j,n\rangle - \langle \nabla_{y_i}y_j, \nabla_n n\rangle + \frac{u_i'}{u_i}\langle \nabla_{y_i}y_j,n\rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.3.19}
$$

ou ainda

$$
\langle \overline{R}(n,y_i)y_j,n\rangle = \begin{cases} -\dfrac{u_i''}{u_i}n, & \text{se } i=j \\ 0, & \text{se } i\neq j \end{cases} \tag{1.3.20}
$$

logo, escrevendo $V = \sum v_i y_i$ e $X = \sum x_i y_i$ e considerando os resultados (1.3.17), (1.3.18) e (1.3.20), obtemos:

(1.3.21)

$$
\begin{aligned}
\overline{ric}(V,X) &= ric(V,X) + \sum_{i,j}\langle \overline{R}(n,y_i)y_j,n\rangle v_i x_j + \sum_{i,j,k}\big(\langle II(y_j,y_i),II(y_i,y_k)\rangle v_j x_k - \langle II(y_i,y_i),II(y_j,y_k)\rangle v_j x_k\big) \\
&= ric(V,X) + \sum_i \langle \overline{R}(n,y_i)y_i,n\rangle v_i x_i + \sum_i \big(\langle II(y_i,y_i),II(y_i,y_i)\rangle v_i x_i - \sum_j \langle II(y_j,y_j),II(y_i,y_i)\rangle v_i x_i\big) \\
&= ric(V,X) + \sum_i \langle \overline{R}(n,y_i)y_i,n\rangle v_i x_i - \sum_{i\neq j}\langle II(y_j,y_j),II(y_i,y_i)\rangle v_i x_i) \\
&= ric(V,X) - \sum_i \left(\frac{u_i''}{u_i} + \sum_{j\neq i}\frac{u_i'}{u_i}\frac{u_j'}{u_j}\right) v_i x_i
\end{aligned}
$$

Assim, se $\{y_i^*\}$ denota a base dual a $\{y_i\}$, então, em $r = r_0$ o tensor de Ricci (forma bilinear) tem a forma:

$$
\overline{ric}|_{r=r_0} = ric_{(Z,g^Z(r_0))} - \sum_i \left(\frac{u_i''}{u_i} + \frac{u_i'}{u_i}\sum_{i\neq j}\frac{u_j'}{u_j}\right) y_i^* \otimes y_i^* \tag{1.3.22'}
$$

e a curvatura de Ricci (forma quadrática):

$$\overline{Ric}|_{r=r_0} = Ric_{(Z,g^Z(r_0))} - \sum_i \left(\frac{u_i''}{u_i} + \frac{u_i'}{u_i} \sum_{i \neq j} \frac{u_j'}{u_j} \right) (y_i^*)^2 \tag{1.3.22}$$

Particularmente, se $X^l \hookrightarrow M^n \xrightarrow{\pi} W^{n-l}$ é uma submersão Riemanniana com fibras totalmente geodésicas, X^l, a métrica, $g^M(r)$, é dada por

$$g^M(r) = u_1^2(r)k_1 + u_2^2(r)k_2 \tag{1.3.23}$$

tal que, se E_1, E_2 são, respectivamente, os subfibrados vertical e horizontal para a submersão acima, então $g^M(r)|_{E_i} = u_i^2(r)k_i$, e k_i anula E_j, para $i \neq j$. Mais ainda, sempre que uma geodésica, γ, satisfizer $\gamma'(0) \in E_i$, para algum $i = 1,\ 2$, então $\gamma'(t) \in E_i$ para t. Neste caso, a curvatura de Ricci satisfaz

$$\begin{cases} Ric(\xi) = -l\dfrac{u_1''}{u_1} - (n-l)\dfrac{u_2''}{u_2} \\ Ric|_{(\{r\}\times M, g^M(r))} = \widetilde{Ric}_{(M,g^M(r))} - \left(\dfrac{u_1''}{u_1} + (l-1)\left(\dfrac{u_1'}{u_1}\right)^2 + (n-l)\dfrac{u_1'}{u_1}\dfrac{u_2'}{u_2} \right) \displaystyle\sum_{i=1}^{l} y_i^* \otimes y_i^* \\ \qquad\qquad - \left(\dfrac{u_2''}{u_2} + (n-l-1)\left(\dfrac{u_2'}{u_2}\right)^2 + l\dfrac{u_1'}{u_1}\dfrac{u_2'}{u_2} \right) \displaystyle\sum_{i=l+1}^{n} y_i^* \otimes y_i^* \end{cases} \tag{1.3.24}$$

onde, y_i, $i = 1, \ldots, l$ são campos vetoriais locais verticais , ortonormais com relação a $g^M(r)$, e y_j, $j = l+1, \ldots, n$ são campos vetoriais horizontais, ortonormais.

Desta forma, para se obter uma métrica com $\overline{Ric} > 0$, o ponto essencial está em escolher funções, u_i, tais que as expressões em (1.3.15) e (1.3.22), ou (1.3.24) sejam positivas.

Passamos agora à demonstração do principal resultado deste capítulo.

1.C.2. Construção do Exemplo, ou, Demonstração do Teorema 1.A.1

A estrutura desta construção, é baseada em quatro etapas:

1. considerando o espaço $\mathbb{R}^8$ como a união de um disco, D, centrado na origem e seu complementar , N, primeiramente muniremos N com uma métrica suave (não completa) de curvatura Ricci não negativa.

2. em seguida, estendemos - de classe C^k - a métrica obtida em (1.) ao disco, menos a origem, onde a métrica é singular, então obtendo uma métrica de curvatura Ricci não negativa em $\mathbb{R}^8 - \{0\}$.

3. mostramos aqui que é possível "dessingularizar" a métrica obtida, na origem, levando-nos a uma métrica C^k para $\mathbb{R}^8$ de curvatura Ricci não negativa.

Como consequência destes três passos construímos uma família de métricas suaves dependendo de certos parâmetros R, $\alpha \in (0,1)$, R_α, $R_\alpha(k)$ e c_0, c_1. Mostramos que para todo R suficientemente grande (dependendo de todos os outros parâmentros) e c_0, c_1 suficientemente pequenos, nossa métrica g em $\mathbb{R}^8$ tem curvatura Ricci não negativa.

4. Finalmente, mostramos que esta métrica tem fronteiras ideais diferentes dimensões.

Passo 1.

1.1. Consideremos $\mathbb{R}^8$ como o quociente $[0,\infty) \times S^7/\{0\} \times S^7$. Para algum $R > 0$ a ser convenientemente determinado, decomponhamos $\mathbb{R}^8$ como a união do disco $D = [0,\ R] \times S^7/\{0\} \times S^7$ de raio R e o espaço $N = [R,\ \infty) \times S^7$. Sua fronteira comum $D \cap N = \{R\} \times S^7$ será denotada por $S^7(R)$. Muniremos estes espaços com métrica do tipo produto duplo torcido a ser determinada em seguida , de modo que D e N possam ser colados de forma $\mathcal{C}^k$.

A métrica que iremos considerar no espaço N é

$$\overline{g} = dr^2 + g^{S^7}(r)\ , \tag{1.3.25}$$

onde $g^{S^7}(r)$ é do tipo produto duplo torcido, obtida da fibração de Hopf $S^3 \to S^7 \xrightarrow{\pi} S^4$. Se S^3, S^7, S^4 carregam métricas g^{S^3}, g^{S^7}, $\frac{1}{4}.g^{S^4}$, respectivamente, onde g^{S^n} é a métrica canônica de curvatura $\equiv 1$ na esfera S^n, então π é uma submersão Riemanniana com fibras totalmente geodésicas . Pela discussão anterior, podemos aplicar o método descrito na seção §8 de [CC]. Pondo

$$g^{S^7}(r) = \overline{f}(r)^2 g_1 + \overline{h}(r)^2 g_2\ , \tag{1.3.26}$$

onde $g_2 = \pi^*(\frac{1}{4}g^{S^4})$, então, a curvatura de Ricci de $(N,\overline{g})$, satisfaz um sistema de equações do tipo (1.3.24), e portanto N terá curvatura de Ricci positiva se, e só se, as funções $\overline{f}$, $\overline{h}$ satisfazem ao seguinte conjunto de desigualdades:

$$\begin{cases} Ric(\xi) = -3\dfrac{\overline{f}''}{\overline{f}} - 4\,\dfrac{\overline{h}''}{\overline{h}} > 0 \\ Ric(\dfrac{V}{\overline{f}}) = \dfrac{2}{\overline{f}^2} - \dfrac{\overline{f}''}{\overline{f}} - 2\,(\dfrac{\overline{f}'}{\overline{f}})^2 - 4\dfrac{\overline{f}'\overline{h}'}{\overline{f}\overline{h}} > 0 \\ Ric(\dfrac{W}{\overline{h}}) = \dfrac{3}{\overline{h}^2} - \dfrac{\overline{h}''}{\overline{h}} - 3(\dfrac{\overline{h}'}{\overline{h}})^2 - 3\dfrac{\overline{f}'\overline{h}'}{\overline{f}\overline{h}} > 0 \\ ric(\xi, \dfrac{V}{\overline{f}}) = ric(\xi, \dfrac{W}{\overline{h}}) = ric(\dfrac{V}{\overline{f}}, \dfrac{W}{\overline{h}}) = 0 \end{cases} \tag{1.3.27}$$

onde ξ é o campo vetorial unitário tangente a $[R,\ \infty)$, V é um campo vetorial unitário (com relação a g_1) vertical qualquer, e W é qualquer campo vetorial unitário (com relação a g_2) horizontal, na decomposição do fibrado tangente $TN = \mathbb{R}\xi \oplus E_1 \oplus E_2$.

Escrevendo $\overline{f} = c_0 r u(r)$ e $\overline{h} = c_1 r v(r)$, para certas constantes c_0, c_1 a serem convenientemente escolhidas, o sistema (1.3.27), em termos de u, v assume a forma:

$$\begin{cases} Ric(\xi) = -\left[\dfrac{3}{u}\left(\dfrac{2u'}{r} + u''\right) + \dfrac{4}{v}\left(\dfrac{2v'}{r} + v''\right)\right] > 0 \\ Ric(\dfrac{V}{\overline{f}}) = \dfrac{2}{c_0^2 r^2 u^2} - \dfrac{6}{r^2} - \dfrac{u''}{u} - \dfrac{10u'}{ru} - 2\left(\dfrac{u'}{u}\right)^2 - \dfrac{4v'}{v}\left(\dfrac{u'}{u} + \dfrac{1}{r}\right) > 0 \\ Ric(\dfrac{W}{\overline{h}}) = \dfrac{3}{c_1^2 r^2 v^2} - \dfrac{6}{r^2} - \dfrac{v''}{v} - \dfrac{11v'}{rv} - 3\left(\dfrac{v'}{v}\right)^2 - \dfrac{3u'}{u}\left(\dfrac{v'}{v} + \dfrac{1}{r}\right) > 0 \end{cases} \tag{1.3.28}$$

Seja $\alpha \in (0,\ 1)$. Fazendo $u = 1/\ln r + (\sin(\ln(\ln r)))^2$ e $v = r^{-\alpha}$, e pondo $x = \ln(\ln r)$ vemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{u'}{u} = \frac{1}{ru\ln r}\left(-\frac{1}{\ln r} + \sin 2x\right)\ , \\
&\frac{u''}{u} = \frac{1}{r^2 u\ln r}\left[-\sin 2x + \frac{1}{\ln r}\left(1 + \frac{2}{\ln r} - \sin 2x + 2\cos 2x\right)\right]\ , \\
&\frac{v'}{v} = -\frac{\alpha}{r} \qquad \text{e} \qquad \frac{v''}{v} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{r^2}
\end{aligned}
\tag{1.3.29}
$$

A seguir, calculamos as curvaturas de Ricci em termos de u e v.

1.2. Substituindo as igualdades (1.3.29) no sistema (1.3.28), concluímos que

$$
Ric(\xi) = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{3}{u\ln r}\left[-\sin 2x + \frac{z(r)}{\ln r}\right] + 4\alpha(1-\alpha)\right\}
\tag{1.3.30}
$$

onde $z(r) = 1 - 1/\ln r + \sin 2x - 2\cos 2x \in (-3,\ 4)$, se $r > e$. Para $r \geq R_\alpha$, suficientemente grande, nós temos

$$
\left|\ \frac{\sin 2x}{u\ln r}\ \right| \ = \ \left|\ \frac{\sin 2x}{1 + \ln r(\sin x)^2}\ \right| \ < \frac{4}{3}\alpha(1-\alpha) - \frac{3}{\ln r}
\tag{1.3.31}
$$

donde $Ric(\xi) > 0$.

1.3. Novamente, de (1.3.29) e (1.3.28) nós deduzimos, para $Ric(\frac{V}{f})$:

$$
Ric(\frac{V}{f}) = \frac{1}{r^2}\left[\frac{2}{c_0^2 u^2} - 6 + 4\alpha + \phi(r)\right]
\tag{1.3.32}
$$

onde

$$
\phi(r) = -\frac{1}{u\ln r}\left[(9-4\alpha)\sin 2x + \frac{1}{\ln r}\left(-9 + 4\alpha + \frac{2}{\ln r} - \sin 2x + 2\cos 2x\right) + \frac{2}{u\ln r}\left(-\frac{1}{\ln r} + \sin 2x\right)^2\right]
\tag{1.3.33}
$$

e portanto, $|\phi(r)| < 21$, para qualquer $\alpha \in (0,\ 1)$, $r > e$. Consequentemente, como $1/u \in (1/2,\ \infty)$, para qualquer $c_0 \in (0,\ 1/8]$ escolhido, implica $\mathrm{Ric}(\frac{V}{f}) > 0$.

1.4. Finalmente,

$$
Ric(\frac{W}{h}) = \frac{1}{r^2}\left[\frac{3r^\alpha}{c_1^2} - 6 - 4\alpha^2 + 10\alpha - \frac{3(1-\alpha)}{u\ln r}\left(-\frac{1}{\ln r} + \sin 2x\right)\right]
\tag{1.3.34}
$$

Fixando $R \geq \max\{e,\ R_\alpha\}$ e, para todo $r > R$, fixando $c_1^2 \in (0,\ R^\alpha/3)$ nós obtemos que $Ric(\frac{W}{h}) > 0$.

Logo, para o R acima determinado, observamos que $(N = [R,\ \infty) \times S^7,\ \bar{g})$ tem curvatura de Ricci positiva. As constantes R, c_0 podem ser escolhidas de modo que, para uma pequena vizinhança aberta de ∂N, digamos V, nós terremos $Ric\,|_V > \varepsilon R^{-2}$, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Passo 2.

2.1. Muniremos agora o disco $D = [0,\ R] \times S^7/\{0\} \times S^7$, com uma certa métrica

$$\tilde{g} = dr^2 + f_0(r)^2 g_1 + h_0(r)^2 g_2 \tag{1.3.35}$$

e em seguida, colaremos $(N,\overline{g})$ a $(D,\tilde{g})$ ao longo de sua fronteira comum $S^7(R)$, de modo que a variedade resultante

$$\left(N \bigsqcup_{\partial N \sim \partial D} D = \mathbb{R}^8,\ g_0 = \{\tilde{g}\ ,\ \text{se } r \leq R, \text{ e } \overline{g} \text{ se } r > R\}\right) \tag{1.3.36}$$

seja uma variedade Riemanniana com métrica $\mathcal{C}^k$, g_0, fora da origem, $\{0\}$. As funções de torção f_0, h_0 são dadas por $f_0(r) = c_0 r u_0(r)$, $h_0(r) = c_1 r v_0(r)$, onde

$$u_0(r) = \sum_{i=0}^{k} \frac{u^{(i)}(R)}{i!}(r-R)^i \qquad \text{e} \qquad v_0(r) = \sum_{i=0}^{k} \frac{v^{(i)}(R)}{i!}(r-R)^i \tag{1.3.37}$$

e como $R \geq \max\{e,\ R_\alpha\}$ está fixado arbitrariamente, sem perda de generalidade podemos assumir que $\ln R = \exp n.\pi$, para algum $n \in \mathbb{N}$, fixado suficientemente grande. Sob estas hipóteses, as expressões para as constantes $u(R)$, $u'(R), \ldots,\ u^{(k)}(R)$ tornam-se consideravelmente simplificadas:

$$u(R) = \frac{1}{\ln R},\ u'(R) = -\frac{1}{R(\ln R)^2}, \ldots,\ u^{(k)}(R) = \frac{(-1)^k}{R^k(\ln R)^2}\left(a_1 + \frac{a_2}{\ln R} + \ldots + \frac{a_k}{(\ln R)^{k-1}}\right) \tag{1.3.38}$$

Desta maneira, f_0 e h_0 podem ser escritas como

$$\begin{cases} f_0(r) = c_0 r\left[\dfrac{1}{\ln R} + \dfrac{1}{R(\ln R)^2}(R-r) + \ldots + \dfrac{1}{k!R^k(\ln R)^2}\left(a_1 + \dfrac{a_2}{\ln R} + \ldots + \dfrac{a_k}{(\ln R)^{k-1}}\right)(R-r)^k\right] \\ h_0(r) = c_1 r\left[\dfrac{1}{R^\alpha} + \dfrac{\alpha}{R^{1+\alpha}}(R-r) + \ldots + \dfrac{1}{k!R^{k+\alpha}}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)(R-r)^k\right] \end{cases} \tag{1.3.39}$$

e,por construção, resulta que os k-jatos de $\overline{g}$ e $\tilde{g}$ coincidem ao longo da fronteira comum $S^7(R)$. Disto, segue que $Ric_{\tilde{g}} = Ric_{\overline{g}}$ em todos os pontos da esfera $S^7(R)$.

Observe que se considerarmos uma combinação convexa $\mathcal{C}^\infty$, conveniente (veja, por exemplo, o passo 3, abaixo) das métricas $\overline{g}$ e $\tilde{g}$ em uma vizinhança da esfera $S^7(R)$, é possível mostrar que a nova métrica obtida é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{R}^8 \setminus \{0\}$, e também tem curvatura de Ricci positiva.

2.2. Substituindo (1.3.39) no sistema (1.3.28), após alguns cálculos e estimativas vemos que $Ric_{\tilde{g}} > 0$ em $(0,\ R] \times S^7$ e $Ric_{\tilde{g}}(x) \to \infty$, se $x \to 0$. De fato, para $r \in (0, R]$ não é muito complicado mostrar

$$Ric(\xi) \geq \frac{1}{r}\left[\frac{1}{R}.C(\alpha,k) - \frac{1}{R\ln R}.\left(b_1 + \frac{b_2}{\ln R} + \ldots + \frac{b_k}{(\ln R)^{k-1}}\right)\right] \tag{1.3.40}$$

onde $C(\alpha,k)$ é uma constante positiva dependendo apenas de α, k, e os b_i são constantes dependendo somente de k. Assim, existe $R_\alpha(k) > 0$ tal que, para $R \geq R_\alpha(k)$ implica $Ric(\xi) > 0$.

Para as outras componentes da curvatura de Ricci, $Ric(\frac{V}{f_0})$ e $Ric(\frac{W}{h_0})$ é fácil estimar que para R suficientemente grande e c_0, c_1 suficientemente pequenos, $Ric(\frac{V}{f_0})$, $Ric(\frac{W}{h_0}) > 0$, e quando $r \to 0$, são da ordem $\mathcal{O}(\frac{1}{r^2})$.

Passo 3.

No sentido de resolver a singularidade cônica na origem, nós deformamos $\tilde{g}$ como segue:

Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida por

$$\phi(r) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad r \leq 0 \\ \dfrac{1}{1+\exp(\frac{1}{r} - \frac{1}{1-r})}, & \text{se} \quad 0 < r < 1 \\ 1, & \text{se} \quad r \geq 1 \end{cases} \tag{1.3.41}$$

agora fazemos, para $0 \leq r \leq R$

$$\underline{g} = dr^2 + \underline{f}(r)^2 g_1 + \underline{h}(r)^2 g_2 \tag{1.3.42}$$

onde $\underline{f}(r) = r\,[(1-\phi(r))l_1 + \phi(r)c_0 u_0(r)]$, $\underline{h}(r) = r\,[(1-\phi(r))l_2 + \phi(r)c_1 v_0(r)]$, e l_1, l_2 são constantes. Para $l_1 > 0$, $l_2 > 0$ pequenos o suficiente ($l_1 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, $l_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$) e controlando os tamanhos das constantes c_0, c_1, após alguns cálculos laboriosos mas diretos podemos ver que o espaço $(\mathbb{R}^8,\ g)$, onde a métrica g no disco, $D:\ r \leq R$, é dada por $g \equiv \underline{g}$ e, no domínio exterior, $\mathbb{R}^8 \setminus D$, $g \equiv \overline{g}$, é uma variedade Riemanniana aberta com curvatura de Ricci positiva em $\mathbb{R}^8 \setminus \{0\}$ e $Ric \to 0$ exponencialmente, conforme $r \to 0$.

Passo 4.

Finalmente, verificamos que

$$(\mathbb{R}^8, g = dr^2 + f(r)^2 g_1 + h(r)^2 g_2)\ , \tag{1.3.43}$$

onde $f(r) = \underline{f}(r)$, $h(r) = \underline{h}(r)$, se $0 \leq r \leq R$ e $f(r) = \overline{f}(r)$, $h(r) = \overline{h}(r)$, se $r \geq R$, tem fronteiras ideais de diferentes dimensões. Com efeito, considerando as sequências $r_m = \exp(\exp m\pi)$ e $s_l = \exp(\exp(\frac{\pi}{2} + l\pi))$, notamos que

$$\frac{f(r_m)}{r_m} = \frac{c_0}{\ln r_m} \to 0 \ \text{, e} \ \frac{h(r_m)}{r_m} = c_1 r_m^{-\alpha} \to 0 \ \text{, conforme } m \to \infty \tag{1.3.44}$$

implicando que a fronteira ideal de $\mathbb{R}^8$ sob esta sequência $\mathbb{R}^8(\infty)\{r_m\}$ é um ponto pois, quando r_m torna-se arbitrariamente grande, a esfera torcida

$$(S^7,\ r_m^{-2} g_{r_m}^{S^7} = r_m^{-2}(f(r_m)^2 . g_1 + h(r_m)^2 g_2)) \tag{1.3.44}$$

vai se tornando arbitrariamente pequena, de modo que, no limite ela colapsa em um ponto. Por outro lado, considerando a outra sequência, nós obtemos

$$\frac{f(s_l)}{s_l} = c_0 \left(\frac{1}{\ln s_l} + 1\right) \to c_0 \ \text{, e} \ \frac{h(s_l)}{s_l} = c_1 s_l^{-\alpha} \to 0 \ \text{, conforme } l \to \infty. \tag{1.3.45}$$

Quer dizer, sob esta sequência, a esfera $(S^7, s_l^{-2} g_{s_l}^{S^7})$ com nossa métrica de tipo produto torcido colapsa ao longo das direções normais as fibras da fibração de Hopf, i.e., a esfera S^7 colapsa sobre a fibra S^3. Portanto, na distância de Gromov-Hausdorff $(S^7, s_l^{-2} g_{s_l}^{S^7})$ tende a esfera $S^3(c_0)$ de raio c_0, ou equivalentemente, a fronteira ideal $\mathbb{R}^8(\infty)\{s_l\}$ é igual a $S^3(c_0)$. □

1.C.3. Observação. *Conforme já mencionamos na Introdução desta tese, variedades com curvatura seccional não negativa possuem único cone tangente no infinito, por outro lado, se impomos apenas que a curvatura Ricci é não negativa, já não temos mais unicidade e vários outros fenômenos podem ocorrer. Nos próximos capítulos consideraremos uma noção de curvatura que não é tão forte (restritiva) como a noção de curvatura seccional, mas também não é tão fraca como a noção de curvatura Ricci, a saber variedades com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa, e procuraremos estudar as relações de uma tal variedade com sua(s) fronteira(s) ideal(is) (mostrando que para estas classes de variedades já temos rigidez das fronteiras ideais).*

CAPÍTULO 2

2.A. Principais resultados deste capítulo

Nosso principal objetivo, neste capítulo, é apresentar um Teorema de Comparação de Toponogov aplicado às variedades com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa, quer dizer, variedades pontuadas (M^n, o, g) cuja curvatura minimal radial em cada ponto p, $K_o^{min}(p) \geq -k(d_M(o,p))$, onde k é uma função monótona não negativa com decaimento quadrático. Tais variedades serão denotadas por (M^n, o, g, k). Compararemos variedades do tipo (M^n, o, g, k) com superfícies rotacionalmente simétricas $M^2_{-k} = (\mathbb{R}^2, 0, ds^2 = dt^2 + J_k(t)^2 d\phi^2)$ (onde (t, ϕ) são coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$, e J_k é a solução da equação: $J_k'' - kJ_k = 0$). Em particular, surgem números importantes (os quais podem ser vistos como invariantes geométricos globais da variedade e que podem trazer informações acerca de sua geometria no infinito) definidos por $b_0(k) := \int_0^\infty tk(t)\, dt$ e $b_1(k) := \int_0^\infty u(t)\, dt$, onde u é solução da equação de Ricatti: $u' = u^2 - k$. Também apresentaremos algumas propriedades acerca de triângulos, que serão de interesse para os próximos capítulos. Optamos por reservar este capítulo unicamente ao estudo do Teorema de Toponogov, devido à sua fundamental importância (não só para as aplicações que serão feitas nesta Tese, mas de maneira muito mais ampla, para o desenvolvimento da Geometria Global das variedades). Precisamente, nossos principais resultados neste capítulo são:

2.A.1. Teorema de Comparação de Toponogov Generalizado, ou TCTG.
Seja (M^n, o, g, k) uma variedade com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa. Sob as hipóteses:

(H1) $\triangle(o, p_1, p_2)$ é um triângulo geodésico (generalizado) em uma variedade Riemanniana (M^n, o, g): os lados γ_1 e γ_2 são geodésicas minimizantes e γ_0 basta ser uma geodésica;

(H2) em cada ponto $p \in M^n$ as curvaturas minimais radiais são limitadas inferiormente por $-k(d_M(o,p)) \leq 0$;

(H3) o polo $\overline{o}$ de M^2_{-k} será um dos vértices do triângulo de comparação $\overline{\triangle}(\overline{o}, \overline{p}_1, \overline{p}_2)$

então valem as seguintes conclusões:

(a) se $l_i = \overline{l}_i$ para todos os lados, então $\angle p_1 \geq \angle \overline{p}_1$ e $\angle p_2 \geq \angle \overline{p}_2$. E se $\angle p_1 = \angle \overline{p}_1$, então existe uma parte de superfície totalmente geodésica em M^n, delimitada pelos lados do triângulo, e de curvatura $-k(t)$ nos pontos distando t de o

(b) se $l_0 = \overline{l}_0$, $l_1 = \overline{l}_1$, e $\angle p_2 \leq \angle \overline{p}_2$, então $l_2 \leq \overline{l}_2$

(c) dada uma dobradiça (hinge) $(\gamma_1, \gamma_2, \theta)$ em M^n, onde $\theta = \angle(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$, então existe uma dobradiça em M^2_{-k}, $(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \theta)$ com $L(\gamma_i) = L(\overline{\gamma}_i) = l_i$, $i = 1, 2$ e tal que

$$d_M(\gamma_1(l_1), \gamma_2(l_2)) \leq d_{-k}(\overline{\gamma}_1(l_1), \overline{\gamma}_2(l_2))$$

No caso de valer a igualdade, na desigualdade acima, então existe uma parte de superfície totalmente geodésica, S, limitada por γ_1, γ_2 e uma geodésica minimal ligando $\gamma_1(l_1)$ a $\gamma_2(l_2)$) tal que em cada ponto $p \in S$ a curvatura vale $-k(d_M(o,p))$.

2.A.2. Teorema. *Sob as mesmas hipóteses do teorema anterior (TCTG), e assumindo que a geodésica que conecta p_1 a p_2, $\gamma_0 : [0, l] \to M^n$ é minimizante, então valem as seguintes propriedades*

(a) $d_M(o, \gamma_0(t)) \geq d_{-k}(\overline{o}, \overline{\gamma}_0(t))$ para todo $t \in [0, l]$ (onde $l = d_M(p_1, p_2)$).

(b) (Convexidade de Alexandrov) Seja $\overline{\theta}_{s,t}$ o ângulo em $\overline{o}$ do triângulo de comparação $\overline{\triangle}(\overline{o}, \overline{x}_s, \overline{y}_t)$ em M^2_{-k}, correspondendo a $\triangle(o, \sigma_1(s), \sigma_2(t))$ em M^n. Então $\overline{\theta}_{s,t}$ é uma função monótona não crescente em s, t.

Como corolários, temos uma estimativa para desigualdades triangulares, que se mostrará muito útil nos capítulos 3 e 4

2.A.3. Proposição (desigualdades triangulares). *Sejam a, $\varepsilon \in (0,1)$ e seja $\triangle(o,p_1,p_2)$ um triângulo geodésico generalizado em uma variedade Riemanniana com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa (M^n,o,g,k). Suponha ainda que $l_1 \leq (1-\varepsilon)l_2$ e que p_0 é o ponto base, o, de (M^n,o). Então, verificam-se as seguintes estimativas:*

(a) $$\cos(\angle p_0) \geq \sqrt{1-a^2\beta^2\varepsilon^2} \;\Rightarrow\; l_0 \leq l_2 - l_1\sqrt{1-a^2}$$

(b) $$\cos(\angle p_2) \geq -\sqrt{1-a^2} \;\Rightarrow\; l_2 \leq l_0 + l_1\sqrt{1-a^2\beta^2\varepsilon^2}$$

(c) $$\text{se } \angle p_0 \text{ é agudo} \;\Rightarrow\; |\operatorname{sen}(\angle p_0)| \geq \beta^2\varepsilon^2|\operatorname{sen}(\angle p_1)|.$$

2.B. Porque estudar variedades que são (radialmente) assintoticamente não negativas?

Em vários trabalhos independentes, notou-se que resultados que valiam para variedades abertas com curvatura seccional não negativa mostraram-se válidos para variedades com curvatura seccional não negativa fora de um subconjunto compacto (veja por exemplo [GW3], [L], [Ko]); a extensão natural seria perguntar se aqueles mesmos resultados e outros também valeriam para variedades com curvatura não negativa no infinito (e como definir esta noção). No caso em que as curvaturas possuem um decaimento mais rápido que quadrático, uma maneira possível de se abordar este problema, pode ser encontrada no artigo "Lower curvature bounds, Toponogov's Theorem, and bounded topology" de U. Abresch [Ab], onde são estudadas variedades com curvatura assintoticamente não negativa, as quais generalizam de uma forma bastante interessante a noção de variedade aberta com curvatura seccional não negativa no infinito; é feito também um Teorema Generalizado de Toponogov, para esta classe de variedades. A partir daí vários resultados, acerca das fronteiras ideais de tais variedades foram obtidos (veja, por exemplo, artigos de A. Kasue [Ka1]). Por outro lado, uma leitura atenta dos resultados de Abresch e Kasue nos mostra que a condição sobre o decrescimento da curvatura seccional pode ser, sem perda de generalidade, reduzido a uma condição sobre o decrescimento de sua curvatura minimal radial, pois uma substancial parte das informações que se pode obter acerca da geometria de uma variedade com ponto base (M^n,p), é dado pelo conhecimento de como se "espalham" as geodésicas, a partir de p (ou seja o que interessa é o comportamento dos campos de Jacobi radiais). Por exemplo, o Teorema de Bonnet-Myers e o Teorema de Comparação de Bishop-Gromov valem para variedades com curvatura minimal radial limitada inferiormente e os Teoremas de Comparação de Rauch e Berger admitem as seguintes versões:

2.B.1. Teorema de Comparação de Rauch. *Sejam (M^n,p), (M_0^{n+m},p_0) variedades Riemannianas pontuadas. Sejam $\gamma_0 : [0,l] \to M_0^{n+m}$, $\gamma : [0,l] \to M^n$ geodésicas radiais ($\gamma(0)=p$ e $\gamma_0(0)=p_0$) e ponha $\gamma_0' = T_0$, $\gamma' = T$. Assuma que para cada $t \in [0,l]$ as curvaturas radiais $K_{p_0}^{min}(\gamma_0(t)) \geq K_p^{min}(\gamma(t))$ e assuma também que para nenhum $t \in [0,l]$ tem-se $\gamma_0(t)$ conjugado a $\gamma_0(0)$ ao longo de γ_0.*

Sejam V, V_0 campos de Jacobi ao longo de γ e γ_0 respectivamente, tais que $V(0)$, $V_0(0)$ são tangentes ao longo de γ, γ_0 e

(2.2.1) $$\|V(0)\| = \|V_0(0)\|\,, \qquad \langle V'(0),T(0)\rangle = \langle V_0'(0),T_0(0)\rangle\,, \qquad \|V'(0)\| = \|V_0'(0)\|$$

Então, para todo $t \in [0,l]$ tem-se

(2.2.2) $$\|V(t)\| \leq \|V_0(t)\|$$

2.B.2. Teorema de Comparação de Berger. *Mantendo as mesmas notações do Teorema 2.B.1, assumamos que para todo $t \in [0,l]$ as curvaturas radiais $K_{p_0}^{min}(\gamma_0(t)) \geq K_p^{min}(\gamma(t))$ e assumamos também que para nenhum*

$t \in [0,l]$ tem-se $\gamma_0(t)$ um ponto focal da subvariedade geodésica $N_0 = \{\exp_{p_0}(\varepsilon v) \big| \langle v, T_0(0)\rangle = 0$ e $\|v\| = 1\}$ definida por $T_0(0)$.

