



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Equivalências e Representantes Canônicos de Ideais Abelianos e Estruturas quase-Complexas

Tese de Doutorado

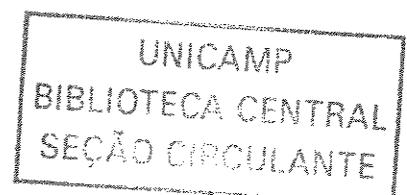
Adélia Conceição Diniz¹

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Co-orientador: Prof. Dr. Nir Cohen

Co-orientador: Prof. Dr. Caio José Colleti Negreiros

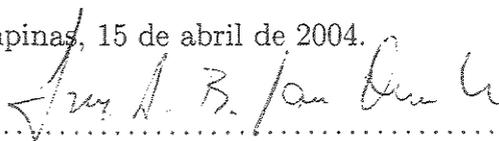
¹Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES



Equivalências e Representantes Canônicos
de Ideais Abelianos e Estruturas quase-Complexas

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Adélia Conceição Diniz e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 15 de abril de 2004.



Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin
Orientador



Prof. Dr. Nir Cohen
Co-orientador



Prof. Dr. Caio José Colleti Negreiros
Co-orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin(Orientador) (IMECC/UNICAMP)
2. Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (IMECC/UNICAMP)
3. Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino (IMECC/UNICAMP)
4. Prof. Dr. Frank Michael Forger (IME/USP)
5. Prof. Dr. Antonio Roberto da Silva (UFRJ)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

200408016

UNIDADE BC
Nº CHAMADA T/UNICAMP
D615e
V _____ EX _____
TOMBO BC/ 58276
PROC 16-117-04
C _____ D X _____
PREÇO R\$ 11,00
DATA 01/06/04
Nº CPD _____

CM00197832-0

BIB ID 316754

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Diniz, Adélia Conceição

D615e Equivalências e representantes canônicos de ideais abelianos e estruturas quase-complexas / Adélia Conceição Diniz -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2004.

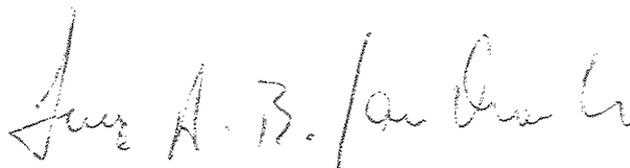
Orientador : Luiz Antonio B. San Martin

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

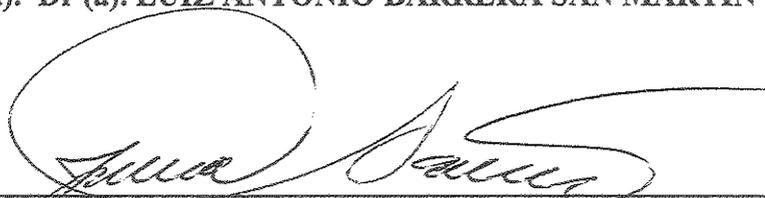
1. Lie, Grupos de. 2. Lie, Algebras de. 3. Espaços homogêneos.
I. San Martin, Luiz Antonio Barrera. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 15 de abril de 2004 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN



Prof. (a). Dr (a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS



Prof. (a). Dr (a). PAULO REGIS CARON RUFFINO



Prof. (a). Dr (a). FRANK MICHAEL FORGER



Prof. (a). Dr (a). ANTONIO ROBERTO DA SILVA

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter tido o privilégio de estudar na UNICAMP e por ter sido orientada pelos professores: Luiz Antonio Barrera San Martin, Nir Cohen e Caio José Colleti Negreiros. Quero deixar registrados, a minha gratidão e o meu reconhecimento da importância que estes três professores tiveram na minha formação. Agradeço também por ter feito grandes amigos como: Rita, Marina, Dirceu, Edson, Fernando dos Santos e Paula, Sofia, Paulo Cesar (o PC), Amauri, Evandro, Rogério Casagrande, Cleusiane e Humberto, dos quais não me esquecerei e que estarão guardados no meu coração. Agradeço a toda minha família, por terem me apoiado direta ou indiretamente e por terem acreditado na minha capacidade. Agradeço aos funcionários da secretaria de pós graduação em matemática: Tânia, Cidinha e Ednaldo pela paciência, amizade e colaboração. Em pouco tempo, conheci: Ronaldo Ribeiro Alves, meu colega de trabalho, e já quero agradecer-lhe pelo apoio e palavras de incentivo. Agradeço também ao professor Plínio por ter indicado o livro de Narayana e ao seu aluno Milov pelas sugestões. Agradeço especialmente ao amigo Rogério Casagrande pela imensa ajuda com o latex e pela sua disposição em fazer os desenhos no Xfig.

Aos meus pais: Geraldo Vaz
Diniz e Maria Leite Diniz.

Resumo

Um dos problemas que ficaram em aberto em [15], foi o de determinar representantes canônicos para as classes de equivalência das estruturas quase-complexas invariantes $(1,2)$ -admissíveis, sob a ação do grupo de Weyl. Seja \mathbb{F} uma variedade de flags maximal associada a uma álgebra de Lie semi-simples complexa de dimensão finita. Uma estrutura quase-complexa invariante sobre \mathbb{F} é dita $(1,2)$ -admissível, se existir uma métrica invariante tal que a estrutura, juntamente com a métrica, forma um par invariante $(1,2)$ -simplético. O artigo acima mostra que todo par invariante $(1,2)$ -simplético pode ser colocado na forma de ideal abeliano. Portanto, cada classe de equivalência das estruturas $(1,2)$ -admissíveis, admite um representante que está na forma de ideal abeliano. Além disso, o subgrupo de Weyl que preserva a forma de ideal abeliano dentro de cada classe, coincide com o subgrupo que deixa invariante o diagrama de Dynkin estendido. Deste modo, para encontrar representantes canônicos, é necessário entender melhor a ação do subgrupo no conjunto dos ideais abelianos. A descrição inicial dessa ação, a que foi dada em [15], é muito complicada, o que tem dificultado o entendimento completo das órbitas. Por isso, é conveniente procurar uma outra descrição dessa ação, isto é, outra maneira de representar o conjunto dos ideais abelianos e a ação do subgrupo nesse conjunto. O objetivo desse trabalho é apresentar uma descrição alternativa dessa ação e, em seguida, exibir representantes canônicos para as classes de equivalência, segundo essa nova descrição, bem como o número de classes.

Abstract

One of the problems left open in [15] was the determination of canonical representatives for the equivalence classes of invariant $(1, 2)$ -admissible almost complex structures, under the action of the Weyl group. Let \mathbb{F} be a maximal flag manifold, associated with a finite-dimensional complex semi-simple Lie algebra. An invariant almost complex structure over \mathbb{F} is called $(1, 2)$ -admissible if there exists an invariant metric so that the structure, together with the metric, forms an invariant $(1, 2)$ -symplectic pair. The above mentioned paper shows that every invariant $(1, 2)$ -symplectic pair can be transformed, under the action of the Weyl group, to another pair in abelian ideal form. This way, every equivalence class of $(1, 2)$ -admissible structures admits a representative in abelian ideal form. Moreover, the subgroup of the Weyl group which preserve the abelian ideal form in each class, coincides with the subgroup which leave invariant the extended Dynkin diagram. Thus, in order to find canonical representatives it is necessary to better understand the action of this subgroup on the set of abelian ideals. The original description given for this action in the [15], is quite complicated and does not permit an easy analysis of the orbits. It is, therefore, tempting to find other descriptions of this action, namely, other ways of representing the set of abelian ideals and the action of the subgroup on this set. The objective of this work is to provide alternative descriptions of this action and subsequently, find canonical representative for the equivalence classes, according to the new descriptions, as well as calculating the number of these classes.

Sumário

Resumo	iii
Abstract	iv
Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Álgebras de Lie semi-simples e sistemas de raízes	5
1.2 Estruturas quase complexas invariantes	6
1.3 Métricas invariantes	6
1.4 Álgebra afim	7
1.5 Alcovas	9
2 Forma de ideal abeliano e ação de $\mathcal{W}_{\mathfrak{g}}$	11
2.1 Estruturas quase-complexas na forma de ideal abeliano	11
2.2 Uma descrição da ação de $\mathcal{W}_{\mathfrak{g}}$	16
3 O Caso A_l	17
3.1 Realização canônica das raízes em A_l	18
3.2 Uma representação alternativa de $2A_0$	18
3.3 Característica de uma alcova	24
3.4 Representantes e número de classes com $k \geq 1, n \geq 3k - 2$	25
3.4.1 Classes com característica $k = 1, n \geq 2$	26
3.4.2 Classes com característica $k = 2, n \geq 4$	27
3.4.3 Classes com característica $k = \frac{n+1}{2}$	29
3.4.4 Número de classes com característica $k \geq 3, n \geq 3k - 2$	30

3.5	Número de classes para o caso A_{p-1} , com p primo	44
3.6	Número de classes para o caso A_{n-1} , n sendo uma potência de dois	45
4	O Caso B_l	47
4.1	Realização canônica das raízes em B_l	47
4.2	Uma descrição da ação de \mathcal{W}_{Σ}	47
5	O Caso C_l	52
5.1	Realização canônica das raízes em C_l	52
5.2	Uma descrição da ação de \mathcal{W}_{Σ}	53
5.3	O Caso C_l , com l par	54
5.4	O Caso C_l , com l ímpar	59
6	O Caso D_l	63
6.1	Realização canônica das raízes em D_l	63
6.2	Uma descrição da ação de \mathcal{W}_{Σ}	63
7	O Caso E_6	72
7.1	Uma descrição da ação de \mathcal{W}_{Σ}	72
7.2	Cálculo das órbitas pela ação de λ	75
8	Estruturas quase-complexas harmônicas	82
8.1	Energia Vertical	83
	Bibliografia	89

Introdução

Uma estrutura quase-complexa sobre uma variedade diferenciável real M é um campo tensorial J que é, em cada ponto $x \in M$, um endomorfismo do espaço tangente $T_x M$, tal que $J^2 = -1$, onde 1 denota a aplicação identidade de $T_x M$. Uma variedade com uma estrutura quase-complexa fixada é chamada de variedade quase complexa. É importante observar que toda variedade quase complexa tem dimensão par e é orientável. Dizemos que uma variedade quase complexa (M, J) é quase Hermitiana (ou que J é quase Hermitiana), se M admitir uma métrica Riemanniana g , satisfazendo $g(JX, JY) = g(X, Y)$, para quaisquer $X, Y \in TM$.

Dada uma variedade quase Hermitiana (M, J, g) , seja $\Omega(X, Y) := g(X, JY)$, $X, Y \in TM$, a forma de Kähler correspondente. Dizemos que (M, J, g, Ω) é $(1, 2)$ -simplética se

$$d\Omega(X, Y, Z) = 0,$$

quando um dos vetores X, Y, Z é do tipo $(1, 0)$ e os demais são do tipo $(0, 1)$.

Sejam agora \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples complexa e $\mathbb{F} = G/P$ a variedade de flags maximal associada, onde G é um grupo de Lie complexo com álgebra de Lie \mathfrak{g} e $P \subset G$ é um subgrupo parabólico minimal. Seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan e denote por Π o conjunto de raízes para o par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Toda estrutura quase-complexa invariante J sobre \mathbb{F} , (que denotaremos por *iacs*), é descrita por um conjunto de sinais $\{\epsilon_\alpha = \pm 1 \mid \alpha \in \Pi\}$, com $\epsilon_{-\alpha} = -\epsilon_\alpha$. Analogamente, uma métrica invariante Λ sobre \mathbb{F} é dada por um conjunto de números positivos $\{\lambda_\alpha > 0 \mid \alpha \in \Pi\}$, com $\lambda_{-\alpha} = \lambda_\alpha$. Se considerarmos uma *iacs* J e uma métrica Riemanniana invariante Λ sobre \mathbb{F} , teremos que (\mathbb{F}, J, Λ) é uma variedade quase Hermitiana. (*Observe [13]*).

Dizemos que uma *iacs* sobre \mathbb{F} é $(1, 2)$ -admissível, se existir uma métrica invariante Λ tal que o par (J, Λ) é $(1, 2)$ -simplético. Neste trabalho, estudaremos as

classes de equivalência das estruturas quase complexas $(1, 2)$ -admissíveis, sob a ação do grupo de Weyl \mathcal{W} . O artigo [15] mostra que se $(J_1 = \{\epsilon_\alpha\}, \Lambda = \{\lambda_\alpha\})$ é um par invariante $(1, 2)$ -simplético, então J_1 pode ser colocada na forma de ideal abeliano, isto é, existe um sistema simples de raízes Σ , com correspondente sistema de raízes positivas Π^+ , tais que o conjunto

$$\Phi = \Phi(J_1, \Sigma) = \{\alpha \in \Pi^+ \mid \epsilon_\alpha = -1\}$$

satisfaz as duas seguintes propriedades:

- Se $\alpha \in \Phi$ e $\beta \in \Pi^+$ são tais que $\alpha + \beta$ é raiz, então $\alpha + \beta \in \Phi$.
- Se α, β estão em Φ , então $\alpha + \beta$ não é raiz.

Isto significa que existe um elemento $w \in \mathcal{W}$, tal que $J_1 = wJ_2$, onde J_2 é uma *iacs* que está na forma de ideal abeliano e, neste caso, dizemos que J_1 é equivalente a J_2 , pela ação do grupo de Weyl \mathcal{W} . Portanto, cada classe de equivalência das estruturas $(1, 2)$ -admissíveis, admite um representante que está na forma de ideal abeliano. Além disso, os elementos do grupo de Weyl que preservam a forma de ideal abeliano dentro de cada classe, são dados pela seguinte Proposição, cuja prova se encontra em ([12], página 51):

Proposição 0.1 *Fixado um sistema simples de raízes Σ , seja $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup \{-\mu\}$ o diagrama estendido, onde μ é a raiz máxima relativa a Σ . Se os pares invariantes (J_1, Λ_1) e (J_2, Λ_2) são equivalentes e estão na forma de ideal abeliano com relação a Σ , então existe $w \in \mathcal{W}$, tal que $w\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}$ e $(J_2, \Lambda_2) = w(J_1, \Lambda_1)$. Por outro lado, se (J_1, Λ_1) é $(1, 2)$ -simplético, está na forma de ideal abeliano com relação a Σ e $w \in \mathcal{W}$ é tal que $w\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}$, então $(J_2, \Lambda_2) := w(J_1, \Lambda_1)$ está na forma de ideal abeliano com relação ao mesmo Σ .*

Portanto, duas *iacs* estão na forma de ideal abeliano em relação ao mesmo Σ se, e somente se, elas são equivalentes pela ação do subgrupo de Weyl que deixa invariante o diagrama de Dynkin estendido. Vamos usar a mesma notação $\mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}}$ de [15], para indicar este subgrupo, isto é,

$$\mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}} = \{w \in \mathcal{W} \mid w\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}\}.$$

Deste modo, para encontrar representantes canônicos, é necessário entender melhor a ação do grupo $\mathcal{W}_{\mathfrak{h}}$ no conjunto dos ideais abelianos. A descrição inicial dessa ação, (a que foi dada em [15]), é muito complicada, o que tem dificultado a descrição explícita das órbitas. Por isso, é conveniente procurar outras maneiras de representar o conjunto dos ideais abelianos e a ação do grupo $\mathcal{W}_{\mathfrak{h}}$ nesse conjunto.

Para dar uma interpretação geométrica para as *iacs* $(1, 2)$ -admissíveis, considere o conjunto das alcovas de \mathfrak{h} . Para cada alcova A , defina a estrutura quase-complexa afim $J(A) = \{\epsilon_\alpha(A) \mid \alpha \in \Pi\}$, da seguinte maneira:

$$\epsilon_\alpha(A) := (-1)^{k_\alpha(A)},$$

onde $\{k_\alpha(A) \mid \alpha \in \Pi\}$ são as coordenadas da alcova A . A interpretação geométrica desejada é, então descrita da seguinte forma: Em [15] é provado que toda estrutura quase-complexa invariante afim é $(1, 2)$ -admissível e reciprocamente, toda *iacs* $(1, 2)$ -admissível é afim.

A tese está escrita da seguinte maneira:

No capítulo 2 provamos o Teorema 2.5, que diz que uma estrutura afim $J(A)$ está na forma de ideal abeliano se, e somente se, a alcova A está contida no conjunto $2A_0 = \{2x \mid x \in A_0\}$, onde A_0 é a alcova básica. Este resultado nos permite concluir que para determinar representantes canônicos para as classes de equivalência, precisamos descrever explicitamente a ação do grupo $\mathcal{W}_{\mathfrak{h}}$ no conjunto das alcovas de $2A_0$. Além do teorema, provamos outros resultados que servirão de referência para os capítulos posteriores.

No capítulo 3, damos uma representação alternativa das alcovas de $2A_0$ (por simplexos contidos em \mathbb{R}^{l+1}) e uma descrição da ação de $\mathcal{W}_{\mathfrak{h}}$ no conjunto dessas alcovas, para o caso A_l . Aqui, exibimos representantes canônicos para as classes de equivalência, segundo essa descrição, bem como o número de classes, apenas para certos valores de $n = l + 1$. Definimos a característica k de uma alcova contida no conjunto $2A_0$ e mostramos que, para os casos A_{n-1} , com $1 \leq k \leq \frac{n+2}{3}$ e $k = \frac{n+1}{2}$, é possível exibir um representante canônico para cada classe com característica k e contar o número dessas classes. Na verdade, o resultado mais importante deste capítulo é justamente o Teorema 2.5 que nos dá uma fórmula explícita para se calcular o número de classes de equivalência que têm uma dada característica k , com $1 \leq k \leq \frac{n+2}{3}$ e $k = \frac{n+1}{2}$. Para os outros valores de k e n : $\frac{n+2}{3} < k \leq \frac{n}{2}$, $n \geq 3$,

não conseguimos separar as classes de equivalência. Por outro lado, contamos o número de classes para os casos A_{n-1} , com n sendo um número primo e A_{n-1} , com n sendo uma potência de dois. Só que, nestes dois últimos casos, não separamos as classes por característica k , quando k satisfaz: $\frac{n+2}{3} < k \leq \frac{n}{2}$, $n \geq 3$.

Nos capítulos 4, 5 e 6, apresentamos uma descrição do grupo $\mathcal{W}_{\frac{5}{2}}$ no conjunto dos ideais abelianos, para os casos B_l, C_l e D_l , respectivamente. Também contamos o número de classes de equivalência, segundo essa descrição, em cada caso e explicitamos uma coleção de ideais abelianos que constituem um conjunto completo de representantes canônicos para as classes.

No capítulo 7, apresentamos uma descrição da ação do grupo $\mathcal{W}_{\frac{5}{2}}$ no conjunto dos ideais abelianos para o caso E_6 e explicitamos todas as classes de equivalência. Descobrimos que existem exatamente 4 pontos fixos pela ação e que temos uma quantidade de 24 classes, sendo 4 classes com apenas um elemento e 20 classes com 3 elementos. O que fizemos aqui foi associar a cada uma das $2^6 = 64$ alcovas de $2A_0$, uma sequência do tipo (a_1, \dots, a_t) , com $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_t \leq 6$, $1 \leq t \leq 6$ e determinar a órbita do elemento $w_{a_1} + \dots + w_{a_t}$, onde $\{w_1, \dots, w_l\}$ é a base dual do sistema simples de raízes $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, para obter a separação das classes por sequências. Porém, não está claro como relacionar as estruturas quase-complexas descritas por essa ação, com as estruturas afins que estão na forma de ideal abeliano.

No capítulo 8, estudamos as estruturas quase-complexas invariantes harmônicas, seguindo o artigo [21]. O objetivo inicial era o de interpretar geometricamente as estruturas $(1, 2)$ -admissíveis sobre uma variedade de flags maximal. Porém, verificamos que toda estrutura quase-complexa invariante, definida sobre uma variedade de flags maximal é harmônica, no sentido descrito em [21].

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é introduzir conceitos e notações que serão utilizados no decorrer do trabalho.

1.1 Álgebras de Lie semi-simples e sistemas de raízes

Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples complexa de dimensão finita, \mathfrak{h} uma subálgebra de Cartan, Π o conjunto de raízes para o par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, de forma que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_{\alpha} ,$$

onde $\mathfrak{g}_{\alpha} = \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{h}\}$ denota o correspondente espaço de raízes uni-dimensional. Sejam ainda $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ um sistema simples de raízes com correspondente sistema de raízes positivas $\Pi^+ \subset \Pi$. Denote por \mathfrak{h}^* o espaço dual de \mathfrak{h} e por $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* = \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{R}\alpha_i$ o subespaço real gerado pelas raízes. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a forma de Cartan-Killing.

Fixaremos uma base de Weyl de \mathfrak{g} que é um conjunto de vetores $\{X_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha} \mid \alpha \in \Pi\}$ que satisfaz $\langle X_{\alpha}, X_{-\alpha} \rangle = 1$, e $[X_{\alpha}, X_{\beta}] = m_{\alpha, \beta} X_{\alpha + \beta}$, com $m_{\alpha, \beta} \in \mathbb{R}$, $m_{-\alpha, -\beta} = -m_{\alpha, \beta}$ e $m_{\alpha, \beta} = 0$ se $\alpha + \beta$ não é uma raiz.

Seja $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_{\alpha}$ a subálgebra de Borel (subálgebra parabólica minimal) gerada por Π^+ . Denote por $\mathbb{F} = G/P$ a variedade de flags maximal associada, onde G é o grupo de Lie complexo e conexo com álgebra de Lie \mathfrak{g} e P é o subgrupo

parabólico minimal com álgebra de Lie \mathfrak{b} . Seja u a forma real compacta de \mathfrak{g} e seja $U \subset G$ a correspondente forma real compacta de G . Pela ação transitiva de U sobre \mathbb{F} , podemos escrever $\mathbb{F} = U/T$, onde $T = U \cap P$ é um toro maximal de U .

Denote por b_0 a origem de \mathbb{F} , vista como um espaço homogêneo de G ou de U . O espaço tangente a \mathbb{F} em b_0 se identifica com o subespaço $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{u}$ gerado pelos vetores $A_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$ e $S_\alpha = i(X_\alpha + X_{-\alpha})$, $\alpha \in \Pi^+$. Analogamente, o espaço tangente complexificado de \mathbb{F} é identificado a $\mathfrak{q}_\mathbb{C} \subset \mathfrak{g}$, gerado pelos espaços de raízes.

1.2 Estruturas quase complexas invariantes

Uma estrutura quase complexa U -invariante sobre \mathbb{F} é uma lei que associa a cada ponto $x \in \mathbb{F}$ uma aplicação linear $J_x : T_x(\mathbb{F}) \longrightarrow T_x(\mathbb{F})$ que satisfaz $J_x^2 = -1$ e $d(E_u) \circ J_x = J_x \circ d(E_u)$, para todo $u \in U$, onde E_u denota a translação à esquerda por $u \in U$ e 1 denota a aplicação identidade do espaço tangente $T_x(\mathbb{F})$.

Uma estrutura quase complexa U -invariante sobre \mathbb{F} é completamente determinada pelo seu valor $J : \mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{q}$ no espaço tangente na origem. A aplicação J satisfaz $J^2 = -1$ e comuta com a ação adjunta de T sobre \mathfrak{q} , isto é, $[JX, JY] = -[X, Y]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{q}$. Vamos denotar também por J sua complexificação sobre $\mathfrak{q}_\mathbb{C}$. A invariância de J garante que $J(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$, $\forall \alpha \in \Pi$. Os autovalores de J são $\pm i$ e os autovetores em $\mathfrak{q}_\mathbb{C}$ são X_α , $\alpha \in \Pi$. Consequentemente, $J(X_\alpha) = i\epsilon_\alpha X_\alpha$, com $\epsilon_\alpha = \pm 1$ satisfazendo $\epsilon_{-\alpha} = -\epsilon_\alpha$.

Usaremos a abreviação *iacs* para indicar uma estrutura quase complexa U -invariante sobre \mathbb{F} . Observe que uma *iacs* J sobre \mathbb{F} é completamente descrita por um conjunto de sinais $\{\epsilon_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ com $\epsilon_{-\alpha} = -\epsilon_\alpha$.

1.3 Métricas invariantes

Uma métrica Riemanniana U -invariante sobre \mathbb{F} é completamente determinada pelos seus valores na origem, isto é, por um produto interno (\cdot, \cdot) em \mathfrak{g} que é invariante pela ação adjunta de T . Qualquer tal produto interno tem a forma $(X, Y)_\Lambda = -\langle \Lambda X, Y \rangle$, com $\Lambda : \mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{q}$ positiva definida em relação à forma de Cartan-Killing. O produto interno $(\cdot, \cdot)_\Lambda$ admite uma extensão natural a uma forma bilinear simétrica sobre a complexificação $\mathfrak{q}_\mathbb{C}$ de \mathfrak{q} . Usaremos a mesma notação $(\cdot, \cdot)_\Lambda$

para ambas as métricas. A T -invariância de $(\cdot, \cdot)_\Lambda$ é equivalente aos elementos da base canônica $A_\alpha, S_\alpha, \alpha \in \Pi$, serem autovetores de Λ , para o mesmo autovalor. Deste modo, no espaço tangente complexificado, temos que para cada $\alpha \in \Pi^+$, existe um número real positivo λ_α , tal que $\Lambda(X_\alpha) = \lambda_\alpha X_\alpha$ e $\lambda_{-\alpha} = \lambda_\alpha$.

Qualquer métrica invariante é quase Hermitiana com respeito a qualquer *iacs* J sobre \mathbb{F} , isto é, $(JX, JY)_\Lambda = (X, Y)_\Lambda$, para todos $X, Y \in \mathfrak{q}_\mathbb{C}$. Seja Ω a forma de Kähler correspondente, definida por

$$\Omega(X, Y) := -\langle \Lambda X, JY \rangle.$$

Definição 1.1 *Seja (M, J) uma variedade quase-complexa com estrutura quase-complexa J . Dizemos que M é uma variedade quase Hermitiana (ou que J é uma estrutura quase Hermitiana), se admitir uma métrica Riemanniana g que satisfaz a seguinte propriedade:*

$$g(JX, JY) = g(X, Y),$$

para quaisquer $X, Y \in TM$.

Uma variedade quase Hermitiana é dita $(1, 2)$ -simplética se

$$d\Omega(X, Y, Z) = 0,$$

quando um dos vetores X, Y, Z é do tipo $(1, 0)$ e os outros dois são do tipo $(0, 1)$. Quando $d\Omega = 0$ e J é integrável, dizemos que J é uma estrutura Kähler. Em [15] é provado que toda estrutura quase Hermitiana invariante sobre \mathbb{F} é quase Kähler se, e somente se, é Kähler.

Dizemos que a métrica invariante Λ é $(1, 2)$ -simplética com respeito a uma *iacs* J sobre \mathbb{F} , se o par invariante (J, Λ) é $(1, 2)$ -simplético. Também J é dito $(1, 2)$ -admissível se existir uma métrica Λ , tal que o par invariante (J, Λ) é $(1, 2)$ -simplético.

1.4 Álgebra afim

Esta seção está escrita com base no livro [9]. Seja $L = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ o espaço dos polinômios de Laurent em z . Dado um polinômio $P(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$ em L , temos que todos, exceto um número finito de c_k 's são nulos. O resíduo de um polinômio

de Laurent $P(z)$ é o funcional linear $Res : L \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por $Res(P) = c_{-1}$, isto é, $Res(P)$ é a componente de z^{-1} na expansão de P , que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $Res(z^{-1}) = 1$
2. $Res\left(\frac{dP}{dz}\right) = 0$

Dada uma álgebra de Lie semi-simples complexa \mathfrak{g} , a álgebra afim correspondente é uma álgebra de Lie de dimensão infinita \mathfrak{g}_a formada pelo produto tensorial $L \otimes \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$, onde c é um elemento do centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (isto é, $[c, \cdot] \equiv 0$) e d é uma derivação que age sobre $L \otimes \mathfrak{g}$ como $z \frac{d}{dz}$ e anula c .

