

UNICAMP
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
IMECC - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

Constelações de Sinais em Espaços Hiperbólicos

Tese de Doutorado

Edson Agustini

Orientadora: **Prof^a. Dr^a. Sueli Irene Rodrigues Costa** Imecc-Unicamp
Co-orientador: **Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Jr.** Feec-Unicamp

Banca examinadora: **Prof^a. Dr^a. Sueli Irene Rodrigues Costa** Imecc-Unicamp
Prof. Dr. Weiler Alves Finamore Puc-Rio
Prof. Dr. Jaime Portugheis Feec-Unicamp
Prof^a. Dr^a. Claudina Izepe Rodrigues Imecc-Unicamp
Prof. Dr. Marcelo Firer Imecc-Unicamp
Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (supl.) Imecc-Unicamp
Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (supl.) Imecc-Unicamp
Prof. Dr. Henrique Lazari (supl.) Unesp-Rio Claro

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial à obtenção do título de doutor em matemática.

Fevereiro de 2002
Campinas, SP

Constelações de Sinais em Espaços Hiperbólicos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Edson Agustini e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 11 de março de 2002

Prof^a. Dr^a. Sueli Irene Rodrigues Costa
Orientadora

Banca Examinadora:

Prof^a. Dr^a. Sueli Irene Rodrigues Costa
Prof. Dr. Weiler Alves Finamore
Prof. Dr. Jaime Portugheis
Prof^a. Dr^a. Claudina Izepe Rodrigues
Prof. Dr. Marcelo Firer

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial à obtenção do título de doutor em matemática.

Agradecimentos

A Deus pela presença contínua em nossas vidas.

À Prof^a. Dr^a. Sueli Irene Rodrigues Costa pela disposição e pela orientação durante o desenvolvimento do trabalho. Findo o qual, creio que posso assim dizer, tornou-se antes de orientadora, uma pessoa amiga.

Ao Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Jr. pela co-orientação que sempre pautou este trabalho, conversas instrutivas e paciência durante este período.

À comissão julgadora pela disponibilidade e atenção despendida ao trabalho.

À Cármen pelo incentivo constante, apoio nos momentos difíceis e ajuda na revisão gramatical, apesar de minha teimosia.

Às nossas famílias, pela compreensão e incentivo nos momentos difíceis.

Ao avô Jordão (*in memoriam*) pelo exemplo de vida que deixou gravado em nossos corações.

Aos companheiros de trabalho e orientação, Marcelo, Simone e Claudia.

Aos amigos com os quais convivi durante o Programa de Doutorado em Matemática. Em especial, Mercio, Sérgio e Newton pelas inúmeras e agradáveis conversas.

Ao Prof. Dr. Walter da Cunha Boreli pelas conversas instrutivas e disponibilidade pessoal.

Ao pessoal técnico-administrativo e docentes do IMECC e FEEC pela atenção e dedicação aos alunos de pós-graduação.

Ao parecerista FAPESP que acompanhou o desenvolvimento deste trabalho desde seu projeto inicial, pelas críticas construtivas, sugestões e competência que sempre demonstrou em seus pareceres.

À comissão de pós-graduação do IMECC pela oportunidade de realização de dois estágios docentes em disciplinas de graduação que me propiciaram a experiência necessária ao início da carreira docente em ensino superior.

À FAPESP pelo apoio financeiro (Processo 97/12269-0) concedido durante o período de maio de 1998 a fevereiro de 2002, sem o qual não seria possível a realização do Programa de Doutorado em Matemática, e pela inigualável competência que a norteia como órgão de fomento.

Cármem

companheira de erros e acertos na caminhada da vida

DEDICO

Resumo

Este trabalho aborda dois tópicos em Teoria da Informação e Codificação em espaços hiperbólicos:

- (i) Probabilidade de erro associada a constelações de sinais em espaços hiperbólicos;
- (ii) Constelações de sinais com propriedades geométricas viáveis a aplicações em ambientes com comportamento hiperbólico.

No item (i), foi desenvolvido um limitante superior para a probabilidade de erro no espaço hiperbólico n -dimensional. Foi obtida uma classe de funções densidades de probabilidade para ruído hiperbólico equivalente ao ruído gaussiano no espaço euclidiano n -dimensional, a qual chamamos de “ruído gaussiano hiperbólico”. Desta forma, a comparação em termos de desempenho entre constelações hiperbólicas de sinais sob a ação desse tipo de ruído se torna viável computacionalmente. Ainda, nesse tópico, constelações de sinais do tipo M -PSK hiperbólicas são analisadas em termos de desempenho quanto à probabilidade de erro.

No item (ii), foram construídas famílias de constelações de sinais geometricamente uniformes e não geometricamente uniformes em superfícies provenientes de quocientes de espaços hiperbólicos por grupos discretos de isometrias. As constelações, assim obtidas, sobre superfícies não-compactas são infinitas e semelhantes aos reticulados obtidos por grupos cristalográficos no plano euclidiano. As constelações sobre superfícies compactas são finitas, sendo que as não geometricamente uniformes se comportam como constelações geradas por auto-intersecção de nós únicos sobre os g -toros (toros de gênero g), resultando, portanto, em constelações cíclicas com grupo de rotulamento $\mathbb{Z}_n$. Neste item, há também a análise de desempenho das constelações em termos da probabilidade de erro em canais com ruído “gaussiano hiperbólico”, conforme descrito no item (i).

Palavras-chave: probabilidade de erro hiperbólica, constelação geometricamente uniforme, espaço hiperbólico, superfície quociente, densidade hiperbólica, grupo fuchsiano, geometria hiperbólica, g -toro, modulação hiperbólica, ruído hiperbólico.

Abstract

This work is about two topics in Coding and Information Theory in hyperbolic spaces:

- (i) Error probability of signal transmissions in hyperbolic spaces;
- (ii) Signal constellations with geometric properties feasible for practical applications in environments with hyperbolic behavior.

In the first item, it was developed an upper bound for the error probability of signal transmissions in n -dimensional hyperbolic space. It was obtained a class of probability density functions for hyperbolic noise analogous to the Gaussian noise in n -dimensional Euclidean space, that we called “hyperbolic Gaussian noise”. In this way, the performance comparison between hyperbolic signal constellations perturbed by this type of noise is reasonable for computation. In addition, signal constellations of hyperbolic M -PSK type are analyzed in terms of performance concerning error probability.

Related to the second item it was obtained both geometrically and non-geometrically uniform signal constellations on surfaces constructed through quotients of hyperbolic spaces by discrete groups of isometries. The infinite constellations over non-compact surfaces obtained by this process are similar to crystallographic group lattices in Euclidean space. The finite non-geometrically uniform constellations over compact surfaces are generated by self-intersection of unique knots over the torus of genus g and are cyclic labeled by the group $\mathbb{Z}_n$. In addition, an analysis of transmission in channels perturbed by “hyperbolic Gaussian noise”, according to the description of the first item is developed.

Key-words: hyperbolic error probability, geometrically uniform constellation, hyperbolic space, quotient surface, hyperbolic density, fuchsian group, hyperbolic geometry, torus of genus g , hyperbolic modulation, hyperbolic noise.

Sumário

Lista dos Principais Símbolos	17
Lista de Figuras	19
Apresentação	21
1 Tópicos sobre Teoria da Informação e Codificação	23
1.1 Sistemas de Comunicação Digital	23
1.2 Fontes	25
1.3 Codificação de Fonte	27
1.4 Codificação de Canal	28
1.5 Modulação	31
1.6 Canais e Ruídos	32
1.7 Representação Geométrica de Sinais e Dimensão	35
1.8 Constelações de Sinais, Superfícies Quocientes e Espaços Hiperbólicos	40
1.8.1 Códigos de Grupo e Códigos Geometricamente Uniformes	40
1.8.2 Por que Superfícies Quocientes com Curvatura Constante?	41
1.8.3 Por que o Espaço Hiperbólico?	42
2 Tópicos Sobre Geometria Hiperbólica	45
2.1 Variedades Riemannianas	45
2.2 Modelos Euclidianos para a Geometria Hiperbólica	48
2.3 A Distância Hiperbólica	49
2.4 Geodésicas em $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{B}^n$	50
2.5 Isometrias nos Modelos $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{B}^n$	53
2.5.1 Isometrias entre $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{B}^n$	54
2.5.2 Isometrias em $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{B}^2$	55
2.5.3 Classificação das Isometrias Próprias de $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$ e $\text{Iso}(\mathbb{B}^2)$	56
2.6 Círculos Isométricos em $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{B}^2$	60
2.7 Área Hiperbólica e Teorema de Gauss-Bonnet	60
2.8 Trigonometria Hiperbólica	61
2.9 Grupos Fuchsianos	63
2.9.1 Grupos Discretos	63
2.9.2 Grupos com Ação Propriamente Descontínua	63
2.9.3 Grupos Fuchsianos Abelianos	64
2.9.4 Grupos Fuchsianos Elementares	65
2.9.5 Região Fundamental	65
2.9.6 Grupos Fuchsianos Geometricamente Finitos	68
2.10 Grupos Triângulos	70
2.11 Grupos Kleinianos	70

3	Probabilidade de Erro Associada a Constelações de Sinais em Espaços Hiperbólicos	73
3.1	Introdução	73
3.2	Probabilidade de Erro em Canais Gaussianos	74
3.3	Densidade Gaussiana na Reta Hiperbólica	80
3.4	Densidade Gaussiana no Espaço Hiperbólico de Dimensão Maior ou Igual a Dois	85
3.5	Estimador para a Probabilidade de Erro Hiperbólica	92
3.6	Constelações <i>PAM</i> e <i>PSK</i> Hiperbólicas	96
3.6.1	<i>M-HPAM</i> (PAM hiperbólico)	96
3.6.2	<i>M-HPSK</i> (PSK Hiperbólico)	98
4	Constelações de Sinais em Superfícies Quocientes $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$	103
4.1	Preliminares	103
4.2	Constelações não Geometricamente Uniformes sobre Superfícies $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$ não Compactas	105
4.2.1	O Cone Elíptico	106
4.2.2	O Cone Parabólico	109
4.2.3	O Cilindro Hiperbólico	111
4.2.4	Grupos de Schottky	113
4.3	Constelações Geometricamente Uniformes sobre Superfícies $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$ Compactas	114
4.3.1	Obtendo o g -toro como Quociente $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$	114
4.3.2	Ladrilhamentos Hiperbólicos e Constelações Geometricamente Uniformes em T_g	119
4.4	Constelações Geometricamente Uniformes sobre Superfícies $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$ não Compactas	124
4.5	Constelações não Geometricamente Uniformes sobre Superfícies $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$ Compactas	127
4.5.1	Constelações Cíclicas em Nós sobre o g -toro	127
	Perspectivas Futuras	131
	Referências Bibliográficas	133
	Índice Remissivo	137

Lista dos Principais Símbolos

$AWGN$	ruído gaussiano branco aditivo
$\mathbb{B}^n$	modelo euclidiano da bola unitária para a geometria hiperbólica n -dimensional
$\mathcal{C}$	constelação ou código (depende do contexto)
$C_r(\mathbf{p})$	círculo de centro em $\mathbf{p}$ e raio r em $\mathbb{R}^2$
$C_r^h(\mathbf{p})$	círculo de centro em $\mathbf{p}$ e raio r em $\mathbb{H}^2$
$\cosh(x)$	coseno hiperbólico de x
$C_{PSL_2(\mathbb{R})}(T_M)$	centralizador de $T_M \in PSL_2(\mathbb{R})$
$d_{\mathcal{H}^n}$	distância em $\mathcal{H}^n$
$d_{\mathbb{H}}$	distância em $\mathbb{H}$
$d_{\frac{\mathcal{H}^2}{G}}$	distância no espaço quociente $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$
$d_{\min}$	distância mínima entre pontos em uma constelação
$D_{\mathbf{p}}(G)$	domínio de Dirichlet de G em $\mathbf{p}$
$\partial\mathcal{H}^n$	bordos de $\mathcal{H}^n$
Δ	triângulo hiperbólico (em geral)
$\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}$	eixo da translação hiperbólica $\mathfrak{h}$
$\mathfrak{e}$	isometria elíptica (rotação hiperbólica: $\text{Tr}(\mathfrak{e}) < 2$) em $\mathcal{H}^2$
E	energia
$E_G(x)$	estabilizador de x em G
$\text{erf}(x)$	função erro
$\text{erfc}(x)$	função erro complementar
$\mathcal{F}$	região fundamental poligonal regular hiperbólica de G centrada na origem de $\mathbb{B}^2$
G ou Γ	grupo fuchsiano (em geral)
$G \subset \Gamma$	G é subgrupo de Γ
$\langle g_1, \dots, g_n \rangle_{sg}$	grupo gerado por $g_1, \dots, g_n$
$GM(\widetilde{\mathbb{R}^n})$	grupo geral de Möbius
Gx	órbita de x pelo grupo G
G_{Δ}	grupo fuchsiano de tipo (p, q, r)
$g_{\mathbf{s}_k}$ (ou $g_{\mathbb{R}^n}$)	densidade gaussiana n -dimensional com centro em $\mathbf{s}_k$ (ou μ) e variância σ^2
$g_{\mathbb{R}}$	densidade gaussiana unidimensional com média μ e variância σ^2
$g_{\mathcal{H}^n}$	densidade gaussiana hiperbólica n -dimensional com média μ e variância σ^2
$g_{\mathbb{H}}$	densidade gaussiana hiperbólica unidimensional com média $\mu_{\mathbb{H}}$ e variância σ^2
$(g, m_1, \dots, m_r)$	assinatura do grupo fuchsiano co-compacto G
$(g, m_1, \dots, m_r; s)$	assinatura do grupo fuchsiano geometricamente finito e não co-compacto G
$\mathfrak{h}$ ou $\mathbf{t}$	translação hiperbólica ($\text{Tr}(\mathfrak{h}) > 2$) em $\mathcal{H}^2$
$\mathcal{H}^n$	modelo euclidiano (genérico) para a geometria hiperbólica n -dimensional
$\mathbb{H}^n$	modelo euclidiano do semi-espaço superior para a geometria hiperbólica n -dimensional
$\frac{\mathcal{H}^2}{G}$	espaço quociente localmente isométrico ao plano hiperbólico pelo grupo fuchsiano G
$H(\mathcal{S})$	entropia de fonte com conjunto de símbolos $\mathcal{S}$
$H_{\mathbf{p}}(\mathbf{q})$	horocírculo tangente a $\partial\mathcal{H}^2$ em $\mathbf{p}$ passando por $\mathbf{q}$
$H_{\infty}(\mathbf{q})$	horocírculo degenerado passando por $\mathbf{q}$

$\mathcal{I}_{T_M}$	círculo isométrico da transformação de Möbius T_M
i_S	inversão na hipersfera S
i_P	reflexão no hiperplano P
$\text{Iso}(\mathcal{H}^n)$	grupo das isometrias de $\mathcal{H}^n$
$\text{Iso}^+(\mathcal{H}^2)$	grupo das isometrias próprias de $\mathcal{H}^2$
$\text{Iso}^+(\mathbb{H}^3)$	grupo das isometrias próprias de $\mathbb{H}^3$
$I_{\mathbb{H}^n \mathbb{B}^n}$	isometria entre o modelo $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{B}^n$ (inversa de $I_{\mathbb{B}^n \mathbb{H}^n}$)
$I_{\mathbb{B}^n \mathbb{H}^n}$	isometria entre o modelo $\mathbb{B}^n$ e $\mathbb{H}^n$ (inversa de $I_{\mathbb{H}^n \mathbb{B}^n}$)
K	grupo kleiniano (em geral)
$\tilde{\mathbb{K}}$	compactificação de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$k_{\mathcal{H}^n}$	constante da densidade gaussiana hiperbólica n -dimensional
$\Lambda(G)$	conjunto limite do grupo fuchsiano G
$\mathcal{M}_g$	espaço das superfícies diferenciáveis de gênero $g \geq 2$
$\mu_{\mathcal{H}^2}(A)$	medida da área hiperbólica de $A \subset \mathcal{H}^2$
M -PAM	esquema de modulação unidimensional composto por M sinais
M -PSK	esquema de modulação cíclico composto por M sinais
m^2 -QAM	esquema de modulação quadrangular composto por m^2 sinais
$\hat{\mathbb{M}}^n$	compactificação de $\mathbb{M}^n$, sendo $\mathbb{M}^n = \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{B}^n$
$M(\tilde{\mathbb{R}}^n)$	grupo de Möbius
$N_{PSL_2(\mathbb{R})}(G)$	normalizador de G em $PSL_2(\mathbb{R})$
$N(G)$	região de Nielsen de G
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$)
$PSL_2(K)$	grupo topológico especial linear projetivo sobre o corpo $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$PS^*L_2(\mathbb{R})$	extensão de $PSL_2(\mathbb{R})$ (grupo topológico projetivo isomorfo a $\frac{S^*L_2(\mathbb{R})}{\{\pm \text{Id}\}}$)
$PSL_2(\mathbb{Z})$	grupo modular
$PS^*L_2(\mathbb{Z})$	grupo modular estendido
$\mathfrak{p}$	isometria parabólica ($\text{Tr}(\mathfrak{p}) = 2$) em $\mathcal{H}^2$
$\mathcal{P}_e$	probabilidade de erro
P	hiperplano compactificado em $\mathbb{R}^n$
Q_A	álgebra dos quatérnios
$\mathbb{R}^n$	espaço euclidiano n -dimensional
$\mathbb{S}^n$	espaço esférico n -dimensional
σ^2	variância
$\sinh(x)$	seno hiperbólico de x
$SL_2(K)$	grupo topológico especial linear sobre $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$S^*L_2(\mathbb{R})$	extensão de $SL_2(\mathbb{R})$ (i.e. grupo topológico das matrizes M reais com $\det M = \pm 1$)
$\mathbf{s}_j$	sinal (ponto) j
$S_r(\mathbf{p})$	hipersfera de centro em $\mathbf{p}$ e raio r em $\mathbb{R}^n$
$T_{\mathbf{p}}\mathbb{M}$	espaço tangente à variedade riemanniana $\mathbb{M}$ em $\mathbf{p}$
T_M	transformação de Möbius
$\text{Tr}(T_M)$	traço da transformação de Möbius T_M
$\tanh(x)$	tangente hiperbólica de x
T_Δ	grupo triângulo
T_g	toro de gênero $g \geq 2$
$\mathcal{T}_g$	espaço de Teichmüller das superfícies diferenciáveis de gênero $g \geq 2$
(u_j) ou (v_j)	palavra-código (seqüência finita de dígitos)
V_j	região de Voronoi de um sinal de índice j (geralmente $\mathbf{s}_j$)
$V_{B_R^n}$	volume da bola n -dimensional de raio R
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Z}[i]$	anel dos inteiros de Gauss

Lista de Figuras

1.1 - Exemplo de esquema de amostragem e quantização em conversão analógico-digital.....	26
1.2 - Codificador convolucional binário de parâmetros $(2, 1, 2)$	29
1.3 - Modulação 2- <i>PSK</i> da palavra-código 1101000	32
1.4 - Esquemas de canais discretos sem memória.....	33
1.5 - Diagrama de blocos de um sistema de comunicações em um canal <i>AWGN</i>	34
1.6 - Exemplo de esquemas para canais de erro tipo surto	35
1.7 - Representação geométrica do esquema de modulação 4- <i>PAM</i> e 5- <i>PAM</i>	36
1.8 - Representação geométrica do esquema de modulação 8- <i>PSK</i>	37
1.9 - Representação geométrica do esquema de modulação 16- <i>QAM</i>	38
1.10 - Representação geométrica do ruído $n(t)$ <i>AWGN</i> sobre o sinal $s_8(t)$ em um 8- <i>PSK</i>	39
2.1 - Posição relativa de geodésicas em $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{B}^2$	53
2.2 - Ação da isometria $I_{\mathbb{B}^2\mathbb{H}^2}$ entre os modelos $\mathbb{B}^2$ e $\mathbb{H}^2$	55
2.3 - Horocírculo em $\mathbb{H}^2$ como limite de círculos hiperbólicos	57
2.4 - Círculos hiperbólicos e horocírculos em $\mathbb{H}^2$ são curvas invariantes por isometrias elípticas e parabólicas respectivamente	58
2.5 - Eixo $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}$ e curvas invariantes de uma translação hiperbólica $\mathfrak{h}$	59
2.6 - Δ é triângulo de área máxima π . Seus ângulos internos são todos nulos.....	61
2.7 - α é ângulo de paralelismo do triângulo Δ	61
2.8 - Domínios de Dirichlet $D_{\mathbf{p}}(G_j)$ em $\mathbf{p} = \mathbf{0} \in \mathbb{B}^2$ de $G_1 = \langle \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_6 \rangle$ e $G_2 = \langle \mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_7 \rangle$ e seus ciclos.....	68
3.1 - Parte central do gráfico de densidade gaussiana associada ao sinal $\mathbf{s}_8$ no 8- <i>PSK</i>	75
3.2 - Gráficos euclidianos de densidades gaussianas hiperbólicas de variância $\sigma^2 = 0, 1$ em $\mathbb{H}$	84
3.3 - Gráficos euclidianos $g_{\mathcal{H}^2}$ (deslocados para cima) com médias μ (modelo $\mathbb{B}^2$) e η (modelo $\mathbb{H}^2$). Os círculos hiperbólicos são curvas de nível.....	91
3.4 - Ação de isometria elíptica $\mathfrak{e}$ de centro $\mathbf{s}_1$ e raio $d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j})$ em $\mathbb{H}^2$	94
3.5 - 3- <i>HPAM</i> com distância hiperbólica mínima 2	97
3.6 - Uma constelação 4- <i>HPSK</i> e as regiões de Voronoi V_j dos sinais $\mathbf{s}_j$	99
3.7 - Gráficos dos limitantes superiores para a probabilidade de erro em função da variância σ^2 para o 4- <i>HPSK</i> e o 4- <i>PSK</i>	99
3.8 - Constelação 8- <i>HPSK</i> e suas regiões de Voronoi.....	100
3.9 - Gráficos dos limitantes superiores para a probabilidade de erro em função da variância σ^2 para o 8- <i>HPSK</i> e o 8- <i>PSK</i>	101
4.1 - O cone elíptico: superfície quociente $\frac{\mathcal{H}^2}{\langle \mathfrak{e} \rangle}$, sendo $\mathfrak{e}$ isometria elíptica com ponto fixo i	107
4.2 - A constelação $\frac{\Gamma_{kj}^i}{G}$ no cone elíptico.....	108

4.3 - O cone parabólico: superfície quociente $\frac{\mathcal{H}^2}{\langle \mathbf{p} \rangle}$, sendo $\mathbf{p}$ isometria parabólica com ponto fixo $\mathbf{0}$	109
4.4 - A constelação $\frac{\Gamma_{kj}\mathbf{q}}{G}$ no cone parabólico	111
4.5 - O cilindro hiperbólico: superfície quociente $\frac{\mathcal{H}^2}{\langle \mathbf{t} \rangle}$, sendo $\mathbf{t}$ translação hiperbólica com eixo γ	111
4.6 - A constelação $\frac{\Gamma_{kj}\mathbf{q}}{G}$ no cilindro hiperbólico.....	113
4.7 - Superfície quociente obtida por grupo de Schottky	113
4.8 - Obtendo expressões analíticas para as geodésicas de $\mathcal{F}$	115
4.9 - Ação topológica de G sobre a região fundamental octogonal regular $\mathcal{F}$ para obtenção de um bitoro.....	117
4.10 - Ação topológica de G sobre $\mathcal{F}$ para obtenção de um tritoro com G gerado por 6 translações hiperbólicas	118
4.11 - Um exemplo de constelação geometricamente uniforme obtida por ladrilhamento de um bitoro.....	122
4.12 - Um exemplo de constelação geometricamente uniforme com 336 pontos (só os centrais estão ilustrados) sobre um tritoro quociente por grupo fuchsiano gerado por 7 translações hiperbólicas	124
4.13 - Constelação geometricamente uniforme sobre um cone parabólico gerada a partir do grupo modular estendido	126
4.14 - Constelação geometricamente uniforme de maior distância mínima sobre um cone parabólico.....	126
4.15 - Figura auxiliar de demonstração	127
4.16 - A constelação cíclica sobre o nó dos eixos de $\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_{4g}$ sobre um bitoro	129

Apresentação

O presente trabalho é fruto da continuidade de estudos realizados desde a época do programa de mestrado em matemática no IMECC-UNICAMP sob orientação da Prof^a. Dr^a. Sueli Costa. Ao término deste, houve a proposta e possibilidade de trabalho em áreas interdisciplinares, envolvendo Geometria Hiperbólica e Códigos Geometricamente Uniformes, o qual passamos a desenvolver sob a co-orientação do Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Jr. da FEEC-UNICAMP, uma vez que o conhecimento em Teoria da Informação e Codificação desempenhava papel fundamental ao direcionamento desta nossa pesquisa matemática que então se iniciava. Sendo assim, tornou-se inevitável o caráter interdisciplinar do trabalho que ora apresentamos, o que nos levou a subdividi-lo basicamente em quatro partes (capítulos), conforme delineamos na sequência.

No Capítulo 1, apresentamos, de forma sucinta, alguns tópicos referentes à Teoria da Informação e Codificação. O objetivo deste capítulo é, quase que exclusivamente, sincronizar o leitor com a área de engenharia envolvida na interface comentada. Exceção deve ser feita à Seção 1.8, na qual procuramos situar o objeto da pesquisa no contexto dessa teoria.

No Capítulo 2, discorremos sobre alguns tópicos em Geometria Hiperbólica essenciais ao nosso trabalho de pesquisa, com o objetivo de tornar acessível a leitura deste trabalho àqueles que, estando familiarizados com Teoria da Informação e Codificação, não possuam conhecimentos mais consistentes em geometria hiperbólica. Cabendo salientar que, devido ao seu caráter secundário, optamos por uma abordagem “sem demonstrações” dos diversos resultados apontados. Tal procedimento se deve à intenção de evitar uma exposição demasiadamente longa de uma teoria abordada, com primazia, por excelentes livros-texto, como os que serão citados oportunamente.

No Capítulo 3, iniciamos a apresentação de nossa contribuição à área interdisciplinar citada, abordando alguns aspectos do problema que envolve a forma de se lidar com a probabilidade de erro em ambientes hiperbólicos. Para tanto, a função densidade de probabilidade de erro associada a constelações de sinais em espaços hiperbólicos de dimensão qualquer foi desenvolvida na Seção 3.4, dando sequência a trabalhos já existentes na área. Abordamos, também, o problema da manipulação computacional da probabilidade de erro em constelações de sinais hiperbólicas quaisquer, que se apresenta absolutamente impraticável devido à complexidade das expressões analíticas referentes a tais densidades. Por esse motivo, o desenvolvimento de um majorante mais simples, tornou-se imperativo, o que nos levou, dentro de certas restrições, à elaboração do Teorema 3.1.

No Capítulo 4, estudamos algumas constelações de sinais em superfícies quocientes obtidas a partir do plano hiperbólico por grupos discretos de isometrias. Introduzimos constelações de sinais geométrica e não geometricamente uniformes (mas que apresentam algumas propriedades interessantes), tanto em superfícies compactas como não-compactas. As superfícies compactas “diferenciáveis” que podem ser obtidas do plano hiperbólico por quociente são os toros de gênero maior ou igual a dois. São estes os que fornecem o ambiente de constelações finitas com propriedades geométricas únicas, como as estabelecidas na Proposição 4.8 para constelações geometricamente uniformes e na Proposição 4.14 para as não geometricamente uniformes, mas cíclicas sobre grafos constituídos de nós sobre os g -toros. A análise de desempenho dessas constelações, quando submetidas a canais com comportamento hiperbólico, foi abordada incisivamente neste capítulo; sendo, para tanto, o majorante desenvolvido no Capítulo 3 uma peça fundamental neste estudo.

As constelações consideradas neste último capítulo são pautadas por quesitos importantes para a implementação prática de um sistema de comunicações digital, dentre os quais citamos as constelações:

- geradas por grupos. No nosso caso, por grupos discretos de isometrias do espaço em que a constelação está inserida.

- com cardinalidade potência de 2 para codificação ou transmissão, utilizando o alfabeto binário que é o único possível para efeitos práticos na atualidade.

- com regularidade de grafo. Esta constelação deve estar sobre um grafo do tipo “aresta regular”, ou seja, cada ponto deve possuir exatamente o mesmo número de vizinhos, o que significa que de cada ponto saem o mesmo número de arestas.