Sejam V, V_0 campos de Jacobi ao longo de γ e γ_0 respectivamente, tais que $V(0)$, $V_0(0)$ são tangentes ao longo de γ, γ_0 e

$$\|V(0)\| = \|V_0(0)\| \,, \qquad \langle V(0), T(0)\rangle = \langle V_0(0), T_0(0)\rangle \,, \qquad \|V'(0)\| = \|V_0'(0)\| \tag{2.2.3}$$

Então, para todo $t \in [0,l]$ tem-se

$$\|V(t)\| \leq \|V_0(t)\| \tag{2.2.4}$$

Em particular, vale também o

2.B.3. Corolário do Teorema de Comparação de Berger. *Como acima, sejam γ, γ_0 geodésicas em (M,p) e (M_0,p_0) parametrizadas em $[0,l]$, com vetores tangentes T, T_0, respectivamente. Sejam E, E_0 campos vetoriais unitários paralelos, ao longo de γ e γ_0, perpendiculares a T e T_0 em todos os pontos de γ e γ_0. Sejam $c : [0,l] \to M$, $c_0 : [0,l] \to M_0$ curvas suaves definidas por*

$$c(t) = \exp(f(t)E(t)) \qquad c_0(t) = \exp(f(t)E_0(t)) \tag{2.2.5}$$

onde $f : [0,l] \to \mathbb{R}$ é uma função suave. E assuma que para cada t, a geodésica $s \mapsto \exp(s.f(t).E_0(t))$ não contém pontos focais da subvariedade geodésica definida por $\eta_0{}'$. Então

$$L(c) \geq L(c_0) \tag{2.2.6}$$

E, conforme citado na Introdução, de fundamental importância, para o desenvolvimento do conhecimento da geometria das variedades de curvatura minimal radial limitada inferiormente, temos o

2.B.4. Teorema de Comparação de Toponogov-Machigashira-Shiohama (TCTMS). *Seja (M^n,p) uma variedade Riemanniana com curvatura minimal radial limitada inferiormente, $K_p^{min} \geq \delta$, para algum $\delta \in \mathbb{R}$.*

(a) Comparação de triângulos: sejam γ_1 e γ_2 segmentos geodésicos em M^n, com $\gamma_1(0) = \gamma_2(1) = p$ e seja γ_0 um segmento geodésico minimizante tal que $\gamma_0(0) = \gamma_1(1)$ e $\gamma_0(1) = \gamma_2(0)$. Então existem segmentos geodésicos minimizantes $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ e $\tilde{\gamma}_0$ em M_δ^2 com $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(1)$, $\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(1)$, $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_2(1)$ e satisfazem as seguintes propriedades:

$$L(\gamma_i) = L(\tilde{\gamma}_i) \qquad \text{para} \quad i = 0,1,2 \tag{2.2.7}$$

e

$$\begin{aligned} \theta_1 &:= \angle(-\dot{\gamma}_1(1), \dot{\gamma}_0(0)) \geq \angle(-\dot{\tilde{\gamma}}_1(1), \dot{\tilde{\gamma}}_0(0)) =: \tilde{\theta}_1 \\ \theta_2 &:= \angle(-\dot{\gamma}_0(1), \dot{\gamma}_2(0)) \geq \angle(-\dot{\tilde{\gamma}}_0(1), \dot{\tilde{\gamma}}_2(0)) =: \tilde{\theta}_2 \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Mais ainda, se $\theta_1 = \tilde{\theta}_1 \neq \pi$, então existe uma parte de superfície totalmente geodésica de curvatura constante δ limitada por γ_1 e γ_0 e uma geodésica minimizante conectando p a $\gamma_0(1)$ (que não é necessariamente γ_2) em M.

(b) Comparação de dobradiças: para quaisquer geodésicas minimizantes $\sigma_i : [0,1] \to M$, com $i = 1,2$, partindo de p, i.e. $\sigma_1(0) = \sigma(0) = p$, temos os seguintes resultados

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

(b1) Sejam $\tilde{\sigma}_i : [0,1] \to M^{\delta}_2$, *com* $i = 1,2$, *geodésicas minimizantes partindo de um mesmo ponto, tais que*

$$L(\sigma_1) = L(\sigma_2) \qquad \text{para} \quad i = 1,2 \tag{2.2.9}$$

e

$$\angle(-\dot{\sigma}_1(0), \dot{\sigma}_2(0)) = \angle(-\dot{\tilde{\sigma}}_1(0), \dot{\tilde{\sigma}}_2(0)) \tag{2.2.10}$$

Então

$$d_M(\sigma_1(1), \sigma_2(1)) \leq d_{\delta}(\tilde{\sigma}_1(1), \tilde{\sigma}_2(1)) \tag{2.2.11}$$

onde d_M *e* d_{δ} *são, respectivamente, as distâncias em* M^n *e* M^2_{δ}

(b2) (Convexidade de Alexandrov). Seja $\tilde{\theta}_{s,t}$ *o ângulo em* $\tilde{p}$ *do triângulo* $\tilde{\Delta} = (\tilde{p}, \tilde{x}_s, \tilde{y}_t)$ *em* M^2_{δ} *correspondendo ao triângulo* $\Delta = (p, \sigma_1(s), \sigma_2(t))$ *em* M. *Então* $\tilde{\theta}_{s,t}$ *é monótona não crescente em* s, t.

(b3) Se em (b1), vale a igualdade, então existe uma parte de superfície totalmente geodésica de curvatura constante δ *limitada por* σ_1 *e* σ_2 *e uma geodésica minimal conectando* $\sigma_1(1)$ *a* $\sigma_2(1)$.

2.C. Variedades com Curvatura Minimal Radial Assintoticamente Não Negativa (CRANN)

Os resultados que estarei desenvolvendo a seguir são, na verdade, simples reformulações dos resultados apresentados em Abresch e Kasue, quero dizer, os resultados que seguem já foram desenvolvidos e demonstrados pelos autores citados, mas num contexto de menor generalidade.

2.C.1. Definição. *Uma variedade Riemanniana completa* (M^n, o, g) *com ponto base* o *é dita ser uma variedade com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa se existe uma função contínua não negativa e não crescente* $k : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *tal que*

(a) $b_0(k) := \int_0^{\infty} rk(r)\, dr < \infty$

(b) as curvaturas minimais radiais em cada ponto $p \in M^n$ *são limitadas inferiormente por* $-k(d_M(o,p))$.

2.C.2. Notação. *Diremos, por simplicidade, que uma variedade nas condições da definição acima é uma variedade CRANN (com Curvatura minimal Radial Assintoticamente Não Negativa) e a denotaremos por* (M^n, o, g, k)

Nossa definição (2.C.1) é baseada na seguinte definição encontrada no artigo "Lower curvature bounds, Toponogov's theorem, and bounded topology" de U. Abresch (cf. [Ab]):

2.C.3. Definição. *Uma variedade Riemanniana completa* (M^n, o, g) *com ponto base* o *é dita ser uma variedade com curvatura assintoticamente não negativa se existe uma função contínua não negativa e não crescente* $k : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *tal que*

(a) $b_0(k) := \int_0^{\infty} rk(r)\, dr < \infty$ *e*

(b) as curvaturas seccionais em cada ponto $p \in M^n$ *são limitadas inferiormente por* $-k(d_M(o,p))$.

2.C.4. Observações.

(i) Vale notar que a condição sobre a convergência da integral $b_0(k)$ *implica uma condição sobre o decaimento do limitante inferior da curvatura* k; *em particular, é claro que quando* $r \to \infty$ *tem-se* $k(r) \to 0$, *ou seja, para pontos* $p \in M^n$ *arbitrariamente afastados do ponto base* o, *tem-se que a curvatura minimal radial (seccional) vai sendo forçada a ser não negativa* ($K^{min}_o(p) \geq -k(d_M(o,p)) \nearrow 0$).

(ii) No caso em que a função $k \equiv 0$, diremos simplesmente que (M^n, o) é uma variedade com curvatura minimal radial não negativa.

(iii) A classe das variedades CRANN compreende as classes de variedades com curvatura seccional não negativa, variedades com curvatura seccional não negativa fora de um compacto, variedades com curvatura minimal radial não negativa e variedades com curvatura seccional assintoticamente não negativa. Assim, cada resultado válido para variedades CRANN, automaticamente vale para as variedades acima citadas.

(iv) Pode ocorrer que para pontos próximos do ponto base o, em uma variedade (CRANN) com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa (M^n, o, g, k), a curvatura minimal radial seja muito negativa.

(v) É preciso salientar que existem algumas diferenças essenciais entre a estrutura das variedades com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa para as variedades com curvatura minimal radial não negativa. Para ver isto, basta compararmos os seguintes resultados de Y. Machigashira, M. P. do Carmo e C. Xia com os exemplos subsequentes.

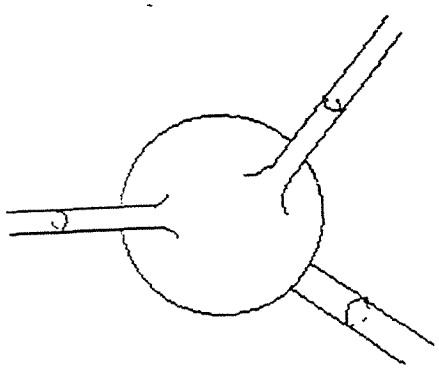
2.C.5. Teorema ([Ms2 -Main Theorem]). *Seja M^n uma variedade aberta. Assuma que $K_o^{min} \geq 0$, para algum $o \in M^n$. Então*

(a) O conjunto de pontos críticos da função distância de o, $d_M(o,.)$ é limitado e consequentemente, M^n é finitamente conexo.

(b) M^n tem no máximo dois fins.

(c) Se M^n possui uma linha, então M^n é difeomorfo a $N \times \mathbb{R}$, onde N é uma hipersuperfície de M^n. Mais ainda, a projeção $M^n \to \mathbb{R}$ é uma submersão Riemanniana.

2.C.6. Exemplo. *Para $n \geq 2$, esfera S^n menos um número finito, digamos k, de pontos pode ser munida de métrica completa com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa. Em particular, tal espaço terá k fins. Por exemplo excluindo da esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ três discos d_1, d_2 e d_3 de raio δ, suficientemente pequeno, colamos em cada $\partial d_i \subset S^2$, $i = 1, 2, 3$, um cilindro semi infinito $S^1(\delta) \times [0, \infty)$ de curvatura nula e suavizamos os pontos de colagem obtendo assim um espaço com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa com 3 fins (ou seja, o resultado (b) do Teorema 2.C.5, não vale para toda a classe das variedades com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa). Todavia, conforme veremos no Teorema 3.B.3, para cada variedade com curvatura minimal assintoticamente não negativa (ou seja, a função k da Definição 2.A.5 está fixada), o número de fins é finito.*



2.C.7 Conjectura 1. *Existe um número $\varepsilon > 0$ tal que se $b_0(k) < \varepsilon$ então valem as mesmas conclusões do Teorema 2.C.5*

Com relação ao crescimento de volume, temos:

2.C.8. Teorema ([dCX - Teorema 1.3]). *Seja (M^n, o) uma variedade com curvatura minimal radial não negativa, $K_o^{min} \geq 0$, e ponto base o. Se o crescimento de volume Euclidiano satisfaz*

$$\alpha_M := \lim_{r\to\infty} \frac{Vol(B(o,r))}{w_n r^n} \geq \frac{1}{2} \tag{2.3.1}$$

onde w_n é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$, então M^n é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Se M^n é uma variedade com curvatura minimal radial não negativa, temos a validade do Teorema de Comparação de Bishop-Gromov (compare com Capítulo 3, Corolário 3.D.2) implicando que $0 \leq \alpha_M \leq 1$.

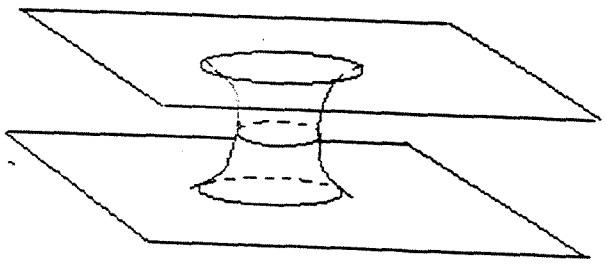
2.C.9. Exemplo. *Considere a superfície de rotação, Σ_c, em $\mathbb{R}^3$, gerada pela rotação em torno do eixo z, da curva $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definida por*

$$c(t) := \begin{cases} (0, -t, -1) , & se\ t < -2 \\ (0, 2 - \cos(t\frac{\pi}{4}), \operatorname{sen}(t\frac{\pi}{4})) , & se\ -2 \leq t \leq 2 \\ (0, t, 1) , & se\ t > 2 \end{cases} \tag{2.3.2}$$

de modo que a superfície de rotação Σ_c pode ser parametrizada (a menos de um meridiano) por $S : \mathbb{R} \times (0, 2.\pi) \to \Sigma_c$ e

$$S(t,u) := \begin{cases} (-t\cos u, -t\operatorname{sen} u, -1), & se\ (t,u) \in (-\infty, -2) \times (0, 2\pi) \\ ((2 - \cos(t\frac{\pi}{4}))\cos u, (2 - \cos(t\frac{\pi}{4}))\operatorname{sen} u, \operatorname{sen}(t\frac{\pi}{4})), & se\ (t,u) \in [-2,2] \times (0, 2\pi) \\ (t\cos u, t\operatorname{sen} u, 1), & se\ (t,u) \in (2, \infty) \times (0, 2\pi) \end{cases} \tag{2.3.3}$$

é fácil ver que esta superfície, com métrica induzida de $\mathbb{R}^3$, é difeomorfa à soma conexa de $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{R}^2$, $\Sigma_c \approx \mathbb{R}^2 \# \mathbb{R}^2$, tem curvatura Gaussiana assintoticamente não negativa (nula, fora de uma bola com raio suficientemente grande), crescimento de volume Euclidiano $\alpha_{\Sigma_c} = 2$ sem que tenhamos Σ_c difeomorfa a $\mathbb{R}^2$. De maneira mais geral, podemos mergulhar a esfera menos k-pontos $S^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$ em $\mathbb{R}^m$, para algum $m = m(k)$ suficientemente grande de modo que esta superfície mergulhada, Σ_k, tem curvatura minimal radial assintoticamente não negativa e crescimento de volume Euclidiano $\alpha_{\Sigma_k} = k$.



2.C.10 Conjectura 2. *Existe um número $\varepsilon > 0$ tal que se $b_0(k) < \varepsilon$ então valem as mesmas conclusões do Teorema 2.C.8*

No Capítulo 3 mostraremos que as Conjecturas 1 e 2 são verdadeiras.

2.D. Variedade de Comparação - Teorema de Comparação de Rauch

Principiamos nossos estudos sobre variedades CRANN (com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa), discutindo inicialmente alguns aspectos da estrutura dos espaços que nos servirão de modelo de comparação.

No Teorema de Comparação de Toponogov, comparamos triângulos em uma variedade com curvatura seccional limitada inferiormente com triângulos em superfícies completas, de curvatura constante e topologia trivial (formas espaciais). Aqui, vamos estender o Teorema de Comparação de modo a (1) permitir que os espaços de comparação sejam superfícies rotacionalmente simétricas, simplesmente conexas, com curvatura não positiva ($-k(t)$); (2) não exigiremos que as curvaturas seccionais sejam limitadas inferiormente, mas apenas que as curvaturas minimais radiais o sejam.

Nossa generalização do Teorema de Comparação de Triângulos não requer hipóteses adicionais (como acontece, por exemplo, quando queremos comparar uma variedade com curvatura limitada inferiormente por alguma constante positiva c, com a esfera de curvatura c), já que os modelos utilizados são de curvatura não positiva. M^n_{-k}.

Uma maneira de obtermos um espaço de comparação (N, p) com ponto base p, radialmente simétrico, tal que em cada ponto $q \in N$ a sua curvatura seccional satisfaz $K_M(q) = -k(d_M(p,q))$ é munindo o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n = [0,\infty) \times S^{n-1}/\{0\} \times S^{n-1}$ com métrica do tipo produto torcido dada por $g_k = dr^2 + J_k(r)^2 d\Theta^2$ onde $d\Theta^2$ é a forma métrica de curvatura $= 1$ em S^{n-1}, e $J_k : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é a solução da equação

$$J_k''(t) - k(t)J_k(t) = 0\,, \qquad \text{com} \qquad J_k(0) = 0\,, \quad J_k'(0) = 1 \tag{2.4.1}$$

Ao espaço $(\mathbb{R}^n, 0, g_k)$ munido com a métrica acima vamos denotar simplesmente por M^n_{-k}.

A função J_k como acima satisfaz a uma propriedade de quase linearidade que nos mostrará que M^n_{-k} é uma variedade com polo (i.e., a aplicação exponencial $\exp_0$ é um difeomorfismo global).

2.D.1 Lema (cf. Lema 4.5 de [GW5]**).** *Seja J_k a solução da equação*

$$J_k''(t) - k(t)J_k(t) = 0\,, \qquad \text{com} \qquad J_k(0) = 0\,, \quad J_k'(0) = 1 \tag{2.4.2}$$

Então as condições (a), (b) e (c), abaixo, são equivalentes

(a) Existe uma constante $\eta \geq 1$, tal que $r \leq J_k(r) \leq \eta r$.

(b) Existe uma constante $\eta \geq 1$, tal que $1 \leq J_k' \leq \eta$.

(c) $\int_0^\infty sk(s)\, ds < \infty$

Mais ainda, assumindo (c) podemos tomar em (a) e (b) $\eta < \exp\{\int_0^\infty sk(s)\, ds\}$ se $k \not\equiv 0$.

(d) Em particular, no caso em que temos $k \equiv 0$, os resultados acima são uma trivialidade posto que a solução J_0 da equação $J_0''(t) = 0$, com $J_0(0) = 0$, $J_0'(0) = 1$ é dada por $J_0(t) = t$

Prova [GW5]. A implicação (b) $\Rightarrow$ (a) é simples. Para mostrar que (a) $\Rightarrow$ (b), note que $J_k''(t) = k(t)J_k(t) \geq 0$. Logo J_k é uma função convexa, crescente: $J_k'(t_2) \geq J_k'(t_1) \geq 1$, quaisquer que sejam $t_2 \geq t_1 \geq 0$; além disso,

$$J_k(t_2) = J_k(t_1) + J_k'(t_1)(t_2 - t_1) + \frac{1}{2!}J_k''(t_0)(t_2 - t_1)^2 \geq J_k(t_1) + J_k'(t_1)(t_2 - t_1) \tag{2.4.3}$$

para algum $t_0 \in (t_1, t_2)$. Suponhamos, por absurdo, que J_k' não seja limitada, $J_k' \nearrow +\infty$ e seja $r_0 \geq 0$, tal que $J_k'(r_0) = 2\eta$. Então para todo $r > r_0$, $J_k(r) \geq J_k(r_0) + 2\eta.(r - r_0)$ por (2.4.3). Isto implica que $J_k(r)/r \to 2\eta > \eta$, conforme $r \to \infty$, o que é uma contradição

(b)⇒(c): $J_k'' = kJ_k \Rightarrow J_k'(r) - 1 = \int_0^r k(s)J_k(s)\, ds$, logo $\int_0^r k(s)J_k(s)\, ds \leq \eta - 1$, para todo $r \geq 0$. Por (2.4.3), qualquer que seja $r \geq 0$, $J_k(r) \geq r$, e consequentemente

$$\int_0^r sk(s)\, ds \leq \int_0^r J_k(s)k(s)\, ds \leq \eta - 1, \qquad \text{para todo } r \geq 0 \tag{2.4.5}$$

donde segue (c).

(c)⇒(b): $J_k' \geq 1$ ja que $J_k'' \geq 0$. Afim de mostrar que $J_k' \leq \eta$, para algum η, definamos $\Phi := \frac{J_k}{J_k'}$. Como $J_k'' = kJ_k$, segue que $\Phi' = 1 - k\Phi^2$ e, portanto, $\Phi' \leq 1$ implicando $\Phi(r) \leq r$, pois $\Phi(0) = 0$. Agora, $J_k''/J_k' = k\Phi$, integrando esta igualdade, obtemos

$$\ln J_k'(r) = \int_0^r k(s)\Phi(s)\, ds \leq \int_0^r sk(s)\, ds \leq \int_0^\infty sk(s)\, ds < \infty \tag{2.4.6}$$

ou seja

$$J_k'(r) \leq \exp\{\int_0^\infty sk(s)\, ds\} < \infty, \qquad \text{para todo } r \geq 0 \tag{2.4.7}$$

Se $k \not\equiv 0$, então $k(r) > 0$ (e, por conseguinte, $k(r) > 0$ em $(r - l, r + l)$, para algum $l > 0$). Daí, $\Phi'(r) = 1 - k(r)\Phi(r)^2 < 1$, $\Phi > 0$ em $(0, \infty)$. Logo $\Phi(x) < x$, para todo $x \geq r$. Isto implica

$$(\ln J_k')'(x) = k(x)\Phi(x) < xk(x), \qquad \text{se } x \geq r \tag{2.4.8}$$

Desta maneira, para algum $\varepsilon > 0$,

$$\ln J_k'(x) < \int_0^x sk(s)\, ds - \varepsilon, \qquad \text{se } x \geq r \tag{2.4.9}$$

ou

$$J_k'(x) < e^{-\varepsilon}.\exp\{\int_0^x sk(s)\, ds\} \leq e^{-\varepsilon}.\exp\{\int_0^\infty sk(s)\, ds\} < \exp\{\int_0^\infty sk(s)\, ds\}, \qquad \text{em } [r, \infty) \tag{2.4.10}$$

Como J_k' é não decrescente em $[0, \infty)$, segue que (2.4.10) vale em $[0, \infty)$. □

Observemos que se $\gamma : [0, l] \to M_{-k}^n$ é uma geodésica radial ($\gamma(0) = 0$) então um campo de Jacobi, Y_k, sobre γ e satisfazendo as condições $Y_k(0) = 0$ e $\frac{DY_k}{ds}(0) = Y_k'(0) = w$, para algum $w \in T_0M_{-k}^n$, é dado por

$$Y_k(t) = P_{\gamma(t)}(J_k(t)w) \tag{2.4.11}$$

onde $P_{\gamma(t)}$ é o transporte paralelo de w ao longo de γ, de 0 a $\gamma(t)$.

Consequentemente, pelo Lema 2.D.1 e pela observação acima, concluímos que nenhuma geodésica radial γ possui ponto conjugado a $\gamma(0)$. Logo, M_{-k}^n é uma variedade com polo 0.

Veja que $\|Y_k(s)\| = J_k(s)\|w\|$, $\|Y_k'(s)\| = J_k'(s)\|w\|$ e o índice ao longo de γ, toma a seguinte forma

$$I_s(Y_k, Y_k) = \langle Y_k(s), Y_k'(s)\rangle = J_k(s)J_k'(s)\|w\|^2 = \frac{1}{2}(J_k^2)'(s)\|w\|^2 \tag{2.4.12}$$

Em seguida, por completicidade, apresentamos o clássico Teorema de Comparação de Rauch, aplicado ao nosso contexto.

2.D.2. Teorema de Comparação de Rauch. *Sejam (M^{n+m}, o, g, k) uma variedade CRANN, M^n_{-k} variedade de comparação, e γ, $\gamma_k : [0,l] \to M^{n+m}$, M^n_{-k} geodésicas radiais unitárias. Assumamos que $\gamma(t)$ não é conjugado a $\gamma(0)$ para nenhum valor de $t \in [0,l]$. Se Y, Y_k são campos de Jacobi ao longo de γ, γ_k tais que*

$$\|Y(0)\| = 0 = \|Y_k(0)\|, \quad \|Y'(0)\| = \|Y_k'(0)\| \text{ e } \langle Y'(0), \gamma'(0)\rangle = \langle Y_k'(0), \gamma_k'(0)\rangle \tag{2.4.13}$$

então $\|Y(t)\| \leq \|Y_k(t)\|$, para todo $t \in [0,l]$. E, se para algum $t_0 \in (0,l]$, ocorrer $\|Y(t_0)\| = \|Y_k(t_0)\|$ $(= J_k(t_0)\|Y'(0)\|)$, então $K_M(\gamma'(t), Y(t)) = -k(t)$, para todo $0 \leq t \leq t_0$.

Prova. Como usual, decompondo Y e Y_k em componente tangencial (a γ, γ_k) e vertical, vemos que é suficiente considerarmos o caso em que Y, Y_k são normais a γ, γ_k.

Fixemos $t_0 \in (0,l]$ e vamos mostrar que $\|Y(t)\| \leq \|Y_k(t)\|$:

Como γ n ao possui pontos conjugados a $\gamma(0)$ em $(0,l]$ segue que Y não se anula em $(0,l]$ (ou é $\equiv 0$ em $[0,l]$, e, neste caso, vale trivialmente a afirmação do Teorema).

Vamos considerar um mergulho isométrico $i_0 : T_0 M^n_{-k} \to T_o M^{m+n}$ tal que

$$i_0(\gamma_k'(0)) = \gamma'(0) \quad \text{e} \quad i_0(Y_{k,t_0}(0)) = \frac{\|Y_k(t_0)\|}{\|Y(t_0)\|} Y_{t_0}(0) \tag{2.4.14}$$

onde Y_{t_0}, Y_{k,t_0} são (os únicos) campos vetoriais paralelos ao longo de γ, γ_k tais que $Y_{t_0}(t_0) = Y(t_0)$ e $Y_{k,t_0} = Y_k(t_0)$.

Estendemos i_0 a uma isometria

$$i : \mathcal{C}^\infty(T\gamma_k^\perp) \to \mathcal{C}^\infty(T\gamma^\perp) \tag{2.4.15}$$

(onde $\mathcal{C}^\infty(T\gamma^\perp)$ denota o fibrado normal a γ em M^{n+m}) definida por

$$i(X_k(t)) := P_{\gamma(t)} \circ i_0 \circ P^{-1}_{\gamma_k(t)} \tag{2.4.16}$$

para qualquer campo vetorial $X_k \in \mathcal{C}^\infty(T\gamma^\perp)$. Vemos então que

$$\frac{d}{dt}\|Y_k\|^2(t_0) = 2\langle Y_k, Y_k'\rangle(t_0) =$$

$$= 2\langle Y_k, Y_k'\rangle\Big|_0^{t_0} = 2I_{t_0}(Y_k, Y_k) = 2\int_0^{t_0} \langle Y_k'(t), Y_k'(t)\rangle - \langle R(Y_k(t), \gamma_k'(t))\gamma_k'(t), Y_k(t)\rangle dt =$$

$$= 2\int_0^{t_0} \langle Y_k'(t), Y_k'(t)\rangle - \frac{(-k(t))}{\|Y_k(t)\|^2} dt \geq \quad (\text{pois } K_o^{min}(p) \geq -k(d_M(o,p)))$$

$$\geq 2\int_0^{t_0} \langle i(Y_k'(t)), i(Y_k'(t))\rangle - \frac{K_M(\gamma'(t), i(Y_k(t)))}{\|Y_k(t)\|^2}\, dt$$

$$= 2\int_0^{t_0} \langle i(Y_k'(t)), i(Y_k'(t))\rangle - \langle R(i(Y_k(t)), \gamma'(t))\gamma'(t), i(Y_k(t))\rangle dt = 2I_{t_0}(i(Y_k), i(Y_k)) \geq$$

pelo Lema do índice

$$\geq 2\frac{\|Y_k(t_0)\|^2}{\|Y(t_0)\|^2} I_{t_0}(Y,Y) = \frac{\|Y_k(t_0)\|^2}{\|Y(t_0)\|^2}\frac{d}{dt}\|Y\|^2(t_0) \tag{2.4.17}$$

ou seja,

$$\log(\|Y_k\|^2)'(t) = \log(\|Y\|^2)'(t), \quad \forall t \in [0, t_0] \tag{2.4.18}$$

Por integração, obtemos $\|Y_k(t_0)\| \geq \|Y(t_0)\|$, o que prova a primeira parte deste Teorema.

No caso de termos igualdade $\|Y_k(t_0)\| = \|Y(t_0)\|$, para algum $t_0 \in [0, l]$, observamos que todas as desigualdades anteriores convertem-se em igualdades. Em particular, $I_{t_0}(i(Y_k), i(Y_k)) = I_{t_0}(Y, Y)$ implicando que $i(Y_k(t)) = Y(t)$ para todo $t \in [0, t_0]$; além disso, a curvatura seccional (minimal radial) ao longo de γ, $K_M(\gamma'(t), Y(t)) = -k(t)$ (integrando localmente, ao longo de γ, esta distribuição obtemos uma parte de superície totalmente gedésica, com curvatura $-k(d_M(o, .))$). Está demonstrado o Teorema. □

Como consequência do Teorema de Rauch, temos o seguinte teorema global de comparação[2] que será essencial na demonstração de Teorema de Pré-compacidade para a classe das variedades CRANN, no próximo capítulo.

2.D.3. Teorema. *Seja (M^n, o, g, k) uma variedade CRANN e M^n_{-k} variedade de comparação. Fixada uma isometria*

$$i : T_{\overline{o}} M^n_{-k} \to T_o M^n \tag{2.4.19}$$

colocando $U_o := M^n \setminus \mathcal{C}_o$ e $U_{\overline{o}} := \exp_{\overline{o}} \circ i^{-1} \circ \exp_o^{-1}(U_o)$ então a aplicação

$$\Phi := \exp_o \circ i \circ (\exp_{\overline{o}}^{-1} |_{U_{\overline{o}}}) : U_{\overline{o}} \to M^n \tag{2.4.20}$$

é uma contração, quer dizer $|d\Phi| \leq 1$.