Um elemento de \mathfrak{g}_a é dado por $P(z)A + xc + yd$ com $A \in \mathfrak{g}$, $P(z)$ um polinômio de Laurent e $x, y \in \mathbb{C}$.

Os colchetes na álgebra são definidos pelas seguintes expressões:

- $[P(z)A, Q(z)B] = P(z)Q(z)[A, B] + \psi(P(z)A, Q(z)B)$, onde ψ é o cociclo definido por:

$$\psi(P(z)A, Q(z)B) = Res\left(\frac{dP}{dz}Q(z)\right)\langle A, B \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} .

- $[d, P(z)A] = z \frac{dP}{dz}(z)A$.

O correspondente à forma de Cartan-Killing é definido pelas igualdades:

$$(P(z)A, Q(z)B) = Res(z^{-1}P(z)Q(z))\langle A, B \rangle \quad (c, d) = 1$$

e os demais pares iguais a zero.

Uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g}_a é $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus \text{ger}\{c, d\}$, onde $\text{ger}\{c, d\}$ é o espaço vetorial real gerado pelo conjunto $\{c, d\}$. Ela tem raízes que são dadas da seguinte forma:

Seja $\delta : \mathfrak{g}_a \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcional que satisfaz

$$\langle \delta, \delta \rangle = \langle \delta, \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \rangle = \langle d, d \rangle = \langle d, \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \rangle = 0 \text{ e } \langle \delta, c \rangle = 1.$$

O sistema de raízes afins associado a Π é

$$\Pi_a = \Pi + \mathbb{Z}\delta = \{\alpha + j\delta \mid \alpha \in \Pi, j \in \mathbb{Z}\}.$$

Se Σ é um sistema simples em \mathfrak{g} , então um sistema simples de raízes na álgebra afim é

$$\Sigma_a = \Sigma \cup \{\delta - \mu\},$$

onde μ é a raiz máxima em \mathfrak{g} associada a Σ . O conjunto de raízes afins positivas dadas por este sistema é

$$\Pi_a^+ = \{\alpha + j\delta \in \Pi_a \mid j \geq 0 \text{ e } \alpha > 0, \text{ ou } j > 0 \text{ e } \alpha \geq 0\}.$$

1.5 Alcovas

Para cada raiz α e cada inteiro j , defina o hiperplano afim

$$H_{\alpha,j} := \{X \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \langle \alpha, X \rangle = j\}.$$

Note que $H_{\alpha,j} = H_{-\alpha,-j}$. Defina a correspondente reflexão afim como segue:

$$s_{\alpha,j}(X) := X - \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle} (\langle \alpha, X \rangle - j).$$

Denote por \mathcal{H} a coleção de todos os hiperplanos $H_{\alpha,j}$, $\alpha \in \Pi$, $j \in \mathbb{Z}$. O grupo de Weyl afim \mathcal{W}_a é definido como sendo o grupo gerado por todas as reflexões afins $s_{\alpha,j}$, onde $\alpha \in \Pi$ e $j \in \mathbb{Z}$.

O complementar \mathcal{A} do conjunto dos hiperplanos $H_{\alpha,j}$ é a união de suas componentes conexas, cada uma delas é um simplexo aberto chamado alcova. De acordo com ([8], cap. 4), o grupo de Weyl afim \mathcal{W}_a deixa invariante a união dos hiperplanos $H_{\alpha,j}$, conseqüentemente \mathcal{W}_a permuta as alcovas. A ação de \mathcal{W}_a sobre o conjunto das alcovas é livre e transitiva de forma que \mathcal{W}_a está em bijeção com \mathcal{A} .

Dados uma alcova A e uma raiz α , existe um inteiro $k_\alpha = k_\alpha(A)$ tal que

$$k_\alpha < \langle \alpha, x \rangle < k_\alpha + 1, \quad \text{para todo } x \in A.$$

É claro que $k_\alpha = [\alpha(x)]$ para qualquer $x \in A$, onde $[\alpha(x)]$ denota a parte inteira do número real $\alpha(x)$, isto é, é o maior inteiro que é menor do que $\alpha(x)$. De acordo com [17], os inteiros $k_\alpha(A)$ são chamados as coordenadas da alcova A . Uma alcova é completamente determinada pelas suas coordenadas. Entretanto, não é verdade que um conjunto arbitrário de inteiros k_α , $\alpha \in \Pi$, forma as coordenadas de alguma

alcova. Condições necessárias e suficientes para k_α , $\alpha \in \Pi$, serem as coordenadas de uma alcova estão determinadas em [17].

De acordo com [4], notamos a seguinte condição necessária que é facilmente obtida da definição de alcova.

Lema 1.2 *Uma condição necessária para os inteiros $k_\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \Pi$, serem as coordenadas de uma alcova é que $k_{\alpha+\beta}$ seja $k_\alpha + k_\beta$ ou $k_\alpha + k_\beta + 1$, sempre que α , β e $\alpha + \beta$ são raízes.*

Definição 1.3 *Dada uma alcova A com coordenadas $\{k_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$, a iacs $J(A) = \{\epsilon_\alpha(A)\}$ é definida por $\epsilon_\alpha(A) = (-1)^{k_\alpha}$. Dizemos que J é uma iacs afim se tem a forma $J = J(A)$ para alguma alcova A .*

Note que $J(A)$ é de fato uma iacs, pois $k_{-\alpha} = -k_\alpha - 1$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \epsilon_{-\alpha}(A) &= (-1)^{k_{-\alpha}(A)} = (-1)^{-k_\alpha - 1} = (-1)^{-1} \cdot (-1)^{-k_\alpha} = -(-1)^{-k_\alpha} = \\ &= -[(-1)^{-1}]^{k_\alpha} = -(-1)^{k_\alpha} = -\epsilon_\alpha(A). \end{aligned}$$

A definição de iacs afim tem a seguinte interpretação geométrica útil: Dada uma escolha de raízes positivas $\Pi^+ \subset \Pi$, temos a alcova básica

$$A_0 := \{x \in \mathfrak{h}_\mathbb{R} \mid 0 < \langle \alpha, x \rangle < 1\},$$

tendo coordenadas $k_\alpha = 0$, para toda raiz positiva α . Se A é outra alcova, e $\alpha \in \Pi^+$, denote por $q_\alpha(A)$ o número de hiperplanos da forma $H_{\alpha,j}$ que separam A de A_0 . Uma vez que $\alpha > 0$, temos $q_\alpha(A) = |k_\alpha(A)|$. Consequentemente, $(-1)^{k_\alpha(A)} = (-1)^{q_\alpha(A)}$, de forma que a paridade do número de hiperplanos que separam as alcovas determina $J(A)$.

Capítulo 2

Forma de ideal abeliano e ação de

$$\mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}}$$

Neste capítulo apresentamos a definição de estrutura quase-complexa na forma de ideal abeliano e uma descrição da ação de $\mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}}$ no conjunto das alcovas de $2A_0$, onde A_0 é a alcova básica. Além disso, apresentamos algumas proposições que servirão de referência para os capítulos posteriores.

2.1 Estruturas quase-complexas na forma de ideal abeliano

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples complexa de dimensão finita e seja \mathbb{F} a variedade de flags maximal associada. Denote por Π um conjunto de raízes de \mathfrak{g} .

Definição 2.1 *Seja $\Pi^+ \subset \Pi$ um sistema positivo de raízes em \mathfrak{g} . Dizemos que um subconjunto Φ de Π^+ é um ideal abeliano, se verificar as seguintes condições:*

1. *Se $\alpha \in \Phi$ e $\beta \in \Pi^+$ são tais que $\alpha + \beta$ é raiz, então $\alpha + \beta \in \Phi$.*
2. *Se $\alpha, \beta \in \Phi$, então $\alpha + \beta$ não é raiz.*

A razão para esta nomenclatura vem do fato de que o espaço i_{Φ} definido por

$$i_{\Phi} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

é um ideal abeliano da subálgebra de Borel \mathfrak{b} .

Proposição 2.2 *O espaço i_Φ definido acima é um ideal abeliano da subálgebra de Borel \mathfrak{b} .*

Demonstração: De fato, sejam $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Phi$ e $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, $\beta \in \Pi^+$. Se $\alpha + \beta$ é raiz, então $\alpha + \beta \in \Phi$ e além disso, $[X_\alpha, X_\beta] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \subset i_\Phi$. Se $\alpha + \beta$ não é raiz, então $[X_\alpha, X_\beta] = 0 \in i_\Phi$. Donde segue que i_Φ é ideal de \mathfrak{b} .

Considere agora $X_\alpha, X_\beta \in i_\Phi$ quaisquer, de forma que $\alpha, \beta \in \Phi$. Como Φ é abeliano, segue que $\alpha + \beta$ não é raiz e, por isso, $[X_\alpha, X_\beta] = 0$. Como X_α, X_β são arbitrários, concluímos que $[\cdot, \cdot] \equiv 0$ em i_Φ e, portanto, i_Φ é abeliano. \square

Definição 2.3 *Dada uma iacs $J = \{\epsilon_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ sobre \mathbb{F} , dizemos que J está na forma de ideal abeliano em relação a um sistema simples de raízes Σ , se o conjunto $\Phi = \Phi(J, \Sigma) := \{\alpha \in \Pi^+ \mid \epsilon_\alpha = -1\}$, for um ideal abeliano.*

Seja $2A_0$ o conjunto definido por $2A_0 = \{2x \mid x \in A_0\}$, onde A_0 é a alcova básica. Então, para cada $y \in 2A_0$ e para cada $\alpha \in \Pi^+$, temos que $0 < \langle \alpha, y \rangle < 2$. Dada uma alcova A contida em $2A_0$, temos que $k_\alpha(A) \geq 0$ para toda raiz positiva α e, portanto, $k_\alpha(A)$ é o número de hiperplanos da forma $H_{\alpha,j}$, $j \in \mathbb{Z}$ que separa A de A_0 .

Proposição 2.4 *Seja A uma alcova contida em $2A_0$ e seja α uma raiz positiva. Então, $k_\alpha(A) = 0$ ou $k_\alpha(A) = 1$.*

Demonstração: Se nenhum hiperplano da forma $H_{\alpha,j}$, $j \in \mathbb{Z}$ separa as alcovas A e A_0 , então claramente $k_\alpha(A) = 0$. Por outro lado, se existir um hiperplano $H_{\alpha,j}$, $j \in \mathbb{Z}$ que separa A de A_0 , então existe $y \in H_{\alpha,j} \cap 2A_0$ e, portanto,

$$\begin{cases} \langle \alpha, y \rangle &= j \\ 0 < \langle \alpha, y \rangle &< 2 \end{cases}$$

o que implica que $0 < j < 2$. Como j é inteiro, segue que $j = 1$ e, por consequência, $k_\alpha(A) = 1$. \square

Teorema 2.5 *Seja A uma alcova contida em $2A_0$. Então, a estrutura invariante afim $J(A) = \{\epsilon_\alpha(A) \mid \alpha \in \Pi\}$, está na forma de ideal abeliano. Reciprocamente, seja $J = \{\epsilon_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ uma estrutura quase complexa invariante sobre \mathbb{F} . Suponha que J está na forma de ideal abeliano. Então, existe uma alcova $A \subset 2A_0$, tal que $J = J(A)$.*

Demonstração: Inicialmente, vamos provar a primeira implicação do Teorema 2.5. Devemos mostrar que o conjunto

$$\Phi = \{\alpha \in \Pi^+ \mid \epsilon_\alpha(A) = -1\},$$

é um ideal abeliano.

Sejam $\alpha \in \Phi$ e $\beta \in \Pi^+$ tais que $\alpha + \beta \in \Pi^+$. Então, segue do lema 1.2, que:

$$k_{\alpha+\beta} = k_\alpha + k_\beta \quad \text{ou} \quad k_{\alpha+\beta} = k_\alpha + k_\beta + 1.$$

Como $\alpha \in \Phi$, temos que $k_\alpha(A) = 1$ e, como $\beta \in \Pi^+$, segue da Proposição 2.4, que $k_\beta(A) = 0$ ou 1 . Logo, $k_{\alpha+\beta}(A) = 1, 2$ ou 3 . Mas, como $A \subset 2A_0$, devemos ter $k_{\alpha+\beta}(A) = 1$. Portanto,

$$\epsilon_{\alpha+\beta}(A) = (-1)^{k_{\alpha+\beta}(A)} = -1,$$

o que implica que $\alpha + \beta \in \Phi$.

Agora, dados $\alpha, \beta \in \Phi$, temos que $k_\alpha(A) = k_\beta(A) = 1$. Se $\alpha + \beta \in \Pi^+$, então $k_{\alpha+\beta}(A) = 0$ ou 1 . Porém isso não ocorre, pois $k_{\alpha+\beta}(A) = 2$ ou 3 . Logo, $\alpha + \beta \notin \Pi$ e, conseqüentemente, Φ é um ideal abeliano. \square

A demonstração da recíproca do Teorema 2.5 será dividida em várias partes. Vamos utilizar alguns resultados do artigo [3], bem como algumas de suas notações.

Seja \mathcal{W}_a o grupo de Weyl afim. Dado $w \in \mathcal{W}_a$, seja $N(w)$ o conjunto de raízes afins positivas definido por

$$N(w) := \{\alpha + j\delta \in \Pi_a^+ \mid w^{-1}(\alpha + j\delta) \in \Pi_a^-\},$$

onde Π_a^+ é o conjunto de raízes afins positivas e $\Pi_a^- := -\Pi_a^+$.

Proposição 2.6 *Sejam $\alpha \in \Pi^+$ e j um inteiro positivo, de forma que $-\alpha + j\delta \in \Pi_a^+$. Então, o hiperplano $H_{\alpha,j}$ separa as alcovas A_0 e $w(A_0)$ se, e somente se, $w^{-1}(-\alpha + j\delta) \in \Pi_a^-$.*

Demonstração: Dados $\alpha \in \Pi^+$ e $j \in \mathbb{N} - \{0\}$, o hiperplano $H_{\alpha,j}$ separa as alcovas A_0 e $w(A_0)$ se, e somente se, para todo $x \in A_0$, tivermos:

$$\begin{cases} \langle \alpha, x \rangle < j \\ \text{e} \\ \langle \alpha, wx \rangle > j \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-\alpha + j\delta)(x + d) > 0 \\ \text{e} \\ (-\alpha + j\delta)(wx + d) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + j\delta > 0 \\ \text{e} \\ w^{-1}(-\alpha + j\delta) < 0. \end{cases}$$

□

Proposição 2.7 *Se $\Phi \subset \Pi^+$ é um ideal abeliano, então existe um único $w \in \mathcal{W}_a$ tal que $w(A_0) \subset 2A_0$.*

Demonstração: Pelo teorema 2.6 de [3], existe um único $w \in \mathcal{W}_a$ tal que $N(w) = -\Phi + \delta$. Então, dada uma raiz positiva $\beta \in \Pi^+$, devemos ter $w^{-1}(\beta) > 0$ o que implica que $\forall x \in A_0$, $\langle \beta, wx \rangle = \langle w^{-1}\beta, x \rangle > 0$. Isto significa que $w(A_0)$ está contido na câmara de Weyl positiva. Se $w(A_0)$ não está contido em $2A_0$, então o hiperplano $H_{\mu,2}$ separa as alcovas A_0 e $w(A_0)$ e, portanto, $-\mu + 2\delta \in N(w)$, onde μ é a raiz máxima relativa a Π^+ . Mas isso é uma contradição, pois $N(w) = -\Phi + \delta$. Logo, devemos ter $w(A_0) \subset 2A_0$. □

Proposição 2.8 *Se $w \in \mathcal{W}_a$ é tal que $w(A_0) \subset 2A_0$, então $N(w) = -\Phi + \delta$, onde $\Phi = \{\alpha \in \Pi^+ \mid k_\alpha(wA_0) = 1\}$.*

Demonstração: Como $w(A_0) \subset 2A_0$, temos que os únicos hiperplanos que separam as alcovas A_0 e $w(A_0)$ são os da forma $H_{\alpha,1}$, com $\alpha \in \Pi^+$. Portanto, pela Proposição 2.6, temos que $N(w)$ contém somente raízes da forma $-\alpha + \delta$, com $\alpha \in \Pi^+$. Se $\alpha \in \Phi$, então $H_{\alpha,1}$ separa as alcovas A_0 e $w(A_0)$ e, portanto, $-\alpha + \delta \in N(w)$. Se $\alpha \in \Pi^+ \setminus \Phi$, então $k_\alpha(wA_0) = 0$ e nenhum hiperplano da forma $H_{\alpha,1}$ separa A_0 e $w(A_0)$ e, portanto, $-\alpha + \delta \notin N(w)$. Conseqüentemente $N(w) = -\Phi + \delta$. □

Agora já estamos em condições de demonstrar a recíproca do Teorema 2.5:

Demonstração da recíproca do Teorema 2.5: O conjunto $\Phi = \{\alpha \in \Pi^+ \mid \epsilon_\alpha = -1\}$ é um ideal abeliano por hipótese. Então, pela Proposição 2.7, existe um único $w \in \mathcal{W}_a$, tal que $w(A_0) \subset 2A_0$. Seja $A = w(A_0)$. Então, pela Proposição 2.8, temos que

$$\Phi = \{\alpha \in \Pi^+ \mid k_\alpha(A) = 1\}.$$

Logo, dada uma raiz $\alpha \in \Pi^+$, temos que $k_\alpha(A) = 0$ ou 1 , pois $A \subset 2A_0$. Se $\alpha \in \Phi$, então

$$\epsilon_\alpha = -1 = (-1)^1 = (-1)^{k_\alpha(A)} = \epsilon_\alpha(A).$$

Se $\alpha \notin \Phi$, temos $k_\alpha(A) = 0$ e, portanto,

$$\epsilon_\alpha = 1 = (-1)^0 = (-1)^{k_\alpha(A)} = \epsilon_\alpha(A).$$

De qualquer forma, concluímos que $\epsilon_\alpha = \epsilon_\alpha(A)$, para todo α em Π e, portanto, $J = J(A)$. \square

Corolário 2.9 *Seja \mathcal{W} o grupo de Weyl de \mathfrak{g} e seja \mathcal{B} o conjunto definido por*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{w \in \mathcal{W}} w(2A_0).$$

Se $J = \{\epsilon_\alpha\}$ é uma $iacs$ $(1, 2)$ -admissível sobre \mathbb{F} , então existe uma alcova $A \subset \mathcal{B}$, tal que $J = J(A)$.

Demonstração: Como J é $(1, 2)$ -admissível, segue que J pode ser colocada na forma de ideal abeliano, isto é, existe $w \in \mathcal{W}$ e existe uma $iacs$ J_1 sobre \mathbb{F} , que está na forma de ideal abeliano, tais que $J = wJ_1$. Mas, pela demonstração da recíproca do Teorema 2.5, temos que existe uma alcova $A_1 \subset 2A_0$, tal que $J_1 = J(A_1)$. Portanto, temos que

$$J = wJ_1 = wJ(A_1) = J(wA_1).$$

Seja $A = wA_1$. Então, claramente, $A \subset \mathcal{B}$ e $J = J(A)$. \square

2.2 Uma descrição da ação de $\mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}}$

Dado um sistema simples de raízes $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, seja $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup \{-\mu\}$ o diagrama de Dynkin estendido, onde μ é a raiz máxima relativa a Σ . Seja também $\{w_1, \dots, w_l\}$ a base dual de Σ , isto é, $\langle \alpha_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$. Denote por \mathcal{W} o grupo de Weyl de \mathfrak{g} e por $\mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}}$ o subgrupo de \mathcal{W} que deixa invariante o diagrama de Dynkin estendido, isto é,

$$\mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}} = \{w \in \mathcal{W} \mid w\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}\}.$$

Dado $w \in \mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}}$, suponha que $w(-\mu) = \alpha_i$. Então, pelos resultados de [15], temos que $(t_{w_i}w)(A_0) = A_0$, onde t_{w_i} denota a translação por w_i .

Lema 2.10 $(t_{2w_i}w)(2A_0) = 2A_0$.

Demonstração: Se $x \in A_0$, então $w(x) + w_i \in A_0$. Portanto, $w(2x) + 2w_i \in 2A_0$, o que mostra que $t_{2w_i}w(2A_0) \subset 2A_0$, donde segue a igualdade. □

Portanto, $t_{2w_i}w$ permuta as alcovas de $2A_0$ e vale a seguinte,

Proposição 2.11 A ação do grupo $G = \{1, t_{2w_i}w\}$ no conjunto das alcovas de $2A_0$, coincide com a ação do grupo $\mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}}$ no conjunto das estruturas $J(A)$ que estão na forma de ideal abeliano.

Demonstração: Seja A uma alcova qualquer. Para cada raiz positiva α , temos que

$$k_{\alpha}(t_{2w_i}A) = \langle \alpha, 2w_i \rangle + k_{\alpha}(A).$$

Logo,

$$\epsilon_{\alpha}(t_{2w_i}A) = (-1)^{k_{\alpha}(t_{2w_i}A)} = (-1)^{\langle \alpha, 2w_i \rangle + k_{\alpha}(A)} = (-1)^{k_{\alpha}(A)} = \epsilon_{\alpha}(A).$$

Isto significa que $J(A) = J(t_{2w_i}A)$, para toda alcova A .

Seja agora A uma alcova contida em $2A_0$. Pelo lema 2.10, existe uma alcova A_1 contida em $2A_0$, tal que $A_1 = t_{2w_i}wA$. Logo, $J(A_1) = J(t_{2w_i}wA) = J(wA) = wJ(A)$, o que implica que as ações coincidem, conforme queríamos. □

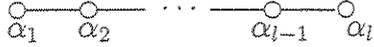
Capítulo 3

O Caso A_l

Neste capítulo, apresentamos uma descrição da ação de \mathcal{W}_{Σ} no conjunto dos ideais abelianos, para o caso A_l . Em seguida, exibimos representantes canônicos para as classes de equivalência, segundo essa descrição, bem como o número de classes, apenas para certos valores de $n = l + 1$. Definimos a característica k de uma alcova contida em $2A_0$ e mostramos que esta característica é limitada pelo valor de n , isto é, $1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$. Além disso, mostramos que k define uma classe de equivalência, na qual todos os elementos são alcovas com a mesma característica k . Depois mostramos que, para os casos A_{n-1} , com $n \geq 3k - 2$ (ou de modo equivalente, para os valores: $1 \leq k \leq \frac{n+2}{3}$), é possível exibir um representante canônico para cada classe com característica k e contar o número dessas classes. Para os outros valores de k e n : $\frac{n+2}{3} < k \leq \frac{n}{2}$, $n \geq 3$, não conseguimos separar as classes de equivalência e nem contar o número delas. Entretanto, contamos o número de classes para os casos A_{n-1} , com n primo ímpar e A_{n-1} , com n sendo uma potência de dois. Só que, nestes dois casos, não separamos as classes por característica k , quando esta satisfaz: $\frac{n+2}{3} < k \leq \frac{n}{2}$, $n \geq 3$.

3.1 Realização canônica das raízes em A_l

Seja $\mathfrak{g} = sl(l+1, \mathbb{C})$ a álgebra das matrizes complexas de ordem $l+1$ com traço zero. Então \mathfrak{g} é a álgebra de Lie associada ao diagrama A_l , $l \geq 1$,



A realização canônica das raízes em A_l é dada da seguinte forma:

Seja $E = \{y = (y_0, y_1, \dots, y_l) \in \mathbb{R}^{l+1} \mid y_0 + \dots + y_l = 0\}$ o subespaço de \mathbb{R}^{l+1} , equipado com o produto interno canônico.

Para cada $j \in \{0, \dots, l\}$, seja $\lambda_j : E \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcional linear $\lambda_j(y) = y_j$ e, para cada $i \in \{1, \dots, l\}$, seja $\alpha_i = \lambda_{i-1} - \lambda_i$. Então, $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ é um sistema simples de raízes de \mathfrak{g} e as raízes positivas correspondentes são:

$$\Pi^+ = \{\alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j \mid 1 \leq i \leq j \leq l\}.$$

3.2 Uma representação alternativa de $2A_0$

Seja \mathbb{F} a variedade de flags maximal associada a \mathfrak{g} . Pelo Teorema 2.5, toda *iacs* $(1, 2)$ -admissível sobre \mathbb{F} , que está na forma de ideal abeliano, é do tipo $J(A)$, para alguma alcova A contida no conjunto

$$2A_0 = \{2x \mid x \in A_0\},$$

onde A_0 é a alcova básica. Como estamos procurando representantes canônicos para as classes de equivalências dessas estruturas, devemos procurar uma representação alternativa do conjunto $2A_0$. Essa representação será feita por simplexos contidos em \mathbb{R}^n , onde $n = l+1$. Por conveniência, as coordenadas de \mathbb{R}^n serão escritas como (x_0, x_1, \dots, x_l) , já que a coordenada x_0 vai desempenhar um papel especial.

Considere o conjunto

$$C = \{(x_0, x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0, \forall i = 0, \dots, l \text{ e } x_0 + \dots + x_l = 2\}.$$

Subdivida C da seguinte forma: para cada $i, j \in \{1, \dots, l\}$, $i \leq j$, tome o hiperplano

$$H_{i,j} = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^n \mid x_i + \dots + x_j = 1\}.$$

Denote por

$$C^0 = C - \bigcup_{i \leq j} H_{i,j} ,$$

o complementar em C da união dos subespaços $H_{i,j}$. Note que C^0 é aberto em C , pois é o complementar de um conjunto fechado. Dado $x \in C^0$, para cada par $i, j \in \{0, \dots, l\}$, $i \leq j$, temos que $x_i + \dots + x_j \neq 1$ e, portanto, deve satisfazer:

$$0 < x_i + \dots + x_j < 1, \quad \text{ou} \quad 1 < x_i + \dots + x_j < 2.$$

Proposição 3.1 *O conjunto C^0 é união de 2^l componentes conexas, sendo que cada componente conexa é um simplexo aberto.*

Demonstração: Seja F o subespaço afim de \mathbb{R}^{l+1} dado por

$$F = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^{l+1} \mid x_0 + \dots + x_l = 2\}$$

e seja $\psi : E \longrightarrow F$ a aplicação afim definida por

$$\psi(y) := \phi(y) + (2, 0, \dots, 0),$$

onde $\phi : E \longrightarrow E$ é a seguinte aplicação linear:

$$\phi(y_0, \dots, y_l) = (y_l - y_0, y_0 - y_1, \dots, y_{l-1} - y_l).$$

Primeiro vamos mostrar que ψ é bijetora. Temos que $\phi(y) = 0$ se, e somente se, $y_l = y_0 = y_1 = \dots = y_{l-1} = a$, de forma que $y = (a, a, \dots, a)$. Uma vez que $y \in E$, segue que $(l+1)a = 0$, isto é, $y = 0$. Portanto, ϕ é injetora e, como ϕ é um operador linear definido num espaço vetorial de dimensão finita, temos que ϕ é bijetora. Conseqüentemente, temos que ψ também é bijetora.

Agora, vamos mostrar que $\psi(2A_0) \subset C$. De fato, seja $y = (y_0, \dots, y_l) \in 2A_0$. Então, $y_0 + \dots + y_l = 0$ e $0 < \langle \alpha, y \rangle < 2$, para toda raiz positiva α . Em particular,

$$0 < \langle \lambda_0 - \lambda_1, y \rangle < 2, \quad \dots, \quad 0 < \langle \lambda_{l-1} - \lambda_l, y \rangle < 2 \text{ e } 0 < \langle \lambda_0 - \lambda_l, y \rangle < 2.$$

O que implica que

$$0 < y_0 - y_1 < 2, \quad 0 < y_1 - y_2 < 2, \quad \dots, \quad 0 < y_{l-1} - y_l < 2, \quad 0 < y_l - y_0 + 2 < 2.$$

Isto significa que todas as coordenadas de $\psi(y)$ são positivas. Além disso, temos que

$$y_l - y_0 + 2 + y_0 - y_1 + y_1 - y_2 + \dots + y_{l-1} - y_l = 2.$$

Portanto, $\psi(2A_0) \subset C$.