- com rotulamento abeliano ou cíclico, o que significa que deve existir um “grupo rotulador” com essas características (abeliano ou cíclico) e um algoritmo de rotulamento dos vértices.

- com máxima distância mínima, o que significa que a constelação está “espalhada o máximo possível” no seu espaço. Naturalmente, a métrica do espaço em questão deve ser considerada.

- com menor probabilidade de erro. Naturalmente, quando comparada à outra constelação com a mesma cardinalidade e no mesmo espaço.

- com ladrilhamento regular, o que significa que o grafo que contém a constelação divide o espaço em ladrilhos congruentes. As constelações geometricamente uniformes são exemplos que satisfazem esta condição.

No espaço hiperbólico, é bastante difícil caracterizar famílias de constelações que apresentem estas propriedades. No entanto, as que possuem algumas delas certamente constituem objeto de atenção e nosso trabalho procurou angariar algumas contribuições neste caminho.

Capítulo 1

Tópicos sobre Teoria da Informação e Codificação

Este capítulo tem por objetivo expor, de modo conciso, alguns tópicos sobre *Teoria da Informação e Codificação* que julgamos úteis ao trabalho exposto nos capítulos seguintes. Não temos a pretensão de elaborar um texto sobre a teoria que contemple desde as noções básicas às culminâncias das pesquisas atuais e que, ao mesmo tempo, seja auto-suficiente. Para abordagens completas e atuais, há excelentes livros-texto sobre o assunto como, por exemplo, [51] e [9]. Sendo assim, o que nos cabe, neste capítulo, é fornecer um panorama geral da teoria básica, mais voltado ao público com formação matemática e que direcione o fluxo do texto ao objeto de estudo deste trabalho: as constelações de sinais em espaços hiperbólicos para uso em canais sob a ação de ruídos do tipo que chamamos de *gaussiano hiperbólico* (assim denotado, devido à similitude com o *ruído gaussiano branco aditivo*; euclidiano por excelência). Desta forma, nesta primeira parte, são inevitáveis citações constantes a referências de aprofundamento, algo que faremos sem constrangimento, devido ao caráter apresentativo do capítulo.

Pretendemos, assim, alcançar dois objetivos:

(i) apresentar a matemáticos um panorama geral da teoria na qual o presente trabalho está inserido, numa linguagem simples e, acreditamos, a mais livre possível de termos técnicos específicos da área de engenharia.

(ii) situar especificamente o objeto de estudo deste trabalho no contexto da teoria.

Para tanto, subdividimos a abordagem em seções que se encadeiam de modo tradicional, como nos principais textos da área, exceção feita às duas últimas, em especial a Seção 1.8 “*Constelações de Sinais, Superfícies Quocientes e Espaços Hiperbólicos*”, que direcionam o fluxo do texto aos problemas tratados neste trabalho.

1.1 Sistemas de Comunicação Digital

Apresentamos nesta seção, resumidamente, conceitos básicos sobre sistemas de comunicações. Uma abordagem detalhada deste assunto (englobando naturalmente as próximas seções) pode ser conferida, sob um ponto de vista prático, em [35], Capítulos 10 e 11 (pp. 614-729) e [45], Capítulos 1 (pp. 1-14), 3 (pp. 51-84), 10 e 11 (pp. 287-349). Sob um ponto de vista teórico, as referências [9], Capítulos 1 a 3 (pp. 1-158) e [5], Capítulos 1 a 3 (pp. 1-86) e 8 (pp. 230-261) são adequadas.

Podemos considerar um **sistema de comunicações** como sendo um conjunto de equipamentos e meios físicos, que tem por objetivo o transporte da informação de uma fonte a um destinatário via um canal de comunicações. De um modo geral, podemos trabalhar com dois tipos de sistemas de comunicações:

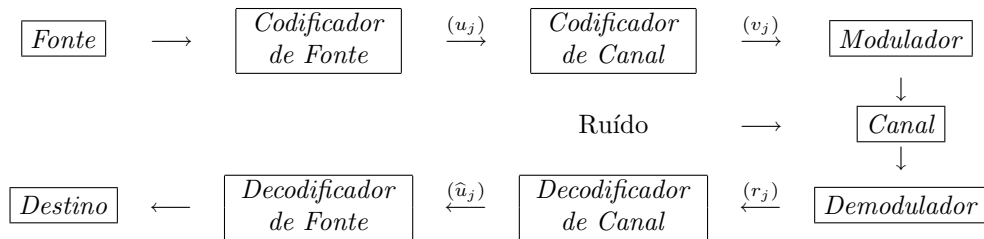
(i) **Sistema analógico** onde a informação (ex. voz) é transmitida por meio de sinais elétricos, magnéticos ou eletromagnéticos que variam continuamente em amplitude e/ou frequência e/ou fase e tempo.

(ii) **Sistema digital** onde a informação é transmitida em uma sequência de mensagens discretas por meio de sinais elétricos, magnéticos, eletromagnéticos ou luminosos (fibras óticas) que variam em amplitude e/ou fase e/ou frequência em intervalos fixos de tempo.

O desenvolvimento de sistemas de comunicações digitais nas últimas décadas foi desencadeado pela demanda por transmissão e armazenamento confiáveis de dados em alta velocidade. Este desenvolvimento “digital” se deve acima de tudo à junção de sistemas de comunicações com tecnologia computacional, sendo um fator principal em tais transmissões o controle de erros que podem ocorrer no envio das mensagens devido aos mais diversos tipos de interferências existentes nos canais de comunicações. São estes sistemas de comunicações que possuem fértil interface com a matemática e são, naturalmente, o alvo da maioria das pesquisas atuais em Teoria da Informação e Codificação.

O marco inicial no estudo de esquemas de codificação que minimizem ou corrijam erros provenientes de ambientes ruidosos se deve ao trabalho de Claude Shannon¹ [53]. Entre vários resultados, em 1948, ele demonstrou a possibilidade de se transmitir informação, sem sacrificar a taxa de transmissão, com probabilidade de erro tão baixa quanto se queira (é o *Teorema de Codificação de Canal*). Isto é possível através de um apropriado esquema de codificação.

Um sistema de comunicações digital pode ser esquematizado basicamente do seguinte modo:



sendo:

- **Fonte** (de informação): pode ser uma pessoa ou uma máquina que gera uma onda sonora contínua ou uma sequência de símbolos discretos. Iremos considerar apenas fontes sem memória, ou seja, fontes que emitem mensagens independentes das enviadas anteriormente.

- **Codificador de fonte**: associa as saídas da fonte às sequências $(u_j) = (u_1, \dots, u_k)$ de dígitos (geralmente binários) chamadas de sequências de informação ou palavras-código fonte. Tendo em vista a eliminação de redundâncias, nesta etapa deve-se utilizar o menor número possível de dígitos por unidade de tempo para representar a saída da fonte. Além disso, a saída da fonte deve ser reconstruída a partir da sequência de informação associada sem ambiguidades.

- **Codificador de canal**: transforma a palavra-código fonte (u_j) em uma outra sequência $(v_j) = (v_1, \dots, v_n)$ chamada de palavra-código de canal. Este estágio tem por objetivo inserir redundância à sequência (u_j) com vistas a minimizar a interferência de ruídos no canal.

- **Modulador**: gera formas de ondas que são apropriadas para a transmissão através do canal. O modulador digital transforma símbolos discretos da saída do codificador de canal em um sinal contínuo com duração de T segundos, de tal forma que a amplitude e/ou frequência e/ou fase seja(m) alterada(s) de acordo com a necessidade.

- **Canal**: é o meio físico por onde a informação é transmitida/armazenada. Alguns exemplos de canais são:

(i) Canais de transmissão: linhas telefônicas, meios de propagação de sinais entre antenas de rádio, meios de propagação de sinais entre antenas de microondas, meios de propagação de sinais entre estações terrestres e satélites, fibras óticas, cabos coaxiais, etc.

(ii) Canais de armazenagem: fitas cassetes, disquetes de computador, CD's, memórias de computador, etc.

¹Considerado o fundador da Teoria da Informação e Codificação.

- **Demodulador, decodificador de canal e decodificador de fonte:** fazem o inverso do modulador, codificador de canal e codificador de fonte, respectivamente.

Em um sistema de comunicações eficiente, o que se deseja é obter da sequência recebida (r_j) uma estimativa da sequência de informação ($\hat{u}_j$) “tão próxima quanto possível” de (u_j).

Nas seções subseqüentes, passamos a detalhar cada componente de um sistema de comunicações digital.

1.2 Fontes

Uma fonte de informação gera sinais, como, por exemplo, a voz humana ou uma sequência de dígitos binários como ocorre quando pressionamos qualquer teclado de um computador. As fontes de informação são classificadas como contínuas ou discretas (analógica ou digital), sendo que, no caso de fontes contínuas, o uso de conversores que discretizem os sinais são empregados para que tais sinais possam ser transmitidos via um canal discreto.

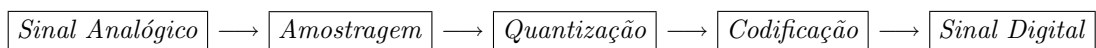
Há três conjuntos básicos que devem ser levados em consideração em um sistema de comunicações digital quando consideramos a fonte de informação:

- $\mathcal{S}$: conjunto chamado de **símbolos da fonte**. Exemplo: o alfabeto usual de letras, números, símbolos gráficos ou amostras de um processo de quantização de uma fonte contínua.

- P : conjunto de distribuição de probabilidades associadas aos elementos de $\mathcal{S}$ (a soma de todas as probabilidades deve ser 1).

- $\mathcal{C}$: conjunto chamado código de fonte, composto pelas palavras-código de fonte (u_j) que são associadas aos elementos de $\mathcal{S}$. Se o conjunto $\mathcal{A}$ de símbolos usados para formar as palavras-código tiver cardinalidade 2 (3, 4, ..., q), chamamos $\mathcal{C}$ de código de fonte binário (ternário, quaternário, ..., q -ário). O conjunto $\mathcal{A}$ é chamado de **alfabeto do código de fonte**.

O processo de discretização de mensagens (ou digitalização de sinais) que comentamos acima obedece o seguinte esquema:



sendo:

- **Amostragem:** etapa na qual o sinal analógico é amostrado em intervalos discretos e uniformes de tempo.

- **Quantização:** cada valor da amostra é identificado com um nível discreto em um conjunto discreto de níveis.

- **Codificação:** os níveis são representados por uma palavra-código (extraída de um código de fonte) que será, a partir de então, a mensagem a ser enviada (sinal digital).

Um exemplo ajudará a ilustrar esse procedimento.

Exemplo

Discretização (digitalização) de sinais contínuos (analógicos) em 16 níveis por meio de 4 dígitos binários (bits), sendo que o último dígito é tal que:

0 $\rightarrow$ voltagem negativa do sinal.

1 $\rightarrow$ voltagem positiva ou nula do sinal.

Os outros 3 dígitos representam 8 níveis, codificados de acordo com a seguinte tabela de representação binária de níveis quantizados:

Nível	Nível em potências de 2	Nº. binário
-8	$1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0$	1110
-7	$1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$	1100
-6	$1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$	1010
-5	$1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$	1000
-4	$0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0$	0110
-3	$0.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$	0100
-2	$0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$	0010
-1	$0.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$	0000
0	$0.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$	0001
1	$0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$	0011
2	$0.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$	0101
3	$0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0$	0111
4	$1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$	1001
5	$1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$	1011
6	$1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$	1101
7	$1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0$	1111

Na quantização mostrada na Figura 1.1, as amostras do sinal são tomadas em intervalos regulares de tempo e a voltagem v (em escala contínua de -8 a 8), associada a cada amostra, é atribuída ao nível $\lceil v \rceil$ (maior inteiro menor que v).

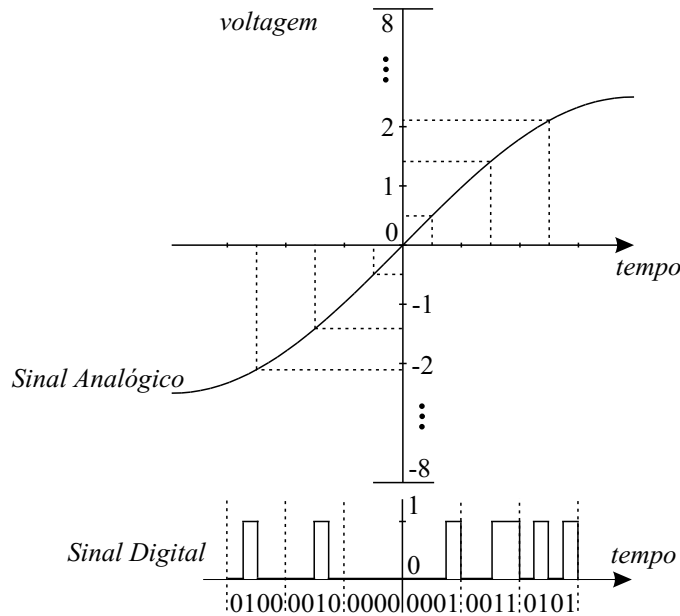


FIGURA 1.1: Exemplo de esquema de amostragem e quantização em conversão analógico-digital.

Naturalmente, erros são introduzidos nos passos de amostragem e quantização e estes são, rigorosamente falando, irreversíveis; porém, podem ser diminuídos através de um processo mais eficiente de amostragem, bem como aumentando-se o número de níveis de quantização. O aumento de níveis implica um aumento no comprimento das palavras-código fonte e, por conseguinte, uma diminuição em termos da taxa efetiva de transmissão. No entanto, a taxa de amostragem não pode ser muito reduzida, sob pena da não reconstituição da mensagem original² no receptor devido ao efeito “aliasing”. Há, portanto, algumas limitações, sendo que uma delas é dada pelo **Teorema da Amostragem**, que enunciaremos abaixo. Para um estudo detalhado deste teorema, há as referências [35], Seção 6.2 (pp. 352-357) e [26], página 248.

²Por meio de Séries de Fourier.

Teorema 1.1 (*Teorema da Amostragem*) Se $x(t)$ é um sinal com faixa de frequência limitada a b hertz, então $x(t)$ pode ser completamente reconstruído a partir de amostras $x(kt_s)$ colhidas com intervalo de amostragem $t_s < \frac{1}{2b}$ segundos. Nessas condições, utilizamos

$$\bar{x}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kt_s) \frac{\sin(2\pi bt - k\pi)}{2\pi bt - k\pi}, \text{ sendo } kt_s \text{ os instantes de amostragem}$$

para reconstruir a onda $x(t)$.

O Teorema 1.1 é utilizado não somente em discretização de fontes, mas também em codificação e modulação de sinais em canais, constituindo importante resultado para o estabelecimento de limitantes para capacidade de canais.

1.3 Codificação de Fonte

Uma abordagem mais detalhada sobre este tópico pode ser encontrada em [5], Capítulo 2 (pp 27-45).

Nesta etapa, estamos interessados em codificar, de maneira eficiente, um símbolo (sinal discretizado) proveniente da fonte, eliminando o máximo possível de redundâncias sem que haja perda de informação. Naturalmente, assim como no processo de discretização do sinal comentado acima, há limitantes para a codificação de fonte. O principal destes limitantes é conhecido como *Teorema de Codificação de Fonte*. Enunciá-lo-emos a seguir; antes, porém, se faz necessário a introdução de um conceito muito importante: a *entropia de uma fonte*.

Definição 1.1 A *entropia* de uma fonte discreta sem memória com símbolos $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_m\}$ e distribuição de probabilidades $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ é dada por

$$H(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^m p_i \log_b \frac{1}{p_i}$$

sendo o bit ($b = 2$) a unidade de medida da entropia por símbolo da fonte.

Observe que $\log_b \frac{1}{p_i}$ é uma medida da quantidade de informação obtida com a ocorrência do símbolo s_i na fonte: se a probabilidade p_i da fonte emitir s_i é alta, a quantidade de informação obtida é baixa; ao contrário, se p_i for baixa, a quantidade de informação é alta. Com efeito, a entropia nada mais é que a medida do conteúdo médio de informação por símbolo emitido pela fonte.

Outro conceito importante é o de *código de fonte unicamente decodificável*, o qual possui a seguinte propriedade: qualquer seqüência de palavras-código de fonte está em correspondência bijetora com uma seqüência de símbolos da fonte. Finalmente, entendemos por *comprimento médio* de um código de fonte a média dos comprimentos das palavras-código que o compõe.

Com estes conceitos, temos condições de enunciar o Teorema de Codificação de Fonte.

Teorema 1.2 (*Teorema de Codificação de Fonte* ou 1^o. Teorema de Shannon) Seja uma fonte discreta, sem memória, de símbolos $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_m\}$ com probabilidades $P = \{p_1, \dots, p_m\}$. Todo código de fonte $\mathcal{C}$, q -ário e unicamente decodificável, possui comprimento médio L limitado inferiormente pela entropia da fonte:

$$L \geq H(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^m p_i \log_q \frac{1}{p_i}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se,

$$p_i = q^{-l_i}$$

sendo $l_1, \dots, l_m$ os correspondentes comprimentos das palavras-código de $\mathcal{C}$.

Quando existe um código de fonte $\mathcal{C}$ satisfazendo a igualdade estabelecida no teorema acima, dizemos que $\mathcal{C}$ está **casado com a fonte**.

Existem procedimentos para a obtenção de códigos de fonte univocamente decodificável com o menor comprimento médio possível para uma determinada fonte. Tais códigos são chamados de ótimos e o principal método de obtenção destes é chamado de **Método de Huffman**. Na referência [5], páginas 41 a 42, encontramos a apresentação e demonstração deste método para códigos binários e nas páginas 45 e 301 (Problema 2.5) para códigos q -ários, $q \neq 2$.

1.4 Codificação de Canal

Uma exposição detalhada desta seção pode ser encontrada em [5], Capítulo 3 (pp. 46-86).

Devido ao fato de os canais de comunicação serem alvo de interferências que podem destruir parte da informação que está sendo transmitida, é necessário que se elaborem esquemas que permitam minimizar as perdas de informação, o que é feito por meio de um **código de canal**, ou seja, as palavras-código proveniente do codificador de fonte são associadas (substituída por meio de uma transformação bijetora) a outras palavras-código (do código de canal), geralmente com redundâncias, mais “robustas” a ruídos, ou seja, palavras-código que permitem reconstituir a informação original por meio da correção de erros introduzidos pelo canal. Tais códigos são chamados **códigos corretores de erro**.

O grande desafio em projetar códigos corretores de erros está relacionado em satisfazer o máximo possível as seguintes imposições:

- (i) A informação possa ser transmitida ou gravada em um ambiente ruidoso o mais rápido possível.
- (ii) Fidelidade na recepção ou reprodução.
- (iii) Custo de implementação/manutenção o mais baixo possível.

Tipos de Códigos para Canal

Usualmente são adotados os seguintes tipos de códigos de canal: de bloco, convolucional (treliça) e “turbinados” (*turbo codes*). Os mais usados são os de bloco e os convolucionais, os quais passaremos a explicar.

Códigos de bloco são caracterizados como sendo aqueles em que as palavras-código têm o mesmo comprimento n . Cada uma das seqüências $(u_j) = (u_1, \dots, u_k)$ está associada de modo bijetor a cada uma das palavras-código. No caso binário, temos 2^k possibilidades de palavras-código distintas. Naturalmente, para assegurar a inserção de redundância nas palavras $(v_j) = (v_1, \dots, v_n)$, impomos $k < n$; sendo assim, dizemos que tal código de bloco possui taxa $R = \frac{k}{n}$ ou parâmetros (n, k) . Acrescentar redundância às palavras-código (v_j) tem por objetivo “proteger” a mensagem de possíveis distúrbios ocasionados por ruídos no canal.

A tabela abaixo mostra um código de bloco³ com taxa $R = \frac{4}{7}$.

³Código binário de Hamming de parâmetros $(7, 4)$.

Código de Fonte	Código de Canal
0000	0000000
1000	1101000
0100	0110100
1100	1011100
0010	1110010
1010	0011010
0110	1000110
1110	0101110
0001	1010001
1001	0111001
0101	1100101
1101	0001101
0011	0100011
1011	1001011
0111	0010111
1111	1111111

Como uma seqüência (u_j) está sempre associada a uma palavra-código (v_j) independente das seqüências ocorridas anteriormente a (u_j) , dizemos que o código de bloco não possui memória.

Códigos convolucionais são caracterizados como sendo aqueles cujas palavras-código possuem comprimentos variáveis e mais, que uma dada seqüência (u_j) depende não apenas da presente seqüência que está sendo codificada, mas das seqüências emitidas anteriormente. Dizemos, portanto, que este tipo de código possui memória.

Para estipular parâmetros semelhantes aos atribuídos aos códigos de bloco para os convolucionais, trabalhamos com blocos de dígitos de comprimento k (seqüência de informação que entra no codificador de canal) e analisamos os blocos de dígitos de comprimento n (seqüência de informação que sai do codificador de canal) que são associados aos blocos que entram. Nessas condições, o código possui taxa $R = \frac{k}{n}$ e, naturalmente, como no caso anterior, devemos ter $n > k$.

Como salientamos acima, o diferenciador dos códigos convolucionais é a memória e esta é caracterizada do seguinte modo: um bloco de comprimento n resultante da codificação de um bloco de comprimento k depende deste último e dos m blocos de k dígitos armazenados no codificador. Estes m blocos de k dígitos são resultados da codificação dos últimos blocos de comprimento k que entraram no codificador. Nestas condições, dizemos que o código convolucional $\mathcal{C}$ possui parâmetros (n, k, m) .

Uma caracterização mais precisa do conceito de memória de um codificador convolucional pode ser encontrada em [45], Capítulo 10 (pp. 287-314).

Um exemplo de um codificador convolucional é ilustrado na Figura 1.2 com $k = 1$, $n = 2$ e $m = 2$.

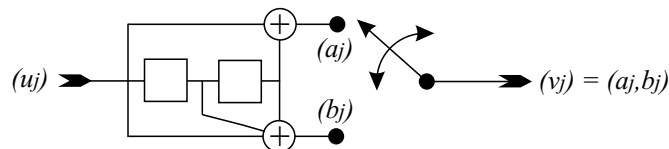


FIGURA 1.2: Codificador convolucional binário de parâmetros $(2, 1, 2)$.

Neste codificador⁴, a seqüência 1 1 0 1 0 0 0 ..., por exemplo, é codificada em 11 10 10 00 01 11 00 ...

O processo de decodificação para códigos convolucionais não é tão simples como no caso dos códigos de bloco devido ao fato da memória introduzida no processo de codificação. O método mais conhecido e utilizado para decodificação de tais códigos é o **Algoritmo de Viterbi**, ou equivalentemente, decodificação por máxima verossimilhança. Uma explanação detalhada de tal algoritmo pode ser conferida em [45], Capítulo 11 (pp. 315-349).

⁴Binário: as somas indicadas no esquema são mod 2.

Teorema de Codificação de Canal

Comentamos que o objetivo da codificação de canal é “proteger” a mensagem de eventuais erros que possam ser introduzidos pelo canal, acrescentando-lhe “redundância”. Do ponto de vista prático, considera-se um canal como ruidoso quando a probabilidade de erro do sistema é tal que: $P_e \geq 10^{-2}$ sem codificação de canal, e $P_e \geq 10^{-5}$ com codificação de canal. Em geral, a confiabilidade do sistema de comunicações deve ser muito alta e, portanto, a codificação de canal deve ser muito eficiente. Uma maneira de reduzir a probabilidade de erro do sistema é acrescentar mais “redundância” à mensagem, ou seja, é aumentar o comprimento das palavras-código; porém, este procedimento não é eficiente, pois diminui a taxa de transmissão. Um exemplo são os chamados **códigos de repetição**⁵. Resta, portanto, procurar códigos tais que as palavras-código tenham comprimento grande de tal forma que a taxa de transmissão seja mantida constante. O *Teorema de Codificação de Canal* aponta um limitante que possibilita esta procura dentro de certas condições.

Suponhamos que cada dígito u_i da sequência $(u_j) = (u_1, \dots, u_k)$ tenha t_f segundos de duração. Suponhamos que cada dígito v_i da palavra-código de canal $(v_j) = (v_1, \dots, v_n)$ tenha t_c segundos de duração. Como cada sequência possui k dígitos, o tempo de duração de uma mensagem é kt_f segundos. De modo análogo, cada palavra-código que sai do codificador tem um tempo de nt_c segundos. Para uma transmissão coerente, devemos ter

$$kt_f = nt_c$$

ou

$$R = \frac{k}{n} = \frac{t_c}{t_f}.$$

Como cada símbolo da fonte $\mathcal{S}$ tem associado uma probabilidade de ocorrência, a quantidade média de informação da fonte é dada pela entropia $H(\mathcal{S})$.

Numa transmissão, definimos a quantidade ou taxa média de informação da fonte por segundo como sendo $\frac{H(\mathcal{S})}{t_f}$. No caso da base do logaritmo ser 2, a unidade associada a $H(\mathcal{S})$ é *bits/símbolo*. Logo, $\frac{H(\mathcal{S})}{t_f}$ tem como unidade *bits/segundo*.

De modo análogo, definimos a **capacidade de canal**⁶ por segundo como sendo $\frac{C}{t_c}$ em que C é medido em *bits/uso do canal*, implicando que $\frac{C}{t_c}$ é medido em *bits/segundo*.

Com estes conceitos, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 1.3 (Teorema de Codificação de Canal ou 2º. Teorema de Shannon) *Seja $\mathcal{S}$ uma fonte discreta sem memória, com entropia $H(\mathcal{S})$. Consideremos um canal discreto sem memória com capacidade C . Sejam $t_f > t_c$ racionais positivos.*

a) *Dado $0 < \varepsilon < 1$ e se*

$$\frac{H(\mathcal{S})}{t_f} \leq \frac{C}{t_c}$$

⁵São códigos de bloco tal que cada palavra-código consiste simplesmente na repetição n vezes de cada dígito da mensagem vinda do codificador de fonte.

⁶A capacidade C de canal discreto é a quantidade máxima de informação que pode ser processada (transportada) pelo canal. É definida por

$$C = \max_{p(x_i)} \left\{ \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=0}^{m-1} p(x_i, y_j) \log_b \frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)} \right\}$$

sendo:

m : cardinalidade do alfabeto das palavras-código na entrada do canal (ou entrada do modulador).

q : cardinalidade do alfabeto das palavras-código na saída do canal (ou saída do demodulador).

$p(x_i, y_j)$: probabilidade conjunta de enviar o símbolo x_i e receber o símbolo y_j no canal.

$p(y_j|x_i)$: probabilidade de se receber y_j dado que x_i foi enviado.

$p(y_j)$: probabilidade de se receber y_j .

então existe um código $\mathcal{C}$ com taxa $R = \frac{t_c}{t_f}$ tal que a probabilidade de erro P_e do sistema de comunicações implementado com este código (denotada por $P_e(\mathcal{C})$) satisfaz

$$P_e(\mathcal{C}) < \varepsilon.$$

Obs.: Vemos que tomando uma seqüência $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de reais entre 0 e 1 tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, existe uma seqüência de códigos $\mathcal{C}_n$, todos com taxa R fixa tal que $P_e(\mathcal{C}_n) \leq \varepsilon_n$.

b) Se

$$\frac{H(\mathcal{S})}{t_f} > \frac{C}{t_c}$$

então para qualquer seqüência $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de reais entre 0 e 1 tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, não existe uma seqüência de códigos $\mathcal{C}_n$ com taxa $R = \frac{t_c}{t_f}$ tal que a probabilidade de erro $P_e(\mathcal{C}_n) < \varepsilon_n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada nas páginas 63 a 77 da referência [5].

Um fato importante a ser mencionado é que a demonstração é **existencial**, ou seja, nela não existe um procedimento algorítmico de como obter esses códigos. Este fato motivou a busca pelos códigos que o 2º Teorema de Shannon afirma existir, culminando com os recentes “turbo codes”: códigos que satisfazem as condições do Teorema 1.3.

Outro fato que deve ser observado é que o teorema diz que a taxa R dos códigos é que deve ser mantida fixa. No caso dos códigos lineares, a cardinalidade do código deve aumentar para cada aumento do comprimento da palavra-código de tal forma que $R = \frac{\log_b |\mathcal{C}|}{n}$ fique constante.

1.5 Modulação

Dependendo do tipo de canal, os dígitos que constituem a palavra-código devem ser associados a formas de ondas apropriadas para transmissão. O responsável por essa transformação é o modulador. A forma de atuação do modulador é através de mudanças na amplitude e/ou frequência e/ou fase em um sinal padrão. Algumas destas técnicas são conhecidas como:

- *PAM* (pulse amplitude modulation) ou *ASK* (amplitude shift-keying): alteração de amplitude.
- *FSK* (frequency shift-keying): alteração de frequência.
- *PSK* (phase shift-keying): alteração de fase.
- *QAM* (quadrature amplitude modulation): alteração de amplitude e fase.

