OPERADORES INTEGRAIS SINGULARES "FRACAMENTE FORTES" EM ESPAÇOS DE HARDY ATÔMICOS

BENJAMIN BORDIN

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requesito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. CARLOS SEGOVIA FERNÁNDEZ

Maio - 1978

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. Dr. Carlos Segovia Fernández pelo problema proposto e por sua orientação segura e eficiente.

Ao Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio pelo apoio de todo momento.

Ao Prof. Dr. Roberto A. Macias e ao Prof. Dr. Dicesar Lass Fernandez pela atenção dedicada.

Aos colegas pelo estímulo.

demonstram-se que esses operadores são limitados em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$ satisfazendo,

$$|1/2 - 1/p| < \beta/n(n/2 + \lambda)/(\beta + \lambda)$$

onde $\lambda = (n\alpha/2 - \beta)/(1 - \alpha)$. Fefferman e Stein demonstram em [5] que ainda temos a limitação no caso da igualdade.

Para $0 < p \leq 1$, a constante α na condição (ii) do núcleo $K(x)$ deve ser tomada negativa ([1]). Em [5], Fefferman e Stein observam, sem dar a demonstração, que o operador

$$T_\lambda f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |y| \leq 1} f(x-y) \exp(i|y|^{a'})|y|^{-n-\lambda} dy$$

onde $a' < 0$, $\lambda = (na/2 - b)/(1-a)$, $1/a + 1/a' = 1$ e $b > 0$ é limitado nos espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ para $p \leq 1$ satisfazendo

$$1/p - 1/2 < (b/n)(n/2 + \lambda)/(b + \lambda).$$

No caso $n = 1$, Coifman em [1], demonstra a limitação de T_λ nos espaços H^p atômicos, ainda quando temos a igualdade.

Neste trabalho vamos estudar os operadores integrais singulares "fracamente fortes" em espaços de Hardy atômicos $H^p(X)$ com $0 < p \leq 1$ onde X é um espaço de tipo homogêneo normalizado e obter um resultado de limitação que nos dê como caso particular o resultado obtido em [5]. O presente trabalho consta de três capítulos cujos conteúdos são os seguintes:

Capítulo I - Preliminares

Neste capítulo colocamos a definição dos espaços de tipo homogêneo normalizado e apresentamos alguns aspectos da teoria dos espaços de Hardy atômicos.

Capítulo II - Operadores integrais singulares "fracamente fortes"

No parágrafo 1 damos a definição de núcleo integral singular "fracamente forte" em espaços de tipo homogêneo e estudamos o efeito de "convolucionar" esse núcleo com um $(p,2)$ átomo. No parágrafo 2 demonstramos um teorema de decomposição que nos permite afirmar que a "convolução" de um núcleo integral singular "fracamente forte" com um $(p,2)$ átomo é um elemento de H^p. No parágrafo 3 estudamos o efeito de aplicar os operadores integrais singulares "fracamente fortes" aos espaços $Lip(1/p - 1)$ das classes de funções lipschitzianas introduzidas no capítulo I. Neste parágrafo provamos o resultado central do trabalho que vem a ser o teorema 7. Como aplicação do teorema 7 mostramos no parágrafo 4 que o operador considerado por Fefferman e Stein em [5] e Coifman em [1] é limitado em $H^p(\mathbb{R}^n)$.

Capítulo III - Outra versão de operadores integrais singulares "fracamente fortes".

Neste capítulo desenvolvemos uma teoria para os operadores integrais singulares "fracamente fortes" com uma outra condição sobre o operador truncado considerado no parágrafo 1 do capítulo II. Mostramos que os resultados são os mesmos que se obtem no capítulo II, mas com outras condições sobre os valores de p.

I N D I C E

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

1. *Espaços de tipo homogêneo*

Seja X um conjunto e $d(x,y)$ uma função não negativa definida sobre $X \times X$ satisfazendo:

(i) $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$

(ii) para todo x, y pertencentes a X,

$$d(x,y) = d(y,x)$$

(iii) para todo x, y, z pertencentes a X, existe uma constante A tal que:

$$d(x,y) \leq A.(d(x,z) + d(z,y)) .$$

Suponhamos que existe uma medida μ tal que as bolas de centro em x e raio $r > 0$,

$$B(x,r) = \{ y : d(x,y) < r \},$$

sejam mensuráveis. Vamos supor também que existe uma constante A' finita, tal que para toda bola $B(x,r)$, a desigualdade

$$0 < \mu(B(x,r)) \leq A'.\mu(B(x,r/2))$$

se verifica.

A terna (X,d,μ) satisfazendo as condições acima, nós chamaremos de *espaço de tipo homogêneo*.

Exemplos:

(1) $X = \mathbb{R}^n$ munido da quase distância

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i |^{\alpha_i} ,$$

onde os α_i são números reais positivos e μ a medida de Lebesgue.

(2) $\mathbb{R}^n$ munido da distância euclideana $d(x,y) = |x - y|$ e com a medida $d\mu(x) = | x|^{\alpha} dx$

Diremos que X é um *espaço de tipo homogêneo normalizado* se existem constantes b_1, b_2 positivas finitas tal que, para toda bola $B(x,r)$ a desigualdade

$$b_1 r \leqq \mu(B(x,r)) \leqq b_2 r \tag{1.1}$$

se verifica.

Exemplo: O espaço $\mathbb{R}^n$ munido com a quase distância

$$d(x,y) = | x - y |^n,$$

e com a medida de Lebesgue.

Estes espaços podem ser vistos com maiores detalhes em [2]. No que se segue X denotará sempre um espaço de tipo homogêneo normalizado.

2. *Espaços de Hardy atômicos*

Seja ϕ uma função localmente em $L^r(X,d\mu)$, com $1 \leq r < \infty$. Seja $0 \leq \alpha \leq 1$ e denotemos por $m_B(\phi)$ o valor médio da função ϕ na bola B, isto é,

$$m_B(\phi) = \mu(B)^{-1} \int_B \phi(x)d\mu(x).$$

Diremos que ϕ é uma função $Lip(r,\alpha)$ se, existe uma constante c positiva finita, tal que para toda bola B, a desigualdade

$$(2.1) \qquad (\mu(B)^{-1} \int_B |\phi(x) - m_B(\phi)|^r d\mu(x))^{1/r} \leq c\mu(B)^{\alpha}$$

é satisfeita.

Observemos que se ϕ satisfaz (2.1) o mesmo ocorre com ϕ mais uma constante qualquer. Vamos denotar por $\bar{\phi}$ a classe das funções que diferem de ϕ por uma constante. Indicaremos por *Lip* (r,α) o espaço das classes de funções $\bar{\phi}$, com ϕ satisfazendo (2.1) com a norma $||\bar{\phi}||_{Lip(r,\alpha)}$, definida como o infimo das constantes c para as quais (2.1) é satisfeita.

Observamos que $Lip(r,0)$ coincide com as funções BMO (Bounded mean oscillation, ver [7]).

Definição 1: Seja $0 < p \leq 1 < q \leq \infty$. Uma função $a(x)$ é um *(p,q) átomo* se existe uma bola B, tal que o suporte de $a(x)$ está contido em B e além disso,

(i) $\quad (\mu(B)^{-1} \int_B |a(x)|^q d\mu(x))^{1/q} \leqq \mu(B)^{-1/p}$

se $q < \infty$ e $||a||_\infty \leqq \mu(B)^{-1/p}$ se $q = \infty$,

(ii) $\quad \int_X a(x)\, d\mu(x) = 0.$

Um (p,q) átomo pode ser identificado com um funcional linear sobre o espaço $Lip(q',1/p - 1)$ por

$$<F_a,\overline{\phi}> = \int_X a(x)\phi(x)d\mu(x).$$

Com efeito, pela condição (ii) da definição de (p,q) átomo temos as seguintes igualdades:

$$|<F_a,\overline{\phi}>| = |\int_X a(x)\phi(x)d\mu(x)| = |\int_X a(x)[\phi(x) - m_B(\phi)]d\mu(x)|$$

Pela desigualdade de Hölder temos

$$|<F_a,\overline{\phi}>| \leqq (\int_B |a(x)|^q d\mu(x))^{1/q} (\int_B |\phi(x) - m_B(\phi)|^{q'} d\mu(x))^{1/q'}$$

Então , da definição de $Lip(q',1/p - 1)$ e da condição (i) da definição de (p,q) átomo obtemos:

$$|<F_a,\overline{\phi}>| \leqq \mu(B)^{-1/p + 1} ||\phi||_{Lip(q',1/p - 1)} \mu(B)^{1/p - 1},$$

ou seja,

$$|<F_a,\overline{\phi}>| \leqq ||\phi||_{Lip(q',1/p - 1)},$$

o que demonstra também a limitação por um da norma do funcional F_a.

Seja agora $\{ a_i \}_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de (p,q) átomos e seja $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais. Então para toda $\overline{\phi}$ pertencente ao espaço *Lip*(q',1/p - 1) e m inteiro positivo temos :

$$| < \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, F_{a_i}, \overline{\phi} > | = | \sum_{i=1}^{m} \alpha_i < F_{a_i}, \overline{\phi} > |$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} | \alpha_i | \, | < F_{a_i}, \overline{\phi} > |.$$

Como $p \leq 1$, segue do que vimos anteriomente que:

$$| < \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, F_{a_i}, \overline{\phi} > | \leq ||\phi||_{Lip(q',1/p - 1)} (\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p)^{1/p}$$

e portanto se $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p < \infty$, temos que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \, F_{a_i}$ está bem definido e é um funcional linear limitado em *Lip*(q',1/p - 1) com norma limitada por $(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p)^{1/p}$.

Para simplificarmos escreveremos $< a, \overline{\phi} >$ ao invés de $< F_a, \overline{\phi} >$.

Definição 2. Sejam p,q e q' tais que, $1/q + 1/q' = 1$,

$1/2 < p \leq 1 < q \leq \infty$. Definimos como $H^{p,q}$, ao subespaço de $(Lip(q',1/p-1))^*$ formado por todos os funcionais lineares em $Lip(q',1/p-1)$, que podem ser escritos como $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$, onde $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de (p,q) átomos e $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de números reais tal que $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p < \infty$. Definimos em $H^{p,q}$ a "norma"

$$||h||_{H^{p,q}} = \inf \{ (\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p)^{1/p} \; : \; h = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i \}$$

Para $p \neq 1$, $||.||_{H^{p,q}}$ não é uma norma no sentido usual, mas define uma métrica. Com efeito,

$$d(h_1,h_2) = ||h_1 - h_2||_{H^{p,q}}$$

é uma métrica em $H^{p,q}$, com a qual $H^{p,q}$ é um espaço vetorial topológico.

Observação 1. Prova-se em [8] que para todo $p \leq 1$ fixo e q variando no intervalo $(1, \infty]$, os $H^{p,q}$ são iguais como conjuntos e as normas $||.||_{H^{p,q}}$ definidas neles são equivalentes.

3. *Espaços duais dos H^p*

Pode-se provar que um funcional linear F em $H^{p,q}$ é contínuo se, e somente se, existe uma constante c finita tal que

$$(3.1) \qquad |F(h)| = | < F , h >| \leq c.||h||_{H^{p,q}}$$

para todo h pertencente a $H^{p,q}$.

Definimos $||F||^*_{H^{p,q}}$ como o infimo das constantes c que verificam (3.1), para todo h pertencente a $H^{p,q}$.

Usaremos o seguinte teorema, cuja prova pode ser encontrada em [8].

Teorema 1. Sejam p e q tais que, $0 < p \leq 1 < q \leq \infty$. Então o espaço $(H^{p,q})^*$ de todos os funcionais lineares e contínuos sobre $H^{p,q}$ é equivalente ao espaço $Lip(q', 1/p - 1)$. Mais precisamente:

(i) Toda ϕ pertencente ao espaço $Lip(q', 1/p - 1)$ define um funcional linear em $H^{p,q}$ satisfazendo (3.1).

(ii) Para cada funcional linear F em $(H^{p,q})^*$ existe uma ϕ pertencente ao espaço $Lip(q', 1/p - 1)$ tal que, para toda f pertencente a $H^{p,q}$, $f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \, a_i$, temos

$$< F , f > = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \int_X a_i(x)\phi(x)d\mu(x) .$$

(iii) Para toda ϕ pertencente a $Lip(q', 1/p - 1)$ temos que:

$$||\phi||^*_{H^{p,q}} \leq ||\phi||_{Lip(q', 1/p - 1)} \leq 3.||\phi||^*_{H^{p,q}} .$$

Pela observação 1 os espaços $H^{p,q}$ são equivalentes para $p \leq 1$ fixo. Portanto, temos que os seus espaços duais $Lip(q', 1/p - 1)$ são equivalentes para $p \leq 1$ fixo e q' variando no intervalo $[1 , \infty)$. Isto nos permite definir para p e q, $p \leq 1 < q \leq \infty$, o espaço H^p como sendo qualquer dos espaços $H^{p,q}$ e o espaço $Lip(1/p - 1)$ como qualquer dos espaços $Lip(q', 1/p - 1)$.

CAPITULO II

OPERADORES INTEGRAIS SINGULARES "FRACAMENTE FORTES"

1. *Núcleo integral singular "fracamente forte"*

Seja X um espaço de tipo homogêneo normalizado com uma quase distância $d(x,y)$ e uma medida μ.

Definição 3. Um subconjunto D do espaço $X \times X$ é *limitado* se, para todo par (x,y) pertencente a D e x_o pertencente a X, existe uma constante M positiva e finita tal que $d(x,x_o) \leq M$ e $d(y,x_o) \leq M$.

Definição 4. Um subconjunto D de $X \times X$ é *separado da diagonal* se existe um número ν positivo talque para todo par (x,y) pertencente a D temos $d(x,y) > \nu$.

Definição 5. Seja $k(x,y)$ uma função mensurável definida em $X \times X$. Dizemos que $k(x,y)$ é um *núcleo integral singular "fracamente forte"* se existem constantes θ, γ, ε satisfazendo $0 < \theta < 1$, $\theta/2 < \gamma < 1/2$, $1-\theta \leq \varepsilon \leq 1$, e função $\varphi_\delta(x,y)$ limitada por um que se anula quando $d(x,y)<\delta/2$ e vale um se $d(x,y)>\delta$, tais que se definimos q como $1/q = 1/2 + \gamma$ então as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Para todo subconjunto D em $X \times X$ limitado e separado da diagonal e q' satisfazendo $1/q' = 1 - 1/q = 1/2 - \gamma$, temos

$$\iint_D |k(x,y)|^{q'} d\mu(x) d\mu(y) < \infty$$

(ii) Seja $k_\delta(x,y) = \varphi_\delta(x,y) k(x,y)$. Para toda função $f(y)$ com suporte limitado no espaço $L^q(X,\mu)$ e para todo $\delta > 0$, o operador K_δ definido por

$$K_\delta(f)(x) = \int_X k_\delta(x,y) f(y) d\mu(y)$$

satisfaz

$$||K_\delta(f)||_2 \leq c_1 . ||f||_q$$

onde c_1 é uma constante finita que independe de f e δ.

(iii) Para toda função $f(y)$ em $L^q(X,\mu)$ com suporte limitado,

$$\lim_{\delta \to 0} K_\delta(f) = K(f)$$

existe em $L^2(X,\mu)$.

(iv) Para toda função $f(y)$ com suporte limitado no espaço $L^2(X,\mu)$, o operador definido em (ii) satisfaz

$$||K_\delta(f)||_2 \leq c_2 . ||f||_2 \quad ,$$

onde c_2 é uma constante finita que não depende de f e δ.

(v) Para toda função $f(y)$ em $L^2(X,\mu)$ com suporte limitado,

$$\lim_{\delta \to 0} K_\delta f = Kf$$

existe em $L^2(X,\mu)$.

(vi) $k(x,y)$ se anula para $d(x,y) > 1$ e se $d(y,x_o) \leq 1$ então $k(x,y)$ satisfaz

$$| k(x,y) - k(x,x_o) | \leq c_3 . d(y,x_o)^{\varepsilon} d(x,x_o)^{-1 - \varepsilon/(1-\theta)}$$

desde que $d(x,x_o) > 2. \, d(y,x_o)^{1-\theta}$ onde, c_3 é uma constante finita.

(vii) Seja χ_R a função característica da bola de raio R e K^* o operador adjunto do operador K em $L^2(X,\mu)$. Então o limite de $K^*(\chi_R)$ para R tendendo ao infinito, existe fracamente em $L^{q'}$ sobre conjuntos limitados e é igual a uma constante finita, onde q' satisfaz $1/q' = 1/2 - \gamma$.

Observação 2. No texto que se segue c vai representar uma constante finita que não será necessariamente a mesma de uma desigualdade para outra, enquanto que A designará a constante da definição de quase distância dada no capítulo I. Dado um número r, indicaremos por r' o seu expoente conjugado.

Lema 1. Sejam ε, θ, q as constantes da definição 5. Se definimos $\rho = (\varepsilon + 1 - 1/q)/(\varepsilon/(1-\theta) + 1/2)$ então as seguintes desigualdades são satisfeitas:

(i) $\rho < 1-\theta$

(ii) $(2/q - 1)/(1-\rho) < (1 + 2\varepsilon/(1-\theta))$ e

(iii) existe p, $0 < p \leq 1$ tal que

$$1/p < (1/q - \rho/2)/(1-\rho).$$

Além disso, se p satisfaz (iii) temos

(iv) $1/p < 1 + \varepsilon/(1-\theta)$ e

(v) o intervalo aberto $(\,2/p - 1\,,\ (2/q - 1)/(1-\rho)\,)$ é não vazio.

Demonstração: Pela definição 5 temos que $\gamma > \theta/2$ e portanto $1/q = 1/2 + \gamma > 1/2 + \theta/2$. Somando $\varepsilon + 1/2$ a ambos os membros da desigualdade obtemos $1/q + \varepsilon + 1/2 > \varepsilon + 1 + \theta/2$, ou seja, $\varepsilon + 1 - 1/q > (1-\theta)(\varepsilon/(1-\theta) + 1/2)$, donde

$$(\varepsilon + 1 - 1/q)/(\varepsilon/(1-\theta) + 1/2) < 1-\theta$$

o que prova (i) do lema 1.

Vamos provar (ii). Como $\varepsilon > 0$ e $0 < \theta < 1$ temos que $\varepsilon/(1-\theta) - \varepsilon > 0$. Somando $1/q - 1/2$ a ambos os membros resulta $\varepsilon/(1-\theta) - \varepsilon + 1/q - 1/2 > 1/q - 1/2$. Levando em conta que

$$1-\rho = (\varepsilon/(1-\theta) - \varepsilon - 1/2 + 1/q)/(\varepsilon/(1-\theta) + 1/2),$$

da última desigualdade segue que $(1-\rho)(\varepsilon/(1-\theta) + 1/2> 1/q - 1/2$, ou seja, $(\varepsilon/(1-\theta) + 1/2) > (1/q - 1/2)/(1-\rho)$.

Para provarmos (iii) é suficiente mostrar que

$$(1/q - \rho/2)/(1-\rho) > 1.$$

Somando $1/2$ a ambos os membros da desigualdade obtemos

$$1 + \varepsilon/(1-\theta) > (1/q - 1/2)/(1-\rho) + 1/2 = (1/q - \rho/2)/(1-\rho) ,$$

como queríamos demonstrar.

Provemos (v). Por hipótese $1/p < (1/q - \rho/2)/(1-\rho)$, donde multiplicando por 2 e subtraindo 1 a ambos os membros obtemos $2/p - 1 < (2/q - \rho)/(1-\rho) - 1 = (2/q - 1)/(1-\rho)$, o que demonstra (v).

Teorema 2. Seja $k(x,y)$ um núcleo integral singular "fracamente forte". Sejam ρ o número definido no lema 1 e $0 < p \leq 1$ satisfazendo $1/p < (1/q - \rho/2)/(1-\rho)$. Sejam $a(x)$ um $(p,2)$ átomo e $B(x_o,\sigma)$ a bola de centro x_o pertencente a X e raio σ positivo que contém o suporte de $a(x)$ e satisfaz

$$(\mu(B)^{-1} \int_B |a(x)|^2 \, d\mu(x))^{1/2} \leq \mu(B)^{-1/p}$$

Então temos que,

(i) se $\sigma \leq 1$ e s é um número satisfazendo a desigualdade $2/p - 1 < s < (2/q - 1)/(1-\rho)$ (que existe pelo lema 1), a função $M(x) = Ka(x)$ satisfaz as seguintes condições:

$$(1.2) \qquad \int_X |M(x)|^2 \, d\mu(x) \leq c.\sigma^{(2/q - 2/p)}$$

$$(1.3) \qquad \int_X |M(x)|^2 d(x,x_o)^s \, d\mu(x) \leq c.\sigma^{(\rho s + 2/q - 2/p)}$$

$$(1.4) \qquad \int_X M(x) \, d\mu(x) = 0$$

onde c em (1.2) e (1.3) é uma constante finita que não depende de σ.