Dados $i \leq j$, $i, j \in \{1, \dots, l\}$, denote por $\beta_{ij} : F \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional linear tal que $\beta_{ij}(x) = x_i + \dots + x_j$. Então, temos que:

$$\begin{aligned} (\beta_{ij} \circ \psi)(y) &= \beta_{ij}(y_l - y_0 + 2, y_0 - y_1, \dots, y_{l-1} - y_l) \\ &= (y_{i-1} - y_i) + (y_i - y_{i+1}) + \dots + (y_{j-1} - y_j) \\ &= \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j \\ &= \alpha_{ij}. \end{aligned}$$

Como $\alpha_{ij} = \beta_{ij} \circ \psi$ e $\psi(2A_0) \subset C$, segue que ψ leva cada alcova de $2A_0$ em uma única componente conexa de C^0 , isto é, ψ induz uma bijeção entre o conjunto das 2^l alcovas de $2A_0$ e o conjunto das componentes conexas de C^0 . Observamos que cada componente conexa de C^0 é aberta, pois C^0 é aberto e, além disso, é um simplexo, pois é a imagem de um simplexo por uma aplicação afim. Isto completa a prova. \square

Dado um simplexo S em C^0 , podemos associar a ele uma estrutura quase complexa invariante $J(S)$ sobre \mathbb{F} , da seguinte maneira: fixe $x = (x_0, \dots, x_l) \in S$. Então, para $1 \leq i < j \leq l + 1$, defina

$$\epsilon_{ij}(S) := \begin{cases} +1, & \text{se } 0 < x_i + \dots + x_{j-1} < 1 \\ -1, & \text{se } 1 < x_i + \dots + x_{j-1} < 2. \end{cases}$$

Esta definição não depende do elemento $x \in S$ escolhido, pois $x_i + \dots + x_{j-1}$ não assume valores inteiros em S e, por isso, o intervalo onde se encontra essa soma é o mesmo, para todos os elementos de S .

Observação 3.2 *Seja $\psi : E \rightarrow F$ a aplicação afim definida na Proposição 3.1 e seja $A = \psi^{-1}(S)$ a alcova em $2A_0$ obtida como imagem inversa do simplexo S , pela bijeção ψ . Se $\epsilon_{ij}(A)$, $i \leq j$, $i, j = 1, \dots, l + 1$ é uma entrada da matriz de incidência de $J(A)$ e $y \in A$ é um elemento qualquer, temos:*

$$\epsilon_{ij}(A) := (-1)^{k_{\alpha_i + \dots + \alpha_{j-1}}(A)} = \begin{cases} +1, & \text{se } 0 < (\alpha_i + \dots + \alpha_{j-1})(y) < 1 \\ -1, & \text{se } 1 < (\alpha_i + \dots + \alpha_{j-1})(y) < 2. \end{cases}$$

Isto implica que

$$\epsilon_{ij}(A) = \begin{cases} +1, & \text{se } 0 < (\beta_{i,j-1} \circ \psi)(y) < 1 \\ -1, & \text{se } 1 < (\beta_{i,j-1} \circ \psi)(y) < 2. \end{cases}$$

Seja $x = \psi(y) \in S$. Então,

$$\epsilon_{ij}(A) = \begin{cases} +1, & \text{se } 0 < x_i + \dots + x_{j-1} < 1 \\ -1, & \text{se } 1 < x_i + \dots + x_{j-1} < 2 \end{cases} = \epsilon_{ij}(S).$$

Isto significa que as estruturas quase complexas $J(A)$ e $J(S)$ são iguais. Além disso, como a aplicação ψ é uma bijeção, podemos identificar cada alcova $A \subset 2A_0$ com o simplexo aberto $S = \psi(A) \subset C^0$. \square

Agora, usando a observação 3.2 e o Teorema 2.5, temos que:

Proposição 3.3 Cada estrutura $J(S) = \{\epsilon_{ij}(S)\}$ definida acima, está na forma de ideal abeliano e vice-versa, toda estrutura que está na forma de ideal abeliano é do tipo $J(S)$, para algum simplexo $S \subset C^0$.

Seja agora $E = \{y = (y_0, \dots, y_l) \in \mathbb{R}^{l+1} \mid y_0 + \dots + y_l = 0\}$ o subespaço de \mathbb{R}^{l+1} definido anteriormente. Dado um vetor $v \in E$, vamos denotar por $t_v : E \rightarrow E$ a translação por v , isto é, $t_v(y) := y + v, \forall y \in E$. Se $w = (1, \dots, n)$ denota a permutação cíclica de n elementos, podemos ver w como uma transformação de C que permuta as coordenadas da seguinte forma: $w(x_0, x_1, \dots, x_l) := (x_1, \dots, x_l, x_0)$.

Proposição 3.4 Seja $\psi : E \rightarrow F$ a aplicação afim definida na Proposição 3.1 e seja $v = (1, 0, \dots, 0, -1) \in E$. Então,

$$\psi \circ w = t_{2v} \circ w \circ \psi,$$

onde $t_{2v} : E \rightarrow E$ é a translação por $2v \in E$ e $w : C \rightarrow C$ é a permutação cíclica.

Demonstração: Dado $y \in E$, temos por um lado que

$$(\psi \circ w)(y) = \psi(y_1, \dots, y_l, y_0) = (y_0 - y_1, y_1 - y_2, \dots, y_l - y_0) + (2, 0, \dots, 0).$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} (w \circ \psi)(y) &= w(y_l - y_0 + 2, y_0 - y_1, y_1 - y_2, \dots, y_{l-1} - y_l) \\ &= (y_0 - y_1, y_1 - y_2, \dots, y_{l-1} - y_l, y_l - y_0 + 2) \\ &= (y_0 - y_1, y_1 - y_2, \dots, y_l - y_0) + (0, \dots, 0, 2). \end{aligned}$$

Logo, $(\psi \circ w)(y) - (2, 0, \dots, 0) = (w \circ \psi)(y) - (0, \dots, 0, 2)$, o que implica que

$$\begin{aligned} (\psi \circ w)(y) &= (w \circ \psi)(y) + (2, 0, \dots, 0, -2) \\ &= (t_{2v} \circ w \circ \psi)(y), \end{aligned}$$

onde $v = (1, 0, \dots, 0, -1)$. □

Proposição 3.5 *Seja $S \subset C^0$ um simplexo aberto e seja w a permutação cíclica. Então, wS também é um simplexo aberto de C^0 . Além disso, $wJ(S) = J(wS)$ o que implica que para dois simplexos S_1 e S_2 a estrutura $J(S_1)$ é equivalente à estrutura $J(S_2)$ (em relação ao grupo cíclico $\langle w \rangle = \{1, w, w^2, \dots, w^l\}$) se, e somente se, $S_1 = w^h S_2$, para alguma potência $h \in \{0, 1, \dots, l\}$.*

Demonstração: Dado $y = (y_0, \dots, y_l) \in wS$, temos que $y = (x_1, \dots, x_l, x_0)$, para algum $x = (x_0, x_1, \dots, x_l) \in S$. Como $x_i + \dots + x_j \neq 1$ para todo $i, j \in \{0, \dots, l\}$, segue que $y_i + \dots + y_j \neq 1$, para todo $i, j \in \{0, \dots, l\}$. Além disso, $y_0 + \dots + y_l = x_0 + \dots + x_l = 2$. Portanto, wS é um simplexo aberto de C^0 .

Seja agora $S \subset C^0$ um simplexo aberto e seja $A = \psi^{-1}(S) \subset 2A_0$ a alcova correspondente. Então, de acordo com [15], temos que $wJ(A) = J(wA)$ e, pela observação 3.2, temos que $wJ(\psi(A)) = J(\psi(wA))$. Mas, pela Proposição 3.4 temos que $\psi(wA) = (t_{2v} \circ w \circ \psi)(A)$.

Para cada $\alpha \in \Pi$, temos que $k_\alpha(t_{2v} w \psi(A)) = \langle \alpha, 2v \rangle + k_\alpha(w \psi(A))$. (Veja [15], pág. 287). Logo,

$$\epsilon_\alpha(t_{2v} w \psi(A)) = (-1)^{2\langle \alpha, v \rangle + k_\alpha(w \psi(A))} = (-1)^{k_\alpha(w \psi(A))} = \epsilon_\alpha(w \psi(A)),$$

o que implica que $J(t_{2v} w \psi(A)) = J(w \psi(A))$.

Portanto, temos:

$$wJ(S) = wJ(\psi(A)) = J(\psi(wA)) = J(t_{2v}w\psi(A)) = J(w\psi(A)) = J(wS).$$

Agora, suponha que $J(S_1) = w^h J(S_2)$, para alguma potência $h \in \{0, \dots, l\}$ e sejam $A_1 = \psi^{-1}(S_1)$ e $A_2 = \psi^{-1}(w^h S_2)$ as alcovas em $2A_0$ correspondentes. Então, para cada raiz positiva α , temos:

$$\epsilon_\alpha(A_1) = (-1)^{k_\alpha(A_1)} = (-1)^{k_\alpha(A_2)} = \epsilon_\alpha(A_2),$$

o que implica que $(-1)^{k_\alpha(A_1) - k_\alpha(A_2)} = 1$. Porém, como as alcovas A_1 e A_2 estão contidas em $2A_0$, segue que suas coordenadas devem ser 0 ou 1, para toda raiz positiva. Portanto, devemos ter $k_\alpha(A_1) = k_\alpha(A_2)$, para toda raiz positiva α , isto é, $A_1 = A_2$. Consequentemente, $S_1 = w^h S_2$.

Se $S_1 = w^h S_2$ para alguma potência $h \in \{0, \dots, l\}$, então claramente $J(S_1) = w^h J(S_2)$, terminando assim a prova. \square

De agora em diante, vamos identificar cada alcova A de $2A_0$ com o simplexo $S = \psi(A)$ de C e vamos denotar por \mathcal{A} a coleção de todos os simplexos abertos de C^0 . Cada simplexo aberto em \mathcal{A} será chamado de alcova.

Proposição 3.6 *O subgrupo \mathcal{W}_Σ coincide com o grupo cíclico gerado pela permutação cíclica w , isto é,*

$$\mathcal{W}_\Sigma = \langle w \rangle = \{1, w, w^2, \dots, w^l\}.$$

Demonstração: Podemos identificar cada raiz simples α_i , $i = 1, \dots, l$, com o seguinte vetor de $l + 1$ coordenadas:

$$\alpha_i = (0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0),$$

onde o valor 1 aparece na $(i - 1)$ -ésima coordenada. Além disso, temos que a raiz máxima é dada por $\mu = (1, 0, \dots, 0, -1)$. Então, temos que:

- $w\alpha_1 = w(1, -1, 0, \dots, 0) = (-1, 0, \dots, 0, 1) = -\mu$
- $w^l(-\mu) = w^l(-1, 0, \dots, 0, 1) = (0, \dots, 0, 1, -1) = \alpha_l$

- e $w(\alpha_i) = \alpha_{i-1}$, para todo $i \in \{2, \dots, l\}$.

Porém isso significa que $w\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}$, isto é, $\langle w \rangle \subset \mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}}$. Como $\mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}}$ contém $l + 1$ elementos, segue o desejado.

□

Portanto, para determinar completamente as classes de equivalência das estruturas quase-complexas invariantes sobre \mathbb{F} , deve-se determinar as órbitas em \mathcal{A} do grupo cíclico $\langle w \rangle = \{1, w, w^2, \dots, w^l\}$.

Mesmo sem determinar as classes de equivalência essa realização já dá algumas informações sobre as órbitas. Por exemplo, seja b o baricentro de C , isto é,

$$b = \left(\frac{2}{n}, \dots, \frac{2}{n} \right).$$

Se n é ímpar, então $b \in \mathcal{A}$, pois nesse caso, as somas são dadas por:

$$x_i + \dots + x_{j-1} = \frac{2(j-i)}{n}, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

que são todas diferentes de 1. portanto, nesse caso existe uma alcova $A_b \in \mathcal{A}$ tal que $b \in A_b$. É claro que, como $wb = b$, então $wA_b = A_b$, isto é, no caso em que n é ímpar existe um ponto fixo pela ação. A partir da definição vê-se que a estrutura $J(A_b)$ é dada por ϵ_{ij} , $i < j$, com

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{se } 0 < j - i < \frac{n}{2} \\ -1, & \text{se } \frac{n}{2} < j - i < n. \end{cases}$$

3.3 Característica de uma alcova

Por um intervalo cíclico do conjunto $\{0, \dots, l\}$ entende-se ou um intervalo propriamente dito, isto é, um subconjunto do tipo $[i, j] = \{i, \dots, j\}$, $i \leq j$, ou um conjunto obtido de um intervalo por uma permutação cíclica, isto é, um conjunto do tipo $[j, i] = \{j, \dots, l, 0, \dots, i\}$, com $i < j$. O comprimento do intervalo é o número de seus termos.

Seja $A \in \mathcal{A}$ uma alcova e seja $x = (x_0, x_1, \dots, x_l) \in A$. Então, para cada intervalo cíclico $[i, j]$, temos que

$$0 < x_i + \dots + x_j < 1 \quad \text{ou} \quad 1 < x_i + \dots + x_j < 2.$$

Definição 3.7 A característica $k(A)$ da alcova $A \in \mathcal{A}$ é definida como sendo o menor entre os comprimentos de todos os intervalos cíclicos $[i, j]$, tais que

$$1 < x_i + \cdots + x_j < 2.$$

Note que $k(A)$ é bem definida, pois $x_0 + \cdots + x_l = 2$ e, portanto, para algum intervalo cíclico $[i, j]$ devemos ter $x_i + \cdots + x_j > 1$.

Por exemplo, se $x_i > 1$ para algum (necessariamente único) i , então $k(A) = 1$.

Como w é a permutação cíclica, é claro que $k(wA) = k(A)$, o que significa que a característica $k(\cdot)$ é constante ao longo das órbitas.

Lema 3.8 Seja $A \in \mathcal{A}$ uma alcova qualquer. Então, $k(A) \leq \frac{n}{2}$, se n é par e, $k(A) \leq \frac{n+1}{2}$, se n é ímpar.

Demonstração: Se n é par, suponha por absurdo que $k(A) > n/2$. Então, para todo intervalo com exatamente $n/2$ elementos, a soma dos termos correspondentes é menor do que 1. Mas, o complementar de um intervalo com $n/2$ elementos é um intervalo cíclico com $n/2$ elementos e, portanto, a soma dos termos no complementar também deve ser menor do que 1. Porém isso é uma contradição, pois a soma de todos os termos é 2. Logo, $k(A) \leq \frac{n}{2}$.

Analogamente, se n é ímpar, suponha por absurdo que $k(A) > (n+1)/2$. Então, para todo intervalo com $(n+1)/2$ elementos, a soma dos termos correspondentes é menor do que 1. Mas, o complementar de um intervalo com $(n+1)/2$ elementos é um intervalo cíclico com $(n-1)/2$ elementos e, portanto, a soma dos termos no complementar também deve ser menor do que 1. Porém isso é uma contradição, pois a soma de todos os termos é 2. Logo, devemos ter $k(A) \leq \frac{(n+1)}{2}$. \square

3.4 Representantes e número de classes com $k \geq 1$, $n \geq 3k - 2$

Dada uma alcova $A \subset 2A_0$ de característica $k \geq 1$, temos que A determina uma classe de equivalência cíclica, cujos elementos têm todos a mesma característica k . A alcova A também define uma estrutura quase complexa $J(A)$, que está na forma de

ideal abeliano e é equivariante pela ação do grupo $\langle w \rangle = \{1, w, \dots, w^l\}$, no sentido de que para todo $h \in \{0, 1, \dots, l\}$, $w^h J(A) = J(w^h A)$, onde w é a permutação cíclica de $n = l + 1$ elementos. Consequentemente, $J(A)$ determina uma classe com característica k , cujos elementos são estruturas equivalentes pela ação do grupo $\langle w \rangle$ e estão todos na forma de ideal abeliano.

Nosso objetivo nessa seção é contar a quantidade dessas classes e exibir um representante canônico para cada uma delas. Para isso, antes faremos algumas observações:

Observação 3.9 *Seja $A \in \mathcal{A}$ uma alcova de característica $k \geq 1$ e seja $x = (x_0, x_1, \dots, x_l) \in A$, tal que $x_0 + \dots + x_{k-1} > 1$. Então,*

1. *Se um intervalo cíclico $[i, j]$ tem comprimento menor do que k , a soma dos elementos correspondentes, $x_i + \dots + x_j$ deve ser < 1 . Consequentemente, no seu complementar a soma dos termos correspondentes deve ser > 1 .*
2. *Se um intervalo cíclico $[i, j - 1]$ de comprimento $\geq k$ interceptar o intervalo $[0, k - 1]$, então a soma dos termos correspondentes, $x_i + \dots + x_{j-1}$ pode tanto ser < 1 quanto ser > 1 . Logo, o termo $\epsilon_{i,j}$ pode assumir tanto o valor $+1$, quanto o valor -1 . Neste caso, dizemos que $\epsilon_{i,j}$ é indeterminado.*
3. *Se $\epsilon_{ij} = -1$, para $1 \leq i < j \leq l$, então $\epsilon_{i,j+1} = \epsilon_{i,j+2} = \dots = \epsilon_{i,n} = -1$, pois $J(A)$ está na forma de ideal abeliano.*

3.4.1 Classes com característica $k = 1$, $n \geq 2$

Tome uma alcova A , tal que $k(A) = 1$. Isto significa que se $x = (x_0, x_1, \dots, x_l) \in A$, então alguma de suas coordenadas x_i é tal que $1 < x_i < 2$. Essa coordenada é única, pois a soma de todas é 2. Aplicando uma permutação cíclica em A pode-se supor que $1 < x_0 < 2$. Mas,

$$x_1 + \dots + x_l = 2 - x_0,$$

o que implica que $x_1 + \dots + x_l < 1$. Portanto, da definição de $J(A)$ segue que $\epsilon_{1n} = +1$. Como $J(A)$ está na forma de ideal abeliano, a conclusão é que para todo $i < j$, temos $\epsilon_{ij} = +1$, o que significa que $J(A)$ é o torneio transitivo canônico.

Portanto, existe uma única classe de equivalência com $k(A) = 1$ e o representante canônico para esta classe é dado por:

$$J(A) = \begin{pmatrix} 0 & + & + & + & \cdots & + \\ & 0 & + & + & \cdots & + \\ & & 0 & + & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & + \\ & & & & 0 & + \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

3.4.2 Classes com característica $k = 2$, $n \geq 4$

O objetivo aqui é contar o número de classes de equivalência com característica $k = 2$ e apresentar um representante canônico para cada uma delas. Para isso, antes vamos provar o seguinte resultado:

Lema 3.10 *Seja \tilde{A} uma alcova com característica $k = 2$. Então, na classe de equivalência determinada por \tilde{A} existe uma única alcova A tal que*

$$x_0 + x_1 > 1 \quad \text{e} \quad x_1 + x_2 < 1, \tag{3.1}$$

para todo $x = (x_0, x_1, \dots, x_l) \in A$.

Demonstração: Como $k(\tilde{A}) = 2$, segue que existe uma alcova A na órbita de \tilde{A} , tal que $x_0 + x_1 > 1$, para todo $x = (x_0, x_1, \dots, x_l) \in A$. As outras somas de duas coordenadas dos elementos $x \in A$ que podem ser > 1 , são:

$$x_1 + x_2 \quad \text{e} \quad x_l + x_0.$$

Logo, A, wA e w^lA são as únicas alcovas na órbita de \tilde{A} que podem satisfazer as inequações (3.1). Primeiramente, observe que w^lA não satisfaz (3.1), pois cada $y \in w^lA$ é da forma

$$y = w^l x = (x_l, x_0, \dots, x_{l-1})$$

para algum $x \in A$, o que implica que $y_1 + y_2 = x_0 + x_1 > 1$.

Falta analisar as alcovas A e wA . Seja $x = (x_0, x_1, \dots, x_l) \in A$.

Se $x_1 + x_2 > 1$, então A não satisfaz (3.1). Mas, para $y = wx \in wA$, temos que $y_0 + y_1 = x_1 + x_2 > 1$ e $y_1 + y_2 = x_2 + x_3 < 1$, o que implica que wA é a única alcova na órbita de \tilde{A} que satisfaz (3.1).

Se $x_1 + x_2 < 1$, então A satisfaz (3.1). Além disso, A é a única alcova na órbita de \tilde{A} com essa propriedade, pois nesse caso, temos que $y_0 + y_1 = x_1 + x_2 < 1$ para $y = wx \in wA$, o que implica que wA não satisfaz (3.1).

□

Seja então A a única alcova, numa mesma classe de equivalência, que satisfaz:

- $x_0 + x_1 > 1$ e $x_1 + x_2 < 1$.

Com essas condições as possibilidades para $J(A)$ são as seguintes. Inicialmente, como $x_0 + x_1 > 1$, segue que $x_2 + \dots + x_l < 1$ e daí que $\epsilon_{2n} = +1$. Como $J(A)$ está na forma de ideal abeliano, segue que $\epsilon_{2i} = +1$, para todo $i > 2$. Isto é, só aparece -1 acima da diagonal, na primeira linha.

Para ver o que acontece na primeira linha, note antes de mais nada que $x_0 < 1$, pois $k = 2$. Portanto, $x_1 + \dots + x_l > 1$ o que garante que $\epsilon_{1n} = -1$.

Agora, a condição $x_1 + x_2 < 1$ implica que $\epsilon_{13} = +1$. Isto é, os possíveis negativos aparecem só a partir da quarta coluna.

Por fim $J(A)$ é reconstruído da seguinte forma: tome a somas $x_1 + \dots + x_i$ e escolha o primeiro i tal que essa soma é maior do que 1 (existe um pois $x_0 < 1$ e daí que $x_1 + \dots + x_l > 1$). Então, $\epsilon_{1,i+1} = -1$ e daí pra frente todos os sinais são negativos.

O lema acima permite mostrar que esses diferentes $J(A)$ não são equivalentes.

Em suma, existem $n - 3$ classes de equivalência com $k = 2$ e os representantes canônicos dessas classes são dados por:

$$J(A) = \begin{pmatrix} 0 & + & + & \epsilon_{14} & \epsilon_{15} & \epsilon_{16} & \cdots & \epsilon_{1,n-1} & - \\ & 0 & + & + & + & + & \cdots & + & + \\ & & 0 & + & + & + & \cdots & + & + \\ & & & 0 & + & + & \cdots & + & + \\ & & & & 0 & + & \cdots & + & + \\ & & & & & 0 & \ddots & + & + \\ & & & & & & & 0 & + \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & + \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & + \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

3.4.3 Classes com característica $k = \frac{n+1}{2}$

Considere uma alcova A com característica $k = \frac{n+1}{2}$ e tome $x = (x_0, \dots, x_l) \in A$, tal que $x_0 + \dots + x_{k-1} > 1$. Então, $x_k + \dots + x_l < 1$ o que implica que $\epsilon_{k,n} = +1$. Como $J(A)$ está na forma de ideal abeliano, segue que a partir da k -ésima linha, todas as entradas da matriz de incidência de $J(A)$ são iguais a $+1$.

Agora, pelas observações 3.9 e pelo fato de $n = 2k - 1 = k + (k - 1)$, temos que:

1. $\epsilon_{i,k+i-1} = +1$, para todo $i \in \{1, \dots, k - 1\}$, pois seu intervalo correspondente: $[i, k+i-2]$ tem comprimento $k-1 < k$. Logo, $\epsilon_{ij} = +1$, para todo $j \leq k+i-1$, donde segue que $\epsilon_{ij} = +1$, para todo $j - i < \frac{n}{2}$.
2. $\epsilon_{i,k+i} = -1$, para todo $i \in \{1, \dots, k - 1\}$, pois seu intervalo complementar tem comprimento $k - 1 < k$. Logo, $\epsilon_{ij} = -1$, para todo $j \geq k + i$, pois $J(A)$ está na forma de ideal abeliano. O que implica que $\epsilon_{ij} = -1$, para todo $j - i \geq \frac{n}{2}$.

Deste modo, concluímos que a matriz de incidência de $J(A)$ é dada por

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se } j - i < \frac{n}{2} \\ -1 & \text{se } j - i > \frac{n}{2} \end{cases}$$

que é exatamente a mesma que a da alcova que contém o baricentro.

Portanto, existe uma única classe de equivalência.

3.4.4 Número de classes com característica $k \geq 3$, $n \geq 3k - 2$

Aqui, vamos usar o mesmo método aplicado no caso $k = 2$, para contarmos o número de classes com característica $k \geq 3$ e $n \geq 3k - 2$. Isto é, primeiro definimos todos os possíveis representantes canônicos de cada classe e em seguida, procuramos condições que devem ser satisfeitas por eles, para garantir a não equivalência entre duas estruturas em forma canônica. Essas condições estão descritas no lema 3.11, onde foi imprescindível supor $n \geq 3k - 2$.

Uma vez garantida a não equivalência entre dois representantes canônicos, torna-se possível a contagem do número de classes, que será feita analisando as matrizes de incidência dos representantes canônicos. Em toda a subseção estaremos supondo $k \geq 3$ e $n \geq 3k - 2$, com $n = l + 1$.

Para cada $i \in \{0, \dots, 2k - 2\}$, denote por $S_i(x)$ a seguinte soma de k elementos: $S_i(x) = x_i + \dots + x_{k+i-1}$, para todo $x = (x_0, \dots, x_l) \in A$. (Observe que $S_{2k-2}(x)$ está bem definido pois, $n \geq 3k - 2$).

Seja agora $\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(x_0, \dots, x_l)$ o seguinte sistema de k inequações:

$$\mathcal{S}(x) = \begin{cases} S_0(x) > 1 & (1) \\ S_1(x) < 1 & (2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{k-2}(x) < 1 & (k-1) \\ S_{k-1}(x) < 1 & (k) \end{cases}$$

Dizemos que uma alcova $A \in \mathcal{A}$ de característica $k \geq 3$ é uma solução do sistema \mathcal{S} , se para cada $y = (y_0, \dots, y_l) \in A$, tivermos:

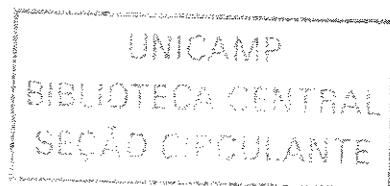
$$S_0(y) > 1, S_1(y) < 1, \dots, S_{k-2}(y) < 1, S_{k-1}(y) < 1,$$

isto é, se cada elemento de A verificar todas as inequações do sistema.

Vamos mostrar que, numa mesma classe de equivalência, existe uma única alcova satisfazendo o sistema \mathcal{S} .

Dados uma alcova $\tilde{A} \in \mathcal{A}$ com característica k e um ponto $x = (x_0, \dots, x_l) \in \tilde{A}$, temos que existe um intervalo cíclico $[i, j]$ de comprimento k , tal que $x_i + \dots + x_j > 1$. Aplicando em \tilde{A} a permutação cíclica w^i e denotando por $y = (y_0, \dots, y_l)$ os elementos de $A := w^i \tilde{A}$, obtemos

$$S_0(y) = y_0 + \dots + y_{k-1} = x_i + \dots + x_j > 1,$$



o que implica que na órbita de \tilde{A} , existe uma alcova A satisfazendo a primeira inequação do sistema \mathcal{S} . Além disso, os únicos intervalos cíclicos $[i, j]$ com k elementos cuja soma $y_i + \dots + y_j$ pode ser maior do que 1, são aqueles que interceptam o intervalo $[0, k - 1]$, isto é, são os seguintes intervalos:

- $[1, k] = \{1, 2, \dots, k\}$
- $[2, k + 1] = \{2, 3, \dots, k + 1\} \dots$
- $\dots, [k - 1, 2k - 2] = \{k - 1, k, \dots, 2k - 2\}$
- $[l - k + 2, 0] = \{l - k + 2, l - k + 3, \dots, l, 0\} \dots$
- $\dots, [l, k - 2] = \{l, 0, 1, \dots, k - 2\}$.