Como estamos interessados em sistemas discretos, o modulador deve gerar um sinal contínuo (análogo) de duração T segundos para cada dígito, ou grupo de dígitos, da palavra-código. Desta forma, a transmissão da seqüência de sinais correspondente às palavras-código é chamada de *transmissão digital*.

Vejamos um exemplo.

Consideremos um modulador que gere um sinal $s_1(t)$ para o dígito 0 e $s_2(t)$ para o dígito 1 num sistema de comunicações binário. Uma escolha para $s_1(t)$ e $s_2(t)$ é

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_c t) \\ &= \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin\left(2\pi f_c t + \frac{\pi}{2}\right); \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s_2(t) &= \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_c t + \pi) \\ &= \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin\left(2\pi f_c t - \frac{\pi}{2}\right); \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

sendo f_c um múltiplo inteiro de $\frac{1}{T}$ e E a energia do conjunto de sinais formado por $s_1(t)$ e $s_2(t)$.

Esta modulação é chamada de *2-PSK*, pois o sinal transmitido é um pulso de onda senoidal cuja fase é $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

A Figura 1.3 ilustra a modulação da palavra-código $(v_j) = (1101000)$.

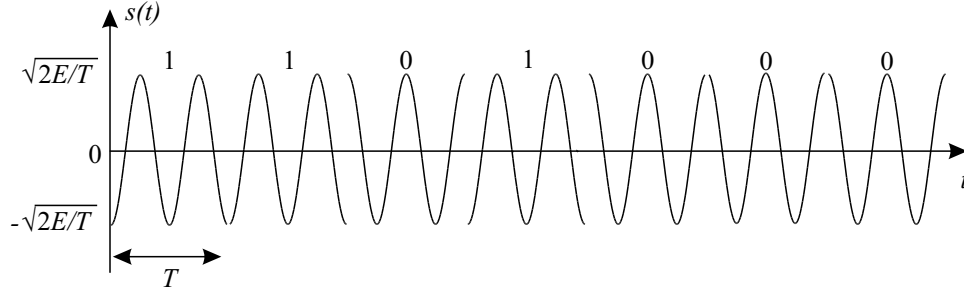


FIGURA 1.3: Modulação 2-PSK da palavra-código 1101000.

A forma de ruído que ocorre num canal de transmissão é decisiva na escolha dos esquemas de modulação e de codificação que devem, entre outras coisas, ser o mais imune possível à forma predominante de ruído existente no canal. Neste sentido, em alguns sistemas de comunicações, procura-se tratar a etapa de codificação de canal e modulação como uma única operação. Esse tipo de tratamento em sistemas de comunicações prosperou com os trabalhos de Ungerboeck [58] em 1982.

1.6 Canais e Ruídos

Iniciaremos com a apresentação de alguns dos canais de transmissão mais comuns:

- *Canal Telefônico*: pode ser composto por linhas telefônicas convencionais, cabos coaxiais, fibras ópticas, microondas e satélites. É um bom meio de transmissão de dados a longa distância, devido à grande rede global desenvolvida nas últimas décadas. No caso de linhas telefônicas convencionais, estas possuem faixa de frequência entre 300 e 3.400 hertz e taxa de transmissão em torno de 56 kbits/segundo.

- *Cabos Coaxiais*: são constituídos por dois condutores concêntricos separados por material isolante. É necessária a instalação de retransmissores de sinais em intervalos de distância pré-determinados devido a um desvanecimento do sinal. Possuem ampla faixa de transmissão, interferência praticamente nula e taxa de transmissão de até 274 Mbits/segundo (retransmissores a 1 km de espaçamento).

- *Fibras Ópticas*: são constituídas, basicamente, por um condutor cilíndrico de vidro ou plástico com índice de refração muito alto no qual um sinal luminoso pode “viajar” dentro deste. Também é necessária a instalação de retransmissores em intervalos de distância pré-fixados. Possuem as mesmas características dos cabos coaxiais.

- *Microondas*: o sucesso deste canal depende da localização das antenas transmissora e receptora. Estas devem estar em locais altos e entre elas não pode haver grandes obstáculos naturais. Em contrapartida, este canal possui taxa de transmissão que pode chegar a 30 Gbits/segundo; porém, está mais suscetível a interferências.

- *Canal de Satélite*: Basicamente, é um canal de microondas. O satélite geoestacionário funciona como um retransmissor de sinais de microondas entre duas antenas. A vantagem deste sistema é a eliminação dos obstáculos naturais e a baixa interferência na transmissão.

Um dos ruídos mais comuns que ocorrem em transmissão de informação é o chamado **ruído gaussiano branco aditivo** (AWGN: *additive white gaussian noise*)⁷, ou seja, se o sinal transmitido é $s(t)$, o

⁷Gaussian: a variável aleatória que descreve o ruído em um canal de transmissão é gaussiana.

White: a densidade espectral de potência (função da variância) não depende da frequência que está sendo utilizada para transmitir os sinais.

Additive: o ruído (que também é um sinal) é adicionado ao sinal transmitido resultando no sinal recebido.

sinal recebido no demodulador é $s(t) + n(t)$, sendo $n(t)$ uma amostra de processo gaussiano com variância σ^2 . É tarefa do demodulador e do decodificador de canal tentar reconstituir a mensagem transmitida.

Se a seqüência na saída do demodulador não depende das seqüências anteriores, dizemos que o conjunto modulador/canal/demodulador é sem memória ou, resumidamente, **canal discreto sem memória** (*DMC: discrete memoryless channel*). Um canal *DMC* é completamente caracterizado pela sua matriz de transição $[p(y_j|x_i)] \equiv [p(j|i)]$, $0 \leq i \leq m-1$, $0 \leq j \leq q-1$, sendo x_i símbolo da entrada do modulador, y_j símbolo da saída do demodulador e $p(j|i)$ a probabilidade de se receber y_j dado que x_i foi enviado.

A Figura 1.4 ilustra dois esquemas representativos para canais *DMC*'s. No primeiro caso, $m = q = 2$, $p = p(1|0) = p(0|1)$ e $1 - p = p(0|0) = p(1|1)$; o canal recebe o nome de **canal simétrico binário** (*BSC: Binary Symmetric Channel*).

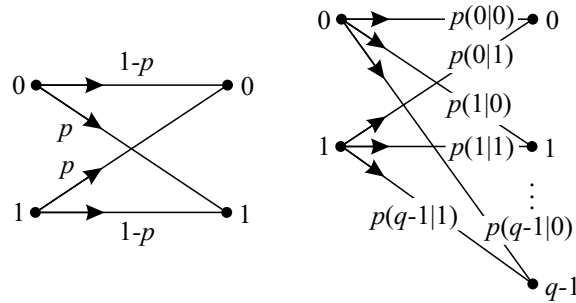


FIGURA 1.4: Esquemas de canais discretos sem memória.

As probabilidades de transição podem ser calculadas conhecendo-se os sinais que serão utilizados, a distribuição de probabilidade do ruído e os níveis de quantização na saída do demodulador.

De um modo geral, podemos classificar demoduladores em dois tipos distintos quanto ao uso de códigos q -ários:

- Quando o número de níveis de quantização na saída do demodulador é q . Neste caso, tanto a entrada como a saída do decodificador são q -árias. Dizemos, neste caso, que o demodulador faz **decisões abruptas** (*hard decisions*).
- Quando o número de níveis de quantização na saída do demodulador é superior a q . Neste caso, a entrada do decodificador é maior que q e a saída do decodificador é q . Dizemos, neste caso, que o demodulador faz **decisões suaves** (*soft decisions*).

A Figura 1.4 ilustra os dois tipos de canais que empregam os demoduladores descritos ($q = 2$).

Quando a saída do demodulador depende das saídas anteriores e não somente do sinal recebido, dizemos que o canal tem memória. A esquematização de um canal com memória, de modo genérico, é um tanto quanto complicada; sendo assim, é comum tratar cada caso de canal com memória isoladamente.

Dois parâmetros importantes em qualquer sistema de comunicações digital são: a taxa de transmissão e a largura de faixa (*bandwidth*) do canal. Discorrámos brevemente sobre estes parâmetros:

Se transmitimos um símbolo codificado a cada T segundos, a taxa de transmissão é definida por $\frac{1}{T}$. Se a taxa do código é $R = \frac{k}{n}$, a taxa de transmissão será $\frac{R}{T}$ dígitos/segundo. Se estamos num canal ruidoso, para minimizar o efeito dos distúrbios, devemos ter uma faixa de freqüência b em torno de $\frac{1}{2T}$ hertz, ou seja, $\frac{1}{T} = 2b$. Logo, $\frac{R}{T} = 2Rb$. Desta forma, em um sistema de comunicações, se desejarmos uma taxa de transmissão maior, devemos aumentar a faixa de freqüência do canal.

Decodificação por Máxima Verossimilhança

Um diagrama de blocos de um sistema de comunicações tal que o ruído é o *AWGN* é mostrado na Figura 1.5.

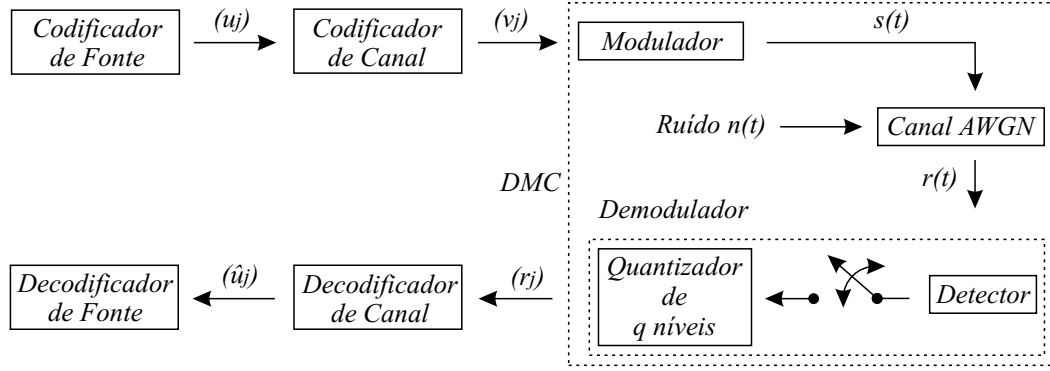


FIGURA 1.5: Diagrama de blocos de um sistema de comunicações em um canal AWGN.

O que se deseja numa transmissão é $(\hat{u}_j) = (u_j)$, ou, equivalentemente, $(\hat{v}_j) = (v_j)$, sendo $(\hat{v}_j)$ a estimativa que o decodificador faz de (r_j) . Portanto, dado (r_j) , numa decodificação devemos minimizar a probabilidade condicional de erro do decodificador, definida por

$$P_e(r_j) = P([(v_j) \neq (\hat{v}_j)] | (r_j)).$$

Num canal *DMC*, isto é equivalente a maximizar

$$P((r_j) | (v_j)) = \prod_i P(r_i | v_i); \quad (r_j) = (r_1, \dots, r_n); \quad (v_j) = (v_1, \dots, v_n).$$

Um decodificador que escolhe $(\hat{u}_j)$ com vistas a maximizar $P((r_j) | (v_j))$ acima é chamado de **decodificador de máxima verossimilhança** (*MLD: maximum likelihood decoding*).

Um resultado importante em canais AWGN é o *Teorema de Capacidade de Canal AWGN*, devido a Shannon que afirma ser possível transmitir informação, de modo confiável, a uma taxa de transmissão $R < C$: capacidade de canal. Eis o enunciado:

Teorema 1.4 (Teorema da Capacidade de Canal AWGN ou $\mathfrak{3}^o$. Teorema de Shannon) *Se o ruído em um canal de transmissão é o AWGN com densidade espectral de potência $\frac{N_0}{2}$ (i.e. $\sigma^2 = N_0 b$), então a capacidade de canal C com faixa de frequência limitada a b hertz para uma dada potência de sinal P watts é dada por*

$$C = b \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_0 b} \right) \text{ bits/segundo.}$$

Este teorema e o Teorema de Codificação de Canal indicam que, dados P : potência média do sinal e b : faixa do canal, é possível transmitir a uma taxa menor que C com probabilidade de erro P_e arbitrariamente pequena a depender do esquema de codificação/decodificação do canal.

O código que viabiliza atingir a probabilidade de erro tão pequena quanto se deseja é tal que o decodificador seja de máxima verossimilhança. Em particular, existem códigos de bloco de comprimento n tal que

$$P_e \leq 2^{-nE_b(R)}$$

e existem códigos convolucionais com memória m tal que

$$\begin{aligned} P_e &\leq 2^{-(m+1)nE_c(R)} \\ &= 2^{-n_A E_c(R)} \end{aligned}$$

sendo $n_A = n(m+1)$; $E_b(R)$ e $E_c(R)$ funções positivas de R para $R < C$ que são completamente determinadas pelas características do canal.

Convém relembra que o Teorema de Codificação de Canal de Shannon afirma a existência de códigos com as características acima, porém não fornece subsídios para construí-los.

Tipos de Erros

Em um canal sem memória, há independência dos símbolos transmitidos, ou seja, o ruído afeta cada símbolo transmitido independentemente. Como exemplos de canais deste tipo, podemos citar canais de satélite.

Como o erro pode ocorrer aleatoriamente numa sequência transmitida, estes canais são também chamados de **canais de erro aleatório** e o código utilizado para correção de erros desse tipo é chamado de **código corretor de erro aleatório**. Este é o 1º. tipo de código.

O 2º. tipo de código é o **código corretor de erro tipo surto** (*burst*), empregado em canais com memória, ou seja, canais que são caracterizados por dependência entre os símbolos transmitidos. Estes canais também são chamados de canais de erro tipo surto e são esquematizados, como, por exemplo, na Figura 1.6.

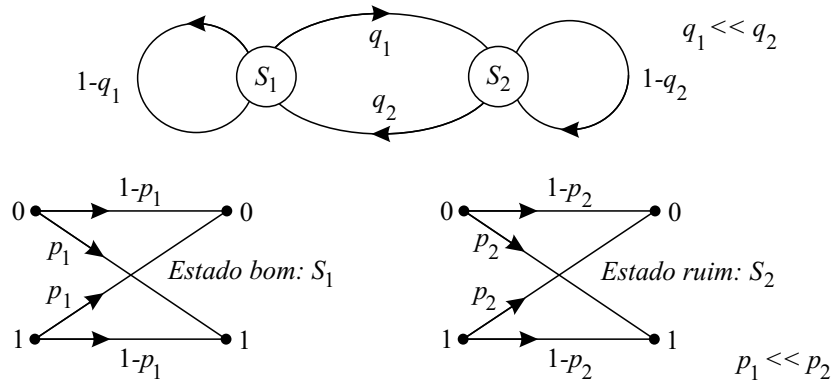


FIGURA 1.6: Exemplo de esquemas para canais de erro tipo surto.

Este canal possui 2 estados (estágios): um “estado bom” com probabilidade de erro $p_1 \approx 0$ e um “estado ruim” com probabilidade de erro $p_2 \approx 0,5$. Quando ocorre um surto, o canal passa a operar no estado ruim. Como exemplo, podemos citar interferências (linhas cruzadas) em linhas telefônicas.

Estratégias de Controle de Erro

Quando a transmissão de símbolos é feita em uma direção (*transmissor* $\rightarrow$ *receptor*, mas não *receptor* $\rightarrow$ *transmissor*), códigos corretores são utilizados para que os erros sejam automaticamente corrigidos no receptor. É o sistema *FEC* (*Forward Error Correction*). Por exemplo, os códigos corretores para recepção de informação gravada em fita cassete são do tipo *FEC*.

Quando a transmissão de símbolos é feita em duas direções (*transmissor* $\leftrightarrow$ *receptor*), utilizam-se códigos detetores que se valem do sistema *ARQ* (*Automatic Repeat Request*), ou seja, quando erros são detetados na recepção, é requisitado (aqui entra *receptor* $\rightarrow$ *transmissor*) um reenvio da mensagem até que a recepção esteja correta. Como exemplo de transmissões em duas vias, podemos citar os canais telefônicos.

Existem dois tipos de sistemas *ARQ*: contínuo e “para e espera”. Os *ARQ*’s contínuos são mais eficientes que os “para e espera”, porém seu custo de implementação é maior. Canais de satélite constituem exemplos que podem utilizar códigos detetores com o sistema *ARQ* contínuo.

1.7 Representação Geométrica de Sinais e Dimensão

Palavras-código e sinais podem ser representados por meio de esquemas compostos por pontos e vértices de grafos em espaços de curvatura constante. Ao conjunto de tais pontos chamamos indistintamente de **constelação de sinais**. Um exemplo trivial são os códigos de bloco para canais: supondo os parâmetros (n, k) , toda palavra-código $(v_j) = (v_1, \dots, v_n)$ é um vetor em $\mathbb{R}^n$. Naturalmente, em estudos

sobre codificação, nem sempre esta representação no espaço euclidiano n -dimensional contínuo com a métrica usual é adequada, uma vez que este esquema nem sempre representa com perfeição uma das métricas discretas possíveis sobre o código.

Doravante, concentraremos a atuação no desenvolvimento de representações geométricas dos principais esquemas de modulação de sinais mencionados anteriormente.

M-PAM: Pulse Amplitude Modulation ou M-ASK: Amplitude Shift-Keying

Este esquema de modulação é linear e composto por M sinais que possuem representação na reta real $\mathbb{R}$. Sua representação em termos de sinais é dada por

$$s_j(t) = (2j - 1 - M) \frac{d_{\min}}{2} \varphi(t)$$

sendo que:

(i) $0 \leq t \leq T$; (T é o tempo de duração do sinal)

(ii) $j = 1, \dots, M$;

(iii) $d_{\min}$ é um real positivo;

(iv) $\varphi(t)$ é um sinal portador. Em geral, toma-se $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}$.

Desta forma, $\varphi(t)$ pode ser pensado como uma “base” para representar os sinais em $\mathbb{R}$. Assim,

$$\varphi(t) \equiv \vec{e}_1 = 1$$

$$s_j(t) \equiv \mathbf{s}_j = (2j - 1 - M) \frac{d_{\min}}{2}$$

sendo, portanto, $d_{\min}$ a distância euclidiana mínima entre os sinais. A Figura 1.7 ilustra o 4-PAM e o 5-PAM com $d_{\min} = 2$ em $\mathbb{R}$.

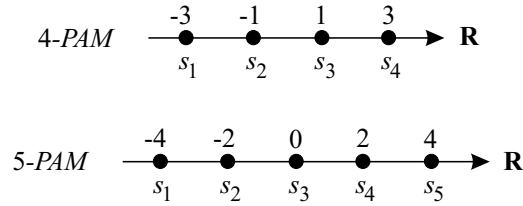


FIGURA 1.7: Representação geométrica do esquema de modulação 4-PAM e 5-PAM.

M-PSK: Phase Shift-Keying

Este esquema, amplamente utilizado, é composto por M sinais representados por

$$\begin{aligned} s_j(t) &= \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M}(j-1)\right) \\ &= \left(\sqrt{E} \cos\left(\frac{2\pi}{M}(j-1)\right)\right) \left(\sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f_c t\right) - \left(\sqrt{E} \sin\left(\frac{2\pi}{M}(j-1)\right)\right) \left(\sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\pi f_c t\right) \end{aligned}$$

sendo que:

(i) $0 \leq t \leq T$; (T é o tempo de duração do sinal)

(ii) $j = 1, \dots, M$;

(iii) f_c é um múltiplo inteiro de $\frac{1}{T}$;

(iv) E é a energia do sinal: $E = \frac{d_{\min}^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{M}}$, sendo $d_{\min}$ um real positivo.

Pelo modo como foram definidos os sinais, percebemos que o nome dado a esse esquema (*PSK*) faz sentido: o que diferencia um sinal do outro é justamente a fase; portanto, um modulador do tipo *PSK* deve fazer mudanças de fase a cada T segundos em um sinal portador (*carrier*) de frequência f_c e amplitude $\sqrt{\frac{2E}{T}}$. Na seção sobre modulação, por meio da Figura 1.3, ilustramos essa mudança de fase via um exemplo utilizando o *2-PSK*.

Percebemos que as funções

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f_c t \\ \varphi_2(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\pi f_c t\end{aligned}$$

podem ser tomadas como uma “base” para o sinal $s_j(t)$, ou seja,

$$s_j(t) = \left(\sqrt{E} \cos \left(\frac{2\pi}{M} (j-1) \right) \right) \varphi_1(t) - \left(\sqrt{E} \sin \left(\frac{2\pi}{M} (j-1) \right) \right) \varphi_2(t).$$

Podemos representar esses sinais geometricamente em $\mathbb{R}^2$. Um sinal $\mathbf{s}_j \equiv s_j(t)$ do tipo *PSK* terá por coordenadas

$$\mathbf{s}_j = \left(\sqrt{E} \cos \left(\frac{2\pi}{M} (j-1) \right), -\sqrt{E} \sin \left(\frac{2\pi}{M} (j-1) \right) \right)$$

e, portanto, está sobre um círculo de raio $\sqrt{E}$. O valor $d_{\min}$, introduzido no item (iv) acima, é a distância euclidiana mínima entre os sinais. A Figura 1.8 ilustra uma constelação do tipo *8-PSK* em $\mathbb{R}^2$.

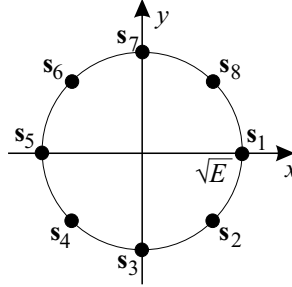


FIGURA 1.8: Representação geométrica do esquema de modulação 8-PSK.

m^2 -QAM: Quadrature Amplitude Modulation

Este esquema de modulação possui diversas maneiras de representação. Consideraremos o caso mais empregado na prática, cujo esquema consiste de m^2 pontos que podem ser representados por uma constelação quadrada de $m \times m$ pontos.

O sinal, neste caso, é dado por

$$s_{ij}(t) = \frac{d_{\min}}{\sqrt{2T}} a_i \cos 2\pi f_c t + \frac{d_{\min}}{\sqrt{2T}} b_j \sin 2\pi f_c t$$

sendo que:

- (i) $0 \leq t \leq T$; (T é o tempo de duração do sinal)
- (ii) $i, j = 1, \dots, m$;

- (iii) f_c é um múltiplo inteiro de $\frac{1}{T}$;
- (iv) $d_{\min}$ é um real positivo;
- (v) os elementos (a_i, b_j) compõem a matriz $m \times m$ dada por

$$\begin{bmatrix} (-m+1, m-1) & (-m+3, m-1) & \cdots & (m-1, m-1) \\ (-m+1, m-3) & (-m+3, m-3) & \cdots & (m-1, m-3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-m+1, -m+1) & (-m+3, -m+1) & \cdots & (m-1, -m+1) \end{bmatrix}_{ji}. \quad (1.1)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f_c t \\ \varphi_2(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\pi f_c t \end{aligned} \quad (1.2)$$

formam uma “base” para o sinal $s_{ij}(t)$, ou seja,

$$s_{ij}(t) = \frac{d_{\min}}{2} a_i \varphi_1(t) + \frac{d_{\min}}{2} b_j \varphi_2(t).$$

A representação geométrica é, portanto, bidimensional e os sinais $\mathbf{s}_{ij} \equiv s_{ij}(t)$ possuem coordenadas

$$\mathbf{s}_{ij} = \left(\frac{d_{\min}}{2} a_i, \frac{d_{\min}}{2} b_j \right)$$

sendo $d_{\min}$ a distância euclidiana mínima entre os sinais. A Figura 1.9 ilustra um exemplo de representação do 16-QAM com $d_{\min} = 2$ em $\mathbb{R}^2$.

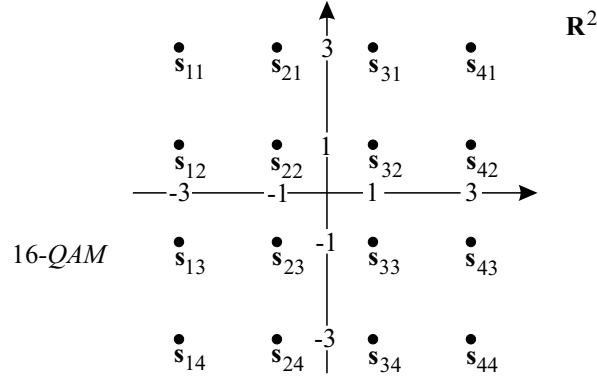


FIGURA 1.9: Representação geométrica do esquema de modulação 16-QAM.

Representação da estrutura aditiva do ruído de canal AWGN

Os sinais em um esquema de modulação são fisicamente a entrada do canal. Conforme mencionado, devido às interferências que podem ocorrer durante o processo de transmissão, o sinal recebido no demodulador pode não ser exatamente o enviado. Neste ponto, entra a análise do tipo de canal utilizado e a natureza do ruído que pode ser bastante variada, dependendo do sistema de comunicação. Suponhamos que os sinais em uma constelação sejam equiprováveis, ou seja, todos os sinais têm a mesma probabilidade de serem escolhidos para a transmissão e que o ruído $n(t)$ seja do tipo AWGN. Devido ao comportamento aditivo do ruído, quando o sinal $\mathbf{s}_j \equiv s_j(t)$ é transmitido, o sinal recebido no intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$ é dado por

$$r(t) = s_j(t) + n(t)$$

sendo $n(t)$ uma amostra de um processo aleatório gaussiano estacionário com média $\mathbf{0}$ e variância σ^2 . Se o sinal $r(t)$ estiver na região de decisão (região de Voronoi) do sinal $s_j(t)$, a decisão no demodulador será pelo sinal $s_j(t)$, não acarretando erro de transmissão. A Figura 1.10 ilustra um possível sinal recebido $\mathbf{r}$ (que está na região de Voronoi V_8 de s_8) em um 8-PSK quando o sinal s_8 é enviado.

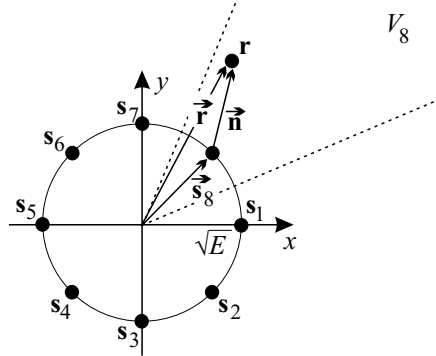


FIGURA 1.10: Representação geométrica do ruído $n(t)$ AWGN sobre o sinal $s_8(t)$ em um 8-PSK.

Dimensão e comparação de desempenho entre constelações de diferentes dimensões.

A dimensão do espaço na qual uma constelação de sinais está inserida afeta, de modo direto, as propriedades geométricas da constelação, o que pode refletir diretamente no desempenho do sistema de comunicações, como, por exemplo, a probabilidade de erro. Discorramos um pouco sobre a questão da dimensão no quesito comparação de desempenho entre constelações. A taxa que será definida a seguir (veja [51], Subseção 5.2.10, pp. 282-284) leva em conta a quantidade de informação por dimensão numa transmissão e não considera a distância mínima entre sinais da constelação, o que a torna um tanto deficiente para comparações mais criteriosas. Outros parâmetros de comparação de constelações de sinais envolvendo dimensão podem ser encontradas em [9], Seção 5.6 (pp. 242-249).

Suponhamos que seja possível uma seqüência de informação composta por k dígitos q -ários em T segundos a uma taxa de R dígitos por segundo. Logo, para transmitir um dígito, gastamos o tempo de $\frac{1}{R}$ (segundos por dígito). Para enviar os k dígitos de informação, gastamos $k \frac{1}{R} = T$ segundos, ou seja, temos a relação

$$k = RT.$$

A quantidade possível de seqüências q -árias de comprimento k é dada por q^k . Chamemos esta quantidade de M .

Temos, portanto, a relação

$$M = q^k = q^{RT}.$$

Logo,

$$\log_q M = \log_q q^{RT} \implies RT = \log_q M \implies R = \frac{1}{T} \log_q M.$$

Quando as M palavras são equiprováveis, a taxa $R = \frac{1}{T} \log_q M$ dígitos/segundo é chamada de **taxa de informação**.