(ii) se $\sigma > 1$, a função $M(x) = Ka(x)$ satisfaz (1.4) e também as seguintes condições:

(1.5) $$\int_X |M(x)|^2 \, d\mu(x) \leq c.\sigma^{(1 - 2/p)}$$

(1.6) $$\int_X |M(x)|^2 d(x,x_o)^{(2/p - 1 + \nu)} d\mu(x) \leq c.\sigma^{\nu}$$

onde c é uma constante finita que não depende de σ, e ν é um número positivo.

Demonstração: Provemos (i). Observamos que se $a(x)$ é um $(p,2)$ átomo e q satisfaz $1 < q < 2$, então $a(x)$ é também um (p,q) átomo. Pelas condições (ii) e (iii) da definição 5 temos

$$\int_X |M(x)|^2 \, d\mu(x) \leq c.\left(\int_B |a(x)|^q \, d\mu(x)\right)^{2/q}$$

e da definição de (p,q) átomo segue que

$$\int_X |M(x)|^2 \, d\mu(x) \leq c.\ \mu(B)^{(2/q - 2/p)} \quad .$$

Agora, como X é um espaço homogêneo normalizado, concluimos que

$$\int_X |M(x)|^2 \, d\mu(x) \leq c.\sigma^{(2/q - 2/p)}$$

o que verifica (1.2).

Seja x_o pertencente a X e $B(x_o, 2A\sigma^{\rho})$ a bola de centro x_o e raio $2A\sigma^{\rho}$. Escrevemos:

$$\int_X |M(x)|^2 d(x,x_o)^s d\mu(x) = \int_{B(x_o, 2A\sigma^{\rho})} |M(x)|^2 d(x,x_o)^s d\mu(x) +$$

$$\int_{X\sim B(x_o, 2A\sigma^{\rho})} |M(x)|^2 d(x,x_o)^s d\mu(x) = I_1 + I_2$$

Como por hipótese $0 < p \leq 1$ e $2/p - 1 < s$, temos que $s > o$ e daí

$$I_1 \leq (2A\sigma^{\rho})^s \int_X |M(x)|^2 \, d\mu(x) \quad ,$$

donde pela condição (1.2) de $M(x)$ conclui-se que

$$(1.7) \qquad I_1 \leq c.\, \sigma^{\rho s + 2/q - 2/p} \quad .$$

Vamos mostrar a seguir que I_2 tem uma estimação análoga a I_2. Para isto sejam $B_n = B(x_o, 2A2^n\sigma^{\rho})$ as bolas de centro x_o e raio $2A2^n\sigma^{\rho}$ com n inteiro não negativo. Temos a seguinte igualdade

$$I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{B_{n+1} \sim B_n} |M(x)|^2 \, d(x,x_o)^s \, d\mu(x) \quad .$$

Agora, como $s > 0$ vem que

$$(1.8) \qquad I_2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} (2A2^{n+1}\sigma^{\rho})^s \int_{B_{n+1} \sim B_n} |M(x)|^2 \, d\mu(x) \quad .$$

Observemos que se x não pertence a B_n e y pertence a $B(x_o,\sigma)$ então

$$2A2^n\sigma^{\rho} \leq d(x,x_o) \leq A(d(x,y)+d(y,x_o)) < Ad(x,y) + A\sigma \quad ,$$

isto é, $d(x,y) > 2^{n+1}\sigma - \sigma$.

Portanto, pela condição (i) do lema 1 e a hipótese de que $\sigma \leq 1$, resulta que $d(x,y) > 0$ para todo inteiro n não negativo. Logo para x não pertencente a B_n, temos

$$M(x) = \lim_{\delta \to 0} \int_X k_{\delta}(x,y)a(y)d\mu(y) = \int_X k(x,y)a(y)d\mu(y)$$

ou ainda,

$$M(x) = \int_X (k(x,y) - k(x,x_o))a(y)d\mu(y)$$

para quase todo x, pois pela definição de $a(y)$ temos que

$$\int_X k(x,x_o)a(y)d\mu(y) = 0 \quad .$$

Também temos que se x não pertence a B_n e y pertence a $B(x_o,\sigma)$ então $d(x,x_o) > 2.d(y,x_o)^{1-\theta}$. Com efeito, como

$$d(x,x_o) \geq 2.A.2^n\sigma^\rho \geq 2.A.2^n d(y,x_o)^\rho$$

e $\rho < 1-\theta$ pela parte (i) do lema 1, segue que se verifica a desigualdade $d(x,x_o) > 2.A.2^n\, d(y,x_o)^{1-\theta}$ pois $d(y,x_o) \leq 1$. Portanto, $d(x,x_o) > 2.d(y,x_o)^{1-\theta}$ para todo inteiro n não negativo. Então pela condição (vi) da definição 5 temos que

$$|M(x)| \leq c. \int_{B(x_o,\sigma)} d(y,x_o)^\varepsilon\, d(x,x_o)^{-1-\varepsilon/(1-\theta)} |a(y)|d\mu(y) \quad .$$

Agora, como $d(y,x_o) \leq \sigma$ e $d(x,x_o)$ não depende de y, resulta

$$|M(x)| \leq c.\, \sigma^\varepsilon\, d(x,x_o)^{-1-\varepsilon/(1-\theta)} \int_{B(x_o,\sigma)} |a(y)|d\mu(y) \quad .$$

Portanto da definição de (p,2) átomo obtemos:

$$|M(x)| \leq c.\, \sigma^{\varepsilon+1-1/p}\, d(x,x_o)^{-1-\varepsilon/(1-\theta)}$$

ou seja,

$$|M(x)|^2 \leq c.\sigma^{2\varepsilon+2-2/p}\, d(x,x_o)^{-2-2\varepsilon/(1-\theta)}$$

donde levando em conta que $d(x,x_o) > 2A2^n\sigma^\rho$ resulta

$$\int_{B_{n+1}\sim B_n} |M(x)|^2 d\mu(x) \leq c.\, \sigma^{(2\varepsilon+2-2/p)}(2^n\sigma^\rho)^{-1-2\varepsilon/(1-\theta)} \quad .$$

Substituindo em (1.8) obtemos

$$I_2 \leq c.\, \sigma^{\rho s+2/q-2/p} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(s-1-2\varepsilon/(1-\theta))} \quad .$$

Pela parte (v) do lema 1 $s-1-2\varepsilon/(1-\theta) < 0$ e portanto a série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(s-1-2\varepsilon/(1-\theta))}$ é convergente, donde se conclui que

(1.9) $$I_2 \leqq c.\ \sigma^{\rho s + 2/q - 2/p}$$

onde c é uma constante finita que não depende de σ. De (1.7) e (1.9) temos que (1.3) se verifica

Para provarmos (1.4) observemos que pelas condições (1.2) e (1.3) a função $M(x)$ é absolutamente integrável. Com efeito, sejam $B_i = B(x_o, 2^i\sigma)$ as bolas de centro x_o e raio $2^i\sigma$, com i inteiro não negativo. Temos que,

$$\int_X |M(x)|d\mu(x) = \int_{B_o} |M(x)|d\mu(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_i \sim B_{i-1}} |M(x)|d\mu(x),$$

ou também,

$$\int_X |M(x)|d\mu(x) = \int_{B_o} |M(x)|d\mu(x) +$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_i \sim B_{i-1}} |M(x)|d(x,x_o)^{s/2} d(x,x_o)^{-s/2} d\mu(x) .$$

Aplicando a desigualdade de Schwarz a ambas as integrais obtemos

$$\int_X |M(x)|d\mu(x) \leqq \mu(B_o)^{1/2} \left(\int_{B_o} |M(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2} +$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{B_i \sim B_{i-1}} |M(x)|^2 d(x,x_o)^s d\mu(x)\right)^{1/2} \left(\int_{B_i \sim B_{i-1}} d(x,x_o)^{-s} d\mu(x)\right)^{1/2}.$$

Pelas condições (1.2) e (1.3) já provadas, resulta que

$$\int_X |M(x)|d\mu(x) \leqq c.\sigma^{(1/2 + 1/q - 1/p)} +$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} c.(\sigma^{\rho s/2 + 1/q - 1/p})(2^i)^{-s/2 + 1/2} =$$

$$c.\sigma^{1/q+1/2-1/p} + c.\sigma^{s/2(\rho-1)+1/q+1/2-1/p} \sum_{i=1}^{\infty} (2^i)^{-s/2 + 1/2},$$

ou seja,

$$\int_X |M(x)|d\mu(x) \leqq c. \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i(-s/2 + 1/2)} .$$

Pela parte (v) do lema 1 temos que $s > 2/p - 1 \geqq 1$, resultando daí que a série $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{i(-s/2 + 1/2)}$ é convergente, donde concluimos que $M(x)$ é absolutamente integrável.

Seja $\chi_R(x)$ a função característica sobre a bola $B(x_o,R)$. Como $M(x) = Ka(x)$ é absolutamente integrável, resulta que,

$$\int_X Ka(x)d\mu(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{B(x_o,R)} Ka(x)d\mu(x) =$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_X \chi_R(x)Ka(x)d\mu(x) = \lim_{R\to\infty} \int_X a(x)K^*(\chi_R)(x)d\mu(x) .$$

Levando em conta que o suporte de $a(y)$ é limitado, temos pela parte (vii) da definição 5 que,

$$\int_X Ka(x)d\mu(x) = c. \int_X a(x)d\mu(x) = 0 .$$

o que prova a condição (1.4) e conclui a demonstração da parte (i) do teorema.

Provemos (ii). Pelas condições (iv) e (v) da definição 5 temos que,

$$\int_X |M(x)|^2 d\mu(x) \leqq c. \int_B |a(y)|^2 d\mu(y) \leqq$$

$$c. \mu(B)^{1 - 2/p} \leqq c.\sigma^{1 - 2/p}$$

o que verifica (1.5).

Seja $B(x_o,2A\sigma)$ a bola de centro x_o e raio $2A\sigma$. Temos que

$$\int_X |M(x)|^2 \, d(x,x_o)^{2/p-1+\nu} \, d\mu(x) =$$

$$\int_{B(x_o,2A\sigma)} |M(x)|^2 \, d(x,x_o)^{2/p-1+\nu} \, d\mu(x) +$$

$$\int_{X\sim B(x_o,2A\sigma)} |M(x)|^2 \, d(x,x_o)^{2/p-1+\nu} \, d\mu(x) \; .$$

Como $2/p - 1 + \nu > 0$, resulta que

$$\int_{B(x_o,2A\sigma)} |M(x)|^2 \, d(x,x_o)^{2/p-1+\nu} \, d\mu(x) \leq$$

$$c.\,\sigma^{2/p-1+\nu} \int_{B(x_o,2A\sigma)} |M(x)|^2 \, d\mu(x) \quad ,$$

donde pela condição (1.5) obtemos

$$\int_{B(x_o,2A\sigma)} |M(x)|^2 \, d(x,x_o)^{2/p-1+\nu} \, d\mu(x) \leq c.\sigma^{\nu} \; .$$

Mostremos a seguir que

$$\int_{X\sim B(x_o,2A\sigma)} |M(x)|^2 \, d(x,x_o)^{2/p-1+\nu} \, d\mu(x) = 0 \; .$$

Observemos inicialmente que se x não pertence a $B(x_o,2A\sigma)$ e y pertence a $B(x_o,\sigma)$ então

$$2A\sigma \leq d(x,x_o) \leq A.(d(x,y) + d(y,x_o)) < A.d(x,y) + A.\sigma \quad ,$$

ou seja, $d(x,y) > \sigma > 0$. Portanto temos que

$$Ka(x) = \lim_{\delta\to 0} \int_X k_\delta(x,y)a(y)d\mu(y) = \int_X k(x,y)a(y)d\mu(y) \; .$$

Agora para x não pertencente a $B(x_o,2A\sigma)$ e y pertencente a $B(x_o,\sigma)$ mostremos que $k(x,y)$ se anula, seguindo daí que

$Ka(x) = 0$ e consequentemente,

$$\int_{X\sim B(x_o,2A\sigma)} |M(x)|^2 \, d(x,x_o)^{(2/p)-1+\nu} \, d\mu(x) = 0 \quad .$$

Vamos supor que $k(x,y)$ não se anula, isto é, que $d(x,y) \leq 1$. Então,

$$2A\sigma < d(x,x_o) \leq A(d(x,y) + d(y,x_o)) \leq A + Ad(y,x_o) \quad ,$$

ou seja,

$$d(y,x_o) > 2\sigma - 1.$$

Agora como $\sigma > 1$ segue que $d(y,x_o) > \sigma$ o que é uma contradição pois por hipótese y pertence à bola $B(x_o,\sigma)$. Portanto $d(x,y) > 1$ e daí $k(x,y) = 0$.

Então, substituindo (1.11) e (1.12) em (1.10) temos que

$$\int_X |M(x)|^2 \, d(x,x_o)^{(2/p)-1+\nu} \, d\mu(x) \leq c. \, \sigma^\nu$$

o que verifica (1.6).

Levando em conta de que convergência fraca $L^{q'}$, $q' > 2$, implica convergência fraca L^2, sobre conjuntos limitados, prova-se de modo análogo a parte (i) do teorema que

$$\int_X M(x) \, d\mu(x) = 0.$$

2. *Um teorema de decomposição*

Vamos mostrar neste parágrafo que uma função nas condições do teorema 2, pode ser decomposta como uma soma infinita de $(p,2)$ átomos, isto é, mostraremos que essa função é um elemento do espaço de Hardy atômico H^p. Para isso necessitamos do seguinte lema:

Lema 2. Seja ϕ uma função que pertence a $Lip(1/p - 1)$, para $1/2 < p \leq 1$, e seja $\tau_j = b^j\sigma$ onde $\sigma > 0$, $b > 1$ e j um inteiro não negativo. Seja m_j o valor médio da função ϕ na bola $B(x_o,\tau_j)$. Então as seguintes desigualdades são satisfeitas:

(i) $|m_j| \leq c.||\phi||_{Lip(1/p-1)} (b^j\sigma)^{1/p-1} + |m_o|$

para $p < 1$,

(ii) $|m_j| \leq c.||\phi||_{Lip(0)}.j + |m_o|$ para $p = 1$.

onde c é uma constante finita que independe de j, σ e ϕ.

Demonstração: Sejam B_1 e B_2 duas bolas tais que B_1 esteja contida em B_2. Então temos que

$$m_{B_1}(\phi) - m_{B_2}(\phi) = \mu(B_1) \int_{B_1} (\phi(x) - m_{B_2}(\phi))d\mu(x) .$$

Tomando em valor absoluto e aumentando o domínio de integração resulta,

$$(2.1)\quad |m_{B_1}(\phi)-m_{B_2}(\phi)| \leqq \mu(B_2)\mu(B_1)^{-1}||\phi||_{Lip(1/p-1)}\,\mu(B_2)^{1/p-1}$$

Aplicando (2.1) às bolas $B_1 = B(x_o,\tau_{i-1})$ e $B_2 = B(x_o,\tau_i)$ temos

$$(2.2)\quad |m_i - m_{i-1}| \leqq c.b.||\phi||_{Lip(1/p\,-1)}(b^i\sigma)^{1/p\,-\,1}$$

onde c é uma constante finita dependendo sòmente do espaço X.
Agora como,

$$(2.3)\qquad | m_j| \leqq \textstyle\sum_{i=1}^{j}|m_i - m_{i-1}| + |m_o| \qquad ,$$

de (2.2) vem que,

$$| m_j| \leqq c.b.||\phi||_{Lip(1/p\,-\,1)} \textstyle\sum_{i=1}^{j} (b^i\sigma)^{1/p\,-\,1} + |m_o| \;,$$

ou seja,

$$| m_j| \leqq c.||\phi||_{Lip(1/p-1)}(b^j\sigma)^{1/p-1} \textstyle\sum_{i=1}^{j} b^{-(i-1)(1/p-1)} + |m_o|$$

e portanto para $p < 1$ obtemos,

$$| m_j| \leqq c.||\phi||_{Lip(1/p\,-\,1)}(b^j\sigma)^{1/p\,-\,1} + |m_o| \qquad ,$$

enquanto que para $p = 1$ temos

$$| m_j| \leqq c.||\phi||_{Lip(0)}.j + |m_o| \qquad ,$$

o que demonstra o lema.

Teorema 3. Seja $0 < p \leq 1$ satisfazendo a desigualdade $1/p < (1/q - \rho/2)/(1 - \rho)$ e $M(x)$ uma função mensurável satisfazendo as condições (1.2), (1.3) e (1.4) da parte (i) do teorema 2. Então, para toda função ϕ pertencente a $Lip(1/p - 1)$, a função $M(x)\phi(x)$ é absolutamente integrável em X. Além disso o funcional linear

$$F_M(\overline{\phi}) = \int_X M(x)\phi(x)d\mu(x)$$

está bem definido e é limitado em $Lip(1/p - 1)$.

Demonstração: Sejam $B_n = B(x_o, b^n\sigma)$ bolas de centro x_o e raio $b^n\sigma$, com $b > 1$, $\sigma \leq 1$ e n inteiro não negativo. Convencionamos $B_{-1} = \emptyset$. Seja ϕ uma função pertencente a $Lip(1/p-1)$ satisfazendo $m_{B(x_o,\sigma)}(\phi) = 0$. Escrevemos,

$$\int_X |M(x)||\phi(x)|d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{B_n \sim B_{n-1}} |M(x)||\phi(x)|d\mu(x) \quad .$$

Subtraindo e somando $m_n = m_{B(x_o,b^n\sigma)}(\phi)$ a $\phi(x)$ na integral do segundo membro da igualdade e usando a desigualdade triangular resulta,

$$(2.4) \qquad \int_X |M(x)||\phi(x)|d\mu(x) \leq$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{B_n \sim B_{n-1}} |M(x)|(|\phi(x) - m_n| + |m_n|)d\mu(x) \; .$$

Das desigualdades de Minkowski e Schwarz obtemos,

$$\int_{B_n \sim B_{n-1}} |M(x)|(|\phi(x) - m_n| + |m_n|)d\mu(x) \leqq$$

(2.5)

$$(\int_{B_n \sim B_{n-1}} |M(x)|^2 d\mu(x))^{1/2}((\int_{B_n} |\phi(x)-m_n|^2 d\mu(x))^{1/2} + |m_n|\mu(B_n)^{1/2}) \quad .$$

Agora, lembrando que $m_o = 0$, pelo lema 2 temos que se $p < 1$ verifica-se,

$$|m_n| \leqq c.(b^n\sigma)^{1/p - 1} ||\phi||_{Lip(1/p - 1)}$$

e se $p = 1$,

$$|m_n| \leqq c.n.||\phi||_{Lip(0)} \quad .$$

Por outro lado, da definição de $||\phi||_{Lip(1/p - 1)}$ tem-se,

$$(\int_{B_n} |\phi(x)-m_n|^2 d\mu(x))^{1/2} \leqq ||\phi||_{Lip(1/p-1)} \mu(B_n)^{1/p - 1/2} \leqq$$

(2.6)

$$||\phi||_{Lip(1/p - 1)} (b^n\sigma)^{1/p - 1/2} \quad .$$

Levando em conta que $s > 0$, obtem-se para $n \geqq 1$,

$$\int_{B_n \sim B_{n-1}} |M(x)|^2 d\mu(x) \leqq (b^{n-1}\sigma)^{-s}(\int_X |M(x)|^2 d(x,x_o)^s d\mu(x)) \quad ,$$

donde pela condição (1.3) de $M(x)$ resulta,

$$(2.7) \qquad \left(\int_{B_n \sim B_{n-1}} |M(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2} \leq c b^{-ns/2} \sigma^{(1/q)-(1/p)-s/2(1-\rho)} .$$

Enquanto que para $n = 0$, pela condição (1.2) de $M(x)$ temos,

$$\left(\int_{B_o} |M(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2} \leq \left(\int_X |M(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2} \leq c.\sigma^{1/q - 1/p} .$$

Como $\rho < 1$, $s > 0$ e $\sigma \leq 1$, segue que

$$(2.8) \qquad \left(\int_{B_o} |M(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2} \leq c.\sigma^{\rho s/2 + 1/q - 1/p - s/2}$$

o que extende (2.7) para o caso $n = 0$.

Substituindo (2.5), (2.6), (2.7) e (2.8) em (2.4) concluimos que para $0 < p \leq 1$ satisfazendo $1/p < (1/q - \rho/2)/(1-\rho)$, verifica-se

$$\int_X |M(x)| \, |\phi(x)| d\mu(x) \leq$$

$$c. ||\phi||_{Lip(1/p - 1)} . \sigma^{1/q - s/2(1-\rho) - 1/2} . \sum_{n=0}^{\infty} b^{n(1/p - s/2 - 1/2)}$$

e para $p = 1$ resulta,

$$\int_X |M(x)| \, |\phi(x)| d\mu(x) \leq c ||\phi||_{Lip(0)} \sigma^{1/q - s/2(1-\rho) - 1/2} \sum_{n=0}^{\infty} n b^{-ns/2} .$$

Da hipótese de que $b > 1$ e $s > 2/p - 1 > 0$, temos que as sé ries acima são convergentes. Também, como $s < (2/q - 1)/(1-\rho)$, obtemos $1/q - s/2(1-\rho) - 1/2 > 0$, donde

$$\sigma^{(1/q - s/2(1-\rho) - 1/2)} \leq 1$$

pois $\sigma \leq 1$.