Isto significa que as únicas alcovas na órbita de A que podem satisfazer a primeira inequação do sistema \mathcal{S} , são:

$$A, wA, w^2A, \dots, w^{k-1}A, w^{l-k+2}A, \dots, w^lA. \quad (3.2)$$

Consequentemente, essas são as únicas alcovas na órbita de A que podem ser solução do sistema \mathcal{S} .

Portanto, para encontrarmos uma solução do sistema \mathcal{S} em cada classe de equivalência, devemos começar com uma alcova A de característica $k \geq 3$ satisfazendo a primeira de suas inequações e em seguida analisar as alcovas (3.2). Seja então A uma alcova com essa propriedade. Então, para cada $y \in A$, temos que $S_0(y) > 1$.

Antes de mais nada, observamos que nenhuma das alcovas $w^{l-k+2}A, w^{l-k+3}A, \dots, w^lA$ pode ser solução do sistema \mathcal{S} , pois deixam de satisfazer suas inequações de números: $(k), (k - 1), \dots, (2)$, respectivamente. Mais precisamente, para cada $j \in \{2, \dots, k\}$, temos que a alcova $w^{l-k+j}A$ não satisfaz a $(k - j + 2)$ -ésima inequação de \mathcal{S} pois, para todo $y \in A$, $S_{k-j+1}(w^{l-k+j}y) = S_0(y) > 1$.

Falta analisar as alcovas $A, wA, \dots, w^{k-1}A$. Antes observamos que, como $S_0(y) > 1$, então necessariamente, devemos ter

$$S_k(y) < 1, S_{k+1}(y) < 1, \dots, S_{2k-2}(y) < 1.$$

Seja $A \in \mathcal{A}$ uma alcova com característica $k \geq 3$, solução do sistema \mathcal{S} e seja $J(A) = \{\epsilon_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ a estrutura quase complexa invariante associada a A . Então, pela definição de $J(A)$ e pelo fato de A ser solução do sistema \mathcal{S} , temos:

1. Como A é solução do sistema \mathcal{S} , temos que $S_0(x) = x_0 + \dots + x_{k-1} > 1$, o que implica que $x_k + \dots + x_l < 1$ e, portanto, $\epsilon_{k,n} = +1$. Isto significa que a partir da k -ésima linha da matriz de incidência de $J(A)$, todas as entradas ϵ_{ij} são iguais a $+1$, pois $J(A)$ está na forma de ideal abeliano.
2. Para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$, temos que $\epsilon_{i,k+i} = +1$, pois A é solução do sistema \mathcal{S} , isto é, $S_i(x) = x_i + \dots + x_{k+i-1} < 1$.
3. Para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$, os elementos:

$$\epsilon_{i,k+i+1}, \epsilon_{i,k+i+2}, \dots, \epsilon_{i,n-k+i},$$

são todos indeterminados, pois seus intervalos correspondentes:

$$[i, k+i], [i, k+i+1], \dots, [i, n-k+i-1]$$

interceptam o intervalo $[0, k-1]$ e têm todos comprimentos $> k$.

4. Para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$, temos que $\epsilon_{i,n-k+i+1} = -1$, pois seu intervalo correspondente: $[i, n-k+i]$, tem comprimento: $n-k+i-i+1 = n-k+1$ o que implica que seu intervalo complementar tem comprimento $k-1 < k$.

Portanto, concluímos que os representantes canônicos $J(A)$ têm as seguintes matrizes de incidência:

$$\begin{pmatrix} 0 & + & \cdots & + & \epsilon_{1,k+2} & \epsilon_{1,k+3} & \cdots & \epsilon_{1,n-k+1} & - & - & \cdots & - \\ 0 & + & \cdots & + & \epsilon_{2,k+3} & \cdots & \epsilon_{2,n-k+1} & \epsilon_{2,n-k+2} & - & - & \cdots & - \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ & & 0 & + & \cdots & + & \epsilon_{k-1,2k} & \cdots & \epsilon_{k-1,n-2} & \epsilon_{k-1,n-1} & - & - \\ & & & 0 & \cdots & + & + & \cdots & + & + & + & + \\ & & & & 0 & + & + & \cdots & + & + & + & + \\ & & & & & 0 & + & \cdots & + & + & + & + \\ & & & & & & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & 0 & + & + & + & + \\ & & & & & & & & 0 & + & + & + \\ & & & & & & & & & 0 & + & + \\ & & & & & & & & & & 0 & + \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Para determinarmos o número de classes de equivalência com característica $k \geq 3$, $n \geq 3k - 2$, vamos analisar o número de sinais negativos m_i que podem aparecer em cada linha $i \in \{1, \dots, k-1\}$ da matriz de incidência de $J(A)$. Em cada linha $i \in \{1, \dots, k-1\}$, existem exatamente $n - 2k$ elementos indeterminados, a saber,

$$\epsilon_{i,k+i+1}, \epsilon_{i,k+i+2}, \dots, \epsilon_{i,n-k+i}.$$

As quantidades de sinais negativos m_i vão variar de acordo com os valores (+1 ou -1) assumidos pelos elementos indeterminados da respectiva linha. Como existem $n - 2k$ elementos indeterminados em cada linha, podemos ter no mínimo $k - i$ e no máximo $n - k - i$ sinais negativos na linha i , para os casos em que todos os elementos indeterminados assumem valor +1 e todos os elementos indeterminados assumem valor -1, respectivamente. Isto significa que m_i deve satisfazer:

$$k - i \leq m_i \leq n - k - i,$$

para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Além disso, como $J(A)$ está na forma de ideal abeliano, devemos ter:

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{k-1}.$$

Deste modo, o número de classes de equivalência coincide com o número de vetores da forma $v = (m_1, m_2, \dots, m_{k-1})$, tais que $m_1, m_2, \dots, m_{k-1} \in \mathbb{N}$, $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{k-1}$ e $k - i \leq m_i \leq n - k - i$, para todo $i \in \{1, \dots, k - 1\}$.

Para contar o número desses vetores, enumere as $k - 1$ primeiras linhas de $J(A)$ na ordem decrescente (isto é, de baixo para cima). Agora, em cada linha $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ (enumerada na ordem decrescente) considere apenas os $n - 2k + 1$ pontos formados pelos $n - 2k$ elementos indeterminados da respectiva linha, juntamente com um ponto que representa o menor valor assumido por m_i . Enumere esses pontos também na ordem decrescente, isto é, da direita para a esquerda. Assim, na linha $i \in \{1, \dots, k - 1\}$, o primeiro ponto é aquele que indica o menor valor assumido por m_i , o segundo ponto é aquele que representa o elemento indeterminado $\epsilon_{i, n-k+i}$ e, em geral, o j -ésimo ponto da linha i é aquele que representa o elemento indeterminado $\epsilon_{i, n-k+i-j+2}$, para cada $j \in \{2, \dots, n - 2k + 1\}$.

Com essa construção, obtemos uma nova maneira de contar o número de classes de equivalência, a saber, defina, para cada par i, j , com $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $j \in \{1, \dots, n - 2k + 1\}$, a função $f(i, j)$ da seguinte maneira:

$$f(1, j) := 1, \text{ para todo } j = 1, \dots, n - 2k$$

$$f(i, j) := \sum_{l=1}^{j+1} f(i-1, l), \text{ para todo } i \geq 2 \text{ e } j = 1, \dots, n - 2k$$

$$f(i, n - 2k + 1) := f(i, n - 2k), \text{ para todo } i \geq 1.$$

Então, o número de classes de equivalência $N(k)$ com característica $k \geq 3$ e $n \geq 3k - 2$ é dado por:

$$N(k) = \sum_{j=1}^{n-2k+1} f(k-1, j) = f(k, n-2k).$$

Exemplo 3.12 *Número de classes com $k = 3$ e $n \geq 7$.*

Os representantes canônicos das classes com característica $k = 3$ e $n \geq 7$, têm

as seguintes matrizes de incidência:

$$J(A) = \begin{pmatrix} 0 & + & + & + & \epsilon_{15} & \epsilon_{16} & \cdots & \epsilon_{1,n-2} & - & - \\ 0 & + & + & + & \epsilon_{26} & \cdots & \epsilon_{2,n-2} & \epsilon_{2,n-1} & - & - \\ & 0 & + & + & + & \cdots & + & + & + & + \\ & & 0 & + & + & \cdots & + & + & + & + \\ & & & 0 & + & \cdots & + & + & + & + \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & + & + & + & + \\ & & & & & & 0 & + & + & + \\ & & & & & & & 0 & + & + \\ & & & & & & & & 0 & + \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Já sabemos, pelo lema 3.11, que esses representantes definem classes de equivalência diferentes.

Nesse caso, precisamos determinar as funções $f(i, j)$, com $i = 1, 2, 3$ e $j \in \{1, \dots, n - 5\}$. Essas funções são dadas por:

$$f(1, j) := 1, \text{ para todo } j \in \{1, \dots, n - 5\}$$

$$f(2, j) := \sum_{l=1}^{j+1} f(1, l) = \sum_{l=1}^{j+1} 1 = (j + 1), \text{ para todo } j = 1, \dots, n - 6 \text{ e,}$$

$$f(2, n - 5) := f(2, n - 6) = n - 5.$$

Então, o número de classes $N(3)$ com característica $k = 3$ e $n \geq 7$, é:

$$\begin{aligned} N(3) &= \sum_{j=1}^{n-6} (j + 1) + (n - 5) \\ &= \frac{(n - 6)(n - 5)}{2} + (n - 6) + (n - 5) \\ &= (n - 6) + \frac{(n - 5)(n - 4)}{2} = f(3, n - 6). \end{aligned}$$

O próximo Teorema nos dá uma fórmula geral, que permite contar o número de classes de equivalência com característica $k \geq 4$ e $n \geq 3k - 2$.

Teorema 3.13 *Seja $A \in \mathcal{A}$ uma alcova de característica $k \geq 4$, com $n \geq 3k - 2$. Dados $i \geq 3$ e $j \geq 1$, denote por $g(i, j)$ a seguinte função:*

$$g(i, j) = \frac{(j+1)(j+2i-2)!}{(i-1)!(j+i)!}.$$

Então, $f(i, j) = g(i, j)$, para todo $j \leq n - 2k - i + 2$ e, para todo inteiro $b \in \{3, \dots, i\}$, temos que $f(i, n - 2k - i + b)$ é dada por:

$$\begin{aligned} f(i, n - 2k - i + b) &= g(i, n - 2k - i + b) - \\ &\quad - \frac{(n - 2k + i - b + 5)(n - 2k + i + b - 2)!}{(b - 3)!(n - 2k + i + 2)!}. \end{aligned}$$

Logo, o número de classes de equivalência com característica $k \geq 4$, $n \geq 3k - 2$ é:

$$N(k) = f(k, n - 2k) = \frac{(n - 2k + 1)(n - 2)!}{(k - 1)!(n - k)!} - \frac{(n - 2k + 5)(n - 2)!}{(k - 3)!(n - k + 2)!}.$$

Proposição 3.14 *Sejam $a \geq 2$, l e m inteiros positivos, com $m \geq l$. Então:*

$$\sum_{l=1}^m \frac{(l+1)(l+2a-2)!}{(l+a)!} = \frac{m(m+2a-1)!}{a(m+a)!}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m \frac{(l+1)(l+2a-2)!}{(l+a)!} &= \sum_{l=1}^m \frac{(l+a)(l+2a-2)!}{(l+a)!} + (1-a) \sum_{l=1}^m \frac{(l+2a-2)!}{(l+a)!} \\ &= \sum_{l=1}^m \frac{(l+2a-2)!}{(l+a-1)!} + (1-a) \sum_{l=1}^m \frac{(l+2a-2)!}{(l+a)!} \\ &= (a-1)! \sum_{l=1}^m \binom{l+2a-2}{a-1} + (a-1)(a-2)! \sum_{l=1}^m \binom{l+2a-2}{a-2} \\ &= (a-1)! \left[\binom{2a-1+m}{a} - \binom{2a-2}{a} - \binom{2a-2}{a-1} \right] - \\ &\quad - (a-1)! \left[\binom{m+2a-1}{a-1} - \binom{2a-2}{a-1} - \binom{2a-2}{a-2} \right] \\ &= (a-1)! \left[\binom{m+2a-1}{a} - \binom{m+2a-1}{a-1} \right] = \frac{m(m+2a-1)!}{a(m+a)!} \end{aligned}$$

□

Proposição 3.15 Para cada par i, j com $i \geq 2$ e $j \geq 2$, temos:

$$1. g(i+1, j-1) + g(i, j+1) = g(i+1, j)$$

$$2. g(i, j) = g(i, j+1) - \frac{(j+3)(j+2i-2)!}{(i-2)!(j+i+1)!},$$

onde $g(i, j)$ é a função definida no Teorema 3.13.

Demonstração:

1.

$$\begin{aligned} g(i+1, j-1) + g(i, j+1) &= \frac{j(j+2i-1)!}{i!(j+i)!} + \frac{(j+2)(j+2i-1)!}{(i-1)!(j+i+1)!} \\ &= \frac{j(j+i+1)(j+2i-1)! + i(j+2)(j+2i-1)!}{i!(j+i+1)!} \\ &= \frac{(j+2i-1)![j^2 + (2i+1)j + 2i]}{i!(j+i+1)!} \\ &= \frac{(j+1)(j+2i)(j+2i-1)!}{i!(j+i+1)!} \\ &= \frac{(j+1)(j+2i)!}{i!(j+i+1)!} = g(i+1, j) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} g(i, j+1) - \frac{(j+3)(j+2i-2)!}{(i-2)!(j+i+1)!} &= \\ &= \frac{(j+2)(j+2i-1)!}{(i-1)!(j+i+1)!} - \frac{(j+3)(j+2i-2)!}{(i-2)!(j+i+1)!} \\ &= \frac{(j+2)(j+2i-1)! - (i-1)(j+3)(j+2i-2)!}{(i-1)!(j+i+1)!} \\ &= \frac{(j+2i-2)![j^2 + (i+2)j + i+1]}{(i-1)!(j+i+1)!} \\ &= \frac{(j+1)(j+i+1)(j+2i-2)!}{(i-1)!(j+i+1)!} \\ &= \frac{(j+1)(j+2i-2)!}{(i-1)!(j+i)!} = g(i, j). \end{aligned}$$

□

Proposição 3.16 Para qualquer $i \geq 2$ e $j \leq n - 2k - i + 2$, temos que $f(i, j) = g(i, j)$, onde $g(i, j)$ é a função definida no teorema 3.13, por:

$$g(i, j) = \frac{(j+1)(j+2i-2)!}{(i-1)!(j+i)!}. \quad (3.3)$$

Demonstração: A prova será feita por indução sobre $i \geq 2$ e $j \leq n - 2k - i + 2$.

Para $i = 2$ e para todo $j = 1, \dots, n - 2k$, temos:

$$f(2, j) = \sum_{l=1}^{j+1} f(1, l) = \sum_{l=1}^{j+1} 1 = (j+1) = \frac{(j+1)(j+2 \cdot 2 - 2)!}{(2-1)!(j+2)!} = g(2, j).$$

Suponha agora que a equação (3.3) seja válida para algum $i \geq 2$ e para todo $j \leq n - 2k - i + 2$. Vamos provar que a mesma é válida para $i + 1$ e para todo $j \leq n - 2k - (i + 1) + 2 = n - 2k - i + 1$.

De fato, pela hipótese de indução temos que:

$$f(i+1, j) = \sum_{l=1}^{j+1} f(i, l) = \sum_{l=1}^{j+1} \frac{(l+1)(l+2i-2)!}{(i-1)!(l+i)!}.$$

Fazendo $a = i$ e $m = j + 1$ na Proposição 3.14, obtemos:

$$f(i+1, j) = \frac{1}{(i-1)!} \frac{(j+1)(j+2i)!}{i(j+i+1)!} = \frac{(j+1)(j+2i)!}{i!(j+i+1)!} = g(i+1, j).$$

□

Proposição 3.17 Para cada $i \geq 3$ fixo e, para todo $b \in \{3, \dots, i\}$, temos:

$$\begin{aligned} f(i, n - 2k - i + b) &= g(i, n - 2k - i + b) - \\ &- \frac{(n - 2k + i - b + 5)(n - 2k + i + b - 2)!}{(b - 3)!(n - 2k + i + 2)!}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Demonstração: A prova será feita por indução sobre $i \geq 3$ e $b \in \{3, \dots, i\}$.

Se $i = 3 = b$, temos:

$$\begin{aligned} f(i, n - 2k - i + b) &= f(3, n - 2k) \\ &= f(3, n - 2k - 1) + f(2, n - 2k). \end{aligned}$$

Agora, como $n - 2k - 1 = n - 2k - i + 2$ e $n - 2k = n - 2k - 2 + 2$, segue da Proposição 3.16, que $f(3, n - 2k - 1) = g(3, n - 2k - 1)$ e $f(2, n - 2k) = g(2, n - 2k)$.

Logo,

$$f(3, n - 2k) = g(3, n - 2k - 1) + g(2, n - 2k).$$

Pelo ítem 2 da Proposição 3.15, temos que

$$\begin{aligned} g(2, n - 2k) &= g(2, n - 2k + 1) - \frac{(n - 2k + 3)(n - 2k + 2)!}{(n - 2k + 3)!} \\ &= g(2, n - 2k + 1) - 1. \end{aligned}$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned} f(3, n - 2k) &= g(3, n - 2k - 1) + g(2, n - 2k + 1) - 1 \\ &= g(3, n - 2k) - 1 \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, usamos o ítem 1 da Proposição 3.15. Mas isso equivale a fazer $i = b = 3$ na expressão (3.4), o que implica que a expressão (3.4) é válida para $i = b = 3$.

Suponha, agora, que a expressão (3.4) seja válida para algum $i \geq 3$ e para $b = 3$, isto é, suponha que

$$f(i, n - 2k - i + 3) = g(i, n - 2k - i + 3) - 1,$$

para algum $i \geq 3$ fixo. Vamos mostrar que a expressão (3.4) também é válida para $i + 1 \geq 4$ e para $b = 3$. De fato,

$$\begin{aligned} f[i + 1, n - 2k - (i + 1) + 3] &= f[i + 1, n - 2k - (i + 1) + 2] + \\ &+ f(i, n - 2k - i + 3). \end{aligned} \tag{3.5}$$

No segundo membro da equação (3.5), aplicamos a Proposição 3.16 na primeira parcela e a hipótese acima na segunda parcela, para obter:

$$f[i + 1, n - 2k - (i + 1) + 3] = g[i + 1, n - 2k - (i + 1) + 2] + g(i, n - 2k - i + 3) - 1$$

que, pelo ítem 1 da Proposição 3.15, é dado por:

$$f[i + 1, n - 2k - (i + 1) + 3] = g[i + 1, n - 2k - (i + 1) + 3] - 1.$$

Mas isso equivale a substituir $i + 1$, $b = 3$ nos lugares de i , b na expressão (3.4). Logo, concluímos que a expressão (3.4) é válida para todo $i \geq 3$ e $b = 3$.

Observe que, como a expressão (3.4) vale para todo $i \geq 3$, com $b = 3$ então, a partir da linha $i + 1 \geq 4$, cada valor

$$f[i + 1, n - 2k - (i + 1) + b] ,$$

com $b \geq 4$, $b \neq i + 1$, pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} f[i + 1, n - 2k - (i + 1) + b] &= f[i + 1, n - 2k - (i + 1) + b - 1] + \\ &+ f(i, n - 2k - i + b) , \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde podemos supor que cada parcela do segundo membro de (3.6) satisfaz a expressão (3.4).

Para o caso em que $b = i + 1$, podemos determinar $f[i + 1, n - 2k]$, para cada $i + 1 \geq 4$, pela seguinte expressão:

$$f[i + 1, n - 2k] = f[i + 1, n - 2k - 1] + f(i, n - 2k) , \quad (3.7)$$

onde também podemos supor que cada parcela do segundo membro de (3.7), é dada pela expressão (3.4). Vamos então mostrar que a expressão (3.4) é válida para todo $i + 1 \geq 4$ e para cada $b \in \{4, \dots, i + 1\}$.

1. Primeiro suponha $b \neq i + 1$. Então,

$$\begin{aligned} f[i + 1, n - 2k - (i + 1) + b] &= f[i + 1, n - 2k - (i + 1) + b - 1] + \\ &+ f[i, n - 2k - i + b] \\ &= g[i + 1, n - 2k - (i + 1) + b - 1] + g[i, n - 2k - (i + 1) + b + 1] - \\ &\quad \frac{(n - 2k + i - b + 7)(n - 2k + i + b - 2)!}{(b - 4)! (n - 2k + i + 3)!} \\ &\quad - \frac{(n - 2k + i - b + 5)(n - 2k + i + b - 2)!}{(b - 3)! (n - 2k + i + 2)!} . \end{aligned}$$

Para facilitar a notação, faça $x = n - 2k + i$. Então, pelo item 1 da Proposição 3.15, segue que:

$$f[i + 1, n - 2k - (i + 1) + b] = g[i + 1, n - 2k - (i + 1) + b] - \frac{\{(b - 3)(x - b + 7) + (x + 3)(x - b + 5)\}(x + b - 2)!}{(b - 3)! (x + 3)!}. \quad (3.8)$$

Desenvolvendo a parte do numerador da fração em (3.8) que se encontra dentro das chaves, temos:

$$\begin{aligned} (b - 3)(x - b + 7) + (x + 3)(x - b + 5) &= (x - b + 5)(x + b) + 2(b - 3) \\ &= x^2 + 5x - (b - 1)(b - 6) \\ &= (x + b - 1)(x - b + 6). \end{aligned}$$

Deste modo, fazendo $x = n - 2k + i$ em (3.8), obtemos:

$$\begin{aligned} f[i + 1, n - 2k - (i + 1) + b] &= g[i + 1, n - 2k - (i + 1) + b] - \\ &\quad \frac{(n - 2k + i + b - 1)(n - 2k + i - b + 6)(n - 2k + i + b - 2)!}{(b - 3)! (n - 2k + i + 3)!} \\ &= g[i + 1, n - 2k - (i + 1) + b] - \frac{(n - 2k + i - b + 6)(n - 2k + i + b - 1)!}{(b - 3)! (n - 2k + i + 3)!}, \end{aligned}$$

que equivale a substituir os valores $i + 1$, b , nos lugares de i , b , na expressão (3.4).

2. Para $b = i + 1$, temos que $j = n - 2k$ e, portanto:

$$f(i + 1, j) = f(i + 1, j - 1) + f(i, j),$$

onde podemos supor que $f(i + 1, j - 1)$ e $f(i, j)$ são dados pela expressão (3.4).

Se fizermos $j = n - 2k - i + b$, podemos escrever a expressão (3.4), de forma alternativa, como:

$$f(i, j) = g(i, j) - \frac{(j + 2i - 2b + 5)(j + 2i - 2)!}{(b - 3)! (j + 2i - b + 2)!}. \quad (3.9)$$

Logo, basta substituir os valores $i + 1$, $j - 1$ e $b = i$ nos lugares de i , j e b na expressão (3.9), para obtermos:

$$f(i + 1, j - 1) = g(i + 1, j - 1) - \frac{(j + 6)(j + 2i - 1)!}{(i - 3)!(j + i + 3)!}. \quad (I)$$

Analogamente, basta substituir i , j e $b = i$ na expressão (3.9), para obtermos:

$$f(i, j) = g(i, j) - \frac{(j + 5)(j + 2i - 2)!}{(i - 3)!(j + i + 2)!}.$$

Mas, pelo ítem 2 da Proposição 3.15, segue que

$$f(i, j) = g(i, j + 1) - \frac{(j + 3)(j + 2i - 2)!}{(i - 2)!(j + i + 1)!} - \frac{(j + 5)(j + 2i - 2)!}{(i - 3)!(j + i + 2)!}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(i, j) &= g(i, j + 1) - \frac{1}{(i - 2)!(j + i + 2)!} [(j + 3)(j + i + 2)(j + 2i - 2)! + \\ &\quad + (i - 2)(j + 5)(j + 2i - 2)!] \\ &= g(i, j + 1) - \frac{(j + 2i - 2)!}{(i - 2)!(j + i + 2)!} [j^2 + (2i + 3)j + 8i - 4] \\ &= g(i, j + 1) - \frac{(j + 4)(j + 2i - 1)!}{(i - 2)!(j + i + 2)!}. \quad (II) \end{aligned}$$

Deste modo, somando as expressões (I) e (II), temos que

$$f(i + 1, j) = g(i + 1, j - 1) + g(i, j + 1) - \frac{(j + 6)(j + 2i - 1)!}{(i - 3)!(j + i + 3)!} - \frac{(j + 4)(j + 2i - 1)!}{(i - 2)!(j + i + 2)!},$$

que pelo ítem 1 da Proposição 3.15, é dada por:

$$\begin{aligned} f(i + 1, j) &= g(i + 1, j) - \frac{(j + 2i - 1)!}{(i - 2)!(j + i + 3)!} [j^2 + (2i + 5)j + 10i] \\ &= g(i + 1, j) - \frac{(j + 5)(j + 2i)!}{(i - 2)!(j + i + 3)!}, \end{aligned}$$

ou, de maneira equivalente,

$$f(i + 1, n - 2k) = g(i + 1, n - 2k) - \frac{(n - 2k + 5)(n - 2k + 2i)!}{(i - 2)!(n - 2k + i + 3)!}.$$

Mas isso equivale a substituir os valores $i + 1$, $b = i + 1$ nos lugares de i e b , na expressão (3.4), completando assim a prova.

□

3.5 Número de classes para o caso A_{p-1} , com p primo

Seja $p \in \mathbb{N}$ um número primo. Vamos determinar o número de classes de equivalência, para o caso A_l , com $l = p - 1$.

Seja $G = \mathcal{W}_\Sigma = \{1, w, \dots, w^{p-1}\}$, onde w é a permutação cíclica de p elementos. Dada uma alcova $A \subset 2A_0$, denotamos por $I(A) := \{g \in G \mid gA = A\}$ o subgrupo de isotropia de A em G . Então, a órbita de A , que denotaremos por $\mathcal{O}(A) := \{A, wA, \dots, w^{p-1}A\}$, é tal que:

$$\mathcal{O}(A) \cong \frac{G}{I(A)}.$$

Pelo Teorema de Lagrange, a ordem de qualquer subgrupo de G deve ser um divisor da ordem de G . Como p é primo, segue que os possíveis subgrupos de isotropia de A em G são $I(A) = \{1\}$ ou $I(A) = G$. Deste modo, só podemos ter dois tipos de órbitas pela ação de G , a saber, $\mathcal{O}(A) = G$ ou $\mathcal{O}(A) = \{1\}$.

Um ponto $x = (x_0, x_1, \dots, x_l) \in C$ é fixo pelo grupo G , se, e somente se, $wx = x$. Mas, $wx = x$ se, e somente se, $(x_1, x_2, \dots, x_l, x_0) = (x_0, x_1, \dots, x_l)$, isto é, se, e somente se, $x = (\frac{2}{p}, \dots, \frac{2}{p})$. Isto significa que o único ponto que é fixo pela ação do grupo G é o baricentro da câmara C , que por sua vez, pertence a uma alcova em \mathcal{A} , pois p é ímpar.