Essas mensagens podem ser representadas geometricamente por meio de uma constelação de sinais imersa em um espaço euclidiano n -dimensional. Mais ainda: estes dígitos podem ou não ser distribuídos, ocupando posições associadas às dimensões do espaço. Por exemplo, se tomarmos $M = 4$ mensagens binárias com comprimento $k = 2$: 00; 01; 10; 11; estas mensagens podem estar dispostas num espaço unidimensional:

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 00 & 01 & 10 & 11 \end{array}$$

e, deste modo, os dois dígitos da mensagem estão relacionados com a dimensão 1 do espaço. Mas, estas mensagens também podem estar dispostas em um espaço bidimensional:

$$\begin{array}{ccc} 01 & \bullet & \bullet & 11 \\ & & & \\ 00 & \bullet & \bullet & 10 \end{array}$$

e, deste modo, cada dígito da mensagem está relacionado com uma dimensão do espaço.

Escolhida uma representação geométrica, durante a transmissão definimos a quantidade d de dimensões disponíveis por segundo. Durante uma transmissão eficiente de uma mensagem (T segundos), todas as n dimensões são usadas. Logo, nesta transmissão, devemos ter a relação

$$n = dT \left(\frac{\text{dim}}{\text{s}} = \text{dim} \right).$$

Logo,

$$d = \frac{n}{T} (\text{dim/s}).$$

A partir desta consideração, podemos definir a taxa R_n de transmissão de dígitos por dimensão

$$R_n = \frac{R}{d} = \frac{\frac{1}{T} \log_q M}{\frac{n}{T}} = \frac{1}{n} \log_q M \left(\frac{\text{díg/s}}{\text{dim/s}} = \frac{\text{díg}}{\text{dim}} \right).$$

Portanto,

$$R_n = \frac{1}{n} \log_q M.$$

Esta taxa é útil para efeitos comparativos. Dois sistemas de comunicações comparáveis devem possuir, entre outras coisas, a mesma taxa de dígitos por dimensão. Assim, por exemplo, 25 pontos no $\mathbb{R}^4$ associados a mensagens binárias possuem

$$R_4 = \frac{1}{4} \log_2 25 = \frac{1}{2} \log_2 5$$

dígitos por dimensão, enquanto 25 pontos no $\mathbb{R}^2$ possuem

$$R_2 = \frac{1}{2} \log_2 25 = \log_2 5$$

dígitos por dimensão.

Esta taxa pode também ser vista como taxa de informação por dimensão. Vemos, portanto, que no exemplo acima, existe mais informação por dimensão no sistema de comunicações em 2 dimensões que no sistema de comunicações em 4 dimensões.

1.8 Constelações de Sinais, Superfícies Quocientes e Espaços Hiperbólicos

1.8.1 Códigos de Grupo e Códigos Geometricamente Uniformes

Conforme esboçado na seção anterior, podemos representar códigos e esquemas de modulação por meio de uma constelação de sinais no espaço euclidiano. Na realidade, vários códigos podem ser representados dessa forma.

Pretendemos chamar a atenção para o estudo de constelações de sinais em superfícies compactas inspirados por dois artigos muito importantes na Teoria da Informação e Codificação: o de David Slepian, publicado em 1968 [54] e o de David Forney, publicado em 1991 [32].

Slepian introduziu o conceito de **Códigos de Grupo** para canais perturbados por ruídos do tipo *AWGN*. Neste trabalho, estudam-se constelações de sinais em $\mathbb{S}^n$ obtidas pela órbita de um ponto $p \in \mathbb{S}^n$, por meio de um grupo ortogonal $G \subset \mathcal{O}(n)$ de matrizes⁸.

Propriedades de simetria das constelações do tipo código de grupo, como:

(i) homogeneidade de suas regiões de Voronoi⁹ que garante o mesmo número de vizinhos para cada ponto e mesma probabilidade de erro em canal *AWGN*;

(ii) maior distância mínima ($d_{\min}$) possível entre pontos, são vitais para um bom desempenho do código. Aliás, as propriedades de tais constelações de sinais foram, e são, fontes de vários estudos que passaremos a apresentar. Este trabalho pioneiro teve diversos progressos, como, por exemplo, [55], publicado por Slepian, em 1971, que estende o estudo sobre distância mínima em códigos de grupo, iniciado anteriormente por ele próprio. Em 1972, Biglieri e Elia [12] avançam parcialmente sobre a questão da existência de códigos de grupo para M e n fixados, questão que, em 1977, é praticamente liquidada com o trabalho de Downey e Karlof [28]. Em 1976, Biglieri e Elia [13] fazem um estudo sobre códigos de grupo cíclicos ($G \subset \mathcal{O}(n)$ é cíclico), ressaltando a importância da ciclicidade de G em processos de geração de constelações por meio de programação linear. Em 1991, o conceito de constelações de sinais associadas (casadas) a grupos é estendida por Loeliger [47] e, neste mesmo ano, surge mais um trabalho pioneiro na área de representações geométricas de códigos por meio de constelações de sinais. Trata-se do segundo trabalho que comentamos acima, de Forney, que apresenta o conceito de *códigos geometricamente uniformes* definidos para conjunto de sinais de $\mathbb{R}^n$. Os trabalhos [25] e [24] foram desenvolvidos a partir da extensão deste conceito a espaços métricos mais gerais como colocamos a seguir.

Definição 1.2 *Sejam $(\mathbb{M}, d)$ um espaço métrico, $\mathcal{C}$ uma constelação de sinais (pontos) em $\mathbb{M}$ e $\mathcal{S}$ o grupo de simetrias de $\mathcal{C}$ em $\mathbb{M}$. Dizemos que $\mathcal{C}$ é um **código** (ou constelação) **geometricamente uniforme** se $\mathcal{S}$ age transitivamente em $\mathcal{C}$, ou seja, se dados quaisquer dois pontos p e q em $\mathcal{C}$, existe uma isometria φ em $\mathcal{S}$ tal que $\varphi(p) = q$.*

Uma consequência imediata de tal definição é que as regiões de Voronoi dos pontos de $\mathcal{C}$ são todas congruentes em $\mathbb{M}$.

Nossa ênfase será o estudo das propriedades simétricas das constelações de sinais utilizadas em Teoria da Informação e Codificação, uma vez que todo sistema digital de comunicações eficiente possui códigos com boas propriedades de simetria, como regiões de Voronoi congruentes e máxima distância mínima possível.

Finalizando as citações nessa linha, temos recentemente o trabalho de Biglieri, Karlof e Viterbo [14] que estabelece, sob certas restrições, uma equivalência entre códigos de grupo e *códigos de permutação*, que são códigos que podem ser associados a grupos de permutação.

1.8.2 Por que Superfícies Quocientes com Curvatura Constante?

O interesse em estudar constelações de sinais em superfícies quocientes surge com a possibilidade de representação e estudo de tais constelações em um espaço métrico bidimensional de curvatura constante. Eis a definição de superfície quociente:

Definição 1.3 *Sejam $(\mathbb{M}, d_{\mathbb{M}})$ espaço métrico bidimensional de curvatura constante e G um grupo topológico discreto de isometrias de $\mathbb{M}$. Consideremos a seguinte relação de equivalência $\sim$ sobre os pontos de $\mathbb{M}$:*

$$p \sim q \iff \exists \varphi \in G \text{ tal que } \varphi(p) = q$$

⁸Uma constelação de pontos com cardinalidade M obtida pela órbita de $p \in \mathbb{S}^n$ por $G \subset \mathcal{O}(n)$ é um código de grupo e é indicado por $\{M, n\}$ ou $[M, n]$.

⁹Seja p pertencente ao espaço métrico $(\mathbb{M}, d)$ e G um grupo de isometrias agindo em $\mathbb{M}$. A região de Voronoi de p é o conjunto V_p tal que:

$$V_p = \{r \in \mathbb{M} : d(r, p) \leq d(r, q), \forall q \in Gp\}.$$

No capítulo 3, apresentamos a definição de região de Voronoi formalmente.

e denotemos a classe de equivalência de $p \in \mathbb{M}$ pela relação $\sim$ por $[p]$. Ao conjunto

$$\frac{\mathbb{M}}{G} = \{[p] : p \in \mathbb{M}\}$$

denotamos **superfície quociente** $\mathbb{M}$ por G .

A distância $d_{\mathbb{M}}$ de $\mathbb{M}$ induz uma distância $d_{\frac{\mathbb{M}}{G}}$ no quociente:

$$d_{\frac{\mathbb{M}}{G}}([p], [q]) = \min \{d_{\mathbb{M}}(p, q) : p \in [p] \text{ e } q \in [q]\}$$

ou seja, o quociente é um espaço métrico: $\left(\frac{\mathbb{M}}{G}, d_{\frac{\mathbb{M}}{G}}\right)$; e é este fato que permite o estudo de constelações quocientes em $\mathbb{M}$, comentado acima.

Podemos, ainda, pensar em uma constelação de sinais sobre uma superfície quociente (compacta ou não) como sendo gerada por um grupo Γ tal que $G \subset_{sg} \Gamma$; sendo assim, um sinal da constelação é visto

como uma classe de equivalência, ou seja, como um elemento (classe lateral) de $\frac{\Gamma}{G}$. Este procedimento possui diversas vantagens. Listemos algumas delas:

(i) uma constelação, apesar de estar topologicamente em uma superfície, possui uma representação ou visualização sobre uma região fundamental de G (no espaço de curvatura constante original), o que possibilita lidar com “ferramentas convencionais” para estudar constelações de sinais em ambientes mais complicados.

(ii) é possível acrescentar propriedades algébricas e geométricas, como ciclicidade e homogeneidade, a constelações que, em seu ambiente natural, não as possuem. Por exemplo, constelações do tipo *QAM* podem ser alocadas sobre a superfície de um toro plano e adquirir ciclicidade como no caso de constelações *PSK*, proposto em [24].

(iii) é possível mergulhar isometricamente¹⁰ superfícies quocientes de curvatura constante em espaços euclidianos ou hiperbólicos. Esse procedimento permite a geração de constelações de sinais nesses espaços com todas as propriedades métricas atreladas à sua representação em uma região fundamental de G .

Temos estudado particularmente constelações de sinais sobre o toro plano (homogêneo): [1], [23], [24] e [25]. Também [37] e [34] apontam outras propriedades advindas da alocação de sinais sobre um toro topológico, aqui considerado como superfície tridimensional. Destaque especial para o mergulho isométrico do toro plano em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, o que permite a obtenção de códigos de grupo cíclicos (que são chamados de *Slepian-type groups* nos trabalhos citados) com cardinalidade $p^2 + q^2$, p e q primos entre si.

1.8.3 Por que o Espaço Hiperbólico?

O trabalho com constelações de sinais em espaços hiperbólicos está se mostrando um grande desafio perante a diversidade de constelações interessantes sob o ponto de vista de Teoria da Informação e Codificação. Um dos principais motivos para seu estudo reside no fato de que todas as superfícies compactas de gênero $g \geq 2$ diferenciáveis, os g -toros, admitem uma métrica hiperbólica (homogênea com curvatura constante negativa), ou seja, podem ser obtidas como quociente do plano hiperbólico $\mathcal{H}^2$ por algum grupo discreto de isometrias próprias: os grupos fuchsianos. Além disso, assim como no caso do toro, é possível (mas não trivial) o mergulho isométrico de qualquer g -toro em $\mathbb{S}^8$; [16] e [17]. Aqui, é importante lembrar o resultado de Nash [50] que afirma a existência de mergulho isométrico C^∞ para qualquer variedade riemanianna diferenciável compacta de dimensão n em $\mathbb{R}^{\frac{n(3n+11)}{2}}$ e para não-compacta em $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)(3n+11)}{2}}$.

Essa diversidade de constelações permite, por exemplo, a alocação de sinais que estão sobre os vértices de um grafo sobre um g -toro tal que exista uma única curva geodésica, composta por arestas deste grafo, que contenha todos os sinais da constelação. Estas curvas são os “nós” sobre os g -toros. Ademais, é possível colocar constelações com cardinalidade potência de dois com esta propriedade e ainda podendo ser trabalhadas como “camadas” de *PSK*’s de diferentes energias (raios). Estas possibilidades, que

¹⁰O mergulho isométrico é uma aplicação injetora que é homeomorfismo sobre sua imagem e que preserva distâncias.

apresentaremos com mais detalhes no Capítulo 4, advêm do fato de $\mathcal{H}^n$ não ser um espaço vetorial (compatível com sua métrica), consequência essa devida ao fato do 5º. Postulado de Euclides não ser válido nessa geometria.

Por outro lado, a infinidade de geodésicas por um ponto, paralelas a outra geodésica dada, traz desvantagens para o uso prático dessas constelações. A principal delas, sem dúvida, é a dificuldade em caracterizarmos o ruído que afeta um “canal hiperbólico”. Devido à ausência da estrutura vetorial compatível com a métrica, não podemos falar aqui em ruídos gaussianos aditivos no sentido estrito do caso euclidiano. Uma tarefa não trivial é precisar as propriedades do ruído que afetariam, na prática, um sistema de comunicações utilizando constelações de sinais regidas à métrica hiperbólica. O mais provável em termos práticos, é que a ação do ruído sobre os sinais da constelação com a métrica hiperbólica tenha, dentro de certas condições, comportamento similar ao *AWGN*. Inspirados por estes apontamentos, realizamos o estudo da probabilidade de erro em constelações hiperbólicas, “modelando” o ruído como gaussiano, porém adaptado ao novo ambiente. Esse ruído, que chamamos simplesmente de *gaussiano hiperbólico* é estudado em detalhes no Capítulo 3 do presente trabalho, dando continuidade ao trabalho de Brandani [19], que aborda aspectos deste problema em dimensão 2. Neste capítulo, pudemos desenvolver, inclusive, um estimador para a probabilidade de erro.

Quanto ao enfoque das aplicações da geometria hiperbólica no campo prático da Teoria da Informação e Codificação, devemos ressaltar que, tanto constelações de sinais, quanto a probabilidade de erro, não são assuntos totalmente alheios a teoria. Um exemplo importante é o fato de que as funções distribuição hiperbólica de probabilidade de erro para dimensão maior ou igual a 2, que será apresentada posteriormente, é uma extensão natural da função distribuição hiperbólica de dimensão 1 e esta, é exatamente a distribuição conhecida como *log-normal* amplamente utilizada para fins práticos em sistemas móveis de comunicações submetidos a canais com desvanecimento (*fading channels*), conforme podemos constatar em [9], Capítulo 13 (pp. 686-724). Outra aplicação muito interessante dos modelos euclidianos planos de Poincaré para a geometria hiperbólica está em *linhas de transmissão*, em que as conhecidas *Cartas de Smith* são representadas por determinados conjuntos de geodésicas esboçadas nos modelos supra-citados. Podemos verificar essa interessante aplicação em [40], Capítulo 2, Seções 16 e 17 (pp. 104-112).

Capítulo 2

Tópicos Sobre Geometria Hiperbólica

Este capítulo tem por objetivo a apresentação das principais definições e resultados da Geometria Hiperbólica, principalmente aqueles relacionados aos próximos capítulos. Nossa abordagem não traz demonstrações. Estas podem ser encontradas nas referências citadas durante o seqüenciamento dos resultados que ora apresentamos. No entanto, a exposição está mais detalhada se comparada à que foi realizada no Capítulo 1 com relação à Teoria da Informação e Codificação, uma vez que serão utilizados resultados muito específicos desta área. Devido a este enfoque, a sucessão de conceitos e resultados apresentados não segue a abordagem tradicional, baseada no encadeamento das idéias envolvidas nas demonstrações.

Textos de geometria hiperbólica que contém de forma complementar os tópicos aqui apresentados são, por exemplo: [31]; [8]; [39]; [3]; [52] e [57]. Para um estudo detalhado da geometria hiperbólica sob o ponto de vista de variedade riemanniana de curvatura seccional constante, há as referências [60]; [21], Capítulos 0 a 4 e 8; e [33], Capítulos I a III.

2.1 Variedades Riemannianas

O assunto desta seção pode ser aprofundado em [21], Capítulos 0 e 1 (pp. 1-47) e [33], páginas 52 a 68.

O estudo de geometria hiperbólica e superfícies compactas feito adiante se baseia nos modelos euclidianos de Poincaré para esta geometria. Estes modelos são exemplos de variedades diferenciáveis, daí a necessidade de um estudo mais detalhado deste conceito.

A busca por ferramentas que estenda os métodos do cálculo diferencial a espaços mais gerais que $\mathbb{R}^n$ gerou a noção de variedade diferenciável dada a seguir.

Definição 2.1 *Uma **variedade diferenciável** de dimensão n é um conjunto $\mathbb{M}$ munido de uma família de aplicações injetoras $\sigma_\alpha : A_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{M}$, sendo α pertencente a um conjunto de índices e A_α abertos de $\mathbb{R}^n$ satisfazendo:*

- (i) $\bigcup_\alpha \sigma_\alpha(A_\alpha) = \mathbb{M}$.
- (ii) *Para todo par α e β com $\sigma_\alpha(A_\alpha) \cap \sigma_\beta(A_\beta) = V \neq \emptyset$, os conjuntos $\sigma_\alpha^{-1}(V)$ e $\sigma_\beta^{-1}(V)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e a aplicação $\sigma_\beta^{-1} \circ \sigma_\alpha$ é diferenciável em $\sigma_\alpha^{-1}(V)$.*
- (iii) *A família $\{(A_\alpha, \sigma_\alpha)\}$, chamada de estrutura diferenciável, é maximal em relação às condições (i) e (ii) acima.*

O par $(A_\alpha, \sigma_\alpha)$ é chamado de **sistema de coordenadas** (ou parametrização) de $\mathbb{M}$ nos pontos $p \in \sigma_\alpha(A_\alpha)$. Vemos, assim, que os conjuntos $\sigma_\alpha(A_\alpha)$ funcionam como vizinhanças de seus pontos, fazendo com que $\mathbb{M}$ seja uma “colagem suavizada” destes conjuntos. Noções como diferenciabilidade e espaços

tangentes a pontos p em $\mathbb{M}$, indicados por $T_p\mathbb{M}$, podem ser definidas fazendo uso de seus “análogos” no $\mathbb{R}^n$ transportados para $\mathbb{M}$ via as aplicações σ_α ’s.

O próximo passo importante para se lidar de forma mais concreta com variedades diferenciáveis é torná-las um “espaço métrico”, munindo-as de uma métrica riemanniana, definida a seguir.

Definição 2.2 Uma **métrica riemanniana** (ou estrutura riemanniana) numa variedade diferenciável $\mathbb{M}$ de dimensão n é uma aplicação

$$\begin{aligned} g : \mathbb{M} &\longrightarrow \left\{ \mathcal{F} \left((T_q\mathbb{M})^2 \right) \right\}_{q \in \mathbb{M}} \\ p &\longmapsto g_p \end{aligned}$$

sendo $\mathcal{F} \left((T_q\mathbb{M})^2 \right)$ conjunto das aplicações reais com domínio $(T_q\mathbb{M})^2$ e

$$\begin{aligned} g_p : T_p(\mathbb{M}) \times T_p(\mathbb{M}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle_p \end{aligned}$$

sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ produto interno (forma bilinear simétrica positiva definida) em $T_p(\mathbb{M})$ que varia diferenciavelmente em $\mathbb{M}$ no seguinte sentido:

Se $\sigma_\alpha : A_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{M}$ é sistema de coordenadas em torno de $p \in \mathbb{M}$ com $\sigma_\alpha(a) = p$ e

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) \stackrel{\text{def}}{=} d(\sigma_\alpha)_a(0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. } i}}{1}, \dots, 0)$$

então

$$\begin{aligned} g_{ij} : A_\alpha \subset \mathbb{R}^n \equiv T_p\mathbb{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p \end{aligned}$$

é diferenciável.

A métrica riemanniana em $\mathbb{M}$ não depende do sistema de coordenadas σ_a escolhido em torno de p . Ao par $(\mathbb{M}, g)$ chamamos de **variedade riemanniana**.

Os dois exemplos abaixo ajudam a compreender o conceito de métrica riemanniana.

Exemplos

(i) Se

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \left\{ \mathcal{F} \left((T_q\mathbb{R}^2)^2 \right) \right\}_{q \in \mathbb{R}^2} \\ (a, b) &\longmapsto g_{(a,b)} \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} g_{(a,b)} : T_{(a,b)}\mathbb{R}^2 \times T_{(a,b)}\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\longmapsto \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{(a,b)} = x_1x_2 + y_1y_2 \end{aligned}$$

então $(\mathbb{R}^2, g)$ é variedade riemanniana.

(ii) Se $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \equiv \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ e

$$\begin{aligned} g : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \left\{ \mathcal{F} \left((T_q\mathbb{H}^2)^2 \right) \right\}_{q \in \mathbb{H}^2} \\ (a, b) &\longmapsto g_{(a,b)} \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} g_{(a,b)} : T_{(a,b)}\mathbb{H}^2 \times T_{(a,b)}\mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\longmapsto \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{(a,b)} = \frac{1}{b^2} (x_1x_2 + y_1y_2) \end{aligned}$$

então $(\mathbb{H}^2, g)$ é variedade riemanniana. □

É usual representar a métrica riemanniana g pela matriz $g_p = [g_{ij}(p)]_{ij}$ e, com isso,

$$\langle x, y \rangle_p = \sum_{i,j} g_{ij}(p) x_i y_j = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} g_p \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

sendo $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

No exemplo do $\mathbb{R}^2$, acima, temos

$$g_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e, no exemplo do $\mathbb{H}^2$,

$$g_p = \frac{1}{b^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sendo $p = (a, b)$.

Em $\mathbb{R}^2$, se $r = (r_1, r_2)$ é um vetor em $T_s \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^2$, $s = (x, y)$, temos

$$\begin{aligned} |r|^2 &= |(r_1, r_2)|^2 \\ &= \langle (r_1, r_2), (r_1, r_2) \rangle_s^{\mathbb{R}^2} \\ &= \sum_{i,j}^2 g_{ij}(s) r_i r_j \\ &= r_1^2 + r_2^2, \end{aligned}$$

o que implica $dr^2 = dr_1^2 + dr_2^2$ ou, equivalentemente,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

sendo ds , portanto, elemento de comprimento na métrica g_p . É comum, por simplicidade, identificar ds com a métrica riemanniana em $\mathbb{R}^2$.

Em $\mathbb{H}^2$, se $r = (r_1, r_2)$ é um vetor em $T_s \mathbb{H}^2 \equiv \mathbb{R}^2$, $s = (x, y)$, temos

$$\begin{aligned} |r|^2 &= |(r_1, r_2)|^2 \\ &= \langle (r_1, r_2), (r_1, r_2) \rangle_s^{\mathbb{H}^2} \\ &= \sum_{i,j}^2 g_{ij}(s) r_i r_j \\ &= \frac{1}{y^2} (r_1^2 + r_2^2) \end{aligned}$$

implicando $dr^2 = \frac{dr_1^2 + dr_2^2}{y^2}$ ou, equivalentemente,

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}.$$

Terminamos esta seção com a noção de isometria numa variedade riemanniana, dada pela definição abaixo.

Definição 2.3 $\varphi : \mathbb{M}_1 \longrightarrow \mathbb{M}_2$ é uma **isometria** entre as variedades riemannianas $\mathbb{M}_1$ e $\mathbb{M}_2$ se φ é diferenciável, bijetora e

$$\langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_{\varphi(p)} = \langle u, v \rangle_p,$$

sendo $d\varphi_p : T_p \mathbb{M}_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{M}_2$ aplicação derivada de φ em $p \in \mathbb{M}_1$ e $u, v \in T_p \mathbb{M}_1$.

Particularmente, se $\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}_2 = \mathbb{M}$, φ é isometria em $\mathbb{M}$.

O resultado abaixo fornece a equivalência entre a definição de isometria apresentada acima e a definição “usual” de isometria, ou seja, aplicação que preserva distâncias.

Proposição 2.1 $\varphi : \mathbb{M}_1 \longrightarrow \mathbb{M}_2$ é isometria entre $\mathbb{M}_1$ e $\mathbb{M}_2$ se, e somente se,

$$d_{\mathbb{M}_1}(x, y) = d_{\mathbb{M}_2}(\varphi(x), \varphi(y))$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{M}_1$, sendo $d_{\mathbb{M}_1}$ e $d_{\mathbb{M}_2}$ métricas usuais¹ em $\mathbb{M}_1$ e $\mathbb{M}_2$.

A demonstração desse resultado não é trivial e envolve uma série de conceitos e resultados de Geometria Diferencial. Ela pode ser conferida em [41] a partir da página 169.

2.2 Modelos Euclidianos para a Geometria Hiperbólica

A variedade riemanniana $(\mathbb{H}^2, ds)$ apresentada na seção acima é chamada de modelo euclidiano do semiplano superior de Lobatchevski para a geometria hiperbólica plana ou, simplesmente, **plano de Lobatchevski**. Além do modelo do semiplano, há também outro modelo, denominado modelo do disco unitário de Poincaré. Ambos podem ser generalizados para dimensões quaisquer, conforme a definição abaixo.

Definição 2.4 Seja $n \geq 2$. As variedades

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, x_n > 0\}$$

e

$$\mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$$

munidas com as métricas riemannianas

$$ds = \frac{\sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}}{x_n} \quad (2.1)$$

e

$$ds = \frac{2\sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}}{1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)} \quad (2.2)$$

respectivamente, são chamadas de **modelos euclidianos de Poincaré** do semi-espço superior e da bola unitária para a geometria hiperbólica.

Os “bordos” dos modelos $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{B}^n$, que são os conjuntos

$$\partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, x_n = 0\} \cup \{\infty\}$$

(∞ é o ponto adicionado na compactificação de Alexandrov) e

$$\partial\mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

respectivamente, são definidos como sendo a **fronteira ideal** de $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{B}^n$. Utilizamos, quando conveniente, a notação

$$\widehat{\mathbb{H}}^n = \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$$

$$\widehat{\mathbb{B}}^n = \mathbb{B}^n \cup \partial\mathbb{B}^n$$

para denotar a união do modelo e sua fronteira ideal. Um ponto na fronteira ideal de um modelo é dito **ponto ideal**.

¹Chamamos de métricas usuais as que são definidas como na Definição 2.5 da Seção 2.3 adiante.

Veremos adiante a equivalência entre esses modelos que, aliás, não são os únicos. A geometria hiperbólica é auto-consistente e, portanto, todo trabalho feito do ponto de vista teórico independe da escolha do modelo. Eles podem ser pensados como visualizadores ou “janelas” para o ambiente hiperbólico.

A geometria hiperbólica pode ser estudada com enfoque riemanniano (a partir dos modelos definidos acima), como também com enfoque axiomático, admitindo um dos casos da negação do famoso **5º. Postulado de Euclides**, para a geometria euclidiana plana, que afirma: *dada uma “reta” r e um ponto p fora dela, existe apenas uma “reta” s paralela a r passando por p* . Se admitirmos a pluralidade de “retas” s paralelas a r passando por p , temos a geometria hiperbólica. Se, ao contrário, admitirmos a não existência de uma “reta” s paralela a r passando por p , temos a geometria esférica.

Encerramos esta seção com um comentário sobre um conceito muito importante em variedades riemannianas: a **curvatura**. A definição precisa e um estudo aprofundado de curvatura seccional em variedades riemannianas pode ser conferida em [21], Capítulo 4 (pp. 88-109) ou [60], Capítulo 2 (pp. 45-96). No entanto, para nossos propósitos, basta a idéia intuitiva de que a curvatura é uma medida do quanto uma variedade “deixa de ser euclidiana”. As variedades mais interessantes do ponto de vista prático são, sem dúvida, as que possuem curvatura constante, devido à sua homogeneidade em termos geométricos e algébricos, possibilitando o trabalho explícito com geodésicas, isometrias e expressões analíticas para a métrica.

Os modelos de Poincaré, introduzidos acima, são exemplos de variedades com curvatura constante negativa (-1). A esfera unitária é outro exemplo de variedade com curvatura constante positiva (1) e, obviamente, o plano euclidiano é também uma variedade de curvatura constante; neste caso, nula.

2.3 A Distância Hiperbólica

Nesta seção, obteremos expressões, a partir da métrica riemanniana, para a distância entre dois pontos nos modelos de Poincaré.

Sejam $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow \mathbb{H}^n \\ t &\longmapsto (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

curva parametrizada diferenciável por partes em $\mathbb{H}^n$. Definimos

$$\|\gamma\| = \int_a^b \frac{\sqrt{x_1'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2}}{x_n(t)} dt$$

como sendo o **comprimento hiperbólico** de γ em $\mathbb{H}^n$.

Observemos que o integrando provém da métrica riemanniana em $\mathbb{H}^n$.