Então para p satisfazendo $0 < p \leq 1$ e a desigualdade $1/p < (1/q - \rho/2)/(1-\rho)$ temos que para toda função ϕ pertencente à $\mathrm{Lip}(1/p - 1)$ com valor médio nulo sobre a bola $B(x_o,\sigma)$

$$(2.9) \qquad \int_X |M(x)||\phi(x)|\,d\mu(x) \leq c.||\phi||_{\mathrm{Lip}(1/p - 1)} \; ,$$

onde c é uma constante finita que não depende de σ.

Seja ψ pertencente ao espaço $\mathrm{Lip}(1/p - 1)$. Como

$$m_{B(x_o,\sigma)}((\psi - m_{B(x_o,\sigma)}(\psi)) = 0 \quad ,$$

pelo que foi provado anteriormente $M(x)(\psi(x) - m_{B(x_o,\sigma)}(\psi))$ é absolutamente integrável. Portanto levando em conta que $M(x)$ é absolutamente integrável, de

$$M(x)\psi(x) = M(x)(\psi(x) - m_{B(x_o,\sigma)}(\psi)) + M(x)m_{B(x_o,\sigma)}(\psi)$$

segue que $M(x)\psi(x)$ é absolutamente integrável. Além disso, pela condição (1.4) resulta que

$$\int_X M(x)\psi(x)d\mu(x) = \int_X M(x)(\psi(x) - m_{B(x_o,\sigma)}(\psi))d\mu(x) \quad .$$

Segue de (2.9) que,

$$| \int_X M(x)\psi(x)d\mu(x) | \leq \int_X |M(x)||\psi(x) - m_{B(x_o,\sigma)}(\psi)|d\mu(x) \leq$$

$$c.||\psi - m_{B(x_o,\sigma)}(\psi)||_{Lip(1/p - 1)} = c.||\psi||_{Lip(1/p - 1)} \quad ,$$

o que permite afirmar que $F_M(\overline{\psi})$, definido como no enunciado do teorema, está bem definido e é limitado em *Lip* (1/p - 1), conforme queríamos demonstrar.

Observação: Este resultado para uma função mensurável M(x) satisfazendo (1.4), (1.5) e (1.6) com $\sigma > 0$, para $p \leq 1$ foi provado em [9].

Do teorema 3 e da observação acima decorre que F_M pertence ao espaço dual de *Lip*(1/p - 1). Provaremos a seguir que F_M também pertence ao espaço de Hardy atômico H^p e que além disso, existe constante C finita, não dependendo de M(x) tal que $|| F_M||_{H^p} \leq C$.

Teorema 4 (teorema de decomposição). Seja M(x) uma função satisfazendo as condições do teorema 2. Então temos que

(i) Existe uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de (p,2) átomos e uma sequência $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reais satisfazendo $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^p \leqq C$, tal que $M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n(x)$, onde C é uma constante finita que independe de M(x).

(ii) Para toda função $\overline{\phi}$ pertencente ao espaço *Lip*(1/p - 1), o funcional F_M, definido no teorema 2 satisfaz,

$$F_M(\overline{\phi}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < a_n,\overline{\phi}>.$$

Demonstração: Provaremos o teorema no caso em que M(x) satisfaz (1.2), (1.3) e (1.4) com $\sigma \leqq 1$. O caso em que M(x) satisfaz (1.4), (1.5) e (1.6) com $\sigma > 1$ foi provado em [9].

Sejam b_1, b_2 as constantes de (1.1) capítulo I e seja $b > b_1/b_2$. Sejam $B_n = B(x_o, b^n\sigma)$ as bolas de centro x_o e raio $b^n\sigma$, n inteiro não negativo. Convencionamos $B_{-1} = \emptyset$. Indiquemos por D_n, $n \geqq 0$, o conjunto diferença $B_n \sim B_{n-1}$. Seja

$$M_n = \mu(D_n)^{-1} \int_{D_n} M(x)d\mu(x)$$

e χ_{D_n} a função característica do conjunto diferença D_n. Então temos que,

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (M(x) - M_n)\chi_{D_n}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} M_n\chi_{D_n}(x). \tag{2.10}$$

Observemos que, escrevendo

$$\alpha_n(x) = (M(x) - M_n)\chi_{D_n}(x)$$

então temos $\int_X \alpha_n(x)d\mu(x) = 0$ e para cada n os suportes das α_n contidos nas bolas $B(x_o,b^n\sigma)$. Seja $\gamma_n = ||\alpha_n||_2 \mu(B_n)^{1/p-1/2}$. Então as funções $a_n^1(x)$ definidas por

$$\alpha_n(x) = \gamma_n \, a_n^1(x)$$

são (p,2) átomos.

Provemos que $\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^p \leq A_1$, onde A_1 é uma constante finita que independe de $M(x)$. Pela desigualdade de Minkowski temos que

$$||\alpha_n||_2 \leq \left(\int_{D_n} |M(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2} + |M_n|\mu(D_n)^{1/2} .$$

Portanto para $n > 0$ resulta

$$||\alpha_n||_2 \leq 2.\left(\int_{D_n} |M(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2}$$

e para $n = 0$

$$||\alpha_o||_2 \leq 2.\left(\int_{B_o} |M(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2} .$$

Estimemos $\int_{D_n} |M(x)|^2 d\mu(x)$. Escrevemos

$$\int_{D_n} |M(x)|^2 d\mu(x) = \int_{D_n} |M(x)|^2 d(x,x_o)^s d(x,x_o)^{-s} d\mu(x) ,$$

donde como $s > 0$ vem que,

$$\int_{D_n} |M(x)|^2 d\mu(x) \leq c.(b^n\sigma)^{-s} \int_{D_n} |M(x)|^2 d(x,x_o)^s d\mu(x) .$$

Portanto pela condição (1.3) da função $M(x)$ resulta

$$\int_{D_n} |M(x)|^2 d\mu(x) \leq c.(b^n\sigma)^{-s}.\sigma^{\rho s + 2/q - 2/p} ,$$

donde se conclui que para $n > 0$

$$||\alpha_n||_2 \leq c.b^{-ns/2}.\sigma^{1/q -1/p -s/2(1-\rho)}$$

e

$$||\alpha_o||_2 \leq c.\sigma^{1/q - 1/p} \quad .$$

Então temos que

$$|\gamma_n| \leq c.b^{n(1/p -1/2 -s/2)}.\sigma^{1/q -1/2 -s/2(1-\rho)}$$

e

$$|\gamma_o| \leq c.\sigma^{1/q - 1/2} \quad ,$$

ou seja,

$$|\gamma_n|^p \leq c.b^{np(1/p -1/2 -s/2)}.\sigma^{p(1/q -1/2 -s/2(1-\rho))}$$

e

$$|\gamma_o|^p \leq c.b^{p(1/q - 1/2)} \quad .$$

Agora, pelo lema 1 vem que $1/p-1/2-s/2 <0$ e $1/q-1/2-s/2(1-\rho)> 0$ resultanto como consequência disto que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b^{np(1/p -1/2 -s/2)}$$

é convergente e $\sigma^{p(1/q -1/2 -s/2(1-\rho))} \leq 1$, pois $\sigma \leq 1$, donde concluimos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_n|^p \leq A_1 \quad ,$$

onde A_1 é uma constante finita que não depende de $M(x)$. Portanto resulta que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n\, a_n^1(x)$$

com $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_n|^p \leq A_1$.

Provemos a seguir que $\sum_{n=0}^{\infty} M_n\, \chi_{D_n}(x)$ se escreve como

$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\gamma}_n \; a_n^2(x)$, onde os $a_n^2(x)$ são (p,2) átomos e os $\tilde{\gamma}_n$ são tais que $\sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{\gamma}_n|^p \leqq A_2$, sendo A_2 uma constante finita que independe de $M(x)$.

Seja $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ a sequência definida por

$$t_n = \int_{X \sim B_{n-1}} M(x)\,d\mu(x) \tag{2.11}$$

para $n \geqq 0$.

Observemos que pela condição (1.4) verifica-se

$$t_o = \int_X M(x)\,d\mu(x) = 0 \quad .$$

Também, da definição dos t_n, resulta

$$t_n - t_{n+1} = \int_{D_n} M(x)\,d\mu(x) = \mu(D_n)M_n \quad . \tag{2.12}$$

Portanto temos que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n \chi_{D_n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(D_n)^{-1}(t_n - t_{n+1})\chi_{D_n}(x) \quad .$$

Como $t_o = 0$ obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n \chi_{D_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n(\mu(D_n)^{-1}\chi_{D_n}(x) - \mu(D_{n-1})^{-1}\chi_{D_{n-1}}(x)) .$$

Seja $\beta_n(x)$ a função definida por

$$(2.13) \qquad \beta_n(x) = t_n(\mu(D_n)^{-1}\chi_{D_n}(x) - \mu(D_{n-1})^{-1}\chi_{D_{n-1}}(x)) \quad .$$

Então $\int_X \beta_n(x)d\mu(x) = 0$ e além disso os suportes das β_n estão contidos nas bolas $B(x_o,b^n\sigma)$ para cada n.

Seja $\tilde{\gamma}_n = ||\beta_n||_2\ \mu(B_n)^{1/p - 1/2}$. Então as funções $a_n^2(x)$ definidas por

$$\beta_n(x) = \tilde{\gamma}_n\ a_n^2(x)$$

são (p,2) átomos.

Provemos que $\sum_{n=o}^{\infty} |\tilde{\gamma}_n|^p \leq A_2$, onde A_2 é uma constante finita que não depende de M(x).

Da desigualdade de Minkowski temos que

$$||\beta_n||_2 \leq |t_n| \ ((\int_{D_n} |\mu(D_n)|^{-2}d\mu(x))^{1/2} + (\int_{D_{n-1}} |\mu_{(D_{n-1})}|^2 d\mu(x))^{1/2})$$

do que resulta,

$$||\beta_n||_2 \leq |t_n|\mu(D_n)^{-1/2} + |t_n|\mu(D_{n-1})^{-1/2} \quad .$$

Agora, da relação (1.1) do capítulo I, e levando em conta que $b > b_1/b_2$ obtemos

$$\mu(D_n) = \mu(B_n) - \mu(B_{n-1}) \geqq b_1.b^n.\sigma - b_2.b^{n-1}.\sigma =$$

$$(b_1.b - b_2)b^{n-1}.\sigma = b^{-1}(b_1.b - b_2)b^n.\sigma \geqq$$

$$b^{-1}(b_1.b - b_2)b_2^{-1}.\mu(B_n) = c.\mu(B_n) \qquad ,$$

onde c é uma constante positiva finita. Com um raciocínio análogo ao anterior verifica-se também que,

$$\mu(D_{n-1}) \geqq c.\mu(B_n).$$

Portanto,

$$||\beta_n||_2 \leqq c.|t_n|.\mu(B_n)^{-1/2} \qquad .$$

De (2.11) temos,

$$|t_n| \leqq \int_{X\sim B_{n-1}} |M(x)|d\mu(x) =$$

$$\int_{X\sim B_{n-1}} |M(x)|d(x,x_o)^{s/2}d(x,x_o)^{-s/2}d\mu(x)$$

Da desigualdade de Schwarz e levando em conta que $s > 1$, resulta

(2.14) $$|t_n| \leqq (\int_X |M(x)|^2 d(x,x_o)^s d\mu(x))^{1/2}(b^{n-1}\sigma)^{-s/2} \qquad .$$

Da condição (1.3) de $M(x)$ temos que,

$$|t_n| \leqq c.b^{n(-s/2 + 1/2)}.\sigma^{1/q - 1/p + 1/2 - s/2(1-\rho)}$$

donde,

$$||\beta_n||_2 \leqq c.b^{-ns/2}.\sigma^{1/q - 1/p - s/2(1-\rho)} .$$

Portanto,

$$|\tilde{\gamma}_n|^p \leqq c.b^{np(1/p -1/2 -s/2)}.\sigma^{p(1/q -1/2 -s/2(1-\rho))} .$$

Agora como pelo lema 1, $1/p - 1/2 - s/2 < 0$ e também $1/q - 1/2 - s/2(1-\rho) > 0$ temos que $\sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{\gamma}_n|^p \leqq A_2$, onde A_2 é uma constante finita que não depende de $M(x)$.

Então de (2.10) segue que

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n(x),$$

onde as funções $a_n(x)$ são $(p,2)$ átomos e os λ_n são tais que $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^p \leqq C$, sendo C uma constante que independe da função $M(x)$, o que demonstra o teorema na sua parte (i).

Provemos (ii). Observemos inicialmente que para toda $\bar{\phi}$ pertencente ao espaço $Lip(1/p - 1)$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n F_{a_n}(\bar{\phi})$ é finita. Com efeito, do capítulo I temos que o funcional F_{a_n} é limitado em norma por um e, como $p \leqq 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| \leq (\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^p)^{1/p} \leq C^{1/p} ,$$

donde a série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n F_{a_n}(\overline{\phi})$ é absolutamente convergente.

De (2.10) e (2.11) da parte (i) do teorema temos que,

$$\sum_{n=0}^{r} \alpha_n(x) + \sum_{n=0}^{r} \beta_n(x) = M(x)\chi_{B_r}(x) + t_{r+1}\cdot\mu(D_r)^{-1}\chi_{D_r}(x) .$$

Multiplicando por $\phi(x)$ e integrando em X obtemos,

$$\sum_{n=0}^{r} \lambda_n \int_X a_n(x)\phi(x)d\mu(x) =$$

$$\int_{B_r} M(x)\phi(x)d\mu(x) + (t_{r+1}\cdot\mu(D_r)^{-1}\int_{D_r} \phi(x)d\mu(x)).$$

Como pelo teorema 3 $M(x)\phi(x)$ é absolutamente integrável, tomando o limite para r tendendo ao infinito resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n F_{a_n}(\overline{\phi}) = \int_X M(x)\phi(x)d\mu(x) + \lim_{r\to\infty} (t_{r+1}\mu(D_r)^{-1}\int_{D_r}\phi(x)d\mu(x)) .$$

Logo, para provar a parte (ii) do teorema devemos mostrar que

$$\lim_{r\to\infty} (t_{r+1}\cdot\mu(D_r)^{-1} \int_{D_r}\phi(x)d\mu(x)) = 0 ,$$

e é o que faremos a seguir. Temos que,

$$|t_{r+1}\mu(D_r)^{-1}\int_{D_r}\phi(x)d\mu(x)| \leqq |t_{r+1}||\mu(D_r)^{-1}\int_{D_r}\phi(x)d\mu(x) ,$$

ou também, subtraindo e somando $m_r(\phi)$ no segundo membro e levando em conta que $\mu(D_r) \geqq c.\mu(B_r)$ resulta,

$$|t_{r+1}.\mu(D_r)^{-1}\int_{D_r}\phi(x)d\mu(x)| \leqq$$

$$c.|t_{r+1}|(\mu(B_r)^{-1}\int_{B_r}(|\phi(x) - m_r(\phi)|d\mu(x) + |m_r(\phi)|) .$$

Portanto da desigualdade de Schwarz temos

$$|t_{r+1}.\mu(D_r)^{-1}\int_{D_r}\phi(x)d\mu(x)| \leqq$$

$$c.|t_{r+1}|((\mu(B_r)^{-1}\int_{B_r}|\phi(x) - m_r(\phi)|^2 d\mu(x))^{1/2} + |m_r(\phi)|) .$$

Como por hipótese ϕ pertence à classe $Lip(1/p - 1)$ obtemos,

$$|t_{r+1}.\mu(D_r)^{-1}\int_{D_r}\phi(x)d\mu(x)| \leqq$$

$$c.|t_{r+1}|(||\phi||_{Lip(1/p - 1)}(b^r\sigma)^{1/p - 1} + |m_r(\phi)|).$$

Suponhamos que ϕ é tal que $m_o(\phi) = 0$. Então temos pelo lema 2 que para $p < 1$

$$|t_{r+1}\mu(D_r)^{-1}\int_{D_r}\phi(x)\,d\mu(x)| \leq c.|t_{r+1}|\,||\phi||_{Lip(1/p\,-1)}\,(b^r\sigma)^{1/p-1} ,$$

enquanto que para $p = 1$,

$$|t_{r+1}\mu(D_r)^{-1}\int_{D_r}\phi(x)\,d\mu(x)| \leq c.r.|t_{r+1}|\,||\phi||_{Lip(0)} .$$

De (2.14) temos que,

$$|t_{r+1}| \leq c.\ b^{(r+1)(-s/2\ +1/2)}.\sigma^{1/q\ -1/p\ +1/2\ -s/2(1-\rho)} .$$

Substituindo nas expressões acima resulta que

$$|t_{r+1}\mu(D_r)^{-1}\int_{D_r}\phi(x)\,d\mu(x)| \leq$$

$$c.||\phi||_{Lip(1/p\,-1)}.b^{r(1/p\ -s/2\ -1/2)}.\sigma^{1/q\ -1/2-s/2(1-\rho)}$$

para $p < 1$ e satisfazendo $1/p < (1/q - \rho/2)/(1-\rho)$, enquanto que para $p = 1$,

$$|t_{r+1}\mu(D_r)^{-1}\int_{D_r}\phi(x)\,d\mu(x)| \leq$$

$$c.||\phi||_{Lip(0)}.r.b^{r(-s/2\ +\ 1/2)} .$$

Agora como pelo lema 1, $1/q\ -1/2\ -s/2(1-\rho) > 0$, $s > 1$ e

$1/p - 1/2 - s/2 < 0$ temos que,

$$\lim_{r\to\infty} (t_{r+1} \cdot \mu(D_r)^{-1} \int_{D_r} \phi(x)\,d\mu(x)) = 0 ,$$

o que demonstra o teorema.

Em consequência dos teoremas 3 e 4 e da observação que se segue ao teorema 2 temos,

Teorema 5. Seja $a(x)$ um $(p,2)$ átomo para $0 < p \leq 1$ e satisfazendo $1/p < (1/q - \rho/2)/(1-\rho)$ e, $k(x,y)$ um núcleo integral singular "fracamente forte". Então,

$$F_{Ka}(\overline{\Phi}) = \int_X Ka(x)\,\phi(x)\,d\mu(x)$$

define um funcional linear limitado em *Lip*$(1/p - 1)$ que pertence ao espaço de Hardy atômico H^p e tal que $||F_{Ka}||_{H^p} \leq C$.

3. O operador $K^{\#}$. *Limitação sobre H^p dos operadores integrais singulares "fracamente fortes".*

Nos parágrafos 1 e 2 provamos que se $a(x)$ é um $(p,2)$ átomo então $Ka(x)$ é um elemento do espaço $H^p(X)$. Vamos mostrar neste parágrafo que se $f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i$, onde os a_i são $(p,2)$ átomos e $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p < \infty$, então pode-se definir Kf como a série $Kf = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i Ka_i$, não dependendo Kf da representação de f como uma série de múltiplos de $(p,2)$ átomos. Além disso provaremos que o operador K é limitado em H^p.

Para obtermos tais resultados necessitamos estudar o efeito de aplicar os operadores duais de K aos espaços das classes de funções lipschitzianas *Lip*$(1/p - 1)$, que como foi visto no capítulo I são os espaços duais dos espaços H^p. Para isso consideremos a seguinte definição:

Definição 6. Seja $k(x,y)$ um núcleo integral singular "fracamente forte" e ϕ uma função pertencente ao espaço de funções lipschitzianas $Lip(1/p - 1)$, onde $0 < p \leq 1$ satisfaz a desigualdade $1/p < (1/q - \rho/2)/(1-\rho)$. Seja $B = B(x_o,\sigma)$ a bola de centro x_o e raio σ, $\sigma \geq 1$. Definimos para y em B a função $K_B^{\#}(\phi)(y)$ como

$$K_B^{\#}(\phi)(y) = \lim_{\delta\to 0} \int_{B(x_o,2A\sigma)} k_\delta(x,y)\phi(x)d\mu(x)$$

onde o limite é o limite fraco $L^{q'}$ em B.

Observemos que existe $K_B^{\#}(\phi)(y)$. Com efeito, seja $g(y)$ uma função pertencente a $L^q(B,\mu)$. Como o suporte de $g(y)$ é limitado, pela condição (i) da definição 5 podemos aplicar Fubini e obtemos

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{B(x_o,\sigma)}\left(\int_{B(x_o,2A\sigma)} k_\delta(x,y)\phi(x)d\mu(x)\right)g(y)d\mu(y) =$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{B(x_o,2A\sigma)}\left(\int_X k_\delta(x,y)g(y)d\mu(y)\right)\phi(x)d\mu(x) .$$

Pela condição (ii) da definição 5 resulta que o segundo membro da igualdade acima vem a ser

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{B(x_o,2A\sigma)} K_\delta g(x)\phi(x)d\mu(x) .$$

Como ϕ pertence à $L^2(B(x_o,2A\sigma),\mu)$, pela condição (v) de definição 5 temos que

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{B(x_o,\sigma)}\left(\int_{B(x_o,2A\sigma)} k_\delta(x,y)\phi(x)d\mu(x)\right)g(y)d\mu(y)$$

existe e vale

$$\int_{B(x_o,2A\sigma)} Kg(x)d\mu(x) .$$

A seguir vamos provar um lema que nos permite estender a definição de $K_B^{\#}$ ao espaço todo.