Como temos 2^{p-1} alcovas em $2A_0$, segue que elas estão distribuídas da seguinte forma: seja m o número de classes com p elementos e seja A_b a alcova que contém o baricentro $b = (\frac{2}{p}, \dots, \frac{2}{p})$. Então, a alcova A_b determina uma classe com apenas 1 elemento e, portanto, temos que $mp + 1 = 2^{p-1}$. Porém isso significa que $m = \frac{2^{p-1}-1}{p}$. Como 2^{p-1} é congruente a 1, módulo p , isto é, $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, segue que m é um inteiro positivo e, portanto, temos uma classe com apenas uma alcova A_b e $m = \frac{2^{p-1}-1}{p}$ classes com p alcovas em cada uma delas. Isto é, o número total de classes é dado por:

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p} + 1.$$

3.6 Número de classes para o caso A_{n-1} , n sendo uma potência de dois

Suponha agora que n seja uma potência de 2 e seja $m = \frac{n}{2}$. Então, existe $r \in \mathbb{N}$, tal que $m = 2^r$. Seja d um divisor próprio de n . Vamos mostrar que d também é um divisor de m . De fato, $n = sd$, para algum $s \in \mathbb{N}$, com $s \neq 1$. Isto implica que $2 \cdot 2^r = sd$ e, tanto s quanto d são potências de dois. Suponha que $s = 2^t$, para algum $t \in \mathbb{N}$. Então,

$$2^r = 2^{t-1} \cdot d,$$

o que implica que d é um divisor de m , conforme queríamos.

Proposição 3.18 *Não existe órbita com $m = \frac{n}{2}$ elementos.*

Demonstração: Se existisse uma órbita com $m = \frac{n}{2}$ elementos, então teríamos $w^m A = A$, para alguma alcova $A \in \mathcal{A}$. Isto implica que $w^m b(A) = b(A)$, onde $b(A)$ é o baricentro de A . Deste modo, $b(A)$ deve ser do seguinte tipo:

$$b(A) = (x_0, \dots, x_{m-1}, x_0, \dots, x_{m-1}).$$

Porém isso significa que $2(x_0 + \dots + x_{m-1}) = 2$, isto é, $x_0 + \dots + x_{m-1} = 1$, o que é uma contradição com o fato de $b(A)$ pertencer a A . \square

Proposição 3.19 *Se d é um divisor de $m = \frac{n}{2}$, então não existe uma órbita com d elementos.*

Demonstração: Se existir uma órbita com d elementos, teremos que $w^d A = A$, para alguma alcova A e, conseqüentemente, $w^d b(A) = b(A)$. Isto implica que o baricentro de A deve ser do tipo:

$$b(A) = (x_0, \dots, x_{d-1}, x_0, \dots, x_{d-1}, \dots, x_0, \dots, x_{d-1}),$$

no qual o bloco x_0, \dots, x_{d-1} aparece $2m$ -vezes.

Deste modo, devemos ter $2m(x_0 + \dots + x_{d-1}) = 2$, isto é, $m(x_0 + \dots + x_{d-1}) = 1$. Mas isso é uma contradição, pois $b(A) \in A$. \square

Deste modo, concluímos que se $n = 2^r$ é uma potência de dois e se d é um divisor próprio de n , então não existe nenhuma órbita com d elementos. Portanto, o único subgrupo de isotropia de \mathcal{W}_{Σ} é o trivial e todas as classes de equivalência terão exatamente n elementos. Consequentemente, existem 2^{n-r-1} classes de equivalência.

Capítulo 4

O Caso B_l

Nosso objetivo nesse capítulo é determinar um grupo G , cuja ação no conjunto das alcovas de $2A_0$ coincide com a ação de \mathcal{W}_Σ no conjunto das estruturas que estão na forma de ideal abeliano e, a partir daí, contar o número de classes de equivalência e exibir uma coleção de ideais abelianos que formam um conjunto completo de representantes dessas classes.

4.1 Realização canônica das raízes em B_l

Seja $\mathfrak{g} = so(2l + 1)$ a álgebra das matrizes anti-simétricas de ordem $2l + 1$. Então, \mathfrak{g} é a álgebra de Lie associada ao diagrama B_l , $l \geq 2$.

Para cada inteiro $j \in \{1, \dots, l\}$, seja $\lambda_j : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional linear dado por $\lambda_j(x) = \lambda_j(x_1, \dots, x_l) = x_j$. Então, $\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_l\}$ é um sistema simples de raízes de \mathfrak{g} e as raízes positivas correspondentes são:

$$\Pi^+ = \{\lambda_i + \lambda_j \mid i < j\} \cup \{\lambda_i - \lambda_j \mid i < j\} \cup \{\lambda_i \mid i = 1, \dots, l\}.$$

A raiz máxima em relação ao sistema de raízes positivas Π^+ é $\mu = \lambda_1 + \lambda_2$.

4.2 Uma descrição da ação de \mathcal{W}_Σ

O grupo de Weyl \mathcal{W} de B_l é dado pelas permutações de l elementos, juntamente com as mudanças de sinal nas coordenadas $(x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^l$. O subgrupo \mathcal{W}_Σ é obtido do diagrama estendido, olhando os subdiagramas que dão B_l . No caso em

que $l \geq 3$, $|\mathcal{W}_{\Sigma}| = 2$ e além da identidade, o elemento de \mathcal{W}_{Σ} é aquele que leva a raiz mínima $-\mu$ na raiz simples $\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2$ e deixa invariante $\Sigma \setminus \{\alpha_1\}$. O único $w \in \mathcal{W}$ que satisfaz isso é $w = (-1, 1, \dots, 1)$, isto é, $\mathcal{W}_{\Sigma} = \{1, w\}$, onde

$$w(x_1, \dots, x_l) = (-x_1, x_2, \dots, x_l).$$

De acordo com [15], se A é uma alcova tal que $J(A)$ está na forma de ideal abeliano, então wA também satisfaz essa propriedade.

Por outro lado, o teorema 2.5 garante que as alcovas A que dão ideais abelianos estão em bijeção com o conjunto de alcovas contidas em $2A_0$, onde A_0 é a alcova básica. Um elemento x pertence a uma alcova $A \subset 2A_0$ se, e somente se,

$$0 < \langle \alpha, x \rangle < 2,$$

para toda raiz positiva α .

Agora, seja $\{w_1, \dots, w_l\}$ a base dual de Σ , isto é, $\langle \alpha_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$. Como $w(-\mu) = \alpha_1$, segue que $t_{w_1}w(A_0) = A_0$, onde t_{w_1} denota a translação por w_1 . Deste modo, segue do lema 2.10, que $t_{2w_1}w(2A_0) = 2A_0$.

Portanto, $t_{2w_1}w$ permuta as alcovas em $2A_0$. Um cálculo explícito fornece $w_1 = (1, 0, \dots, 0)$ e daí que

$$t_{2w_1}w(x_1, \dots, x_l) = (2 - x_1, x_2, \dots, x_l).$$

Conseqüentemente, $t_{2w_1}w$ leva a faixa definida pelas desigualdades $1 < \langle \lambda_1, x \rangle < 2$ na faixa $0 < \langle \lambda_1, x \rangle < 1$ e vice-versa. Isso implica que toda alcova em $2A_0$ é equivalente, sob a ação do elemento $t_{2w_1}w$, a uma alcova contida no conjunto

$$2A_0 \cap \{x : 0 < \langle \lambda_1, x \rangle < 1\}.$$

Além disso, duas alcovas nesse conjunto não são equivalentes sob a ação de $G := \{1, t_{2w_1}w\}$. Portanto, decorre da proposição 2.11 que a ação do grupo G nas alcovas de $2A_0$ coincide com a ação de \mathcal{W}_{Σ} no conjunto das estruturas que estão na forma de ideal abeliano. Deste modo, temos:

Teorema 4.1 *Toda alcova em $2A_0$ é equivalente a uma única alcova em*

$$2A_0 \cap \{x : 0 < \langle \lambda_1, x \rangle < 1\}$$

e cada classe de equivalência contém exatamente 2 elementos. Portanto, existem 2^{l-1} classes de equivalência.

Para determinar explicitamente representantes em cada uma das 2^{l-1} classes, a primeira observação é a seguinte:

Lema 4.2 *Uma raiz da forma λ_i , com $i > 1$, não pertence a nenhum ideal abeliano.*

Demonstração: Seja I um ideal abeliano e suponha que $\lambda_i \in I$, com $i \neq 1$. Então,

$$\lambda_{i-1} = (\lambda_{i-1} - \lambda_i) + \lambda_i,$$

também pertence a I , pois I é ideal. Mas, $\lambda_{i-1} + \lambda_i$ é raiz, contradizendo o fato de I ser abeliano. \square

Lema 4.3 *Seja A uma alcova contida em $2A_0 \cap \{x : 0 < \langle \lambda_1, x \rangle < 1\}$ e denote por I o ideal abeliano correspondente. Então, nenhuma raiz do tipo $\lambda_i - \lambda_j$, com $i < j$, está em I .*

Demonstração: Suponha que $\lambda_i - \lambda_j$, com $i < j$, pertence a I . Então, $\lambda_i = (\lambda_i - \lambda_j) + \lambda_j$ também está em I . Pelo lema anterior, $i = 1$. Mas, como I é dado por uma alcova no conjunto $2A_0 \cap \{x : 0 < \langle \lambda_1, x \rangle < 1\}$, a definição a partir da alcova garante que $\lambda_1 \notin I$, concluindo a prova. \square

Juntando estes dois lemas, segue que qualquer ideal associado a uma alcova em $2A_0 \cap \{x : 0 < \langle \lambda_1, x \rangle < 1\}$ está necessariamente contido no conjunto Φ das raízes do tipo $\lambda_i + \lambda_j$, com $i \neq j$. Por outro lado, o conjunto Φ propriamente dito é um ideal abeliano e, como $\lambda_1 \notin \Phi$, a Φ se associa uma alcova em $2A_0 \cap \{x : 0 < \langle \lambda_1, x \rangle < 1\}$. Por isso, qualquer subconjunto de Φ que é ideal é também ideal abeliano e está associado a uma alcova contida em $2A_0 \cap \{x : 0 < \langle \lambda_1, x \rangle < 1\}$. Como duas alcovas diferentes nesse conjunto não são equivalentes, segue que

Proposição 4.4 *Seja Φ o conjunto das raízes do tipo $\lambda_i + \lambda_j$, com $i \neq j$. Então, os ideais contidos em M formam um conjunto completo de representantes das classes de equivalência. Um ideal está contido em Φ se, e somente se, ele é abeliano e está associado a uma alcova em $2A_0 \cap \{x : 0 < \langle \lambda_1, x \rangle < 1\}$.*

Para determinar explicitamente os ideais contidos em Φ , basta exibir 2^{l-1} ideais diferentes, pois essa é a quantidade de ideais dentro de Φ (que é o mesmo que a quantidade de classes de equivalência). Para isso, tome seqüências $R = (a_1, \dots, a_t)$, com $l \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_t > t$ e $t \in \{1, \dots, l-1\}$. Denote por $I(R)$ o ideal de Φ gerado pelo conjunto

$$\lambda_1 + \lambda_{a_1}, \lambda_2 + \lambda_{a_2}, \dots, \lambda_t + \lambda_{a_t},$$

isto é, $I(R)$ é o conjunto de todas as raízes da forma

$$\lambda_i + \lambda_j, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, t \quad \text{com } i < j \leq a_i.$$

Para $t = 0$, convencionamos que a seqüência correspondente é vazia e o ideal gerado é $I = \emptyset$.

Observação 4.5 Uma raiz $\lambda_i + \lambda_j$ pertence ao ideal $I(R)$, com $R = (a_1, \dots, a_t)$ se, e somente se, tivermos

$$\lambda_i + \lambda_j = (\lambda_i + \lambda_{a_i}) + (\lambda_j - \lambda_{a_i}),$$

com $i \in \{1, \dots, t\}$ e $i < j \leq a_i$.

Deste modo, se duas seqüências $R_1 = (a_1, \dots, a_t)$ e $R_2 = (b_1, \dots, b_s)$, com $t, s \in \{1, \dots, l-1\}$, são diferentes, então o ideal gerado por R_1 é diferente do ideal gerado por R_2 , pois:

1. Se $t = s$, isto é, se as duas seqüências têm o mesmo número de elementos, podemos supor, sem perda de generalidade, que existe $i \in \{1, \dots, t = s\}$, tal que $b_i > a_i$. Considere a raiz $\lambda_i + \lambda_{b_i} \in I(R_2)$. Então, essa raiz vai pertencer ao ideal $I(R_1)$ se, e somente se, tivermos:

$$\lambda_i + \lambda_{b_i} = (\lambda_i + \lambda_{a_i}) + (\lambda_{b_i} - \lambda_{a_i}), \quad \text{com } b_i \leq a_i.$$

Porém isso contradiz o fato que $b_i > a_i$ e, conseqüentemente, $I(R_1) \neq I(R_2)$.

2. Se $t < s$, isto é, se a seqüência R_2 tiver mais elementos que a seqüência R_1 , existe i , com $t < i \leq s$, tal que $\lambda_i + \lambda_{b_i} \in I(R_2)$. Porém, esta raiz não poderá ser gerada por nenhum elemento da seqüência R_1 , pois i é maior do que a quantidade de elementos de R_1 .

Além disso, vale a seguinte

Proposição 4.6 *Todos os ideais da forma $I(R)$ definidos anteriormente, formam um conjunto completo de representantes das classes de equivalência.*

Demonstração: Primeiro vamos mostrar que a quantidade de seqüências é 2^{l-1} . Em geral, o número de combinações com repetição de n elementos, tomados p a p , é dado por:

$$C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = \binom{n+p-1}{p}. \quad (4.1)$$

O problema de se calcular o número de seqüências do tipo $R = (a_1, \dots, a_t)$, com $l \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_t > t$, $t \in \{0, \dots, l-1\}$ é um problema de combinação com repetição onde, para cada $t \in \{0, \dots, l-1\}$, temos uma quantidade de $n = l-t$ elementos que deverão ser tomados t a t , isto é, devemos substituir, para cada $t \in \{0, \dots, l-1\}$, os valores de $n = l-t$ e $p = t$ na expressão (4.1), para obter:

$$\binom{n+p-1}{p} = \binom{l-t+t-1}{t} = \binom{l-1}{t}.$$

Portanto, o número de seqüências é dado por:

$$2^{l-1} = \sum_{t=0}^{l-1} \binom{l-1}{t}.$$

O resultado agora segue da observação 4.5 e do fato que a quantidade de ideais contidos em M também é 2^{l-1} . \square

Capítulo 5

O Caso C_l

Analogamente ao caso B_l , nosso objetivo nesse capítulo é determinar um grupo G , cuja ação no conjunto das alcovas de $2A_0$ coincide com a ação de \mathcal{W}_Σ no conjunto das estruturas que estão na forma de ideal abeliano e, a partir daí, contar o número de classes de equivalência e exibir uma coleção de ideais abelianos que formam um conjunto completo de representantes dessas classes.

5.1 Realização canônica das raízes em C_l

Seja $\mathfrak{g} = sp(l)$ a álgebra das matrizes $2l \times 2l$ definida como segue

$$sp(l) = \{A \in sl(2l) : AJ + JA^t = 0\},$$

onde J é a matriz anti-simétrica $2l \times 2l$ escrita em blocos $l \times l$ como

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

onde 1 denota a identidade $l \times l$.

Então, \mathfrak{g} é a álgebra de Lie associada ao diagrama de Dynkin C_l . Um sistema simples de raízes de \mathfrak{g} , é $\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$ e as raízes positivas relativas a Σ , são

$$\Pi^+ = \{\lambda_i - \lambda_j \mid i < j\} \cup \{\lambda_i + \lambda_j \mid i < j\} \cup \{2\lambda_i \mid i = 1, \dots, l\}.$$

A raiz máxima relativa a Π^+ é $\mu = 2\lambda_1$.

5.2 Uma descrição da ação de $\mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}}$

O grupo de Weyl de C_l coincide com o de B_l . No caso em que $l \geq 3$, $|\mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}}| = 2$ e, $\mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}} = \{1, w\}$, onde w é o elemento que leva o peso mínimo $-\mu = -2\lambda_1$ na raiz simples $2\lambda_l = \alpha_l$ e deixa invariante $\Sigma \setminus \{2\lambda_l\}$. O único $w \in \mathcal{W}$ que satisfaz essa propriedade, é

$$w(x_1, \dots, x_l) = (-x_l, \dots, -x_1).$$

Seja $\{w_1, \dots, w_l\}$ a base dual de Σ , isto é, $\langle \alpha_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$. Como $w(-\mu) = \alpha_l$, segue que $t_{w_l}w(A_0) = A_0$, onde t_{w_l} denota a translação por w_l . Logo, segue do lema 2.10 que $t_{2w_l}w(2A_0) = 2A_0$.

Portanto, $t_{2w_l}w$ permuta as alcovas em $2A_0$. Além disso, pela proposição 2.11, temos que a ação de $t_{2w_l}w$ nas alcovas de $2A_0$ coincide com a ação de $\mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}}$ nas estruturas $J(A)$ que estão na forma de ideal abeliano.

Para determinarmos w_l , denote $w_l = (a_1, \dots, a_l)$. Então,

$$\begin{cases} \langle w_l, \alpha_l \rangle = 1 \\ \langle w_l, \alpha_j \rangle = 0, \forall j \neq l, \end{cases}$$

o que implica que

$$\begin{cases} 2a_l = 1 \\ a_i - a_j = 0, \forall i < j. \end{cases}$$

Porém isso significa que $a_1 = a_2 = \dots = a_l = \frac{1}{2}$, isto é,

$$w_l = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (t_{2w_l}w)(x_1, \dots, x_l) &= w(x_1, \dots, x_l) + (1, \dots, 1) \\ &= (-x_l, \dots, -x_1) + (1, \dots, 1) \\ &= (1 - x_l, \dots, 1 - x_1) \end{aligned}$$

A partir de agora, vamos estudar os casos C_l , com l par e C_l , com l ímpar, separadamente.

5.3 O Caso C_l , com l par

Suponha l par. Então, $t_{2w_l}w$ leva a faixa definida pelas desigualdades $1 < \langle \lambda_{\frac{l}{2}} + \lambda_{\frac{l}{2}+1}, x \rangle < 2$ na faixa $0 < \langle \lambda_{\frac{l}{2}} + \lambda_{\frac{l}{2}+1}, x \rangle < 1$ e vice-versa, pois: $1 < x_{\frac{l}{2}} + x_{\frac{l}{2}+1} < 2$ se, e somente se, $0 < 2 - (x_{\frac{l}{2}} + x_{\frac{l}{2}+1}) < 1$, isto é, se, e somente se, $0 < \langle \lambda_{\frac{l}{2}} + \lambda_{\frac{l}{2}+1}, (t_{2w_l}w)(x) \rangle < 1$. Isto implica que toda alcova em $2A_0$ é equivalente, sob a ação do elemento $t_{2w_l}w$, a uma alcova contida no conjunto

$$2A_0 \cap \{x : 0 < \langle \lambda_{\frac{l}{2}} + \lambda_{\frac{l}{2}+1}, x \rangle < 1\}.$$

Além disso, duas alcovas nesse conjunto não são equivalentes sob a ação de $G := \{1, t_{2w_l}w\}$. Portanto,

Teorema 5.1 *Toda alcova em $2A_0$ é equivalente, sob a ação de $t_{2w_l}w \in G$, a uma única alcova em*

$$2A_0 \cap \{x : 0 < \langle \lambda_{\frac{l}{2}} + \lambda_{\frac{l}{2}+1}, x \rangle < 1\}.$$

Portanto, cada classe contém exatamente dois elementos e existem 2^{l-1} classes de equivalência.

Lema 5.2 *Uma raiz da forma $\lambda_i - \lambda_j$, $i < j$, não pertence a nenhum ideal abeliano.*

Demonstração: Seja I um ideal abeliano qualquer e suponha que $\lambda_i - \lambda_j \in I$, $i < j$. Então, $\lambda_i + \lambda_j$ também pertence a I , pois $\lambda_i + \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_j) + 2\lambda_j$ e I é ideal. Mas, $(\lambda_i - \lambda_j) + (\lambda_i + \lambda_j) = 2\lambda_i$ é uma raiz, contradizendo o fato de I ser abeliano. \square

Lema 5.3 *Seja A uma alcova contida em $2A_0 \cap \{x : 0 < \langle \lambda_{\frac{l}{2}} + \lambda_{\frac{l}{2}+1}, x \rangle < 1\}$. Denote por I o ideal abeliano associado a A , isto é,*

$$I := \{\alpha \in \Pi^+ \mid \epsilon_\alpha(A) = -1\} = \{\alpha \in \Pi^+ \mid k_\alpha(A) = 1\}.$$

Então, as raízes da forma

$$\lambda_{\frac{l}{2}+i} + \lambda_{\frac{l}{2}+j}, \quad 0 \leq i < j \leq \frac{l}{2} \quad \text{e} \quad 2\lambda_{\frac{l}{2}+i}, \quad 1 \leq i \leq \frac{l}{2},$$

não pertencem a I .

Demonstração: A raiz $\lambda_{\frac{l}{2}} + \lambda_{\frac{l}{2}+1}$ não pertence a I , pois a coordenada da alcova A em relação a essa raiz, é zero. Logo, $2\lambda_{\frac{l}{2}+1}$ não pertence a I , pois

$$2\lambda_{\frac{l}{2}+1} + (\lambda_{\frac{l}{2}} - \lambda_{\frac{l}{2}+1}) = \lambda_{\frac{l}{2}} + \lambda_{\frac{l}{2}+1}.$$

Também, $(\lambda_{\frac{l}{2}} + \lambda_{\frac{l}{2}+i})$ não pertence a I , para todo $i \in \{1, \dots, \frac{l}{2}\}$, pois

$$(\lambda_{\frac{l}{2}} + \lambda_{\frac{l}{2}+i}) + (\lambda_{\frac{l}{2}+1} - \lambda_{\frac{l}{2}+i}) = \lambda_{\frac{l}{2}} + \lambda_{\frac{l}{2}+1}.$$

Conseqüentemente, $2\lambda_{\frac{l}{2}+i}$ não pertence a I , para todo $i \in \{1, \dots, \frac{l}{2}\}$, pois

$$2\lambda_{\frac{l}{2}+i} + (\lambda_{\frac{l}{2}} - \lambda_{\frac{l}{2}+i}) = \lambda_{\frac{l}{2}} + \lambda_{\frac{l}{2}+i}.$$

Logo, $\lambda_{\frac{l}{2}+i} + \lambda_{\frac{l}{2}+j}$ não pertence a I , para todo $0 \leq i < j \leq \frac{l}{2}$, pois

$$(\lambda_{\frac{l}{2}+i} + \lambda_{\frac{l}{2}+j}) + (\lambda_{\frac{l}{2}+i} - \lambda_{\frac{l}{2}+j}) = 2\lambda_{\frac{l}{2}+i}.$$

□

Portanto, qualquer ideal abeliano que está associado a uma alcova A contida em $2A_0 \cap \{x : 0 < \langle \lambda_{\frac{l}{2}} + \lambda_{\frac{l}{2}+1}, x \rangle < 1\}$, está necessariamente contido no conjunto $\Phi = \{\lambda_i + \lambda_j \mid i = 1, \dots, \frac{l}{2} - 1, j = 1, \dots, l, i \leq j\} \cup \{2\lambda_{\frac{l}{2}}\}$. Por outro lado, Φ é um ideal abeliano, pois:

1. Seja $\alpha = \lambda_i + \lambda_j$, $i < j$, um elemento de Φ . Se β é uma raiz positiva tal que $\alpha + \beta$ é raiz, então β necessariamente é da forma $\lambda_t - \lambda_j$, $i \leq t < j$. Portanto, $\alpha + \beta = \lambda_i + \lambda_t$, o que implica que $\alpha + \beta \in \Phi$. Se $\alpha = 2\lambda_j$, com $1 \leq j \leq \frac{l}{2}$, então β deve ser do tipo $\beta = \lambda_i - \lambda_j$, com $i < j$. Porém, neste caso, $\alpha + \beta = \lambda_i + \lambda_j$, com $1 \leq i < j \leq \frac{l}{2}$ e, portanto, $\alpha + \beta \in \Phi$.
2. Se α e β são duas raízes em Φ , então claramente $\alpha + \beta$ não é raiz.

Além disso, como a raiz $\lambda_{\frac{l}{2}} + \lambda_{\frac{l}{2}+1}$ não está em Φ , podemos associar a Φ uma alcova em $2A_0 \cap \{x : 0 < \langle \lambda_{\frac{l}{2}} + \lambda_{\frac{l}{2}+1}, x \rangle < 1\}$. Por isso, qualquer subconjunto de Φ que é ideal, também é ideal abeliano e está associado a uma alcova contida em $2A_0 \cap \{x : 0 < \langle \lambda_{\frac{l}{2}} + \lambda_{\frac{l}{2}+1}, x \rangle < 1\}$. Como duas alcovas diferentes nesse conjunto não são equivalentes, sob a ação de G , segue que

Proposição 5.4 *Seja Φ o seguinte conjunto:*

$$\Phi = \{\lambda_i + \lambda_j \mid i = 1, \dots, \frac{l}{2} - 1, j = 1, \dots, l, i \leq j\} \cup \{2\lambda_{\frac{l}{2}}\}.$$

Então, os ideais contidos em Φ formam um conjunto completo de representantes das classes de equivalência. Um ideal está contido em Φ se, e somente se, ele é abeliano e está associado a uma alcova em $2A_0 \cap \{x : 0 < \langle \lambda_{\frac{l}{2}} + \lambda_{\frac{l}{2}+1}, x \rangle < 1\}$.

Para determinar explicitamente os ideais contidos em Φ , basta exibir 2^{l-1} ideais diferentes, pois essa é a quantidade de classes. Para isso, tome sequências $R = (a_1, \dots, a_t)$, com $l \geq a_1 \geq a_2 \dots \geq a_t \geq t$, para todo $t \in \{1, \dots, \frac{l}{2} - 1\}$ e, para $t = \frac{l}{2}$, tome sequências $R = (a_1, \dots, a_{\frac{l}{2}-1}, \frac{l}{2})$, com $l \geq a_1 \geq \dots \geq a_{\frac{l}{2}-1} \geq \frac{l}{2}$. Denote por $I(R)$ o ideal de Φ gerado pelo conjunto

$$\lambda_1 + \lambda_{a_1}, \lambda_2 + \lambda_{a_2}, \dots, \lambda_t + \lambda_{a_t}.$$

Proposição 5.5 *Todos os ideais $I(R)$ definidos acima, constituem um conjunto completo de representantes das classes de equivalência.*

Demonstração: O número de sequências, para cada $t \in \{1, \dots, \frac{l}{2} - 1\}$, é obtido por uma combinação com repetição de $l - t + 1$ elementos, tomados t a t , isto é, existem

$$C_{l-t+1+t-1}^t = C_l^t = \binom{l}{t}$$

sequências do tipo $R = (a_1, \dots, a_t)$, com $l \geq a_1 \geq \dots \geq a_t \geq t$, para cada $t \in \{1, \dots, \frac{l}{2} - 1\}$.

No caso $t = \frac{l}{2}$, como o último elemento da sequência é sempre $\frac{l}{2}$, devemos fazer uma combinação com repetição de $\frac{l}{2} + 1$ elementos, tomados $(\frac{l}{2} - 1)$ a $(\frac{l}{2} - 1)$, isto é, existem

$$C_{\frac{l}{2}+1+\frac{l}{2}-1-1}^{\frac{l}{2}-1} = C_{\frac{l}{2}-1}^{\frac{l}{2}-1} = \binom{l-1}{\frac{l}{2}-1}$$

sequências do tipo $R = (a_1, \dots, a_{\frac{l}{2}-1}, \frac{l}{2})$, com $l \geq a_1 \geq \dots \geq a_{\frac{l}{2}-1} \geq \frac{l}{2}$.