De modo análogo, para $J = [c, d] \subset \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} \delta : J &\longrightarrow \mathbb{B}^n \\ t &\longmapsto (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

curva parametrizada diferenciável por partes em $\mathbb{B}^n$. Definimos

$$\|\delta\| = \int_c^d \frac{2\sqrt{x_1'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2}}{1 - (x_1(t)^2 + \dots + x_n(t)^2)} dt$$

como sendo o comprimento hiperbólico de δ em $\mathbb{B}^n$.

Com efeito, é possível definir a distância hiperbólica entre dois pontos de $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{B}^n$ conforme abaixo.

Definição 2.5 *Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^n$. A distância hiperbólica entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é definida por*

$$d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf_{\substack{\gamma: I \rightarrow \mathbb{H}^n, \ C^1 \text{ por partes,} \\ \text{tal que } \gamma(a)=\mathbf{x} \text{ e } \gamma(b)=\mathbf{y}}} \{\|\gamma\|\}.$$

De modo análogo, define-se a distância hiperbólica para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{B}^n$.

É fácil demonstrar que as funções $d_{\mathbb{H}^n}$ e $d_{\mathbb{B}^n}$ são *funções distância* nos respectivos modelos, ou seja, elas satisfazem os axiomas da definição usual de métrica.

Quanto a **expressões analíticas** para as funções distância, temos os resultados seguintes.

Teorema 2.1 Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^n$:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \cosh d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{2x_n y_n}; \\
 (ii) \quad & \sinh d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\left(1 + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{2x_n y_n}\right)^2 - 1} = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| |\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}|}{2x_n y_n}; \\
 (iii) \quad & \sinh\left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right) = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{2\sqrt{x_n y_n}}; \\
 (iv) \quad & \cosh\left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right) = \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4x_n y_n}} = \frac{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}|}{2\sqrt{x_n y_n}}; \\
 (v) \quad & \tanh\left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right) = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}|}; \\
 (vi) \quad & \tanh d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| |\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}|}{2x_n y_n + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}; \\
 (vii) \quad & d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ln \frac{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}| + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}| - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}.
 \end{aligned}$$

Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{B}^n$:

$$\begin{aligned}
 (viii) \quad & \sinh\left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{B}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right) = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\sqrt{(1 - |\mathbf{x}|^2)(1 - |\mathbf{y}|^2)}}; \\
 (ix) \quad & d_{\mathbb{B}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ln \frac{\sqrt{(1 - |\mathbf{x}|^2)(1 - |\mathbf{y}|^2)} + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\sqrt{(1 - |\mathbf{x}|^2)(1 - |\mathbf{y}|^2)} + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}.
 \end{aligned}$$

Particularmente:

$$\begin{aligned}
 (x) \quad & \text{para } \mathbf{y} = \mathbf{0} \text{ temos } d_{\mathbb{B}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \ln \frac{1 + |\mathbf{x}|}{1 - |\mathbf{x}|}; \\
 (xi) \quad & \text{para } n = 2 \text{ temos } d_{\mathbb{B}^2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ln \frac{|1 - \mathbf{x}\bar{\mathbf{y}}| + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{|1 - \mathbf{x}\bar{\mathbf{y}}| - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \text{ (simplificação possível devido ao fato de } \mathbb{C} \\
 & \text{ser corpo, fornecendo a estrutura multiplicativa)}
 \end{aligned}$$

Neste teorema, $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ e, se $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)$, $\bar{\mathbf{z}} = (z_1, \dots, z_{n-1}, -z_n)$.

As equivalências são facilmente provadas, observando-se as relações

$$\begin{aligned}
 1 &= \cosh^2 t - \sinh^2 t \\
 \cosh t &= \cosh^2 \frac{t}{2} + \sinh^2 \frac{t}{2} \\
 \sinh t &= 2 \sinh \frac{t}{2} \cosh \frac{t}{2}.
 \end{aligned}$$

Aliás, podemos obter várias expressões envolvendo $d_{\mathbb{B}^n}$ (como no caso $d_{\mathbb{H}^n}$), valendo-se destas relações trigonométricas. No entanto, para uso prático, as expressões importantes são as destacadas no teorema acima.

2.4 Geodésicas em $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{B}^n$

A definição precisa de geodésica em uma variedade riemanniana pode ser encontrada em [21], página 61, que a apresenta como sendo uma “curva cuja aceleração é nula”. Não iremos apresentar esta definição,

por entendermos ser desnecessária a introdução de todos os conceitos que ela exige. No entanto, uma consequência de tal definição é que geodésicas podem ser vistas como curvas que minimizam distâncias, ou seja, são as “retas” da variedade riemanniana. Doravante, iremos adotar esse conceito de geodésica em nosso trabalho.

A partir das métricas riemannianas introduzidas nos modelos de Poincaré, é possível deduzir quais são suas geodésicas. Iremos apresentá-las juntamente com algumas de suas principais propriedades. Antes, porém, será útil introduzirmos duas transformações muito importantes em $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{B}^n$.

Inversões

Denotemos a compactificação² de $\mathbb{R}^n$ por $\widetilde{\mathbb{R}}^n$, ou seja,

$$\widetilde{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}.$$

O primeiro tipo importante de tais transformações são ***inversões em hiperesferas***, cuja definição é a seguinte: seja $S = S_r(\mathbf{p})$ hiperesfera de raio r e centro $\mathbf{p}$ em $\mathbb{R}^n$. A inversão em S é dada por

$$i_S : \widetilde{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}^n$$

$$\mathbf{x} \longmapsto \begin{cases} \infty; & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{p} \\ \mathbf{p}; & \text{se } \mathbf{x} = \infty \\ \text{o único ponto de } \overleftrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{x}} \text{ tal que } |\mathbf{p} - \mathbf{x}| |\mathbf{p} - i_S(\mathbf{x})| = r^2; & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{p}, \infty \end{cases}.$$

Sintetizamos alguns de seus resultados mais importantes na proposição seguinte.

Proposição 2.2 *Seja $S = S_r(\mathbf{p})$ em $\mathbb{R}^n$. Temos:*

- Se $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}, \infty$; então i_S possui a seguinte expressão:

$$i_S(\mathbf{x}) = \mathbf{p} + r^2 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}|^2}.$$

- Se Π é hiperplano em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{p} \in \Pi$, então $i_S(\Pi) = \Pi$.
- Se Π é hiperplano em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{p} \notin \Pi$, então $i_S(\Pi)$ é hiperesfera contendo $\mathbf{p}$.
- Se Σ é hiperesfera em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{p} \in \Sigma$, então $i_S(\Sigma)$ é hiperplano.
- Se Σ é hiperesfera em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{p} \notin \Sigma$, então $i_S(\Sigma)$ é hiperesfera.
- Se Σ é hiperesfera ortogonal a S em $\mathbb{R}^n$, então $i_S(\Sigma) = \Sigma$.

A noção de conformidade e preservação de orientação também é importante. Antes, porém, precisamos da definição de ângulo entre geodésicas de uma variedade riemanniana $\mathbb{M}$, que conceituamos do seguinte modo: o **ângulo** entre duas geodésicas concorrentes em $p \in \mathbb{M}$ é o ângulo entre seus vetores tangentes em $T_p\mathbb{M}$. Desta forma, se $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$, são geodésicas parametrizadas com $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$, então o cosseno do ângulo entre elas é dado por $\frac{\langle \gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \rangle_p^{\mathbb{M}}}{\|\gamma_1'(0)\|_p^{\mathbb{M}} \|\gamma_2'(0)\|_p^{\mathbb{M}}}$.

Uma aplicação diferenciável $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preserva ângulos entre curvas continuamente diferenciáveis é dita **conforme**. Além disso, se $\det d\varphi_{\mathbf{x}} > 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dizemos que φ *preserva orientação* e, se $\det d\varphi_{\mathbf{x}} < 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dizemos que φ *reverte orientação*.

Não é difícil mostrar que toda inversão em $S_r(\mathbf{p})$ é conforme e reverte orientação em $\widetilde{\mathbb{R}}^n$.

As inversões em hiperesferas S ortogonais às fronteiras ideais dos modelos são de especial interesse à nossa abordagem pelo fato de *manterem invariantes* os modelos de Poincaré.

Reflexões

O segundo tipo importante de transformações nos modelos de Poincaré são as chamadas ***reflexões em hiperplanos***. Definimo-as do seguinte modo: consideremos $0 \neq \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ e o hiperplano compactificado

$$P = P_t(\mathbf{p}) \cup \{\infty\},$$

² $\widehat{\mathbb{H}}^n$ e $\widehat{\mathbb{B}}^n$ são espaços topológicos compactificados cuja topologia é a mesma de $\widetilde{\mathbb{R}}^n$.

sendo $P_t(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = t\}$ subespaço afim de $\mathbb{R}^n$. Tomemos

$$i_P : \widetilde{\mathbb{R}^n} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}^n}$$

$$\mathbf{x} \longmapsto \begin{cases} \infty; & \text{se } \mathbf{x} = \infty \\ \text{o único ponto } i_P(\mathbf{x}) \text{ tal que } \overline{\mathbf{x}i_P(\mathbf{x})} \text{ é ortogonal a } P \text{ e} \\ \text{intercepta } P \text{ no ponto médio de } \overline{\mathbf{x}i_P(\mathbf{x})}; & \text{se } \mathbf{x} \neq \infty \end{cases}.$$

Chamamos i_P de reflexão em P .

A proposição abaixo sintetiza alguns resultados sobre reflexões.

Proposição 2.3 *Seja $P = P_t(\mathbf{p}) \cup \{\infty\}$ hiperplano compactificado. Temos:*

- i_P possui a seguinte expressão:

$$i_P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2 \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle - t}{|\mathbf{p}|^2} \mathbf{p}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

- $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = |i_P(\mathbf{x}) - i_P(\mathbf{y})|$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \widetilde{\mathbb{R}^n}$. (ou seja, i_P é uma isometria euclidiana)
- Se Σ é uma hiperesfera em $\mathbb{R}^n$, então $i_P(\Sigma)$ é hiperesfera.
- Se Σ é uma hiperesfera ortogonal a P , então $i_P(\Sigma) = \Sigma$.
- i_P é conforme e reverte orientação.

Como no caso das inversões, as reflexões por hiperplanos P ortogonais às fronteiras ideais dos modelos são de especial interesse devido ao fato de *manterem invariantes* os modelos de Poincaré.

A principal importância das inversões e reflexões para a geometria hiperbólica é dada no resultado abaixo.

Teorema 2.2 *As inversões em hiperesferas e reflexões em hiperplanos*

compactificados ortogonais às fronteiras ideais dos modelos de Poincaré para a geometria hiperbólica são isometrias quando restritas aos modelos.

É demonstrável que qualquer isometria nos modelos para geometria hiperbólica pode ser obtida por composição de um número finito³ de inversões e/ou reflexões. Mais adiante, faremos a classificação das isometrias para o caso bidimensional.

Quanto às geodésicas, temos o resultado abaixo.

Teorema 2.3 (i) *As semiretas euclidianas de $\mathbb{H}^n$ ortogonais a $\partial\mathbb{H}^n$ e os semicírculos euclidianos de $\mathbb{H}^n$ com centro em $\partial\mathbb{H}^n$ são as geodésicas de $(\mathbb{H}^n, ds)$.*

(ii) *Os diâmetros de $\mathbb{B}^n$ e arcos de circunferências euclidianas de $\mathbb{B}^n$ ortogonais a $\partial\mathbb{B}^n$ são as geodésicas de $(\mathbb{B}^n, ds)$.*

Algumas propriedades decorrentes deste teorema:

- Por dois pontos distintos do modelo passa uma única geodésica.
- Duas geodésicas se interceptam no máximo em um ponto do modelo.
- Inversões por hiperesferas e reflexões por hiperplanos compactificados ortogonais às fronteiras ideais dos modelos levam geodésicas em geodésicas.
- Dadas duas geodésicas γ_1 e γ_2 quaisquer, existe uma aplicação φ que é composição de inversões e/ou reflexões do tipo do item anterior tal que $\varphi(\gamma_1) = \gamma_2$.
- Dada uma geodésica γ e um ponto $\mathbf{p}$ do modelo fora dela, existe uma única geodésica ortogonal a γ contendo $\mathbf{p}$.

Quanto à questão do 5º. Postulado de Euclides, que não está satisfeito na geometria hiperbólica, adotamos, para uma geodésica γ dada e um ponto $\mathbf{p}$ do modelo fora dela, a seguinte terminologia:

³No máximo três.

(i) às geodésicas que passam por $\mathbf{p}$ e “encontram” γ apenas em um ponto ideal, denominamos de **geodésicas paralelas** a γ . Notemos que, dada γ , existem exatamente duas geodésicas satisfazendo esta condição.

(ii) às geodésicas que passam por $\mathbf{p}$ e não cruzam com γ , nem na fronteira ideal, denominamos de **geodésicas hiperparalelas** a γ . Notemos que, dada γ , existem infinitas geodésicas satisfazendo esta condição.

Às geodésicas que passam por $\mathbf{p}$ e cruzam γ , denominamos **geodésicas concorrentes** a γ . Também são infinitas as geodésicas satisfazendo esta condição.

A Figura 2.1 ilustra exemplos dessas geodésicas para $n = 2$ nos modelos do semiplano e do disco.

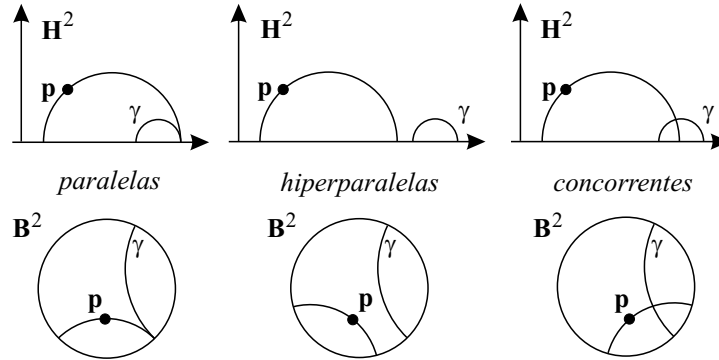


FIGURA 2.1: Posição relativa de geodésicas em $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{B}^2$.

Com a noção de geodésicas nos modelos, finalizamos esta seção com uma expressão analítica interessante para a distância hiperbólica em $\mathbb{H}^2$. Para tanto, definimos a *razão cruzada* dos pontos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \mathbb{R}^n$ como sendo

$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4] = \frac{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4|}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3| |\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1|}.$$

A partir desta definição, temos o resultado seguinte.

Proposição 2.4 *Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^2$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ e γ a geodésica unindo $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ com pontos ideais $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{y}^*$ tais que $\mathbf{x}$ está entre $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{y}$. Então,*

$$d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ln [\mathbf{y}, \mathbf{x}^*; \mathbf{x}, \mathbf{y}^*].$$

2.5 Isometrias nos Modelos $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{B}^n$

Já comentamos na Seção 2.1 a definição riemanianna de isometria (Definição 2.3) e sua equivalência com a noção usual de isometria (Proposição 2.1). Denotamos o conjunto de isometrias de $\mathbb{H}^n$ por $\text{Iso}(\mathbb{H}^n)$ e, o conjunto de isometrias de $\mathbb{B}^n$ por $\text{Iso}(\mathbb{B}^n)$.

A uma aplicação obtida por um número finito de composições de inversões em hipersferas e/ou reflexões em hiperplanos compactificados em $\tilde{\mathbb{R}}^n$, chamamos de **transformação de Möbius** de $\tilde{\mathbb{R}}^n$.

O conjunto de transformações de Möbius, munido da operação de composição, forma um grupo que é denotado por $GM(\tilde{\mathbb{R}}^n)$ e chamado de **grupo geral de Möbius**. Naturalmente, este grupo possui um subgrupo de índice dois composto pelas aplicações que preservam orientação, que é denotado por $M(\tilde{\mathbb{R}}^n)$ e chamado de **grupo de Möbius**.

Como visto anteriormente, $\text{Iso}(\mathbb{H}^n)$ e $\text{Iso}(\mathbb{B}^n)$ estão contidos em $GM(\tilde{\mathbb{R}}^n)$ e, portanto, $GM(\tilde{\mathbb{R}}^n)$ age transitivamente sobre o conjunto das geodésicas dos modelos.

Alguns resultados interessantes sobre transformações de Möbius $\varphi : \tilde{\mathbb{R}}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}^n$ são os seguintes:

(i) φ é transformação de Möbius se, e somente se, preserva razões cruzadas.

(ii) Se $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $\varphi(\mathbb{B}^n) = \mathbb{B}^n$, então $\varphi(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$ para alguma matriz ortogonal M .

(iii) Se $\varphi(\mathbb{B}^n) = \mathbb{B}^n$, então $\varphi(\mathbf{x}) = Mi_S(\mathbf{x})$ para alguma matriz ortogonal M e alguma inversão i_S em hipersfera ortogonal a $\partial\mathbb{B}^n$.

(iv) Se $\varphi(\infty) = \infty$, então $\varphi(\mathbf{x}) = kM\mathbf{x} + \mathbf{c}$ para alguma matriz ortogonal M , $k > 0$ e $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

(v) Se $\varphi(\infty) \neq \infty$, então $\varphi(\mathbf{x}) = kMi_P(\mathbf{x}) + \mathbf{c}$ para alguma matriz ortogonal M , $k > 0$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ e alguma reflexão em hiperplano compactificado i_P .

2.5.1 Isometrias entre $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{B}^n$

Nesta subseção, trabalhamos o fato de os dois modelos de Poincaré para a geometria hiperbólica serem isométricos.

Consideremos:

(i) a inversão em $S = S_1(\mathbf{p})$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Conforme já visto, para $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$:

$$i_S : \begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{R}}^{n+1} & \longrightarrow & \widetilde{\mathbb{R}}^{n+1} \\ \mathbf{x} & \longmapsto & \mathbf{p} + \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}|^2} \end{array}.$$

Para $\mathbf{p} = (0, \dots, 0, 1)$, $i_S|_{\mathbb{B}^n}$ mapeia a bola $\mathbb{B}^n$ no “hemisfério inferior” da hipersfera $\mathbb{S}^n$.

(ii) a rotação de ângulo $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário em torno do eixo $\left\{ \left(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, \frac{1}{2} \right) : x_i \in \mathbb{R} \right\}$ dada pela expressão

$$\mathcal{R}_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ \mathbf{x} & \longmapsto & M_1\mathbf{x} + \mathbf{v}_1 \end{array}$$

sendo

$$M_1 = \left[\begin{array}{c|cc} \text{Id}_{n-1} & & \mathbf{0}_{(n-1) \times 2} \\ \hline \mathbf{0}_{2 \times (n-1)} & \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ & \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{array} \right]_{n+1}$$

e $\mathbf{v}_1 = \left(0, \dots, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(iii) a rotação de ângulo $\frac{\pi}{2}$ no sentido horário em torno do eixo $\left\{ \left(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, \frac{1}{2} \right) : x_i \in \mathbb{R} \right\}$ dada pela expressão

$$\mathcal{R}_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ \mathbf{x} & \longmapsto & M_2\mathbf{x} + \mathbf{v}_2 \end{array}$$

sendo

$$M_2 = \left[\begin{array}{c|cc} \text{Id}_{n-1} & & \mathbf{0}_{(n-1) \times 2} \\ \hline \mathbf{0}_{2 \times (n-1)} & \cos -\pi/2 & -\sin -\pi/2 \\ & \sin -\pi/2 & \cos -\pi/2 \end{array} \right]_{n+1}$$

e $\mathbf{v}_2 = \left(0, \dots, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Definamos

$$I_{\mathbb{B}^n \mathbb{H}^n} : \begin{array}{ccc} \mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \\ \mathbf{x} & \longmapsto & i_S(\mathcal{R}_1(i_S(\mathbf{x}))) = 2 \frac{\overline{\mathbf{x} - \mathbf{p}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}|^2} - \mathbf{p} \end{array}, \quad \mathbf{p} = (0, \dots, 0, 1) \quad (2.3)$$

e

$$I_{\mathbb{H}^n \mathbb{B}^n} : \begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \\ \mathbf{x} & \longmapsto & i_S(\mathcal{R}_2(i_S(\mathbf{x}))) = 2 \frac{\overline{\mathbf{x} + \mathbf{p}}}{|\mathbf{x} + \mathbf{p}|^2} + \mathbf{p} \end{array}, \quad \mathbf{p} = (0, \dots, 0, 1). \quad (2.4)$$

Nestas condições, $I_{\mathbb{B}^n \mathbb{H}^n}$ é uma *isometria entre os modelos* $\mathbb{B}^n$ e $\mathbb{H}^n$ e $I_{\mathbb{H}^n \mathbb{B}^n}$ é sua inversa.

A Figura 2.2 ilustra a ação de $I_{\mathbb{B}^2 \mathbb{H}^2}$.

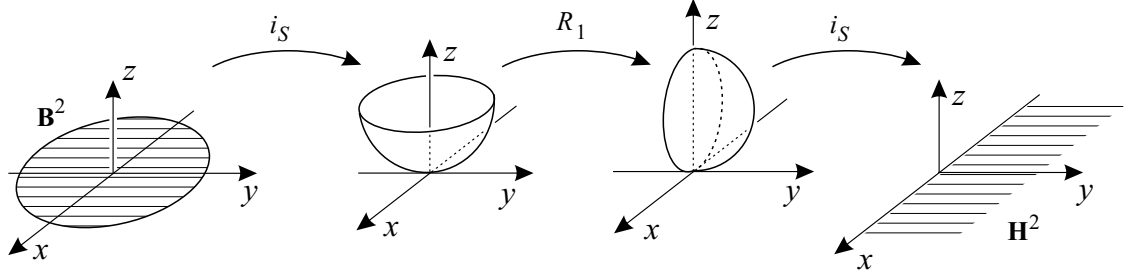


FIGURA 2.2: Ação da isometria $I_{\mathbb{B}^2\mathbb{H}^2}$ entre os modelos $\mathbb{B}^2$ e $\mathbb{H}^2$.

Observemos que, a partir de expressões para a distância em $\mathbb{H}^n$, é possível obter expressões para a distância em $\mathbb{B}^n$ por meio de $I_{\mathbb{B}^n\mathbb{H}^n}$ e vice-versa⁴; o que ajuda a encontrar as expressões esboçadas no Teorema 2.1.

2.5.2 Isometrias em $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{B}^2$

O Modelo $\mathbb{H}^2$

Uma associação importante envolvendo $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C}$ é a que passamos a descrever. Consideremos o grupo

$$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } \det M = 1 \right\}.$$

Definimos

$$PSL_2(\mathbb{R}) = \frac{SL_2(\mathbb{R})}{\{\pm \text{Id}\}}$$

como sendo o **grupo topológico especial linear projetivo** e a transformação

$$\begin{aligned} T_M : \mathbb{H}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ \mathbf{z} &\mapsto T_M(\mathbf{z}) = \frac{a\mathbf{z} + b}{c\mathbf{z} + d} \end{aligned}$$

sendo $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$. Notemos que $T_M(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$.

Podemos ainda estender o domínio de T_M a $\widehat{\mathbb{H}}^2$, definindo

- $T_M(\infty) = \infty$ se $c = 0$;
- $T_M\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ e $T_M(\infty) = \frac{a}{c}$ se $c \neq 0$;
- $T_M(\mathbf{z}) = \frac{a\mathbf{z} + b}{c\mathbf{z} + d}$ nos demais pontos de $\partial\mathbb{H}^2$.

A importância destas definições encontra-se no fato de que transformações T_M são isometrias que preservam orientação e, portanto, pertencem a $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$, ou seja, as T_M 's são transformações de Möbius que pertencem especificamente ao grupo de Möbius $M(\widetilde{\mathbb{R}}^2)$. Com efeito, devido ao isomorfismo natural

$$PSL_2(\mathbb{R}) \equiv \{T_M : M \in SL_2(\mathbb{R})\}$$

é possível demonstrar o resultado seguinte.

Proposição 2.5 $PSL_2(\mathbb{R})$ é isomorfo ao grupo de Möbius $M(\widetilde{\mathbb{R}}^2)$.

⁴ $d_{\mathbb{B}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_{\mathbb{H}^n}(I_{\mathbb{B}^n\mathbb{H}^n}(\mathbf{x}), I_{\mathbb{B}^n\mathbb{H}^n}(\mathbf{y}))$.

Definamos também o grupo

$$PS^*L_2(\mathbb{R}) = \frac{S^*L_2(\mathbb{R})}{\{\pm \text{Id}\}}$$

sendo $S^*L_2(\mathbb{R})$ o grupo das matrizes 2×2 com determinante ± 1 . Com esta definição, $PSL_2(\mathbb{R})$ é subgrupo de índice dois de $PS^*L_2(\mathbb{R})$ e temos o seguinte resultado que estende a proposição acima.

Proposição 2.6 $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$ é isomorfo a $PS^*L_2(\mathbb{R})$

Como consequência, podemos pensar em $PS^*L_2(\mathbb{R})$ como sendo o grupo composto por transformações de Möbius, ou seja,

$$\text{Iso}(\mathbb{H}^2) = \left\langle T_M(\mathbf{z}) = \frac{a\mathbf{z} + b}{c\mathbf{z} + d}, \varphi(\mathbf{z}) = -\bar{\mathbf{z}}, M \in SL_2(\mathbb{R}) \right\rangle.$$

Notemos que φ é uma reflexão pelo eixo imaginário no plano $\mathbb{C}$.

O Modelo $\mathbb{B}^2$

De modo análogo ao caso acima, tomemos

$$SL_2(\mathbb{C}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } \det M = 1 \right\}$$

e

$$\begin{aligned} T_M : \mathbb{B}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ \mathbf{z} &\mapsto T_M(\mathbf{z}) = \frac{a\mathbf{z} + b}{c\mathbf{z} + d} \end{aligned}$$

O ponto divergente aqui é a imposição da condição $b = \bar{c}$ e $d = \bar{a}$ para que tenhamos $T_M(\mathbb{B}^2) = \mathbb{B}^2$. Assim, considerando $A = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{C} \text{ e } \det M = 1 \right\} \subset SL_2(\mathbb{C})$ e definindo

$$B = \frac{A}{\{\pm \text{Id}\}}$$

podemos demonstrar que

$$\text{Iso}(\mathbb{B}^2) \equiv \left\langle T_M(\mathbf{z}) = \frac{a\mathbf{z} + \bar{c}}{c\mathbf{z} + \bar{a}}, \varphi(\mathbf{z}) = -\bar{\mathbf{z}}, M \in B \right\rangle.$$

2.5.3 Classificação das Isometrias Próprias de $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$ e $\text{Iso}(\mathbb{B}^2)$

Chamamos as isometrias que preservam orientação nos modelos de Poincaré de **isometrias próprias** ou **positivas**. Ao conjunto de isometrias próprias de $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$ denotamos por $\text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$. Analogamente para o modelo $\mathbb{B}^2$. Observemos que, com essa notação, $\text{Iso}^+(\mathbb{H}^2) \equiv PSL_2(\mathbb{R})$ e $\text{Iso}^+(\mathbb{B}^2) \equiv B$ (definido na subseção acima).

Se $T_M(\mathbf{z}) = \frac{a\mathbf{z} + b}{c\mathbf{z} + d}$, $M \in SL_2(\mathbb{R})$, definimos o **traço** Tr de T_M como sendo

$$\text{Tr}(T_M) = |a + d|.$$

Analogamente, para $T_M = \frac{a\mathbf{z} + \bar{c}}{c\mathbf{z} + \bar{a}}$, $|a|^2 - |c|^2 = 1$.

Com esses conceitos, temos a classificação seguinte.

Definição 2.6 $T_M \in \text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$ ou $T_M \in \text{Iso}^+(\mathbb{B}^2)$, $T_M \neq \text{Id}$, é chamada **isometria elíptica** (ou rotação hiperbólica) quando $\text{Tr}(T_M) < 2$ e indicaremos T_M por **e**. **isometria parabólica** quando $\text{Tr}(T_M) = 2$ e indicaremos T_M por **p**. **translação hiperbólica** quando $\text{Tr}(T_M) > 2$ e indicaremos T_M por **h** ou **t**.

Visando não sobrecarregar, desnecessariamente, o texto com notações, optamos por utilizar o modelo $\mathbb{H}^2$ no desenvolvimento desta subseção. No entanto, os conceitos e resultados citados valem naturalmente no modelo $\mathbb{B}^2$.

Temos algumas caracterizações geométricas interessantes para as isometrias próprias de $\mathbb{H}^2$. Antes, porém, é conveniente a apresentação do resultado abaixo.