Lema 3. Sejam $B_1 = B(\xi_1,\tau_1)$ e $B_2 = B(\xi_2,\tau_2)$ as bolas de centros ξ_1 e ξ_2 e raios τ_1, τ_2 satisfazendo $\tau_2 > \tau_1 > 1$ Suponhamos que a bola B_1 está contida na bola B_2. Então para quase todo y pertencente à bola B_1 e para toda função ϕ pertencente a $Lip(1/p - 1)$ temos que

$$K_{B_2}^{\#}(\phi)(y) = K_{B_1}^{\#}(\phi)(y).$$

Demonstração: Temos,

$$K_{B_2}^{\#}(\phi)(y) - K_{B_1}^{\#}(\phi)(y) = \lim_{\delta\to 0}\left(\int_{B(\xi_2,2A\tau_2)} k_\delta(x,y)\phi(x)d\mu(x) - \int_{B(\xi_1,2A\tau_1)} k_\delta(x,y)\phi(x)d\mu(x)\right)$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\int_{B(\xi_2,2A\tau_2)\sim B(\xi_1,2A\tau_1)} k_\delta(x,y)\phi(x)d\mu(x) .$$

Observemos que para todo y em B_1 e x em $B(\xi_2,2A\tau_2)\sim B(\xi_1,2A\tau_1)$ tem-se

$$2A\tau_1 < d(x,\xi_1) \leq A.(d(x,y) + d(y,\xi_1) < A.d(x,y) + A.\tau_1 ,$$

ou seja, $d(x,y) > \tau_1 > 1$. Portanto resulta que $k(x,y) = 0$, donde concluimos que

$$K_{B_2}^{\#}(\phi)(y) = K_{B_1}^{\#}(\phi)(y)$$

o que demonstra o lema.

Definimos, $K^{\#}(\phi) = K_B^{\#}(\phi)$ quase sempre em B.

Observemos que $K^{\#}(\phi)$ está bem definida. De fato, sejam B_1 e B_2 duas bolas com intersecção não vazia. Se y pertence à intersecção $B_1 \cap B_2$ então para toda bola B contendo B_1 e B_2, temos pelo lema 3 que

$$K_B^{\#}(\phi)(y) = K_{B_1}^{\#}(\phi)(y) \quad \text{para } y \text{ em } B_1 \text{ e},$$

$$K_B^{\#}(\phi)(y) = K_{B_2}^{\#}(\phi)(y) \quad \text{para } y \text{ em } B_2,$$

ou seja,

$$K_{B_1}^{\#}(\phi)(y) = K_{B_2}^{\#}(\phi)(y) \quad \text{para } y \text{ em } B_1 \cap B_2.$$

Lema 4. Seja ϕ uma função pertencente a $\mathrm{Lip}(1/p - 1)$ com $0 < p \leqq 1$ satisfazendo $1/p < (1/q - \rho/2)/(1-\rho)$. Seja $k(x,y)$ um núcleo integral singular "fracamente forte". Então, se y pertence à bola $B(x_o, \tau)$ com $0 < \tau \leqq 1$ temos que

$$\int_{X \sim B(x_o, 2A\tau^\rho)} |k(x,y) - k(x,x_o)|\,|\phi(x)|\,d\mu(x) \leqq$$

$$c.d(y,x_o)^\varepsilon \left(||\phi||_{\mathrm{Lip}(1/p\,-\,1)} (2A\tau^\rho)^{1/p\,-1-\varepsilon/(1-\theta)} \right.$$

$$\left. + \,|m_{B(x_o, 2A\tau^\rho)}(\phi)|\,(2A\tau^\rho)^{-\varepsilon/(1-\theta)} \right)$$

onde c é uma constante que independe de ϕ, τ, x_o e y.

Demonstração: Seja y pertencente à bola $B(x_o,\tau)$ e x não pertencente à bola $B(x_o,2A\tau^{\rho})$. Como $\tau \leq 1$ e $\rho < 1-\theta$ pelo lema 1, temos que as seguintes desigualdades se verificam:

$$d(x,x_o) > 2A\tau^{\rho} > 2Ad(y,x_o)^{\rho} > 2.d(y,x_o)^{1-\theta} \quad .$$

Portanto pela condição (vi) da definição 5 tem-se

$$|k(x,y) - k(x,x_o)| \leq c.d(y,x_o)^{\varepsilon}\, d(x,x_o)^{-1-\varepsilon/(1-\theta)}$$

donde,

$$(3.1) \qquad \int_{X\sim B(x_o,2A\tau^{\rho})} |k(x,y) - k(x,x_o)|\,|\phi(x)|d\mu(x) \leq$$

$$c.d(y,x_o)^{\varepsilon} \int_{X\sim B(x_o,2A\tau^{\rho})} d(x,x_o)^{-1-\varepsilon/(1-\theta)}|\phi(x)|d\mu(x).$$

Sejam $B_n = B(x_o,2Ab^n\tau^{\rho})$ as bolas de centro x_o e raio $2Ab^n\tau^{\rho}$ com $b > 1$. Então temos que

$$\int_{X\sim B(x_o,2A\tau^{\rho})} d(x,x_o)^{-1-\varepsilon/(1-\theta)}|\phi(x)|d\mu(x) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{B_{n+1}\sim B_n} d(x,x_o)^{-1-\varepsilon/(1-\theta)}|\phi(x)|d\mu(x) \quad ,$$

donde,

$$\int_{X\sim B(x_o, 2A\tau^{\rho})} d(x,x_o)^{-1 - \varepsilon/(1-\theta)} |\phi(x)| d\mu(x) \leq$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2Ab^n \tau^{\rho})^{-1 - \varepsilon/(1-\theta)} \int_{B_{n+1}} |\phi(x)| d\mu(x) ,$$

ou também, indicando por $m_n(\phi)$ o valor médio da função ϕ na bola B_n ,

$$\int_{X\sim B(x_o, 2A\tau^{\rho})} d(x,x_o)^{-1 - \varepsilon/(1-\theta)} |\phi(x)| d\mu(x) \leq$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2Ab^n \tau^{\rho})^{-1 - \varepsilon/(1-\theta)} \int_{B_{n+1}} |\phi(x) - m_{n+1}(\phi) + m_{n+1}(\phi)| d\mu(x) .$$

Aplicando as desigualdades de Minkowski e de Schwarz e levando em conta a definição de $||\phi||_{Lip(1/p - 1)}$ resulta que o segundo membro da desigualdade é majorado por

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2Ab^n \tau^{\rho})^{-1 - \varepsilon/(1-\theta)} (||\phi||_{Lip(1/p - 1)} (2Ab^{n+1} \tau^{\rho})^{1/p} +$$

(3.2)

$$|m_{n+1}(\phi)| (2Ab^{n+1} \tau^{\rho})) .$$

Agora pelo lema 2 temos que para $p < 1$

$$|m_{n+1}(\phi)| \leq c.(||\phi||_{Lip(1/p - 1)} (2Ab^{n+1} \tau^{\rho})^{1/p - 1} + |m_o(\phi)|) ,$$

e para $p = 1$

$$|m_{n+1}(\phi)| \leq c.(||\phi||_{Lip(0)}\ (n+1) + |m_o(\phi)|) .$$

Substituindo essas expressões em (3.2) e posteriormente (3.2) em (3.1) resulta que para $p < 1$

$$\int_{X\sim B(x_o, 2A\tau^\rho)} |k(x,y) - k(x,x_o)||\phi(x)|d\mu(x) \leq$$

$$cd(y,x_o)^\varepsilon (||\phi||_{Lip(1/p-1)} (2A\tau^\rho)^{1/p-1-\varepsilon/(1-\theta)} \sum_{n=0}^\infty b^{n(1/p-1-\varepsilon/(1-\theta))} +$$

$$|m_o(\phi)| \sum_{n=0}^\infty (2Ab^n\tau^\rho)^{-\varepsilon/(1-\theta)}) ,$$

enquanto que para $p = 1$ temos

$$\int_{X\sim B(x_o, 2A\tau^\rho)} |k(x,y) - k(x,x_o)||\phi(x)|d\mu(x) \leq$$

$$cd(y,x_o)^\varepsilon (||\phi||_{Lip(0)} + |m_o(\phi)|) \sum_{n=0}^\infty (n+1)(2Ab^{n+1}\tau^\rho)^{-\varepsilon/(1-\theta)} .$$

Como por hipótese p satisfaz $1/p < (1/q - \rho/2)/(1-\rho)$ resulta pelo lema 1 que $1/p - 1 - \varepsilon/(1-\theta) < 0$, donde a série $\sum_{n=0}^\infty b^{n(1/p - 1 - \varepsilon/(1-\theta)}$ é convergente pois $b > 1$. Também como $\varepsilon/(1-\theta) > 0$, as séries $\sum_{n=0}^\infty (n+1)b^{-(n+1)\varepsilon/(1-\theta)}$ e

$\sum_{n=0}^{\infty} b^{-n\varepsilon/(1-\theta)}$ são convergentes.

Então concluimos que,

$$\int_{X\sim B(x_o,2A\tau^\rho)} |k(x,y) - k(x,x_o)||\phi(x)|d\mu(x) \leq$$

$$c.d(y,x_o)^\varepsilon \left(||\phi||_{Lip(1/p - 1)} (2A\tau^\rho)^{1/p - 1 - \varepsilon/(1-\theta)} + \right.$$

$$\left. |m_{B(x_o,2A\tau)}(\phi)|(2A\tau^\rho)^{-\varepsilon/(1-\theta)} \right) ,$$

o que demonstra o lema.

Lema 5. Seja ϕ uma função pertencente a $Lip(1/p - 1)$ e $B = B(x_o,\tau)$, $0 < \tau \leq 1$. Então para quase todo y em B temos

$$(3.3) \qquad K^{\#}(\phi)(y) = \lim_{\delta\to 0} \int_{B(x_o,2A\tau^\rho)} k_\delta(x,y)\phi(x)d\mu(x) +$$

$$\int_{X\sim B(x_o,2A\tau^\rho)} (k(x,y) - k(x,x_o))\phi(x)d\mu(x) + C$$

onde o limite é o limite fraco $L^{q'}$ na bola B e C é uma constante que depende apenas de τ e ϕ e não depende do y.

Demonstração: Observamos inicialmente que a existência do limite fraco se prova de forma análoga à da existência do $K_B^{\#}(\phi)$, Enquanto que pelo lema 4 a última integral é limitada para todo y na bola $B(x_o,\tau)$.

Notemos que para x não pertencente à bola $B(x_o,2A\sigma)$ com $\sigma \geq 1$ e y pertencente à bola $B(x_o,\tau)$, $\tau \leq 1$ temos que

$$2A\sigma < d(x,x_o) \leq A.(d(x,y) + d(y,x_o)) < A.d(x,y) + A\tau ,$$

ou seja, $d(x,x_o) > 1$ e $d(x,y) > 2\sigma - \tau > 1$, donde $k(x,x_o) = k(x,y) = 0$. Portanto para y pertencente à $B(x_o,\tau)$, podemos escrever

$$(3.4) \qquad K^{\#}(\phi)(y) = \lim_{\delta\to 0} \int_{B(x_o,2A\sigma)} k_\delta(x,y)\phi(x)\,d\mu(x) +$$

$$\int_{X\sim B(x_o,2A\sigma)} (k(x,y) - k(x,x_o))\phi(x)\,d\mu(x) .$$

Agora como $k_\delta(x,y) = \varphi_\delta(x,y)k(x,y)$ e $\varphi_\delta(x,y)$ é uma função limitada por um que vale um se $d(x,y) > \delta$ e se anula quando $d(x,y) < \delta/2$, temos que

$$(3.5) \quad \int_{B(x_o,2A\sigma)} k_\delta(x,y)\phi(x)\,d\mu(x) = \int_{\substack{B(x_o,2A\sigma)\\ d(x,y)>\delta}} k(x,y)\phi(x)\,d\mu(x)$$

$$+ \int_{\substack{B(x_o,2A\sigma)\\ \delta/2<d(x,y)<\delta}} \varphi_\delta(x,y)k(x,y)\phi(x)\,d\mu(x)$$

e

$$(3.6)\quad \int_{B(x_o,2A\tau^\rho)} k_\delta(x,y)\,\phi(x)\,d\mu(x) = \int_{\substack{B(x_o,2A\tau^\rho)\\ d(x,y)>\delta}} k(x,y)\,\phi(x)\,d\mu(x)$$

$$+ \int_{\substack{B(x_o,2A\tau^\rho)\\ \delta/2<d(x,y)<\delta}} \varphi_\delta(x,y)k(x,y)\,\phi(x)\,d\mu(x) \quad .$$

Como y pertence à bola $B(x_o,\tau)$ e $\tau \leq 1$, resulta que as duas últimas integrais que aparecem no segundo membro de (3.5) e (3.6) são iguais, donde se conclui que

$$(3.7)\quad \int_{B(x_o,2A\sigma)} k_\delta(x,y)\,\phi(x)\,d\mu(x) - \int_{B(x_o,2A\tau^\rho)} k_\delta(x,y)\,\phi(x)\,d\mu(x)$$

$$= \int_{B(x_o,2A\sigma)\sim B(x_o,2A\tau^\rho)} k(x,y)\,\phi(x)\,d\mu(x) \quad .$$

Então de (3.4) e (3.7) segue que

$$K^{\#}(\phi)(y) - \{ \lim_{\delta\to 0} \int_{B(x_o,2A\tau^\rho)} k_\delta(x,y)\,\phi(x)\,d\mu(x) \; +$$

$$\int_{X\sim B(x_o,2A\tau^\rho)} (k(x,y) - k(x,x_o))\,\phi(x)\,d\mu(x) \; \} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{B(x_o,2A\sigma)\sim B(x_o,2A\tau^\rho)} k(x,y)\,\phi(x)\,d\mu(x) \quad - \quad \mathrm{I}$$

onde,

$$I = \int_{B(x_o,2A\sigma)\sim B(x_o,2A\tau^{\rho})} (k(x,y) - k(x,x_o))\phi(x)d\mu(x)$$

e essa diferença é igual à

$$\int_{B(x_o,2A\sigma)\sim B(x_o,2A\tau^{\rho})} k(x,x_o)\phi(x)d\mu(x)$$

o que demonstra o lema, pois a integral acima não depende de y, dependendo apenas de ϕ e τ.

Lema 6. $K^{\#}(1)$ = constante .

Demonstração: Sejam $B = B(x_o,\sigma)$ e $B_R = B(x_o,R\sigma)$ com $R > 2A$. Para y em B temos pela definição 6 que

$$K^{\#}(1)(y) = \lim_{\delta\to 0} \int_{B(x_o,R\sigma)} k_{\delta}(x,y)d\mu(x) .$$

onde o limite é o limite fraco $L^{q'}$ em B.

Seja $g(y)$ pertencente à $L^2(B(x_o,\sigma),\mu)$ satisfazendo $\int_B g(y)d\mu(y) = 0$. Como $1 < q < 2$, $g(y)$ também pertence ao espaço $L^q(B(x_o,\sigma),\mu)$ e

$$\int_X K^{\#}(1)(y)g(y)d\mu(y) = \lim_{R\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\int(\int_{B(x_o,R\sigma)} k_\delta(x,y)d\mu(x))g(y)d\mu(y)$$

$$= \lim_{R\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\int_B (\int_X \chi_{B_R}(x)k_\delta(x,y)d\mu(x))g(y)d\mu(y) \quad .$$

Trocando a ordem de integração obtemos

$$\int_X K^{\#}(1)(y)g(y)d\mu(y) = \lim_{R\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\int\chi_{B_R}(x)(\int_X k_\delta(x,y)g(y)d\mu(y))d\mu(x),$$

$$= \lim_{R\to\infty} (\chi_{B_R}, Kg) \quad ,$$

donde,

$$\int_X K^{\#}(1)(y)g(y)d\mu(y) = \lim_{R\to\infty} (K^*(\chi_{B_R}), g\cdot) .$$

Pela condição (vii) da definição 5 resulta

$$\int_X K^{\#}(1)(y)g(y)d\mu(y) = c.\int g(y)d\mu(y) = 0$$

o que demonstra que $K^{\#}(1)(y) =$ constante.

Teorema 5. Seja $k(x,y)$ um núcleo integral singular "fracamente forte". Seja ϕ pertencente a $Lip(1/p - 1)$ para $p \leq 1$ satisfazendo $1/p < (1/q - \rho/2)/(1-\rho)$ onde ρ é o número defini do no lema 1. Então existe constante finita c tal que

$$||K^{\#}(\phi)||_{Lip(1/p-1)} \leq c.||\phi||_{Lip(1/p-1)} \quad .$$

Demonstração: Seja B uma bola em X de raio $\sigma \geq 1$ e denotemos por B_1 a bola com o mesmo centro que B e raio $2A\sigma$ Observamos que

$$K^{\#}(\phi) = K^{\#}(\phi - m_{B_1}(\phi)) + K^{\#}(m_{B_1}(\phi)) \quad .$$

Agora como $K^{\#}(m_{B_1}(\phi))$ não contribui na estimativa de $||K^{\#}(\phi)||_{Lip(1/p-1)}$, pois é uma constante, podemos considerar ϕ pertencente a $Lip(1/p-1)$ tal que $m_{B_1}(\phi) = 0$.

Pela desigualdade de Minkowski temos que

$$(\mu(B)^{-1}\int_B |K^{\#}(\phi)(y) - m_B(K^{\#}(\phi))|^2 d\mu(y))^{1/2} \leq$$

$$(\mu(B)^{-1}\int_B |K^{\#}(\phi)(y)|^2 d\mu(y))^{1/2} + |m_B(K^{\#}(\phi))| \quad .$$

Aplicando Schwarz ao termo $|m_B(K^{\#}(\phi))|$ resulta:

$$(3.8) \qquad (\mu(B)^{-1}\int_B |K^{\#}(\phi)(y) - m_B(K^{\#}(\phi))|^2 d\mu(y))^{1/2} \leq$$

$$2.(\mu(B)^{-1}\int_B |K^{\#}(\phi)(y)|^2 d\mu(y))^{1/2} \quad .$$

Para estimarmos a última integral observamos que existe função $h(y)$ pertencente a $L^2(B,\mu)$ com $||h||_2 = 1$ tal que

$$\left(\int_B |K^{\#}(\phi)(y)|^2 d\mu(y)\right)^{1/2} = \int_B h(y) K^{\#}(\phi)(y) d\mu(y) \quad .$$

Então pela definição de $K^{\#}(\phi)(y)$ obtemos:

$$(\mu(B)^{-1} \int_B |K^{\#}(\phi)(y)|^2 d\mu(y))^{1/2} =$$

$$(\mu(B)^{-1/2} \lim_{\delta\to 0} \int_X h(y) (\int_{B_1} k_\delta(x,y)\phi(x) d\mu(x)) d\mu(y)$$

Trocando a ordem de integração, o segundo membro da igualdade fica igual a

$$\mu(B)^{-1/2} \lim_{\delta\to 0} \int_{B_1} \phi(x) (\int_X k_\delta(x,y) h(y) d\mu(y)) d\mu(x) \quad ,$$

que pela condição (v) da definição 5 é igual a

$$\mu(B)^{-1/2} \int_{B_1} Kh(x)\phi(x) d\mu(x) \quad ,$$

ou seja, como $m_{B_1}(\phi) = 0$ ·,

$$(\mu(B)^{-1} \int_B |K^{\#}(\phi)(y)|^2 d\mu(y))^{1/2}$$

é igual a

$$\mu(B)^{-1/2} \int_{B_1} Kh(x)(\phi(x) - m_{B_1}(\phi))d\mu(x) .$$

Aplicando a desigualdade de Schwarz a esta última integral temos

$$(\mu(B)^{-1} \int_B |K^{\#}(\phi)(y)|^2 d\mu(y))^{1/2} \leq$$

$$\mu(B)^{-1/2} ||Kh||_2 (\int_{B_1} |\phi(x) - m_{B_1}(\phi)|^2 d\mu(x))^{1/2} .$$

Pela condição (iv) da definição 5 e definição de $||\phi||_{Lip(1/p-1)}$ tém-se

$$(\mu(B)^{-1} \int_B |K^{\#}(\phi)(y)|^2 d\mu(y))^{1/2} \leq$$

$$c.\mu(B)^{-1/2} \mu(B_1)^{1/p - 1/2} ||\phi||_{Lip(1/p - 1)} ||h||_2 .$$

Agora como X é de tipo homogêneo, existe constante c finita que depende apenas de A tal que $\mu(B_1) \leq c.\mu(B)$. Portanto

$$(3.9) \qquad (\mu(B)^{-1} \int_B |K^{\#}(\phi)(y)|^2 d\mu(y))^{1/2} \leq$$

$$c.||\phi||_{Lip(1/p - 1)} \mu(B)^{1/p - 1} ,$$

pois $||h||_2 = 1$. Substituindo (3.9) em (3.8) resulta que

$$(3.10) \qquad (\mu(B)^{-1} \int_B |K^{\#}(\phi) - m_B(\phi)|^2 d\mu(y))^{1/2} \leq$$

$$c.||\phi||_{Lip(1/p-1)}\ \mu(B)^{1/p-1}$$

para toda bola B com raio maior ou igual a um.