Prova. Com efeito, dados $\overline{p} \in U_{\overline{o}}$ e $v \in T_{\overline{p}} M^n_{-k}$, existe uma única geodésica $\gamma_k : [0, l] \to M^n_{-k}$ conectando $\overline{o}$ a $\overline{p}$ e um único campo de Jacobi Y_k ao longo de γ_k satisfazendo $Y_k(0) = 0$ e $Y_k(l) = v$, dado por

$$Y_k(t) = (d \exp_{\overline{o}})_{t\gamma_k'(0)}(tY_k'(0) \qquad \text{com } t \in [0, l] \tag{2.4.21}$$

Ficam, desta maneira, definidos em M^n uma única geodésica $\gamma : [0, l] \to M^n$ conectando o ponto o a $p := \exp_o(i(\exp_{\overline{o}}^{-1}(\overline{p})))$ e um único campo de Jacobi Y ao longo de γ satisfazendo $Y(0) = 0$ e $Y'(0) = i(Y_k'(0))$, dado por

$$Y(t) = (d \exp_o)_{t\gamma'(0)}(ti(Y_k'(0)) \qquad \text{com } t \in [0, l] \tag{2.4.22}$$

Como i é uma isometria, segue que as hipóteses do Teorema de Comparação de Rauch se verificam. Portanto, temos que

$$\|Y(t)\| \leq \|Y_k(t)\| \tag{2.4.23}$$

Para concluir este Teorema observamos que, por (2.4.21), (2.4.22) e (2.4.23) temos

$$\|(d\Phi)_p(v)\| = \frac{\|Y(l)\|}{\|Y_k(l)\|} \leq 1 \tag{2.4.24}$$

Logo, a aplicação Φ é uma contração métrica. O Teorema está demonstrado. □

Em particular, como aplicação usual:

2.D.4. Corolário. *Nas mesmas condições do Teorema 2.D.3, dada $c_k : [0, a] \to U_{\overline{o}}$ uma curva diferenciável qualquer, se definimos $c : [0, a] \to U_o$ por*

$$c(s) := \Phi(c_k(s)) \tag{2.4.25}$$

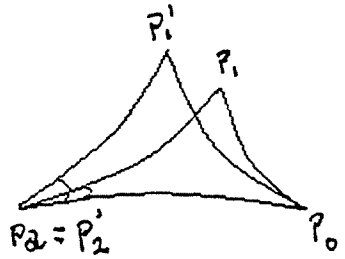
então o comprimento $L(c) \leq L(c_k)$

[2]Esta observação fundamental foi feita por Machigashira e Shiohama, em [MS], também por Marenich e Mendonça, em [MM], para demonstrar um Teorema da Esfera para variedades com curvatura minimal radial ≥ 1.

2.E. Triângulos e o Teorema de Toponogov Generalizado

2.E.1. Lema (Princípio de monotonicidade). *Dados triângulos* $\triangle(p_0,p_1,p_2)$ *e* $\triangle'(p_0,p_1',p_2')$ *em uma superfície* M^2_{-k} *tal que* $l_0 = l_0'$ *e* $l_1 = l_1'$, *tem-se a seguinte monotonicidade*

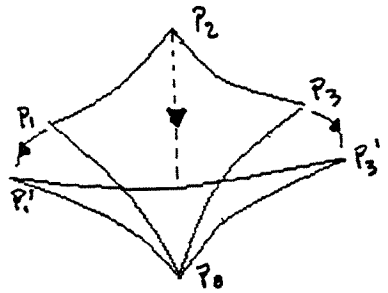
$$\angle p_2 < \angle p_2' \Leftrightarrow l_2 < l_2' \tag{2.5.1}$$



Prova. Podemos efetuar uma rotação do triângulo $\triangle'$ em torno de p_0 e, sem perda de generalidade. assumir que $p_2 = p_2'$. Como M^2_{-k} é simplesmente conexa e tem curvatura não positiva, pelo teorema de Hadamard segue que a aplicação exponencial é um difeomorfismo. Consequentemente, o problema fica reduzido a uma comparação de triângulos em $T_{p_0}M^2_{-k} = \mathbb{R}^2$. A conclusão é imediata. □

2.E.2. Lema (Lema de deformação). *Sejam* p_0, p_1, p_2 *e* p_3 *os vértices de um quadrilátero em* M^2_{-k}, *mais ainda, suponha que o ângulo* $\angle p_2 < \pi$ *e que:*

$$d(p_1,p_2) + d(p_2,p_3) < d(p_3,p_0) + d(p_0,p_1) \tag{2.5.2}$$



Então existe um triângulo $\triangle(p_0' = p_0, p_1', p_3')$, *único a menos de rotação em torno de* p_0, *tal que*

$$d(p_0',p_1') = d(p_0,p_1) \tag{2.5.3}$$

$$d(p_0',p_3') = d(p_0,p_3) \tag{2.5.4}$$

$$d(p_1',p_3') = d(p_1,p_2) + d(p_2,p_3) \tag{2.5.5}$$

$$\angle p_1' < \angle p_1 \tag{2.5.6}$$

$$\angle p_3' < \angle p_3 \tag{2.5.7}$$

$$\angle p_0' > \angle p_0 \tag{2.5.8}$$

Prova. A idéia é mover o vértice p_2 na direção do polo p_0, mantendo os comprimentos de todas as arestas fixos, movendo os vértices p_1 e p_3 de uma maneira apropriada.

A condição (2.5.2) pode ser re-escrita como

$$\big(d(p_3,p_0)-d(p_2,p_3)\big)+\big(d(p_0,p_1)-d(p_1,p_2)\big)>0 \tag{2.5.9}$$

implicando que o número:

$$l_{\text{crit}} := \max\{d(p_0,p_1)-d(p_1,p_2), d(p_0,p_3)-d(p_3,p_2)\}>0. \tag{2.5.10}$$

Em particular, (2.5.10) nos diz que ao longo da deformação do quadrilátero, p_2 mantem-se apartado de p_0 ($d(p_0,p_2)>0$). Mais ainda, $d(p_0,p_2)>l_{\text{crit}}$: se ocorresse $d(p_0,p_2)\le l_{\text{crit}}$, teríamos $d(p_0,p_1)\ge d(p_0,p_2)+d(p_2,p_1)$ ou $d(p_0,p_3)\ge d(p_0,p_2)+d(p_2,p_3)$ (ou ainda $d(p_0,p_1)=d(p_0,p_2)+d(p_2,p_1)$ ou $d(p_0,p_3)=d(p_0,p_2)+d(p_2,p_3)$). Consequentemente, um dos triângulos $\triangle(p_0,p_1,p_2)$ ou $\triangle(p_0,p_2,p_3)$ seria degenerado e teríamos $\angle p_2>\pi$. Finalmente, como o $\angle p_2$ depende continuamente e de forma monótona decrescente de $d(p_0,p_2)$, haverá um certo p_2' tal que $\angle p_2'=\pi$ e verificar-se-ão as conclusões (2.5.3)-(2.5.7) do Lema.

A demonstração de (2.5.8) decorre de $d(p_1,p_3)<d(p_1',p_3')$ e do fato que se $q_1,\ q_3\in M^2_{-k}$ são dois pontos quaisquer com $d(q_1,p_0)=d(p_1,p_0)$, $d(q_3,p_0)=d(p_3,p_0)$ e ângulo entre os segmentos p_0q_1 e p_0q_3, dado por α, então a distância $d(q_1,q_3)=f(\alpha)$ é uma função diferenciável, monótona e estritamente crescente do ângulo $\alpha\in[0,\pi]$ ($f(0)=|d(p_1,p_0)-d(p_0,p_3)|$ e $f(\pi)=d(p_1,p_0)+d(p_0,p_3)$). □

Para o Teorema de Comparação de Toponogov será conveniente considerarmos funções aproximantes k_ϵ : $[0,\infty)\to[0,\infty)$ definidas por:

$$k_\epsilon(r) := \sup\{k(r')\big|r'\ge 0 \quad \text{e } |r-r'|\le\epsilon\},\qquad \epsilon\ge 0 \tag{2.5.11}$$

Observemos que k_ϵ converge para $k_0=k$, uniformemente em conjuntos compactos.

Alguns exemplos bastante óbvios:

(i) se $k(s)=s$ então $k_\epsilon(s)=s+\epsilon$

(ii) se $k(s)=\sqrt{s}$ então $k_\epsilon(s)=\sqrt{s+\epsilon}$

(iii) se $k(s)=\exp -s$ então $k_\epsilon(s)=\exp-(s-\epsilon)$

Em coordenadas polares (r,ϕ), a métrica de $M^2_{-k_\epsilon}$ é do seguinte tipo

$$dr^2+y_\epsilon(r)^2d\phi^2, \tag{2.5.12}$$

onde a função y_ϵ é definida pela solução equação:

$$y_\epsilon''=k_\epsilon y_\epsilon\ ,\qquad y_\epsilon(0)=0 \quad \text{e} \quad y_\epsilon'(0)=1. \tag{2.5.13}$$

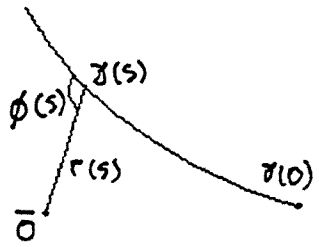
No próximo lema, apresentamos algumas propriedades elementares dos modelos que estamos considerando (é um exercício típico de geometria das superfícies de rotação, veja por exemplo [GHL], [dC1]).

2.E.3. Lema (Leis de Conservação). *As funções coordenadas $r(s)$ e $\phi(s)$ ao longo de uma geodésica unitária $s\mapsto\gamma(s)$ na superfície modelo M^2_{-k} satisfazem às seguintes equações:*

$$r'(s)^2+(y\circ r)(s)^2\phi'(s)^2=1 \tag{2.5.14}$$

$$(y\circ r)(s)^2\phi'(s)=const \tag{2.5.15}$$

$$(y\circ r)(s)^2(1-r'^2(s))=const^2 \tag{2.5.16}$$



O resultado seguinte mostra que a função ângulo comporta-se de maneira contínua em relação a ϵ.

2.E.4. Lema (Continuidade da função ângulo com relação a ϵ). *Dados triângulos $\triangle(p_0,p_1,p_2)$ em M^2_{-k} e $\triangle^\epsilon(p_0^\epsilon,p_1^\epsilon,p_2^\epsilon)$ em $M^2_{-k_\epsilon}$ com lados de mesmo comprimento, $l_i^\epsilon = l_i$, para $i=0,1,2$, então seus ângulos dependem continuamente de ϵ, por exemplo*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \angle p_i^\epsilon = \angle p_i \tag{2.5.17}$$

Prova. Primeiramente, vamos mostrar que $\lim_{\epsilon\to 0} y_\epsilon = y$ em subconjuntos compactos. Defina $h_\epsilon := y_\epsilon - y$ e $g_\epsilon := (k_\epsilon - k).y_\epsilon$ (que converge em subconjuntos compactos para a função constante nula, conforme $\epsilon \to 0$. Tomando a diferença das equações $y_\epsilon'' - k_\epsilon.y_\epsilon = 0$ e $y'' - k.y = 0$ obtemos a seguinte equação em h_ϵ:

$$h_\epsilon'' - k.h_\epsilon = (k_\epsilon - k).y_\epsilon \tag{2.5.18}$$

sujeita as condições iniciais

$$h_\epsilon(0) = 0 \qquad h_\epsilon'(0) = 0 \tag{2.5.19}$$

Se x_1 e x_2 são soluções linearmente independentes da equação homogênea associada a (2.5.18), satisfazendo $x_1(0)=1$, $x_1'(0)=0$ e $x_2(0)=0$, $x_2'(0)=1$ e se $W(x_1,x_2)(t)$ é o Wronskiano das soluções, x_i, $i=1,2$, então a solução de (2.5.18), satisfazendo (2.5.19) pode ser escrita como

$$h_\epsilon(t) = -x_1(t)\int_0^t \frac{x_2(s).g_\epsilon(s)}{W(x_1,x_2)(s)}\,ds + x_2(t)\int_0^t \frac{x_1(s).g_\epsilon(s)}{W(x_1,x_2)(s)}\,ds \tag{2.5.20}$$

e portanto, h_ϵ converge em conjuntos compactos para a função nula. Logo $y_\epsilon \to y$, em conjuntos compactos conforme $\epsilon \to 0$. Agora, usando o Lema 2.E.3 (Leis de Conservação) segue o resultado. □

2.F. Teorema de Comparação de Toponogov Generalizado, ou TCTG - enfim

2.F.1. CONVENÇÃO. *Se houver uma barra sobre uma letra, este símbolo referir-se-á a um dado no espaço modelo M^2_{-k}, enquanto que as letras sem barra referir-se-ão a dados na variedade (M^n,o,g,k).*

Para enunciarmos o Teorema de Comparação de Toponogov Generalizado, façamos primeiramente as seguintes hipóteses:

(H1) o, p_1, p_2 são os vértices de um triângulo geodésico (generalizado) em uma variedade Riemanniana (M^n,o,g,k); suponhamos que os os lados γ_1 e γ_2 sejam minimizantes; não precisamos impor que γ_0 seja minimizante, é suficiente que seja uma geodésica:

(H2) em cada ponto $p \in M^n$ as curvaturas minimais radiais são limitadas inferiormente por $-k(d(o,p)) \leq 0$ (na verdade, é suficiente supor esta propriedade apenas para aqueles pontos p, ϵ-próximos a qualquer geodésica minimizante conectando o a algum ponto de γ_0; tais pontos pontos satisfazem a seguinte condição: $d(p,o) + d(p,p_i) \leq l_0 + l_i + \epsilon$ para $i = 1,\ 2$);

(H3) o polo $\overline{o}$ $(= 0)$, de M^2_{-k} será um dos vértices do triângulo de comparação $\overline{\triangle}(\overline{o}, \overline{p}_1, \overline{p}_2)$

O teorema seguinte é uma versão generalizada do Teorema de Comparação de Toponogov (cf. [Ab] para os ítens (a) e (b), [Ms2] para (c)). Particularmente, o ítem (c) deste teorema não era conhecido para a classe das variedades com curvatura assintoticamente não negativa; com ele podemos obter uma construção mais simples que a encontrada em [Ka1], dos cones tangentes no infinito destas variedades:

2.F.2. Teorema (Teorema de Comparação de Toponogov Generalizado, ou TCTG). *Sob as hipóteses (H1), (H2) e (H3) acima, valem as seguintes conclusões:*

(a) se $l_i = \bar{l}_i$ para todos os lados, então $\angle p_1 \geq \angle \overline{p}_1$ e $\angle p_2 \geq \angle \overline{p}_2$. Se ocorrer $\angle p_1 = \angle \overline{p}_1 \neq \pi$, então existe uma parte de superfície totalmente geodésica, de curvatura $-k(d_M(o,.))$, limitada por γ_1, γ_2 e uma geodésica minimizante conectando p_1 a p_2;

(b) se $l_0 = \bar{l}_0$, $l_1 = \bar{l}_1$, e $\angle p_2 \leq \angle \overline{p}_2$, então $l_2 \leq \bar{l}_2$;

(c) dada uma dobradiça (hinge) $(\gamma_1, \gamma_2, \theta)$ em M^n, onde $\theta = \angle(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$ então existe dobradiça em M^2_{-k}, $(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \theta)$ com $L(\gamma_i) = L(\overline{\gamma}_i) = l_i$, $i = 1, 2$ e tal que

$$d_M(\gamma_1(l_1), \gamma_2(l_2)) \leq d_{-k}(\overline{\gamma}_1(l_1), \overline{\gamma}_2(l_2)) \tag{2.6.1}$$

No caso de valer a igualdade, na desigualdade (2.6.1) acima, então existe uma parte de superfície totalmente geodésica, S, limitada por γ_1, γ_2 e uma geodésica minimal ligando $\gamma_1(l_1)$ a $\gamma_2(l_2)$) tal que em cada ponto $p \in S$ a curvatura vale $-k(d_M(o,p))$.

Prova. Primeiramente, notemos que (b) $\Rightarrow$ (a)

Com efeito, assuma que $l_i = \bar{l}_i$, com $i = 0, 1, 2$ e suponha $\angle p_2 < \angle \overline{p}_2$. Fixe $l_0 = \bar{l}_0$ e $l_1 = \bar{l}_1$; podemos reduzir $\angle \overline{p}_2$ até $\angle \overline{p}_2^* = \angle p_2$. Por (b) segue que $l_2 \leq \bar{l}_2^*$. Daí, pelo princípio de monotonicidade, se $\angle \overline{p}_2 > \angle \overline{p}_2^*$ então $\bar{l}_2 > \bar{l}_2^*$ contradizendo $l_i = \bar{l}_i$, e $i = 0, 1, 2$. A segunda afirmação deste ítem é consequência do Teorema de Comparação de Berger, para campos de Jacobi.

Provemos (b): escolhamos $r_0 > 0$ e $K > 0$ tais que o lado γ_0 está contido na bola $B(o, r_0)$ e as curvaturas seccionais em $B(o, r_0+1)$ são limitadas superiormente por K (esta não é uma condição tão restritiva já que o tensor de curvatura é uma aplicação contínua. Podemos tomar, por exemplo $K = \sup\{|K_p(\sigma)| :\ p \in B[o, r_0 + 1],\ \sigma \subset T_pM\}$). Fixando ϵ, um número real qualquer, com $0 < \epsilon < \min\{1, \pi/\sqrt{K}\}$, notamos, pelo Teorema de Comparação de Rauch, que para todo ponto $q \in B[o, r_0]$, a última hipótese implica que a aplicação exponencial restrita à bola $B(0, \epsilon) \subset T_qM$, $\exp_q : B(0, \epsilon) \to B(o, r_0 + 1)$, é não singular, ou ainda, qualquer geodésica contida em $B(o, r_0)$ de comprimento $\leq \epsilon$ é minimizante.

Agora, consideramos triângulos de comparação nos espaços modelo $M^2_{-k_\epsilon}$ ao invés de M^2_{-k}. Mostrando a validade de (b), para toda superfície $M^2_{-k_\epsilon}$ com $0 < \epsilon < \min\{1, \pi/\sqrt{K}\}$ segue, pela continuidade da função ângulo com relação a ϵ (Lema 2.E.4), a validade de (b).

Fixado o valor de ϵ, subdividimos γ_0 em segmentos de comprimento menor que $\epsilon/2$, e tomamos geodésicas minimizantes de o até os pontos da partição, em γ_0. Se provarmos que o Teorema de Comparação, TCTG, vale para triângulos pequenos, então o Lema de Deformação (2.B.2) estende as desigualdades para os triângulos $\triangle$ e $\overline{\triangle}$. Assim, pelo princípio de monotonicidade (2.B.1), a demonstração deste Teorema fica reduzida a provar que

$$\text{se } l_1 = \bar{l}_1 < r_0\ , \qquad l_0 = \bar{l}_0 < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \angle p_2 = \angle \overline{p}_2\ , \qquad \text{então} \qquad l_2 \leq \bar{l}_2 \tag{2.6.2}$$

No sentido de verificar (2.6.2), estendamos as direções $-\gamma_0'(l_0)$ e $-\overline{\gamma}_0'(l_0)$ a campos vetoriais paralelos ao longo das geodésicas (arestas) γ_1 e $\overline{\gamma}_1$, respectivamente. Estes campos são campos de Jacobi e dão origem a superícies regradas

$$c : \mathbb{R} \times [0, l_1] \to M^n \ , \qquad c(s,t) = \exp_{\gamma_1(t)}\left[s.P_{\gamma_1(t)}(-\gamma_0'(l_0))\right] \ , \tag{2.6.3}$$

e

$$\overline{c} : \mathbb{R} \times [0, l_1] \to M^2_{-k_\varepsilon}, \qquad \overline{c}(s,t) = \exp_{\overline{\gamma}_1(t)}\left[s.P_{\overline{\gamma}_1(t)}(-\overline{\gamma}_0'(l_0))\right] \ , \tag{2.6.4}$$

em M^n e $M^2_{-k_\varepsilon}$, respectivamente, onde $P_{\gamma_1(t)} : T_{p_2}M \to T_{\gamma_1(t)}M$ e $P_{\overline{\gamma}_1(t)} : T_{\overline{p}_2}M^2_{-k_\varepsilon} \to T_{\overline{\gamma}_1(t)}M^2_{-k_\varepsilon}$ são os transportes paralelos ao longo de $\gamma_1(t)$ e $\overline{\gamma}_1(t)$ e caracterizamos estas superfícies pelas seguintes equações:

$$c(0,t) = \gamma_1(t) \ , \qquad \frac{\partial c}{\partial s}(0,0) = \frac{\partial}{\partial s}\exp_{\gamma_1(t)}\left[s.P_{\gamma_1(t)}(-\gamma_0'(l_0))\right]\Big|_{(0,0)} = -\gamma_0'(l_0) \ , \tag{2.6.5}$$

para cada t fixado, a aplicação $s \mapsto c(s,t)$ define uma geodésica, ou seja

$$\nabla_{c'}c' = 0 \tag{2.6.6}$$

e o transporte paralelo de $-\gamma_0'(l_0)$ se traduz como

$$\nabla_{\dot{c}}c'\big|_{(0,t)} = 0 \tag{2.6.7}$$

e as equações que caracterizam $\overline{c}$ são dadas de maneira semelhante. Aqui, estamos denotando por c', a derivada de c com relação à primeira variável, s, e por $\dot{c}$, a derivada de c com relação à segunda variável, t.

2.F.3. Observações.

(i) Conforme já dito anteriormente, os campos $c'(0,t)$e $\overline{c}'(0,t)$ são campos de Jacobi ao longo de γ_1 e $\overline{\gamma}_1$

(ii) $\overline{\gamma}_2$ está contida em $\overline{c}([0,\infty) \times [0,l_1])$ (por notação $\overline{\gamma}_2(\overline{l}_2) = \overline{p}_1$ e $\overline{\gamma}_2(0) = \overline{p}_0$).

(iii) Sejam $s_t \geq 0$ tal que $\overline{c}(s_t,t) \in \overline{\gamma}_2$ e $R(t)$ a área do triângulo $\overline{\triangle}(t) := \overline{\triangle}(\overline{o}, \overline{\gamma}_1(t), \overline{c}(s_t,t))$. Aplicando o Teorema de Gauss-Bonnet a $\overline{\triangle}(t)$ temos que

$$\iint_{\overline{\triangle}(t)} K \, d\sigma + (\pi - \angle\overline{o}) + (\pi - \angle\overline{\gamma}_1(t)) + (\pi - \angle\overline{c}(s_t,t)) = 2.\pi.\chi(\overline{\triangle}(t)) = 2.\pi \tag{2.6.8}$$

e como

(iii-a) $\iint_{\overline{\triangle}(t)} K \, d\sigma$ é uma função não decrescente em t pois $K \leq 0$ e a área $R(t)$, de $\overline{\triangle}(t)$ é uma função decrescente em $t \in [0,l_1]$, com $\lim_{t\to l_1} R(t) = 0$,

(iii-b) $\angle\overline{o}$ é constante e

(iii-c) $\angle\overline{\gamma}_1(t)$ também o é pois $-\overline{\gamma}_0'(l_0)$ é transportado paralelamente ao longo de $\overline{\gamma}_1$,

segue que o ângulo $\angle\overline{c}(s_t,t)$ ao longo de $\overline{\gamma}_2$ é não decrescente em t. Consequentemente, pela fórmula da primeira variação do comprimento de arco, a função $t \mapsto s_t$ é não crescente, em outras palavras, $\overline{\gamma}_2$ está contido em $\overline{U} := \overline{c}([0,\varepsilon/2) \times [0,l_1])$

(iv) $c([0,\varepsilon/2)\times[0,l_1])\subset B(p_0,r_0+1)$ *e portanto, nossas construções acima implicam que em* $[0,\varepsilon/2)\times[0,l_1]$ *não existem pontos focais sobre as geodésicas* $s\mapsto c(s,t)=c_t(s)$ *(é fácil ver que para cada* $t_0\in[0,l_1]$*, os campos vetoriais* $J_{t_0}(s)=\dot{c}(s,t_0)-\langle\dot{c}(s,t_0),c'(s,t_0)\rangle.c'(s,t_0)$ *e* $\overline{J}_{t_0}(s)=\dot{\overline{c}}(s,t_0)-\langle\dot{\overline{c}}(s,t_0),\overline{c}'(s,t_0)\rangle.\overline{c}'(s,t_0)$ *são, respectivamente, campos de Jacobi ao longo de* $c_{t_0}(s)$, $\overline{c}_{t_0}(s)$ *normais a* $c_{t_0}(s)$ *e* $\overline{c}_{t_0}(s)$*).*

Por construção, as desigualdades

$$-k(d(o,c(s,t)))\geq -k_{\epsilon/2}(d(o,c(0,t)))\geq -k_{\epsilon/2}(d(\overline{o},\overline{c}(0,t)))\geq -k_{\epsilon}(d(\overline{o},\overline{c}(s,t))) \tag{2.6.9}$$

valem para todo $(s,t)\in[0,\varepsilon/2)\times[0,l_1]$. Logo, pelo Teorema de Comparação de Berger, temos

$$|J_t(s)|\ \leq\ |\overline{J}_t(s)|\qquad \text{em}\ \ [0,\varepsilon/2)\times[0,l_1] \tag{2.6.10}$$

Concluímos então, pelo corolário ao Teorema de Comparação de Berger que a aplicação $c\circ\overline{c}^{-1}:\overline{U}\to M^n$ é contração métrica (não aumenta distâncias).

Segue, finalmente, que a curva $t\mapsto c\circ\overline{c}^{-1}\circ\overline{\gamma}_2(t)$ conecta os pontos p_0 e p_1 e tem comprimento $\leq$ que $\overline{\gamma}_2$. Isto prova (2.6.2)

Provemos agora a propriedade (c) (cf. [Ms2]):

Vamos considerar $M^2_{-k_\varepsilon}$ ao invés de M^2_{-k}, como espaço de comparação ($\varepsilon>0$ é um número pequeno).

Ponhamos

$$t_0:=\sup\{t\in[0,1]|\ \text{para}\ s\leq t,\ d_M(\gamma_1(sl_1),\gamma_2(sl_2))\leq d_{-k_\varepsilon}(\overline{\gamma}_1(sl_1),\overline{\gamma}_2(sl_2))\} \tag{2.6.11}$$

Pelo corolário ao Teorema de Comparação de Rauch (Teorema 2.D.3) vemos que $t_0>0$. Suponhamos por absurdo que $t_0<1$. Vale então que

$$d_M(\gamma_1(t_0l_1),\gamma_2(t_0l_2))=d_{-k_\varepsilon}(\overline{\gamma}_1(t_0l_1),\overline{\gamma}_2(t_0l_2)) \tag{2.6.12}$$

Ficam, desta maneira, definidos triângulos

$$\triangle=\triangle(o,\gamma_1(t_0l_1),\gamma_2(t_0l_2))\subset M^n\qquad\text{e}\qquad\overline{\triangle}=\overline{\triangle}(\overline{o},\overline{\gamma}_1(t_0l_1),\overline{\gamma}_2(t_0l_2))\subset M^2_{-k_\varepsilon} \tag{2.6.13}$$

com mesmos lados ($\overline{\triangle}$ é triângulo de comparação de $\triangle$). E, para estes triângulos podemos aplicar o ítem (a) deste Teorema, isto é, se θ_i e $\overline{\theta}_i$, para $i=1,2$, são os ângulos em $\gamma_i(t_0l_i)$ e $\overline{\gamma}_i(t_0l_i)$, então

$$\theta_i\geq\overline{\theta}_i\ ,\qquad\text{para}\ i=1,2. \tag{2.6.14}$$

Temos assim, dois casos a analisar: (i) $\theta_1>\overline{\theta}_1$, e (ii) $\theta_1=\overline{\theta}_1$.

Se ocorrer (i): $\theta_1>\overline{\theta}_1$, então a fórmula da primeira variação implica que para $u>0$ suficientemente pequeno

$$d_M(\gamma_1((t_0+u)l_1),\gamma_2((t_0+u)l_2))<d_{-k_\varepsilon}(\overline{\gamma}_1((t_0+u)l_1),\overline{\gamma}_2((t_0+u)l_2)) \tag{2.6.15}$$

Com efeito, considerando variações das geodésicas que conectam $\gamma_1(t_0l_1)$ a $\gamma_2(t_0l_2)$ e $\overline{\gamma}_1(t_0l_1)$ a $\overline{\gamma}_2(t_0l_2)$, digamos

$$\alpha:(t_0-\delta,t_0+\delta)\times[0,1]\to M^n\qquad\text{e}\qquad\overline{\alpha}:(t_0-\delta,t_0+\delta)\times[0,1]\to M^2_{-k_\varepsilon} \tag{2.6.16}$$

tais que $\alpha\big|_{(t_0-\delta,t_0+\delta)\times\{0\}}=\gamma_1\big|_{((t_0-\delta)l_1,(t_0+\delta)l_1)}$, $\alpha\big|_{(t_0-\delta,t_0+\delta)\times\{1\}}=\gamma_2\big|_{((t_0-\delta)l_2,(t_0+\delta)l_2)}$ e para cada t fixo, $\alpha(t,s)$ é geodésica minimizante conectando $\gamma_1(tl_1)$ a $\gamma_2(tl_2)$; propriedades semelhantes definem a variação $\overline{\alpha}$. Pela fórmula da primeira variação do comprimento de arco, para $u>0$ suficientemente pequeno temos

$$L(\alpha(t_0+u,.))=L(\alpha(t_0,.))+u\cos\theta_1+O(u^2)\quad\text{e}\quad L(\overline{\alpha}(t_0+u,.))=L(\overline{\alpha}(t_0,.))+u\cos\overline{\theta}_1+O(u^2) \tag{2.6.17}$$

ou ainda

$$d_M(\gamma_1((t_0+u)l_1),\gamma_2((t_0+u)l_2) = d_M(\gamma_1(t_0l_1),\gamma_2(t_0l_2)) + u\cos\theta_1 + O(u^2) \tag{2.6.18}$$

e

$$d_{-k_\varepsilon}(\overline{\gamma}_1((t_0+u)l_1),\overline{\gamma}_2((t_0+u)l_2) = d_{-k_\varepsilon}(\overline{\gamma}_1(t_0l_1),\overline{\gamma}_2(t_0l_2)) + u\cos\overline{\theta}_1 + O(u^2) \tag{2.6.19}$$

e como $\theta_1 > \overline{\theta}_1$, segue que $\cos\theta_1 < \cos\overline{\theta}_1$ e $d_M(\gamma_1(t_0l_1),\gamma_2(t_0l_2)) = d_{-k_\varepsilon}(\overline{\gamma}_1(t_0l_1),\overline{\gamma}_2(t_0l_2))$, as fórmulas (2.6.18) e (2.6.19) implicam, para u suficientemente pequeno

$$d_M(\gamma_1((t_0+u)l_1),\gamma_2((t_0+u)l_2)) < d_{-k_\varepsilon}(\overline{\gamma}_1((t_0+u)l_1),\overline{\gamma}_2((t_0+u)l_2)) \tag{2.6.20}$$

em contradição com a definição de t_0.

Se, por outro lado ocorrer (ii): $\theta_1 = \overline{\theta}_1$. Então, a hipótese $t_0 < 1$ implica $\theta_1 \neq \pi$.

Com efeito, sejam γ_{t_0}, $\overline{\gamma}_{t_0}$ geodésicas minimais, conectando $\gamma_1(t_0l_1)$ a $\gamma_2(t_0l_2)$, e $\overline{\gamma}_1(t_0l_1)$ a $\overline{\gamma}_2(t_0l_2)$, respectivamente. Se fosse $\theta_1 = \overline{\theta}_1 = \pi$, então $\gamma_1 \cup \gamma_{t_0}$ e $\overline{\gamma}_1 \cup \overline{\gamma}_{t_0}$ seriam geodésicas conectando o a $\gamma_2(t_0l_2)$ e $\overline{o}$ a $\overline{\gamma}_2(t_0l_2)$; consequentemente, teríamos $\theta = 0$, pois $M^2_{-k_\varepsilon}$ não possui pontos conjugados a $\overline{o}$, implicando que $\gamma_1 \subset \gamma_2$ e $\overline{\gamma}_1 \subset \overline{\gamma}_2$, ou $\gamma_2 \subset \gamma_1$ e $\overline{\gamma}_2 \subset \overline{\gamma}_1$, contradizendo $t_0 < 1$.