Proposição 2.7 *Sejam $M \in SL_2(\mathbb{R})$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \widehat{\mathbb{H}^2}$ dois pontos fixos por T_M . Então, a geodésica contendo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é invariante por T_M . Além disso, se $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{y}$ pertencerem a $\mathbb{H}^2$, então $T_M = \text{Id}$.*

Também, é útil discorrermos um pouco sobre **círculos hiperbólicos**.

Denotamos de modo usual a circunferência de centro $\mathbf{p} \in \mathbb{H}^2$ e raio $r > 0$ por $C_r^h(\mathbf{p})$:

$$C_r^h(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^2 : d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = r\}.$$

O fato interessante nos círculos hiperbólicos é que estes coincidem com os círculos euclidianos (mas os raios não); apenas os centros dos hiperbólicos estão deslocados em relação aos euclidianos. No entanto, nos modelos há um novo tipo de círculo: o de raio infinito, definido do seguinte modo: seja $\mathbf{q} \in \mathbb{H}^2$ e $\gamma = \gamma(t)$, $0 \leq t < \infty$, raio geodésico (“semireta hiperbólica”) parametrizado tal que $\gamma(0) = \mathbf{q}$. Naturalmente, γ tende a um ponto $\mathbf{p}$ de $\partial\mathbb{H}^2$, quando $t \rightarrow \infty$. Consideremos a sequência de círculos hiperbólicos $C_{r_t}^h(\gamma(t))$ que passam por $\mathbf{q}$. O interessante é que, se γ tender a um ponto $\mathbf{p}$ de $\partial\mathbb{H}^2 - \{\infty\}$, o “limite”⁵ $\lim_{t \rightarrow \infty} C_{r_t}^h(\gamma(t))$ existe e é um círculo euclidiano tangente a $\partial\mathbb{H}^2$ em $\mathbf{p}$ passando por $\mathbf{q}$. A este círculo, chamamos de **horocírculo** e o denotamos por $H_{\mathbf{p}}(\mathbf{q})$.

A Figura 2.3 ilustra o procedimento descrito acima, sendo nesta, alguns dos círculos hiperbólicos $C_{r_t}^h(\gamma(t))$ representados pelas linhas pontilhadas.

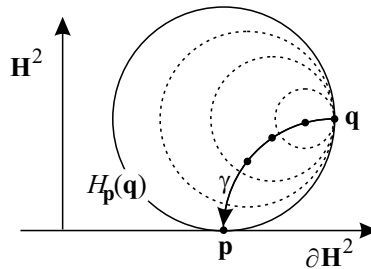


FIGURA 2.3: Horocírculo em $\mathbb{H}^2$ como limite de círculos hiperbólicos.

No caso de γ tender a ∞ , o limite acima é uma reta euclidiana horizontal (paralela a $\partial\mathbb{H}^2 - \{\infty\}$) passando por $\mathbf{q}$. Chamamos esta reta de **horocírculo degenerado** e denotamos por $H_{\infty}(\mathbf{q})$.

No modelo $\mathbb{B}^2$ não existem horocírculos degenerados.

Os horocírculos são os círculos hiperbólicos de raio infinito e “centros no infinito”, ou seja, centros na fronteira ideal do modelo.

A Figura 2.4 ilustra alguns círculos hiperbólicos e horocírculos. Em ambas as ilustrações, algumas das geodésicas que contêm os raios (dos círculos hiperbólicos e horocírculos) estão representadas pelas linhas pontilhadas.

⁵Aqui deveríamos definir precisamente a noção de “distância entre círculos”, para poder falar em limite. No entanto, para o nível de nossos propósitos, basta apenas a noção intuitiva e geométrica de uma sequência de círculos “tendendo” a um determinado círculo.

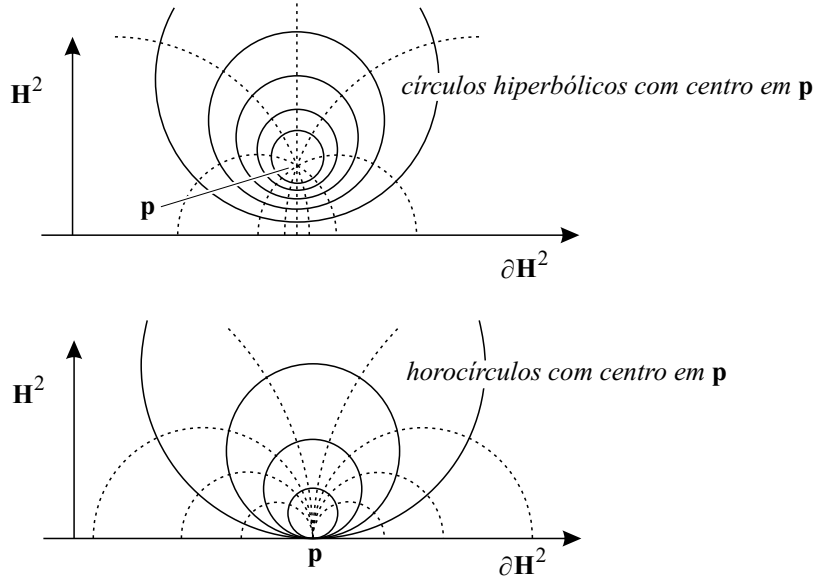


FIGURA 2.4: Círculos hiperbólicos e horocírculos em $\mathbb{H}^2$ são curvas invariantes por isometrias elípticas e parabólicas respectivamente.

Com o auxílio desses resultados e apontamentos, temos as seguintes propriedades para cada tipo de isometria própria.

Isometrias Elípticas

(i) Toda $\epsilon \in \text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$ elíptica é conjugada a alguma $\epsilon_\theta(z) = \frac{(\cos \theta)z + \sin \theta}{(\sin \theta)z + \cos \theta}$, $0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$, ou seja, $\exists N \in SL_2(\mathbb{R})$ tal que $NMN^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$.

(ii) ϵ possui um único ponto fixo $\mathbf{p}$ e este pertence a $\mathbb{H}^2$ (no caso de ϵ_θ , $\mathbf{p} = i$). Considerando o círculo hiperbólico de centro $\mathbf{p}$ e raio r , $C_r^h(\mathbf{p})$, é fácil comprovar que $\epsilon(C_r^h(\mathbf{p})) = C_r^h(\mathbf{p})$ para qualquer $r \in \mathbb{R}_+$ e, portanto, geometricamente, ϵ é uma rotação (no sentido hiperbólico) de centro $\mathbf{p}$ e ângulo θ .

(iii) Outra característica de ϵ é a igualdade (neste caso óbvia) $\inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^2} d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{x}, \epsilon(\mathbf{x})) = d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{p}, \epsilon(\mathbf{p})) = 0$.

Sintetizando, não é difícil deduzir a seguinte cadeia de equivalências:

- ϵ é elíptica;
- ϵ é conjugada a uma aplicação do tipo ϵ_θ em $SL_2(\mathbb{R})$;
- ϵ possui um único ponto fixo $\mathbf{p}$ e este pertence a $\mathbb{H}^2$;
- Os círculos hiperbólicos centrados em $\mathbf{p}$ são invariantes por ϵ ;
- $\inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^2} d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{x}, \epsilon(\mathbf{x})) = 0$ e é atingido (no ponto $\mathbf{p}$).

Isometrias Parabólicas

(i) Toda $\mathbf{p} \in \text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$ parabólica é conjugada a alguma $\mathbf{p}_t(\mathbf{z}) = \mathbf{z} + t$, $t \neq 0$, ou seja, $\exists N \in SL_2(\mathbb{R})$ tal que $NMN^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$.

(ii) $\mathbf{p}$ possui um único ponto fixo $\mathbf{p}$ e este se encontra na fronteira ideal de $\mathbb{H}^2$ (no caso de $\mathbf{p}_t$, este ponto é o ∞). Supondo que o ponto fixo $\mathbf{p}$ não seja o ∞ , podemos considerar um horocírculo $H_{\mathbf{p}}(\mathbf{q})$ com $\mathbf{q} \in \mathbb{H}^2$. Temos assim, $\mathbf{p}(H_{\mathbf{p}}(\mathbf{q})) = H_{\mathbf{p}}(\mathbf{q})$ para qualquer $\mathbf{q}$ e, neste caso, $\mathbf{p}$ funciona como uma espécie de rotação. No entanto, se o ponto fixo $\mathbf{p}$ de $\mathbf{p}$ for o ∞ (como no caso de $\mathbf{p}_t$), os horocírculos invariantes são os degenerados $H_\infty(\mathbf{q})$ e, neste sentido, $\mathbf{p}$ funciona como uma translação (no sentido euclidiano inclusive).

(iii) Como no caso elíptico, uma característica de $\mathbf{p}$ é a igualdade $\inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^2} d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x})) = 0$, mas este não é atingido.

Sintetizando, temos as equivalências:

- $\mathbf{p}$ é parabólica;
- $\mathbf{p}$ é conjugada a uma aplicação do tipo $\mathbf{p}_t$ em $SL_2(\mathbb{R})$;
- $\mathbf{p}$ possui um único ponto fixo $\mathbf{p}$ e este está na fronteira ideal do modelo;
- Os horocírculos centrados em $\mathbf{p}$ são invariantes por $\mathbf{p}$;
- $\inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^2} d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x})) = 0$ e não é atingido.

Translações Hiperbólicas

(i) Toda translação $\mathfrak{h} \in \text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$ hiperbólica é conjugada a alguma $\mathfrak{h}_k(\mathbf{z}) = e^k \mathbf{z} = \frac{\sqrt{e^k} \mathbf{z}}{\frac{1}{\sqrt{e^k}}}$, $k \neq 0$, ou seja, $\exists N \in SL_2(\mathbb{R})$ tal que $NMN^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{e^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{e^k}} \end{pmatrix}$, $k \neq 0$. Notemos que $\sqrt{e^k} + \frac{1}{\sqrt{e^k}} > 2$, $k \neq 0$.

(ii) $\mathfrak{h}$ possui dois pontos fixos e estes se encontram na fronteira ideal de $\mathbb{H}^2$ (no caso de $\mathfrak{h}_k$, estes pontos são $\mathbf{0}$ e ∞). Considerando a geodésica $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}$ que liga estes dois pontos, temos $\mathfrak{h}(\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}) = \mathcal{E}_{\mathfrak{h}}$ e, portanto, $\mathfrak{h}$ funciona como uma espécie de translação. A esta geodésica invariante por $\mathfrak{h}$ ligando seus pontos fixos, chamamos de *eixo* de $\mathfrak{h}$.

(iii) $\mathfrak{h}$ possui a seguinte característica: $\inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^2} d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{x}, \mathfrak{h}(\mathbf{x})) = |k| \neq 0$.

Também temos a cadeia de equivalências:

- $\mathfrak{h}$ é hiperbólica;
- $\mathfrak{h}$ é conjugada a uma aplicação do tipo $\mathfrak{h}_k$ em $SL_2(\mathbb{R})$;
- $\mathfrak{h}$ possui dois pontos fixos $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ distintos e estes estão na fronteira ideal;
- O eixo $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}$ de $\mathfrak{h}$ é invariante.
- $\inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^2} d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{x}, \mathfrak{h}(\mathbf{x})) > 0$.

A Figura 2.5 ilustra a ação de uma translação hiperbólica e seu eixo, ligando os pontos fixos $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$. As linhas contínuas são curvas invariantes pela isometria e as pontilhadas, geodésicas ortogonais ao eixo (e às curvas invariantes).

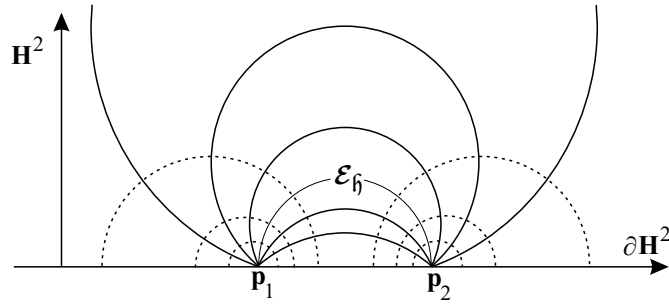


FIGURA 2.5: Eixo $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}$ e curvas invariantes de uma translação hiperbólica $\mathfrak{h}$.

Finalizamos esta subseção com uma observação que estende o conceito de eixo de translação hiperbólica. Os “eixos” em isometrias elípticas e parabólicas são os círculos hiperbólicos e os horocírculos respectivamente. Notemos que não há a unicidade de “eixos” nestes dois últimos casos, o que torna o caso das translações hiperbólicas particularmente especial. Notemos, também, que os “eixos” das isometrias próprias euclidianas (rotações e translações) são os círculos e as retas, não possuindo também a unicidade particular das translações hiperbólicas.

2.6 Círculos Isométricos em $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{B}^2$

Nesta seção, apresentamos o conceito de círculo isométrico de uma isometria nos modelos de Poincaré. Os resultados obtidos a partir deste conceito são muito úteis para o trabalho numérico que envolve equações de geodésicas e expressões de isometrias.

Chamamos de **círculo isométrico** da isometria $T_M(\mathbf{z}) = \frac{a\mathbf{z} + b}{c\mathbf{z} + d}$, $c \neq 0$, de $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C}$ o conjunto de pontos de $\mathbb{C}$ dado por

$$\mathcal{I}_{T_M} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} : |c\mathbf{z} + d| = 1\}.$$

Analogamente, o círculo isométrico de $T_M(\mathbf{z}) = \frac{a\mathbf{z} + \bar{c}}{c\mathbf{z} + \bar{a}}$, $c \neq 0$, de $\mathbb{B}^2 \subset \mathbb{C}$ é o conjunto

$$\mathcal{I}_{T_M} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} : |c\mathbf{z} + \bar{a}| = 1\}.$$

Atentamos ao fato de que os círculos isométricos são círculos euclidianos de raio $r = \frac{1}{|c|}$. No primeiro caso, seu centro é dado por $-\frac{d}{c}$ e no segundo, por $-\frac{\bar{a}}{c}$. Mas, o interessante destes círculos é o fato de que a isometria T_M age como isometria euclidiana quando restrita a seu círculo isométrico.

Encerramos com dois resultados interessantes sobre tais círculos.

Proposição 2.8 *Sejam T_M isometria em $\mathbb{H}^2$ e $\mathcal{I}_{T_M}$ seu círculo isométrico.*

- (i) $\mathcal{I}_{T_M} \cap \mathbb{H}^2$ é geodésica em $\mathbb{H}^2$;
- (ii) T_M aumenta distâncias euclidianas quando restrita ao interior de $\mathcal{I}_{T_M}$ e diminui, quando restrita ao exterior.

Resultado análogo é válido para isometrias em $\mathbb{B}^2$.

2.7 Área Hiperbólica e Teorema de Gauss-Bonnet

Nesta seção, abordamos o conceito de área nos modelos de Poincaré e apresentamos um impressionante resultado, envolvendo área de um triângulo hiperbólico e seus ângulos internos.

Definição 2.7 *Seja $A \subset \mathbb{H}^2$. Definimos a **área hiperbólica** de A como sendo*

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(A) = \int_A \frac{1}{y^2} dx dy$$

se a integral estiver bem definida.

Se $A \subset \mathbb{B}^2$, a definição é análoga:

$$\mu_{\mathbb{B}^2}(A) = \int_A \frac{4}{(1 - (x^2 + y^2))^2} dx dy.$$

Observamos que áreas hiperbólicas são invariantes por isometrias de $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$ e $\text{Iso}(\mathbb{B}^2)$.

Polígonos em $\mathbb{H}^2$ ou $\mathbb{B}^2$ são definidos como sendo curvas fechadas compostas por um número finito de segmentos geodésicos. No entanto, na geometria hiperbólica, devemos atentar ao fato da possibilidade de existência de vértices na fronteira ideal do modelo (vértices de ângulo zero). Com esta observação, podemos enunciar um dos principais resultados da geometria hiperbólica.

Teorema 2.4 *(Gauss-Bonnet) Se Δ é triângulo hiperbólico com ângulos internos α, β, γ , então*

$$\mu_{\mathcal{H}^2}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

sendo $\mathcal{H}^2 = \mathbb{H}^2$ ou $\mathbb{B}^2$.

Duas conseqüências muito interessantes deste resultado são:

- (i) a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo geodésico hiperbólico é estritamente menor que π e;
- (ii) a medida máxima da área de um triângulo hiperbólico é π (atingindo este valor se o triângulo possuir todos os vértices na fronteira ideal).

A Figura 2.6 ilustra triângulos Δ com área hiperbólica máxima.

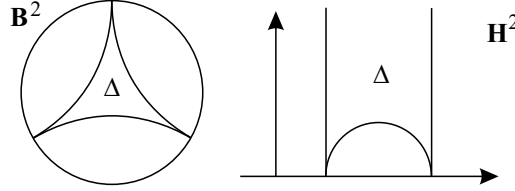


FIGURA 2.6: Δ é triângulo de área hiperbólica máxima π . Seus ângulos internos são todos nulos.

2.8 Trigonometria Hiperbólica

Nesta seção, tratamos de alguns aspectos importantes do caso $n = 2$ nos modelos de Poincaré. O plano hiperbólico é especialmente importante, quando lidamos com **trigonometria hiperbólica**, uma vez que, dado um triângulo geodésico Δ qualquer em $\mathbb{H}^n$, existe subespaço totalmente geodésico isométrico a $\mathbb{H}^2$ que contém o triângulo Δ dado. Portanto, toda a trigonometria hiperbólica pode ser desenvolvida no $\mathbb{H}^2$.

Seja Δ triângulo hiperbólico com ângulos $0, \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq 0$. Chamamos o ângulo α de **ângulo de paralelismo** de Δ .

No modelo $\mathbb{H}^2$, Δ é representado com vértices ∞, i e p como na Figura 2.7.

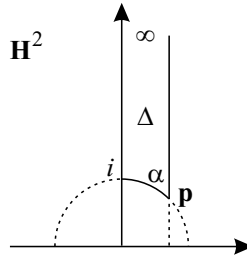


FIGURA 2.7: α é o ângulo de paralelismo do triângulo Δ .

Temos o resultado seguinte sobre ângulo de paralelismo.

Proposição 2.9 *Seja Δ triângulo hiperbólico com ângulos $0, \frac{\pi}{2}, \alpha \neq 0$ e vértices ∞, i, p . Consideremos $d = d_{\mathbb{H}^2}(i, p) < \infty$. Temos:*

- (i) $\tan \alpha = \frac{1}{\sinh d}$;
- (ii) $\sin \alpha = \frac{1}{\cosh d}$;
- (iii) $\sec \alpha = \frac{1}{\tanh d}$.

O teorema abaixo estabelece as identidades trigonométricas que relacionam ângulos e lados de triângulos hiperbólicos.

Teorema 2.5 *Seja Δ triângulo hiperbólico de lados com comprimentos hiperbólicos a, b, c finitos e ângulos opostos α, β, γ respectivamente. Temos:*

- (i) *Regra do seno:* $\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$;

(ii) *Regra do cosseno I*: $\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$;

(iii) *Regra do cosseno II*: $\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$.

A regra do cosseno II não possui análoga na geometria euclidiana e significa que, se dois triângulos hiperbólicos possuem os mesmos ângulos, deverão possuir as mesmas medidas de lados ($f(x) = \cosh x$ é injetora em $\mathbb{R}_+$), ou seja, os ângulos determinam as medidas dos lados. Conclusão: dados dois triângulos hiperbólicos com os mesmos ângulos internos, existe uma isometria que mapeia um triângulo no outro.

Corolário 2.1 (*Teorema de Pitágoras hiperbólico*) Se $\gamma = \frac{\pi}{2}$ no teorema acima, então

$$\cosh c = \cosh a \cosh b.$$

Comparação entre Trigonometria Hiperbólica, Esférica e Euclidiana

O objetivo desta subseção é apenas estabelecer um paralelo entre as identidades do Teorema 2.5, enunciadas para triângulos hiperbólicos, com as respectivas identidades para triângulos esféricos e euclidianos.

Consideremos as variedades riemannianas $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{H}^2$.⁽⁶⁾

Teorema 2.6 *Seja Δ um triângulo em $\mathbb{M}$ de lados com comprimentos⁷ a, b, c e ângulos opostos α, β, γ respectivamente, Temos⁸:*

(A) Se $\mathbb{M} = \mathbb{S}^2$:

(i) *Regra do seno*: $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$;

(ii) *Regra do cosseno I*: $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$;

(iii) *Regra do cosseno II*: $\cos c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$.

(B) Se $\mathbb{M} = \mathbb{R}^2$:

(i) *Regra do seno*: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$;

(ii) *Regra do cosseno "I"*: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$;

(iii) *"Regra do cosseno II"*: $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\cos(\alpha + \beta)$ que é equivalente a $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

(C) Se $\mathbb{M} = \mathbb{H}^2$: (Teorema 2.5)

(i) *Regra do seno*: $\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$;

(ii) *Regra do cosseno I*: $\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$;

(iii) *Regra do cosseno II*: $\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$.

⁶Podemos estender estes espaços. Seja $r > 0$.

(i) $\mathbb{S}_r^2 = \{(r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ (coordenadas esféricas) munido da métrica $ds = r\sqrt{d\phi^2 + (\sin^2 \phi) d\theta^2}$. Este espaço é a esfera de raio r e suas geodésicas são os círculos máximos. $\mathbb{S}_r^2$ é variedade riemanniana de curvatura seccional constante $\frac{1}{r^2}$.

(ii) $\mathbb{R}_r^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ munido da métrica $ds = r\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Para $r = 1$, é o plano euclidiano. As geodésicas são as retas. $\mathbb{R}_r^2$ é variedade riemanniana de curvatura seccional constante nula.

(iii) $\mathbb{H}_r^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ munido da métrica $ds = r \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$. O espaço $\mathbb{H}_r^2$ é chamado de esfera de raio imaginário ir . Para $r = 1$, é o plano de Lobatchevski que estamos estudando. $\mathbb{H}_r^2$ é variedade riemanniana de curvatura seccional constante $-\frac{1}{r^2}$.

⁷Provenientes das respectivas métricas riemannianas.

⁸Os resultados apresentados continuam valendo para as variedades estendidas $\mathbb{S}_r^2, \mathbb{R}_r^2, \mathbb{H}_r^2$, bastando, para tal, dividir os comprimentos a, b, c por r onde estes ocorrerem nas identidades.

2.9 Grupos Fuchsianos

2.9.1 Grupos Discretos

Iniciamos o estudo dos grupos fuchsianos com o conceito de grupo discreto de isometrias. Mais uma vez, fizemos o estudo para $\mathbb{H}^2$; lembrando, entretanto, que tudo que foi feito em $\mathbb{H}^2$ possui análogo em $\mathbb{B}^2$.

Começamos com a estrutura de grupo topológico em $PSL_2(\mathbb{R})$.

Introduzimos uma norma em $PSL_2(\mathbb{R})$ do seguinte modo: seja

$$\begin{aligned} T_M : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{a\mathbf{z} + b}{c\mathbf{z} + d} \end{aligned}$$

isometria própria em $\mathbb{H}^2$. Definimos

$$\|T_M\| = \|M\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Com a distância induzida $d(T_M, T_N) = \|M - N\|$, $PSL_2(\mathbb{R})$ é um grupo topológico e a topologia é a induzida pela norma definida acima (é a topologia do $\mathbb{R}^4$).

Definição 2.8 Um subgrupo G de $PSL_2(\mathbb{R})$ é **discreto** quando a topologia induzida de $PSL_2(\mathbb{R})$ sobre G é discreta.

Percebemos que um subgrupo discreto de isometrias de $\mathbb{H}^2$ constitui um conjunto discreto de pontos em $\mathbb{R}^4$. Temos a seguinte caracterização dos subgrupos discretos de $PSL_2(\mathbb{R})$.

Proposição 2.10 $G \subset_{sg} PSL_2(\mathbb{R})$ é discreto se, e somente se, $T_{M_n} \longrightarrow \text{Id}$, $T_{M_n} \in G$ (convergência na norma definida acima) implica $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T_{M_n} = \text{Id}$ para $n > n_0$.

A definição de grupo fuchsiano é dada abaixo.

Definição 2.9 Um subgrupo discreto de $PSL_2(\mathbb{R})$ é chamado de **fuchsiano**.

Proposição 2.11 Se $T_M \in PSL_2(\mathbb{R})$ é isometria parabólica ou translação hiperbólica, então $\langle T_M \rangle$ é fuchsiano.

Se $\epsilon \in PSL_2(\mathbb{R})$ é elíptica, então $\langle \epsilon \rangle$ é finito se, e somente se, $\langle \epsilon \rangle$ é fuchsiano.

2.9.2 Grupos com Ação Propriamente Descontínua

As definições que seguem são válidas para espaços mais gerais que os modelos de Poincaré, por isso serão introduzidas de modo genérico.

Uma família $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{J}\}$ de subconjuntos de um espaço métrico $\mathbb{M}$ ($\mathcal{J}$ é um conjunto de índices) é chamada de **localmente finita**, quando, para qualquer conjunto compacto $K \subset \mathbb{M}$, temos $A_\alpha \cap K \neq \emptyset$ somente para um número finito de índices $\alpha \in \mathcal{J}$.

Se $x \in \mathbb{M}$ e G é grupo de homeomorfismos em $\mathbb{M}$, dizemos que $Gx = \{g(x) : g \in G\}$ é **órbita** de x por G . A **multiplicidade** de um elemento Gx é a ordem do **estabilizador** de x , ou seja, $|E_G(x)|$, sendo $E_G(x) = \{g \in G : g(x) = x\}$ (subgrupo de G que fixa x).

Definição 2.10 Dizemos que G age de maneira **propriamente descontínua** em $\mathbb{M}$, quando a órbita de qualquer ponto $x \in \mathbb{M}$ é localmente finita.

O resultado abaixo estabelece equivalências importantes envolvendo os conceitos definidos acima.

Proposição 2.12 *Seja G um grupo de homeomorfismos de um espaço métrico $\mathbb{M}$ localmente compacto⁹. São equivalentes:*

- A ação de G é propriamente descontínua.
- Para qualquer $x \in \mathbb{M}$, existe uma vizinhança aberta V_x de x tal que $g(V_x) \cap V_x \neq \emptyset$ apenas para uma quantidade finita de elementos $g \in G$.
- Para $\forall x \in \mathbb{M}$, $\exists V_x$ aberto contendo x tal que $(g(V_x) \cap V_x \neq \emptyset \Rightarrow g(x) = x, \forall g \in G)$.
- Seja $K \subset \mathbb{M}$ compacto. Temos $g(K) \cap K \neq \emptyset$ apenas para um número finito de elementos $g \in G$.

Retornando aos modelos de Poincaré, temos os resultados seguintes.

Proposição 2.13 (i) *Se $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^2$ e $K \subset \mathbb{H}^2$ é compacto, então o conjunto*

$$C = \{T_M \in PSL_2(\mathbb{R}) : T_M(\mathbf{x}) \in K\}$$

é compacto (topologia de $PSL_2(\mathbb{R})$).

(ii) *Se $G \subset_{sg} PSL_2(\mathbb{R})$ tem ação propriamente descontínua em $\mathbb{H}^2$, então o conjunto*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^2 : \exists T_M \in G \text{ com } T_M(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$$

é discreto.

O seguinte resultado é central.

Proposição 2.14 *$G \subset_{sg} PSL_2(\mathbb{R})$ é fuchsiano se, e somente se, sua ação for propriamente descontínua em $\mathbb{H}^2$.*

Desta proposição e das equivalências acima (Proposição 2.12), resulta que $G \subset_{sg} PSL_2(\mathbb{R})$ é fuchsiano se, e somente se, a órbita de qualquer ponto de $\mathbb{H}^2$ por G for discreta. Este resultado não é válido para $\widehat{\mathbb{H}}^2$ e como contra-exemplo, temos o grupo $PSL_2(\mathbb{Z}) \subset PSL_2(\mathbb{R})$ que é discreto, mas a órbita de um ponto $\mathbf{p} \in \mathbb{Q} \times \{0\} \subset \partial\mathbb{H}^2$ é densa em $\partial\mathbb{H}^2$. O grupo $PSL_2(\mathbb{Z})$ recebe o nome de **grupo modular**.

Encerramos a subseção com o conceito de conjunto limite.

Definição 2.11 *O conjunto de todos os pontos de acumulação das órbitas de pontos $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^2$ por um grupo fuchsiano G é chamado de **conjunto limite** de G e indicado por $\Lambda(G)$.*

Na verdade, $\Lambda(G)$ pode ser obtido apenas pelos pontos de acumulação de uma órbita arbitrária qualquer, pois os pontos de acumulação de qualquer órbita em $\widehat{\mathbb{H}}^n$ são os mesmos.