Seja agora B uma bola com raio $\sigma \leq 1$. Provemos que ainda (3.10) se verifica. Para isso seja B_2 a bola de mesmo centro que B e com raio $2A\sigma^{\rho}$ e seja ϕ pertencente ao espaço $Lip(1/p-1)$ tal que $m_{B_2}(\phi) = 0$. Vamos considerar a expressão de $K^{\#}(\phi)(y)$, y pertencente a B, dada pelo lema 5 e vamos supor que a constante C que aparece nela é nula. Isto é possível devido ao fato de que a constante não vai contribuir na estimativa da integral em (3.10).

Sejam q e q' dados pela definição 5. Como $q' > 2$, tem-se

$$(\mu(B)^{-1} \int_B |K^{\#}(\phi)(y) - m_B(K^{\#}(\phi))|^2 d\mu(y))^{1/2} \leq$$

$$(\mu(B)^{-1} \int_B |K^{\#}(\phi)(y) - m_B(K^{\#}(\phi))|^{q'} d\mu(y))^{1/q'} .$$

Pela desigualdade de Minkowski resulta que o segundo membro da expressão acima fica majorado por

$$(\mu(B)^{-1}\int_B |K^{\#}(\phi)(y)|^{q'}d\mu(y))^{1/q'} + |m_B(K^{\#}(\phi))| ,$$

e como

$$|m_B(K^{\#}(\phi))| \leq (\mu(B)^{-1}\int_B |K^{\#}(\phi)(y)|^{q'}d\mu(y))^{1/q'}$$

temos que,

$$(3.11) \qquad (\mu(B)^{-1}\int_B |K^{\#}(\phi)(y) - m_B(K^{\#}(\phi))|^2 d\mu(y))^{1/2} \leq$$

$$2.(\mu(B)^{-1}\int_B |K^{\#}(\phi)(y)|^{q'}d\mu(y))^{1/q'} .$$

Agora para estimarmos a norma q' de $K^{\#}(\phi)$, observamos que para $q' > 2$; existe função $g(y)$ pertencente a $L^q(B,\mu)$ com $||g||_q = 1$ tal que

$$(\int_B |K^{\#}(\phi)(y)|^{q'}d\mu(y))^{1/q'} = \int_B g(y)K^{\#}(\phi)(y)d\mu(y).$$

Substituindo $K^{\#}(\phi)(y)$ no segundo membro da desigualdade acima temos

$$(3.12) \qquad (\int_B |K^{\#}(\phi)(y)|^{q'}d\mu(y))^{1/q'} =$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_B g(y)(\int_{B_2} k_\delta(x,y)\phi(x)d\mu(x))d\mu(y) +$$

$$\int_B g(y)(\int_{X\sim B_2}(k(x,y) - k(x,x_o))\phi(x)d\mu(x))d\mu(y) = I_1 + I_2 .$$

Como $g(y)$ tem suporte limitado e $\delta > 0$ pela condição (i) da definição 5 podemos trocar a ordem de integração em I_1 e obtemos

$$I_1 = \lim_{\delta \to 0} \int_{B_2} \phi(x) \left(\int_X k_\delta(x,y) g(y) d\mu(y) \right) d\mu(x)$$

donde pela condição (iv) da definição 5 tem-se

$$I_1 = \int_{B_2} Kg(x) \phi(x) d\mu(x) \quad .$$

Lembrando que $m_{B_2}(\phi) = 0$, podemos escrever

$$I_1 = \int_{B_2} Kg(x) (\phi(x) - m_{B_2}(\phi)) d\mu(x) \ .$$

Pela desigualdade de Schwarz e definição de $||\phi||_{Lip(1/p - 1)}$ resulta

$$|I_1| \leq c . ||\phi||_{Lip(1/p - 1)} \ \mu(B_2)^{1/p - 1/2} \quad .$$

donde pela condição (ii) da definição 5 e levando em conta que $||g||_q = 1$, temos

$$|I_1| \leq c . ||\phi||_{Lip(1/p - 1)} \ \mu(B_2)^{1/p - 1/2} \quad .$$

Estimemos I_2. Temos que,

$$|I_2| \leq \int_B |g(y)| \left(\int_{X \sim B_2} |k(x,y) - k(x,x_o)| \, |\phi(x)| \, d\mu(x) \right) d\mu(y)$$

e pelo lema 4 vem que

$$|I_2| \leq c \, ||\phi||_{Lip(1/p-1)} \, \mu(B_2)^{1/p-1-\varepsilon/(1-\theta)} \int_B |g(y)| \, d(y,x_o)^{\varepsilon} d\mu(y) \quad .$$

Da hipótese de y pertencer à bola $B(x_o,\sigma)$ resulta

$$\int_B |g(y)| \, d(y,x_o)^{\varepsilon} d\mu(y) \leq \sigma^{\varepsilon} \int_B |g(y)| \, d\mu(y) \quad ,$$

donde aplicando a desigualdade de Hölder a esta última integral obtemos

$$|I_2| \leq c . \, ||\phi||_{Lip(1/p - 1)} \, \mu(B_2)^{1/p - 1 - \varepsilon/(1-\theta)} \, \mu(B)^{1 - 1/q} \quad ,$$

ou seja,

$$|I_2| \leq c . \, ||\phi||_{Lip(1/p - 1)} \, \sigma^{\rho(1/\rho - 1 - \varepsilon/(1-\theta) + 1 + \varepsilon - 1/q} \quad .$$

Lembrando que $\rho = (\varepsilon + 1 - 1/q)/(\varepsilon/(1-\theta) + 1/2)$ tem-se

$$|I_2| \leq c \, ||\phi||_{Lip(1/p-1)} \, \sigma^{\rho(1/p-1/2)} \leq c \, ||\phi||_{Lip(1/p-1)} \, \mu(B_2)^{1/p - 1/2} \quad .$$

Agora como $0 < p \leq 1$ satisfaz $1/p < (1/q - \rho/2)/(1-\rho)$ então $1/p - 1/q < \rho(1/p - 1/2)$, e daí

$$\sigma^{1/p - 1/q} > \sigma^{\rho(1/p - 1/2)}$$

pois $\sigma \leq 1$. Além disso de (1.1) do capítulo I temos

$$c_1.\sigma^{\rho} \leq \mu(B_2) \leq c_2.\sigma^{\rho}$$

e

$$c_1'.\ \sigma \leq \mu(B) \leq c_2'.\ \sigma$$

onde c_1, c_2, c_1', c_2' são constantes que independem de σ. Segue que

$$\mu(B_2)^{1/p - 1/2} \leq c_2.\sigma^{\rho(1/p - 1/2)} \leq c_2.\sigma^{1/p - 1/q} \leq c.\mu(B)^{1/p - 1/q},$$

donde se conclui que I_1 e I_2 são majorados por

$$c.||\phi||_{Lip(1/p - 1)}\ \mu(B)^{1/p - 1/q} .$$

Substituindo esta estimativa de I_1 e I_2 em (3.12) e posteriormente (3.12) em (3.11), resulta que (3.10) ainda se verifica para bolas B com raios menores ou iguais a um. Então para uma bola B qualquer temos

$$(\mu(B)^{-1} \int_B |K^{\#}(\phi)(y) - m_B(K^{\#}(\phi))|^2 d\mu(y))^{1/2} \leq$$

$$c.||\phi||_{Lip(1/p - 1)}\ \mu(B)^{1/p - 1} ,$$

ou seja, $K^{\#}(\phi)$ pertence à Lip(1/p - 1) e

$$||K^{\#}(\phi)||_{Lip(1/p - 1)} \leqq c.||\phi||_{Lip(1/p - 1)}$$

o que demonstra o teorema.

Observamos que se ϕ_1 e ϕ_2 pertencentes a Lip(1/p - 1) são tais que $\phi_1 - \phi_2$ = constante, então pelo lema 6 temos que $K^{\#}(\phi_1 - \phi_2)$ = constante.

Definindo $K^{\#}(\bar{\phi})$ como a classe de todas as funções em X que diferem de $K^{\#}(\phi)$ por uma constante, pelo que foi provado no teorema 5 temos:

Teorema 6. Nas condições do teorema 5 se $\bar{\phi}$ pertence ao espaço *Lip*(1/p - 1) então $K^{\#}(\bar{\phi})$ pertence à *Lip*(1/p - 1). Além disso, existe constante c finita tal que

$$||K^{\#}(\bar{\phi})||_{Lip(1/p - 1)} \leqq c.||\bar{\phi}||_{Lip(1/p - 1)} .$$

Lema 7. Seja a(x) uma função pertencente à $L^2(X,\mu)$ e com suporte numa bola $B(x_o, \tau)$, $\tau \geqq 1$, tal que $\int_X a(x)d\mu(x) = 0$. Seja k(x,y) um núcleo integral singular "fracamente forte". Então para toda $\bar{\phi}$ pertencente ao espaço *Lip*(1/p - 1) temos

$$<K(a) , \bar{\phi}> = <a , K^{\#}(\bar{\phi})> .$$

Demonstração: Observemos inicialmente que $Ka(x)\phi(x)$ é integrável. Com efeito, por hipótese $a(x)$ é um múltiplo de um $(p,2)$ átomo com suporte na bola $B(x_o,\tau)$, isto é, $a(x) = \lambda.b(x)$ onde $b(x)$ é um $(p,2)$ átomo e λ uma constante finita. Pelo teorema 2, $Kb(x)$ satisfaz as condições (1.4), (1.5),(1.6) e pela observação posterior ao teorema 3 temos que $Kb(x)\phi(x)$ é integrável. Da linearidade do operador K segue a integrabilidade de $Ka(x)\phi(x)$.

Escrevemos,

$$\int_X Ka(x)\phi(x)d\mu(x) =$$

$$\int_{B(x_o,2A\tau)} Ka(x)\phi(x)d\mu(x) + \int_{X\sim B(x_o,2A\tau)} Ka(x)\phi(x)d\mu(x) \; .$$

Observemos que para x pertencente a $B(x_o,2A\tau)$ e y pertencente a $B(x_o,\tau)$ temos $d(x,y) > 1$. Com efeito, se supomos que $d(x,y) \leqq 1$, de

$$2A\tau < d(x,x_o) \leqq A.(d(x,y) + d(y,x_o))$$

resulta $d(x_o,y) > 2\tau - 1$, e como $\tau \geqq 1$, tem-se $d(x_o,y) > \tau$ ou seja, y não pertence ao suporte de $a(y)$ o que é uma contradição.

Portanto $d(x,y) > 1$ e daí $k(x,y)$ é nulo, donde a segun da integral na soma do segundo membro da igualdade é nula. Logo,

$$\int_X Ka(x)\phi(x)d\mu(x) = \int_{B(x_o,2A\tau)} Ka(x)\phi(x)d\mu(x)$$

Agora,

$$\int_X Ka(x)\phi(x)d\mu(x) = \lim_{\delta\to 0}\int_{B(x_o,2A\tau)} \phi(x)\left(\int_X k_\delta(x,y)a(y)d\mu(y)\right)d\mu(x)$$

Como o suporte de $a(y)$ é limitado e $\delta > 0$, pela condição (i) da definição 5 , podemos trocar a ordem de integração e temos

$$\int_X Ka(x)\phi(x)d\mu(x) =$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{B(x_o,\tau)} a(y)\left(\int_{B(x_o,2A\tau)} k_\delta(x,y)\phi(x)d\mu(x)\right)d\mu(y) .$$

Da hipótese de $q < 2$, temos que $a(y)$ pertence a $L^q(B,\mu)$ e daí pela condição (iii) da definição 5 temos que

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{B(x_o,2A\tau)} k_\delta(x,y)\phi(x)d\mu(x)$$

existe fracamente em $L^{q'}$ na bola B. Então,

$$< Ka \, , \overline{\phi} > = \int_X Ka(x)\phi(x)\,d\mu(x) =$$

$$\int_X \left(\lim_{\delta\to 0} \int_{B(x_o, 2A\tau)} k_\delta(x,y)\phi(x)\,d\mu(x)\right) a(y)\,d\mu(y) =$$

$$< a \, , K^{\#}(\overline{\phi}) > \; ,$$

como queríamos provar.

Com os resultados obtidos anteriormente estamos em condições de demonstrar o teorema que constitui a parte essencial deste trabalho.

Teorema 7. Seja $k(x,y)$ um núcleo integral singular "fracamente forte" e $0 < p \leq 1$ satisfazendo a desigualdade $1/p < (1/q - \rho/2)/(1-\rho)$. Seja f pertencente a H^p, isto é, $f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i$, onde os a_i são (p,2) átomos e $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p < \infty$. Então o operador

$$Kf = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \, K(a_i)$$

está bem definido e além disso, K é linear e existe uma constante c finita independente de f tal que

$$||Kf||_{H^p} \leq c. ||f||_{H^p} \quad .$$

Demonstração: Seja $f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i$, onde os a_i são (p,2) átomos e $\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|^p < \infty$, um elemento de H^p. Mostremos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i Ka_i$ converge em H^p.

Pelo teorema 5 temos que para $0 < p \leq 1$ satisfazendo $1/p < (1/q - \rho/2)/(1-\rho)$, Ka_i pertence a H^p para cada i. Além disso $||Ka_i||_{H^p} \leq c$. Agora, sejam m e n tal que $m < n$ Temos,

$$||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Ka_i - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Ka_i||_{H^p}^p = ||\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i Ka_i||_{H^p}^p \leq$$

$$\sum_{i=m+1}^{n}||\lambda_i Ka_i||_{H^p}^p = \sum_{i=m+1}^{n}|\lambda_i|^p||Ka_i||_{H^p}^p \leq c^p.\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|^p$$

Como $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p$ é convergente temos que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Ka_i$ é uma sequência de Cauchy, e portanto converge para um elemento de H^p, pois H^p é completo. Indiquemos por h esse elemento.

Pela parte (ii) do teorema 3 tem-se

$$< h , \overline{\phi} > = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < Ka_i , \overline{\phi} >.$$

Do fato de que os a_i são (p,2) átomos e portanto pertencem à $L^2(X,\mu)$ e levando em conta que os seus suportes estão contidos em bolas de raio maior ou igual do que um, resulta do lema 7 que

$$< h , \overline{\phi} > = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < a_i , K^{\#}(\overline{\phi}) > ,$$

ou seja,

$$< h \, , \, \overline{\phi} > \; = \; < \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i \, , \, K^{\#}(\overline{\phi}) > \; = \; < f \, , \, K^{\#}(\overline{\phi}) > \quad .$$

Portanto h depende apenas de f e não de sua representação como uma série de múltiplos de $(p,2)$ átomos, donde se conclui que fica bem definido $Kf = h$, isto é, K é um operador linear de H^p em H^p. Além disso,

$$||Kf||_{H^p} = ||h||_{H^p} \leq c.(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p)^{1/p}$$

e daí

$$||Kf||_{H^p} \leq c.||f||_{H^p}$$

o que demonstra o teorema.

4. *Aplicação*

Consideremos $X = \mathbb{R}^n$ munido da quase distância

$$d(x,y) = |x - y|^n$$

e seja μ a medida de Lebesgue, onde $|x - y|$ é a distância euclideana usual do $\mathbb{R}^n$. Vamos provar neste parágrafo que o operador

$$Kf(x) = \lim_{\delta\to 0} \int_{\delta<|x-y|\leq 1} f(y)\, \exp(i|x-y|^{a'}/|x-y|^{n+\lambda})\, dy$$

considerado por Stein-Fefferman em [5] e Coifman em [1] , satisfaz as condições do teorema 7, provado no parágrafo anterior. Para isso consideremos os seguintes lemas:

Lema 8. Seja k uma função integrável em $\mathbb{R}^n$ que satisfaz para $0 < \beta < n$ a condição

$$|\hat{k}(x)| \leq c/(1 + |x|^{\beta})$$

onde c é uma constante finita e $\hat{k}$ a transformada de Fourier da função k. Seja φ uma função de classe C^{∞} que se anula numa vizinhança da origem e vale um fora de uma vizinhança fechada da origem. Então $k_{\delta}(x) = \varphi(\delta^{-1}x)k(x)$ satisfaz

$$|\hat{k}_{\delta}(x)| \leq c/(1 + |x|^{\beta}) \quad .$$

Demonstração: Seja ψ uma função C^{∞} com suporte limitado em $\mathbb{R}^n$ tal que $\varphi + \psi = 1$. Então tem-se que

$$\varphi(\delta^{-1}x)k(x) + \psi(\delta^{-1}x)k(x) = k(x)$$

ou seja,

$$k_{\delta}(x) + \psi(\delta^{-1}x)k(x) = k(x) .$$

Portanto , como temos por hipótese que $|\hat{k}(x)| \leq c/(1 + |x|^{\beta})$

para estimarmos $|\hat{k}_\delta(x)|$ basta estimarmos $|(\psi(\delta^{-1}x)k(x)\hat{}\ |$, ou seja, devemos estimar $|\hat{k}(x) * \delta^n \hat{\psi}(\delta x)|$.

Agora como ψ pertence ao espaço $\mathscr{S}$ das funções com decrescimento rápido no infinito, temos que $\hat{\psi}$ também pertence a $\mathscr{S}$ e resulta que

$$|\hat{k}(x) * \delta^n \hat{\psi}(\delta x)| \leq c.M(\hat{k})(x)$$

onde c é uma constante finita e denotando por $|B(x,r)|$ a medida de Lebesgue da bola $B(x,r)$,

$$M(\hat{k})(x) = \sup_{B(x,r)} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |\hat{k}(y)|dy$$

vem a ser a função maximal de $\hat{k}$.

Mostremos que $M(\hat{k}) \leq c(1 + |x|^\beta)^{-1}$ no caso em que $n \geq 2$. A prova para $n=1$ é simples.

Seja $B(x,r)$ uma bola de centro x e raio r e suponhamos que $|x| > 2r$. Observamos inicialmente que se C_α é um setor na esfera unitária n-dimensional ($n \geq 2$) de centro na origem $S(0,1)$ com abertura $\alpha \leq \pi/3$ então,

$$\text{Área } (C_\alpha \cap S(0,1)) \leq c(n)(\operatorname{sen}(\alpha/2))^{n-1}$$

onde $c(n)$ é uma constante finita que depende apenas da dimensão do espaço.

Temos que,

$$M(\hat{k})(x) = \sup |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |\hat{k}(y)|dy \leq$$

$$\sup |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} (1 + |y|^{\beta})^{-1}dy \leq$$

$$\sup |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |y|^{-\beta} dy$$

Calculemos $|B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |y|^{-\beta} dy$. Passando para coordenadas polares com $|y| = \zeta$ temos

$$|B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |y|^{-\beta}dy =$$

$$c(n).r^{-n} \int_{|x|-r}^{|x|+r} \zeta^{n-1-\beta} d\zeta \int_{C_\alpha \cap S(x,r)} d(C_\alpha \cap S(x,r)) \cdot$$

Agora por hipótese $\operatorname{sen}(\alpha/2) = r\, |x|^{-1} < 1/2$ e temos pela observação anterior que

$$|B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |y|^{-\beta} dy \leq$$

$$c(n)\ r^{-n+1}\ (r/|x|)^{n-1}\ r^{-1} \int_{|x|-r}^{|x|+r} \zeta^{n-1-\beta}\ d\zeta \ .$$

Como $0 < \beta < n$ ocorre que $n-1-\beta > -1$, donde

$$r^{-1}\int_{|x|-r}^{|x|+r} \zeta^{n-1-\beta}\, d\zeta = r^{-1}((|x|+r)^{n-\beta} - (|x|-r)^{n-\beta})/(n-\beta) \;.$$

Pelo teorema do valor médio resulta que

$$r^{-1}\int_{|x|-r}^{|x|+r} \zeta^{n-1-\beta}\, d\zeta = 2.(|x|+\theta r)^{n-\beta-1} \leqq 2.(3|x|/2)^{n-\beta-1}$$

no caso em que $n-\beta-1 > 0$ e

$$r^{-1}\int_{|x|-r}^{|x|+r} \zeta^{n-\beta-1}\, d\zeta = 2.(|x|-r)^{n-\beta-1} \leqq 2.(|x|/2)^{n-\beta-1}$$

no caso em que $n-\beta-1 < 0$. Segue que para $|x| > 2\,r$ temos

$$\text{(4.1)} \qquad |B(x,r)|^{-1}\int_{B(x,r)} |y|^{-\beta}\, dy \leqq c_1(n)\,|x|^{-\beta} \;.$$

No caso em que $r/|x| \geqq 1/2$ dadas as bolas $B(x,r)$ tomamos as bolas $B(0,3r)$ com centro na origem e raio $3r$ e tem-se que

$$|B(x,r)|^{-1}\int_{B(x,r)} |y|^{-\beta} dy = c(n)\; r^{-n}\int_{B(x,r)} |y|^{-\beta}\, dy \leqq$$

$$c(n)\; r^{-n}\int_{B(0,3r)} |y|^{-\beta}\, dy.$$

Passando para coordenadas polares resulta que

$$|B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |y|^{-\beta} dy \leq c(n)\,\omega_n . r^{-n} \int_0^{3r} \zeta^{n-\beta-1}\, d\zeta$$

onde ω_n é o volume da esfera unitária n-dimensional. Integrando e levando em conta que $|x| \leq 2r$ obtemos,

$$(4.2) \qquad |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |y|^{-\beta} dy \leq c_2(n)|x|^{-\beta} \quad .$$

De (4.1) e (4.2) temos que $M(\hat{k})(x) \leq c.|x|^{-\beta}$, Agora como $\hat{k}$ é limitado o mesmo ocorre com $M(\hat{k})$, ou seja, $M(\hat{k}) \leq c(1 + |x|^{\beta})^{-1}$ donde se conclui que $|\hat{k}_\delta(x)| \leq c.(1 + |x|^{\beta})^{-1}$, o que demonstra o lema.