Agora, ítem (a) deste Teorema implica que existe uma parte de superfície totalmente geodésica, S, delimitada por $\gamma_1|_{[0,t_0l_1]}$, $\gamma_2|_{[0,t_0l_2]}$ e uma geodésica minimizante conectando $\gamma_1(t_0l_1)$ a $\gamma_2(t_0l_2)$, e tal que em cada ponto $p \in S$, a curvatura $K_o^{min}(p) = -k_\varepsilon(d_M(o,p))$, em contradição com $K_o^{min}(q) \geq -k(d_M(o,q))$, para todo $q \in M^n$. Isto prova (c) e, com isto, fica demonstrado o Teorema de Comparação de Toponogov Generalizado (Teorema 2.F.2) □

Como consequência do Teorema de Comparação de Toponogov Generalizado temos o seguinte resultado clássico (cf. [Ms2]), que também não era conhecido na geometria das variedades com curvatura assintoticamente não negativa:

2.F.4. Teorema. *Sob as mesmas hipóteses do teorema anterior (TCTG-(a)), suponha que a geodésica $\gamma_0 : [0,l] \to M^n$ que conecta p_1 a p_2 seja minimizante, então valem as seguintes propriedades*

(a) $d_M(o,\gamma_0(t)) \geq d_{-k}(\overline{o},\overline{\gamma}_0(t))$ para todo $t \in [0,l]$.

(b) (Convexidade de Alexandrov) Seja $\overline{\theta}_{s,t}$ o ângulo em $\overline{o}$ do triângulo de comparação $\overline{\triangle}(\overline{o},\overline{x}_s,\overline{y}_t)$ em M^2_{-k}, correspondendo a $\triangle(o,\sigma_1(s),\sigma_2(t))$ em M^n. Então $\overline{\theta}_{s,t}$ é uma função monótona não crescente em s, t.

Prova. Iniciemos demonstrando (a):

Pela fórmula da primeira variação do comprimento, vemos que para t pequeno, vale que $d_M(o,\gamma_0(t)) \geq d_{-k}(\overline{o},\overline{\gamma}_0(t))$.

Suponhamos por contradição, que para algum $t_1 \in [0,l]$ vale $d_M(o,\gamma_0(t_1)) < d_{-k}(\overline{o},\overline{\gamma}_0(t_1))$ e definamos o número

$$t_0 := \sup\{t \in [0,l] \,|\, d_M(o,\gamma_0(t)) \geq d_{-k}(\overline{o},\overline{\gamma}_0(t))\} \tag{2.6.21}$$

então, por continuidade da função distância, este número t_0 satisfaz

$$d_M(o,\gamma_0(t_0)) = d_{-k}(\overline{o},\overline{\gamma}_0(t_0)) \tag{2.6.22}$$

Considerando os triângulos $\triangle(o,\gamma_0(t_0),p_2)$, $\triangle(\overline{o},\overline{\gamma}_0(t_0),\overline{p}_2)$ e aplicando novamente a fórmula da primeira variação do comprimento concluímos que, para $t > 0$ pequeno vale que

$$d_M(o,\gamma_0(t_0+t)) \geq d_{-k}(\overline{o},\overline{\gamma}_0(t_0+t)) \tag{2.6.23}$$

o que contradiz nossa hipótese (2.6.21)

Para provarmos a convexidade de Alexandrov (b) (seguindo a idéia de [Ms2]) notamos que é suficiente mostrar que para um $s \in (0,1]$ e $t \in (0,1)$, arbitrariamente fixados

$$\overline{\theta}_{s,t} \geq \overline{\theta}_{s,t+h} \qquad \text{com } h > 0 \text{ pequeno} \tag{2.6.24}$$

Por continuidade de $\overline{\theta}_{s,t}$, podemos assumir que $s < 1$. Seja

$$\theta = \angle(\sigma_1'(0), \sigma_2'(0)) \tag{2.6.25}$$

pela comparação de dobradiças (TCTG-(c)), vemos que

$$\overline{\theta}_{s,t} \leq \theta\ , \tag{2.6.26}$$

quaisquer que sejam s, $t \in [0,1]$. Desta forma, no caso em que $\overline{\theta}_{s,t} = \theta$, (2.6.24) vale. Por esta razão, vamos considerar apenas o caso em que $\overline{\theta}_{s,t} < \theta$

Seja $\overline{\sigma}$ uma geodésica minimizante partindo de $\overline{o}$ e passando por $\overline{y}_t$. Pelo ítem (a) do TCTG, o ângulo em $\overline{y}_t$ do triângulo $\overline{\triangle}(\overline{o}, \overline{x}_s, \overline{y}_t)$ não excede o ângulo em $\sigma_2(t)$ do triângulo $\triangle(o, \sigma_1(s), \sigma_2(t))$. Se os ângulos são iguais, pela última parte do TCTG, podemos concluir que $\overline{\theta}_{s,t} \geq \theta$, posto que a geodésica minimal conectando o a $\sigma_1(s)$ é única. Isto contradiz nossa hipótese $\overline{\theta}_{s,t} < \theta$. Se o ângulo em y_t é menor que o ângulo em $\sigma_2(t)$, então a fórmula da primeira variação implica que

$$d_{-k}(\overline{o}, \overline{\sigma}(t+h)) \geq d_M(o, \sigma_2(t+h)) \tag{2.6.27}$$

para $h > 0$ pequeno, ou seja

$$\overline{\theta}_{s,t+h} \leq \overline{\theta}_{s,t} \tag{2.6.28}$$

a prova de (b) está completa. □

2.G. Analizando a condição de decaimento

Intuitivamente falando, a integral $b_0(k) = \int_0^\infty rk(r)\ dr$ converge se, e só se $k(r)$ decai mais rápido que r^{-2}, quando $r \to \infty$. Precisamente falando:

2.G.1. Lema (Abresch, [Ab]**).** *Sempre que $b_0(k)$ converge, existem funções monótonas não crescentes dadas por:*

$$k_1 : r \mapsto \int_r^\infty k(\rho)d\rho, \tag{2.7.1}$$

$$k_2 : r \mapsto \int_r^\infty k_1(\rho)d\rho, \tag{2.7.2}$$

$$k_b : r \mapsto \int_r^\infty \rho k(\rho)d\rho = k_2(r) + rk_1(r) \tag{2.7.3}$$

Mais ainda, valem as seguintes estimativas: ($r \geq 0$)

$$r^2 k(r) \leq 2b_0(k), \tag{2.7.4}$$

$$rk_1(r) \leq b_0(k), \tag{2.7.5}$$

Prova. As expressões $k_1(r)$ e $k_b(r)$ obviamente convergem (quer dizer, as integrais que as definem são finitas) pois

$$k_1(r) = \int_r^\infty k(\rho)d\rho = \int_r^{r+1} k(\rho)d\rho + \int_{r+1}^\infty \frac{1}{\rho}(\rho k(\rho))\ d\rho \leq \int_r^{r+1} k(\rho)d\rho + \frac{1}{r+1}b_0(k) < \infty \tag{2.7.6}$$

e

$$k_b(r) \leq k_b(0) \leq b_0(k) \tag{2.7.7}$$

Verifiquemos a existência de $k_2(r)$:

$$k_2(r) = \int_r^\infty k_1(\rho)d\rho = \int_r^\infty \int_t^\infty k(\rho)d\rho dt \tag{2.7.8}$$

integrando por partes (2.7.8):

$$k_2(r) = t\int_t^\infty k(\rho)d\rho|_{t=r}^{t=\infty} - \int_r^\infty t\frac{d}{dt}[\int_t^\infty k(\rho)\ d\rho\ ]\ dt \tag{2.7.9}$$

e como $t\int_t^\infty k(\rho)d\rho \leq \int_t^\infty \rho k(\rho)\ d\rho \to 0$, quando $t \to \infty$ vem que

$$k_2(r) = \int_r^\infty (\rho - r)k(\rho)\ d\rho = k_b(r) - rk_1(r) \tag{2.7.10}$$

As estimativas (2.7.4) e (2.7.5) são devidas aos seguintes cálculos:

$$r^2k(r) = 2k(r)\int_0^r \rho d\rho \leq 2\int_0^r \rho k(\rho)d\rho \leq 2b_0(k) \tag{2.7.11}$$

e

$$rk_1(r) = k_1(r)\int_0^r d\rho \leq \int_0^r k_1(\rho)d\rho \leq b_0(k) \tag{2.7.12}$$

□

2.G.2. Observações (cf. [Ab]**).**

(i) essencialmente os mesmos cálculos nos conduzem aos seguintes resultados:

$$\lim_{r\to\infty} r^2k(r) = 0 \qquad e \qquad \lim_{r\to\infty} rk_1(r) = 0 \tag{2.7.13}$$

De fato, se para alguma constante positiva, c, temos $r^2k(r) \geq c$, ou de modo equivalente $rk(r) \geq c/r$, chegamos no seguinte absurdo:

$$\infty > b_0(k) > \int_r^\infty \rho k(\rho)\ d\rho > \int_r^\infty c/\rho\ d\rho = \infty \tag{2.7.14}$$

a segunda igualdade decorre imediatamente da convergência de k_b e do fato que k_b, k_2 e k_1 são funções não negativas. □

(ii) note que fixando $c > 0$ e definindo $k_c(r) := c^2 k(cr)$, para $r \geq 0$, obtemos que

$$k_{1,c}(r) = \int_r^\infty k_c(\rho)d\rho = ck_1(cr) \tag{2.7.15}$$

e

$$k_{2,c}(r) = \int_r^\infty k_{1,c}(\rho)d\rho = k_2(cr) \tag{2.7.16}$$

ou seja, $k_{2,c}(0) = k_2(0) = b_0(k)$, implicando que o invariante $b_0(k)$ não se altera, mesmo que a métrica de curvatura minimal radial assintoticamente não negativa seja re-escalada por algum fator conforme, global (esta observação será muito importante quando formos provar existência dos cones assintóticos para variedades CRANN).

Posteriormente necessitaremos de mais informações acerca dos modelos M^2_{-k}. Isto significa, essencialmente, que teremos de estudar as soluções da equação:

$$y''(r) = k(r)y(r) \tag{2.7.17}$$

(*) Em particular, estamos interessados em soluções z_l, monótonas com decaimento, e com valores de fronteira $z_l(0) = 1$ e $z_l(l) = 0$ (l um número real positivo, qualquer) e no seu limite z_∞, que é uma solução monótona com decaimento da equação (2.7.17) acima

2.G.3. Lema (Abresch, [Ab]**).** *As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $b_0(k) < \infty$

(b) para toda solução y da equação (2.7.17) existe o limite $y'(\infty) = \lim_{r\to\infty} y'(r)$.

Prova. Mostremos que (a) implica em (b). Assumindo que $r > r_1 > 0$ calculamos, usando Teorema do Valor Médio, com $y(\rho)$:

$$|y'(r) - y'(r_1)| = |\int_{r_1}^r k(\rho)y(\rho)\ d\rho| \leq \int_{r_1}^r k(\rho)|y(\rho)|d\rho$$

$$\leq |y(r_1)| \int_{r_1}^r k(\rho)\ d\rho + \int_{r_1}^r |y'(c_{r_1,\rho})|(\rho - r_1)k(\rho)\ d\rho$$

$$\leq k_1(r_1)|y(r_1)| + k_2(r_1)\max\{|y'(s)| :\ r_1 \leq s \leq r\}$$

$$\leq k_1(r_1)|y(r_1)| + k_2(r_1)|y'(r_1)| + k_2(r_1)\max\{|y'(s) - y'(r_1)| :\ r_1 \leq s \leq r\} \tag{2.7.18}$$

para algum $c_{r_1,\rho} \in (r_1, \rho)$. Ou ainda

$$|y'(r) - y'(r_1)| \leq k_1(r_1)|y(r_1)| + k_2(r_1)|y'(r_1)| + k_2(r_1)\max\{|y'(s) - y'(r_1)| :\ r_1 \leq s \leq r\} \tag{2.7.19}$$

Se r_1 suficientemente grande, sabemos que $k_2(r_1) \leq 1/2$, e consequentemente, obtemos para $r > r_1 \gg 0$:

$$|y'(r) - y'(r_1)| \leq 2k_1(r_1).|y(r_1)| + 2k_2(r_1)|y'(r_1)| =: C(r_1) \tag{2.7.20}$$

o que mostra que, para r suficientemente grande, $y'(r)$ mantem-se limitado. Seja agora r_2 tal que $r > r_2 > r_1 \gg 0$; por (2.7.20) resulta:

$$|y'(r)-y'(r_2)| \le 2k_1(r_2)|y(r_2)| + 2k_2(r_2)|y'(r_2)| \le$$
$$2k_1(r_2)\big[\ |y(r_1)| + |y'(c)|(r_2-r_1)\ \big] + 2k_2(r_2)|y'(r_2)| \le$$
$$2k_1(r_2)\{\ |y(r_1)| + \big[\ |y'(c)-y'(r_1)| + |y'(r_1)|\ \big](r_2-r_1)\ \} + 2k_2(r_2)\big[\ |y'(r_2)-y'(r_1)| + |y'(r_1)|\ \big] \le$$
$$2k_1(r_2)\{\ |y(r_1)| + \big[\ C(r_1) + |y'(r_1)|\ \big](r_2-r_1)\ \} + 2k_2(r_2)\big[\ C(r_1) + |y'(r_1)|\ \big] \le$$

$$2k_1(r_2)|y(r_1)| + 2(\ r_2k_1(r_2) + k_2(r_2)\ )(\ C(r_1) + |y'(r_1)|\ ) \tag{2.7.21}$$

para algum $c \in (r_1, r_2)$. Assim, conforme $r_2 \to \infty$

$$|y'(r)-y'(r_2)| \le 2k_1(r_2)|y(r_1)| + 2\left(r_2k_1(r_2) + k_2(r_2)\right)\left(C(r_1) + |y'(r_1)|\right) \to 0 \tag{2.7.22}$$

Logo, existe o limite $y'(\infty) = \lim_{r\to\infty} y'(r)$.

Assumindo (b) válido, segue que existe uma constante, C, tal que $y'(r) \le C$ qualquer que seja $r \ge 0$. Por (2.7.17) temos

$$|y'(r)-y'(0)| \le \int_0^r |k(s)y(s)|\,ds \le \int_0^r k(s)|y(0)+y'(\rho_s)s|\,ds \le |y(0)|\int_0^r k(s)\,ds + C\int_0^r sk(s)\,ds \tag{2.7.23}$$

da existência de $y'(\infty)$ e como k é uma função não negativa, tomando o limite $r \to \infty$ em (2.7.23) vem que $b_0(k) < \infty$ □

2.G.4 Observação. *no caso em que temos a existência de $y'(\infty)$, se y é uma solução limitada da equação (2.7.17), então vale que $y'(\infty) = 0$, pois caso contrário, se $y'(\infty) = c \neq 0$, existe $M_0 > 0$ suficientemente grande tal que para $r > M_0$, pondo*

$$h(r) = -c + y'(r) \tag{2.7.24}$$

implica

$$|h(r)| < \frac{|c|}{2} \tag{2.7.25}$$

Assim $y'(r) = c + h(r)$, ou

$$\int_r^R y'(s)\,ds = y(R) - y(r) = c(R-r) + \int_r^R h(s)\,ds \tag{2.7.26}$$

isto é

$$(c - \frac{|c|}{2})(R-r) + y(r) < y(R) < (c + \frac{|c|}{2})(R-r) + y(r) \tag{2.7.27}$$

para todo $R > r > M_0$. Mas a desigualdade (2.7.27) contradiz o fato de a solução y ser limitada (basta fixar r e tomar R arbitrariamente grande). □

O próximo resultado diz-nos que podemos estimar $b_0(k)$ em termos do valor assintótico de z_∞

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

2.G.5 Lema (Abresch, [Ab]).

$$(1 + b_0(k))z_\infty(\infty) \leq 1 \tag{2.7.28}$$

Prova. Como z_∞ é solução da equação (2.7.17)

$$z_\infty{}''(r) = k(r)z_\infty(r) \tag{2.7.29}$$

e pela Observação 2.G.4, obtemos

$$z'_\infty(r) = -\int_r^\infty k(\rho)z_\infty(\rho)\, d\rho \tag{2.7.30}$$

donde vem que

$$z_\infty(r) = z_\infty(\infty) + \int_r^\infty (\rho - r)k(\rho)z_\infty(\rho)\, d\rho \geq z_\infty(\infty)(1 + k_2(r)) \tag{2.7.31}$$

□

É interessante notar a íntima relação que existe entre a função z_∞ e o invariante $b_1(k) := \int_0^\infty v(t)\, dt$, onde v é solução da equação de Ricatti: $v'(t) = v^2(t) - k(t)$.

Observemos que a função

$$u(r) := -z_\infty(r)^{-1} z'_\infty(r) \tag{2.7.32}$$

converge para zero conforme $r \to \infty$, de fato

$$-\frac{z'_\infty(r)}{z_\infty(r)} = \int_r^\infty k(\rho)\left[\frac{z_\infty(\rho)}{z_\infty(r)}\right] d\rho \tag{2.7.33}$$

como o termo em colchetes é < 1 segue o afirmado. Além disso, uma simples substituição nos mostra que u(r) obedece a equação de Ricatti:

$$u'(r) = u(r)^2 - k(r) \tag{2.7.34}$$

2.G.6 Lema (Abresch, [Ab]). *Se $b_0(k) < \infty$, então existe uma única solução da equação (2.7.34) acima, tal que $u(r) \to 0$ se $r \to \infty$. Mais ainda, valem as seguintes estimativas:*

(a) $$0 \leq u(r) \leq k_1(r),$$

(b) $$b_1(k) := \int_0^\infty u(r)\, dr \leq \int_0^\infty k_1(r)\, dr = k_2(0) = b_0(k)$$

Prova. A existência de uma solução para a equação de Ricatti (2.7.34) está dada em (2.7.32). A prova da unicidade é simples.

Para verificar (a), consideremos a família de funções contínuas u_l que se anulam identicamente em $[l,\infty)$ e são soluções de (2.7.34) em $[0,l]$. Como $-k \le 0$ e $k_1' = -k \le k_1^2 - k$, notamos que para cada $l > 0$

$$u_l'(r) = u_l(r)^2 - k(r) = u_l(r)^2 + k_1'(r) \tag{2.7.35}$$

donde

$$\int_r^\infty (u_l - k_1)'(s)\, ds = \int_r^\infty u_l^2(s)\, ds \ge 0 \tag{2.7.36}$$

e levando em conta que $u_l(\infty) = k_1(\infty) = 0$ concluímos que $u_l(r) - k_1(r) \le 0$ ou ainda

$$0 \le u_l(r) \le k_1(r) \tag{2.7.37}$$

consequentemente, pelo teorema de Arzela-Ascoli, o limite

$$u(r) = \lim_{l\to\infty} u_l(r), \tag{2.7.38}$$

existe e a função u satisfaz as condições desejadas. □

2.G.7. Observações (cf. [Ab]**).**

(i) $z_\infty(r) = \exp\left(-\int_0^r u(\rho)\, d\rho\right) \ge z_\infty(\infty) > 0$

(ii) todos os invariantes associados a k, considerados, são equivalentes em um certo sentido não linear:

$$b_1(k) \le b_0(k) \le \exp(b_1(k)) - 1 \tag{2.7.39}$$

Para simplificar notação denotamos $\beta := z_\infty(\infty) = \exp(-b_1(k))$

2.G.8. Lema (Abresch, [Ab]**).**

(a) $$\beta \le z_\infty(r) \le 1, \qquad 0 \le r \le \infty,$$

(b) $$\left(1 - \frac{r}{l}\right) z_\infty(r) \le z_l(r), \qquad 0 \le r \le l,$$

(c) $$\frac{\beta}{l} \le -z_l'(l) \le -z_l'(0) \le -z_\infty'(0) + \frac{1}{l} z_\infty(l) \le \frac{1}{l} + k_1(0)$$

Prova. (a) decorre da Observação 2.G.7-(i) acima.

Para provar (b), note que a diferença $\triangle z := z_\infty - z_l$ também resolve a equação (2.7.17). Como $\triangle z$ é não negativa em $[0,\infty)$, segue que é uma função convexa, e por conseguinte,

$$\triangle z(r) \le \frac{r}{l} \triangle z(l) + \left(1 - \frac{r}{l}\right) \triangle z(0) = \frac{r}{l} z_\infty(l) \tag{2.7.40}$$

donde vem que

$$z_l(r) \ge z_\infty(r) - \frac{r}{l} z_\infty(l) \ge \left(1 - \frac{r}{l}\right) z_\infty(l) \tag{2.7.41}$$

Finalmente mostremos (c): usando o item (b) e monotonicidade, a primeira, segunda e última desigualdades são óbvias. Para obter a terceira desigualdade, usamos a convexidade de $\triangle z$ e calculamos:

$$z_\infty'(0) - z_l'(0) = \triangle z'(0) \le \frac{1}{l} \triangle z(l) = \frac{1}{l} z_\infty(l) \tag{2.7.42}$$

□

2.H. Consequências do TCTG - Propriedades Triangulares

Como consequência do Teorema de Comparação de Toponogov Generalizado, podemos obter algumas estimativas (cf. [Ab]) que nos serão úteis posteriormente:

2.H.1 Proposição (desigualdades triangulares I). *Sejam a, $\varepsilon \in (0,1)$ e seja $\triangle(p_0,p_1,p_2)$ um triângulo geodésico generalizado em uma variedade Riemanniana com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa (M^n,o,g,k). Suponha ainda que $l_1 \leq (1-\varepsilon)l_2$ e que p_0 é o ponto base, o, de (M^n,o,g,k). Então, verificam-se as seguintes estimativas:*

(a) $$\cos(\angle p_0) \geq \sqrt{1-a^2\beta^2\varepsilon^2} \Rightarrow l_0 \leq l_2 - l_1\sqrt{1-a^2}$$

(b) $$\cos(\angle p_2) \geq -\sqrt{1-a^2} \Rightarrow l_2 \leq l_0 + l_1\sqrt{1-a^2\beta^2\varepsilon^2}$$

(c) $$\text{se } \angle p_0 \text{ é agudo } \Rightarrow |\operatorname{sen}(\angle p_0)| \geq \beta^2\varepsilon^2|\operatorname{sen}(\angle p_1)|.$$

Prova.

Para mostrar (a) aplicaremos o Teorema de Comparação Generalizado (TCTG-(c)).

Seja $\triangle(p_0,p_1,p_2)$ um triângulo contido em M^n e γ_1, $\gamma_2 : [0,1] \to M$ geodésicas minimizantes tais que

(2.8.1) $$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p_0\ , \quad \gamma_1(1) = p_1\ , \quad \gamma_2(1) = p_2 \quad \text{e} \quad \angle(\dot\gamma_1(0),\dot\gamma_2(0)) = \angle p_0\ .$$

Fica definida uma dobradiça $(\gamma_1,\gamma_2,\angle p_0)$ em M^n. Pelo TCTG-(c), segue que se $(\overline\gamma_1,\overline\gamma_2,\angle\overline p_0 = \angle p_0)$ é uma dobradiça de comparação em M^2_{-k} (associada ao triângulo $\overline\triangle(\overline p_0,\overline p_1,\overline p_2)$) então

(2.8.2) $$d_M(\gamma_1(1),\gamma_2(1)) = d_M(p_1,p_2) \leq d_{-k}(\overline\gamma_1(1),\overline\gamma_2(1)) = d_{-k}(\overline p_1,\overline p_2)$$

Em particular, se tomarmos $\angle\overline p_0 \geq \angle p_0$, também teremos $d_M(p_1,p_2) \leq d_{-k}(\overline p_1,\overline p_2)$.

Assim, para mostrarmos o ítem (a), consideramos um triângulo de comparação $\overline\triangle(\overline p_0,\overline p_1,\overline p_2) \subset M^2_{-k}$, com $d_{-k}(\overline p_0,\overline p_1) = l_2$, $d_{-k}(\overline p_0,\overline p_2) = l_1$ e $\cos(\angle\overline p_0) = \sqrt{1-a^2\beta^2\epsilon^2}$ (ou seja $\angle p_0 \leq \angle\overline p_0$). Basta então provarmos que $d_{-k}(\overline p_1,\overline p_2) = \bar l_0 \leq l_2 - l_1\sqrt{1-a^2\epsilon^2}$, pois $l_0 \leq \bar l_0$.

Ponhamos $l := l_2 = d_M(p_0,p_1)$ e definamos para $r > 0$, a função

(2.8.3) $$\lambda(r) := k(|l-r|)$$

Pela desigualdade triangular, observamos que para qualquer $p \in M^n$, com $d(p,p_1) = r$:

(2.8.4) $$|l-r| = |d_M(p_0,p_1) - d_M(p_1,p)| \leq d_M(p_0,p)$$

e pela monotonicidade de k,

(2.8.5) $$k(|d_M(p_0,p_1) - d_M(p_1,p)|) = \lambda(d_M(p_1,p)) \geq k(d_M(p_0,p))$$

Consequentemente, para todo $p \in M^n$,

(2.8.6) $$\text{curvaturas radiais em } p \geq -k(d_M(p_0,p)) \geq -\lambda(d_M(p_1,p))$$

Em M^2_{-k}, a solução de (2.7.17), $y(t)$, é um múltiplo da função $z_l(l-t)$ definida em (*) - em verdade, $y(t) = (-z_l'(l))^{-1}.z_l(l-t)$ que satisfaz $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Consideremos a função distância, $d_{-k}(\overline p_1,.)$, restrita à aresta (geodésica) $\overline\gamma_1$. Deste modo fica definida a função radial:

(2.8.7) $$t \mapsto r(t) = d_{-k}(\overline p_1,\overline\gamma_1(t))\ , \qquad \text{com } \ 0 \leq t \leq l_1$$

A geodésica unitária $\overline{\gamma}_1$ conecta $\overline{p}_2 = \overline{\gamma}_1(0)$ a $\overline{p}_0 = \overline{\gamma}_1(l_1)$, logo $r(0) = d_{-k}(\overline{p}_1, \overline{p}_2) = \bar{l}_0$ e $r(l_1) = d_{-k}(\overline{p}_1, \overline{p}_0) = \bar{l}_2$. Como $\cos(\angle \overline{p}_0) = \sqrt{1 - a^2\beta^2\epsilon^2}$, vem que

$$r'(l_1) = \cos(\angle \overline{p}_0) = \sqrt{1 - a^2\beta^2\varepsilon^2}. \tag{2.8.8}$$

A lei de conservação 2.5.16 torna-se, neste caso:

$$z_l(l - r(l_1))^2(1 - r'(l_1)^2) = z_l(0)^2(1 - \cos^2 \angle \overline{p}_0) = a^2\beta^2\varepsilon^2 = z_l(l - r(t))^2(1 - r'(t)^2) \tag{2.8.9}$$

Como, pelo Lema 2.G.8-(b):

$$\left(1 - \frac{r}{l}\right) z_\infty(l) \leq z_l(r), \qquad 0 \leq r \leq l \tag{2.8.10}$$

segue que

$$z_l(l - r(t)) \geq \frac{r(t)}{l} z_\infty(l) \tag{2.8.11}$$

e como $r(t) \geq l_2 - l_1 \geq \varepsilon l_2$, concluímos por (2.8.9) que

$$a^2\beta^2\varepsilon^2 \geq \varepsilon^2 z_\infty(l)^2(1 - r'(t)^2) \geq \varepsilon^2\beta^2(1 - r'(t)^2) \tag{2.8.12}$$

consequentemente

$$a^2 \geq 1 - r'(t)^2, \qquad 0 \leq t \leq l_1 \tag{2.8.13}$$

Logo, a função contínua r' não se anula em $[0, l_1]$; desta maneira

$$r'(t) \geq \sqrt{1 - a^2} \tag{2.8.14}$$

Assim

$$\int_0^{l_1} r'(s)\, ds = r(l_1) - r(0) = l_2 - l_0 \geq l_1\sqrt{1 - a^2} \tag{2.8.15}$$

e portanto

$$\bar{l}_0 = r(0) =\leq r(l_0) - l_0\sqrt{1 - a^2} = l_1 - l_0\sqrt{1 - a^2}. \tag{2.8.16}$$

Afim de provar (b), suponhamos por contradição que

$$l_2 > l_0 + l_1\sqrt{1 - a^2\beta^2\varepsilon^2} \tag{2.8.17}$$

Faremos novamente uso do Teorema de Toponogov Generalizado (2.F.2): seja dado o triângulo $\triangle(p_0, p_1, p_2) \subset M^n$, obtemos um triângulo $\overline{\triangle}(\overline{p}_0, \overline{p}_1, \overline{p}_2)$ no espaço modelo M^2_{-k} tal que

$$l_0 = \bar{l}_0, \qquad l_2 = \bar{l}_2, \qquad \cos(\angle \overline{p}_2) \;=\; -\sqrt{1 - a^2}. \tag{2.8.18}$$

A função $r(t) = d_M(\overline{p}_1, \overline{\gamma}_1(t))$ ao longo de $\overline{\gamma}_1$ satisfaz $r(0) = \bar{l}_2 = l_2$ e $r'(0) = \cos(\angle \overline{p}_2) = -\sqrt{1 - a^2}$.

Assim, por hipótese $\cos(\angle p_2) \geq -\sqrt{1-a^2} = \cos(\angle \bar{p}_2)$ implicando que $\angle p_2 \leq \angle \bar{p}_2$, (já que a função cosseno é decrescente em $[0,\pi]$) e pelo TCTG-(b) segue que $l_1 \leq \bar{l}_1$.

Como $l - \bar{l}_2 \leq l_0 \leq (1-\varepsilon)l$ deduzimos da fórmula (2.8.9) que

$$z_l(l-r)^2(1-r'^2) = z_l(l-\bar{l}_2)^2(1-r'(0)^2) \geq a^2 z_l((1-\varepsilon)l)^2 \geq a^2\beta^2\varepsilon^2. \tag{2.8.19}$$

e como $r(s) \leq l$, temos que $z_l(l-r) \leq l$, segue que

$$r(s) \leq l_2 + s\sqrt{1-a^2\beta^2\varepsilon^2} \tag{2.8.20}$$

o argumento de continuidade, agora nos leva à seguinte contradição

$$\bar{l}_1 = r(l_0) \leq l_2 + l_0\sqrt{1-a^2\beta^2\varepsilon^2} < l_1. \tag{2.8.21}$$

Finalmente, para provar (c), ponhamos $a_1 := \operatorname{sen}(\angle p_2)$. Disto, segue que $|\cos(\angle p_2)| = \sqrt{1-a_1^2}$; então, pela parte (b) concluímos que

$$l_2 \leq l_0 + l_1\sqrt{1-a_1^2\beta^2\varepsilon^2}. \tag{2.8.22}$$

Invertendo a implicação em (a), nós obtemos:

$$\cos(\angle o) \leq \sqrt{1-a_1^2\beta^4\varepsilon^4} \tag{2.8.23}$$

e como o ângulo em o é agudo, por hipótese, temos que $\cos(\angle o) > 0$ e consequentemente $(\cos(\angle o))^2 \leq 1 - a_1^2\beta^4\varepsilon^4$. Assim

$$(\operatorname{sen}(\angle o))^2 \geq \beta^4\varepsilon^4(\operatorname{sen}(\angle p_2))^2 \tag{2.8.24}$$

A proposição está demonstrada. □

No caso em que (M^n, o) é uma variedade com $K_o^{min} \geq 0$ então a Proposição 2.H.1 pode ser demonstrada usando o Teorema de Comparação TCTMS, (2.B.4) o qual nos permite simplificar significativamente vários dos cálculos e ganhar um pouco mais de intuição acerca da teoria utilizada.

2.H.2. Proposição (desigualdades triangulares II). *Seja (M, p_0) uma variedade aberta com $K_{p_0}^{min} \geq 0$ e sejam a, $\epsilon \in (0,1)$ e um triângulo geodésico $\triangle(p_0,p_1,p_2)$, tal que as geodésicas que conectam os pontos p_0 a p_1 e p_0 a p_2 são minimizantes. Suponha que $l_1 \leq (1-\epsilon).l_2$, onde $l_1 = d_M(p_0,p_2)$ e $l_2 = d_M(p_0,p_1)$. Então as seguintes estimativas valem:*

(a) $$\cos(\angle p_0) \geq \sqrt{1-a^2\epsilon^2} \quad \Rightarrow \quad l_0 \leq l_2 - l_1\sqrt{1-a^2}$$

(b) $$\cos(\angle p_2) \geq -\sqrt{1-a^2} \quad \Rightarrow \quad l_2 \leq l_0 + l_1\sqrt{1-a^2\epsilon^2}$$

(c) $$\angle p_0 \quad \text{agudo} \quad \Rightarrow \quad |\operatorname{sen}(\angle p_0)| \geq \epsilon^2 |\operatorname{sen}(p_2)|$$

Prova.