De imediato, temos que se G é fuchsiano, então $\Lambda(G) \subset \partial\mathbb{H}^2$. Além disso, $\Lambda(G)$ é invariante por elementos de G .

Baseados nestes apontamentos, dizemos que um grupo fuchsiano é de **primeiro tipo** se $\Lambda(G) = \partial\mathbb{H}^2$ e de **segundo tipo** caso contrário.

Finalizando, um resultado interessante: $\Lambda(PSL_2(\mathbb{Z})) = \partial\mathbb{H}^2$.

2.9.3 Grupos Fuchsianos Abelianos

Definimos o **centralizador** de um elemento T_M de $PSL_2(\mathbb{R})$ como sendo o conjunto $C_{PSL_2(\mathbb{R})}(T_M) = \{\varphi \in PSL_2(\mathbb{R}) : T_M \varphi T_M^{-1} \varphi^{-1} = \text{Id}\}$ (grupo dos elementos de $PSL_2(\mathbb{R})$ que comutam com T_M). Baseado neste conceito, temos dois resultados interessantes.

Proposição 2.15 (i) *Dois elementos de $PSL_2(\mathbb{R})$ comutam se, e somente se, possuírem os mesmos pontos fixos.*

(ii) *O centralizador de uma isometria elíptica ϵ de $PSL_2(\mathbb{R})$ é composto por todas as isometrias elípticas que possuem o mesmo ponto fixo de ϵ , além da identidade. Resultado análogo vale para isometrias parabólicas e translações hiperbólicas.*

⁹todo ponto x de $\mathbb{M}$ possui uma vizinhança compacta, ou seja, $\exists K_x$ compacto tal que $x \in \overset{\circ}{K}_x$.

Proposição 2.16 *Se quaisquer T_M e T_N pertencentes ao grupo fuchsiano G (diferentes da identidade) possuem o mesmo conjunto de pontos fixos, então G é cíclico.*

Sintetizando, temos o resultado seguinte.

Teorema 2.7 *Todo grupo fuchsiano abeliano é cíclico.*

Definimos o **normalizador** de um grupo fuchsiano G como sendo o conjunto $N_{PSL_2(\mathbb{R})}(G) = \{T_M \in PSL_2(\mathbb{R}) : T_M G T_M^{-1} = G\}$ (o maior subgrupo de $PSL_2(\mathbb{R})$ no qual G é subgrupo normal) e encerramos esta subseção com um resultado referente a grupos fuchsianos não abelianos.

Proposição 2.17 *O normalizador de um grupo fuchsiano não abeliano em $PSL_2(\mathbb{R})$ é fuchsiano.*

2.9.4 Grupos Fuchsianos Elementares

Questionamentos a respeito da órbita de elementos de $\mathbb{H}^2$ sob a ação de grupos fuchsianos levam-nos a uma classificação que possui resultados bastante relevantes, como os que citamos abaixo. Começamos com uma definição um pouco mais abrangente: $G \subset PSL_2(\mathbb{R})$ é dito **elementar** se $\exists \mathbf{x} \in \widehat{\mathbb{H}}^2$ tal que a órbita de $\mathbf{x}$ por G é finita. Caso contrário, diremos que G é **não-elementar**.

Proposição 2.18 (i) *Se $G \subset PSL_2(\mathbb{R})$ possui somente isometrias elípticas (além da identidade), então G é elementar e cíclico.*

(ii) *Se G é grupo fuchsiano elementar, então uma das alternativas ocorre:*

- G é cíclico;
- G é conjugado em $PSL_2(\mathbb{R})$ ao grupo

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{e^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{e^k}} \end{pmatrix}; k \in \mathbb{R}_+^* \right\rangle.$$

Finalmente, caracterizações de grupos não-elementares.

Proposição 2.19 (i) *Um grupo não-elementar de $PSL_2(\mathbb{R})$ possui translação hiperbólica.*

(ii) (**Desigualdade de Jorgensen**) *Sejam $T_M, T_N \in PSL_2(\mathbb{R})$ e $\langle T_M, T_N \rangle$ discreto e não-elementar. Temos*

$$\left| (\text{Tr}(T_M))^2 - 4 \right| + \left| (\text{Tr}(T_M T_N T_M^{-1} T_N^{-1})) - 2 \right| \geq 1.$$

(iii) *$G \subset PSL_2(\mathbb{R})$ discreto é não-elementar se, e somente se, $\forall T_M, T_N \in G$ temos $\langle T_M, T_N \rangle$ discreto.*

2.9.5 Região Fundamental

Para nossos propósitos, é interessante uma relação entre grupos discretos de isometrias e certos tipos de ladrilhamento do espaço hiperbólico.

Um primeiro passo nesta direção é dado (mais uma vez de modo abrangente) pelo seguinte conceito:

Definição 2.12 *Sejam $\mathbb{M}$ um espaço métrico e G um grupo de homeomorfismos agindo de modo propriamente descontínuo em $\mathbb{M}$. Dizemos que um subconjunto fechado $F \subset \mathbb{M}$ é **domínio fundamental** de G se:*

- (i) $\bigcup_{g \in G} g(F) = \mathbb{M}$;
- (ii) $\overset{\circ}{F} \cap g(\overset{\circ}{F}) = \emptyset, g \neq \text{Id}$;
- (iii) $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$.

Em virtude de $\{g(F) : g \in G\}$ formar um ladrilhamento de $\mathbb{M}$, chamamos F , às vezes, de *ladrilho*.

O próximo passo é bastante proveitoso por estabelecer uma relação entre domínios fundamentais de grupos.

Proposição 2.20 *Sejam:*

- $\mathbb{M}$ espaço métrico;
- G grupo de isometrias agindo de modo propriamente descontínuo em $\mathbb{M}$;
- F domínio fundamental de G ;
- $H \subset G$ de índice $n < \infty$ e $g_1, \dots, g_n \in G$ tais que $G = g_1 H \cup \dots \cup g_n H$ seja decomposição de G em classes laterais.

Então $F' = g_1(F) \cup \dots \cup g_n(F)$ é domínio fundamental de H .

Quando estamos trabalhando com isometrias, exigimos uma definição de domínio fundamental em que o volume (hiperbólico) seja invariante por ação dessas isometrias. Consequentemente, dois domínios fundamentais de um grupo de isometrias possuem sempre o mesmo volume, o que podemos verificar pelo próximo resultado.

Proposição 2.21 *Dois domínios fundamentais F_1 e F_2 de um grupo fuchsiano G tal que $\mu_{\mathbb{H}^2}(F_1) < \infty$ e $\mu_{\mathbb{H}^2}(\partial F_1) = \mu_{\mathbb{H}^2}(\partial F_2) = 0$ são tais que $\mu_{\mathbb{H}^2}(F_1) = \mu_{\mathbb{H}^2}(F_2)$.⁽¹⁰⁾*

Como consequência dos últimos resultados, temos: se H é um subgrupo de índice $n < \infty$ do grupo fuchsiano G tal que F e F' são domínios fundamentais de G e H respectivamente, $\mu_{\mathbb{H}^2}(F) < \infty$ e $\mu_{\mathbb{H}^2}(\partial F) = 0$, então $\mu_{\mathbb{H}^2}(F') = n\mu_{\mathbb{H}^2}(F)$.

Domínios de Dirichlet

Como vimos, a órbita de um ponto $\mathbf{p} \in \mathbb{H}^2$ por um grupo fuchsiano G é discreta. Isto nos remete ao estudo de um tipo especial de conjunto que, a primeira vista, é um candidato natural a domínio fundamental; porém, com propriedades importantes. É o domínio de Dirichlet.

Definição 2.13 *Sejam G grupo fuchsiano e $\mathbf{p} \in \mathbb{H}^2$ tal que $T_M(\mathbf{p}) \neq \mathbf{p}$, $\forall T_M \in G$. O conjunto*

$$D_{\mathbf{p}}(G) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^2 : d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \leq d_{\mathbb{H}^2}(T_M(\mathbf{p}), \mathbf{x}), \forall T_M \in G\}$$

*é chamado de **domínio de Dirichlet** (ou **região de Voronoi**¹¹) de G em $\mathbf{p}$.*

Proposição 2.22 *Todo domínio de Dirichlet de um grupo fuchsiano em um ponto de $\mathbb{H}^2$ é domínio fundamental.*

Como consequência deste resultado, todo domínio de Dirichlet é convexo (geodesicamente).

Os próximos resultados mostram como os domínios de Dirichlet podem ser úteis para a compreensão da estrutura de um grupo fuchsiano.

Proposição 2.23 *Sejam G grupo fuchsiano e $\mathbf{p} \in \mathbb{H}^2$ tal que $D_{\mathbf{p}}(G)$ é domínio de Dirichlet.*

(i) O ladrilhamento proveniente de um domínio de Dirichlet de G em $\mathbf{p}$; $\{T_M(D_{\mathbf{p}}(G)) : T_M \in G\}$; é localmente finito.

(ii) Dado $\mathbf{x} \in \partial D_{\mathbf{p}}(G)$; fronteira de $D_{\mathbf{p}}(G)$; $\exists T_M \in G$, $T_M \neq \text{Id}$, tal que $T_M(\mathbf{x}) \in \partial D_{\mathbf{p}}(G)$.

Para os próximos resultados, é conveniente estabelecer uma distinção entre os vértices da fronteira (composta por geodésicas, raios ou segmentos geodésicos) de um domínio de Dirichlet.

O ponto de encontro de duas arestas distintas de $D_{\mathbf{p}}(G)$ é chamado de **vértice ordinário** de $D_{\mathbf{p}}(G)$. Se G possuir isometrias elípticas de ordem dois, então os pontos fixos destas isometrias estão sobre as arestas da fronteira de $D_{\mathbf{p}}(G)$ (e não coincidem com os vértices ordinários). A estes pontos fixos, chamamos de **vértices singulares** de $D_{\mathbf{p}}(G)$.

¹⁰ ∂F é fronteira topológica de F .

¹¹Ver Definição 3.1.

Proposição 2.24 *Sejam G grupo fuchsiano, $\mathbf{p} \in \mathbb{H}^2$ e $D_{\mathbf{p}}(G)$ domínio de Dirichlet de G em $\mathbf{p}$.*

(i) *Dada uma aresta A de $D_{\mathbf{p}}(G)$, $\exists T_M \in G$, $T_M \neq \text{Id}$, tal que $A \subset D_{\mathbf{p}}(G) \cap T_M(D_{\mathbf{p}}(G))$.*

(ii) *Seja v vértice de $D_{\mathbf{p}}(G)$. Temos:*

v é vértice ordinário de $D_{\mathbf{p}}(G)$ se, e somente se, $\exists T_M, T_N \in G$, $T_M, T_N \neq \text{Id}$ tais que $v = D_{\mathbf{p}}(G) \cap T_M(D_{\mathbf{p}}(G)) \cap T_N(D_{\mathbf{p}}(G))$.

Dizemos que duas arestas A_1 e A_2 de um domínio de Dirichlet $D_{\mathbf{p}}(G)$ são equivalentes se $\exists T_M \in G$ tal que $T_M(A_1) = A_2$. É imediato verificar que esta é uma relação de equivalência. Temos o resultado seguinte envolvendo tal relação.

Proposição 2.25 *Cada classe de equivalência de arestas de um domínio de Dirichlet possui dois elementos.*

Por conseguinte, se $D_{\mathbf{p}}(G)$ possui uma quantidade finita de arestas, estas necessariamente devem ocorrer em número par. Além disso, dado A_1 aresta de $D_{\mathbf{p}}(G)$, $\exists! T_M \in G$ e $\exists! A_2$ aresta de $D_{\mathbf{p}}(G)$ tal que $T_M(A_1) = A_2$. Por esse motivo, chamamos A_1 e A_2 de **arestas parelhadas** (ou identificadas).

É conveniente também definirmos uma classe de equivalência especial de vértices de um domínio de Dirichlet: os ciclos.

Chamamos de **ciclo** o conjunto

$$C = \{T_M(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \text{ e } T_M(\mathbf{x}) \text{ são vértices de } D_{\mathbf{p}}(G)\}.$$

É fácil verificarmos que C é finito (posto que o ladrilhamento associado a $D_{\mathbf{p}}(G)$ é localmente finito).

O próximo resultado é central nesta subseção.

Teorema 2.8 *Sejam G grupo fuchsiano e $\mathbf{p} \in \mathbb{H}^2$ tal que $D_{\mathbf{p}}(G)$ é domínio de Dirichlet de G em $\mathbf{p}$.*

(i) *O conjunto dos elementos de G que parelham arestas distintas de $D_{\mathbf{p}}(G)$ são geradores de G .*

(ii) *Sejam $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vértices de um ciclo de $D_{\mathbf{p}}(G)$ com ângulos internos $\theta_1, \dots, \theta_n$ respectivamente e m a ordem do estabilizador de G em um destes vértices (a ordem é igual em qualquer vértice de um mesmo ciclo). Então, $\theta_1 + \dots + \theta_n = \frac{2\pi}{m}$.*

Como ilustração, na Figura 2.8 temos dois domínios de Dirichlet centrados em $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ no modelo do disco $\mathbb{B}^2$.

O primeiro domínio é do grupo fuchsiano G_1 gerado pelas translações hiperbólicas parelhadoras $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_6$. Trata-se de um dodecágono regular hiperbólico com ângulo interno $\frac{\pi}{6}$ cujos 12 vértices ordinários formam um único ciclo. Como não há isometrias elípticas em G_1 com centro em qualquer vértice $\mathbf{v}_j$, a ordem do estabilizador de G_1 em $\mathbf{v}_j$ é 1. Vemos que os 12 vértices são identificados e a soma dos ângulos é 2π .

O segundo domínio é do grupo fuchsiano G_2 gerado pelas translações hiperbólicas parelhadoras $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_7$. Trata-se de um polígono regular hiperbólico de 14 lados com ângulo interno $\frac{2\pi}{7}$ cujos vértices ordinários numerados pelos 7 ímpares (bolas vazadas) formam um ciclo e os numerados pelos 7 pares (bolas cheias) formam outro ciclo. Como não há isometrias elípticas em G_2 com centro em qualquer vértice $\mathbf{v}_j$, a ordem do estabilizador de G_2 em $\mathbf{v}_j$ é 1. Vemos que os 7 vértices pares são todos identificados assim como os 7 ímpares e a soma dos ângulos de cada ciclo é 2π .

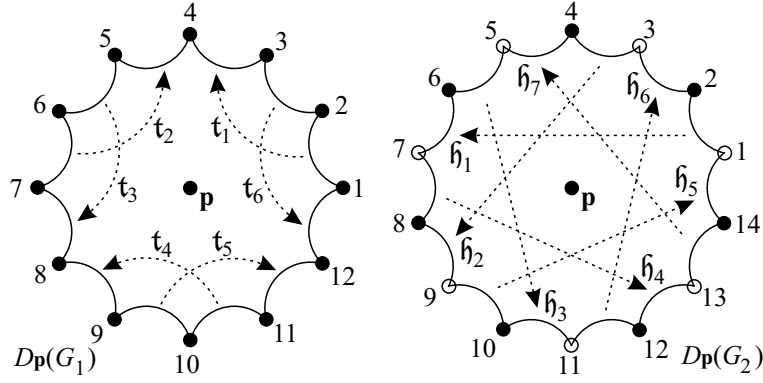


FIGURA 2.8: Domínios de Dirichlet $D_{\mathbf{p}}(G_j)$ em $\mathbf{p} = \mathbf{0} \in \mathbb{B}^2$ de $G_1 = \langle t_1, \dots, t_6 \rangle$ e $G_2 = \langle h_1, \dots, h_7 \rangle$ e seus ciclos.

Veremos no Capítulo 4 que tanto G_1 quanto G_2 geram uma superfície quociente localmente isométrica a $\mathbb{B}^2$ com gênero 3 (tritoro).

2.9.6 Grupos Fuchsianos Geometricamente Finitos

Região de Nielsen

Como o domínio de Dirichlet de um grupo fuchsiano possui formato poligonal (no sentido hiperbólico), o seu estudo nos remete a uma classe de domínios fundamentais específicos: os domínios fundamentais poligonais. Particularmente, chamamos um grupo fuchsiano G de **geometricamente finito** se existir algum domínio fundamental poligonal convexo, com um número finito de arestas, associado a G .

Vimos na subseção anterior que se um domínio de Dirichlet possui um número finito de arestas, o grupo fuchsiano associado é finitamente gerado. Assim sendo, o objetivo, neste tópico, é estabelecer relações entre grupos fuchsianos finitamente gerados e grupos fuchsianos geometricamente finitos. Para tanto, precisamos definir um tipo especial de conjunto em $\mathbb{H}^2$ que chamaremos de **região de Nielsen**, que é o menor (no sentido de área hiperbólica) subconjunto aberto e convexo de $\mathbb{H}^2$ invariante por G . Denotamos tal região por $N(G)$.

Os seguintes resultados sobre região de Nielsen são bastante significativos.

Proposição 2.26 *Seja G grupo fuchsiano.*

- (i) *Se G é de primeiro tipo, então $N(G) = \mathbb{H}^2$.*
- (ii) *Se G é não-elementar, então $N(G)$ pode ser obtida univocamente a partir da união disjunta e enumerável dos segmentos abertos que compõem $\partial\mathbb{H}^2 - \Lambda(G)$.*

O principal resultado desta subseção é dado pela proposição abaixo.

Proposição 2.27 *Seja G grupo fuchsiano não-elementar e $N(G)$ sua região de Nielsen. São equivalentes:*

- *G é geometricamente finito.*
- *Dado um polígono fundamental convexo P , $\mu_{\mathbb{H}^2}(P \cap N(G)) < \infty$.*
- *G é finitamente gerado.*

Assinaturas de Grupos Fuchsianos

Trabalhamos, neste tópico, com um pouco de espaços quocientes. Particularmente, com $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$ sendo G grupo fuchsiano. Uma das primeiras perguntas que surge neste contexto é a respeito da compacidade do espaço quociente (com a topologia quociente). Para fixar nomenclatura, doravante diremos que um grupo fuchsiano G é **co-compacto** se $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$ for uma superfície compacta.

De maneira óbvia, se G está associado a um domínio fundamental compacto, então G é co-compacto. A recíproca também é verídica, conforme resultado abaixo.

Proposição 2.28 *Um grupo fuchsiano que possua domínio fundamental convexo não-compacto não é co-compacto.*

Como consequência, um grupo fuchsiano é co-compacto se, e somente se, possuir por domínio de Dirichlet um conjunto compacto.

Seguem alguns resultados associados a grupos co-compactos.

Proposição 2.29 (i) *Todo grupo fuchsiano co-compacto não possui isometrias parabólicas.*

(ii) *Sejam G grupo fuchsiano e $\mathbf{p} \in \mathbb{H}^2$ tal que $D_{\mathbf{p}}(G)$ é domínio de Dirichlet.*

Se $D_{\mathbf{p}}(G)$ não é compacto mas possui área finita, então:

- $D_{\mathbf{p}}(G)$ possui pelo menos um vértice na fronteira ideal e todo ponto de $D_{\mathbf{p}}(G)$ na fronteira ideal é vértice.

- Cada ponto na fronteira ideal de $D_{\mathbf{p}}(G)$ é fixo por alguma isometria parabólica de G .

- Se $\mathbf{x} \in \partial\mathbb{H}^2$ é ponto fixo de alguma isometria parabólica, então $\exists T_M \in G$ tal que $T_M(\mathbf{x})$ é ponto na fronteira ideal de $D_{\mathbf{p}}(G)$.

Em decorrência dos resultados acima expostos, um grupo fuchsiano G é co-compacto se, e somente se, $\mu_{\mathbb{H}^2}\left(\frac{\mathbb{H}^2}{G}\right) < \infty$ e G não possui isometrias parabólicas.

Consideremos G co-compacto e $D_{\mathbf{p}}(G)$ domínio de Dirichlet compacto de G em $\mathbf{p}$. Temos $D_{\mathbf{p}}(G)$ com um número finito de vértices e, portanto, com um número finito de ciclos. Consideremos um eventual ciclo C que possui vértices (ordinários ou singulares) fixados por isometrias elípticas de G . Como os estabilizadores de vértices de um mesmo ciclo são conjugados entre si, estes possuem a mesma ordem nos vértices de um ciclo. Chamemos de m a ordem de um estabilizador de um vértice de C . De modo análogo ao ciclo C , tomemos todos os ciclos de $D_{\mathbf{p}}(G)$ que possuem vértices fixos por isometrias elípticas de G e chamemos de $m_1, \dots, m_r$ a ordem de seus estabilizadores de vértices.

Iremos chamar de **assinatura** de G a $(r+1)$ -upla $(g, m_1, \dots, m_r)$ sendo $m_1, \dots, m_r$ obtidos como no parágrafo anterior e g o gênero de $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$.

Enunciamos abaixo um importante (e impressionante) resultado envolvendo assinaturas.

Teorema 2.9 (i) *Seja G grupo fuchsiano co-compacto com assinatura $(g, m_1, \dots, m_r)$. Temos*

$$\mu_{\mathbb{H}^2}\left(\frac{\mathbb{H}^2}{G}\right) = 2\pi \left(2(g-1) + \sum_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_k} \right) \right).$$

(ii) *Dados inteiros $g, r \geq 0, m_k \geq 2$ tais que*

$$2(g-1) + \sum_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_k} \right) > 0$$

então existe G , grupo fuchsiano co-compacto, com assinatura $(g, m_1, \dots, m_r)$.

Como consequência do resultado acima, toda superfície compacta Σ com gênero $g \geq 2$ pode ser modelada pelo plano hiperbólico (ou seja, $\exists G$ grupo fuchsiano tal que $\Sigma \equiv \frac{\mathbb{H}^2}{G}$).

A condição de G ser co-compacto pode ser enfraquecida de modo a termos ainda um resultado semelhante. Neste caso, levamos em consideração o número s de ciclos cujos vértices são fixados por isometrias parabólicas e a assinatura de G será denotada por $(g, m_1, \dots, m_r; s)$. Eis o novo resultado.

Teorema 2.10 (i) *Seja G grupo fuchsiano tal que $\mu_{\mathbb{H}^2} \left(\frac{\mathbb{H}^2}{G} \right) < \infty$ e com assinatura $(g, m_1, \dots, m_r; s)$. Temos*

$$\mu_{\mathbb{H}^2} \left(\frac{\mathbb{H}^2}{G} \right) = 2\pi \left(2(g-1) + s + \sum_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_k} \right) \right).$$

(ii) *Dados inteiros $g, r, s \geq 0$, $m_k \geq 2$ tais que*

$$2(g-1) + s + \sum_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_k} \right) > 0$$

então existe G , grupo fuchsiano geometricamente finito, com assinatura $(g, m_1, \dots, m_r; s)$.

2.10 Grupos Triângulos

Uma classe importante de grupos finitamente gerados agindo em $\mathbb{H}^2$ ou $\mathbb{B}^2$ são os gerados pelas inversões ou reflexões nas geodésicas suportes de um triângulo hiperbólico Δ (de ângulos internos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$). Chamamos um grupo assim obtido de **grupo triângulo** e indicamos por T_Δ . Notemos que grupos triângulos não são fuchsianos e, dependendo dos valores de θ_i , podem não ser discretos. Um grupo triângulo sempre possui um subgrupo de índice dois composto pelas isometrias que preservam orientação de ângulos.

Envolvendo tais grupos, há alguns resultados importantes e, ademais, interessantes.

Proposição 2.30 *Seja T_Δ grupo triângulo tal que seu subgrupo de índice dois composto pelas isometrias que preservem orientação de ângulos seja fuchsiano. Então, os ângulos internos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ de Δ são tais que $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \leq \frac{41}{42}\pi$.*

Um subgrupo de $PSL_2(\mathbb{R})$ é **grupo de tipo** (p, q, r) ; $p, q, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ - e indicamos por G_Δ , sendo Δ triângulo hiperbólico de ângulos internos $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$ - se existir um grupo triângulo T_Δ tal que $G_\Delta = T_\Delta \cap PSL_2(\mathbb{R})$. Assumindo esta terminologia, finalizamos o resumo do estudo de grupos fuchsianos com a interessante proposição enunciada a seguir.

Proposição 2.31 $G \subset_{sg} PSL_2(\mathbb{R})$ *é grupo de tipo (p, q, r) se, e somente se, G for discreto, de primeiro tipo e de assinatura $(0, p, q, r; 0)$.*

2.11 Grupos Kleinianos

Nesta seção, apenas introduzimos o conceito de grupo kleiniano, que é uma extensão natural dos fuchsianos. Um estudo mais aprofundado sobre o tema, bem como suas diversas propriedades, pode ser encontrado em [8], Capítulos 2 a 5; [11] e [42].

Começemos com a definição formal de tais grupos.

Definição 2.14 *Seja K subgrupo discreto de $PSL_2(\mathbb{C}) = \frac{SL_2(\mathbb{C})}{\{\pm \text{Id}\}}$. Dizemos que K é **kleiniano** se existir $A \neq \emptyset$ conjunto aberto de $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tal que K age de maneira propriamente descontínua em A , ou seja, $A \cap Kx$ é finito para qualquer $x \in A$.*

A ação de K sobre $\tilde{\mathbb{C}}$ é definida por

$$\left(\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \mathbf{z} \right) \right) \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{matrix} \begin{matrix} \tilde{\mathbb{C}} \\ \frac{az+b}{cz+d} \end{matrix}.$$

Vimos que $G \subset \underset{sg}{PSL_2}(\mathbb{R})$ é fuchsiano se, e somente se, G age de maneira propriamente descontínua em $A = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} : \text{Im } \mathbf{z} > 0\}$. Com efeito, todo grupo fuchsiano é um grupo kleiniano.

Vimos, também, que se munirmos A da métrica riemanniana $ds = \frac{|dz|}{\text{Im } z}$, obtemos o modelo euclidiano $\mathbb{H}^2$ para a geometria hiperbólica plana. Como consequência, $PSL_2(\mathbb{R}) \equiv \text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$. Portanto, um grupo fuchsiano é um grupo discreto (como grupo topológico) de isometrias de $\mathbb{H}^2$.

Definindo $\mathbb{H}^3$ como sendo $C = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : t > 0\}$ e munindo-o da métrica riemanniana

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dt^2}}{t},$$

podemos enxergar os grupos kleinianos como grupos discretos de isometrias de $\mathbb{H}^3$, que é um modelo euclidiano para a geometria hiperbólica tridimensional. Esta associação dos grupos kleinianos com as isometrias se faz do seguinte modo: tomemos $\mathbb{H}^3$ como subconjunto da álgebra dos quatérnios $Q_A = (\{x1 + yi + tj + vk : x, y, t, v \in \mathbb{R}\}, +, \cdot)$; (a multiplicação é proveniente da operação do grupo dos quatérnios $Q = \langle i, j, k : i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j \rangle$). Definamos a ação de K sobre $\mathbb{H}^3$ como sendo

$$\begin{aligned} K \times \mathbb{H}^3 &\longrightarrow \mathbb{H}^3 \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (x, y, t) \right) &\longmapsto \frac{a(x1 + yi + tj) + b}{c(x1 + yi + tj) + d} \end{aligned}$$

($\mathbb{H}^3$ é invariante sob a ação de subgrupos de $PSL_2(\mathbb{C})$). Feito isto, é possível mostrar que $PSL_2(\mathbb{C}) \equiv \text{Iso}^+(\mathbb{H}^3)$. Portanto, um grupo kleiniano é um grupo discreto de isometrias de $\mathbb{H}^3$.

Temos o resultado seguinte, análogo ao caso fuchsiano.

Proposição 2.32 *Um subgrupo de $PSL_2(\mathbb{C})$ é discreto se, e somente se, age de maneira propriamente descontínua em $\mathbb{H}^3$.*

Como consequência, um grupo kleiniano K age de maneira propriamente descontínua em $\mathbb{H}^3$.

Terminamos esta breve introdução observando que existem grupos discretos de isometrias que agem de maneira propriamente descontínua em $\mathbb{H}^3$, mas que não são kleinianos. Como principal exemplo, podemos observar o grupo de Picard.

$$\text{Seja } H = \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\rangle.$$

H é discreto, mas não age de maneira propriamente descontínua em nenhum subconjunto não-vazio de $\tilde{\mathbb{C}}$, pois o conjunto dos pontos de acumulação de uma órbita qualquer Hx_0 (que está em $\tilde{\mathbb{C}}$) contém $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

H é o grupo $PSL_2(\mathbb{Z}[i])$ que é conhecido como **grupo de Picard**, sendo

$$\mathbb{Z}[i] = (\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$$

anel dos inteiros de Gauss.