Lema 9. Sejam $0 < \theta < 1$, $a' < 0$ e $\lambda = (1-\theta)^{-1} -1 + a'$. Seja

$$k(x,y) = \exp(i.d(x,y)^{a'/n}).d(x,x_o)^{-1-\lambda/n}$$

com x e y pertencentes a R^n. Então se $d(x,x_o) > 2.d(y,x_o)^{1-\theta}$ para $d(y,x_o) \leq 1$ temos que

$$|k(x,y) - k(x,x_o)| \leq c.d(y,x_o)^{1/n}\, d(x,x_o)^{-1 -1/n -(1-\theta)^{-1}} \quad .$$

Demonstração: Substituindo $d(x,y)$ por $|x - y|^n$ temos

$$k(x,y) = \exp(i.|x - y|^{a'}).|x - y|^{-n-\lambda} \quad .$$

Escrevemos

$$|\tilde{k}(x,y) - \tilde{k}(x,x_o)| = ||x-y|^{-n-\lambda}(\exp(i|x-y|^{a'})-\exp(i|x-x_o|^{a'}))+$$

$$\exp(i|x-x_o|^{a'})(|x-y|^{-n-\lambda}- |x-x_o|^{-n-\lambda})| \quad ,$$

donde aplicando a desigualdade triangular resulta

$$|\tilde{k}(x,y) - \tilde{k}(x,x_o)| \leq ||x-y|^{-n-\lambda}(\exp(i|x-y|^{a'} - \exp(i|x-x_o|^{a'}))|+$$

$$||x-y|^{-n-\lambda} - |x-x_o|^{-n-\lambda}| = E_1 + E_2 \quad .$$

Estimemos E_1. Temos que,

$$||x-y|^{-n-\lambda}(\exp(i|x-y|^{a'}) - \exp(i|x-x_o|^{a'}))| \leq$$

$$|x-y|^{-n-\lambda} \; |\exp(i|x-y|^{a'}- |x-x_o|^{a'}) - 1 | \quad \leq$$

$$|x-y|^{-n-\lambda}| \; |x-y|^{a'} - |x-x_o|^{a'} \; | \quad =$$

$$||x-x_o|^{-a'}- |x-y|^{-a'} \; (|x-y|^{n+\lambda-a'}|x-x_o|^{-a'})^{-1} \quad .$$

Pelo teorema do valor médio obtemos

$$||x-x_o|^{-a'}-|x-y|^{-a'}|= -a'(t|x-x_o|+(1-t)|x-y|)^{-a'-1}||x-y|-|x-x_o|| \quad ,$$

ou seja,

$$||x-x_o|^{-a'} - |x-y|^{-a'}| = -a'(t|x-x_o|+(1-t)|x-y|)^{-a'-1}\ |y-x_o| \ .$$

Agora $|x-x_o|^{-a'-1}$ ou $|x-y|^{-a'-1}$ vem a ser o máximo de $(t|x-x_o| + (1-t)|x-y|)^{-a'-1}$. Se $|x-x_o|^{-a'-1}$ for o máximo temos

$$E_1 \leqq |y-x_o|\cdot|x-x_o|^{-a'-1}(|x-y|^{n+\lambda-a'}|x-x_o|^{-a'})^{-1}(-a') =$$

$$(-a')|y-x_o|(|x-y|^{n+\lambda-a'}|x-x_o|)^{-1} \ .$$

Como $|x-y| \geqq |\ |x-x_o| - |y-x_o|\ |$, $|y-x_o|<|y-x_o|^{1-\theta}$ e $|x-x_o| > 2^{1/n}|y-x_o|^{1-\theta}$ resulta,

$$|x-y| > |x-x_o|(1 - 2^{-1/n})$$

donde, denotando por $c(n)$ a constante $(-a')(1 - 2^{-1/n})$ temos

$$E_1 \leqq c(n)\ |y-x_o|\ |x-x_o|^{-n- \ +a'-1} \ .$$

Se $|x-y|^{-a'-1}$ for o máximo temos que

$$E_1 \leqq (-a')|y-x_o||x-y|^{-a'-1}(|x-y|^{n+\lambda-a'}|x-x_o|^{-a'})^{-1} =$$

$$(-a')|y-x_o|(|x-y|^{n+\lambda+1}|x-x_o|^{-a'})^{-1}$$

$$c'(n)|y-x_o||x-x_o|^{-n-\lambda+a'-1} \ .$$

Estimemos E_2. Pelo teorema do valor médio tem-se

$$\left|\, |x-y|^{-n-\lambda} - |x-x_o|^{-n-\lambda} \,\right| \leqq$$

$$(n+\lambda)(t|x-x_o| + (1-t)|x-y|)^{n+\lambda-1}|y-x_o| \; |x-y|^{-n-\lambda} \; |x-x_o|^{-n-\lambda} \quad ,$$

donde considerando o máximo como no caso de E_1, obtemos

$$E_2 \leqq (n+\lambda)|y-x_o||x-x_o|^{-n-\lambda-1} \quad .$$

Agora do fato de que $|x-x_o| \leqq 1$ resulta que $|x-x_o|^{a'} \geqq 1$ e portanto

$$E_2 \leqq (n+\lambda)|y-x_o||x-x_o|^{-n-\lambda+a'-1} \quad ,$$

que é a mesma estimativa de E_1.

Então temos que,

$$|\tilde{k}(x,y) - \tilde{k}(x,x_o)| \leqq c.|y-x_o||x-x_o|^{-(n+\lambda-a'+1)} =$$

$$c.d(y,x_o)^{1/n} d(x,x_o)^{-1-1/n-\lambda/n+a'/n} \, .$$

Substituindo λ por $(1-\theta)^{-1} - 1 + a'$, temos o que queríamos provar.

Lema 10. Seja $\tilde{k}(x,y)$ como no lema 9 e ψ uma função de classe C^∞ tal que $0 \leqq \psi(t) \leqq 1$, $\psi(t) = 1$ se $0 < t \leqq 1/2$

e $\psi(t) = 0$ se $t \geqq 1$. Então $k(x,y) = \tilde{k}(x,y).\psi(d(x,y))$ satisfaz

$$|k(x,y) - k(x,x_o)| \leqq c.d(y,x_o)^{1/n}\, d(x,x_o)^{-1-1/n-(1-\theta)^{-1}}$$

desde que $d(x,x_o) > 2\, d(y,x_o)^{1-\theta}$ para $d(y,x_o) \leqq 1$.

Demonstração: Segue imediatamente do lema 9.

Proposição. Sejam λ, γ e α definidos por

$$\lambda = \theta/(1-\theta) - a/(1-a) \quad , \; \gamma = (a-1)\lambda/n + a/2 \quad , \; \alpha = (n(1-\theta))^{-1} - n$$

onde $0 < \theta < a < 1$ e n a dimensão do espaço. Então o operador

$$Kf(x) = \lim_{\delta\to 0} \int_{\delta<|x-y|\leqq 1} f(y)\exp(i|x-y|^{a'})\,|x-y|^{-n-\lambda}\, dy$$

onde a' é o expoente conjugado de a e $n + \lambda > 0$, x, y pertencem a $\mathbb{R}^n$, satisfaz

$$||Kf||_{H^p(\mathbb{R}^n)} \leqq c.||f||_{H^p(\mathbb{R}^n)}$$

para os $1/2 < p \leqq 1$ que satisfazem

$$1/p - 1/2 < (1/2 + \alpha + n)/(\alpha + \gamma + n - 1/n).$$

Demonstração: Mostremos que o teorema 7 se aplica para o núcleo

$$k(x,y) = \exp(i|x-y|^{a'})\,|x-y|^{-n-\lambda}\ \psi(|x-y|) = k(x-y)$$

onde $\psi(t)$ é a função do lema 10.

Observamos que como $\theta < a$ temos que $n + \lambda < n$, donde $k(x,y)$ é uma função integrável em $|x-y| \leq 1$.

Por um teorema de Wainger (ver [11]) a transformada de Fourier de k é

$$\phi(|x-y|)\exp(i|x-y|^{a})\,|x-y|^{-\beta}$$

onde ϕ é uma função C^{∞} que se anula numa vizinhança da origem e vale um fora de uma vizinhança limitada da origem e $\beta = (a-1)\lambda + n.a/2$. Portanto temos que

$$|\hat{k}(x-y)| \leq c.(1 + |x-y|^{\beta})^{-1}$$

e como k é integrável resulta do lema 8 que

$$|\hat{k}_{\delta}(x-y)| \leq c.(1 + |x-y|^{\beta})^{-1} \quad .$$

onde $k_{\delta}(x-y) = \varphi_{\delta}(x-y)k(x-y)$ sendo φ_{δ} uma função de classe C^{∞} tal que

$$\varphi_{\delta}(\ x-y\ ) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x-y|>\delta \\ 0 & \text{se } |x-y|\leq\delta/2 \end{cases}$$

Escrevendo $\widehat{K_{\delta}f}(z) = \hat{k}_{\delta}(z)\hat{f}(z) = \hat{k}_{\delta}(z)|z|^{\beta}|z|^{-\beta}\hat{f}(z)$ temos então que $\hat{k}_{\delta}(z)|z|^{\beta}$ é limitado em L^2, donde por integração fracionária em R^n resulta

$$(4.3) \qquad ||K_\delta f||_2 \leqq c.||f||_q$$

onde $1/q = 1/2 + \beta/n = 1/2 + \gamma$.

Também temos que se f pertence a L^2 então

$$||\widehat{K_\delta f}||_2 \leqq ||k_\delta||_1||\hat{f}||_2$$

e por Plancherel obtemos

$$(4.4) \qquad ||K_\delta f||_2 \leqq c.||f||_2 \quad .$$

Observemos ainda que se $\chi_R(x)$ é a função característica da bola B_R de raio R, então

$$(4.5) \qquad \lim_{R\to\infty} \int_{|x-y|\leqq 1} \chi_R(x) \exp(i|x-y|^{a'})|x-y|^{-n-\lambda}\,dx$$

é finito.

Com efeito, fixado y, como $|x-y|\leqq 1$, então $|x| \leqq 1 + |y|$ donde para R suficientemente grande tal que a bola de centro na origem e raio $1 + |y|$ esteja contida na bola de centro na origem e raio R, (4.4) se reduz à

$$\int_{|x-y|\leqq 1} \exp(i|x-y|^{a'})|x-y|^{-n-\lambda} dx$$

que é finita.

Logo de (4.3), (4.4), (4.5) e lema 10 temos que $k(x,y)$ é um núcleo integral singular "fracamente forte" e portanto o teorema 7 se aplica, donde se conclui que

$$||Kf||_{H^p(\mathbb{R}^n)} \leqq c.||f||_{H^p(\mathbb{R}^n)}$$

para os $1/2 < p \leqq 1$ satisfazendo $1/p < (1/q - \rho/2)/(1-\rho)$, ou seja, lembrando que $1/q = 1/2 + \gamma$, $1/p < 1/2 + \gamma/(1-\rho)$.
Agora no nosso caso temos que $\varepsilon = 1/n$, donde

$$\rho = (\varepsilon +1 -1/q)/(\varepsilon/(1-\theta) +1/2) = (1/n +1 -1/q)/(1/(n(1-\theta))+1/2)$$

isto é, em termos de α e γ, $\rho = (1/n +1/2 -\gamma)/(\alpha +1/2 + n)$, resultando daí que $1/p - 1/2 < \gamma(\alpha +1/2 +n)/(\alpha + \gamma +n - 1/n)$, o que demonstra a proposição.

Observação: A proposição acima, no caso em que $n = 1$, foi provada em [1], enquanto que no caso n-dimensional Stein e Fefferman em [5] observam que a limitação do operador em $H^p(\mathbb{R}^n)$ com $p \leqq 1$, pode ser obtida a partir da caracterização desses espaços por funções maximais.

CAPITULO III

OUTRA VERSÃO DE OPERADORES INTEGRAIS SINGULARES "FRACAMENTE FORTES"

No capítulo II definimos os núcleos integrais singulares "fracamente fortes", com a hipótese de que os operadores truncados K_δ induzidos por esses núcleos são contínuos de L^q em L^2, para $1 < q < 2$. Para operadores integrais singulares do tipo convolução em espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ ou mesmo $H^p(\mathbb{R}^n)$, obtém-se os mesmos resultados em se considerando a continuidade desses operadores de L^q em L^2 ou de L^2 em $L^{q'}$, onde q' é o expoente conjugado de q, como se pode observar por exemplo em [1] e [5].

Vamos estudar neste capítulo os operadores integrais singulares anteriormente estudados mas agora com a hipótese de que os operadores truncados K_δ sejam contínuos de L^2 em $L^{q'}$. Vamos verificar que os resultados obtidos no capítulo II ainda são válidos neste caso, mas com outra condição sobre os p's.

Para que haja uma distinção com o caso tratado no capítulo II, usaremos as denominações núcleo integral singular "fracamente forte modificado" e operadores integrais singulares "fracamente fortes modificados". As demonstrações dos lemas e teoremas seguem a mesma técnica do capítulo II, e em alguns casos omitiremos as provas.

Definição 7. Seja $k(x,y)$ uma função mensurável e definida em $X \times X$. Diremos que $k(x,y)$ é um *núcleo integral singular "fracamente forte modificado"* se existem constantes $\theta, \gamma, \varepsilon$ satisfazendo $0 < \theta < 1$, $\theta/2(1-\theta) < \gamma < 1/2$, $1-\theta \leq \varepsilon \leq 1$, e função $\varphi_\delta(x,y)$ limitada por um que se anula quando $d(x,y) < \delta/2$ e vale um se $d(x,y) > \delta$, tais que as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Para todo subconjunto D em $X \times X$, limitado e separado da diagonal, temos

$$\iint_D |k(x,y)|^2 d\mu(x)\, d\mu(y) < \infty \quad .$$

(ii) Para toda função $f(y)$ com suporte limitado em $L^2(X,\mu)$, se $k_\delta(x,y) = \varphi_\delta(x,y) k(x,y)$, o operador K_δ definido por

$$K_\delta f(x) = \lim_{\delta \to 0} \int_X k_\delta(x,y) f(y)\, d\mu(y)$$

satisfaz

$$\|K_\delta f\|_{q'} \leq c_1 . \|f\|_2 \quad \text{e} \quad \|K_\delta f\|_2 \leq c_2 . \|f\|_2$$

onde q' é como na definição 5 e c_1, c_2 são constantes finitas que independem de f e δ.

(iii) Para toda função f em $L^2(X,\mu)$ com suporte limitado

$$\lim_{\delta \to 0} K_\delta f = Kf$$

existe em $L^{q'}(X,\mu)$ e em $L^2(X,\mu)$.

(iv) $k(x,y)$ se anula para $d(x,y) > 1$ e se $d(y,x_0) \leq 1$ então $k(x,y)$ satisfaz

$$|k(x,y) - k(x,x_0)| \leq c_3 . d(y,x_0)^{\varepsilon} d(x,x_0)^{-1-\varepsilon/(1-\theta)}$$

desde que $d(x,x_o) > 2.d(y,x_o)^{1-\theta}$, onde c_3 é uma constante finita.

(v) Seja χ_R a função característica da bola de raio R e K^* o operador adjunto do operador K em $L^2(X,\mu)$. Então o limite de $K^*(\chi_R)$ para R tendendo ao infinito existe fracamente em L^2 sobre conjuntos limitados e é igual a uma constante finita.

Lema 11. Sejam ε, θ, q' as constantes da definição 7. Se definimos $\rho^* = (\varepsilon + 1/2)/(1 + \varepsilon/(1-\theta) - 1/q')$ então as seguintes desigualdades são satisfeitas:

(i) $\rho^* < 1 - \theta$,

(ii) $(q'/2 - 1)/(1-\rho^*) < q' + (q'\varepsilon/(1-\theta)) - 1$ e

(iii) existe p, $0 < p \leq 1$ tal que

$$1/p < (1/2 - \rho^*/q')/(1-\rho^*) .$$

Além disso, se p satisfaz (iii), temos

(iv) $1/p < 1 + \varepsilon/(1-\theta)$

(v) o intervalo aberto $(q'/p - 1 , (q'/2 -1)/(1-\rho^*))$ é não vazio.

Demonstração: Pela definição 7 temos que $\gamma > \theta/2(1-\theta)$, ou seja, $1/2 - 1/q' > \theta/2(1-\theta)$. Somando $\varepsilon/(1-\theta) + 1/2$ a ambos os membros da desigualdade obtemos

$$\varepsilon/(1-\theta) + 1 - 1/q' > \varepsilon/(1-\theta) + 1/2 + \theta/2(1-\theta) ,$$

donde se conclui que

$$(\varepsilon + 1/2)/(\varepsilon/(1-\theta) + 1 - 1/q') < 1 - \theta$$

o que prova (i).

Provemos (ii). Como $0 < \theta < 1$, $\varepsilon > 0$ e $q' > 2$, temos que $\varepsilon/(1-\theta) - \varepsilon > 0$, donde somando $1/2 - 1/q'$ a ambos os membros da desigualdade tem-se $\varepsilon/(1-\theta) - \varepsilon + 1/2 - 1/q' > 1/2 - 1/q'$. Agora como $1 - \rho^* = (\varepsilon/(1-\theta) - \varepsilon + 1/2 - 1/q')/(\varepsilon/(1-\theta)+1-1/q')$ resulta que $(1-\rho^*)(\varepsilon/(1-\theta) +1 -1/q') > 1/2 - 1/q'$, donde $\varepsilon/(1-\theta) + 1 - 1/q' > (1/2 - 1/q')/(1-\rho^*)$. Multiplicando por q' ambos os membros da desigualdade temos a prova de (ii).

Para provarmos (iii) é suficiente mostrar que

$$(1/2 - \rho^*/q')/(1-\rho^*) > 1.$$

Somando e tirando $1/q'$ ao numerador e levando em conta que $\gamma = 1/2 - 1/q'$, resulta $(\gamma - \rho^*/q' + 1/q')/(1-\rho^*) > 1$, ou seja $\gamma/(1-\rho^*) > 1 - 1/q'$.

Pelo que foi visto em (i) temos a seguinte igualdade

$$\gamma/(1-\rho^*) = \gamma(\varepsilon/(1-\theta) + 1/2 + \gamma)/(\varepsilon/(1-\theta) - \varepsilon + \gamma).$$

Portanto para que tenhamos a prova de (iii) devemos mostrar que

$$\gamma(\varepsilon/(1-\theta) + 1/2 + \gamma)/(\varepsilon/(1-\theta) - \varepsilon + \gamma) > 1 - 1/q' = 1/2 + \gamma,$$

isto é, que

$$\gamma\varepsilon/(1-\theta) +\gamma(1/2 +\gamma) > (1/2 +\gamma)\varepsilon/(1-\theta) + (1/2+\gamma)\gamma-\varepsilon(1/2 + \gamma)$$

ou equivalentemente,

$$\varepsilon/2(1-\theta) - \varepsilon(1/2 + \gamma) < 0,$$

donde se conclui que devemos ter $\gamma > \theta/2(1-)$ o que é a nossa hipótese e fica provado (iii).

Para provar (iv) devemos mostrar que

$$1 + \varepsilon/(1-\theta) \geq (1/2 - \rho^*/q')/(1-\rho^*) \quad .$$

Pela parte (ii) temos que $q' + q'\varepsilon/(1-\theta) - 1 > (q'/2 -1)/(1-\rho^*)$ ou seja dividindo ambos os membros por q' , resulta

$$1 + \varepsilon/(1-\theta) - 1/q' > (1/2 - 1/q')/(1-\rho^*)$$

donde se conclui que $1 + \varepsilon/(1-\theta) > (1/2 - \rho^*/q')/(1-\rho^*)$, o que prova (iv).