(a) Seja $\triangle(p_0,p_1,p_2)$ um triângulo contido em M e σ_1, $\sigma_2 : [0,1] \to M$ geodésicas minimizantes tais que $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p_0$, $\sigma_1(1) = p_1$, $\sigma_2(1) = p_2$ e $\angle(\dot{\sigma}_1(0), \dot{\sigma}_2(0)) = \angle p_0$.

Fica definida uma dobradiça $(\sigma_1, \sigma_2, \angle p_0)$ em M. Pelo TCTMS segue que se $(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \angle \tilde{p}_0 = \angle p_0)$ é uma dobradiça de comparação em $\mathbb{R}^2$ (associada ao triângulo $\tilde{\Delta}(\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$) então

$$d_M(\sigma_1(1), \sigma_2(1)) = d_M(p_1, p_2) \leq d_0(\tilde{\sigma}_1(1), \tilde{\sigma}_2(1)) = d_0(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \tag{2.8.25}$$

onde d_M e d_0 são, respectivamente, as distâncias em M e $\mathbb{R}^2$. Em particular, se tomarmos $\angle \tilde{p}_0 \geq \angle p_0$, também teremos $d_M(p_1, p_2) \leq d_0(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$.

Assim, para mostrarmos o ítem (a), consideramos um triângulo de comparação $\tilde{\Delta}(\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \subset \mathbb{R}^2$, com $d_0(\tilde{p}_0, \tilde{p}_1) = l_2$, $d_0(\tilde{p}_0, \tilde{p}_2) = l_1$ e $\cos(\angle \tilde{p}_0) = \sqrt{1 - a^2\epsilon^2}$ (ou seja $\angle p_0 \leq \angle \tilde{p}_0$). Basta então provarmos que $d_0(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{l}_0 \leq l_2 - l_1\sqrt{1 - a^2\epsilon^2}$, pois $l_0 \leq \tilde{l}_0$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\tilde{p}_0 = 0 \in \mathbb{R}^2$. Sejam v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^2$ vetores unitários tais que $\tilde{p}_1 = l_2 v_2$ e $\tilde{p}_2 = l_1 v_1$. O segmento de reta s_1 que conecta 0 a $\tilde{p}_2$ pode então ser parametrizado como $s_1(t) = tv_1$, $t \in [0, l_1]$ e a função distância entre $\tilde{p}_1$ e os pontos de s_1 é dada por

$$\begin{aligned} r : [0, l_1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto r(t) = |l_2 v_2 - t v_1| \end{aligned} \tag{2.8.26}$$

$r(t)$ é diferenciável, e sua derivada é dada por

$$\dot{r}(t) = \frac{-l_2 \cos(\angle \tilde{p}_0) + t}{r(t)} \tag{2.8.27}$$

donde vem que $\dot{r}(0) = -\sqrt{1 - a^2\epsilon^2} < 0$.

E como $\mathbb{R}^2$ é uma superfície de rotação, considerando um sistema de coordenadas polares (r, ϕ) em $\mathbb{R}^2$, recordemos (ver 2.A.12) que ao longo de uma geodésica (reta) parametrizada pelo comprimento de arco $t \mapsto \gamma(t)$, as funções $r(t)$ e $\phi(t)$ satisfazem as Leis de Conservação 2.E.3, em particular (a equação 2.5.16)):

$$r(t)^2(1 - \dot{r}(t)^2) = const^2 \tag{2.8.28}$$

substituindo (2.8.27) em (2.8.28), e usando a desigualdade triangular: $l_2 \leq r(t) + t \leq r(t) + l_1$, obtemos:

$$r(0)^2(1 - \dot{r}(o)^2) = l_2^2\epsilon^2 a^2 = r(t)^2(1 - \dot{r}(t)^2) \geq (l_2 - l_1)^2(1 - \dot{r}(t)^2) \geq l_2^2\epsilon^2(1 - \dot{r}(t)^2) \tag{2.8.29}$$

onde a última desigualdade decorre da condição $l_1 \leq (1 - \epsilon)l_2$. O cálculo acima nos mostra que

$$1 - \dot{r}(t)^2 \leq a^2 \tag{2.8.30}$$

ou seja, $\dot{r}(t)$ não se anula ($|\dot{r}(t)|$ mantem-se "próximo" de 1), consequentemente, como $\dot{r}(0) < 0$, vem que $\dot{r}(t) < 0$ para todo $t \in [0, l_1]$, donde $|\dot{r}(t)| = -\dot{r}(t)$. Logo

$$\int_0^{l_1} |\dot{r}(t)|\, dt = -\int_0^{l_1} \dot{r}(t)\, dt = r(0) - r(l_1) = l_2 - \tilde{l}_0 \geq l_1\sqrt{1 - a^2} \tag{2.8.31}$$

conforme queríamos demonstrar.

Para mostrar (b), consideramos um triângulo de comparação $\tilde{\Delta} = (\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\tilde{l}_1 = d_0(\tilde{p}_0, \tilde{p}_2) = l_1$, $\tilde{l}_0 = d_0(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = l_0$ e $\cos(\angle \tilde{p}_2) = -\sqrt{1 - a^2} < 0$, ou seja $\angle p_2 \leq \angle \tilde{p}_2$.

Então, pelo TCTMS 2.A.4-(a) concluímos que $l_2 \leq \tilde{l}_2$. É, portanto, suficiente mostrarmos que $\tilde{l}_2 \leq l_0 + l_1\sqrt{1 - a^2\epsilon^2}$.

Podemos supor que $\tilde{p}_2 = 0$. Sejam $w_0, w_1 \in \mathbb{R}^2$ tais que $l_0 w_0 = \tilde{p}_1$ e $l_1 w_1 = \tilde{p}_0$. Sejam também $\sigma_1 : [0, l_1] \to \mathbb{R}^2$, o segmento de reta conectando $\tilde{p}_2$ a $\tilde{p}_0$, $\sigma_1(t) = t w_1$ e

$$r(t) := |l_0 w_0 - \sigma_1(t)| = |l_0 w_0 - t w_1| \,, \qquad \text{onde} \quad t \in [0, l_1] \tag{2.8.32}$$

a função distância de p_1 a $\sigma_1(t)$. Temos as seguintes propriedades (como no ítem (a)): $r(0) = l_0$, $r(l_1) = \tilde{l}_2$ e $\dot{r}(t) = r(t)^{-1}(-l_0 . \cos(\angle \tilde{p}_2) - t)$, donde $\dot{r}(0) = -\cos(\angle \tilde{p}_2) > 0$. Por (2.8.26), chegamos a

$$r(0)^2(1 - \dot{r}(o)^2) = l_0^2 a^2 = r(t)^2(1 - \dot{r}(t)^2) \tag{2.8.33}$$

levando em conta as estimativas:

$$r(t)^2 = l_0^2 + t^2 + 2 l_0 t \sqrt{1 - a^2} \leq l_0^2 + l_1^2 + 2 l_0 l_1 \sqrt{1 - a^2} \quad \text{e} \tag{2.8.34}$$

$$l_0 \geq \tilde{l}_2 - l_1 \geq \epsilon \tilde{l}_2 \qquad \text{pois} \quad l_1 \leq (1 - \epsilon) l_2 \leq (1 - \epsilon)\tilde{l}_2 \tag{2.8.35}$$

concluímos que (2.8.35) nos leva a

$$\epsilon^2 a^2 \leq 1 - \dot{r}(t)^2 \tag{2.8.36}$$

ou ainda (observando que $\dot{r}(t) > 0$)

$$\int_0^{l_1} \dot{r}(t)\, dt = r(l_1) - r(0) = \tilde{l}_2 - l_0 \leq \int_0^{l_1} \sqrt{1 - a^2\epsilon^2}\, dt = l_1 \sqrt{1 - a^2\epsilon^2} \tag{2.8.37}$$

e a demonstração de (b) está completa.

Provemos (c): Seja $a = \text{sen}(\angle p_2)$, então $|\cos(\angle p_2)| = \sqrt{1 - a^2}$ e pelo ítem (b) vem que

$$l_2 \leq l_0 + l_1 \sqrt{1 - a^2\epsilon^2} \tag{2.8.38}$$

Revertendo a implicação em (a), obtemos

$$\cos(\angle p_0) \leq \sqrt{1 - a^2\epsilon^4} \tag{2.8.39}$$

e como $\angle p_0$ é agudo, vem que $\cos(\angle p_0) > 0$. Logo, $(\cos(\angle p_0))^2 \leq 1 - a^2\epsilon^4$ implica que

$$(\text{sen}(\angle p_0))^2 \geq \epsilon^4 (\text{sen}(\angle p_2))^2 \tag{2.8.40}$$

de onde segue o resultado desejado. □

CAPÍTULO 3

3.A. Principais resultados deste capítulo

Recordemos (veja Introdução 0.3.B, ou Capítulo 2 - Definição 2.C.1) que por variedade com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa, (M^n, o, g, k) (ou CRANN), entendemos uma variedade Riemanniana pontuada, com uma função monótona não negativa $k : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que

$$b_0(k) := \int_0^\infty rk(r)dr < \infty \qquad \text{e} \qquad K_o^{min} \geq -k(d_M(o,p)) \tag{3.1.1}$$

O primeiro resultado que vamos apresentar como consequência topológica do Teorema de Comparação de Toponogov Generalizado (Capítulo 2) concerne à finitude do número de fins de uma variedade CRANN. Precisamente:

3.A.1. Teorema. *Toda variedade Riemanniana CRANN, (M^n, o, g, k), possui no máximo um número finito de fins. Podemos estimar o número de fins de M^n:*

$$\#\{\text{fins } \mathcal{F} \text{ de } M^n\} \leq 2\pi^{n-1} \exp((n-1)b_1(k)) \tag{3.1.2}$$

onde $b_1(k)$ é o invariante definido no Lema 2.C.6-(b) (quer dizer, $b_1(k) = \int_0^\infty u(s)\, ds$, onde u é solução da equação de Ricatti: $u' = u^2 - k$).

Vamos também apresentar uma versão para o Teorema de Comparação de Bishop-Gromov, para variedades CRANN:

3.A.2. Teorema. *Sejam M^n uma variedade CRANN. Então a função*

$$t \mapsto \frac{Vol_n(B(o,t))}{Vol_n(B_{-k}(0,t))} \tag{3.1.3}$$

é monótona não crescente, onde $B_{-k}(0,t)$ é a bola centrada em 0, de raio t, na variedade de comparação $(\mathbb{R}^n, 0, g_k = dr^2 + J_k(r)^2 d\Theta^2)$, e $d\Theta^2$ é a forma métrica de $S^{n-1}(1)$.

E este resultado nos permitirá demonstrar (afirmativamente) as conjecturas 2.C.7 e 2.C.10, levantadas no Capítulo 2 quer dizer:

3.A.3. Teorema. *Dado $\delta > 0$, existe uma constante $\varepsilon = \varepsilon(n, \delta)$ tal que se uma variedade (M^n, g) possui um ponto p_0 satisfazendo, para todo $p \in M^n$:*

$$K_{p_0}^{min}(p) \geq -k(d_M(p_0,p)), \qquad \int_0^\infty sk(s)\, ds \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad Vol\,(B(p_0,r)) \geq \left(\frac{1}{2} + \delta\right) w_n r^n \tag{3.1.4}$$

para alguma função monótona não negativa, $k : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Então $r_{p_0} = d_M(p_0, .)$ não possui pontos críticos. Em particular M^n é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

3.A.4. Teorema. *Existe uma constante $\varepsilon > 0$ tal que se (M^n, o, g, k) é uma variedade CRANN com $b_0(k) < \varepsilon$ então M^n possui no máximo dois fins*

Também podemos obter Teorema de Pré compacidade para a classe de variedades CRANN, o que nos vai permitir falar sobre seus cones tangentes no infinito. Precisamente:

3.A.5. Teorema. *Seja $k : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uma função monótona não negativa fixada, tal que*

$$b_0(k) = \int_0^\infty sk(s)\, ds \leq \infty \tag{3.1.5}$$

então, a classe das n-variedades Riemannianas abertas, pontuadas $\mathcal{M}_{-k,n} := \{(M^n, o, g, k)\}$ é um conjunto pré-compacto na distância de Hausdorff.

3.B. Finitude topológica de (M^n, o, g, k)

Uma das mais importantes propriedades que uma variedade com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa possui, é sua finitude topológica, conforme citamos em 3.A.1 (veja também Exemplo 2.A.9). Para provarmos tal resultado, precisamos, inicialmente, dizer o que entendemos por fim de uma variedade (dentre as várias definições equivalentes de fim, extraímos a seguinte de [Ab]):

3.B.1. Definição. *Duas curvas c_1, $c_2 : [0,\infty) \to M^n$ são ditas cofinais se, para todo subconjunto compacto $K \subset M^n$ existe algum $t > 0$ tal que $\forall t_1$, $t_2 \geq t$, temos $c(t_1)$ e $c(t_2)$ pertencendo a mesma componente conexa de $M^n \setminus K$ (fácil ver que a relação "ser cofinal" é uma relação de equivalência). Uma classe de equivalência de curvas cofinais é chamado um fim de M^n. Denotaremos cada fim de M^n por $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{F}_a$ para o a-ésimo fim)*

3.B.2. Propriedades elementares dos fins (cf. [Ab]).

(i) Dada uma família qualquer de subconjuntos abertos relativamente compactos $\{U_j\}_{i\in\mathbb{N}}$ que exaurem M^n, isto é, que satisfazem $U_j \subset\subset U_{j+1}$ e $\cup_{j\geq 1} U_j = M^n$, fica definida uma bijeção:

$$\{\text{fins } \mathcal{F} \text{ de } M^n\} \to \{\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}} \mid F_{j+1} \subset F_j \quad \text{e } F_j \text{ é uma componente conexa de } M^n \setminus \overline{U}_j\} \ . \tag{3.2.1}$$

Em cada sistema inverso $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, acima, os conjuntos F_j são não vazios e seus fechos, $\overline{F}_j$ não compactos.

(ii) Fixado um ponto $p \in M^n$, então cada fim $\mathcal{F}$ de M^n contém um raio $\gamma : [0,\infty) \to M^n$ partindo de $p = \gamma(0)$ (ou seja, γ é uma geodésica minimizante em cada segmento).

(iii) Dados dois fins $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ de M^n, existe uma linha $\sigma : \mathbb{R} \to M^n$ tal que os raios $\sigma_\pm : [0,\infty) \to M^n$ dados por $\sigma_\pm(t) = \sigma(\pm t)$ estão contidos em $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ respectivamente.

3.B.3. Teorema. *Toda variedade Riemanniana,(M^n, o), com curvatura minimal radial assintoticamente não negativa possui no máximo um número finito de fins. Podemos estimar o número de fins de M^n:*

$$\#\{\text{fins } \mathcal{F} \text{ de } M^n\} \leq 2\pi^{n-1} \exp((n-1)b_1(k)) \tag{3.2.2}$$

onde $b_1(k) = \int_0^\infty u(s)\, ds$ e u é solução da equação de Riccati: $u' = u^2 - k$ sujeita à condição de contorno $u(r) \to 0$ se $r \to \infty$ (veja, e.g., Lema 2.G.6)

Prova. Para cada fim $\mathcal{F}_\alpha$ escolhemos um raio unitário γ_α partindo de o e contido em $\mathcal{F}_\alpha$. Consideremos o conjunto de todos os vetores unitários $v_\alpha := \gamma'_\alpha(0)$ em T_oM^n. Então, para todo vetor unitário, $v \in T_oM^n$, suficientemente próximo de v_α, a geodésica

$$\gamma_v : [0,\infty) \to M^n \ , \quad \text{dada por} \quad \gamma_v(t) = \exp_o(tv) \tag{3.2.3}$$

está contida em $\mathcal{F}_\alpha$. De fato, se

$$\langle v, v_\alpha \rangle = \sqrt{1 - a^2\beta^2\varepsilon^2} \tag{3.2.4}$$

então

$$d_M(\gamma_\alpha(t), \gamma_v((1-\varepsilon)t) \leq t - (1-\varepsilon)t\sqrt{1-a^2} = t[1 - (1-\varepsilon)\sqrt{1-a^2}] =: tq_{\varepsilon,a} \tag{3.2.5}$$

onde, como é fácil ver, $0 < q_{\varepsilon,a} < 1$; assim γ_v estará contido em $\mathcal{F}_\alpha$ se $\langle v, v_\alpha \rangle > \sqrt{1-\beta^2}$. Com isto, as bolas

$$B(v_\alpha, 2^{-1}\operatorname{arcsen}(\beta)) \subset S_oM^n \tag{3.2.6}$$

da esfera unitária $S^{n-1} \subset T_oM^n$, com centro em v_α e raio $2^{-1}\operatorname{arcsen}(\beta)$ são duas a duas disjuntas. Observemos que $\operatorname{arcsen}(\beta) \geq \beta = \exp(-b_1(k))$. A desejada estimativa do número de fins de M^n, é obtida diretamente do Lema de Empacotamento (cf. [Gr2]) que segue. □

3.B.4 Lema de Empacotamento. *Seja $0 < \rho < \pi/2$; então o número de bolas disjuntas de raio ρ, $B_\rho \subset S^{n-1}$ não ultrapassa*

$$\frac{Vol(S^{n-1})}{Vol(B_\rho)} \leq 2\left(\frac{\pi}{2\rho}\right)^{n-1} \tag{3.2.7}$$

Prova. A demonstração deste Lema é uma aplicação imediata do Teorema de Comparação de Bishop-Gromov. Vamos comparar os volumes das bolas de S^{n-1} e $\mathbb{R}^{n-1}$ (variedade de comparação). Observe que

$$Vol(S^{n-1}) = Vol(B_{S^{n-1}}(o,\pi)) = 2Vol(\text{semi-esfera de } S^{n-1}) = 2Vol(B_{S^{n-1}}(o,\pi/2)) \tag{3.2.8}$$

Assim, como $\rho < \pi/2$:

$$\frac{Vol(S^{n-1})}{Vol(B_\rho)} = 2\frac{Vol(B_{S^{n-1}}(o,\pi/2))}{Vol(B_{S^{n-1}}(o,\rho))} \leq 2\frac{Vol(B_{\mathbb{R}^{n-1}}(0,\pi/2))}{Vol(B_{\mathbb{R}^{n-1}}(0,\rho))} = 2\left(\frac{\pi}{2\rho}\right)^{n-1} \tag{3.2.9}$$

o que prova o Lema. □

O Teorema de finitude 3.B.3, pode ser demonstrado de uma outra maneira, usando a noção de pontos críticos para a função distância. Mas para fazermos esta prova alternarnativa precisamos, antes, definir alguns elementos importantes.

3.B.5. Definição. *Uma geodésica σ de M^n definida em $[0,\infty)$ [respectivamente $(-\infty,\infty)$] é chamada de raio (resp., uma linha reta) se $d_M(\sigma(t),\sigma(s)) = |t-s|$ para todo s, $t \in [0,\infty)$ [resp., s, $t \in (-\infty,\infty)$]. Escrevemos $\mathcal{R}_M$ (resp., $\mathcal{R}_p$) para denotar o conjunto de todos os raios de M (resp., todos os raios de M começando em um ponto p).*

Em variedades abertas, uma classe de funções que desempenham fundamental importância são as funções de Busemann (funções do tipo distância). O artigo de K. Shiohama, "Topology of complete noncompact manifolds" [S] faz uma descrição bastante completa das propriedades de funções de Busemann e algumas implicações topológicas. Definimos a função de Busemann associada a um raio $\sigma \in \mathcal{R}_M$ como sendo o seguinte limite

$$F_\sigma(x) := \lim_{t\to\infty} t - d_M(x,\sigma(t)) \tag{3.2.10}$$

Definimos também a seguinte função "tipo-distância" (distance-like), F_p, associada à família de esferas métricas $\{S_t(p)\}$ em torno de um ponto p, por

$$F_p(x) := \lim_{t\to\infty} t - d_M(x, S_t(p)) \tag{3.2.11}$$

(uma outra maneira de se definir tal função, é tomando o máximo das funções de Busemann $\max\{F_\sigma |\ \sigma \in \mathcal{R}_p\}$)

Por exemplo, em $\mathbb{R}^n$, um cálculo simples nos mostra que para quaisquer x, $p \in \mathbb{R}^n$, e qualquer raio partindo de p, $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, a função de Busemann $F_\gamma(x) = d_{\mathbb{R}^n}(p,x)\cos\theta = |p-x|\cos\theta$, onde θ é o ângulo entre $\gamma'(0)$ e o segmento de reta que conecta p a x, enquanto que $F_p(x) = d_{\mathbb{R}^n}(p,x) = |p-x|$. Os seguintes resultados mostram algumas das propriedades interessantes destas funções (Teorema 1.1 de [S])

3.B.6. Lema.

(a) F_σ e F_p são Lipschitzianas, com constante de Lipschitz 1

(b) Qualquer que seja $a \in F_\sigma(M)$ o conjunto de nível $F_\sigma^{-1}(a) = \{x \in M \mid F_\sigma(x) = a\} = \lim_{t\to\infty} S(\sigma(t), t-a)$, onde $S(\sigma(t), t-a)$ é a esfera centrada em $\sigma(t)$ e de raio $t-a$.

(c) $F_\sigma \leq F_p \leq r_p$ *em* M, *e* $F_\sigma(\sigma(t)) = F_p(\sigma(t)) = r_p(\sigma(t)) = t$ *em* $[0,\infty)$, *quaisquer que sejam* $p \in M$ *e* $\sigma \in \mathcal{R}_p$, *onde* $r_p(x) = d_M(p,x)$.

(d) $F_p(x) = t - d_M(x, F_p^{-1}(t))$ *para todo o* p, $x \in M$ *e* $t > 0$ *com* $F_p(x) < t$.

(e) Um raio $\sigma \in \mathcal{R}_M$ *é assintótico a outro raio* $\gamma \in \mathcal{R}_M$ *se, e somente se,* $F_\gamma(\sigma(t)) = t + F_\gamma(\sigma(0))$ *para todo* $t \geq 0$

Aqui, um raio σ é dito ser assintótico ao raio γ se existe uma família de geodésicas minimizantes $\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, cada σ_m satisfazendo $\sigma_m(0) = p_m$ e $\lim_{m\to\infty} p_m = \sigma(0)$ e $\sigma_m(a_m) = \gamma(b_m)$ para alguma sequência divergente $\{b_m\}$, além disso $\dot\sigma(0) = \lim_{m\to\infty} \dot\sigma_m(0)$.

Para uma demonstração do lema acima, veja [S]

Apesar das funções r_p, F_σ, F_p serem, geralmente, apenas funções de Lipschitz sobre M^n, é conveniente introduzirmos uma noção fraca de gradiente, para tais funções, da maneira seguinte:

$$\nabla.r_p(x) := \{v \in T_xM : \|v\| = 1,\ t + r_p(\exp_x(-tv)) = r_p(x), \forall t \in [0, r_p(x)]\} \tag{3.2.12}$$

$$\nabla.F_p(x) := \{v \in T_xM :\ \|v\| = 1, F_p(\exp_x(tv)) - t = F_p(x), \forall t \geq 0\} \tag{3.2.13}$$

$$\nabla.F_\sigma(x) := \{v \in T_xM : \|v\| = 1, F_\sigma(\exp_x(tv)) - t = F_\sigma(x), \forall t \geq 0\} \tag{3.2.14}$$

Podemos ainda apresentar uma outra maneira de definir tal noção de gradiente generalizado (compare com artigo de T. Shioya [Sy2]): Seja

$$\overline{\nabla r_p} := \overline{\{\nabla r_p(x) \big|\ r_p \text{ é suave em } x\ \}} \tag{3.2.15}$$

onde a segunda barra denota o fecho topológico do conjunto. Definimos então

$$\overline{\nabla r_p}(x) := \overline{\nabla r_p} \cap T_xM \tag{3.2.16}$$

3.B.7. Observação. *As duas noções de gradiente generalizado, acima dadas coincidem*

Verificação. Com efeito, temos duas situações a considerar:

Primeira: o ponto $x \notin \mathcal{C}_p$ então existe uma única geodésica minimizante conectando p a x a qual satisfaz trivialmente (3.2.12) e (3.2.16)

Segunda: o ponto $x \in \mathcal{C}_p$. Neste caso, $v \in \overline{\nabla r_p}(x)$ se, e somente se existe uma sequência de pontos $\{x_n\}_n \not\subset \mathcal{C}_p$ tal que $x_n \to x$ e $\nabla r_p(x_n) = v_n \to v$, conforme $n \to \infty$. Para cada x_n temos

$$t + r_p(\exp_{x_n}(-tv_n)) = r_p(x_n) \qquad \text{para } t \in [0, r_p(x_n)] \tag{3.2.17}$$

fazendo $n \to \infty$, na expressão (3.2.17), a continuidade da função distância nos mostra que

$$t + r_p(\exp_x(-tv)) = r_p(x) \qquad \text{para } t \in [0, r_p(x)]\ . \tag{3.2.18}$$

□

3.B.8. Lema (cf. [Ka1]**).** *Seja* (M^n, o, g, k) *uma variedade Riemanniana CRANN. Então valem as seguintes asserções*

(a) A função $F_o(x)/r_o(x)$ converge para 1 conforme x vai para infinito (i.e., conforme $r_o(x) \to \infty$). Em particular, $F_o : M \to \mathbb{R}$ é uma função de exaustão em M, quer dizer, para cada $t \in \mathbb{R}$, o subconjunto $\{x \in M : F_o(x) \leq t\}$ é compacto.

(b) Conforme $x \in M$ tende para infinito

$$\max\{\angle(u,v) : u,v \in \nabla.r_o(x)\} \to 0 \tag{3.2.19}$$

$$\max\{\angle(u,v) : u \in \nabla.r_o(x), v \in \nabla.F_o(x)\} \to 0 \tag{3.2.20}$$

Algumas observações acerca do conteúdo do lema acima: a afirmação (a) nos diz que a função de Busemann $F_o(x)$ para x distante de o tem comportamento semelhante ao da função distância $r_o(x)$. As afirmações em (b) afirmam que, no infinito ($r_o(x) \to \infty$), está bem definido um campo gradiente da função distância r_o e que este coincide com o campo gradiente de F_o, no infinito. Uma consequência direta deste lema é a finitude topológica de (M^n, o, g, k), conforme já comentamos anteriormente:

3.B.9. Teorema. *Toda variedade CRANN, (M^n, o, g, k), tem tipo topológico finito.*

Prova do Teorema 3.B.9.
Com efeito, o Lema 3.B.8 afirma que existe $R > 0$ tal que para todo $x \in M^n \setminus B(o,R)$

$$\max\{\angle(u,v) : u,v \in \nabla.r_o(x)\} < \frac{\pi}{2} \tag{3.2.21}$$

mas, pela definição de ponto crítico da função distância (0.4.D.1), isto quer dizer que x não é ponto crítico de r_o. Assim, usando o Lema de Isotopia (0.4.D.3), concluímos que M^n é homeomorfa à bola $B(o,R)$ (dito de outra forma: $M^n \setminus B(o,R)$ é homeomofa a $r_o^{-1}(R) \times [0,\infty)$). Em particular, M^n possui um número finito de fins. □

Passamos agora à

Prova do Lema 3.B.8.
Vamos provar primeiramente a propriedade (a). Seja $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de M^n, tal que $r_o(x_m) \to \infty$ conforme $m \to \infty$. Para cada m, temos uma geodésica minimizante $\sigma_m : [0, a_m] \to M$ ($a_m = r_o(x_m)$) conectando os pontos o e x_m. Tomando uma subsequência, se necessário, podemos assumir que σ_m converge para um raio $\sigma_\infty \in \mathcal{R}_o$, com início em o (pois a esfera unitária $S^{n-1}(0)$ em T_oM é compacta), ou, em outras palavras, $\theta_m := \angle(\dot\sigma_m(0), \dot\sigma_\infty(0))$ tende a zero conforme $m \to \infty$. Sejam a, $\varepsilon \in (0,1)$ arbitrariamente escolhidos. Então, para m suficientemente grande, temos

$$\cos\theta_m \geq \sqrt{1 - a^2\beta^2\varepsilon^2}. \tag{3.2.22}$$

Ponha $y_m := \sigma_\infty(a_m/(1-\varepsilon))$. Então, pela Proposição 2.H.1-(a) (Desigualdades Triangulares I)

$$d_M(x_m, y_m) \leq \frac{a_m}{1-\varepsilon} - a_m\sqrt{1-a^2}. \tag{3.2.23}$$

para m grande. Segue do Lema 3.B.6 (c) e (d) que

$$F_o(x_m) = \frac{a_m}{1-\varepsilon} - d_M\left(x_m, F_o^{-1}\left(\frac{a_m}{1-\varepsilon}\right)\right) \geq \frac{a_m}{1-\varepsilon} - d_M(x_m, y_m) \geq a_m\sqrt{1-a^2}. \tag{3.2.24}$$

Isto implica que

$$\sqrt{1-a^2} \leq \frac{F_o(x_m)}{r_o(x_m)} \ (\leq 1) \tag{3.2.25}$$

para m suficientemente grande. Como $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $a \in (0,1)$ são arbitrários, fica demonstrada a primeira asserção.

Provemos agora (b): ponhamos

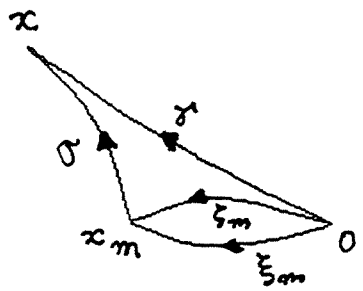
$$\theta(x) := \max\{\angle(u,v) : u, v \in \nabla.r_o(x)\} \tag{3.2.26}$$

Suponhamos que exista uma constante $c \in (0,1)$ e uma sequência $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de pontos de M^n tal que $a_m = r_o(x_m)$ vai para infinito quando $m \to \infty$ e $\theta(x_m) > 2c > 0$ para todo m. Tomemos um par de vetores $u_m, v_m \in \nabla.r_o(x_m)$ tal que $\angle(u_m, v_m) > 2c$, e sejam

$$\zeta_m(t) := \exp_{x_m}(t-a_m)u_m \qquad \text{e} \qquad \xi_m(t) := \exp_{x_m}(t-a_m)v_m \tag{3.2.27}$$

com $0 \leq t \leq a_m$ (é claro que $\zeta_m(0) = \xi_m(0) = o$). Fixemos m.

Seja x, um ponto de M^n tal que $b = r_o(x) \geq a_m/(1-\varepsilon)$ e $\sigma : [0,d] \to M^n$ ($d := d_M(x, x_m)$) uma geodésica minimizante ligando x_m a x. Observe que $\max\{\angle(\dot\sigma(0), u_m), \angle(\dot\sigma(0), v_m)\} > c$ (pois, caso contrário, se fosse $\max\{\angle(\dot\sigma(0), u_m), \angle(\dot\sigma(0), v_m)\} \leq c$ então teríamos $\angle(u_m, v_m) \leq \angle(u_m, \dot\sigma(0)) + \angle(\dot\sigma(0), v_m) \leq 2c$, contradizendo o fato que estamos assumindo: $\theta(x_m) > 2c$).