Portanto, convencionando que para $t = 0$ temos a sequência vazia com o ideal $I = \emptyset$ correspondente, temos que o número total de sequências é dado por:

$$S_1 = \sum_{i=0}^{\frac{l}{2}-1} \binom{l}{i} + \binom{l-1}{\frac{l}{2}-1}. \quad (5.1)$$

Precisamos mostrar que esse número é exatamente 2^{l-1} . De fato,

$$2^{l-1} = \sum_{i=0}^{l-1} \binom{l-1}{i} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq \frac{l}{2}-1}}^{l-2} \binom{l-1}{i} + \binom{l-1}{\frac{l}{2}-1} + \binom{l-1}{l-1}.$$

Considere o seguinte somatório:

$$S_2 = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq \frac{l}{2}-1}}^{l-2} \binom{l-1}{i}. \quad (5.2)$$

Observe que temos uma quantidade par $(l-2)$ de somandos em (5.2), pois l é par. Para provar o resultado acima, vamos utilizar as seguintes identidades:

$$(I) \quad \binom{l-1}{p} + \binom{l-1}{p+1} = \binom{l}{p+1} \quad \text{e} \quad (II) \quad \binom{l}{p} = \binom{l}{l-p},$$

para todo $p \in \{0, \dots, l-1\}$.

Desenvolvendo o somatório (5.2), temos que

$$\begin{aligned} S_2 &= \binom{l-1}{0} + \binom{l-1}{1} + \dots + \binom{l-1}{\frac{l}{2}-3} + \binom{l-1}{\frac{l}{2}-2} + \\ &+ \binom{l-1}{\frac{l}{2}} + \binom{l-1}{\frac{l}{2}+1} + \dots + \binom{l-1}{l-4} + \binom{l-1}{l-3} + \binom{l-1}{l-2}. \end{aligned}$$

Se $\frac{l}{2}-1$ for par, começamos a agrupar os somandos de (5.2) aos pares, a partir do primeiro termo, isto é, agrupamos os termos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\left[\binom{l-1}{0} + \binom{l-1}{1} \right] + \left[\binom{l-1}{2} + \binom{l-1}{3} \right] + \dots \\ &\dots + \left[\binom{l-1}{\frac{l}{2}-3} + \binom{l-1}{\frac{l}{2}-2} \right] + \left[\binom{l-1}{\frac{l}{2}} + \binom{l-1}{\frac{l}{2}+1} \right] + \dots \\ &\dots + \left[\binom{l-1}{l-3} + \binom{l-1}{l-2} \right]. \end{aligned}$$

Aplicando a identidade (I) acima em cada par de termos agrupados, obtemos:

$$\binom{l}{1} + \binom{l}{3} + \binom{l}{5} + \cdots + \binom{l}{\frac{l}{2}-2} + \binom{l}{\frac{l}{2}+1} + \cdots + \binom{l}{l-2}.$$

Agora, usando a identidade (II) acima, temos:

$$\binom{l}{l-2} = \binom{l}{2}, \cdots, \binom{l}{\frac{l}{2}+1} = \binom{l}{\frac{l}{2}-1}$$

que são as parcelas referentes aos valores pares $\{2, 4, \dots, \frac{l}{2}-1\}$ de i . Além disso, como $\binom{l-1}{l-1} = \binom{l}{0}$, temos que

$$S_2 + \binom{l-1}{l-1} = \sum_{i=0}^{\frac{l}{2}-1} \binom{l}{i}$$

e, conseqüentemente,

$$2^{l-1} = \sum_{i=0}^{\frac{l}{2}-1} \binom{l}{i} + \binom{l-1}{\frac{l}{2}-1} = S_1.$$

Se $\frac{l}{2}-1$ for ímpar, começamos a agrupar os somandos de (5.2) em pares, a partir do segundo termo, isto é, agrupamos os termos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \binom{l-1}{0} + \left[\binom{l-1}{1} + \binom{l-1}{2} \right] + \left[\binom{l-1}{3} + \binom{l-1}{4} \right] + \cdots \\ & \cdots + \left[\binom{l-1}{\frac{l}{2}-3} + \binom{l-1}{\frac{l}{2}-2} \right] + \left[\binom{l-1}{\frac{l}{2}} + \binom{l-1}{\frac{l}{2}+1} \right] + \cdots \\ & \cdots + \left[\binom{l-1}{l-4} + \binom{l-1}{l-3} \right] + \binom{l-1}{l-2}. \end{aligned}$$

Aplicando a identidade (I) acima em cada par de termos agrupados, obtemos:

$$\binom{l-1}{0} + \binom{l}{2} + \binom{l}{4} + \cdots + \binom{l}{\frac{l}{2}-2} + \binom{l}{\frac{l}{2}+1} + \cdots + \binom{l}{l-3} + \binom{l-1}{l-2}.$$

Agora, usando a identidade (II) acima, temos:

$$\binom{l}{l-3} = \binom{l}{3}, \dots, \binom{l}{\frac{l}{2}+1} = \binom{l}{\frac{l}{2}-1}$$

que são as parcelas referentes aos valores ímpares $\{3, 5, \dots, \frac{l}{2}-1\}$ de i . Além disso, como

$$\binom{l-1}{0} = \binom{l}{0} \quad \text{e} \quad \binom{l-1}{l-2} + \binom{l-1}{l-1} = \binom{l}{l-1} = \binom{l}{1},$$

temos que

$$S_2 + \binom{l-1}{l-1} = \sum_{i=0}^{\frac{l}{2}-1} \binom{l}{i}$$

e, conseqüentemente,

$$2^{l-1} = \sum_{i=0}^{\frac{l}{2}-1} \binom{l}{i} + \binom{l-1}{\frac{l}{2}-1} = S_1.$$

□

5.4 O Caso C_l , com l ímpar

Suponha l ímpar. Então, $t_{2w_l}w$ permuta as faixas, $1 < \langle 2\lambda_{\frac{l+1}{2}}, x \rangle < 2$ e $0 < \langle 2\lambda_{\frac{l+1}{2}}, x \rangle < 1$, pois: $1 < 2x_{\frac{l+1}{2}} < 2$ se, e somente se, $0 < 2 - 2x_{\frac{l+1}{2}} < 1$, isto é, se, e somente se, $0 < \langle 2\lambda_{\frac{l+1}{2}}, (t_{2w_l}w)(x) \rangle < 1$. Isto implica que toda alcova em $2A_0$ é equivalente, sob a ação do elemento $t_{2w_l}w$, a uma alcova contida no conjunto

$$2A_0 \cap \{x : 0 < \langle 2\lambda_{\frac{l+1}{2}}, x \rangle < 1\}.$$

Além disso, duas alcovas nesse conjunto não são equivalentes sob a ação de $G := \{1, t_{2w_l}w\}$. Portanto,

Teorema 5.6 *Toda alcova em $2A_0$ é equivalente, sob a ação de $t_{2w_l}w \in G$, a uma única alcova em*

$$2A_0 \cap \{x : 0 < \langle 2\lambda_{\frac{l+1}{2}}, x \rangle < 1\}.$$

Portanto, cada classe contém exatamente dois elementos e existem 2^{l-1} classes de equivalência.

Lema 5.7 Uma raiz da forma $\lambda_i - \lambda_j$, $i < j$, não pertence a nenhum ideal abeliano.

Demonstração: A prova é análoga ao caso l par. □

Lema 5.8 Seja A uma alcova contida em $2A_0 \cap \{x : 0 < \langle 2\lambda_{\frac{l+1}{2}}, x \rangle < 1\}$. Denote por I o ideal abeliano associado a A . Então, as raízes da forma

$$\lambda_{\frac{l+1}{2}+i} + \lambda_{\frac{l+1}{2}+j}, \quad 0 \leq i \leq j \leq \frac{l-1}{2},$$

não pertencem a I .

Demonstração: A raiz $2\lambda_{\frac{l+1}{2}}$ não está em I , pois a coordenada de A em relação a essa raiz, é zero. Logo, $(\lambda_{\frac{l+1}{2}} + \lambda_{\frac{l+1}{2}+j})$ não pertence a I , para todo $j \in \{0, \dots, \frac{l-1}{2}\}$, pois

$$(\lambda_{\frac{l+1}{2}} + \lambda_{\frac{l+1}{2}+j}) + (\lambda_{\frac{l+1}{2}} - \lambda_{\frac{l+1}{2}+j}) = 2\lambda_{\frac{l+1}{2}}.$$

Consequentemente, $2\lambda_{\frac{l+1}{2}+j}$ não está em I , para todo $j \in \{0, \dots, \frac{l-1}{2}\}$, pois

$$2\lambda_{\frac{l+1}{2}+j} + (\lambda_{\frac{l+1}{2}} - \lambda_{\frac{l+1}{2}+j}) = \lambda_{\frac{l+1}{2}} + \lambda_{\frac{l+1}{2}+j}.$$

Portanto, $(\lambda_{\frac{l+1}{2}+i} + \lambda_{\frac{l+1}{2}+j})$ não pertence a I , para todo $i \leq j$, $i, j \in \{0, \dots, \frac{l-1}{2}\}$, pois

$$(\lambda_{\frac{l+1}{2}+i} + \lambda_{\frac{l+1}{2}+j}) + (\lambda_{\frac{l+1}{2}+i} - \lambda_{\frac{l+1}{2}+j}) = 2\lambda_{\frac{l+1}{2}+i}.$$

□

Portanto, qualquer ideal abeliano que está associado a uma alcova A contida em $2A_0 \cap \{x : 0 < \langle 2\lambda_{\frac{l+1}{2}}, x \rangle < 1\}$, está necessariamente contido no conjunto $\Phi = \{\lambda_i + \lambda_j \mid i = 1, \dots, \frac{l-1}{2}, j = 1, \dots, l, i \leq j\}$. Por outro lado, Φ é um ideal abeliano. Além disso, como a raiz $2\lambda_{\frac{l+1}{2}}$, não está em Φ , podemos associar a Φ uma alcova em $2A_0 \cap \{x : 0 < \langle 2\lambda_{\frac{l+1}{2}}, x \rangle < 1\}$. Por isso, qualquer subconjunto de Φ que é ideal, também é ideal abeliano e está associado a uma alcova contida em $2A_0 \cap \{x : 0 < \langle 2\lambda_{\frac{l+1}{2}}, x \rangle < 1\}$. Como duas alcovas diferentes nesse conjunto não são equivalentes, sob a ação de G , segue que

Proposição 5.9 *Seja Φ o conjunto das raízes do tipo $\lambda_i + \lambda_j$, $i = 1, \dots, \frac{l-1}{2}$, $j = 1, \dots, l$, $i \leq j$. Então, os ideais contidos em Φ formam um conjunto completo de representantes das classes de equivalência. Um ideal está contido em Φ se, e somente se, ele é abeliano e está associado a uma alcova em $2A_0 \cap \{x : 0 < \langle 2\lambda_{\frac{l+1}{2}}, x \rangle < 1\}$.*

Para determinar explicitamente os ideais contidos em Φ , basta exibir 2^{l-1} ideais diferentes, pois essa é a quantidade de classes. Para isso, tome seqüências $R = (a_1, \dots, a_t)$, com $l \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_t \geq t$, para todo $t \in \{1, \dots, \frac{l-1}{2}\}$. Denote por $I(R)$ o ideal de Φ gerado pelo conjunto

$$\lambda_1 + \lambda_{a_1}, \lambda_2 + \lambda_{a_2}, \dots, \lambda_t + \lambda_{a_t}.$$

Proposição 5.10 *Os ideais $I(R)$ descritos acima, constituem um conjunto completo de representantes das classes de equivalência.*

Demonstração: Basta provar que existem 2^{l-1} seqüências R do tipo acima, pois a quantidade de ideais abelianos contidos em Φ é também 2^{l-1} .

Para cada $t \in \{1, \dots, \frac{l-1}{2}\}$, o número de seqüências do tipo $R = (a_1, \dots, a_t)$, com $l \geq a_1 \geq \dots \geq a_t \geq t$, é obtido por uma combinação com repetição de $l - t + 1$ elementos, tomados t a t , isto é,

$$C_{l-t+1+t-1}^t = C_l^t = \binom{l}{t}.$$

Consequentemente, o número total de seqüências, considerando que para $t = 0$ temos a seqüência vazia com $I = \emptyset$ correspondente, é dado por:

$$\sum_{i=0}^{\frac{l-1}{2}} \binom{l}{i}. \tag{5.3}$$

Vamos mostrar que a soma (5.3) é exatamente 2^{l-1} . De fato,

$$2^l = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} = \sum_{i=0}^{\frac{l-1}{2}} \binom{l}{i} + \sum_{i=\frac{l+1}{2}}^l \binom{l}{i}.$$

Mas,

$$\begin{aligned}\sum_{i=\frac{l+1}{2}}^l \binom{l}{i} &= \binom{l}{\frac{l+1}{2}} + \binom{l}{\frac{l+2}{2}} + \cdots + \binom{l}{l-1} + \binom{l}{l} \\ &= \binom{l}{\frac{l-1}{2}} + \binom{l}{\frac{l-2}{2}} + \cdots + \binom{l}{1} + \binom{l}{0} \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{l-1}{2}} \binom{l}{i}.\end{aligned}$$

Logo,

$$2^l = 2 \sum_{i=0}^{\frac{l-1}{2}} \binom{l}{i}.$$

Isto significa que a soma em (5.3) é igual a 2^{l-1} , conforme queríamos. \square

Capítulo 6

O Caso D_l

Nesse capítulo, vamos determinar um grupo G , cuja ação no conjunto das alcovas de $2A_0$ coincide com a ação de $\mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}}$ no conjunto das estruturas que estão na forma de ideal abeliano. Em seguida, vamos contar o número de classes de equivalência, segundo essa ação, e exibir uma coleção de ideais abelianos que formam um conjunto completo de representantes dessas classes.

6.1 Realização canônica das raízes em D_l

Seja $\mathfrak{g} = so(2l)$ a álgebra das matrizes anti-simétricas de ordem $2l$,

$$so(2l) = \{A \in sl(2l) : A + A^t = 0\}.$$

Então, \mathfrak{g} é a álgebra de Lie associada ao diagrama D_l , $l \geq 4$. Um sistema de raízes em \mathfrak{g} é, $\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} + \lambda_l\}$ e as raízes positivas correspondentes, são

$$\Pi^+ = \{\lambda_i - \lambda_j : i < j\} \cup \{\lambda_i + \lambda_j : i \neq j\}.$$

A raiz máxima em relação a Π^+ é $\mu = \lambda_1 + \lambda_2$.

6.2 Uma descrição da ação de $\mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}}$

De acordo com [14], o grupo de Weyl \mathcal{W} de D_l é dado pelas permutações de l elementos, seguidas de mudança de sinal sempre numa quantidade par de

coordenadas. O subgrupo \mathcal{W}_{Σ} é obtido do diagrama estendido, olhando os subdiagramas que dão D_l . No caso em que $l \geq 4$, a ordem de \mathcal{W}_{Σ} é 4 e além da identidade, os outros três elementos w_1, w_2, w_3 de \mathcal{W}_{Σ} são aqueles tais que $w_1(-\mu) = \alpha_1, w_2(-\mu) = \alpha_{l-1}$ e $w_3(-\mu) = \alpha_l$ e deixam invariantes os conjuntos $\Sigma \setminus \{\alpha_1\}, \Sigma \setminus \{\alpha_{l-1}\}$ e $\Sigma \setminus \{\alpha_l\}$, respectivamente. Os únicos elementos $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{W}$ que satisfazem essas propriedades, são:

1. Se l for par,

$$\begin{aligned} w_1(x_1, \dots, x_l) &= (-x_1, x_2, \dots, x_{l-1}, -x_l) \\ w_2(x_1, \dots, x_l) &= (x_l, -x_{l-1}, \dots, -x_2, x_1) \\ w_3(x_1, \dots, x_l) &= (-x_l, -x_{l-1}, \dots, -x_1) \end{aligned}$$

2. Se l for ímpar,

$$\begin{aligned} w_1(x_1, \dots, x_l) &= (-x_1, x_2, \dots, x_{l-1}, -x_l) \\ w_2(x_1, \dots, x_l) &= (-x_l, -x_{l-1}, \dots, -x_2, x_1) \\ w_3(x_1, \dots, x_l) &= (x_l, -x_{l-1}, \dots, -x_2, -x_1). \end{aligned}$$

Seja agora $\{\phi_1, \dots, \phi_l\}$ a base dual de Σ , isto é, $\langle \alpha_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij}$. Então, como $w_1(-\mu) = \alpha_1, w_2(-\mu) = \alpha_{l-1}$ e $w_3(-\mu) = \alpha_l$, segue que $t_{\phi_1} w_1(A_0) = t_{\phi_{l-1}} w_2(A_0) = t_{\phi_l} w_3(A_0) = A_0$. Analogamente aos casos B_l e C_l , temos que

$$t_{2\phi_1} w_1(2A_0) = t_{2\phi_{l-1}} w_2(2A_0) = t_{2\phi_l} w_3(2A_0) = 2A_0.$$

Portanto, as aplicações $t_{2\phi_1} w_1, t_{2\phi_{l-1}} w_2$ e $t_{2\phi_l} w_3$ permutam as alcovas em $2A_0$. Além disso, $J(A) = J(t_{2\phi_i} A)$, para todo $i = 1, \dots, l$.

Proposição 6.1 *As aplicações ϕ_1, ϕ_{l-1} e ϕ_l , são dadas por:*

1. $\phi_1 = (1, 0, \dots, 0)$.
2. $\phi_{l-1} = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
3. $\phi_l = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$.

Demonstração: Denote $\phi_1 = (a_1, \dots, a_l), \phi_{l-1} = (b_1, \dots, b_l)$ e $\phi_l = (c_1, \dots, c_l)$. Então,

1.

$$\begin{cases} \langle \phi_1, \alpha_1 \rangle = 1 \\ \langle \phi_1, \alpha_j \rangle = 0, \text{ para todo } 1 < j \leq l. \end{cases}$$

Isto implica que

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 1 \\ a_i - a_j = 0, \text{ para todo } 2 \leq i < j \leq l \\ a_{l-1} + a_l = 0. \end{cases}$$

Porém isso significa que $a_1 = 1$ e $a_j = 0$, para todo $j = 2, \dots, l$, isto é, $\phi_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

2.

$$\begin{cases} \langle \phi_{l-1}, \alpha_{l-1} \rangle = 1 \\ \langle \phi_{l-1}, \alpha_j \rangle = 0, \text{ para todo } j \neq l-1. \end{cases}$$

Isto implica que

$$\begin{cases} b_{l-1} - b_l = 1 \\ b_i - b_j = 0, \text{ para todo } 1 \leq i < j \leq l-1 \\ b_{l-1} + b_l = 0. \end{cases}$$

Porém isso significa que $b_i = \frac{1}{2}$, para todo $i = 1, \dots, l-1$ e $b_l = -\frac{1}{2}$, isto é, $\phi_{l-1} = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

3.

$$\begin{cases} \langle \phi_l, \alpha_l \rangle = 1 \\ \langle \phi_l, \alpha_j \rangle = 0, \text{ para todo } j \neq l. \end{cases}$$

Isto implica que

$$\begin{cases} c_{l-1} + c_l = 1 \\ c_i - c_j = 0, \text{ para todo } 1 \leq i < j \leq l. \end{cases}$$

Porém isso significa que $c_i = \frac{1}{2}$, para todo $i = 1, \dots, l$, isto é, $\phi_l = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$.

□

Portanto, temos:

1. Se l for par,

$$\begin{aligned} t_{2\phi_1}w_1(x_1, \dots, x_l) &= 2 - x_1, x_2, \dots, x_{l-1}, -x_l \\ t_{2\phi_{l-1}}w_2(x_1, \dots, x_l) &= (1 + x_l, 1 - x_{l-1}, \dots, 1 - x_2, -1 + x_1) \\ t_{2\phi_l}w_3(x_1, \dots, x_l) &= (1 - x_l, 1 - x_{l-1}, \dots, 1 - x_1) \end{aligned}$$

2. Se l for ímpar,

$$\begin{aligned} t_{2\phi_1}w_1(x_1, \dots, x_l) &= (2 - x_1, x_2, \dots, x_{l-1}, -x_l) \\ t_{2\phi_{l-1}}w_2(x_1, \dots, x_l) &= (1 - x_l, \dots, 1 - x_2, -1 + x_1) \\ t_{2\phi_l}w_3(x_1, \dots, x_l) &= (1 + x_l, 1 - x_{l-1}, \dots, 1 - x_1) \end{aligned}$$

Sejam $G = \{1, t_{2\phi_1}w_1, t_{2\phi_{l-1}}w_2, t_{2\phi_l}w_3\} = \{1, g_1, g_2, g_3\}$ e \mathcal{B} o seguinte conjunto:

$$\mathcal{B} = 2A_0 \cap \{x \mid 0 < \langle \lambda_1 + \lambda_l, x \rangle < 1\} \cap \{x \mid 0 < \langle \lambda_1 - \lambda_l \rangle < 1\}.$$

Dada uma alcova A contida em $2A_0$, denotamos por $I(A) = \{g \in G \mid gA = A\}$ o subgrupo de isotropia de A em G . Então, a órbita $\mathcal{O}(A) = \{A, g_1A, g_2A, g_3A\}$ de A é isomorfa ao quociente:

$$\frac{G}{I(A)}.$$

Proposição 6.2 *Suponha l par e seja A uma alcova contida em $2A_0$. Então existe $g \in G$, tal que $gA \subset \mathcal{B}$.*

Demonstração: As coordenadas $\{k_{\lambda_1+\lambda_l}(A), k_{\lambda_1-\lambda_l}(A)\}$ da alcova A podem assumir os seguintes valores: $\{0, 0\}$, $\{0, 1\}$, $\{1, 1\}$, $\{1, 0\}$.

1. Se $\{k_{\lambda_1+\lambda_l}(A), k_{\lambda_1-\lambda_l}(A)\} = \{0, 0\}$, a alcova A está contida em \mathcal{B} e, neste caso, basta tomar $g = 1 \in G$.
2. Se $\{k_{\lambda_1+\lambda_l}(A), k_{\lambda_1-\lambda_l}(A)\} = \{0, 1\}$, segue que

$$0 < x_1 + x_l < 1 \quad \text{e} \quad 1 < x_1 - x_l < 2,$$

para todo $x \in A$. O que implica que

$$0 < x_1 + x_l < 1 \quad \text{e} \quad 0 < 2 - x_1 + x_l < 1,$$

para todo $x \in A$. Mas,

$$\langle \lambda_1 + \lambda_l, g_2x \rangle = x_1 + x_l \quad \text{e} \quad \langle \lambda_1 - \lambda_l, g_2x \rangle = 2 - x_1 + x_l.$$

Logo, temos que $k_{\lambda_1+\lambda_l}(g_2A) = k_{\lambda_1-\lambda_l}(g_2A) = 0$ e, portanto, $g_2A \subset \mathcal{B}$.

3. Se $\{k_{\lambda_1+\lambda_l}(A), k_{\lambda_1-\lambda_l}(A)\} = \{1, 1\}$, temos que

$$1 < x_1 + x_l < 2 \quad \text{e} \quad 1 < x_1 - x_l < 2,$$

para todo $x \in A$. O que implica que

$$0 < 2 - x_1 - x_l < 1 \quad \text{e} \quad 0 < 2 - x_1 + x_l < 1,$$

para todo $x \in A$. Mas,

$$\langle \lambda_1 + \lambda_l, g_1x \rangle = 2 - x_1 - x_l \quad \text{e} \quad \langle \lambda_1 - \lambda_l, g_1x \rangle = 2 - x_1 + x_l.$$

Logo, temos que $k_{\lambda_1+\lambda_l}(g_1A) = k_{\lambda_1-\lambda_l}(A) = 0$ e, portanto, $g_1A \subset \mathcal{B}$.

4. Se $\{k_{\lambda_1+\lambda_l}(A), k_{\lambda_1-\lambda_l}(A)\} = \{1, 0\}$, temos que

$$0 < 2 - x_1 - x_l < 1 \quad \text{e} \quad 0 < x_1 - x_l < 1,$$

para todo $x \in A$. Mas,

$$\langle \lambda_1 + \lambda_l, g_3x \rangle = 2 - x_1 - x_l \quad \text{e} \quad \langle \lambda_1 - \lambda_l, g_3x \rangle = x_1 - x_l.$$

Logo, temos que $k_{\lambda_1+\lambda_l}(g_3A) = k_{\lambda_1-\lambda_l}(g_3A) = 0$ e, portanto, $g_3A \subset \mathcal{B}$.

□

Analogamente, temos:

Proposição 6.3 *Suponha l ímpar e seja A uma alcova contida em $2A_0$. Então existe $g \in G$, tal que $gA \subset \mathcal{B}$.*

Demonstração: A prova é análoga ao caso l par, bastando apenas observar que:

1. Se $\{k_{\lambda_1+\lambda_l}(A), k_{\lambda_1-\lambda_l}(A)\} = \{0, 0\}$, então $A \subset \mathcal{B}$.

2. Se $\{k_{\lambda_1+\lambda_l}(A), k_{\lambda_1-\lambda_l}(A)\} = \{0, 1\}$, então $g_3A \subset \mathcal{B}$, pois neste caso,

$$\langle \lambda_1 + \lambda_l, g_3x \rangle = 2 - x_1 + x_l \quad \text{e} \quad \langle \lambda_1 - \lambda_l, g_3x \rangle = x_1 + x_l.$$

3. Se $\{k_{\lambda_1+\lambda_l}(A), k_{\lambda_1-\lambda_l}(A)\} = \{1, 1\}$, então $g_1A \subset \mathcal{B}$, pois neste caso,

$$\langle \lambda_1 + \lambda_l, g_1x \rangle = 2 - x_1 - x_l \quad \text{e} \quad \langle \lambda_1 - \lambda_l, g_1x \rangle = 2 - x_1 + x_l.$$

4. Se $\{k_{\lambda_1+\lambda_l}(A), k_{\lambda_1-\lambda_l}(A)\} = \{1, 0\}$, então $g_2A \subset \mathcal{B}$, pois neste caso,

$$\langle \lambda_1 + \lambda_l, g_2x \rangle = x_1 - x_l \quad \text{e} \quad \langle \lambda_1 - \lambda_l, g_2x \rangle = 2 - x_1 - x_l.$$

□

De qualquer forma, concluímos que toda alcova contida em $2A_0$ é equivalente, pela ação do grupo G , a uma alcova contida em \mathcal{B} . Isto é, dada $A \subset 2A_0$, existe $g \in G$, tal que $gA \subset \mathcal{B}$. Além disso, vale o seguinte resultado:

Proposição 6.4 *Suponha l par e seja A uma alcova contida em $2A_0$. Então $gA \neq A$, para todo $g \in G \setminus \{1\}$.*

Demonstração:

1. Suponha que $k_{\lambda_1+\lambda_l}(A) = 0$. Então,

$$1 < 2 - x_1 - x_l < 2,$$

para todo $x \in A$. Como $\langle \lambda_1 + \lambda_l, g_1x \rangle = \langle \lambda_1 + \lambda_l, g_3x \rangle = 2 - x_1 - x_l$, segue que $k_{\lambda_1+\lambda_l}(g_1A) = k_{\lambda_1+\lambda_l}(g_3A) = 1 \neq k_{\lambda_1+\lambda_l}(A)$. Isto significa que $g_1A \neq A$ e $g_3A \neq A$.