Provemos (v). Por hipótese temos que

$$1/p < (1/2 - \rho^*/q')/(1-\rho^*)$$

donde multiplicando por q' e subtraindo um a ambos os membros da desigualdade obtemos

$$q'/p - 1 < (q'/2 - \rho^*)/(1-\rho^*) - 1 = (q'/2 - 1)/(1-\rho^*)$$

o que demonstra (v).

Teorema 8. Seja $k(x,y)$ um núcleo integral singular "fracamente forte modificado". Seja ρ^* o número definido no lema 11 e $0 < p \leq 1$ satisfazendo $1/p < (1/2 - \rho^*/q')/(1-\rho^*)$. Seja $a(x)$ um (p,q') átomo e $B(x_o,\sigma)$ a bola que contém o suporte de $a(x)$ e satisfaz

$$(\mu(B)^{-1} \int_B |a(x)|^{q'} d\mu(x))^{1/q'} \leq \mu(B)^{-1/p} \quad .$$

Então temos que:

(i) Se $\sigma \leq 1$ e α é um número satisfazendo a desigualdade $q'/p - 1 < \alpha < (q'/2 - 1)/(1-\rho^*)$ (que existe pelo lema 11) a função $M(x) = Ka(x)$ satisfaz as seguintes condições:

(1.1) $$\int_X |M(x)|^{q'} d\mu(x) \leq c.\sigma^{q'(1/2 - 1/p)}$$

(1.2) $$\int_X |M(x)|^{q'} d(x,x_o)^{\alpha} d\mu(x) \leq c.\sigma^{\rho^*\alpha + q'/2 - q'/p}$$

(1.3) $$\int_X M(x)\, d\mu(x) = 0.$$

onde c em (1.1) e (1.2) é uma constante finita que independe de σ.

(ii) Se $\sigma > 1$, a função $M(x) = Ka(x)$ satisfaz as condições (1.4), (1.5) e (1.6) do teorema 2, capítulo II.

Demonstração: Provemos (i). Observamos que como $q' > 2$, então $a(x)$ é também um $(p,2)$ átomo. Pelas condições (ii) e (iii) da definição 7 temos que

$$\int_X |M(x)|^{q'} d\mu(x) \leq c.\left(\int_B |a(y)|^2 d\mu(y)\right)^{q'/2}$$

e da definição de $(p,2)$ átomo obtemos

$$\int_X |M(x)|^{q'} d\mu(x) \leq c.\sigma^{q'(1/2 - 1/p)}$$

o que verifica (1.1).

Seja x_o pertencente a X e $B(x_o, 2A\sigma^{\rho^*})$ a bola de centro x_o e raio $2A\sigma^{\rho^*}$. Escrevemos,

$$\int_X |M(x)|^{q'} d(x,x_o)^{\alpha} d\mu(x) =$$

$$\int_{B(x_o,2A\sigma^{\rho^*})} |M(x)|^{q'} d(x,x_o)^{\alpha} d\mu(x) +$$

$$\int_{X\sim B(x_o,2A\sigma^{\rho^*})} |M(x)|^{q'} d(x,x_o)^{\alpha} d\mu(x) = I_1 + I_2$$

Como $\alpha > q'/p - 1$ e $0 < p \leqq 1$, resulta que $\alpha > 0$ donde

$$I_1 \leqq (2A\sigma^{\rho^*})^{\alpha} \int_X |M(x)|^{q'} d\mu(x)$$

e portanto da condição (1.1) de $M(x)$ concluimos que

$$(1.4) \qquad I_1 \leqq c.\sigma^{\rho^*\alpha + q'/2 - q'/p}$$

Mostremos a seguir que também temos a estimativa

$$(1.5) \qquad I_2 \leqq c.\sigma^{\rho^*\alpha + q'/2 - q'/p}$$

Para isso sejam $B_j = B(x_o, 2A2^j\sigma^{\rho^*})$, as bolas de centro x_o e raio $2A2^j\sigma^{\rho^*}$ com j inteiro não negativo. Escrevemos,

$$I_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B_{j+1} \sim B_j} |M(x)|^{q'} d(x,x_o)^{\alpha} d\mu(x)$$

e como $\alpha > 0$ segue que

$$I_2 \leqq \sum_{j=0}^{\infty} (2A2^{j+1}\sigma^{\rho^*})^{\alpha} \int_{B_{j+1} \sim B_j} |M(x)|^{q'} d\mu(x) \quad .$$

Agora se x não pertence à B_j e y pertence a $B(x_o,\sigma)$ então

$$2A2^j\sigma^{\rho^*} \leqq d(x,x_o) \leqq A.(d(x,y) + d(y,x_o)) < A.d(x,y) + A\sigma \quad ,$$

isto é, $d(x,y) > 2^{j+1}\sigma^{\rho^*} - \sigma$ donde pela condição (i) do lema 11 e a hipótese de que $\sigma \leqq 1$, temos $d(x,y) > 0$ para todo inteiro j, não negativo. Logo para x não pertencente a B_j tem-se

$$M(x) = \lim_{\delta \to 0} \int_X k_{\delta}(x,y)a(y)d\mu(y) = \int_X k(x,y)a(y)d\mu(y)$$

ou ainda,

$$M(x) = \int_X (k(x,y) - k(x,x_o))a(y)d\mu(y)$$

para quase todo x, pois pela definição de a(y)

$$\int_X k(x,x_o)a(y)d\mu(y) = 0 \quad .$$

Observemos também que se x não pertence a B_j e y pertence à bola $B(x_o,\sigma)$ então $d(x,x_o) > 2\, d(y,x_o)^{1-\theta}$. Com efeito, como

$$d(x,x_o) \geq 2A2^j\sigma^{\rho^*} \geq 2A2^j d(y,x_o)^{\rho^*}$$

e $\rho^* < 1-\theta$, segue que $d(x,x_o) > 2A2^j d(y,x_o)^{1-\theta}$ pois $d(y,x_o) \leq 1$, o que prova que $d(x,x_o) > 2\, d(y,x_o)^{1-\theta}$ para todo inteiro j não negativo.

Portanto a condição (iv) da definição 7 nos dá,

$$|M(x)| \leq c.\int_{B(x_o,\sigma)} d(y,x_o)^{\varepsilon} d(x,x_o)^{-1 - \varepsilon/(1-\theta)} |a(y)|d\mu(y)$$

Da definição de (p,2) átomo e $d(y,x_o) \leq \sigma$ temos que

$$|M(x)| \leq c.\sigma^{\varepsilon + 1 - 1/p} d(x,x_o)^{-1 - \varepsilon/(1-\theta)}$$

e obtemos

(1.6) $$\int_{B_{j+1} \sim B_j} |M(x)|^{q'} d\mu(x) \leq$$

$$c.2^{j(1-q'-q'\varepsilon/(1-\theta))}\sigma^{\rho^*(1-q'-q'\varepsilon/(1-\theta)) + q'(\varepsilon + 1 - 1/p)}$$

Lembrando que $\rho^* = (\varepsilon + 1/2)/(\varepsilon/(1-\theta) + 1 - 1/q')$ resulta $\rho^*(1 - q' - q'\varepsilon/(1-\theta)) + q'(\varepsilon + 1 - 1/p) = q'(1/2 - 1/p)$. Substituindo em (1.6) e a seguir (1.6) em (1.5) vem que

$$I_2 \leq c.\sigma^{\rho^*\alpha + q'/2 - q'/p} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(\alpha + 1 - q' - q'\varepsilon/(1-\theta))}$$

Pelo lema 11 temos que $\alpha + 1 - q' - q'\varepsilon/(1-\theta) < 0$ e portanto a série $\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(\alpha+ 1- q'-q'\varepsilon/(1-\theta))}$ é convergente, e concluimos que

$$I_2 \leq c.\sigma^{\rho^*\alpha + q'/2 - q'/p} \tag{1.7}$$

De (1.4) e (1.7) tem-se que (1.2) se verifica.

Para provarmos (1.3) observamos que pelas condições (1.1) e (1.2), $M(x)$ é absolutamente integrável.

Seja $\chi_R(x)$ a função característica sobre a bola $B(x_o,R)$. Como $M(x)$ é integrável, podemos escrever

$$\int_X M(x)\,d\mu(x) = \lim_{R\to\infty} \int_X \chi_R(x) Ka(x)\,d\mu(x) = \lim_{R\to\infty} \int_X a(x) K^*(\chi_R)(x)\,d\mu(x).$$

Como $a(y)$ tem suporte limitado, pela condição (v) da definição 7 temos que

$$\int_X M(x)\,d\mu(x) = c.\int_X a(x)\,d\mu(x) = 0$$

o que prova (1.3) e conclui a demonstração da parte (i) do teorema.

A demonstração da parte (ii) é análoga à demonstração da parte (ii) do teorema 2, e portanto deixamos de fazê-la.

Teorema 9. Seja $0 < p \leq 1$ satisfazendo a desigualdade $1/p < (1/2 - \rho^*/q')/(1-\rho^*)$ e seja $M(x)$ uma função mensurável satisfazendo as condições (1.1), (1.2) e (1.3) da parte (i) do teorema 8. Então para toda função ϕ pertencente à Lip(1/p - 1) a função $M(x)$ (x) é absolutamente integrável em X. Além disso o funcional linear

$$F_M(\tilde{\phi}) = \int_X M(x)\phi(x)d\mu(x)$$

está bem definido e é limitado em *Lip*(1/p - 1).

Demonstração: Segue os mesmos passos da demonstração do teorema 3. Sejam $B_j = B(x_o, b^j\sigma)$ com $b > 1$, $\sigma \leq 1$ e j inteiro não negativo. Convencionamos $B_{-1} = \emptyset$. Seja ϕ uma função pertencente à Lip(1/p - 1) satisfazendo $m_{B(x_o,\sigma)}(\phi) = 0$. Escrevemos,

(1.8) $$\int_X |M(x)||\phi(x)|d\mu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B_j \sim B_{j-1}} |M(x)||\phi(x)|d\mu(x)$$

Pelas desigualdades de Hölder e Minkowski obtemos

$$\int_{B_j \sim B_{j-1}} |M(x)||\phi(x)|d\mu(x) \leq$$

$$\left(\int_{B_j \sim B_{j-1}} |M(x)|^{q'}d\mu(x)\right)^{1/q'}\left(\left(\int_{B_j} |\phi(x)-m_j|^q d\mu(x)\right)^{1/q} + |m_j|\mu(B_j)^{1/q}\right)$$

onde $m_j = m_{B_j}(\phi)$.

Da definição de $||\phi||_{Lip(1/p\ -\ 1)}$ e aplicando o lema à m_j resulta que

(1.9) $$\int_{B_j \sim B_{j-1}} |M(x)||\phi(x)|d\mu(x) \leq$$

$$\left(\int_{B_j \sim B_{j-1}} |M(x)|^{q'}d\mu(x)\right)^{1/q'} . c . ||\phi||_{Lip(1/p-1)} (b^j\sigma)^{1/p\ -1\ +1/q}$$

Agora, levando em conta que $\alpha > 0$ temos para $j \geq 1$ a integral que aparece no segundo membro de (1.9) é majorada por

$$(b^{j-1}\sigma)^{-\alpha/q'} (\int_X |M(x)|^{q'} d(x,x_o)^{\alpha} d\mu(x))^{1/q'}$$

donde pela condição (1.2) de $M(x)$ resulta que ela fica majorada por $c.b^{-j\alpha/q'}.\sigma^{1/2 - 1/p - \alpha/q'(1-\rho^*)}$. Para $j = 0$, pela condição (1.1) de $M(x)$ temos

$$(\int_{B_o} |M(x)|^{q'} d\mu(x))^{1/q'} \leq c.\sigma^{1/2 - 1/p}$$

e como $\rho^* < 1$, $\alpha > 0$, $\sigma \leq 1$ segue que

$$(\int_{B_o} |M(x)|^{q'} d\mu(x))^{1/q'} \leq c.\sigma^{1/2 -1/p -\alpha/q'(1-\rho^*)}$$

que vem ser a mesma estimativa do caso $j \geq 1$. Então temos que

$$\int_X |M(x)||\phi(x)|d\mu(x) \leq$$

$$c.\sigma^{(1/2 -1/q' -\alpha/q'(1-\rho^*))} ||\phi||_{Lip(1/p-1)} \sum_{j=0}^{\infty} b^{j(1/p-1/q'-\alpha/q')}$$

Do lema 11 tem-se que $\alpha > q'/p - 1$, o que implica a desigualdade $1/p - 1/q' - \alpha/q' < 0$, e portanto concluimos que a série $\sum_{j=0}^{\infty} b^{j(1/p -1/q' -\alpha/q')}$ é convergente pois $b > 1$. Ainda pelo lema 11 $\alpha < (q'/2 - 1)/(1-\rho^*)$ o que nos dá como consequência $1/2 - 1/q' - \alpha/q'(1-\rho^*) > 0$ e daí $\sigma^{1/2-1/q'-\alpha/q'(1-\rho^*)}$ menor ou igual a um pois $\sigma \leq 1$.

Segue que para $0 < p \leq 1$ e satisfazendo a desigualdade $1/p < (1/2 - \rho^*/q')/(1-\rho^*)$ temos

$$\int_X |M(x)||\phi(x)|d\mu(x) \leq c.||\phi||_{Lip(1/p - 1)}$$

onde c é uma constante positiva finita que independe de σ.

Se ψ é uma função qualquer do espaço Lip(1/p - 1), prova-se como no teorema 3 que $M(x)\psi(x)$ é absolutamente integrável e que $F_M(\bar{\psi})$ está bem definido e é limitado em *Lip*(1/p - 1), o que conclui a demonstração do teorema 9.

Teorema 10. Seja M(x) uma função satisfazendo as condições do teorema 8. Então temos que,

(i) existe uma sequência $\{a_n\}$ de (p,2) átomos e uma sequência $\{\lambda_n\}$ de números reais satisfazendo $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^p \leq C$, tal que $M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n(x)$, onde C é uma constante finita que independe de M(x).

(ii) Para toda $\bar{\phi}$ pertencente ao espaço *Lip*(1/p - 1), o funcional F_M definido no teorema 8 satisfaz,

$$F_M(\bar{\phi}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \int_X a_n(x)\phi(x)d\mu(x) \quad .$$

Demonstração: Vamos provar o teorema no caso em que M(x) satisfaz (1.1),(1.2) e (1.3) com $\sigma \leq 1$ do teorema 8. O outro caso conforme foi observado no final do teorema 3, foi provado em [9].

Sejam b_1, b_2 as constantes de (1.1) capítulo I, e seja $b > b_1/b_2$. Consideremos as bolas $B_j = B(x_o, b^j\sigma)$, com j inteiro não negativo e convencionamos $B_{-1} = \emptyset$. Denotemos por D_j,

$j \geq 0$, o conjunto $B_j \sim B_{j-1}$. Seja $M_j = \mu(D_j)^{-1} \int_{D_j} M(x)\,d\mu(x)$ e χ_{D_j} a função característica sobre D_j. Então

(1. $\quad M(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (M(x) - M_j)\chi_{D_j}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} M_j \chi_{D_j}(x)$

Observamos que se $s_j(x) = (M(x) - M_j)\chi_{D_j}(x)$ resulta que os suportes das $s_j(x)$ estão contidos nas bolas $B(x_o, b^j\sigma)$ para cada $j \geq 0$ e que também $\int_X s_j(x)\,d\mu(x) = 0$. Denotemos para cada $j \geq 0$

$$\gamma_j = ||s_j||_{q'}\ \mu(B_j)^{1/p - 1/q'} .$$

Então as funções $a_j^1(x)$ definidas por $s_j(x) = \gamma_j\ a_j^1(x)$ são (p,q') átomos. Mostremos que as γ_j são tais que $\sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j|^p \leq C_1$ onde C_1 é uma constante positiva finita que independe de $M(x)$. Pela desigualdade de Minkowski tem-se:

$$||s_j||_{q'} \leq \left(\int_{D_j} |M(x)|^{q'} d\mu(x)\right)^{1/q'} + |M_j|\ \mu(D_j)^{1/q'}$$

Agora da definição de M_j e pela desigualdade de Hölder temos

$$|M_j| \leq \mu(D_j)^{-1} \int_{D_j} |M(x)|\,d\mu(x) \leq$$

$$\mu(D_j)^{-1} \mu(D_j)^{1/q} \left(\int_{D_j} |M(x)|^{q'} d\mu(x)\right)^{1/q'}$$

donde,

$$||s_j||_{q'} \leq 2.\left(\int_{D_j} |M(x)|^{q'} d\mu(x)\right)^{1/q'} \qquad \text{para } j > 0$$

e $$||s_o||_{q'} \leq 2.\left(\int_{B_o} |M(x)|^{q'} d\mu(x)\right)^{1/q'}$$

Estimemos $(\int_{D_j} |M(x)|^{q'} d\mu(x))^{1/q'}$. Como $\alpha > 0$ temos que

$$(\int_{D_j} |M(x)|^{q'} d\mu(x))^{1/q'} \leq (b^{j-1}\sigma)^{-\alpha/q'} (\int_{D_j} |M(x)|^{q'} d(x,x_o)^{\alpha} d\mu(x))^{1/q'}$$

donde pela condição (1.2) de $M(x)$ resulta,

$$(\int_{D_j} |M(x)|^{q'} d\mu(x))^{1/q'} \leq c.b^{-j\alpha/q'}.\sigma^{\rho^*\alpha/q' +1/2 -1/p -\alpha/q'}$$

Portanto para $j > 0$ temos,

$$|\gamma_j|^p \leq c.b^{j(-\alpha/q' +1/p -1/q')p}.\sigma^{p(1/2 -1/q' -\alpha/q'(1-\rho^*))}$$

enquanto que para $j = 0$, lembrando que $q' > 2$, temos

$$|\gamma_o|^p \leq c.\sigma^{1/2 - 1/q'} \leq c .$$

Pelo lema 11 , $1/p - \alpha/q' - 1/q' < 0$ e $1/2 - 1/q' - \alpha/q'(1-\rho^*)>0$ decorrendo que a série $\sum_{j=1}^{\infty} b^{jp(1/p -\alpha/q' -1/q')}$ converge e que $\sigma^{1/2 -1/q' -\alpha/q'(1-\rho^*)} \leq 1$ pois $\sigma \leq 1$. Então concluimos que $\sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j|^p \leq C_1$, onde C_1 é uma constante finita que independe de $M(x)$. Mostramos então que $\sum_{j=0}^{\infty} s_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\gamma_j a_j^1(x)$ com $\sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j|^p \leq C_1$.

Provemos agora que $\sum_{j=0}^{\infty} M_j \chi_{D_j}(x)$ se escreve como $\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\gamma}_j\, a_j^2(x)$, onde os $a_j^2(x)$ são (p,q') átomos e os $\tilde{\gamma}_j$ satisfazem $\sum_{j=0}^{\infty} |\tilde{\gamma}_j|^p \leq C_2$, sendo C_2 uma constante finita que independe de $M(x)$.

Seja $\{t_j\}$ a sequência definida por

(1.11) $$t_j = \int_{X\sim B_{j-1}} M(x)\,d\mu(x) \quad , \quad j \geq 0$$

Notemos que da condição (1.3) resulta $t_o = \int_X M(x)d\mu(x) = 0$. Também, da definição dos t_j obtemos

$$t_j - t_{j+1} = \int_{D_j} M(x)\,d\mu(x) = \mu(D_j).M_j \quad .$$

Portanto tem-se que

$$\sum_{j=0}^{\infty} M_j \chi_{D_j}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(D_j)^{-1}(t_j - t_{j+1})\chi_{D_j}(x)$$

e daí como $t_o = 0$, temos

$$\sum_{j=0}^{\infty} M_j \,{}_{D_j}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j(\mu(D_j)^{-1}\chi_{D_j}(x) - \mu(D_{j-1})^{-1}\chi_{D_{j-1}}(x))$$

Seja $v_j(x)$ a função definida por

$$v_j(x) = t_j(\mu(D_j)^{-1}\chi_{D_j}(x) - \mu(D_{j-1})^{-1}\chi_{D_{j-1}}(x))$$

Temos que $\int_X v_j(x)d\mu(x) = 0$ e além disso os suportes das funções $v_j(x)$ estão contidos nas bolas $B(x_o, b^j\sigma)$ para cada j. Definindo $\tilde{\gamma}_j$ como sendo

$$\tilde{\gamma}_j = \mu(B_j)^{1/p - 1/q'}||v_j||_{q'}$$

então as funções $a_j^2(x)$ definidas por $v_j(x) = \tilde{\gamma}_j\, a_j^2(x)$ são (p,q') átomos.