Então, para uma constante $\varepsilon \in (0,1)$ e uma geodésica minimizante $\gamma : [0,b] \to M^n$ ligando $o = \gamma(0)$ a $x = \gamma(b)$, nós vemos que

$$\angle(\dot\gamma(0), \dot\zeta_m(0)) \geq \delta, \qquad \text{se} \qquad \angle(\dot\sigma(0), u_m) > c$$

$$\angle(\dot\gamma(0), \dot\xi_m(0)) \geq \delta, \qquad \text{se} \qquad \angle(\dot\sigma(0), v_m) > c \tag{3.2.28}$$

onde $\delta = \delta(c, \varepsilon, \beta)$ é uma constante dependendo apenas de c, ε e β (conforme Proposição 2.H.1). Com efeito suponhamos, por exemplo, que $\angle(\dot\sigma(0), u_m) > c$, então segue que

$$\angle(\dot\sigma(0), -u_m) = \pi - \angle(\dot\sigma(0), u_m) < \pi - c \tag{3.2.29}$$

implicando que

$$\cos\angle(\dot\sigma(0), -u_m) > \cos(\pi - c) = -\cos c = -\sqrt{1-(\operatorname{sen} c)^2} \tag{3.2.30}$$

aplicando a Proposição 2.H.1-(b), com $a = \operatorname{sen} c$ para o triângulo geodésico $\triangle(\zeta_m, \sigma, \gamma)$ obtemos

$$b \leq d + a_m\sqrt{1 - a^2\beta^2\varepsilon^2}. \tag{3.2.31}$$

onde $a = \operatorname{sen} c$. Segue por (3.2.31) e Proposição 2.H.1-(a) que

$$\cos \angle(\dot\gamma(0), \dot\zeta_m(0)) \leq \sqrt{1 - a^2\beta^4\varepsilon^4} \tag{3.2.32}$$

e portanto

$$\angle(\dot\gamma(0), \dot\zeta_m(0)) \geq \delta := \arccos\sqrt{1 - a^2\beta^4\varepsilon^4} \tag{3.2.33}$$

semelhantemente, mostramos a outra condição.

3.B.10. Observação. Uma outra forma de provarmos a afirmação (3.2.28) é observar que se fosse $\delta = 0$ então teríamos uma sequência de pontos $(y_k)_k$ em M^n, satisfazendo $d(o, y_k) \geq a_m/(1-\varepsilon)$, e geodésicas minimizantes $\gamma_k : [0, b_k] \to M^n$ e $\sigma_k : [0, d_k] \to M^n$ satisfazendo

$$\gamma_k(0) = o\ , \qquad \gamma_k(b_k) = y_k\ , \qquad \sigma_k(0) = x_m\ , \qquad \sigma_k(d_k) = y_k\ ,\ \text{e} \qquad \angle(\dot\sigma_k(0), u_m) > c \tag{3.2.34}$$

e

$$\lim_{k\to\infty} \angle(\dot\gamma_k(0), \dot\zeta_m(0)) = 0 \tag{3.2.35}$$

Por continuidade da função ângulo e unicidade do limite temos que $\lim_{k\to\infty} \dot\gamma_k(0) = \dot\zeta_m(0)$; assim, dado $\overline{\varepsilon} > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $k \geq k_0$, temos $\angle(\dot\gamma_k(0), \dot\zeta_m(0)) < \overline{\varepsilon}$ e daí

$$\theta_k := \pi - \angle(u_m, \dot\sigma_k(0)) > \pi - \overline{\delta} \tag{3.2.36}$$

onde $\overline{\delta} = \overline{\delta}(k, \overline{\varepsilon}) > 0$, e $\overline{\delta} \to 0$ se $\overline{\varepsilon} \to 0$. Mas isto é um absurdo pois, por hipótese, $\theta_m \leq \pi - c$.

Fica assim demonstrada (3.2.28).

Prosseguindo nosso argumento, afim de chegar a uma contradição, vemos que por compacidade de $S^{n-1}(0) \times S^{n-1}(0) \subset T_oM \times T_oM$ podemos supor que a sequência $(\dot\zeta_m(0), \dot\xi_m(0)) \subset S^{n-1}(0) \times S^{n-1}(0)$ seja convergente e satisfaça $(1-\varepsilon)a_{m'} \geq a_m$ se $m' > m$. Então, para o $\delta > 0$ acima obtido, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m' > m \geq m_0$ teremos

$$\angle(\dot\zeta_{m'}(0), \dot\zeta_m(0)) < \frac{\delta}{2} \qquad \text{e} \qquad \angle(\dot\xi_{m'}(0), \dot\xi_m(0)) < \frac{\delta}{2} \tag{3.2.37}$$

em contradição com (3.2.28). Desta maneira, provamos que $\theta(x) \to 0$ conforme $r_o(x) \to \infty$.

Para finalizar, demonstraremos que $\max\{\angle(u, v) : u \in \nabla.r_o(x), v \in \nabla.F_o(x)\}$ converge para zero se $r_o(x) \to \infty$. Em essência, seguiremos os mesmos passos do raciocínio anterior. Sejam $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência divergente em M^n e $c \in (0,1)$ uma constante, tais que

$$\angle(u_m, v_m) > c > 0 \qquad \text{para certos} \qquad u_m \in \nabla.r_o(x_m) \qquad \text{e} \qquad v_m \in \nabla.F_o(x_m)\ . \tag{3.2.38}$$

Fixado t, sejam $\zeta_m(t) := \exp_{x_m} tv_m$, $\gamma_m : [0, r_o(x_m)] \to M^n$ a geodésica minimizante conectando o ponto o a x_m tal que $\gamma_m'(r_o(x_m)) = u_m$ e considere uma geodésica minimizante $\xi_{m,t}$ conectando o ponto o a $\zeta_m(t)$. Dado $\varepsilon \in (0,1)$, existe $t_0 > 0$ tal que se $t \geq t_0$ então $r_o(\zeta_m(t)) \geq r_o(x_m)/(1-\varepsilon)$. Note ainda que a condição (3.2.38)

implica que o ângulo $\theta = \pi - \angle(u_m, v_m) < \pi - c$ de onde obtemos $\cos\theta > -\sqrt{1-(\operatorname{sen} c)^2}$ e daí, aplicando a Proposição 2.H.1-(b) ao triângulo geodésico $\triangle(\gamma_m, \zeta_m, \xi_{m,t})$, nós temos

$$r_o(\zeta_m(t)) \leq t + r_o(x_m)\sqrt{1-a^2\beta^2\varepsilon^2}\ , \tag{3.2.39}$$

onde $a = \operatorname{sen} c$. Por outro lado, decorre da definição de $\nabla.F_o(x_m)$ e do fato que $F_o \leq r_o$ (Lema 3.B.6-(c)) que

$$r_o(\zeta_m(t)) \geq F_o(\zeta_m(t)) = t + F_o(x_m) \tag{3.2.40}$$

Segue das desigualdades (3.2.39) e (3.2.40) acima que

$$\frac{F_o(x_m)}{r_o(x_m)} \leq \sqrt{1-a^2\beta^2\varepsilon^2} < 1 \tag{3.2.41}$$

para todo m, mas isto contradiz a primeira asserção (a) do Lema. Fica assim demonstrada a segunda asserção e, por conseguinte, a demonstração do Lema 3.B.8 está concluída. □

3.C. Comparação de Volumes em Variedades CRANN

Iniciamos esta seção apresentando o Teorema de Comparação de Volumes, ou Teorema de Bishop-Gromov para variedades CRANN.

Seja $\Gamma \subset S_oM$ um subconjunto fechado de vetores unitários em T_oM, vamos escrever

$$B_\Gamma(o,r) := \{\exp_o(t\Gamma)\big|0 \leq t \leq r\}$$

(em particular, no caso em que $\Gamma = S^{n-1}$, temos $B_\Gamma(o,r) = \overline{B(o,r)}$) e vamos definir

$$S_\Gamma(r) := \{rv\big|v \in \Gamma\}$$

Por γ_v entenderemos uma geodésica (parametrizada pelo comprimento de arco) com direção inicial $\gamma_v'(0) = v$.

Denotemos por $B_{-k}(\overline{o},r)$ à bola centrada em $\overline{o}$, de raio r, na variedade de comparação $(\mathbb{R}^n, \overline{o} = 0, g_k = dr^2 + J_k(r)^2 d\Theta^2)$, onde $d\Theta^2$ é a forma métrica canônica de $S^{n-1}(1)$. Ponhamos também

$$B_\Gamma^{-k}(\overline{o},r) := \{\exp_{\overline{o}}(t\Gamma)\big|0 \leq t \leq r\}$$

(onde o subconjunto $\Gamma \subset S_{\overline{o}}M^n_{-k}$, neste caso, é alguma imagem isométrica do subconjunto $\Gamma \subset S_oM$).

3.C.1. Teorema de Comparação de Volumes (cf. [Z1], [Z2]). *Sejam (M^n, o, g, k) uma variedade CRANN e $\Gamma \subset S_oM$ um subconjunto mensurável da esfera unitária em $S_oM \subset T_oM$. Então a função*

$$t \mapsto \frac{Vol_n(B_\Gamma(o,t))}{Vol_n(B_\Gamma^{-k}(\overline{o},t))} \tag{3.3.1}$$

é monótona não crescente. Além disso, valem as seguintes desigualdades:

$$\frac{Vol_n(B_\Gamma(o,r))}{Vol_n(B_{-k}(\overline{o},r))} \geq \frac{Vol_n(B_\Gamma(o,R))}{Vol_n(B_{-k}(\overline{o},R))} \qquad \forall R \geq r > 0 \tag{3.3.2}$$

$$\frac{Vol_n(B_\Gamma(o,r))}{Vol_n(B_\Gamma(o,R))} \geq e^{(n-1)b_0(k)}\left(\frac{r}{R}\right)^n \qquad \forall R \geq r > 0 \tag{3.3.3}$$

(3.3.4) $$Vol_n(B(o,r)) \leq Vol_n(B_{-k}(\overline{o},t)) \qquad \forall r \geq 0$$

Prova. A demonstração deste Teorema segue de perto a prova do Teorema de Comparação dos Volumes, de Bishop-Gromov (compare com [Gr1]). Mas, neste caso, ao invés de compararmos M^n com um espaço-forma, compararemos com o espaço $\mathbb{R}^n$, munido de métrica g_k do tipo produto torcido definida por

(3.3.5) $$g_k := dt^2 + (J_k(t))^2 d\Theta^2$$

onde, como no capítulo 2, $d\Theta^2$ é a métrica canônica da esfera unitária S^{n-1}, e $J_k(t)$ é a solução da equação

(3.3.6) $$J_k''(t) - k(t)J_k(t) = 0\ , \qquad \text{com} \qquad J_k(0) = 0\ , \quad J_k'(0) = 1$$

Dividiremos a prova de (b) em duas etapas: na (1^a etapa) provaremos que para cada $v \in \Gamma$, a função

(3.3.7) $$t \mapsto f_v(t) := \frac{\det\left((d\exp_o)_{tv}\right)}{\det\left((d\exp_{\overline{o}})_{t\tilde{v}}\right)}$$

é decrescente em t, e na (2^a etapa) provaremos a desigualdade de Bishop-Gromov

(3.3.8) $$\frac{Vol_n(B_\Gamma(o,r))}{Vol_n^{g_K}(B(\overline{o},r))} \geq \frac{Vol_n(B_\Gamma(o,R))}{Vol_n^{g_K}(B(\overline{o},R))} \qquad \forall R \geq r > 0$$

(1^a etapa) Se $\mathcal{C}_o$ = cut locus de o, denotemos por $U_o \underset{\text{ab.}}{\subset} T_oM$ o domínio estrelado tal que $\exp\big|_{U_o}$ é um difeomorfismo sobre $M \setminus \mathcal{C}_o$.

Dado $v \in \Gamma$, seja $\sigma_v : [0,l] \to M^n$ uma geodésica unitária sem pontos conjugados ($l\sigma_v'(0) = lv \in U_o$) e

(3.3.9) $$i : T_oM^n \to T_{\overline{o}}M^n_{-k}$$

uma isometria. Temos que a geodésica definida por

(3.3.10) $$\tilde{\sigma}(t) := \exp_0(t.i(v))\ , \qquad t \in [0,l]$$

também não tem pontos conjugados. Recordemos que os campos de Jacobi, J, de M^n_{-k}, ao longo de $\tilde{\sigma}$ satisfazendo $J(0) = 0$ e $\nabla_{\tilde{\sigma}'(0)}J = w \in T_{\overline{o}}M^n_{-k}$ são dados por

(3.3.11) $$J(t) = P_{\tilde{\sigma}(t)}(J_k(t)w)$$

onde $P_{\tilde{\sigma}(t)}$ é o transporte paralelo ao longo de $\tilde{\sigma}$ de $\overline{o}$ a $\tilde{\sigma}(t)$.

Fixemos $r \in [0,l]$ e tomemos uma base $\{v_1,\ldots,v_{n-1}\}$ de $v^\perp$ tal que os campos de Jacobi $Y_1,\ldots,Y_{n-1}$ ao longo de σ_v satisfazem

(3.3.12) $$Y_i(0) = 0 \qquad \nabla_v Y_i = v_i \qquad i = 1,\ldots,n-1$$

e a família $\{Y_1(r),\ldots,Y_{n-1}(r)\}$ forma uma base ortonormal de $\{\sigma_v'(r)\}^\perp$.

Se $\tilde{v}_j = i(v_j)$, para $j = 1,\ldots,n-1$ e $\tilde{\sigma}$ é como em (3.3.10), vemos que $\{\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_{n-1}\}$ gera $\{\tilde{\sigma}'(0)\}^\perp$ e determinam uma família de campos de Jacobi $\tilde{Y}_j(t)$, $j = 1,\ldots,n-1$ ao longo de $\tilde{\sigma}$ dada por

(3.3.13) $$\tilde{Y}_j(t) = P_{\tilde{\sigma}(t)}\left(\frac{J_k(t)}{J_k(r)}\tilde{v}_j\right)$$

Assim, como σ_v não tem pontos conjugados, temos

$$f_v(t) = \frac{|Y_1(t)\dots Y_{n-1}(t)\sigma_v'(t)|}{|\tilde{Y}_1(t)\dots\tilde{Y}_{n-1}(t)\tilde{\sigma}'(t)|} = \frac{|Y_1(t)\dots Y_{n-1}(t)|}{|\tilde{Y}_1(t)\dots\tilde{Y}_{n-1}(t)|} \tag{3.3.14}$$

A definição de determinante e ortonormalidade de $\{Y_i(r)\}_{i=1,\dots,n-1}$ nos mostram que

$$|Y_1\dots Y_{n-1}|'(r) = \sum_{i=1}^{n-1}\langle Y_i, Y_i'\rangle(r) = \sum_{i=1}^{n-1} I(Y_i, Y_i) \tag{3.3.15}$$

onde I é a forma do índice em $\sigma : [0,r] \to M^n$.

Seja agora $\{e_i(t)\}_{i=1,\dots,n-1}$ um sistema de campos paralelos ao longo de σ_v, com $e_i(r) = Y_i(r)$ para $i = 1,\dots,n-1$ e defina campos X_i, ao longo de σ_v, por

$$X_i(t) := \frac{J_k(t)}{J_k(r)} e_i(t)\ , \qquad i = 1,\dots,n-1 \tag{3.3.16}$$

é claro que $X_i(0) = 0$ e $X_i(r) = e_i(r) = Y_i(r)$. Segue então, pelo Lema do Índice, da definição de J_k e do fato de M^n ser variedade CRANN, que

(3.3.17)

$$\begin{aligned}|Y_1\dots Y_{n-1}|'(r) \le& \sum_{i=1}^{n-1} I(X_i, X_i) = \sum_{i=1}^{n-1}\int_0^r \left(\frac{J_k'(t)}{J_k(r)}\right)^2 - \langle R(\frac{J_k(t)}{J_k(r)}e_i(t), \sigma_v'(t))\sigma_v'(t), \frac{J_k(t)}{J_k(r)}e_i(t)\rangle\ dt\\ \le& \frac{n-1}{J_k(r)^2}\int_0^r (J_k'(t))^2 + k(t)J_k(t)^2\ dt = \frac{n-1}{J_k(r)^2}\int_0^r (J_k(t)J_k'(t))'\ dt = (n-1)\frac{J_k'(r)}{J_k(r)}\\ =& |\tilde{Y}_1\dots\tilde{Y}_{n-1}|'(r)\end{aligned}$$

Por outro lado

$$|Y_1\dots Y_{n-1}|(r) = |\tilde{Y}_1\dots\tilde{Y}_{n-1}|(r) = 1 \tag{3.3.18}$$

Consequentemente

$$f_v'(r) = \frac{|Y_1\dots Y_{n-1}|'(r)|\tilde{Y}_1\dots\tilde{Y}_{n-1}|(r) - |Y_1\dots Y_{n-1}|(r)|\tilde{Y}_1\dots\tilde{Y}_{n-1}|'(r)}{|\tilde{Y}_1\dots\tilde{Y}_{n-1}|(r)^2} \le 0 \tag{3.3.19}$$

portanto, para cada $v \in \Gamma$, a função f_v é não crescente em r.

(2^a etapa) Seja ds_r a forma de volume da esfera $S_r^{n-1}(0)$. Então, definindo

$$h(r) = \int_{S_\Gamma(r)\cap U_o} \det((d\exp_o)_{rv})\ ds_r \qquad \text{e} \qquad h_k(r) = \int_{i(S_\Gamma(r)\cap U_o)} \det((d\exp_{\overline{o}})_{r\tilde{v}})\ ds_r \tag{3.3.20}$$

segue, da 1^a etapa, que a função dada por

$$r \mapsto \tilde{h}(r) := \frac{h(r)}{h_k(r)} \tag{3.3.21}$$

é não crescente em r. Vale também afirmar que a função

$$r \mapsto := \frac{\int_0^r h(t)\ dt}{\int_0^r h_k(t)\ dt} \tag{3.3.22}$$

é não crescente em r. De fato (a prova que segue foi extraída de [Z1]), seja $r \geq t > 0$. Pela condição (3.3.22)

$$\frac{h(t)}{h_k(t)} \geq \frac{h(r)}{h_k(r)} \tag{3.3.23}$$

logo, por (3.3.23)

$$\int_0^r h(t)\ dt = \int_0^r \frac{h(t)}{h_k(t)} h_k(t)\ dt \geq \frac{h(r)}{h_k(r)} \int_0^r h_k(t)\ dt \tag{3.3.24}$$

ou seja

$$\frac{\int_0^r h(t)\ dt}{\int_0^r h_k(t)\ dt} \geq \frac{h(r)}{h_k(r)} \tag{3.3.25}$$

e por conseguinte

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\int_0^r h_k(t)\ dt}{\int_0^r h(t)\ dt}\right) = \frac{h_k(r)\int_0^r h_k(t)\ dt}{(\int_0^r h(t)\ dt)^2}\left(\frac{\int_0^r h(t)\ dt}{\int_0^r h_k(t)\ dt} - \frac{h(r)}{h_k(r)}\right) \geq 0 \tag{3.3.26}$$

de onde concluímos por (3.3.26)

$$\frac{\int_0^R h_k(t)\ dt}{\int_0^R h(t)\ dt} \geq \frac{\int_0^r h_k(t)\ dt}{\int_0^r h(t)\ dt} \tag{3.3.27}$$

ou ainda

$$\frac{\int_0^R h(t)\ dt}{\int_0^R h_k(t)\ dt} \leq \frac{\int_0^r h(t)\ dt}{\int_0^r h_k(t)\ dt} \tag{3.3.28}$$

o que demonstra (3.3.21).

como $Vol_n(B_\Gamma(o,r)) = \int_0^r h$ e $Vol_n(B_\Gamma^{-k}(\overline{o},r)) = \int_0^r h_k$, segue a validade de (3.3.1)

Para provar (3.3.2), basta observar que

$$Vol_n(B_\Gamma^{-k}(\overline{o},r)) = \int_\Gamma d\Theta \int_0^r (J_k(t))^{n-1} dt = \mu(\Gamma)\int_0^r (J_k(t))^{n-1} dt \tag{3.3.29}$$

Daí, pela monotonicidade em (3.3.1) (ou (3.3.28)) e substituindo (3.3.29):

$$\frac{Vol_n(B_\Gamma(o,r))}{\mu(\Gamma)\int_0^r (J_k(t))^{n-1} dt} \geq \frac{Vol_n(B_\Gamma(o,R))}{\mu(\Gamma)\int_0^R (J_k(t))^{n-1} dt} \tag{3.3.30}$$

quaisquer que sejam $0 < r \leq R$ o que mostra (3.3.2)

Levando em conta que $t \leq J_k(t) \leq e^{b_0(k)}t$ e que $Vol_n(B_{-k}(\overline{o},r)) = nw_n \int_0^r (J_k(s))^{n-1}\, ds$, observamos que

$$w_n r^n \leq Vol_n(B_{-k}(\overline{o},r)) \leq w_n e^{(n-1)b_0(k)} r^n \tag{3.3.31}$$

A desiqualdade (3.3.31), substituída na desigualdade (3.3.1) fornece-nos a estimativa (3.3.3) para a comparação dos volumes:

$$\frac{Vol_n(B_\Gamma(o,r))}{Vol_n(B_\Gamma(o,R))} \geq e^{(n-1)b_0(k)} \left(\frac{r}{R}\right)^n \tag{3.3.32}$$

quaisquer que sejam $0 < r \leq R$.

Finalmente, a desigualdade (3.3.4) decorre imediatamente de um argumento de limite:

$$\frac{Vol_n(B(o,R))}{Vol_n(B_{-k}(\overline{o},R))} \leq \lim_{r\to 0} \frac{Vol_n(B(o,r))}{Vol_n(B_{-k}(\overline{o},r))} = 1 \tag{3.3.33}$$

Fica assim demonstrado o Teorema de Comparação de Volumes. □

Particularmente, no caso em que temos uma variedade (M^n, o) com curvatura minimal radial não negativa, i.e. $k(t) \equiv 0$, o Teorema acima toma a seguinte forma

3.C.2. Corolário. *Seja (M^n, o) uma variedade com $K_o^{min} \geq 0$, então a função*

$$t \mapsto \frac{Vol_n(B(o,t))}{w_n t^n} \tag{3.3.34}$$

é monótona não crescente.

Conforme comentamos no Capítulo 2, Machigashira e Shiohama (do Carmo e Xia) demonstraram em [MS] ([dCX]) que, se (M^n, o) é uma variedade aberta com curvatura minimal radial não negativa e com crescimento Euclidiano de volume $\alpha_M = \lim_{r\to\infty} Vol(B(o,r))/w_n r^n > 1/2$ $(\alpha_M \geq 1/2)$ então M^n é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$. A pergunta que surge é se este fenômeno depende, de alguma forma, continuamente em relação ao limitante inferior da curvatura. Nosso próximo resultado (de rigidez) vem dar uma resposta afirmativa a esta pergunta, para a classe das variedades CRANN.

3.C.3. Teorema (cf. [Z1]). *Dado $\delta > 0$, existe uma constante $\varepsilon = \varepsilon(n,\delta)$ tal que se uma variedade (M^n, g) satisfaz, para algum $o \in M^n$:*

$$K_o^{min}(p) \geq -k(d_M(o,p)), \qquad \int_0^\infty sk(s)\, ds \leq \varepsilon \quad e \quad Vol(B(o,r)) \geq \left(\frac{1}{2} + \delta\right) w_n r^n \tag{3.3.35}$$

para alguma função monótona não negativa, $k : [0,\infty) \to [0,\infty)$. Então $r_o = d_M(o,.)$ não possui pontos críticos. Em particular M^n é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

A demonstração deste Teorema é baseada na Teoria dos Pontos Críticos para a Função Distância, que discutimos na Introdução desta Tese, também faremos uso do Teorema de Comparação de Toponogov Generalizado e do Teorema de Comparação de Bishop-Gromov, que acabamos de demonstrar, mas antes, precisamos de alguns lemas preliminares.

Vamos denotar por T_o, ao conjunto

$$T_o := \{v \in S_oM \,\big|\, \text{a geodésica } \gamma_v \text{ partindo de } o, \text{ na direção } v \text{ é um raio } \} \tag{3.3.36}$$

seja μ a medida (Riemanniana) canônica de S^{n-1}

3.C.4. Lema (cf. [Z1]). *Seja (M^n, o, g, k) uma variedade CRANN tal que para algum $\delta > 0$, temos*

$$Vol(B(o,r)) \geq \left(\frac{1}{2} + \delta\right) w_n r^n \tag{3.3.37}$$

então

$$\mu(T_o) \geq \frac{\frac{1}{2} + \delta}{e^{(n-1)b_0(k)}} Vol(S^{n-1}) \tag{3.3.38}$$

Prova. Para cada $t > 0$ seja A_t o conjunto das direções em T_oM tais que as geodésicas γ_v partindo de o com velocidade inicial $v \in A_t$ minimizam, no máximo, até t, i.e

$$A_t := \{v \in S_oM \big| \text{ a geodésica } \gamma_v \text{ não é minimizante em } [0, t+a] \text{ qualquer que seja } a > 0 \ \} \tag{3.3.39}$$

Usando o Teorema de Comparação dos Volumes e observando que $Vol(S^{n-1}) = nw_n$ (ponhamos ds_1 = forma de volume da esfera unitaria $S_1^{n-1}(0)$) vemos que para qualquer $m > 1$,

$$\begin{aligned} Vol(B(o,mt)) &\leq \int_{A_t} ds_1 \int_0^t e^{(n-1)b_0(k)} r^{n-1}\, dr + \int_{S^{n-1}\setminus A_t} ds_1 \int_0^{mt} e^{(n-1)b_0(k)} r^{n-1}\, dr \\ &= \frac{e^{(n-1)b_0(k)}}{n} \mu(A_t) t^n + \frac{e^{(n-1)b_0(k)}}{n} (nw_n - \mu(A_t))(mt)^n \end{aligned} \tag{3.3.40}$$

Dividindo a expressão acima por $(mt)^n$ e levando em conta a condição sobre o volume obtemos:

$$\left(\frac{1}{2} + \delta\right) w_n \leq \frac{e^{(n-1)b_0(k)}}{nm^n} \mu(A_t) + \frac{e^{(n-1)b_0(k)}}{n} (nw_n - \mu(A_t)) \tag{3.3.41}$$

fazendo $m \to \infty$ em ambos os membros da desigualdade acima:

$$\left(\frac{1}{2} + \delta\right) w_n \leq \frac{e^{(n-1)b_0(k)}}{n} (nw_n - \mu(A_t)) \tag{3.3.42}$$

consequentemente, podemos estimar $\mu(A_t)$:

$$\mu(A_t) \leq \frac{e^{(n-1)b_0(k)} - \delta - \frac{1}{2}}{e^{(n-1)b_0(k)}} nw_n \qquad \text{qualquer que seja } t > 0 \tag{3.3.43}$$

Por definição $T_o = \lim_{t\to\infty}(S^{n-1} \setminus A_t)$. Portanto

$$\mu(T_o) \geq nw_n - \frac{e^{(n-1)b_0(k)} - \delta - \frac{1}{2}}{e^{(n-1)b_0(k)}} nw_n = \frac{\frac{1}{2} + \delta}{e^{(n-1)b_0(k)}} Vol(S^{n-1}) \tag{3.3.44}$$

e a demonstração está completa. □

3.C.5. Lema (cf. [Z1]). *Seja, como no TCTG, um triângulo $\triangle(o,p_1,p_2)$ com vértices o, p_1 e p_2, lados correspondentes γ_0, γ_1 e γ_2, e ângulos $\alpha_0 := \angle o$, $\alpha_1 := \angle p_1$ e $\alpha_2 := \angle p_2$ em (M^n,o,g,k), variedade CRANN. Seja $\overline{\triangle}(\overline{o},\overline{p}_1,\overline{p}_2)$ um triângulo de comparação correspondente em M^2_{-k}. Se os lados $L(\overline{\gamma}_i) = L(\gamma_i) =: l_i$, para $i = 1,2$ e $L(\overline{\gamma}_0) > L(\gamma_0)$ e o ângulo $\angle\overline{p}_1 := \overline{\alpha}_1 > \frac{\pi}{2}$, então*

$$\overline{\alpha}_1 < \alpha_1 \tag{3.3.45}$$

Prova. A demonstração deste Lema é uma aplicação do TCTG. Deformamos o triângulo $\overline{\triangle}(\overline{o},\overline{p}_1,\overline{p}_2) \subset M^2_{-k}$ da seguinte maneira: mantendo fixo o lado $\overline{\gamma}_2$ (o qual conecta os pontos $\overline{o}$ e $\overline{p}_1$), movemos o ponto $\overline{p}_2$ ao longo da circunferência $S(\overline{o},l_1)$ até obtermos um ponto $\tilde{p}_2$ tal que a distância $d_{-k}(\overline{p}_1,\tilde{p}_2) = d_M(p_1,p_2)$. O novo triângulo $\tilde{\triangle}(\overline{o},\overline{p}_1,\tilde{p}_2)$ satisfaz:

$$L(\gamma_2) = L(\overline{\gamma}_2)\ , \quad L(\gamma_1) = L(\tilde{\gamma}_1) = L(\overline{\gamma}_1)\ , \quad L(\gamma_0) = L(\tilde{\gamma}_0) < L(\overline{\gamma}_0) \tag{3.3.46}$$

Notemos que conforme a distância $d_{-k}(\overline{p}_2,\overline{p}_1)$ decresce para $d_{-k}(\tilde{p}_2,\overline{p}_1)$, as funções ângulo $\overline{\alpha}_0$ e $\overline{\alpha}_2$ também decrescem monotonicamente para $\tilde{\alpha}_0$ e $\tilde{\alpha}_2$ (veja que $\overline{\alpha}_2$ decresce monotonicamente devido à fórmula da primeira variação do comprimento e ao fato de que $\overline{\alpha}_1 > \pi/2$). Aplicamos o Teorema de Gauss-Bonnet aos triângulos $\overline{\triangle}$ e $\tilde{\triangle}$, obtendo:

$$\iint_{\overline{\triangle}} -k(d_{-k}(\overline{o},x))d\sigma(x) = \overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 - \pi \quad \text{e} \quad \iint_{\tilde{\triangle}} -k(d_{-k}(\overline{o},x))d\sigma(x) = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 - \pi \tag{3.3.47}$$

E como a área delimitada pelo triângulo $\overline{\triangle}$ é maior que a área delimitada pelo triângulo $\tilde{\triangle}$ ($\overline{\alpha}_1 > \pi/2$), vem que

$$\iint_{\overline{\triangle}} -k(d_{-k}(\overline{o},x))d\sigma(x) \leq \iint_{\tilde{\triangle}} -k(d_{-k}(\overline{o},x))d\sigma(x) \tag{3.3.48}$$

ou seja

$$\overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 - \pi \leq \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 - \pi \tag{3.3.49}$$

Usando que $\overline{\alpha}_0 > \tilde{\alpha}_0$ e $\overline{\alpha}_2 > \tilde{\alpha}_2$ na expressão (3.3.49) concluímos que

$$\overline{\alpha}_1 < \tilde{\alpha}_1 \tag{3.3.50}$$

Aplicamos, enfim, o Teorema de Toponogov Generalizado aos triângulos $\triangle$ e $\tilde{\triangle}$ para concluirmos que

$$\tilde{\alpha}_1 \leq \alpha_1 \tag{3.3.51}$$

implicando a afirmação do Lema

$$\overline{\alpha}_1 < \alpha_1 \tag{3.3.52}$$

□

O próximo Lema fornece uma estimativa para o excesso de triângulos $\overline{\triangle}(\overline{o},\overline{p}_1,\overline{p}_2) \subset M^2_{-k}$, baseados em $\overline{o}$.