2. Se $k_{\lambda_1+\lambda_l}(A) = 1$, então

$$0 < 2 - x_1 - x_l < 1,$$

para todo $x \in A$. Deste modo,

$$k_{\lambda_1+\lambda_l}(g_1A) = k_{\lambda_1+\lambda_l}(g_3A) = 0 \neq k_{\lambda_1+\lambda_l}(A).$$

Isto significa que $g_1A \neq A$ e $g_3A \neq A$.

3. Se $k_{\lambda_1-\lambda_l}(A) = 0$, então, para todo $x \in A$, temos que:

$$1 < 2 - x_1 + x_l < 2.$$

Como $\langle \lambda_1 - \lambda_l, g_2x \rangle = 2 - x_1 + x_l$, segue que $k_{\lambda_1-\lambda_l}(g_2A) = 1 \neq k_{\lambda_1-\lambda_l}(A)$ e, portanto, $g_2A \neq A$.

4. Se $k_{\lambda_1 - \lambda_l}(A) = 1$, então, para todo $x \in A$, temos que $0 < 2 - x_1 + x_l < 1$. Como $\langle \lambda_1 - \lambda_l, g_2x \rangle = 2 - x_1 + x_l$, segue que $k_{\lambda_1 - \lambda_l}(g_2A) = 0 \neq k_{\lambda_1 - \lambda_l}(A)$ e, portanto, $g_2A \neq A$.

De qualquer forma, concluímos que $gA \neq A$, para todo $g \in G \setminus \{1\}$. \square

Analogamente,

Proposição 6.5 *Suponha l ímpar e seja A uma alcova em $2A_0$. Então $gA \neq A$, para todo $g \in G \setminus \{1\}$.*

Demonstração:

1. Se $k_{\lambda_1 + \lambda_l}(A) = 0$, então

$$k_{\lambda_1 - \lambda_l}(g_2A) = 1, \quad k_{\lambda_1 - \lambda_l}(g_3A) = 0 \text{ e } k_{\lambda_1 + \lambda_l}(g_1A) = 1.$$

Deste modo, $g_1A \neq A$.

1.1) Se $k_{\lambda_1 + \lambda_l}(g_2A) = 0$, temos que $0 < x_1 - x_l < 1$, para todo $x \in A$. Logo, $k_{\lambda_1 - \lambda_l}(A) = 0 \neq k_{\lambda_1 - \lambda_l}(g_2A)$ e, portanto, $g_2A \neq A$.

1.2) Se $k_{\lambda_1 + \lambda_l}(g_2A) = 1$, então $k_{\lambda_1 + \lambda_l}(g_2A) \neq k_{\lambda_1 + \lambda_l}(A)$ e, portanto, $g_2A \neq A$.

1.3) Se $k_{\lambda_1 - \lambda_l}(A) = 0$, temos que $1 < 2 - x_1 + x_l < 2$. O que implica que $k_{\lambda_1 + \lambda_l}(g_3A) = 1 \neq k_{\lambda_1 + \lambda_l}(A)$ e, portanto, $g_3A \neq A$.

1.4) Se $k_{\lambda_1 - \lambda_l}(A) = 1$, temos que $k_{\lambda_1 - \lambda_l}(A) = 1 \neq k_{\lambda_1 - \lambda_l}(g_3A) = 0$ e, portanto, $g_3A \neq A$.

De qualquer forma, $gA \neq A$, para todo $g \in G \setminus \{1\}$.

2. Se $k_{\lambda_1 + \lambda_l}(A) = 1$, então

$$k_{\lambda_1 - \lambda_l}(g_2A) = 0, \quad k_{\lambda_1 - \lambda_l}(g_3A) = 1 \text{ e } k_{\lambda_1 + \lambda_l}(g_1A) = 0.$$

Daqui tiramos que $g_1A \neq A$.

2.1) Se $k_{\lambda_1 + \lambda_l}(g_2A) = 1$, então $k_{\lambda_1 - \lambda_l}(A) = 1 \neq k_{\lambda_1 - \lambda_l}(g_2A)$ e, portanto, $g_2A \neq A$.

2.2) Se $k_{\lambda_1+\lambda_l}(g_2A) = 0$, então $k_{\lambda_1+\lambda_l}(g_2A) \neq k_{\lambda_1+\lambda_l}(A)$ e, portanto, $g_2A \neq A$.

2.3) Se $k_{\lambda_1+\lambda_l}(g_3A) = 1$, temos que $k_{\lambda_1-\lambda_l}(A) = 0 \neq k_{\lambda_1-\lambda_l}(g_3A)$ e, portanto, $g_3A \neq A$.

2.4) Se $k_{\lambda_1+\lambda_l}(g_3A) = 0$, então $k_{\lambda_1+\lambda_l}(g_3A) \neq k_{\lambda_1+\lambda_l}(A)$ e, portanto, $g_3A \neq A$.

De qualquer forma, temos que $gA \neq A$, para todo $g \in G \setminus \{1\}$.

Isto termina a prova. □

As duas últimas proposições implicam que o único subgrupo de isotropia de G é o trivial e, portanto, todas as classes de equivalências contém exatamente $4 = 2^2$ elementos. Deste modo, temos que:

Teorema 6.6 *Toda alcova em $2A_0$ é equivalente a uma alcova em \mathcal{B} e cada classe de equivalência contém exatamente $4 = 2^2$ elementos. Por isso, existem 2^{l-2} classes de equivalência.*

Para determinar explicitamente representantes em cada classe, a primeira observação é a seguinte:

Lema 6.7 *Seja I um ideal abeliano definido por uma alcova contida no conjunto \mathcal{B} . Então, as raízes da forma $\lambda_i - \lambda_j$, $1 \leq i < j \leq l$ e $\lambda_i + \lambda_l$, $1 \leq i \leq l-1$, não pertencem a I .*

Demonstração: Como I está associado a uma alcova contida em \mathcal{B} , segue que as raízes $\lambda_1 - \lambda_l$ e $\lambda_1 + \lambda_l$ não pertencem a I . Portanto, nenhuma raiz da forma $\lambda_i - \lambda_l$, $1 < i < l$ pode pertencer a I , pois $(\lambda_1 - \lambda_i) + (\lambda_i - \lambda_l) = \lambda_1 - \lambda_l$. Agora, como $(\lambda_i - \lambda_j) + (\lambda_j - \lambda_l) = \lambda_i - \lambda_l$, para todo $1 \leq i < j < l$, segue que $\lambda_i - \lambda_j \notin I$, para todo $1 \leq i < j \leq l$.

Por outro lado, como $\lambda_1 + \lambda_l$ não pertence a I , temos que as raízes da forma $\lambda_i + \lambda_l$ não estão em I , para todo $1 < i < l$ pois, para esses valores de i , temos: $(\lambda_1 - \lambda_i) + (\lambda_i + \lambda_l) = \lambda_1 + \lambda_l$.

□

Do lema anterior, segue que qualquer ideal associado a uma alcova em \mathcal{B} está contido no conjunto Φ das raízes do tipo $\lambda_i + \lambda_j$, $1 \leq i < j \leq l - 1$. Por outro lado, o conjunto Φ é um ideal abeliano e, como $\lambda_1 - \lambda_l$, $\lambda_1 + \lambda_l$ não estão em Φ , podemos associar a Φ uma alcova contida em \mathcal{B} . Por isso, qualquer ideal de Φ é também ideal abeliano e está associado a uma alcova em \mathcal{B} . Portanto, temos:

Proposição 6.8 *Seja Φ o conjunto das raízes do tipo $\lambda_i + \lambda_j$, $1 \leq i < j \leq l - 1$. Então, os ideais contidos em Φ formam um conjunto completo de representantes das classes de equivalência. Um ideal está contido em Φ se, e somente se, ele é abeliano e está associado a uma alcova em \mathcal{B} .*

Para descrever explicitamente os ideais que representam as classes de equivalência, tome sequências $R = (a_1, \dots, a_t)$, tais que $l - 1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_t \geq t + 1$ com $t \in \{1, \dots, l - 2\}$. Denote por $I(R)$ o ideal de Φ gerado pelo conjunto:

$$\lambda_1 + \lambda_{a_1}, \lambda_2 + \lambda_{a_2}, \dots, \lambda_t + \lambda_{a_t}.$$

Então, vale a seguinte Proposição:

Proposição 6.9 *Todos os ideais do tipo $I(R)$ definidos acima, constituem um conjunto completo de representantes das classes de equivalência.*

Demonstração: Basta provar que o número de sequências é igual ao número de classes. Para cada $t \in \{1, \dots, l - 2\}$, temos que o número de sequências do tipo $R = (a_1, \dots, a_t)$, com $l - 1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_t \geq t + 1$, é obtido por uma combinação com repetição de $l - t - 1$ elementos, tomados t a t . Isto é, este número é dado por:

$$C_{l-t-1+t-1}^t = C_{l-2}^t = \binom{l-2}{t}.$$

Agora, convencionando que para $t = 0$ temos a sequência $R = \emptyset$, com $I(\emptyset) = \emptyset$, segue que o número total de sequências é dado por:

$$\sum_{t=0}^{l-2} \binom{l-2}{t} = 2^{l-2}.$$

□

Capítulo 7

O Caso E_6

Neste capítulo, apresentamos uma descrição da ação do grupo \mathcal{W}_{Σ} no conjunto dos ideais abelianos, para o caso E_6 . Em seguida, descrevemos todas as classes de equivalência, segundo essa descrição, separando as sequências do tipo $R = (a_1, a_2, \dots, a_t)$, tais que $1 \leq t \leq 6$, $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_t \leq 6$.

7.1 Uma descrição da ação de \mathcal{W}_{Σ}

Para descrever uma ação de \mathcal{W}_{Σ} no conjunto dos ideais abelianos, vamos utilizar alguns resultados do artigo [15]. Sejam \mathcal{W} o grupo de Weyl de E_6 e $L = \{x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \langle \alpha, x \rangle \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Pi\}$. Dada uma alcova A qualquer, temos que existem $\lambda \in L$ e $w \in \mathcal{W}$, tais que

$$J(A) = wJ(t_{\lambda}A_0),$$

onde A_0 é a alcova básica. Isto significa que toda estrutura afim é equivalente, pela ação do grupo de Weyl, a uma estrutura do tipo $J(t_{\lambda}A_0)$, para algum $\lambda \in L$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in L$ quaisquer. O próximo lema nos dá condições necessárias e suficientes satisfeitas por λ_1, λ_2 , para que duas alcovas do tipo $t_{\lambda_1}A_0$ e $t_{\lambda_2}A_0$ sejam equivalentes pela ação de \mathcal{W}_{Σ} .

Lema 7.1 *Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in L$ quaisquer. Então, existe $\sigma \in \mathcal{W}_{\Sigma}$ tal que $t_{\lambda_1}A_0 = \sigma t_{\lambda_2}A_0$ se, e somente se, $\lambda_1 = -\rho_{\sigma} + \sigma\lambda_2$, onde $\rho_{\sigma} \in L$ é o único elemento tal que $t_{\rho_{\sigma}}\sigma(A_0) = A_0$.*

Demonstração: Suponha que existe $\sigma \in \mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}}$, tal que $t_{\lambda_1}A_0 = \sigma t_{\lambda_2}A_0$. Então, uma vez que $\sigma t_{\lambda_2}\sigma^{-1} = t_{\sigma\lambda_2}$, temos:

$$A_0 = t_{-\lambda_1}\sigma t_{\lambda_2}A_0 = t_{-\lambda_1}(\sigma t_{\lambda_2}\sigma^{-1})\sigma A_0 = t_{-\lambda_1}(t_{\sigma\lambda_2})\sigma A_0 = (t_{-\lambda_1+\sigma\lambda_2}\sigma)A_0.$$

Logo, $(t_{-\lambda_1+\sigma\lambda_2}\sigma)A_0 = (t_{\rho_\sigma}\sigma)A_0 = A_0$, o que implica que $\sigma A_0 = (t_{\lambda_1-\sigma\lambda_2+\rho_\sigma})\sigma A_0$. Porém isso significa que $\lambda_1 - \sigma\lambda_2 + \rho_\sigma = 0$, isto é, $\lambda_1 = -\rho_\sigma + \sigma\lambda_2$.

Reciprocamente, suponha que $\lambda_1 = -\rho_\sigma + \sigma\lambda_2$, com $\sigma \in \mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}}$. Então,

$$t_{\lambda_1}t_{\rho_\sigma}A_0 = t_{\lambda_1+\rho_\sigma}A_0 = t_{\sigma\lambda_2}A_0.$$

Isto implica que $t_{\lambda_1}t_{\rho_\sigma}\sigma A_0 = t_{\sigma\lambda_2}\sigma A_0$. Como $t_{\rho_\sigma}\sigma A_0 = A_0$, segue que:

$$t_{\lambda_1}A_0 = t_{\sigma\lambda_2}\sigma A_0 = (\sigma t_{\lambda_2}\sigma^{-1})\sigma A_0 = (\sigma t_{\lambda_2})A_0,$$

conforme queríamos. □

Agora, pela Proposição 3.5 de ([15], pag. 287), temos que

$$\epsilon_{\alpha+\beta}(t_\lambda A_0) = \epsilon_\alpha(t_\lambda A_0)\epsilon_\beta(t_\lambda A_0),$$

para todo $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Pi^+$ e $\lambda \in L$. Logo, para determinar a estrutura $J(t_\lambda A_0)$, basta conhecermos os valores de ϵ_{α_i} , com $\alpha_i \in \Sigma$. Além disso, como as coordenadas k_α da alcova $t_\lambda A_0$ satisfazem $k_\alpha = \langle \lambda, \alpha \rangle$, para toda raiz positiva α , temos:

$$J(t_{\lambda_1}A_0) = J(t_{\lambda_2}A_0) \Leftrightarrow \lambda_1 \equiv \lambda_2 \pmod{2},$$

isto é, as duas estruturas são iguais se, e somente, λ_1 e λ_2 são congruentes módulo 2. Consequentemente, podemos considerar apenas os elementos da forma $\lambda_2 = \sum w_i$, onde $\{w_1, \dots, w_l\}$ é a base dual de $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, isto é, $\langle w_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$.

Vamos determinar agora o grupo $\mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}}$ de E_6 . Este grupo é obtido do diagrama de Dynkin estendido, olhando os subdiagramas que dão E_6 . A ordem de $\mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}}$ é 3 e, portanto, temos que $\mathcal{W}_{\tilde{\Sigma}} = \{1, \sigma, \sigma^2\}$, onde σ é um elemento de ordem 3. Para determinar σ , vamos procurar uma isometria linear do diagrama de Dynkin estendido, satisfazendo as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \sigma(-\mu) &= \alpha_1, & \sigma(\alpha_1) &= \alpha_5, & \sigma(\alpha_5) &= -\mu, \\ \sigma(\alpha_2) &= \alpha_4, & \sigma(\alpha_3) &= \alpha_3, & \sigma(\alpha_4) &= \alpha_6, & \sigma(\alpha_6) &= \alpha_2. \end{aligned}$$

A matriz de σ na base $\beta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_6\}$, é dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deste modo, se denotarmos por E o espaço vetorial real gerado pela base β e por $x = (x_1, x_2, \dots, x_6)$ as coordenadas de um ponto $x \in E$ na base β , teremos que

$$\sigma(x_1, \dots, x_6) = (-x_5, -2x_5 + x_6, x_3 - 3x_5, x_2 - 2x_5, x_1 - x_5, x_4 - 2x_5).$$

Com um cálculo direto, é possível verificar que σ tem ordem 3, usando que $\sigma^2 x$ é dado por:

$$\sigma^2(x_1, \dots, x_6) = (-x_1 + x_5, -2x_1 + x_4, x_3 - 3x_1, x_6 - 2x_1, -x_1, x_2 - 2x_1).$$

Precisamos verificar que σ está no grupo de Weyl de E_6 . Primeiro observamos que $\sigma(\Pi) = \Pi$, donde segue que $\sigma \in \text{Aut}(\Pi)$. Por outro lado, temos que

$$\text{Aut}(\Pi) = \tau\mathcal{W} \cup \mathcal{W},$$

onde τ é um automorfismo não-trivial do diagrama, tal que $\tau^2 = 1$.

Suponha, por absurdo, que $\sigma \in \tau\mathcal{W}$. Então, existe $\gamma \in \mathcal{W}$, tal que $\sigma = \tau\gamma$. Isto implica que $\sigma^2 = (\tau\gamma\tau^{-1})\gamma$, donde segue que $\sigma^2 \in \mathcal{W}$, pois $\tau\gamma\tau^{-1}, \gamma \in \mathcal{W}$. Como $\sigma^3 = 1$, segue que $\sigma = (\sigma^2)^2$ e, portanto, $\sigma \in \mathcal{W}$ o que é uma contradição. Logo, $\sigma \in \mathcal{W}$, conforme queríamos.

Para determinar as classes de equivalência, segundo a ação de \mathcal{W}_{Σ} , vamos utilizar a ação equivalente a esta, dada pelo lema 7.1. Para isso, tome o $\sigma \in \mathcal{W}_{\Sigma}$ determinado anteriormente. Como $\sigma(-\mu) = \alpha_1$, segue que $\rho_\sigma = w_1$. Deste modo, a aplicação afim $\lambda = \lambda_1$ dada pelo lema 7.1 é tal que

$$\lambda = -w_1 + \sigma\lambda_2.$$

Como estamos interessados nos valores de λ, λ_2 , módulo 2, podemos considerar $\lambda = w_1 + \sigma\lambda_2$ e apenas os valores de λ_2 do conjunto

$$\{w_{a_1} + \dots + w_{a_t} \in L \mid 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_t \leq 6, 1 \leq t \leq 6\}. \quad (7.1)$$

Podemos associar cada soma do tipo $w_{a_1} + \dots + w_{a_t}$ com a sequência (a_1, \dots, a_t) , onde $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_t \leq 6$, $1 \leq t \leq 6$. Observamos que existem exatamente $2^6 = 64$ sequências do tipo acima, que coincide com o número de alcovas contidas em $2A_0$. Portanto, o número de classes de equivalência pode ser obtido calculando-se as órbitas de cada elemento do conjunto 7.1, pela ação de $\lambda = w_1 + \sigma\lambda_2$ e considerando o resultado módulo 2.

Primeiro vamos determinar σw_i , para cada $i \in \{1, \dots, 6\}$:

$$\sigma w_i = \langle w_i, -\mu \rangle w_1 + \langle w_i, \sigma^{-1}\alpha_2 \rangle w_2 + \dots + \langle w_i, \sigma^{-1}\alpha_6 \rangle w_6.$$

Como

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}\alpha_1 &= -\mu, \quad \sigma^{-1}\alpha_2 = \alpha_6, \quad \sigma^{-1}\alpha_3 = \alpha_3, \\ \sigma^{-1}\alpha_4 &= \alpha_2, \quad \sigma^{-1}\alpha_5 = \alpha_1, \quad \sigma^{-1}\alpha_6 = \alpha_4, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} \sigma w_i &= \langle w_i, -\mu \rangle w_1 + \langle w_i, \alpha_6 \rangle w_2 + \langle w_i, \alpha_3 \rangle w_3 + \\ &+ \langle w_i, \alpha_2 \rangle w_4 + \langle w_i, \alpha_1 \rangle w_5 + \langle w_i, \alpha_4 \rangle w_6. \end{aligned}$$

Deste modo, após considerarmos o resultado módulo 2, temos que:

$$\begin{aligned} \sigma w_1 &= w_1 + w_5 & \sigma w_2 &= w_4 & \sigma w_3 &= w_1 + w_3 \\ \sigma w_4 &= w_6 & \sigma w_5 &= w_1 & \sigma w_6 &= w_2 \end{aligned}$$

7.2 Cálculo das órbitas pela ação de λ

Nesta seção, vamos calcular as órbitas de cada uma das 64 sequências acima, pela ação de $\lambda = w_1 + \sigma\lambda_2$.

1. Cálculo da órbita de w_1 :

$$\lambda w_1 = w_1 + \sigma w_1 = w_1 + w_1 + w_5 = w_5$$

$$\lambda w_5 = w_1 + \sigma w_5 = w_1 + w_1 = 0$$

$$\lambda 0 = w_1 + \sigma 0 = w_1,$$

donde segue que a classe de equivalência determinada por w_1 é:

$$(1), (5), (0).$$

2. Cálculo da órbita de w_2 :

$$\lambda w_2 = w_1 + \sigma w_2 = w_1 + w_4$$

$$\lambda(w_1 + w_4) = w_1 + \sigma(w_1 + w_4) = w_1 + w_1 + w_5 + w_6 = w_5 + w_6$$

$$\lambda(w_5 + w_6) = w_1 + w_1 + w_2 = w_2,$$

donde segue que a classe de equivalência determinada por w_2 é:

$$(2), (1, 4), (5, 6).$$

3. Cálculo da órbita de w_3 :

$$\lambda w_3 = w_1 + \sigma w_3 = w_1 + w_1 + w_3 = w_3,$$

donde segue que w_3 é um ponto fixo pela ação e determina uma classe de equivalência com apenas um elemento.

4. Cálculo da órbita de w_4 :

$$\lambda w_4 = w_1 + \sigma w_4 = w_1 + w_6$$

$$\lambda(w_1 + w_6) = w_1 + \sigma(w_1 + w_6) = w_1 + w_1 + w_5 + w_2 = w_2 + w_5$$

$$\lambda(w_2 + w_5) = w_1 + \sigma(w_2 + w_5) = w_1 + w_4 + w_1 = w_4,$$

donde segue que a classe de equivalência determinada por w_4 é:

$$(4), (1, 6), (2, 5).$$

5. Cálculo da órbita de w_6 :

$$\lambda w_6 = w_1 + \sigma w_6 = w_1 + w_2$$

$$\lambda(w_1 + w_2) = w_1 + \sigma(w_1 + w_2) = w_1 + w_1 + w_5 + w_4 = w_4 + w_5$$

$$\lambda(w_4 + w_5) = w_1 + \sigma(w_4 + w_5) = w_1 + w_6 + w_1 = w_6,$$

donde segue que a classe determinada por w_6 é:

$$(6), (1, 2), (4, 5).$$

6. Cálculo da órbita de $w_1 + w_3$:

$$\lambda(w_1 + w_3) = w_1 + w_1 + w_5 + w_1 + w_3 = w_1 + w_3 + w_5$$

$$\lambda(w_1 + w_3 + w_5) = w_1 + w_1 + w_5 + w_1 + w_3 + w_1 = w_3 + w_5$$

$$\lambda(w_3 + w_5) = w_1 + w_1 + w_3 + w_1 = w_1 + w_3,$$

donde segue que a classe de equivalência determinada por $w_1 + w_3$ é:

$$(1, 3), (1, 3, 5), (3, 5).$$

7. Cálculo da órbita de $w_1 + w_5$:

$$\lambda(w_1 + w_5) = w_1 + w_1 + w_5 + w_1 = w_1 + w_5,$$

donde segue que $w_1 + w_5$ é um ponto fixo pela ação e determina uma classe com apenas um elemento.

8. Cálculo da órbita de $w_2 + w_3$:

$$\lambda(w_2 + w_3) = w_1 + w_4 + w_1 + w_3 = w_3 + w_4$$

$$\lambda(w_3 + w_4) = w_1 + w_1 + w_3 + w_6 = w_3 + w_6$$

$$\lambda(w_3 + w_6) = w_1 + w_1 + w_3 + w_2 = w_2 + w_3,$$

donde segue que a classe determinada por $w_2 + w_3$ é:

$$(2, 3), (3, 4), (3, 6).$$

9. Cálculo da órbita de $w_2 + w_4$:

$$\lambda(w_2 + w_4) = w_1 + w_4 + w_6$$

$$\lambda(w_1 + w_4 + w_6) = w_1 + w_1 + w_5 + w_6 + w_2 = w_2 + w_5 + w_6$$

$$\lambda(w_2 + w_5 + w_6) = w_1 + w_4 + w_1 + w_2 = w_2 + w_4,$$

donde segue que a classe de equivalência determinada por $w_2 + w_4$ é:

$$(2, 4), (1, 4, 6), (2, 5, 6).$$

10. Cálculo da órbita de $w_2 + w_6$:

$$\lambda(w_2 + w_6) = w_1 + w_4 + w_2$$

$$\lambda(w_1 + w_2 + w_4) = w_1 + w_1 + w_5 + w_4 + w_6 = w_4 + w_5 + w_6$$

$$\lambda(w_4 + w_5 + w_6) = w_1 + w_6 + w_1 + w_2 = w_2 + w_6,$$

donde segue que a classe de equivalência determinada por $w_2 + w_6$ é:

$$(2, 6), (1, 2, 4), (4, 5, 6).$$

11. Cálculo da órbita de $w_4 + w_6$:

$$\lambda(w_4 + w_6) = w_1 + w_6 + w_2$$

$$\lambda(w_1 + w_2 + w_6) = w_1 + w_1 + w_5 + w_4 + w_2 = w_2 + w_4 + w_5$$

$$\lambda(w_2 + w_4 + w_5) = w_1 + w_4 + w_6 + w_1 = w_4 + w_6,$$

donde segue que a classe de equivalência determinada por $w_4 + w_6$ é:

$$(4, 6), (1, 2, 6), (2, 4, 5).$$

12. Cálculo da órbita de $w_1 + w_2 + w_3$:

$$\lambda(w_1 + w_2 + w_3) = w_1 + w_1 + w_5 + w_4 + w_1 + w_3 = w_1 + w_3 + w_4 + w_5$$

$$\lambda(w_1 + w_3 + w_4 + w_5) = w_1 + w_1 + w_5 + w_1 + w_3 + w_6 + w_1 = w_3 + w_5 + w_6$$

$$\lambda(w_3 + w_5 + w_6) = w_1 + w_1 + w_3 + w_1 + w_2 = w_1 + w_2 + w_3,$$

donde segue que a classe determinada por $w_1 + w_2 + w_3$ é:

$$(1, 2, 3), (1, 3, 4, 5), (3, 5, 6).$$

13. Cálculo da órbita de $w_1 + w_2 + w_5$:

$$\lambda(w_1 + w_2 + w_5) = w_1 + w_1 + w_5 + w_4 + w_1 = w_1 + w_4 + w_5$$

$$\lambda(w_1 + w_4 + w_5) = w_1 + w_1 + w_5 + w_6 + w_1 = w_1 + w_5 + w_6$$

$$\lambda(w_1 + w_5 + w_6) = w_1 + w_1 + w_5 + w_1 + w_2 = w_1 + w_2 + w_5,$$

donde segue que a classe determinada por $w_1 + w_2 + w_5$ é:

$$(1, 2, 5), (1, 4, 5), (1, 5, 6).$$

14. Cálculo da órbita de $w_1 + w_3 + w_4$:

$$\lambda(w_1 + w_3 + w_4) = w_1 + w_1 + w_5 + w_1 + w_3 + w_6 = w_1 + w_3 + w_5 + w_6$$

$$\lambda(w_1 + w_3 + w_5 + w_6) = w_1 + w_1 + w_5 + w_1 + w_3 + w_1 + w_2 = w_2 + w_3 + w_5$$

$$\lambda(w_2 + w_3 + w_5) = w_1 + w_4 + w_1 + w_3 + w_1 = w_1 + w_3 + w_4,$$

donde segue que a classe de equivalência determinada por $w_1 + w_3 + w_4$ é:

$$(1, 3, 4), (1, 3, 5, 6), (2, 3, 5).$$

15. Cálculo da órbita de $w_1 + w_3 + w_6$:

$$\lambda(w_1 + w_3 + w_6) = w_1 + w_1 + w_5 + w_1 + w_3 + w_2 = w_1 + w_2 + w_3 + w_5$$

$$\lambda(w_1 + w_2 + w_3 + w_5) = w_1 + w_1 + w_5 + w_4 + w_1 + w_3 + w_1 = w_3 + w_4 + w_5$$