Mostremos que $\sum_{j=0}^{\infty} |\tilde{\gamma}_j|^p \leq C_2$, onde C_2 é uma constante finita que independe de M(x). Pela desigualdade de Minkowski temos

$$||v_j||_{q'} \leq c.|t_j|(\mu(D_j)^{1/q' -1} + \mu(D_{j-1})^{1/q' -1}) \quad .$$

Agora como $b > b_1/b_2$, conforme foi visto na demonstração do teorema 4, temos $\mu(D_j) \geq c.\mu(B_j)$ e $\mu(D_{j-1}) \geq c.\mu(B_j)$, donde

$$||v_j||_{q'} \leq c.|t_j|\mu(B_j)^{1/q' -1}$$

De (1.11) temos

$$|t_j| \leq \int_{X\sim B_{j-1}} |M(x)|d(x,x_o)^{\alpha/q'} d(x,x_o)^{-\alpha/q'} d\mu(x)$$

e aplicando a desigualdade de Hölder vem que $|t_j|$ é majorado por

$$(\int_X |M(x)|^{q'} d(x,x_o)^{\alpha} d\mu(x))^{1/q'} (\int_{X\sim B_{j-1}} d(x,x_o)^{-\alpha/(q'-1)} d\mu(x))^{(q'-1)/q'}.$$

Pela condição (1.2) de $M(x)$ e levando em conta que $\alpha/(q'-1) > 0$, obtemos

$$|t_j| \leq c.b^{j(1-\alpha/q' -1/q')}.\sigma^{3/2 -1/p -1/q' -\alpha/q'(1-\rho^*)}$$

Portanto temos que

$$|\tilde{\gamma}_j|^p \leq c.b^{jp(1/p -1/q' -\alpha/q')}.\sigma^{p(1/2 -1/q' -\alpha/q'(1-\rho^*))}$$

donde se conclui pelo lema 11 que $\sum_{j=0}^{\infty}|\tilde{\gamma}_j|^p \leq C_2$, onde C_2 é uma constante finita que independe de $M(x)$.

Então de (1.10) temos $M(x)=\sum_{j=0}^{\infty}s_j(x)+\sum_{j=0}^{\infty}v_j(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j a_j(x)$ onde os λ_j são tais que $\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|^p \leq C$, com C uma constante finita que não depende de $M(x)$ e os $a_j(x)$ são (p,q') átomos e portanto $(p,2)$ átomos pois $q' > 2$, o que demonstra a parte (i) do teorema.

Provemos (ii). Seja $\overline{\phi}$ pertencente a *Lip*$(1/p - 1)$. Como $\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j| \leq (\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|^p)^{1/p} \leq C^{1/p}$ pois $p \leq 1$ e o funcional F_{a_j} é limitado em norma por um, a série $\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j F_{a_j}(\overline{\phi})$ é finita

De (1.10) e (1.11) temos que

$$\sum_{j=0}^{m} s_j(x) + \sum_{j=0}^{m} v_j(x) = M(x)\chi_{B_m}(x) + t_{m+1}\mu(D_m)^{-1}\chi_{D_m}(x) \quad .$$

Multiplicando por (x) e integrando em X obtemos

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j \int_X a_j(x)\phi(x)d\mu(x) = \int_{B_m} M(x)\phi(x)d\mu(x) +$$

$$t_{m+1}\mu(D_m)^{-1} \int_{D_m} \phi(x)d\mu(x)$$

Como, pelo teorema 9 $M(x)\phi(x)$ é absolutamente integrável, tomando o limite para m tendendo ao infinito resulta

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j F_{a_j}(\overline{\phi}) = \int_X M(x)\phi(x)d\mu(x) + \lim_{m\to\infty} (t_{m+1}\mu(D_m)^{-1}\int_{D_m} \phi(x)d\mu(x))$$

Logo, para provarmos a parte (ii) do teorema devemos mostrar que $\lim_{m\to\infty} (t_{m+1}\mu(D_m)^{-1} \int_{D_m} \phi(x)d\mu(x)) = 0$. Agora,

$$|t_{m+1}\mu(D_m)^{-1} \int_{D_m} \phi(x)d\mu(x)| \leqq |t_{m+1}||\mu(D_m)^{-1} \int_{D_m} \phi(x)d\mu(x)|$$

ou também, levando em conta que $\mu(D_m) \geqq c.\mu(B_m)$ o segundo membro da desigualdade fica majorado por

$$c.|t_{m+1}|\mu(B_m)^{-1}(\int_{B_m} |\phi(x) - m_{B_m}(\phi)|d\mu(x) + |m_{B_m}(\phi)|)$$

Portanto, aplicando a desigualdade de Hölder e considerando a definição de $||\phi||_{Lip(1/p\,-1)}$ resulta que a expressão acima fica majorada por

$$c.|t_{m+1}|(||\phi||_{Lip(1/p\,-1)}(b^m\sigma)^{1/p\,-1} + |m_{B_m}(\phi)|)$$

Pelo lema 2 levando em conta que $m_{B_o}(\phi) = 0$ temos que o segundo membro da desigualdade fica majorado por

$$c.|t_{m+1}|\,||\phi||_{Lip(1/p\ -1)}(b^m\sigma)^{1/p\ -1}$$

se $p < 1$ e majorado por

$$c.m.|t_{m+1}|\,||\phi||_{Lip(0)}$$

se $p = 1$. Agora da primeira parte da demonstração do teorema

$$|t_{m+1}| \leq c.b^{(m+1)(1-\alpha/q'\ -1/q')}.\sigma^{3/2\ -1/p\ -1/q'\ -\alpha/q'(1-\rho^*)}$$

que substituido na majoração quando $p < 1$ nos dá

$$|t_{m+1}\mu(D_m)^{-1}\int_{D_m}\phi(x)d\mu(x)| \leq$$

$$c.b^{m(1/p-\alpha/q'-1/q')}||\phi||_{Lip(1/p\ -1)}.\sigma^{1/2-1/q'-\alpha/q'(1-\rho^*)}$$

enquanto que para $p = 1$ temos

$$|t_{m+1}\mu(D_m)^{-1}\int_{D_m}\phi(x)d\mu(x)| \leq cmb^{m(1-\alpha/q'-1/q')}\sigma^{1/2-1/q'-\alpha/q'(1-\rho^*)}$$

Como por hipótese $0 < p \leq 1$ e satisfaz a condição $1/p < (1/2 - \rho^*/q')/(1-\rho^*)$ temos pelo lema 11 que se verificam $1/p -\alpha/q' -1/q' < 0$ e $1/2 - 1/q' -\alpha/q'(1-\rho^*) > 0$, donde $\sigma^{1/2\ -1/q'\ -\alpha/q'(1-\rho^*)} \leq 1$ pois $\sigma \leq 1$ e daí tanto para $p < 1$ como para $p = 1$ tomando o limite quando m tende ao infinito , $t_{m+1}\ \mu(D_m)^{-1}\int_{D_m}\phi(x)d\mu(x)$ tende para zero, o que prova a parte (ii) do teorema.

Definição 8. Seja k(x,y) um núcleo integral singular "fra camente forte modificado" e seja ϕ uma função pertencente a $Lip(1/p - 1)$, onde $0 < p \leq 1$ e satisfaz a desigualdade $1/p < (1/2 - \rho^*/q')/(1-\rho^*)$. Seja B a bola de centro x_o e raio σ $\sigma \geq 1$. Definimos para y em B a função $\tilde{K}_B^{\#}(\phi)(y)$ como

$$\tilde{K}_B^{\#}(\phi)(y) = \lim_{\eta\to 0} \int_{B(x_o,2A\sigma)} k_\eta(x,y)\phi(x)d\mu(x)$$

onde o limite é o limite fraco L^2 em B, e $k_\eta(x,y)$ como na definição 7.

A existência de $\tilde{K}_B^{\#}(\phi)(y)$ prova-se com um raciocínio análogo ao da prova da existência de $K_B^{\#}(\phi)(y)$ que foi feita no capítulo II.

Os lemas que se seguem podem serem provados seguindo os passos dos lemas correspondentes do capítulo II.

Lema 12. Sejam $B_1 = B(\xi_1, \tau_1)$ e $B_2 = B(\xi_2, \tau_2)$ tais que $\tau_2 > \tau_1 > 1$, e B_1 contida em B_2. Então para quase todo y em B_1 e para ϕ pertencente a $Lip(1/p - 1)$ temos que

$$\tilde{K}_{B_2}^{\#}(\phi)(y) = \tilde{K}_{B_1}^{\#}(\phi)(y) .$$

Em consequência do lema 12 fica bem definida $\tilde{K}^{\#}(\phi)$ como $\tilde{K}^{\#}(\phi) = \tilde{K}_B^{\#}(\phi)$ quase sempre em B.

Lema 13. Seja ϕ pertencente a $Lip(1/p - 1)$ com $0 < p \leq 1$ satisfazendo $1/p < (1/2 - \rho^*/q')/(1-\rho^*)$. Seja $k(x,y)$ um núcleo integral singular "fracamente forte modificado". Então se y pertence à bola $B(x_o,\sigma)$ com $0 < \sigma \leq 1$ temos que

$$\int_{X\sim B(x_o,2A\sigma^{\rho^*})} |k(x,y) - k(x,x_o)||\phi(x)|d\mu(x) \leq$$
$$c.d(y,x_o)^{\varepsilon}(||\phi||_{Lip(1/p\ -1)}(2A\sigma^{\rho^*})^{1/p\ -1\ -\varepsilon/(1-\theta)} +$$
$$|m_{B(x_o,2A\sigma^{\rho^*})}(\phi)|(2A\sigma^{\rho^*})^{-\varepsilon/(1-\theta)} \quad .$$

Lema 14. Seja ϕ uma função pertencente a Lip(1/p - 1) e $B = B(x_o,\tau)$, $0 < \tau \leq 1$. Então para quase todo y em B temos

$$\tilde{K}^{\#}(\phi)(y) = \lim_{\eta\to 0} \int_{B(x_o,2A\sigma^{\rho^*})} k_\eta(x,y)\phi(x)d\mu(x) +$$
$$\int_{X\sim B(x_o,2A\sigma^{\rho^*})} (k(x,y) - k(x,x_o))\phi(x)d\mu(x) + C$$

onde o limite é o limite fraco L^2 em B e C é uma constante finita que depende apenas de τ e ϕ não dependendo de y.

Lema 15. $\tilde{K}^{\#}(1)$ = constante

Teorema 11. Seja k(x,y) um núcleo integral singular "fracamente forte modificado" e seja pertencente a Lip(1/p - 1), com $0 < p \leq 1$ satisfazendo $1/p < (1/2 - \rho^*/q')/(1-\rho^*)$. Então existe constante finita c tal que

$$||\tilde{K}^{\#}(\phi)||_{Lip(1/p\ -1)} \leq c.||\phi||_{Lip(1/p\ -1)} \quad .$$

Demonstração: Vamos demonstrar o teorema para bolas com raio menor ou igual à um, pois no outro caso a demonstração é análoga a do teorema 5. Seja portanto B uma bola em X de raio $\tau \leq 1$ e B_1 a bola de mesmo centro que B e raio $2A\tau^{\rho^*}$. Seja ϕ pertencente a Lip(1/p - 1) tal que $m_{B_1}(\phi) = 0$.

Temos que

$$(1.12)\qquad (\mu(B)^{-1}\int_B |\tilde{K}^{\#}(\phi)(y) - m_B(\tilde{K}^{\#}(\phi))|^2 d\mu(y))^{1/2} \leq$$

$$2.(\mu(B)^{-1}\int_B |\tilde{K}^{\#}(\phi)(y)|^2 d\mu(y))^{1/2}.$$

Agora, existe função $g(y)$ pertencente a $L^2(B,\mu)$ com $||g||_2 = 1$ tal que

$$(\int_B |\tilde{K}^{\#}(\phi)(y)|^2 d\mu(y))^{1/2} = \int_B g(y)\tilde{K}^{\#}(\phi)(y)d\mu(y).$$

Substituindo $\tilde{K}^{\#}(\phi)$ pela expressão do lema 14 com $C = 0$, temos

$$(1.13)\qquad (\int_B |\tilde{K}^{\#}(\phi)(y)|^2 d\mu(y))^{1/2} =$$

$$\lim_{\eta\to 0}\int_B g(y)(\int_{B_1} k_\eta(x,y)\phi(x)d\mu(x))d\mu(y) \quad +$$

$$\int_B g(y)(\int_{X\sim B_1}(k(x,y) - k(x,x_o))\phi(x)d\mu(x))d\mu(y) = I_1 + I_2$$

Trocando a ordem de integração em I_1 temos pela condição (iii) da definição 7 que

$$I_1 = \int_{B_1} Kg(x)\phi(x)d\mu(x) .$$

ou seja,
$$I_1 = \int_{B_1} Kg(x)(\phi(x) - m_{B_1}(\phi))d\mu(x)$$

pois $m_{B_1}(\phi) = 0$. Pela desigualdade de Hölder obtemos

$$I_1 \leq (\int_{B_1} |Kg(x)|^{q'} d\mu(x))^{1/q'}(\int_{B_1} |\phi(x) - m_{B_1}(\phi)|^q d\mu(x))^{1/q}$$

donde da definição de $||\phi||_{Lip(1/p\ -1)}$ e condição (ii) da definição 7 resulta

$$|I_1| \leq c.||\phi||_{Lip(1/p\ -1)}\ \mu(B_1)^{1/p\ -\ 1/q'}$$

Estimemos I_2. Pelo lema 13 e levando em conta que $m_{B_1}(\phi) = 0$ temos,

$$|I_2| \leq c.\int_B |g(y)|d(y,x_o)^{\varepsilon}||\phi||_{Lip(1/p-1)}\mu(B_1)^{1/p\ -1\ -\varepsilon/(1-\theta)}d\mu(y)$$

ou seja, como y pertence a $B(x_o, \tau)$

$$|I_2| \leq c.\tau^{\varepsilon}||\phi||_{Lip(1/p-1)}\mu(B_1)^{1/p\ -1\ -\varepsilon/(1-\theta)}\int_B |g(y)|d\mu(y)$$

Pela desigualdade de Schwarz resulta

$$|I_2| \leq c.\tau^{\varepsilon}||\phi||_{Lip(1/p-1)}\mu(B_1)^{1/p\ -1\ -\varepsilon/(1-\theta)}\mu(B)^{1/2}$$

isto é,

$$|I_2| \leq c.||\phi||_{Lip(1/p-1)}.\tau^{\rho^*(1/p\ -1\ -\varepsilon/(1-\theta))+\ \varepsilon\ +1/2}$$

Substituindo $\varepsilon + 1/2$ em termos de ρ^* obtemos

$$|I_2| \leq c.||\phi||_{Lip(1/p\ -1)}\mu(B_1)^{1/p\ -\ 1/q'}$$

Agora como $1/p < (1/2 - \rho^*/q')/(1-\rho^*)$ temos que $1/p - 1/2 < \rho^*(1/p - 1/q')$, donde $\tau^{1/p\ -1/2} \geq \tau^{\rho^*(1/p\ -1/q')}$ pois $\tau \leq 1$. De (1.1) do capítulo I temos as desigualdades

$$\mu(B_1)^{1/p\ -1/q'} \leq c.\tau^{\rho^*(1/p\ -1/q')} \leq c.\tau^{1/p\ -1/2} \leq c.\mu(B)^{1/p\ -1/2}$$

Portanto I_1 e I_2 tem amesma majoração que vem a ser

$$c.||\phi||_{Lip(1/p\ -1)}\mu(B)^{1/p\ -\ 1/2}$$

Substituindo esta estimativa em (1.13) e (1.13) em (1.12) temos

$$(\mu(B)^{-1}\int_B |\tilde{K}^{\#}(\phi)(y) - m_B(\tilde{K}^{\#}(\phi))|^2 d\mu(y))^{1/2} \leq$$

$$c.||\phi||_{Lip(1/p\ -1)}\,\mu(B)^{1/p\ -\ 1} \quad .$$

Da observação inicial temos que $\tilde{K}^{\#}(\phi)$ pertence ao espaço $Lip(1/p - 1)$ e $||\tilde{K}^{\#}(\phi)||_{Lip(1/p\ -1)} \leq c.||\phi||_{Lip(1/p\ -1)}$, o que demonstra o teorema.

Observamos que se ϕ_1 e ϕ_2 pertencem a $Lip(1/p - 1)$ e são tais que $\phi_1 - \phi_2$ = constante, então pelo lema 15 resulta $\tilde{K}^{\#}(\phi_1 - \phi_2)$ = constante.

Definindo $\tilde{K}^{\#}(\overline{\phi})$ como a classe de todas as funções em X que diferem de $\tilde{K}^{\#}(\phi)$ por uma constante, pelo que foi provado no teorema 11 temos:

Teorema 12. Nas condições do teorema 11 se $\overline{\phi}$ pertence a *Lip*$(1/p - 1)$ então $\tilde{K}^{\#}(\overline{\phi})$ pertence à *Lip*$(1/p - 1)$. Além disso, existe constante c finita tal que

$$||\tilde{K}^{\#}(\overline{\phi})||_{Lip(1/p\ -1)} \leq c.||\overline{\phi}||_{Lip(1/p\ -1)} \quad .$$

Lema 16. Seja $a(x)$ uma função pertencente a $L^2(X,\mu)$ com suporte numa bola $B(x_o,\tau)$, $\tau \geq 1$, satisfazendo $\int_X a(x)d\mu(x) = 0$. Seja $k(x,y)$ um núcleo integral singular "fracamente forte modificado". Então para toda $\overline{\phi}$ pertencente a *Lip*$(1/p - 1)$ temos que

$$< K(a)\ ,\ \overline{\phi} > = < a\ ,\ \tilde{K}^{\#}(\overline{\phi})>.$$

Demonstração: Análoga à do lema 7 do capítulo II.

Teorema 13. Seja $k(x,y)$ um núcleo integral singular "fracamente forte modificado" e seja $0 < p \leq 1$ satisfazendo a desigualdade $1/p < (1/2 - \rho^*/q')/(1-\rho^*)$. Seja f pertencente a H^p, isto é, $f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i$, onde $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p < \infty$ e os a_i são $(p,2)$ átomos. Então o operador $Kf = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i K(a_i)$ está bem definido e além disso K é linear e existe uma constante c finita independente de f tal que,

$$||Kf||_{H^p} \leq c.||f||_{H^p} \quad .$$

Demonstração: A demonstração é feita de modo análogo à demonstração do teorema 7.

Comentário : Observamos que os resultados para os operadores integrais singulares "fracamente fortes" obtidos no capítulo II ainda permanecem válidos se consideramos uma nova versão para os referidos operadores. Em ambos os casos temos a limitação em H^p com a diferença de que os conjuntos de valores de p não é o mesmo de um caso para outro. Vamos verificar a seguir que o conjunto dos $0 < p \leq 1$ em que temos a limitação do operador integral singular "fracamente forte" em H^p contém o conjunto dos $0 < p \leq 1$ para os quais a nova versão do operador é limitado em H^p. Para isto basta observarmos que se substituirmos ρ e ρ^* respectivamente em $1/p < (1/q - \rho/2)/(1-\rho)$ e $1/p < (1/2 - \rho^*/q')/(1-\rho^*)$ temos:

$$1/p < 1/2 + \gamma\ (\varepsilon/(1-\theta) + 1/2)/(\varepsilon/(1-\theta) + \gamma - \varepsilon))$$

e

$$1/p < 1/2 + \gamma\ (\varepsilon + 1/2)/(\varepsilon/(1-\theta) + \gamma - \varepsilon))$$

do que segue a nossa afirmação pois $0 < \theta < 1$.

B I B L I O G R A F I A

[1] . Coifman, R. R., A real variable characterization of H^p, Studia Mathematica, 51(1974), 267-272.

[2] . Coifman, R. R. and Weiss, G., Analyse Harmonique Non-Comutative sur Certains Espaces Homogenes, Lecture Notes in Mathematics, vol. 242, Springer Verlag, Berlin(1971).

[3] . Duren, P. L., Romberg, B. W. and Shields, A. L., Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$, J. Reigne Angew. Math. 238(1969), 32-60.

[4] . Fefferman, C. L., Inequalities for strongly singular convolution operators, Acta Mathematica, 124(1970), 9-36.

[5] . Fefferman, C. L. and Stein, E. M., H^p spaces of several variables, Acta Mathematica, 129(1972), 137-194.

[6] . Hirschmann, I. I. Jr., On multiplier transformations, Duke Mathematical Journal, 26(1959), 222-242.

[7] . John, F. and Nirenberg, L., On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure and Applied Math. 14(1961), 415-426.

[8] . Macias, R., Interpolation theorems on generalized Hardy spaces, Ph. D. Thesis, Washington University, Missouri (1974).

[9] . Macias, R. and Segovia, C., Singular integrals on generalized Lipschitz and Hardy spaces, Studia Mathematica, 65(1978).

[10] . Stein, E. M., Singular integrals, harmonic functions and differentiability properties of functions of several variables, Proc. Symp. in Pure Math. 10(1967), 316-335.

[11] . Wainger, S., Special trigonometric series in k dimensions, Memoirs Am. Math. Soc., 59(1965).

[12] . Zygmund, A., Trigonometric series, Cambridge University Press, New York, 1959.