3.C.6. Lema (cf. [Z1]). *Dado um triângulo $\overline{\triangle}(\overline{o},\overline{p}_1,\overline{p}_2) \subset M^2_{-k}$. Então:*

$$\overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 - \pi \geq -\overline{\alpha}_0 b_0(k) e^{b_0(k)} \tag{3.3.53}$$

Prova. Pelo Teorema de Gauss-Bonnet temos que

$$\overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 - \pi = \iint\limits_{\overline{\triangle}} -k(d_{-k}(\overline{o},x))d\sigma(x) \tag{3.3.54}$$

Veja que, se $d := \max\{d_{-k}(\overline{o},x) \mid x \in \overline{\triangle}\}$, então a integral (3.3.54) pode ser estimada por

$$\iint\limits_{\overline{\triangle}} -k(d_{-k}(\overline{o},x))d\sigma(x) \geq \int_0^{\overline{\alpha}_0} d\theta \int_0^d -k(t)J_k(t)\,dt \tag{3.3.55}$$

fazendo $d \to \infty$ em (3.3.55) e recordando que $J_k(t) \leq e^{b_0(k)}t$, obtemos:

$$\iint\limits_{\overline{\triangle}} -k(d_{-k}(o,x))d\sigma(x) \geq \overline{\alpha}_0 \int_0^{\infty} -e^{b_0(k)}tk(t)\,dt \geq -\overline{\alpha}_0 b_0(k) e^{b_0(k)} \tag{3.3.56}$$

que é o resultado que queríamos demonstrar. □

Temos agora resultados suficientes para demonstrar o Teorema 3.C.3.

Prova do Teorema 3.C.3.

Vamos provar que para qualquer ponto $p_1 \in M^n$, $p_1 \neq o$, existe uma direção $v_{p_1} \in T_{p_1}M$ tal que qualquer geodésica minimizante conectando o a p_1 faz um ângulo obtuso com p_1. Por definição, de ponto crítico para a função distância, isto quer dizer que p_1 não é ponto crítico de $r_o = d_M(o,.)$.

Pelo Lema 3.C.4,

$$\mu(T_o) \geq \frac{\frac{1}{2}+\delta}{e^{(n-1)b_0(k)}} Vol(S^{n-1}) \tag{3.3.57}$$

Assim, se escolhemos $\varepsilon = \varepsilon(n,\delta)$ suficientemente pequeno, então $b_0(k) < \varepsilon$ implica que

$$\mu(T_o) \geq \left(\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}\right) Vol(S^{n-1}) \tag{3.3.58}$$

Desta forma, fixada uma geodésica minimizante $\gamma_2 : [0,l] \to M^n$ conectando o a p_1 ($l := d_M(o,p_1) = L(\gamma_2)$), existe um raio $\gamma_1 : [0,\infty) \to M^n$ partindo de o e um número positivo δ_n (dependendo de δ e n) tais que

$$\alpha_0 := \angle(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)) < \frac{\pi}{2} - \delta_n \tag{3.3.59}$$

(isto, devido a (3.3.58)). Ponhamos $\overline{\alpha}_0 := \pi/2 - \delta_n$.

Construiremos agora o ângulo de comparação em M^2_{-k}. Para isto, consideremos dois raios $\overline{\gamma}_1$, $\overline{\gamma}_2 : [0,\infty) \to M^2_{-k}$ partindo de $\overline{o}$, formando um ângulo entre si igual a

$$\overline{\alpha}_0 := \pi/2 - \delta_n \tag{3.3.60}$$

Denotemos por $\overline{p}_1 := \overline{\gamma}_2(l)$. Seja $\overline{\gamma}_0 : [0,a] \to M^2_{-k}$ uma geodésica minimizante, conectando $\overline{p}_2 := \overline{\gamma}_1(T)$ a $\overline{p}_1$, onde o número T é escolhido grande o suficiente de modo que o ângulo

$$\overline{\alpha}_2 := \angle(-\overline{\gamma}_1'(T), \overline{\gamma}_0'(0)) \leq \frac{\delta_n}{2} \tag{3.3.61}$$

Seja $\overline{\alpha}_1$ o ângulo em $\overline{p}_1$. O Lema 3.C.6, juntamente com (3.3.60) e (3.3.61) implica

$$\overline{\alpha}_1 \geq \pi - \overline{\alpha}_2 - \overline{\alpha}_0(1 + b_0(k)e^{b_0(k)}) \geq \pi - \frac{\delta_n}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \delta_n\right)(1 + b_0(k)e^{b_0(k)}) \tag{3.3.62}$$

Logo, se $b_0(k)$ é suficientemente pequeno, temos

$$\overline{\alpha}_1 \geq \frac{\pi}{2} + \frac{\delta_n}{4} \tag{3.3.63}$$

Provaremos agora que $\alpha_1 \geq \overline{\alpha}_1$ (ainda não podemos utilizar o Teorema de Comparação TCTG posto que os triângulos ainda não são comparáveis):

Ponhamos $p_2 := \gamma_1(T)$. Para cada $t \in [0,l]$, consideremos a família a um parâmetro de geodésicas minimizantes em M^n, $\beta_t : [0, c_t] \to M^n$, conectando $p_2 = \beta_t(0)$ a $\gamma_2(t) = \beta_t(c_t)$ e escrevamos

$$\alpha_t := \angle(\gamma_2'(t), \beta_t'(c_t)) \tag{3.3.64}$$

Sejam $\overline{\beta}_t : [0, \overline{c}_t] \to M^2_{-k}$ e $\overline{\alpha}_t$, a geodésica e o ângulo correspondentes em M^2_{-k}. Definamos o número

$$R := \sup\{t \in [0,l] \big| L(\beta_t) < L(\overline{\beta}_t)\} \tag{3.3.65}$$

Vamos mostrar que $R \geq l$:

Por construção, $\alpha_0 < \overline{\alpha}_0$, consequentemente a fórmula da primeira variação do comprimento implica que $R > 0$ (com efeito, para $s > 0$ pequeno, $L(\beta_s) = L(\gamma_1) + s\cos(\pi - \alpha_0) + O(s^2)$ e $L(\overline{\beta}_s) = L(\overline{\gamma}_1) + s\cos(\pi - \overline{\alpha}_0) + O(s^2)$, de onde segue que $L(\beta_s) < L(\overline{\beta}_s) + y_0 s + O(s^2)$, para alguma constante $y_0 > 0$. Logo $L(\beta_s) < L(\overline{\beta}_s)$, se $s > 0$ for suficientemente pequeno). Se for $R < l$, então $L(\beta_R) = L(\overline{\beta}_R)$ e $L(\beta_t) < L(\overline{\beta}_t)$ para $t < R$. Lema 3.C.5 implica que $\alpha_t > \overline{\alpha}_t > \pi/2$. Fazendo uso, mais uma vez da fórmula da primeira variação do comprimento:

$$\frac{d}{dt}L(\beta_t) = \cos\alpha_t \tag{3.3.66}$$

e com isto

$$L(\beta_R) = L(\gamma_1) + \int_0^R \frac{d}{dt}L(\beta_t)\, dt = L(\gamma_1) + \int_0^R \cos\alpha_t\, dt < L(\overline{\gamma}_1) + \int_0^R \cos\overline{\alpha}_t\, dt = L(\overline{\beta}_R), \tag{3.3.67}$$

o que é uma contradição. Portanto $R \geq l$. Lema 3.C.5 implica que

$$\alpha_1 \geq \overline{\alpha}_1 \geq \frac{\pi}{2} + \frac{\delta_n}{4} \tag{3.3.68}$$

Para finalizar, dada uma geodésica minimizante arbitrária $\sigma : [0,l] \to M^n$, conectando o ponto o a p_1, consideramos o triângulo geodésico $\triangle(\sigma, \gamma_0, \gamma_2)$ e o comparamos com o mesmo triângulo $\triangle(\overline{\gamma}_0, \overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2) \subset M^2_{-k}$ já obtido. O Teorema de Comparação de Toponogov Generalizado implica que o ângulo em p_1 é maior que $\pi/2 + \delta_n/4$, mostrando que p_1 não é ponto ponto crítico de r_o. □

O próximo resultado -novo, para a classe de variedades com curvatura assintoticamente não negativa- nos mostra que existe uma continuidade do número de fins de uma variedade CRANN, com relação ao invariante $b_0(k)$.

3.C.7. Teorema. *Existe uma constante $\varepsilon > 0$ tal que se (M^n, o, g, k) é uma variedade CRANN com $b_0(k) < \varepsilon$ então M^n possui no máximo dois fins*

Prova. Suponhamos que M^n, nas condições do Teorema, possua três ou mais fins. Então existem três raios: γ_1, γ_2 e γ_3 partindo de o e indo para três diferentes fins. Para cada $t > 0$ fixo, seja σ_t uma geodésica minimizante conectando $\gamma_1(t)$ a $\gamma_2(t)$ e $\alpha = \angle(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$, o ângulo entre γ_1 e γ_2. Vamos considerar dois triângulos:

$$\Delta_1(\overline{o}, x_t, y_t) \subset M^2_{-k} \qquad \text{e} \qquad \Delta_2(\tilde{o}, u_t, v_t) \subset M^2_0 := (\mathbb{R}^2, \tilde{o} = 0, < .,. >) \tag{3.3.69}$$

onde $< .,. >$ é a métrica canônica de curvatura 0. Suponhamos que

$$t = d_{-k}(\overline{o}, x_t) = d_{-k}(\overline{o}, y_t) = d_0(\tilde{o}, u_t) = d_0(\tilde{o}, v_t) \quad \text{e} \quad d_t := d_M(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = d_{-k}(x_t, y_t) = d_0(u_t, v_t) \tag{3.3.70}$$

onde d_0 é a distância induzida de $< .,. >$. Denotemos por θ_t (resp. ϕ_t), o ângulo em $\overline{o}$ (resp. $\tilde{o}$), do triângulo Δ_1 (resp. Δ_2) e $\angle x_t$, $\angle y_t$ os ângulos em x_t e y_t respectivamente ($\angle u_t$, $\angle v_t$ os ângulos em u_t e v_t respectivamente).

Como a distância entre o e σ_t é limitada superiormente (pois γ_1, γ_2 vão para dois fins diferentes) por uma constante, A, independente de t, pelo Teorema 2.F.4, decorre que a distância entre $\overline{o}$ e o segmento conectando x_t a y_t também é limitada por A.

Notemos que o triângulo Δ_1 também é triângulo de comparação de Δ_2. Isto implica que $\angle x_t \leq \angle u_t$ e $\angle y_t \leq \angle v_t$ mas $\angle u_t$, $\angle v_t \to 0$ conforme $t \to \infty$, ou seja , para $\varepsilon_1 > 0$ dado pode-se encontrar $T > 0$ suficientemente grande tal que para todo $t > T$ tem-se $\angle x_t$, $\angle y_t < \varepsilon_1$. Por outro lado, do Teorema 3.C.6, temos que

$$\theta_t + \angle x_t + \angle y_t - \pi \geq -\theta_t b_0(k) e^{b_0(k)} \tag{3.3.71}$$

ou ainda, para $\varepsilon_2 > 0$ dado, escolhendo ε_1 e $b_0(k)$ suficientemente pequenos:

$$\theta_t \geq \pi - \varepsilon_2 \tag{3.3.72}$$

para todo $t > T$, com T suficientemente grande. Como $\alpha \geq \theta_t$ para todo $t > 0$ e θ_t é uma função não crescente em t segue que $\alpha \geq \pi - \varepsilon_2$.

Repetindo o mesmo raciocínio, concluímos que

$$\angle(\gamma_1'(0), \gamma_3'(0)) \geq \pi - \varepsilon_2 \qquad \text{e} \qquad \angle(\gamma_2'(0), \gamma_3'(0)) \geq \pi - \varepsilon_2 \tag{3.3.73}$$

Mas como M^n tem um número finito de fins (cf. argumento na prova do Teorema 3.B.3), escolhendo ε_2 suficientemente pequeno implica que, pelo menos, um par dos raios γ_i, $i = 1, 2, 3$ deve pertencer ao mesmo fim, o que é uma contradição à nossa hipótese original. □

Também podemos obter Teorema um de Pré compacidade para a classe de variedades CRANN, o que nos vai permitir falar sobre seus cones tangentes no infinito.

Dados $R > 0$, $\varepsilon > 0$, denotemos por $N(\varepsilon, R, X)$ o número máximo de bolas de raio ε disjuntas que se pode ter contidas em $B(x, R) \subset X$ (onde X é espaço métrico de comprimento). Então, em [GLP - Proposição 5.2] - temos o seguinte resultado:

3.C.8. Teorema. *Uma família (X_i, x_i) de espaços métricos de comprimento, pontuados, é pré-compacta se, e somente se, cada função $N(\varepsilon, R, .)$ é limitada sobre (X_i, x_i). A família é, desta maneira, relativamente compacta, no sentido que toda sequência de espaços em (X_i, x_i) admite uma subsequência convergente no sentido de Gromov-Hausdoff, a um espaço métrico de comprimento, pontuado.*

Assim, pelo Teorema 3.C.8, para obtermos nosso resultado de pré-compacidade precisamos obter uma tal função $N(\varepsilon, R, X)$. Para este fim, apresentamos o seguinte:

3.C.9. Lema de empacotamento. *Sejam dados r, $\varepsilon > 0$ e $k : [0,\infty) \to [0,\infty)$ uma função monótona não negativa fixada, tal que o número*

$$b_0(k) = \int_0^\infty sk(s)\, ds < \infty \tag{3.3.74}$$

Então dada uma variedade CRANN (M^n, o, g, k), a bola $B(o,r)$ admite uma cobertura por N bolas $B(p_i, \varepsilon)$ com $p_i \in B(o,r)$ e $N \leq C(n, b_0(k), r/\varepsilon)$.

Prova. Notemos, inicialmente que se $\{\overline{p}_i\}$ é uma ε-rede maximal sobre a bola $B_{-k}(\overline{o}, r) \subset M^n_{-k}$, i.e.

$$d_{-k}(\overline{p}_i, \overline{p}_j) > \frac{\varepsilon}{2} \text{ para } i \neq j, \text{ e } B_{-k}(\overline{o}, r) \subset \cup_i B_{-k}(\overline{p}_i, \varepsilon) \tag{3.3.75}$$

então, compacidade de $\overline{B_{-k}(\overline{o}, r)}$ implica que a família $\{\overline{p}_i\}$ é finita e, portanto, da forma $\{\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_N\}$. Observemos que $\{B(\overline{p}_i, \varepsilon/4)\}$ é uma família disjunta de bolas abertas e o número N pode ser estimado por

$$N \leq \frac{Vol(B_{-k}(\overline{o}, r)}{\min_{i=1,\ldots,N} Vol(B_{-k}(\overline{p}_i, \varepsilon/4))} \tag{3.3.76}$$

Como os campos de Jacobi de M^n_{-k}, $J(t)$, ao longo de uma geodésica radial $\sigma(t)$, e satisfazendo $J(0) = 0$, $J'(0) = w$ são da forma $J(t) = P_{\sigma(t)}(J_k(t)w)$ e como $t \leq J_k(t) \leq e^{b_0(k)}t$ vemos que para qualquer ponto $q \in M^n_{-k}$ temos

$$w_n t^n \leq Vol(B_{-k}(q,t)) \leq e^{b_0(k)(n-1)} w_n t^n \tag{3.3.77}$$

Assim, em particular, para cada $i = 1, \ldots, N$ temos que

$$Vol(B_{-k}(\overline{p}_i, \varepsilon/4)) \geq w_n \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^n \tag{3.3.78}$$

E, por conseguinte

$$N \leq \frac{Vol(B_{-k}(\overline{o}, r))}{\min_{i=1,\ldots,N} Vol(B_{-k}(\overline{p}_i, \varepsilon/4))} \leq \frac{e^{b_0(k)(n-1)} w_n r^n}{w_n(\varepsilon/4)^n} = e^{b_0(k)(n-1)} \left(\frac{4r}{\varepsilon}\right)^n =: C(n, b_0(k), r/\varepsilon) \tag{3.3.79}$$

Seja agora, (M^n, o, g, k) uma variedade CRANN. Recordemos que, pelo Teorema 2.D.3, fixada uma isometria $i : T_{\overline{o}} M^n_{-k} \to T_o M^n$, a aplicação

$$\Phi := \exp_o \circ i \circ (\exp_{\overline{o}}^{-1} \big|_{U_{\overline{o}}}) : U_{\overline{o}} \to M^n \tag{3.3.80}$$

é uma contração (onde $U_o := M^n \setminus \mathcal{C}_o$ e $U_{\overline{o}} := \exp_{\overline{o}} \circ i^{-1} \circ \exp_o^{-1}(U_o)$). Assim, como Φ não aumenta distâncias vem que o conjunto $\{\Phi(\overline{p}_i)\}$ é uma ε-rede sobre a bola $\Phi(B_{-k}(\overline{o}, r)) = B(o,r)$. Logo, se temos uma ε-rede maximal sobre a bola $B(o,r)$ então o número de elementos desta ε-rede não excede $C(b_0(k), n, r/\varepsilon)$, o que demonstra este Lema. □

O Lema 3.C.9 e o Teorema 3.C.8 nos dão como corolário o seguinte

3.C.9. Teorema de Pŕe-Compacidade I, para variedades CRANN. *A classe das n-variedades Riemannianas abertas, pontuadas $\mathcal{M}_{-k,n} := \{(M^n, o, g, k)\}$ forma um conjunto pré-compacto na distância de Gromov-Hausdorff.*

Ou seja, o Teorema 3.C.9 nos permite indagar que tipos de fenômenos podem ocorrer com os possíveis espaços métricos limite de sequências de variedades CRANN.

CAPÍTULO 4

4.A. Principal Resultado deste Capítulo

Seja (M^n, o, g, k) uma variedade CRANN (veja Capítulos 2 e 3, para definição e principais propriedades). Neste Capítulo, estaremos interessados em estudar o comportamento no infinito destas variedades . O nosso principal resultado mostra que, diferentemente das variedades onde se impõe apenas curvatura Ricci não negativa (o que garante existência, mas não unicidade), neste caso podemos mostrar a existência e unicidade dos cones assintóticos.

4.A.1. Teorema. *Para cada variedade CRANN, (M^n, o, g, k), existe um único cone tangente no infinito.*

4.B. Existência e Unicidade dos Cones Assintóticos para variedades CRANN

Começamos esta seção recordando alguns resultados já estudados nos Capítulos anteriores:

4.B.1. Teorema de Pré-Compacidade para variedades CRANN (Teorema 3.C.9). *Fixados um inteiro positivo n, e uma função $k : [0, \infty) \to [0, \infty)$, não negativa, monótona e com integral $b_0(k) := \int_0^\infty \rho k(\rho) d\rho < \infty$. A classe das n-variedades Riemannianas abertas, pontuadas $\mathcal{M}_{-k,n} := \{(M^n, o, g, k)\}$ forma um conjunto pré-compacto na distância de Gromov-Hausdorff.*

4.B.2. Observação (observação 2.G.2-(ii)). *Se $k : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é uma função como no Teorema 4.B.1, e k_1, k_2 são as funções definidas no começo da seção 2.G, por*

$$k_1(r) := \int_r^\infty k(\rho) d\rho \qquad k_2(r) := \int_r^\infty k_1(\rho) d\rho \tag{4.3}$$

Fixado $c > 0$ e definindo $k_c(r) := c^2 k(cr)$, para $r \geq 0$, obtemos que

$$k_{1,c}(r) := \int_r^\infty k_c(\rho) d\rho = c k_1(cr) \tag{4.4}$$

e

$$k_{2,c}(r) := \int_r^\infty k_{1,c}(\rho) d\rho = k_2(cr) \tag{4.5}$$

esta última igualdade, implicando que $k_{2,c}(0) = k_2(0) = b_0(k) = b_0(k_r)$

Recordemos, finalmente, a definição de cone tangente no infinito de uma variedade (cf. Definição 1.A.2)

4.B.3. Definição. *Seja (M^n, o, g) uma n-variedade Riemanniana pontuada e aberta. O Cone Tangente no Infinito de M^n, $T_\infty(M^n,\ g)\{r_i\}$, sob uma sequência divergente de números reais, $r_i \to \infty$, é o limite, no sentido de Gromov-Hausdorff, da sequência de bolas fechadas unitárias, $\{\overline{(B(o,1)}, r_i^{-2} g)\}_{i \in \mathbb{N}}$, munidas do tensor métrico $r_i^{-2} g$, ou seja*

$$T_\infty(M^n, g)\{r_i\} := \lim_{GH} (\overline{B(x_0, 1)}, r_i^{-2} g) \tag{4.6}$$

se tal limite existe. À fronteira de $T_\infty(M^n,\ g)$ denominamos Fronteira Ideal de M^n, e a denotamos por $M^n(\infty)$.

4.B.4. Existência de cones tangentes no infinito.

Dados um número real $r > 0$ fixo, e uma variedade Riemanniana, (M^n, o, g), ponhamos $M_r := (M^n, o, g_r)$, onde $g_r := r^{-2}g$, é a deformação conforme da métrica de M^n, que nos interessa, para o estudo dos cones assintóticos.

Façamos primeiramente, algumas observações elementares acerca de M_r:

Dados dois pontos quaisquer p, $q \in M^n$, se $\gamma : [0, a] \to M^n$ é uma geodésica minimizante, conectando p a q, então a distância entre estes pontos é dada por

$$d_M(p,q) = \int_0^a g(\gamma'(t), \gamma'(t))^{1/2} dt \tag{4.7}$$

Como nossa deformação da métrica é por um fator de conformalidade global (constante), segue que as curvas geodésicas (minimizantes) em M^n também o são em M_r, e reciprocamente. Desta forma, a distância entre p e q, em M_r é dada por

$$d_{M_r}(p,q) = \int_0^a g_r(\gamma'(t), \gamma'(t))^{1/2} dt = \frac{1}{r} \int_0^a g(\gamma'(t), \gamma'(t))^{1/2} dt = \frac{1}{r} d_M(p,q) \tag{4.8}$$

É um cálculo imediato verificar que as curvaturas seccionais, K_{M_r} de M_r, em termos das curvaturas seccionais em M^n são dadas por

$$K_{M_r} = r^2 K_M \tag{4.9}$$

de modo que, se (M^n, o, g, k) é uma variedade CRANN, denotando por $K_{o,r}^{min}$ as curvaturas minimais radiais de M_r, implica que

$$K_{o,r}^{min} = r^2 K_o^{min} \geq -r^2 k(d_M(o,.)) = -r^2 k(r d_{M_r}(o,.)) \tag{4.10}$$

Quer dizer, M_r também tem estrutura de variedade CRANN, mas para uma outra função de comparação de curvatura: (M^n, o, g_r, k_r), onde $k_r(t) := r^2 k(rt)$.

Seguindo passo a passo nossos estudos do Capítulo 2, consideramos, para cada $r > 0$ o espaço de comparação

$$M^n_{-k_r} := (\mathbb{R}^n, \overline{o} = 0, ds_r^2 := dt^2 + J_{k,r}(t)^2 d\Theta^2) \tag{4.11}$$

onde $J_{k,r}$ é solução da equação:

$$J_{k,r}{}''(t) = k_r(t) J_{k,r}(t), \quad \text{sujeita às condições} \quad J_{k,r}(0) = 0, J'_{k,r}(0) = 1 \tag{4.12}$$

Pela observação 4.B.2, temos que o invariante $b_0(k_r) = b_0(k)$. Além disso, continua valendo que a aplicação

$$\Phi : U_{\overline{o}} \to M_r \tag{4.13}$$

definida no Teorema 2.D.3 por $\Phi(\overline{p}) := \exp_o(i(\exp_{\overline{o}}^{-1}(\overline{p})))$, é uma contração. Também podemos estimar o número $N(\varepsilon, t, M_r)$ de elementos de uma ε-rede maximal na bola $B(o, t; g_r) \subset M_r$, ($B(o, t; g_r)$ é a bola de centro o e raio t na variedade M_r) por

$$N(\varepsilon, t, M_r) \leq e^{(n-1)b_0(k_r)} \left(\frac{4t}{\varepsilon}\right)^n = e^{(n-1)b_0(k)} \left(\frac{4t}{\varepsilon}\right)^n =: C(n, b_0(k), t/\varepsilon) \tag{4.14}$$

ou seja, $N(\varepsilon, t, M_r)$ pode ser estimado independentemente de r, o que nos leva, pelo Teorema 3.C.8, ao seguinte resultado chave:

4.B.5. Teorema de Pré-Compacidade II, para variedades CRANN. *Para cada variedade CRANN (M^n, o, g, k), a classe das n-variedades Riemannianas abertas, pontuadas*

$$\mathcal{M}^n(o,g,k) := \{(M^n, o, g_r, k_r) | r > 0\} \tag{4.15}$$

forma um conjunto pré-compacto na distância de Gromov-Hausdorff.

Assim, dada uma sequência divergente de números reais $r_i \to \infty$, a sequência de bolas $\{\overline{B(o,1;g_{r_i})}\}_{i\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente. Isto prova a existência de cones tangentes no infinito para as variedades CRANN. □

4.B.6. Unicidade dos cones tangentes no infinito.

Seja (M^n, o, g, k) uma variedade CRANN. Vamos denotar por $\mathcal{R}_o$ ao conjunto dos raio de M^n, partindo de o, quer dizer:

$$\mathcal{R}_o := \{\gamma : [0,\infty) \to M^n : \gamma(0) = o, \|\gamma'\| = 1, \nabla_{\gamma'}\gamma' = 0 \text{ e } d_M(\gamma(t),\gamma(T)) = |T-t|, \forall t, T \in [0,\infty)\} \tag{4.16}$$

Faremos agora algumas observações que nos ajudarão a melhor compreender a estrutura dos cones tangentes no infinito.

(i) Dados dois raios γ_1, $\gamma_2 \in \mathcal{R}_o$, então para cada $t \in [0,\infty)$ fixado, vale

$$d_{M_r}(\gamma_1(t),\gamma_2(t)) = \frac{1}{r} d_M(\gamma_1(t),\gamma_2(t)) \tag{4.17}$$

Em particular, se $\gamma_1(r)$, $\gamma_2(r)$ pertencem à esfera centrada em o, de raio r, $S(o,r;g) = \partial B(o,r;g)$ em (M^n, o, g) e $\gamma_{1,r}$, $\gamma_{2,r}$ são reparametrizações de γ_1 e γ_2 pelo comprimento de arco em M_r, então $\gamma_{1,r}(1)$, $\gamma_{2,r}(1) \in S(o,1;g_r) = \partial B(o,1;g_r)$ e

$$d_{M_r}(\gamma_{1,r}(1),\gamma_{2,r}(1)) = \frac{1}{r} d_M(\gamma_1(r),\gamma_2(r)) \tag{4.18}$$

(ii) Para qualquer subconjunto compacto $C \subset M^n$, como o diâmetro $diam_M(C) < \infty$, temos

$$\lim_{r\to\infty} diam_{M_r}(C) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r}(\sup_{p,q\in C} d_M(p,q)) = 0 \tag{4.19}$$

Isto quer dizer que todo subconjunto compacto de M^n, em $T_\infty M$, colapsa-se em um único ponto (vértice do cone tangente).

Por outro lado, para cada $p_r \in S(o,r;g)$ (ou $S(o,1;g_r)$), existe uma geodésica minimizante γ_{p_r}, conectando o a p_r. Assim, para cada sequência convergente

$$\overline{B(o,1;g_{r_i})} \to T_\infty M\{r_i\} \quad \text{no sentido de Gromov-Hausdorff, conforme } r_i \to \infty\ , \tag{4.20}$$

cada ponto $p_\infty \in \partial T_\infty M\{r_i\} = M(\infty)\{r_i\}$ é limite de uma sequência $p_i = \gamma_{p_i}(r_i)$, com $r_i = d_M(o,p_i) \to \infty$, e como cada geodésica γ_{p_i} é minimizante, por compacidade da esfera tangente unitária, S_oM, implica que alguma subsequência, γ_{p_j}, converge para um raio. Portanto temos uma projeção de $\mathcal{R}_o$ sobre $M(\infty)\{r_i\}$. De maneira similar, vemos que cada ponto $q_\infty \in T_\infty M\{r_i\} \setminus M(\infty)\{r_i\}$ é limite de alguma sequência de pontos q_i, ou de geodésicas minimizantes, $\gamma_{q_i}(\alpha r_i) = q_i$, com $0 \le \alpha < 1$. Temos assim que os pontos do cone tangente no infinito podem, de certa forma, ser identificados com os raios de M^n. Veremos em seguida como realizar tal identificação.

(iii) Recordemos aqui, a Proposição 0.4.B.13:

4.B.7. Proposição. *A classe, $(\mathcal{M}, d_{GH})$, dos espaços métricos compactos, munida da distância de Gromov-Hausdorff é um espaço métrico completo*

Como cada bola $\overline{B(o,1;g_{r_i})}$ pode ser vista como o espaço métrico compacto $\overline{B(o,1;d_{M_{r_i}}(.,.))}$, segue que seu limite de Gromov-Hausdorff $(T_\infty M\{r_i\}, d_\infty)$ também é um espaço métrico compacto.

Definimos, agora, uma relação de equivalência, $\sim$ no conjunto dos raios $\mathcal{R}_o$. Diremos que dois raios, γ_1, $\gamma_2 \in \mathcal{R}_o$, são equivalentes, e denotaremos tal fato por $\gamma_1 \sim \gamma_2$ se ocorrer

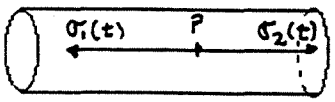
$$\lim_{t\to\infty} \frac{d_M(\gamma_1(t),\gamma_2(t))}{t} = 0 \tag{4.21}$$

quer dizer, a velocidade de afastamento das geodésicas equivalentes é menos do que linear.

Vamos dar alguns exemplos para ganhar intuição.

4.B.8. Exemplos.

(1) Cilindro, $C = S^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$. Dado um par qualquer de raios (parametrizados por comprimento de arco), σ_1 e σ_2, em C e partindo de um ponto p, temos duas possibilidades: ou a distância entre eles, $d_C(\sigma_1(t),\sigma_1(t)) = 0$ (no caso em que pertencem a um mesmo fim), ou se afastam com velocidade $2t$, $d_C(\sigma_1(t),\sigma_2(t)) = 2t$. Assim, $\mathcal{R}_p/\sim = \{[\sigma_1],[\sigma_2]\}$.



(2) Parabolóide de revolução $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ z = x^2 + y^2\}$. Não é difícil verificar que dois raios partindo de $0 = (0,0,0)$, podem ser parametrizados por

$$\xi_1(t) = (h(t)\cos\theta_1, h(t)\operatorname{sen}\theta_1, h(t)^2) \quad e \quad \xi_1(t) = (h(t)\cos\theta_2, h(t)\operatorname{sen}\theta_2, h(t)^2),$$

onde $h(t)$ é uma função diferenciável crescente, satisfazendo

$$h(u(s)) = s\ , \quad u(s) = \int_0^s \sqrt{1+4x^2}\,dx \quad e \quad 0 \le s < \infty.$$

Podemos verificar que conforme $t \to \infty$, $h(t)$ torna-se assintótica a $\sqrt{t}$, $h(t) \approx \sqrt{t}$.

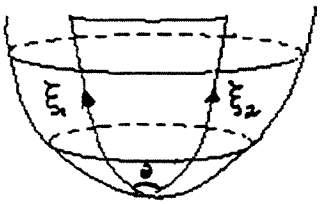
Consequentemente, para t suficientemente grande, calculando a distância entre $\xi_1(t)$ e $\xi_2(t)$, obtemos

$$d_P(\xi_1(t),\xi_2(t)) = h(t)|\theta_2 - \theta_1| \approx \sqrt{t}|\theta_2 - \theta_1|,$$

de modo que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d_P(\xi_1(t),\xi_2(t))}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{h(t)}{t}|\theta_2 - \theta_1| = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t}}{t}|\theta_2 - \theta_1| = 0$$

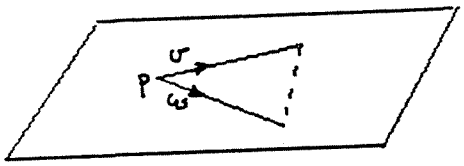
Desta forma, todos os raios em P são equivalentes, e o espaço quociente $\mathcal{R}_0/\sim = \{[\xi_1]\}$ possui uma única classe.