$$\lambda(w_3 + w_4 + w_5) = w_1 + w_1 + w_3 + w_6 + w_1 = w_1 + w_3 + w_6,$$

donde segue que a classe de equivalência determinada por $w_1 + w_3 + w_6$ é:

$$(1, 3, 6), (1, 2, 3, 5), (3, 4, 5).$$

16. Cálculo da órbita de $w_2 + w_3 + w_4$:

$$\lambda(w_2 + w_3 + w_4) = w_1 + w_4 + w_1 + w_3 + w_6 = w_3 + w_4 + w_6$$

$$\lambda(w_3 + w_4 + w_6) = w_1 + w_1 + w_3 + w_6 + w_2 = w_2 + w_3 + w_6$$

$$\lambda(w_2 + w_3 + w_6) = w_1 + w_4 + w_1 + w_3 + w_2 = w_2 + w_3 + w_4,$$

donde segue que a classe determinada por $w_2 + w_3 + w_4$ é:

$$(2, 3, 4), (3, 4, 6), (2, 3, 6).$$

17. Cálculo da órbita de $w_2 + w_4 + w_6$:

$$\lambda(w_2 + w_4 + w_6) = w_1 + w_4 + w_6 + w_2$$

$$\lambda(w_1 + w_2 + w_4 + w_6) = w_1 + w_1 + w_5 + w_4 + w_6 + w_2 = w_2 + w_4 + w_5 + w_6$$

$$\lambda(w_2 + w_4 + w_5 + w_6) = w_1 + w_4 + w_6 + w_1 + w_2 = w_2 + w_4 + w_6,$$

donde segue que a classe de equivalência determinada por $w_2 + w_4 + w_6$, é:

$$(2, 4, 6), (1, 2, 4, 6), (2, 4, 5, 6).$$

18. Cálculo da órbita de $w_1 + w_2 + w_3 + w_4$:

$$\lambda(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) = w_1 + w_1 + w_5 + w_4 + w_1 + w_3 + w_6 = w_1 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6$$

$$\lambda(w_1 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6) = w_1 + w_1 + w_5 + w_1 + w_3 + w_6 + w_1 + w_2 = w_2 + w_3 + w_5 + w_6$$

$$\lambda(w_2 + w_3 + w_5 + w_6) = w_1 + w_4 + w_1 + w_3 + w_1 + w_2 = w_1 + w_2 + w_3 + w_4,$$

donde segue que a classe determinada por $w_1 + w_2 + w_3 + w_4$ é:

$$(1, 2, 3, 4), (1, 3, 4, 5, 6), (2, 3, 5, 6).$$

19. Cálculo da órbita de $w_1 + w_2 + w_3 + w_6$:

$$\lambda(w_1 + w_2 + w_3 + w_6) = w_1 + w_1 + w_5 + w_4 + w_1 + w_3 + w_2 = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$$

$$\lambda(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5) = w_1 + w_1 + w_5 + w_4 + w_1 + w_3 + w_6 + w_1 = w_3 + w_4 + w_5 + w_6$$

$$\lambda(w_3 + w_4 + w_5 + w_6) = w_1 + w_1 + w_3 + w_6 + w_1 + w_2 = w_1 + w_2 + w_3 + w_6,$$

donde segue que a classe de equivalência determinada por $w_1 + w_2 + w_3 + w_6$ é:

$$(1, 2, 3, 6), (1, 2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6).$$

20. Cálculo da órbita de $w_1 + w_2 + w_4 + w_5$:

$$\lambda(w_1 + w_2 + w_4 + w_5) = w_1 + w_1 + w_5 + w_4 + w_6 + w_1 = w_1 + w_4 + w_5 + w_6$$

$$\lambda(w_1 + w_4 + w_5 + w_6) = w_1 + w_1 + w_5 + w_6 + w_1 + w_2 = w_1 + w_2 + w_5 + w_6$$

$$\lambda(w_1 + w_2 + w_5 + w_6) = w_1 + w_1 + w_5 + w_4 + w_1 + w_2 = w_1 + w_2 + w_4 + w_5,$$

donde segue que a classe de equivalência determinada por $w_1 + w_2 + w_4 + w_5$ é:

$$(1, 2, 4, 5), (1, 4, 5, 6), (1, 2, 5, 6).$$

21. Cálculo da órbita de $w_2 + w_3 + w_4 + w_5$:

$$\lambda(w_2 + w_3 + w_4 + w_5) = w_1 + w_4 + w_1 + w_3 + w_6 + w_1 = w_1 + w_3 + w_4 + w_6$$

$$\lambda(w_1 + w_3 + w_4 + w_6) = w_1 + w_1 + w_5 + w_1 + w_3 + w_6 + w_2 = w_1 + w_2 + w_3 + w_5 + w_6$$

$$\lambda(w_1 + w_2 + w_3 + w_5 + w_6) = w_1 + w_1 + w_5 + w_4 + w_1 + w_3 + w_1 + w_2 = w_2 + w_3 + w_4 + w_5,$$

donde segue que a classe de equivalência determinada por $w_2 + w_3 + w_4 + w_5$ é:

$$(2, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 6), (1, 2, 3, 5, 6).$$

22. Cálculo da órbita de $w_2 + w_3 + w_4 + w_6$:

$$\lambda(w_2 + w_3 + w_4 + w_6) = w_1 + w_4 + w_1 + w_3 + w_6 + w_2 = w_2 + w_3 + w_4 + w_6,$$

donde segue que $w_2 + w_4 + w_6$ é um ponto fixo pela ação e determina uma classe com apenas um elemento.

23. Cálculo da órbita de $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_6$:

$$\lambda(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_6) = w_1 + w_1 + w_5 + w_4 + w_1 + w_3 + w_6 + w_2 = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6$$

$$\lambda(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6) = w_1 + w_1 + w_5 + w_4 + w_1 + w_3 + w_6 + w_1 + w_2 = w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6$$

$$\lambda(w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6) = w_1 + w_4 + w_1 + w_3 + w_6 + w_1 + w_2 = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_6,$$

donde segue que a classe de equivalência determinada por $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_6$ é:

$$(1, 2, 3, 4, 6), (1, 2, 3, 4, 5, 6), (2, 3, 4, 5, 6).$$

24. Cálculo da órbita de $w_1 + w_2 + w_4 + w_5 + w_6$:

$$\lambda(w_1 + w_2 + w_4 + w_5 + w_6) = w_1 + w_1 + w_5 + w_4 + w_6 + w_1 + w_2 = w_1 + w_2 + w_4 + w_5 + w_6,$$

donde segue que $w_1 + w_2 + w_4 + w_5 + w_6$ é um ponto fixo pela ação e determina uma classe com apenas um elemento.

Para σ^2 , temos $\lambda = w_5 + \sigma^2 \lambda_2$. Através de um cálculo direto, mostra-se que as classes de equivalência determinadas por σ^2 são exatamente as mesmas que σ .

Portanto, concluímos que existem 24 classes de equivalência, sendo 4 classes com apenas um elemento e 20 classes com 3 elementos.

Capítulo 8

Estruturas quase-complexas harmônicas

A noção de estrutura quase-complexa harmônica foi estudada por Wood em [21] de uma maneira que passamos a descrever. Seja (M^n, g) , $n = 2k$, uma variedade Riemanniana orientável de dimensão par. Uma estrutura quase-complexa J sobre M^n é dita quase-Hermitiana, se $g(JX, JY) = g(X, Y)$, para todo $X, Y \in T_x M$, com $x \in M$, isto é, J é uma isometria em relação à métrica g . As estruturas quase-Hermitianas sobre (M^n, g) são parametrizadas pela variedade $\mathcal{C}(\pi)$ das seções diferenciáveis do fibrado twistor: $\pi : Z(M) \rightarrow M$. Seja $\xi : SO(M) \rightarrow M$ o fibrado principal de referenciais ortonormais positivamente orientados. O espaço twistor de M pode ser construído considerando o quociente: $Z(M) = SO(M)/U(k)$ e $\pi : Z(M) \rightarrow M$ é a projeção natural. Seja $\zeta : SO(M) \rightarrow Z(M)$ a aplicação quociente. Então, $\pi \circ \zeta = \xi$. O espaço twistor $Z(M)$ tem uma métrica Riemanniana natural, obtida pelo levantamento horizontal de g (horizontal relativo à conexão de Levi-Civita) e suplementando com a métrica sobre as fibras, induzida por uma $SO(n)$ -métrica invariante sobre $F = SO(n)/U(k)$. É conseqüentemente possível computar a energia de qualquer seção σ e de $\mathcal{C}(\pi)$, os pontos críticos com relação a variações sobre seções.

É considerado em [21], um problema variacional de aplicação harmônica, chamado de problema variacional “forçado”, no qual os pontos críticos não são aplicações harmônicas em geral. Quando isto ocorre, a aplicação harmônica é dita seção harmônica e a estrutura J correspondente, é chamada de estrutura quase-

complexa harmônica. Nosso objetivo neste capítulo é estudar a harmonicidade das estruturas quase-complexas invariantes sobre uma variedade de flags maximal \mathbb{F} , associada a uma álgebra de Lie semi-simples complexa de dimensão finita \mathfrak{g} .

8.1 Energia Vertical

Seja $\pi : (N, h) \rightarrow (M, g)$ uma submersão entre variedades Riemannianas orientáveis. Seja

$$TN = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H},$$

a decomposição de TN em componentes vertical/horizontal, onde $\mathcal{V} = \ker d\pi$ e \mathcal{H} é o complementar ortogonal. Se $A \in TN$, escrevemos, $A = vA + hA$, para as componentes vertical e horizontal de A , respectivamente. Deste modo, qualquer $\sigma \in \mathcal{C}(\pi)$ tem uma derivada vertical $d^v\sigma$ definida por:

$$d^v\sigma(X) = v(d\sigma(X)), \quad \forall X \in TM.$$

O funcional energia vertical E^v é então definido por:

$$E^v(\sigma) = \frac{1}{2} \int_M |d^v\sigma|^2 dx,$$

onde estamos supondo M compacta por simplicidade. A primeira variação de E^v pode ser escrita na forma de divergência, como segue:

$$dE^v(V) = - \int_M h(\tau^v\sigma, V) dx, \quad (8.1)$$

para todo levantamento vertical V de σ , com suporte compacto. Chamamos $\tau^v(\sigma)$ de *o campo tensão vertical de σ* . Se π tem fibras totalmente geodésicas, é mostrado em [19] que a tensão vertical é:

$$\tau^v(\sigma) = \text{tr} \nabla^v d^v\sigma, \quad (8.2)$$

onde ∇^v é a conexão no fibrado vetorial $\mathcal{V} \rightarrow N$, obtida pela projeção horizontal da conexão de Levi-Civita de (N, h) . Notamos que se π é uma submersão Riemanniana, isto é, $d\pi|_{\mathcal{H}}$ é isometria, então E^v normaliza o funcional energia E , pois

$$E(\sigma) = E^v(\sigma) + \frac{n}{2} \text{Vol}(M, g).$$

Deste modo, o problema de aplicação harmônica “forçado” para $C(\pi)$ é equivalente à teoria variacional vertical de E^v :

$$E(\sigma_t) - E(\sigma) = E^v(\sigma_t) - E^v(\sigma),$$

onde σ_t é qualquer variação a 1-parâmetro de σ , sobre seções.

Agora suponha que J^M é uma estrutura quase-Hermitiana para (M, g) , e cada fibra de π é uma variedade quase-Hermitiana, de tal modo que existe uma estrutura quase-complexa ortogonal J^v em \mathcal{V} . Com relação às decomposições $TM^{\mathbb{C}} = TM^{1,0} \oplus TM^{0,1}$ e $\mathcal{V}^{\mathbb{C}} = \mathcal{V}^{1,0} \oplus \mathcal{V}^{0,1}$, a complexificação de $d^v\sigma$ se decompoe em quatro componentes:

$$\partial^v\sigma : T^{1,0}M \rightarrow \mathcal{V}^{1,0}, \quad \bar{\partial}^v\sigma : T^{0,1}M \rightarrow \mathcal{V}^{1,0}$$

e seus conjugados. Consequentemente, com relação às normas Hermitianas sobre $T^{\mathbb{C}}M$ e $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$, temos:

$$e^v(\sigma) = \frac{1}{2} |(d^v\sigma)^{\mathbb{C}}|^2 = |\partial^v\sigma|^2 + |\bar{\partial}^v\sigma|^2 = h^v(\sigma) + a^v(\sigma).$$

Deste modo, a energia vertical se decompoe em componentes holomorfas e anti-holomorfas, da seguinte maneira:

$$E^v(\sigma) = H^v(\sigma) + A^v(\sigma).$$

Considere agora, o fibrado twistor $\pi : Z(M) \rightarrow M$, onde $Z(M) = SO(M)/U(k)$ é o espaço twistor de M e $SO(M) \rightarrow M$ é o fibrado de campos tangentes ortonormais, positivamente orientados. Então, a aplicação projeção π é uma submersão Riemanniana com fibras totalmente geodésicas. Além disso, a estrutura invariante Kähler de $SO(M)/U(k)$ induz uma estrutura quase-complexa compatível natural J^v em \mathcal{V} .

Seja $\varepsilon \rightarrow M$ o subfibrado anti-simétrico de $End(TM)$ e $\pi^*\varepsilon \rightarrow Z(M)$ o seu π -pullback. A geometria diferencial de π é facilitada por um mergulho isométrico $\iota : \mathcal{V} \rightarrow \pi^*\varepsilon$, assumindo que os vetores verticais são tratados como tensores sobre M .

Com base em 8.1, definimos $\tau(J)$ como sendo o seguinte campo anti-simétrico de endomorfismos de TM :

$$\tau(J) = \iota \circ \tau^v(\sigma),$$

que chamamos de campo tensão de J . Deste modo, J é harmônica se, e somente se, $\tau(J) = 0$. Começando de (8.2), é mostrado em [20] que

$$\tau(J) = -\frac{1}{4}[J, \nabla^* \nabla J],$$

onde

$$\nabla^* \nabla J = -\text{traço} \nabla^2 J.$$

Portanto, as equações de Euler-Lagrange para uma estrutura quase-Hermitiana harmônica J , são:

$$[J, \nabla^* \nabla J] = 0,$$

Proposição 8.1 *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples complexa de dimensão finita, $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ uma base de Weyl de \mathfrak{g} e \mathbb{F} a variedade de flags maximal associada a \mathfrak{g} . Se $J = \{\epsilon_\alpha\}$ é uma iacs sobre \mathbb{F} , então,*

$$\begin{aligned} (\nabla^* \nabla J)(X_\beta) &= \sum_{\alpha} \{ i\epsilon_\beta \nabla_{X_\alpha} \nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta - \nabla_{X_\alpha} J(\nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta) - \\ &\quad - \nabla_{X_{-\alpha}} J \nabla_{X_\alpha} X_\beta + J(\nabla_{X_{-\alpha}} \nabla_{X_\alpha} X_\beta) \} \end{aligned}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} (\nabla^* \nabla J)(X_\beta) &= - \sum_{\alpha \in \Pi} \nabla_{X_\alpha} \nabla_{X_{-\alpha}} J \\ &= - \sum_{\alpha} \{ \nabla_{X_\alpha} [(\nabla_{X_{-\alpha}} J)(X_\beta)] - (\nabla_{X_{-\alpha}} J)(\nabla_{X_\alpha} X_\beta) \} \\ &= - \sum_{\alpha} \{ \nabla_{X_\alpha} [\nabla_{X_{-\alpha}} (JX_\beta) - J(\nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta)] - \nabla_{X_{-\alpha}} (J \nabla_{X_\alpha} X_\beta) + J(\nabla_{X_{-\alpha}} \nabla_{X_\alpha} X_\beta) \} \\ &= \sum_{\alpha} \{ i\epsilon_\beta \nabla_{X_\alpha} \nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta - \nabla_{X_\alpha} J(\nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta) - \nabla_{X_{-\alpha}} J \nabla_{X_\alpha} X_\beta + J(\nabla_{X_{-\alpha}} \nabla_{X_\alpha} X_\beta) \} \end{aligned}$$

□

Deste modo,

$$\begin{aligned} [J, \nabla^* \nabla J](X_\beta) &= - \sum_{\alpha} \{ i\epsilon_\beta J(\nabla_{X_\alpha} \nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta) - J(\nabla_{X_\alpha} J \nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta) - \\ &\quad - J(\nabla_{X_{-\alpha}} J \nabla_{X_\alpha} X_\beta) - \nabla_{X_{-\alpha}} \nabla_{X_\alpha} X_\beta + \\ &\quad + \nabla_{X_\alpha} \nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta + i\epsilon_\beta \nabla_{X_\alpha} J \nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta + \\ &\quad + i\epsilon_\beta \nabla_{X_{-\alpha}} J \nabla_{X_\alpha} X_\beta - i\epsilon_\beta J(\nabla_{X_{-\alpha}} \nabla_{X_\alpha} X_\beta) \} \quad (8.3) \end{aligned}$$

Proposição 8.2 *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples complexa de dimensão finita, $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ uma base de Weyl de \mathfrak{g} e \mathbb{F} a variedade de flags maximal associada a \mathfrak{g} . Se $J = \{\epsilon_\alpha\}$ é uma iacs sobre \mathbb{F} , então,*

1. $\nabla_{X_\alpha} \nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta = m_{-\alpha, \beta} q_{-\alpha, \beta} m_{\alpha, -\alpha+\beta} q_{\alpha, -\alpha+\beta} X_\beta.$
2. $i\epsilon_\beta J(\nabla_{X_\alpha} \nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta) = -m_{-\alpha, \beta} q_{-\alpha, \beta} m_{\alpha, -\alpha+\beta} q_{\alpha, -\alpha+\beta} X_\beta.$
3. $-\nabla_{X_{-\alpha}} \nabla_{X_\alpha} X_\beta = -m_{\alpha, \beta} q_{\alpha, \beta} m_{-\alpha, \alpha+\beta} q_{-\alpha, \alpha+\beta} X_\beta.$
4. $-J(\nabla_{X_\alpha} J \nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta) = \epsilon_\beta \epsilon_{-\alpha+\beta} m_{-\alpha, \beta} q_{-\alpha, \beta} m_{\alpha, -\alpha+\beta} q_{\alpha, -\alpha+\beta} X_\beta.$
5. $-J(\nabla_{X_{-\alpha}} J \nabla_{X_\alpha} X_\beta) = \epsilon_\beta \epsilon_{\alpha+\beta} m_{\alpha, \beta} q_{\alpha, \beta} m_{-\alpha, \alpha+\beta} q_{-\alpha, \alpha+\beta} X_\beta.$
6. $i\epsilon_\beta \nabla_{X_\alpha} J \nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta = -\epsilon_\beta \epsilon_{-\alpha+\beta} m_{-\alpha, \beta} q_{-\alpha, \beta} m_{\alpha, -\alpha+\beta} q_{\alpha, -\alpha+\beta} X_\beta.$
7. $i\epsilon_\beta \nabla_{X_{-\alpha}} J \nabla_{X_\alpha} X_\beta = -\epsilon_\beta \epsilon_{\alpha+\beta} m_{\alpha, \beta} q_{\alpha, \beta} m_{-\alpha, \alpha+\beta} q_{-\alpha, \alpha+\beta} X_\beta.$
8. $-i\epsilon_\beta J(\nabla_{X_{-\alpha}} \nabla_{X_\alpha} X_\beta) = m_{\alpha, \beta} q_{\alpha, \beta} m_{-\alpha, \alpha+\beta} q_{-\alpha, \alpha+\beta} X_\beta.$

Demonstração:

De acordo com ([5], página 15), temos que:

$$\nabla_{X_\alpha} X_\beta = m_{\alpha, \beta} q_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta},$$

onde

$$q_{\alpha, \beta} := \frac{\lambda_{\alpha+\beta} + \lambda_\beta - \lambda_\alpha}{2\lambda_{\alpha+\beta}}.$$

Portanto, temos:

$$\nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta = m_{-\alpha, \beta} q_{-\alpha, \beta} X_{-\alpha+\beta}.$$

$$\begin{aligned} \nabla_{X_\alpha} \nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta &= m_{-\alpha, \beta} q_{-\alpha, \beta} \nabla_{X_\alpha} X_{-\alpha+\beta} \\ &= m_{-\alpha, \beta} q_{-\alpha, \beta} m_{\alpha, -\alpha+\beta} q_{\alpha, -\alpha+\beta} X_\beta \end{aligned} \quad (1)$$

o que implica que

$$J(\nabla_{X_\alpha} \nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta) = i\epsilon_\alpha m_{-\alpha, \beta} q_{-\alpha, \beta} m_{\alpha, -\alpha+\beta} q_{\alpha, -\alpha+\beta} X_\beta.$$

e

$$i\epsilon_\beta J(\nabla_{X_\alpha} \nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta) = -m_{-\alpha,\beta} q_{-\alpha,\beta} m_{\alpha,-\alpha+\beta} q_{\alpha,-\alpha+\beta} X_\beta. \quad (2)$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} -\nabla_{X_{-\alpha}} \nabla_{X_\alpha} X_\beta &= -m_{\alpha,\beta} q_{\alpha,\beta} \nabla_{X_{-\alpha}} X_{\alpha+\beta} \\ &= -m_{\alpha,\beta} q_{\alpha,\beta} m_{-\alpha,\alpha+\beta} q_{-\alpha,\alpha+\beta} X_\beta. \end{aligned} \quad (3)$$

Deste modo,

$$J(\nabla_{X_{-\alpha}} \nabla_{X_\alpha} X_\beta) = i\epsilon_\beta m_{\alpha,\beta} q_{\alpha,\beta} m_{-\alpha,\alpha+\beta} q_{-\alpha,\alpha+\beta} X_\beta.$$

Agora,

$$J(\nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta) = i\epsilon_{-\alpha+\beta} m_{-\alpha,\beta} q_{-\alpha,\beta} X_{-\alpha+\beta}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \nabla_{X_\alpha} J \nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta &= i\epsilon_{-\alpha+\beta} m_{-\alpha,\beta} q_{-\alpha,\beta} \nabla_{X_\alpha} X_{-\alpha+\beta} \\ &= i\epsilon_{-\alpha+\beta} m_{-\alpha,\beta} q_{-\alpha,\beta} m_{\alpha,-\alpha+\beta} q_{\alpha,-\alpha+\beta} X_\beta \end{aligned}$$

e, portanto,

$$-J(\nabla_{X_\alpha} J \nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta) = \epsilon_\beta \epsilon_{-\alpha+\beta} m_{-\alpha,\beta} q_{-\alpha,\beta} m_{\alpha,-\alpha+\beta} q_{\alpha,-\alpha+\beta} X_\beta \quad (4)$$

$$J \nabla_{X_\alpha} X_\beta = i\epsilon_{\alpha+\beta} m_{\alpha,\beta} q_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \nabla_{X_{-\alpha}} J \nabla_{X_\alpha} X_\beta &= i\epsilon_{\alpha+\beta} m_{\alpha,\beta} q_{\alpha,\beta} \nabla_{X_{-\alpha}} X_{\alpha+\beta} \\ &= i\epsilon_{\alpha+\beta} m_{\alpha,\beta} q_{\alpha,\beta} m_{-\alpha,\alpha+\beta} q_{-\alpha,\alpha+\beta} X_\beta \end{aligned}$$

Deste modo,

$$-J(\nabla_{X_{-\alpha}} J \nabla_{X_\alpha} X_\beta) = \epsilon_\beta \epsilon_{\alpha+\beta} m_{\alpha,\beta} q_{\alpha,\beta} m_{-\alpha,\alpha+\beta} q_{-\alpha,\alpha+\beta} X_\beta \quad (5).$$

$$i\epsilon_\beta \nabla_{X_\alpha} J \nabla_{X_{-\alpha}} X_\beta = -\epsilon_\beta \epsilon_{-\alpha+\beta} m_{-\alpha,\beta} q_{-\alpha,\beta} m_{\alpha,-\alpha+\beta} q_{\alpha,-\alpha+\beta} X_\beta \quad (6)$$

$$i\epsilon_\beta \nabla_{X_{-\alpha}} J \nabla_{X_\alpha} X_\beta = -\epsilon_\beta \epsilon_{\alpha+\beta} m_{\alpha,\beta} q_{\alpha,\beta} m_{-\alpha,\alpha+\beta} q_{-\alpha,\alpha+\beta} X_\beta \quad (7).$$

$$-i\epsilon_\beta J(\nabla_{X_{-\alpha}} \nabla_{X_\alpha} X_\beta) = m_{\alpha,\beta} q_{\alpha,\beta} m_{-\alpha,\alpha+\beta} q_{-\alpha,\alpha+\beta} X_\beta \quad (8)$$

□

Agora, substituindo cada ítem da Proposição 8.2 na expressão (8.3), obteremos, após somarmos todos os termos, que $[J, \nabla^* \nabla J] = 0$. Porém isso significa que J é harmônica, isto é, vale o seguinte Teorema:

Teorema 8.3 *Seja \mathbb{F} uma variedade de flags maximal associada a uma álgebra de Lie semi-simples complexa \mathfrak{g} . Então, toda estrutura quase-complexa invariante sobre \mathbb{F} é harmônica.*

Referências Bibliográficas

- [1] M. Bordemann, M. Forger and H. Römer, Homogeneous Kähler manifolds: Paving the way towards new supersymmetric sigma models. *Communications in Mathematical Physics* - Springer-Verlag, **102** (1986), 605-647.
- [2] F.E. Burstall and J.H. Rawnsley, Twistor theory for Riemannian symmetric spaces. *Lecture Notes in Mathematics* - Springer, **1424** (1990).
- [3] P. Celline and P. Papi, ad -nilpotent ideals of a Borel subalgebra. *Journal of Algebra*, **225** (2000), 130-141.
- [4] N. Cohen, C.J.C. Negreiros and L.A.B. San Martin, Characterization of $(1,2)$ -symplectic metrics on flag manifolds. *Contemporary Math.*, **288** (2001), 300-304.
- [5] S.P. Durán, variedades bandeira, f -estruturas e métricas $(1,2)$ -simpléticas. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2003.
- [6] A. Gray and L.M. Hervella, The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. *Ann. Mat. Pura Appl.*, **123** (1980), 35-58.
- [7] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Space*. Academic Press, 1978.
- [8] J.E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge University Press, 1990.
- [9] V.G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1990.

- [10] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*. Interscience Publishers, vol 2 1969.
- [11] B. Kostant, The set of abelian ideals of a Borel subalgebra, Cartan decompositions, and discrete series representations. *Internat. math. Res. Notices*, vol. 5 (1998), 225-252.
- [12] E.C. Licurgo Santos, Estruturas quase-Hermitianas invariantes e ideais abelianos. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 2003.
- [13] M. Paredes Gutierrez, Aspectos da geometria complexa das variedades bandeira. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2000.
- [14] L.A.B. San Martin, *Álgebras de Lie*. Editora Unicamp, 1999.
- [15] L.A.B. San Martin and C.J.C. Negreiros, Invariant almost Hermitian structures on flag manifolds. *Advances in Mathematics*, 178 (2003), 277-310.
- [16] J.P. Santos, M.P. Mello e I.T.C. Murari, *Introdução à análise combinatória*. Editora Unicamp, 2002.
- [17] J.- Y. Shi, Alcoves corresponding to an affine Weyl group. *J. London Math. Soc.*, 35 (1987), 42-45.
- [18] J. Vilms, Totally geodesic maps. *J. Diff. Geom.*, 4 (1970), 73-79.
- [19] C.M. Wood, The Gauss section of a Riemannian immersion. *J. London Math. Soc.*, 33 (1986), 157-168.
- [20] C.M. Wood, Instability of the nearly-Kähler 6-sphere. *Crelles, journal.*, 439 (1993), 205-212.
- [21] C.M. Wood, Harmonic almost-complex structures. *Compositio Mathematica*, 99 (1995), 183-212.