(3) Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. *Se temos dois raios* $r_1(t) = p + tv$ *e* $r_2(t) = p + tw$ *partindo do mesmo ponto* p, *então* $d_{\mathbb{R}^n}(r_1(t), r_2(t)) = |r_1(t) - r_2(t)| = t|v - w|$, *donde vem que o limite*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d_{\mathbb{R}^n}(r_1(t), r_2(t))}{t} = |v - w| \,. \tag{4.23}$$

Com isto, $\mathcal{R}_p/\sim = S^{n-1}$, *quer dizer, cada raio partindo de* p *é determinado por uma única direção* $v \in T_p\mathbb{R}^n$ *e reciprocamente.*



Poderia eventualmente ocorrer de o limite em (4.21) ser 0 para alguma sequência divergente $t_i \to \infty$, mas não se anular para outra sequência, como acontece na classe das variedades com curvatura de Ricci não negativa; podemos ficar tranquilos, pois isto não ocorre para a classe das variedades CRANN. Com efeito, ponhamos $d_t := d_M(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ e seja $\triangle(\bar{o}, x_t, y_t) \subset M^2_{-k}$ um triângulo de comparação ($d_{-k}(\bar{o}, x_t) = d_{-k}(\bar{o}, y_t) = t$, e $d_{-k}(x_t, y_t) = d_t$). Sabemos, pela propriedade de Convexidade de Alexandrov (Teorema 0.3.C), que o ângulo θ_t, entre x_t e y_t é uma função monótona não crescente. Por outro lado, se l_t é o comprimento de arco de circunferência em M^2_{-k} de raio t e ângulo θ_t valem as seguintes estimativas

$$c_1 l_t \leq d_t \leq l_t = \theta_t J_k(t) \leq c_2 d_t \tag{4.24}$$

Para certas constantes c_1, $c_2 > 0$. Dividindo termo a termo a expressão acima por t:

$$c_1 \theta_t \frac{J_k(t)}{t} \leq \frac{d_t}{t} \leq \theta_t \frac{J_k(t)}{t} \leq c_2 \frac{d_t}{t} \tag{4.25}$$

Assim, se para alguma sequência divergente de números reais $t_i \to \infty$ temos $d_{t_i}/t_i \to 0$, então por (4.25) vem que $\lim_{t_i\to\infty} \theta_{t_i} = 0$. Como θ_t é monótona não crescente, concluímos que para qualquer outra sequência divergente $s_j \to \infty$ o limite $\lim_{s_j\to\infty} \theta_{s_j} = 0$. Portanto, a definição de $\sim$ não depende de como t tende para o infinito.

Escreveremos $[\gamma]$ para denotar a classe de equivalência de γ em $\mathcal{R}_o/\sim$. Podemos introduzir uma distância δ_∞, no quociente $\mathcal{R}_o/\sim$, da seguinte forma: dadas duas classes $[\gamma_1]$, $[\gamma_2] \subset \mathcal{R}_o/\sim$, pomos

$$\delta_\infty([\gamma_1], [\gamma_2]) := \lim_{t\to\infty} \frac{d_M(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{t} \tag{4.26}$$

Por um raciocínio análogo ao acima, mostramos que o limite na definição (4.26) existe (ou seja, não dependente da forma como se tende para o infinito) para cada γ_1, $\gamma_2 \in \mathcal{R}_o$. Além disso, o limite (4.26) independe dos particulares representantes das classes que tomamos, quer dizer, se temos σ_i, $\gamma_i \in [\gamma_i]$, para $i = 1, 2$, então

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d_M(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{d_M(\sigma_1(t), \sigma_2(t))}{t} \tag{4.27}$$

Com efeito, para cada $t > 0$, temos, pela desigualdade triangular

$$\frac{d_M(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{t} \leq \frac{d_M(\gamma_1(t), \sigma_1(t))}{t} + \frac{d_M(\sigma_1(t), \sigma_2(t))}{t} + \frac{d_M(\sigma_2(t), \gamma_2(t))}{t} \tag{4.28}$$

Como existe o limite de cada termo em (4.28), e σ_i, $\gamma_i \in [\gamma_i]$, fazendo $t \to \infty$ em (4.28), obtemos

$$\delta_\infty([\gamma_1], [\gamma_2]) \leq \delta_\infty([\sigma_1], [\sigma_2]) \tag{4.29}$$

simetricamente, obtemos a desigualdade oposta, em (4.29). Logo δ_∞ é uma bem-definida distância no conjunto $\mathcal{R}_o/\sim$.

É standard a verificação de que δ_∞ é, de fato uma métrica:

(a) $\delta_\infty([\gamma_1], [\gamma_2]) \geq 0$, valendo a igualdade se e só se $[\gamma_1] = [\gamma_2]$;

(b) $\delta_\infty([\gamma_1], [\gamma_2]) = \delta_\infty([\gamma_2], [\gamma_1])$ quaisquer que sejam $[\gamma_1]$, $[\gamma_2] \in \mathcal{R}_o/\sim$;

(c) $\delta_\infty([\gamma_1], [\gamma_3]) \leq \delta_\infty([\gamma_1], [\gamma_2]) + \delta_\infty([\gamma_2], [\gamma_3])$, quaisquer que sejam $[\gamma_1]$, $[\gamma_2]$, $[\gamma_3] \in \mathcal{R}_o/\sim$.

Por exemplo, para verificarmos (c): tomamos representantes γ_1, γ_2 e $\gamma_3 \in \mathcal{R}_o$ e observamos que para cada $t > 0$, pela desigualdade triangular:

$$\frac{d_M(\gamma_1(t), \gamma_3(t))}{t} \leq \frac{d_M(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{t} + \frac{d_M(\gamma_2(t), \gamma_3(t))}{t} \tag{4.30}$$

como existe o limite de cada termo em (4.30), segue a validade de (c).

Os argumentos anteriores permitem-nos estender a relação $\sim$ e a distância δ_∞ a uma classe maior de raios: Vamos denotar por $\overline{\mathcal{R}}_o$ ao conjunto de raios $\gamma_a : [0, \infty) \to M^n$ partindo de o com $\|\gamma_a'\| \equiv a$, para algum $a \in (0, 1]$ fixo; quer dizer $\gamma_a = \gamma \circ T_a$ para algum raio $\gamma \in \mathcal{R}_o$, onde $T_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $T_a(s) = as$.

Definimos dois raios γ_a, $\sigma_b \in \overline{\mathcal{R}}_o$ serem equivalentes e, por abuso de notação, escreveremos $\gamma_a \sim \sigma_b$ se o limite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d_M(\gamma_a(t), \sigma_b(t))}{t} = 0 \tag{4.31}$$

Usando comparação de triângulos, vemos que $\gamma_a \sim \sigma_b$ se, e somente se, $a = b$ e $\gamma \sim \sigma$ (onde $\gamma_a = \gamma \circ T_a$ e $\sigma_b = \sigma \circ T_b$). Com efeito, considerando para cada $t > 0$, um triângulo de comparação

$$\overline{\triangle}(\overline{o}, \overline{x}_{at}, \overline{y}_{bt}) \subset M^2_{-k} \tag{4.32}$$

com $d_{-k}(\overline{o}, \overline{x}_{at}) = at$, $d_{-k}(\overline{o}, \overline{y}_{bt}) = bt$, $d_{-k}(\overline{x}_{at}, \overline{y}_{bt}) = d_M(\gamma_a(t), \sigma_b(t)) = d_{a,b}(t)$ e ângulo em $\overline{o}$, $\angle\overline{o} = \phi_t$. Considerando também um triângulo (uma dobradiça)

$$\tilde{\triangle}(\tilde{o}, \tilde{x}_{at}, \tilde{y}_{bt}) \subset (\mathbb{R}^2, \tilde{o} = 0, <.,.>) \tag{4.33}$$

onde $< .,. >$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$ e $d_{\mathbb{R}^2}(\tilde{o}, \tilde{x}_{at}) = at$, $d_{\mathbb{R}^2}(\tilde{o}, \tilde{y}_{bt}) = bt$ e $\angle\tilde{o} = \phi_t = \angle\overline{o}$, onde $\angle\overline{o}$ é o ângulo em $\overline{o}$, podemos aplicar o TCTG-(c) aos triângulos $\overline{\triangle}$, $\tilde{\triangle}$ (quer dizer, às dobradiças $(\tilde{o}\tilde{x}_{at}, \tilde{o}\tilde{y}_{bt}, \phi_t)$, $(\overline{ox}_{at}, \overline{oy}_{bt}, \phi_t)$, onde $\tilde{o}\tilde{x}_{at}$ é a geodésica conectando $\tilde{o}$ a $\tilde{x}_{at}$) e concluir

$$d_{a,b}(t) \geq d_{\mathbb{R}^2}(\tilde{x}_{at}, \tilde{y}_{bt}) = t\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi_t} \tag{4.34}$$

Por (4.34) fica claro que se $a \neq b$ então

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d_{a,b}(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{d_M(\gamma_a(t), \sigma_b(t))}{t} > 0 \tag{4.35}$$

Logo, se $\gamma_a \sim \sigma_b$ devemos ter $a = b$. Neste caso, reescrevemos (4.34) como

$$d_{a,a}(t) = d_M(\gamma_a(t), \sigma_a(t)) \geq at\sqrt{2(1 - \cos\phi_t)} \tag{4.36}$$

(4.36) nos diz que se para algum $a \in (0, 1]$, o $\lim_{t\to\infty} t^{-1} d_{a,a}(t) = 0$, de onde segue $\lim_{t\to\infty} \phi_t = 0$ e portanto $\lim_{t\to\infty} t^{-1} d_{b,b}(t) = 0$ para todo $b \in (0, 1]$.

Representaremos a classe de equivalência de γ_a por $[\gamma_a]$.

Definimos também uma distância que, por abuso de linguagem, também denotaremos por δ_∞ no quociente $\overline{\mathcal{R}}_o/\sim$:

$$\delta_\infty : (\overline{\mathcal{R}}_o/\sim) \times (\overline{\mathcal{R}}_o/\sim) \to \mathbb{R} \tag{4.37}$$

onde

$$\delta_\infty([\gamma_a], [\sigma_b]) := \lim_{t\to\infty} \frac{d_M(\gamma_a(t), \sigma_b(t))}{t} = 0 \tag{4.38}$$

Obtendo assim, um espaço métrico $(\overline{\mathcal{R}}_o/\sim, \delta_\infty)$.

Agora se mostrarmos que existe uma isometria entre $(T_\infty M\{r_i\}, d_\infty)$ e $(\overline{\mathcal{R}}_o/\sim, \delta_\infty)$, teremos provado a unicidade dos cones tangentes no infinito.

4.B.9. Construção de uma isometria: $\Phi : (T_\infty M\{r_i\}, d_\infty) \to (\overline{\mathcal{R}}_o/\sim, \delta_\infty)$.

Para definirmos uma tal aplicação, começamos observando que para cada ponto $p_{a,\infty} \in T_\infty M\{r_i\}$, com $d_\infty(o_\infty, p_{a,\infty}) = a$ podemos associar um raio geodésico da maneira seguinte:

Consideramos uma sequência de pontos $\{p_i\}$, com $p_i \in B(o, 1; g_{r_i})$, $d_{M_{r_i}}(o, p_i) = l_i$ convergindo na distância de Gromov-Hausdorff para $p_{a,\infty}$ (e $l_i \to a$), e geodésicas minimizantes $\gamma_i : [0, l_i r_i] \to M^n$ conectando o a p_i. Então uma subsequência destas geodésicas converge para um raio $\gamma_a \in \overline{\mathcal{R}}_o$. Se considerarmos uma outra sequência de pontos $\{q_i\}$, com $q_i \in B(o, 1; g_{r_i})$, $d_{M_{r_i}}(o, q_i) = m_i$ também convergindo para $p_{a,\infty}$ (e $m_i \to a$), e $\sigma_i : [0, m_i r_i] \to M^n$ uma sequência de geodésicas minimizantes conectando o a q_i, novamente temos que uma subsequência destas geodésicas converge para uma raio $\sigma_a \in \overline{\mathcal{R}}_o$.

4.B.10. Afirmação. *Os raios $\gamma_a = \gamma \circ T_a$ e $\sigma_a = \sigma \circ T_a$ são equivalentes*

Verificação.

Basta notar que como p_i e q_i convergem para p_∞ temos

$$\lim_{r_i\to\infty} d_{M_{r_i}}(p_i, q_i) = 0 \tag{4.39}$$

podemos reescrever (4.39) como

$$\lim_{r_i\to\infty}\frac{1}{r_i}d_M(\gamma_i(l_ir_i),\sigma_i(m_ir_i))=0 \tag{4.40}$$

Isto mostra que $\gamma_a\sim\sigma_a$, pois pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} d_M(\gamma_a(r_i),\sigma_a(r_i)) = d_M(\gamma(ar_i),\sigma(ar_i)) \le d_M(\gamma(ar_i),\gamma(l_ir_i)) + d_M(\gamma(l_ir_i),\gamma_i(l_ir_i))+ \\ d_M(\gamma_i(l_ir_i),\sigma_i(m_ir_i)) + d_M(\sigma_i(m_ir_i),\sigma(m_ir_i)) + d_M(\sigma(m_ir_i),\sigma(ar_i)) \end{aligned} \tag{4.41}$$

Com isto temos uma bem-definida função

$$\Phi : T_\infty M\{r_i\}\to\overline{\mathcal{R}}_o/\sim \tag{4.42}$$

Argumentos anteriores mostram-nos que esta função é uma sobrejeção. Para mostrar que Φ é injetora basta notarmos que se p_∞, $q_\infty\in T_\infty M\{r_i\}$ e $d_\infty(p_\infty,q_\infty)>0$, implica $\delta_\infty(\Phi(p_\infty),\Phi(q_\infty))>0$.

Mas isto é fácil de ver já que se $d_\infty(p_\infty,q_\infty)>0$, então existem sequências de pontos $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ com p_i, $q_i\in\overline{B(o,1;g_{r_i})}$ (tais que $d_{M_{r_i}}(o,p_i)=l_i$, $d_{M_{r_i}}(o,q_i)=m_i$) e sequências de geodésicas minimizantes $\{\gamma_i$: conectando o a $p_i\}$, $\{\sigma_i$: conectando o a $q_i\}$ verificando

$$0<\lim_{r_i\to\infty}d_{M_{r_i}}(p_i,q_i)=\lim_{r_i\to\infty}\frac{1}{r_i}d_M(\gamma_i(l_ir_i),\sigma_i(m_ir_i)) \tag{4.43}$$

Como as sequências de geodésicas γ_i e σ_i possuem subsequências convergindo para raios $\gamma=\lim\gamma_i$ e $\sigma=\lim\sigma_i$, a desigualdade (4.43) mostra que estes raio não podem ser equivalentes, o que prova a injetividade de Φ.

Finalmente, a verificação de que Φ é uma isometria: Dados p_∞, $q_\infty\in T_\infty M\{r_i\}$, os argumentos anteriores (boa definição de Φ, independência de como se tende a p_∞) nos mostram que se $\Phi(p_\infty)=\gamma_\infty$ e $\Phi(q_\infty)=\sigma_\infty$ então

$$d_\infty(p_\infty,q_\infty)=\lim_{r_i\to\infty}d_M(\gamma_\infty(r_i),\sigma_\infty(r_i))=\delta_\infty([\gamma_\infty],[\sigma_\infty])$$

Portanto $\Phi:(T_\infty M\{r_i\},d_\infty)\to(\overline{\mathcal{R}}_o/\sim,\delta_\infty)$ é uma isometria.

Como podemos, para cada sequência divergente r_i de números reais, construir uma tal isometria, segue que todos os cones assintóticos de uma dada variedade CRANN, são isométricos. Além disso, independentemente da sequência r_i com $r_i\to\infty$, temos a convergência da sequência $\{B(o,1;g_{r_i})\}$ (por argumento diagonal) de modo que fica bem definido o espaço métrico

$$T_\infty(M^n,g)=\lim_{GH}\overline{B(o,1;g_r)}$$

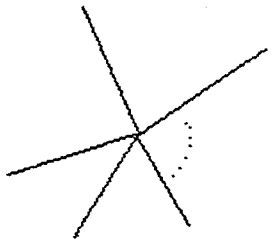
□

Concluímos os argumentos anteriores com o seguinte

4.B.11. Teorema. *Para cada variedade CRANN, (M^n,o,g,k), existe um único cone tangente no infinito.*

Façamos alguns exemplos (despretenciosos):

(1) Se g_{can} é a métrica canônica de $\mathbb{R}^n$, $T_\infty(\mathbb{R}^n,g_{can})=\overline{B(0,1)}$ onde $B(0,1)$ é a bola Euclidiana em $\mathbb{R}^n$;



(2) A superfície de $\mathbb{R}^3$, obtida pela colagem de k cilindros $S^1(\varepsilon) \times [0, \infty)$ na esfera de raio r, $S^2(r) \subset \mathbb{R}^3$ menos k discos d_i, $i = 1, \ldots, k$ de raio ε, através da fronteira $\partial d_i \subset S^2(r)$, $i = 1, \ldots, k$, suavizando os pontos de colagem é uma variedade CRANN. Sua fronteira ideal é um grafo com $k+1$ vértices (veja figura acima);

Os dois exemplos seguintes são adaptações óbvias dos exemplos em [Ka1]

(3) Se $(M_i^{n_i}, o_i, g_i)$, $i = 1, 2$ são variedades Riemannianas abertas com curvatura minimal radial não negativa. e

$$(M^n = M_1^{n_1} \times M_2^{n_2}, o = (o_1, o_2), g = \pi_1 g_1 + \pi_2 g_2)$$

onde $\pi : M^n \to M_i^{n_i}$ são as projeções canônicas, então M^n também é uma variedade com curvatura minimal radial não negativa. Temos inclusões naturais $M_i(\infty) \subset M(\infty)$, $i = 1, 2$. Se $p_i \in M_i(\infty)$, $i = 1, 2$, então $d_\infty(p_1, p_2) = \sqrt{2}$, e se $p \in M(\infty)$, então existem $p_i \in M_i(\infty)$, $i = 1, 2$, tais que p pertence a uma geodésica minimizante em $M(\infty)$;

(4) Se $(M_i^{n_i}, o_i, g_i)$, $i = 1 \ldots, k$ são variedades Riemannianas abertas com curvatura minimal radial não negativa, então a variedade Riemanniana produto $(M^n = M_1^{n_1} \times \ldots \times M_k^{n_k}, o = (o_1, \ldots o_k))$, com métrica produto também é variedade com curvatura minimal radial não negativa. Se, para cada $i = 1, \ldots, k$, $M_i(\infty)$ consiste de um único ponto. Então $M(\infty)$ é isométrica à parte da esfera unitária: $\{(x_1 \ldots . x_k) \in S^{k-1}(1) \big| \ x_i \geq 0 \ , \ i = 1 \ldots . k\}$. Com efeito, basta notar que todo raio $\gamma : [0, \infty) \to M^n$, partindo de $o = (o_1, \ldots, o_k)$, é da forma $\gamma(t) = (\gamma(x_1 t), \ldots, \gamma(x_k t))$, onde $\gamma_i \in \mathcal{R}_{o_i}$, são raios em $M_i^{n_i}$ e $\sum_{i=1}^k x_i^2 = 1$, $x_i \geq 0$.

4.C. Questões

Gostaria de concluir dizendo que este assunto é vasto e que muitas propriedades válidas para a classe das variedades com curvatura seccional assintoticamente não negativa parecem também valer para a classe das variedades CRANN. Na verdade a maior parte do trabalho, conforme procurei mencionar várias vezes no corpo desta Tese já está praticamente feito em trabalhos como [Ab], [Ka1], [Ka3], [Sy], [Z] entre outros, mas no contexto de curvatura seccional. Finalmente, algumas questões de interesse:

I. São válidos os dois Teoremas seguintes?

Teorema 1. *Se (M^n, o, g, k) é uma variedade CRANN, então valem as seguintes propriedades acerca de sua fronteira ideal*

(a) $M^n(\infty)$ é espaço de Alexandrov;

(b) A curvatura de $M^n(\infty)$, no sentido de comparação, é ≥ 1.

Teorema 2. *Dados $n \geq 2$ um inteiro, $a \in (0,1]$. Se (M^n, o, g) é uma variedade Riemanniana com $Ric_M \geq 0$ (ou $K_o^{min} \geq 0$) e crescimento Euclidiano de volume $\alpha_M \geq a$. Então M^n é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.*

II. Existe Teorema da Alma para variedades com curvatura minimal radial não negativa? (isto nos permitiria obter varias informações topológicas acerca da classe de tais variedades)

III. O que podemos dizer acerca das funções de Busemann em variedades CRANN (ou mesmo em variedades com curvatura minimal radial não negativa)?

IV. Fixados dados geométricos acerca da fronteira ideal de uma variedade CRANN, o que pode ser dito sobre sobre a variedade como um todo?

V. O que pode ser dito acerca do crescimento do grupo fundamental das variedades CRANN. Por exemplo, [Z] dada (M^n, o, g, k), existe alguma constante $\varepsilon(n)$ tal que se $b_0(k) \leq \varepsilon$ implica que todo subgrupo finitamente gerado possui crescimento polinomial?

REFERENCES

[Ab] U. Abresch, *Lower curvature bounds, Toponogov's Theorem, and bounded topology*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **4 série** (1985), 651–670.

[A] M. T. Anderson, *Hausdorff perturbations of Ricci-flat manifolds and the Splitting Theorem*, Duke Math. J. **68** (1992), 67–82.

[An] M. T. Anderson, *Metrics of positive Ricci curvature with large diameter*, Manuscripta Math. **68** (1990), 405–415.

[An2] M. T. Anderson, *Convergence and rigidity of manifolds under Ricci curvature bounds*, Invent. Math. **102** (1990), 429–445.

[AC] M. T. Anderson, J. Cheeger, *C^α-compacteness for manifolds with Ricci curvature and injectivity radius bounded below*, J. Differential Geom. **35** (1992), 265–281.

[B] M. Berger, *Les variétés Riemanniennes (1/4)-pincées*, Ann. Scuolla Norm. Sup. Pisa, Ser.III **14** (1960), 161–170.

[Be] E. B. Begle, *Regular convergence*, Duke Math. J. **11** (1944), 441–450.

[BGS] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder, *Manifolds of nonpositive curvature*, vol. 61, Progr. Math., Birkhäuser, Boston, 1985.

[BGP] Y. Burago, M. Gromov, G. Perelman, *A.D. Alexandrov spaces with curvature bounded below*, Russian Math. Surveys **47:2** (1992), 1–58.

[BM] G. P. Bessa, V. Marenich, *Tangent cones at infinity under quadratic sectional curvature decay*, International Centre for Theoretical Physics **21** (1995), 1–8.

[Bo] K. Borsuk, *On some metrizations of the hyperspace of compact sets*, Fund. Math. **41** (1955), 168–201.

[Bw1] V. N. Brestrowskii, *Spaces with bounded curvature and distance geometry*, Sibirskii. Mat. Zh. **27, no. 1** (1993), 8–19.

[Bw2] V. N. Brestrowskii, *Introduction of a Riemann structure into certain metric spaces*, Sibirskii. Mat. Zh. **16, no. 4** (1993), 499–507.

[Ca] M. Cai, *Ends of Riemannian manifolds with nonnegative Ricci curvature outside a compact set*, Bull. (new series) Am. Math. Soc. **24** (1991), 371–377.

[CCY] M. Cai, T. H. Colding, D. G. Yang, *A gap theorem for ends of complete manifolds*, Proc. Am. Math. Soc. **102** (1990), 429–445.

[C2] J. Cheeger, *Critical points of distance functions and applications to geometry*, Springer Lecture Notes **1504** (1991), 1–38.

[CC] J. Cheeger, T. H. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below.I*, J. Differential Geometry **46** (1997), 406–480.

[CE] J. Cheeger, D. G. Ebin, *Comparison theorems in Riemannian geometry*, North Holland Math. Library, Amsterdam, 1975.

[CG1] J. Cheeger, D. Gromoll, *On the structure of complete manifolds of non-negative curvature*, Ann. of Math. **96** (1972), 413–443.

[CG2] J. Cheeger, D. Gromoll, *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature*, J. Differential Geom. **6** (1971), 119–129.

[Co] T. H. Colding, *Ricci curvature and volume convergence*, Ann. of Math. **145: 3** (1997), 477–501.

[Cg] S. Y. Cheng, *Eigenvalue comparison theorem and its geometric applications*, Math. Z. **143** (1975), 289–297.

[dC] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.

[dC1] M. P. do Carmo, *Elementos de geometria diferencial*, Editora Universidade de Brasília - IMPA, Rio de Janeiro, 1971.

[dCX] M. P. do Carmo, C. Xia, *Ricci curvature, radial curvature and the topology of open manifolds*, Preprint.

[F1] K. Fukaya, *A boundary of the set of Riemannian manifolds with bounded curvatures and diameters*, J. Differential Geom. **28** (1988), 1–21.

[F2] K. Fukaya, *On a compactification of the set of Riemannian manifolds with bounded curvatures and diamenters*, Curvature and Topology of Riemannian Manifold, Lecture Notes in Math. **1201** (1986), 89–107.

[GHL] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.

[Ge] R. E. Greene, *A genealogy of noncompact manifolds of nonnegative curvature*, Comparison Geometry **30** (1997), MSRI Publications, 99–134.

[Gl] D. Gromoll, *Differenzierbare Strukturen und Metriken positiver Krummung auf Sparen*, Math. Ann. **164** (1966).

[G1] M. Gromov, *Curvature, diameter and Betti numbers*, Comment. Math. Helv. **56** (1981), 179–195.

[G2] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Inst. Hautes Ètudes Sci. Publ. Math. **53** (1981), 183–215.

[GLP] M. Gromov, J. Lafontaine, P. Pansu, *Structures métriques pour les varietés Riemannienes*, Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1981.

[GrP] K. Grove, P. Petersen V, *Bounding homotopy types by geometry*, Ann. of Math. (2) **128** (1988), 195–206.

[GS] K. Grove, K. Shiohama, *A generalized sphere theorem*, Ann. of Math. **106** (1977), 201–211.

[GK] L. Guijarro, V. Kapovitch, *Restrictions on the geometry at infinity of nonnegatively curved manifolds*, Duke. Math. J. **78** (1995), 257–276.

[GP] L. Guijarro, P. Petersen, *Rigidity in nonnegative curvature*, Ann. Scient. Éc. Nor. Sup. 4^e **série,t. 30** (1997), 595–603.

[Gr1] K. Grove, *Metric differential geometry*, Lecture Notes in Math. **1263** (1987), 171–227.

[Gr2] K. Grove, *Critical point theory for distance functions*, Proc. Symp. Pure Maths. **54** (1993), 357–385.

[GW2] R. E. Greene, H. Wu, *Gap theorems for noncompact Riemannian manifolds*, Duke Math. J. **49, No. 3** (1982), 731–756.

[GW3] R. E. Greene, H. Wu, *Nonnegatively curved manifolds which are flat outside a compact set*, Proc. Symp. Pure Math. **54, Part 3** (1993), 327–335.

[GW4] Greene, R. E., H. Wu, C^∞ *convex functions and manifolds of positive curvature*, Acta Math. **137** (1976), 209–245.

[GW5] R. E. Greene, H. Wu, *Function theory on manifolds which possess a pole*, Lecture Notes in Math. **699** (1979), 1–215.

[Ka1] A. Kasue, *A compactification of a manifold with asymptotically nonnegative curvature*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup, (4 serie) **21** (1988), 593–622.

[Ka2] A. Kasue, *A Laplacian comparison theorem and function theoretic properties of a complete Riemannian manifold*, Japan J. Math. **8,** N^o **2.**

[Ka3] A. Kasue, *A convergence theorem for Riemannian manifolds and some applications*, Nagoya Math. J. **114** (1989), 21–51.

[Kl] W. Klingenberg, *Manifolds with restricted conjugate locus*, Ann. of Math. **78:3** (1994), 527–547.

[K] W. Klingenberg, *Uber Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krummung*, Comment. Math. Helv. **35** (1961), 47–54.

[Ko] L. K. Koh, *Alexandrov spaces with nonnegative curvature outside a compact set*, Manuscripta Math. **94,** (1997), 401–407.

[KSS] H. Karcher, K. Shiohama, M. Sugimoto, *On the differentiable pinching theorem*, Math. Ann. **195** (1971).

[L] Z. D. Liu, *Ball covering property and nonnegative Ricci curvature outside a compact set*, Proc. Symp. Pure Math. **54, Part 3** (1993), 459–464.

[Lo] J. Lohkamp, *Curvature contents of geometric spaces*, Doc. Math. J. DMV **Extra Volume ICM-2** (1993), 361–370.

[Mi] J. Milnor, *Morse theory*, Ann of Math. Study, vol.51, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.

[MM] V. B. Marenich, S. J. X. Mendonça, *Manifolds with minimal radial curvature bounded from below and big radius*, Indiana Univ. Math. J. **48:1** (1999), 249–274.

[Mr1] V. B. Marenich, *Manifolds with minimal radial curvature bounded from below and big volume*, to appear in Transactions of Am. Math. Soc..

[Mr2] V. B. Marenich, *Manifolds with minimal radial curvature bounded from below close to round sphere*, preprint.

[Mr3] V. B. Marenich, *Horofunctions, Busemann functons, and ideal boundaries of open manifolds of nonnegative curvature*, Siberian Math. Zh. **34:5** (1993), 1–22.

[Mr4] V. B. Marenich, *Topological gap phenomenon for open manifolds of nonnegative curvature*, Doklady Acad. Sc. USRR **284:3** (1985), 528–531.

[MS] Y. Machigashira, K. Shiohama, *Riemannian manifolds with positive radial curvature*, Japan. J. Maths. **19** (1994), 419–430.

[Ms1] Y. Machigashira, *Manifolds with pinched radial curvature*, Proc. Am. Math. Soc. **118** (1993), 979–985.

[Ms2] Y. Machigashira, *Complete open manifolds of non-negative radial curvature*, Pac. J. Math. **165** (1994), 153–160.

[O] Y. Otsu, *On manifolds of positive Ricci curvature with large diameter*, Math. Z. **206**, 255–264 yr1991.

[O'N] B. O'Neil, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1981.

[P] G. Perelman, *referência na internet: www.msri.org/publications/books/Book30/contents.html.*

[Pet] P. Petersen V, *Gromov-Hausdorff convergence of metric spaces*, Proc. Symp. Pure Maths. **54:3** (1993), 489–504.

[Pl] C. Plaut, *Metric spaces of curvature* $\geq k$, to appear in Handbook in Geometric Topology.

[Ru] E. Ruh, *Curvature and differentiable structures on spheres*, Bull. Am Math. Soc. **77(1)** (1971).

[S] K. Shiohama,, *Topology of complete noncompact manifolds in Geometry of Geodesics and Related Topics*, Adv. Studies in Pure Math. **3** (1984), 423–450.

[SY] J. P. Sha, D. G. Yang, *Positive Ricci curvature on the connected sums of* $S^n \times S^m$, J. Differential Geom. **33** (1991), 127–138.

[She] Z. Shen, *Complete manifolds with nonnegative Ricci curvature and large volume growth*, Invent. Math. **125** (1996), 393–404.

[Sy1] T. Shioya, *On the excess of open manifolds*, Proc. Symposia in Pure Math. **54** (1993), 577–584.

[Sy2] T. Shioya, *Splitting theorems for nonnegatively curved open manifolds with large ideal boundary*, Math. Z. **212** (1993), 223–238.

[T1] V. Toponogov, *Riemannian spaces having their curvature bounded from below by a positive number*, Amer. Math. Soc. Trans. (Ser.2) **37** (1964), 291–336.

[T2] V. Toponogov, *Riemannian spaces which contain straight lines*, Amer. Math. Soc. Trans. (Ser.2) **37** (1964), 287–290.

[Wu] H. Wu, *An elementary method in the study of nonnegative curvature*, Acta Math. **142** (1979), 57–78.

[Z1] S.-H. Zhu, *A volume comparison theorem for manifolds with asymptotically nonnegative curvature and its applications*, Am. J. Math. **116** (1992), 669–682.

[Z2] S.-H. Zhu, *The comparison geometry of Ricci curvature*, Comparison Geometry **30** (1997), MSRI Publications, 221–262.