Essas propriedades do grupo de Picard são provenientes do Teorema 2.2, página 60 e seção V.1 do Capítulo 5 de [48].

Capítulo 3

Probabilidade de Erro Associada a Constelações de Sinais em Espaços Hiperbólicos

3.1 Introdução

Neste capítulo, introduzimos distribuições de probabilidade para o espaço hiperbólico. A principal motivação para tal estudo, conforme já citada na Seção 1.8, é a diversidade de conjuntos de pontos com propriedades interessantes em termos de simetria que não possuem análogas no espaço euclidiano. No entanto, paralelo ao estudo de constelações de sinais que podem ser usadas em esquemas de modulação, segue a questão da modelagem do tipo de ruído que afeta o canal de um sistema de comunicações com *modulação hiperbólica*. Este capítulo é uma contribuição nesse sentido e, a exemplo do que ocorre no espaço euclidiano onde o principal tipo de ruído - o *AWGN* - está associado a uma distribuição de probabilidades gaussiana, fizemos a modelagem da distribuição de probabilidades, que pode estar associada ao ruído do *canal hiperbólico*, baseados nas mesmas propriedades da distribuição gaussiana euclidiana. Nesta linha, existe o trabalho de Brandani [19] que introduziu o estudo no caso hiperbólico bidimensional. O presente capítulo contém uma extensão desse trabalho tanto no caso bidimensional como para dimensões maiores.

Sob o ponto de vista prático, há uma importante questão, ainda não resolvida a contento, sobre o modo com que o *ruído hiperbólico* atua sobre o *sinal hiperbólico*. No caso do ruído *AWGN*, este é *aditivo*, ou seja, assim como o sinal pode ser representado no espaço euclidiano como pontos, o ruído também. Devido à estrutura vetorial do $\mathbb{R}^n$, está definida a soma vetorial entre o vetor-sinal e o vetor-ruído, a qual constitui um novo vetor-sinal que pode ou não estar na região de Voronoi do vetor-sinal original. No caso hiperbólico, não temos a estrutura de espaço vetorial que permite uma operação de “soma vetorial” (ou “multiplicação por escalar”) fechada no espaço, o que significa dizer que, embora haja a possibilidade de associar sinais e ruídos a pontos nos modelos hiperbólicos, não está clara a maneira como o ruído afeta o sinal, que se traduziria em uma operação fechada (não vetorial) no espaço hiperbólico. Em relação à reta hiperbólica, este problema não ocorre devido à isometria existente com a reta real, fazendo com que a “operação” seja transportada e realizada em ambiente real. Para o caso n -dimensional ($n \geq 2$), não dispomos de semelhante recurso. No entanto, a não caracterização da aditividade não impede a análise de probabilidade de erro uma vez estabelecida uma cota superior para o ruído. Neste sentido as distribuições gaussianas podem ser estendidas ao espaço hiperbólico.

Trabalhamos, portanto, na modelagem teórica da distribuição de probabilidades do *ruído hiperbólico* e, também, de um estimador para a probabilidade de erro associada a sinais hiperbólicos. Para tanto, iniciamos com o estudo de um importante limitante superior para a probabilidade de erro em canais *AWGN*, que serve de base para desenvolvimento análogo em canais hiperbólicos. Antes, porém, apresentamos algumas simplificações de vocabulário que foram utilizadas em seções ulteriores:

(i) Uma *função densidade de probabilidade* ou *distribuição de probabilidade* associada a uma variável aleatória contínua assumindo valores em um espaço amostral $\mathbb{E}$ é chamada simplesmente de *densidade* em $\mathbb{E}$.

(ii) A *média* e a *variância* de uma variável aleatória contínua, com função densidade de probabilidade f , assumindo valores em um espaço amostral $\mathbb{E}$ é designada, concisamente, por *média e variância da densidade* f .

3.2 Probabilidade de Erro em Canais Gaussianos

Uma das principais preocupações no estudo de modulação de sinais é encontrar meios para determinar ou estimar a probabilidade de erro associada a sinais. Para canais afetados por ruído do tipo *AWGN*, o cálculo aproximado da probabilidade de erro pode ser feito por estimadores como, por exemplo, o *limitante de Bhattacharyya* ([9], pp. 191-192). Este estimador pode ser aplicado a constelações de sinais no espaço euclidiano de qualquer dimensão. Nosso objetivo, nesta seção, é apresentar uma demonstração geométrica de um estimador para a probabilidade de erro associada a sinais equiprováveis (todos os sinais com a mesma probabilidade de serem escolhidos para a transmissão) que possui o limitante de Bhattacharyya como caso particular. Baseados nesta demonstração e sob certas restrições, desenvolvemos adiante um limitante para a probabilidade de erro associada a sinais em espaços hiperbólicos. Para tanto, começamos por estender o conceito de região de Voronoi, já introduzido na Definição 2.13 (domínios de Dirichlet), para o caso hiperbólico.

Definição 3.1 *Seja $\mathcal{C}$ uma constelação de sinais em um espaço métrico $(\mathbb{M}, d)$ e $p \in \mathcal{C}$. Ao conjunto*

$$V_p = \{r \in \mathbb{M} : d(p, r) \leq d(r, q), \forall q \in \mathcal{C}\}$$

*denotamos por **região de Voronoi** de p em $\mathbb{M}$.*

Consideremos uma constelação de M sinais equiprováveis que esteja representada no $\mathbb{R}^n$. Vimos que o ruído $n(t)$ do tipo *AWGN* age de maneira aditiva no espaço, ou seja, quando se envia o sinal $\mathbf{s}_k \equiv s_k(t)$, o que se recebe é o sinal

$$r(t) = s_k(t) + n(t)$$

sendo $n(t)$ determinado por uma densidade gaussiana com média $\mathbf{0}$ e variância σ^2 .⁽¹⁾

Naturalmente, se $\mathbf{r} \equiv r(t)$ for um ponto pertencente à região de Voronoi V_k do sinal $\mathbf{s}_k$, o demodulador fará opção por $\mathbf{s}_k$ para continuar o processo de decodificação. É claro que, se o ruído $n(t)$ for tal que $\mathbf{r}$ seja um ponto fora de V_k , temos um erro de decodificação, uma vez que $\mathbf{s}_k$ não será escolhido. Observemos ainda que o sucesso na decodificação do sinal depende também da distância entre os sinais, que, por sua vez, depende da quantidade de energia E que se disponibiliza para o envio do sinal.

A **densidade gaussiana** associada a $\mathbf{s}_k$ em $\mathbb{R}^n$ para canais *AWGN* é dada por

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{s}_k} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{x} &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{s}_k|^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

sendo $|\cdot|$ a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$, σ^2 a variância e $\mathbf{s}_k$ a média.

Observemos que

$$g_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2\sigma^2}\right)$$

é a densidade gaussiana do ruído e que o gráfico de $g_{\mathbf{s}_k}$ é a translação do gráfico de g_n pelo vetor $\vec{\mathbf{s}}_k$.

¹Mais precisamente, a variável aleatória definida no instante t , $n(t)$, é uma função amostra de um processo aleatório gaussiano com média $\mathbf{0}$ e variância σ^2 .

Com isso, a probabilidade de acerto na transmissão do sinal $\mathbf{s}_k$ é igual ao volume (n -dimensional) acima da região de Voronoi V_k de $\mathbf{s}_k$ e abaixo do gráfico de $g_{\mathbf{s}_k}$, que é dada por

$$\mathcal{P}_a(\mathbf{s}_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} \int_{V_k} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{s}_k|^2}{2\sigma^2}\right) dV_{\mathbb{R}^n}$$

sendo $dV_{\mathbb{R}^n}$ elemento de volume cartesiano em $\mathbb{R}^n$.

Como

$$\mathcal{P}_e(\mathbf{s}_k) = 1 - \mathcal{P}_a(\mathbf{s}_k)$$

e os sinais são equiprováveis, a probabilidade de erro $\mathcal{P}_e$ associada à constelação de sinais é dada por

$$\mathcal{P}_e = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} \int_{\mathbb{R}^n - V_k} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{s}_k|^2}{2\sigma^2}\right) dV_{\mathbb{R}^n}. \quad (3.1)$$

A Figura 3.1 ilustra, em perspectiva, a parte central do gráfico de $g_{\mathbf{s}_8}$ em um 8-PSK.

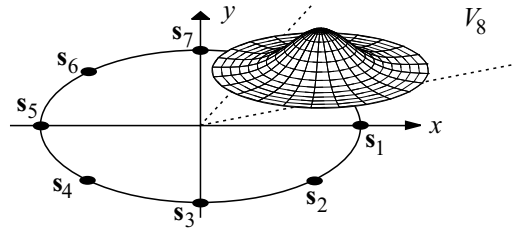


FIGURA 3.1: Parte central do gráfico da densidade gaussiana associada ao sinal $\mathbf{s}_8$ no 8-PSK.

A proposição a seguir fornece um limitante superior para (3.1) que pode ser encontrado em livros-texto. No entanto, a demonstração aqui desenvolvida possui características que podem ser estendidas ao caso hiperbólico abordado adiante. Antes, porém, é útil introduzir a notação usual para duas funções muito utilizadas em Teoria da Informação e Codificação. Uma delas é a **função erro**, definida por

$$\begin{aligned} \text{erf} : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

A outra é a **função erro complementar**, definida por $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{erfc} : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Proposição 3.1 *Seja um sistema de comunicações utilizando um esquema de modulação com M sinais representados no $\mathbb{R}^n$ e canal de transmissão afetado por ruído tipo AWGN. Se os M sinais forem equiprováveis, então a probabilidade de erro $\mathcal{P}_e$ associada ao esquema de modulação satisfaz*

$$\mathcal{P}_e \leq \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{v_k} \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{|\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_{k_j}|}{2\sqrt{2}\sigma^2}\right)$$

sendo $\mathbf{s}_{k_j}$, $j = 1, \dots, v_k$, os sinais que determinam a região de Voronoi de $\mathbf{s}_k$. ⁽²⁾

²Os sinais que “determinam a região de Voronoi” de $\mathbf{s}_k$ são os “vizinhos” de $\mathbf{s}_k$, ou seja, os sinais $\mathbf{s}_{k_j}$ tal que o ponto médio do segmento $\overline{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_{k_j}}$ está sobre o interior de um lado da região de Voronoi de $\mathbf{s}_k$.

Demonstração

Considerando as hipóteses da proposição, para $k = 1$, a probabilidade de enviar o sinal $\mathbf{s}_1$ e receber outro sinal qualquer diferente de $\mathbf{s}_1$ (indicada por $\mathcal{P}_e(\mathbf{s}_1)$) satisfaz

$$\mathcal{P}_e(\mathbf{s}_1) \leq \sum_{m \neq 1} P(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_m)$$

sendo $P(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_m)$ a probabilidade de erro conjunta $P(\mathbf{s}_1)P(\mathbf{s}_m|\mathbf{s}_1)$.

Interpretemos geometricamente o que seja $P(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_m)$: probabilidade de obter os sinais $\mathbf{s}_1$ na entrada do canal e $\mathbf{s}_m$ na saída.

Como o canal é afetado por ruído *AWGN*, a densidade associada ao sinal $\mathbf{s}_1$ é

$$g_{\mathbf{s}_1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{s}_1|^2}{2\sigma^2}\right) \Rightarrow$$

$$g_{\mathbf{s}_1}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} \exp\left(-\frac{(x_1 - s_{1_1})^2 + \dots + (x_n - s_{1_n})^2}{2\sigma^2}\right), \quad \mathbf{s}_1 = (s_{1_1}, \dots, s_{1_n}) \text{ e } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Tomando a região de Voronoi V_1 de $\mathbf{s}_1$ em $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}_e(\mathbf{s}_1)$ é o volume $((n+1)$ -dimensional) abaixo do gráfico da densidade e acima da região que exclui V_1 em $\mathbb{R}^n$.

Tomando o hiperplano $\mathcal{M}_{1m}$, mediatriz $(n-1)$ -dimensional entre os pontos $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_m$, temos um divisor de decisões associado aos pontos $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_m$ e, desta forma, $P(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_m)$ é numericamente igual ao volume abaixo do gráfico da densidade e acima do semiespaço de $\mathbb{R}^n$ (contendo $\mathbf{s}_m$) que possui $\mathcal{M}_{1m}$ por fronteira.

Temos, assim, um refinamento para $\mathcal{P}_e(\mathbf{s}_1)$:

$$\mathcal{P}_e(\mathbf{s}_1) \leq \sum_{j=1}^{v_1} P(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j})$$

sendo v_1 a quantidade de sinais vizinhos a $\mathbf{s}_1$ que influem (determinam um lado) em V_1 . Os volumes $P(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_m)$ tais que $m \neq 1_j$; $j = 1, \dots, v_1$; estão contidos em $\sum_{j=1}^{v_1} P(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j})$ e contá-los seria redundante.

Nosso trabalho agora se restringe a encontrar um modo mais simples de representar o valor $P(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j})$.

Tomemos $j = 1$. Fazemos a translação do gráfico da densidade pelo vetor $-\vec{\mathbf{s}}_1$ seguido da rotação tal que $\mathbf{s}_{1_1}$ fique sobre o eixo x_1 na parte positiva. Esta aplicação T (composta de rotação com translação) é uma isometria do espaço $\mathbb{R}^n$ que se estende canonicamente a $\mathbb{R}^{n+1}$ e que pode ser aplicada ao gráfico da densidade. Logo, o volume sob o novo gráfico da densidade é preservado.

Com isso, a mediatriz entre $T(\mathbf{s}_1) = \mathbf{0}$ e $T(\mathbf{s}_{1_1}) = (a, 0, \dots, 0)$ é o hiperplano $(n-1)$ -dimensional “vertical” $x_1 = \frac{a}{2}$.

Logo,

$$\begin{aligned} P(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\frac{a}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} \exp\left(-\frac{(x_1 - 0)^2 + \dots + (x_n - 0)^2}{2\sigma^2}\right) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\frac{a}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right) \dots \exp\left(-\frac{x_n^2}{2\sigma^2}\right) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\frac{a}{2}}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x_n^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx_n \\ &= \int_{\frac{a}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right) dx_1. \end{aligned}$$

$$\text{Fazendo } \frac{x_1}{\sqrt{2\sigma^2}} = u \Rightarrow \frac{du}{dx_1} = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} \Rightarrow dx_1 = \sqrt{2\sigma^2} du.$$

Para $x_1 = \frac{a}{2} \Rightarrow u = \frac{a}{2\sqrt{2\sigma^2}}$.

Para $x_1 = +\infty \Rightarrow u = +\infty$.

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right) dx_1 &= \int_{\frac{a}{2\sqrt{2\sigma^2}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-u^2) \sqrt{2\sigma^2} du \\ &= \int_{\frac{a}{2\sqrt{2\sigma^2}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) du. \end{aligned}$$

Mas

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{2\sigma^2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a}{2\sqrt{2\sigma^2}}}^{+\infty} \exp(-u^2) du$$

e, por conseguinte,

$$\int_{\frac{a}{2\sqrt{2\sigma^2}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) du = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{2\sigma^2}}\right).$$

Lembrando que $a = |T(\mathbf{s}_1) - T(\mathbf{s}_{1_1})| = |\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_{1_1}|$, temos

$$P(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_1}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_{1_1}|}{2\sqrt{2\sigma^2}}\right).$$

Assim,

$$\mathcal{P}_e(\mathbf{s}_1) \leq \sum_{j=1}^{v_1} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_{1_j}|}{2\sqrt{2\sigma^2}}\right).$$

Tomando a média (sinais equiprováveis):

$$\mathcal{P}_e = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathcal{P}_e(\mathbf{s}_k) \leq \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{v_k} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{|\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_{k_j}|}{2\sqrt{2\sigma^2}}\right).$$

□

O corolário abaixo é útil quando não se consegue determinar quais são os sinais que influem na região de Voronoi de um dado sinal.

Corolário 3.1 *Nas hipóteses da Proposição 3.1, temos*

$$\mathcal{P}_e \leq \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{m \neq k} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{|\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_m|}{2\sqrt{2\sigma^2}}\right).$$

Demonstração

Segue diretamente do fato de que

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{v_k} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{|\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_{k_j}|}{2\sqrt{2\sigma^2}}\right) \leq \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{m \neq k} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{|\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_m|}{2\sqrt{2\sigma^2}}\right).$$

□

O estimador delineado no corolário abaixo é conhecido como **Limitante de Bhattacharyya**.

Corolário 3.2 *Nas hipóteses da Proposição 3.1, temos*

$$\mathcal{P}_e < \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{m \neq k} \exp\left(-\frac{|\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_m|^2}{8\sigma^2}\right).$$

Demonstração

Segue do fato de que

$$\operatorname{erfc}(x) \leq \exp(-x^2),$$

logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{m \neq k} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{|\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_m|}{2\sqrt{2}\sigma^2}\right) &\leq \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{m \neq k} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{|\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_m|^2}{8\sigma^2}\right) \\ &< \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{m \neq k} \exp\left(-\frac{|\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_m|^2}{8\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

□

Corolário 3.3 *Nas hipóteses da Proposição 3.1, acrescida da condição da constelação de sinais (esquema de modulação) ser geometricamente uniforme, temos*

$$\mathcal{P}_e \leq \sum_{j=1}^{v_1} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_{1_j}|}{2\sqrt{2}\sigma^2}\right).$$

Demonstração

Se a constelação é geometricamente uniforme, há um grupo de isometrias em $\mathbb{R}^n$ agindo sobre a constelação com ação transitiva. Logo,

$$\sum_{j=1}^{v_k} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{|\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_{k_j}|}{2\sqrt{2}\sigma^2}\right) = \sum_{j=1}^{v_m} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_{m_j}|}{2\sqrt{2}\sigma^2}\right), \quad \forall k, m = 1, \dots, M.$$

Fixando $k = 1$, temos o resultado. □

Estimativa da Probabilidade de Erro Associada aos Principais Esquemas de Modulação em Canais Gaussianos

Faremos uso dos esquemas introduzidos no Capítulo 1.

M-PAM

Supondo que este esquema de modulação seja empregado num sistema de comunicações cujo canal apresenta ruído tipo *AWGN* e que os sinais sejam equiprováveis, a probabilidade de erro associada aos sinais centrais é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e(s_k) &= 2 \int_{\frac{d_{\min}}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\min}\sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}}\right), \end{aligned}$$

sendo $k = 2, \dots, M-1$ e $d_{\min}$ a distância mínima entre pontos da constelação.

Para os sinais extremos ($k = 1, M$), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e(s_1) = \mathcal{P}_e(s_M) &= \int_{\frac{d_{\min}}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\min}\sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_e &= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathcal{P}_e(s_k) \\
 &= \frac{1}{M} \left(\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\min} \sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}} \right) + (M-2) \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\min} \sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\min} \sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}} \right) \right) \\
 &= \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\min} \sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}} \right).
 \end{aligned}$$

M-PSK

Num sistema de comunicações com ruído *AWGN*, a probabilidade de erro associada a sinais equiprováveis do *PSK*, que é uma constelação geometricamente uniforme, é dada por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_e &= 1 - \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{V_1} \exp \left(-\frac{(x - \sqrt{E})^2 + y^2}{2\sigma^2} \right) dx dy \\
 &= 1 - \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{+\infty} \int_{-(\tan \frac{\pi}{M})x}^{(\tan \frac{\pi}{M})x} \exp \left(-\frac{(x - \sqrt{E})^2 + y^2}{2\sigma^2} \right) dy dx
 \end{aligned}$$

$\sqrt{E}$ é o raio da constelação (E é a energia de cada sinal).

Como esta integral não é fácil de ser calculada, faz-se uso dos estimadores desenvolvidos acima. Utilizando o Corolário 3.3:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_e &\leq \sum_{j=1}^{v_1} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_{1_j}|}{2\sqrt{2\sigma^2}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2|}{2\sqrt{2\sigma^2}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_M|}{2\sqrt{2\sigma^2}} \right) \\
 &= \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{2\sigma^2}} \right), \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

sendo $d_{\min}$ a distância mínima entre os pontos da constelação.

m²-QAM

A probabilidade de erro associada a sinais equiprováveis do *QAM* em um canal afetado por ruído *AWGN* é dada por:

(i) Para $i, j \neq 1, m$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_e(s_{ij}) &= 1 - \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{d_{\min}} \int_0^{d_{\min}} \exp \left(-\frac{(x - \frac{d_{\min}}{2})^2 + (y - \frac{d_{\min}}{2})^2}{2\sigma^2} \right) dx dy \\
 &= 1 - \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{d_{\min}} \exp \left(-\frac{(x - \frac{d_{\min}}{2})^2}{2\sigma^2} \right) dx \int_0^{d_{\min}} \exp \left(-\frac{(y - \frac{d_{\min}}{2})^2}{2\sigma^2} \right) dy \\
 &= 1 - \operatorname{erf}^2 \left(\frac{d_{\min} \sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}} \right).
 \end{aligned}$$

(ii) Para $i, j = 1, m$ e $ij \neq 11, 1m, m1, mm$:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_e(\mathbf{s}_{ij}) &= 1 - \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{d_{\min}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{d_{\min}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{d_{\min}}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right) dx dy \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{d_{\min}}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right) dx \int_0^{d_{\min}} \exp\left(-\frac{\left(y - \frac{d_{\min}}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right) dy \\ &= 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{d_{\min}\sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf}^2\left(\frac{d_{\min}\sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}}\right).\end{aligned}$$

(iii) Para $ij = 11, 1m, m1, mm$:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_e(\mathbf{s}_{ij}) &= 1 - \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{d_{\min}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{d_{\min}}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right) dx dy \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{d_{\min}}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right) dx \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\left(y - \frac{d_{\min}}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right) dy \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{d_{\min}\sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}}\right) - \frac{1}{4} \operatorname{erf}^2\left(\frac{d_{\min}\sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}}\right).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_e &= \frac{1}{m^2} \left((m-2)^2 \left(1 - \operatorname{erf}^2\left(\frac{d_{\min}\sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}}\right) \right) + 4(m-2) \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{d_{\min}\sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf}^2\left(\frac{d_{\min}\sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + 4 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{d_{\min}\sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}}\right) - \frac{1}{4} \operatorname{erf}^2\left(\frac{d_{\min}\sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}}\right) \right) \right) \\ &= 1 - \frac{\left((m-1) \operatorname{erf}\left(\frac{d_{\min}\sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}}\right) + 1 \right)^2}{m^2}.\end{aligned}$$

3.3 Densidade Gaussiana na Reta Hiperbólica

Ao conjunto dos números reais positivos $\mathbb{R}_+^*$ munido da métrica

$$\begin{aligned}d_{\mathbb{H}} : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto \left| \ln \frac{x}{y} \right|\end{aligned}$$

chamamos de **reta hiperbólica** e indicá-lo-emos por $\mathbb{H}$.

Consideremos o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ munido da métrica usual

$$\begin{aligned}d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto |x - y|.\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}T : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ x &\longmapsto e^x\end{aligned}$$

é uma **isometria entre** $\mathbb{R}$ e $\mathbb{H}$ com as métricas definidas acima.

Isto significa que todas as propriedades inerentes a $\mathbb{R}$ que dependem da métrica usual podem ser transportadas para $\mathbb{H}$ por meio da isometria T . Em particular, densidades de variáveis aleatórias contínuas

em $\mathbb{R}$ podem ser transportadas para $\mathbb{H}$, pois dependem, exclusivamente, de propriedades métricas. É exatamente este transporte de densidades que consideramos abaixo.

Seja X variável aleatória contínua em $\mathbb{R}$ com densidade gaussiana (ou normal) de média μ e variância σ^2 :

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{R}} : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right] \subset \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

ou seja,

$$g_{\mathbb{R}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{d^2(x, \mu)}{2\sigma^2}\right).$$

Temos, naturalmente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathbb{R}}(x) dx = 1.$$

Queremos encontrar a variável aleatória contínua Y em $\mathbb{H}$ (e sua densidade) que corresponde à variável aleatória X gaussiana. Para este fim, consideremos o conceito de densidades equivalentes por isometria.

Densidades Equivalentes por Isometria

Sejam X e Y variáveis aleatórias assumindo valores nos espaços métricos (amostrais) $(\mathbb{E}, d_{\mathbb{E}})$ e $(\mathbb{F}, d_{\mathbb{F}})$ respectivamente. Suponhamos que

$$\begin{aligned} f_X : \quad (\mathbb{E}, d_{\mathbb{E}}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\longmapsto f_X(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

é densidade em $\mathbb{E}$. Consideremos uma isometria

$$\begin{aligned} T : \quad (\mathbb{E}, d_{\mathbb{E}}) &\longrightarrow (\mathbb{F}, d_{\mathbb{F}}) \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \end{aligned}.$$

T induz uma densidade f_Y em $\mathbb{F}$ dada por:

$$\begin{aligned} f_Y : \quad (\mathbb{F}, d_{\mathbb{F}}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{y} &\longmapsto f_X(T^{-1}(\mathbf{y})) \end{aligned}.$$

Notamos que f_Y definida acima é, de fato, densidade, pois

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{F}} f_Y(\mathbf{y}) d_{\mathbb{F}}\mathbf{y} &= \int_{T^{-1}(\mathbb{F})=\mathbb{E}} f_X(T(\mathbf{x})) \underbrace{\left|\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\right|}_{=d_{\mathbb{E}}\mathbf{x}} d_{\mathbb{F}}\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{E}} f_X(\mathbf{x}) d_{\mathbb{E}}\mathbf{x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Chamemos as densidades f_X e f_Y , assim relacionadas, de *densidades equivalentes por isometria*.

Exemplo Importante

Seja X variável aleatória assumindo valores em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ com

$$g_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

ou seja, g_X é a densidade gaussiana em $\mathbb{R}$.

Seja Y variável aleatória assumindo valores em $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$, relacionada com X por meio da isometria

$$\begin{aligned} T : (\mathbb{R}, |\cdot|) &\longrightarrow (\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}}) \\ x &\longmapsto y = T(x) = e^x \end{aligned}$$

A densidade g_Y , equivalente a g_X , é dada por

$$\begin{aligned} g_Y(y) &= g_X(T^{-1}(y)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln y - \ln e^\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \ln^2 \frac{y}{e^\mu}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{d_{\mathbb{H}}^2(y, e^\mu)}{2\sigma^2}\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g_Y(y) d_{\mathbb{H}}y &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{d_{\mathbb{H}}^2(y, e^\mu)}{2\sigma^2}\right) d_{\mathbb{H}}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \ln^2 \frac{e^x}{e^\mu}\right) e^x d_{\mathbb{H}}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) d_{\mathbb{R}}x \\ &= 1. \end{aligned}$$

Como $d_{\mathbb{H}}y = \left| \frac{\partial T^{-1}}{\partial y}(y) \right| d_{\mathbb{R}}y$, a primeira integral pode ser escrita em termos do elemento de comprimento euclidiano, $d_{\mathbb{R}}y$:

$$\int_0^{+\infty} g_Y(y) d_{\mathbb{H}}y = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}y} \exp\left(-\frac{d_{\mathbb{H}}^2(y, e^\mu)}{2\sigma^2}\right) d_{\mathbb{R}}y.$$

Denotamos a densidade g_Y definida em (3.3), associada à variável aleatória Y , por $g_{\mathbb{H}}$.

Um fato interessante a ser observado é que

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}y} \exp\left(-\frac{d_{\mathbb{H}}^2(y, e^\mu)}{2\sigma^2}\right)$$

é exatamente a **densidade lognormal**³.

Pelo fato de T ser uma isometria, é natural chamar $g_{\mathbb{H}}$ de **densidade gaussiana hiperbólica unidimensional**. $\square$

Na seqüência, estudamos a média e a variância da densidade $g_{\mathbb{H}}$ em seu ambiente natural, a reta hiperbólica $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$. Para tanto, devemos tornar claro as propriedades métricas que norteiam a definição de média e variância de uma densidade em $\mathbb{R}$. Tendo em mente essas propriedades, podemos utilizá-las de forma similar numa densidade em $\mathbb{H}$, uma vez que estamos trabalhando com densidades equivalentes nestes dois ambientes.

³Bastante usada em economia.

Por definição, a média μ e a variância σ^2 da densidade f_X de uma variável aleatória X em $\mathbb{R}$ é dada por

$$\mu = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$$

e

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 f_X(x) dx$$

respectivamente.

Observemos que a variância é um valor quantitativo da variável aleatória e o termo $(x - \mu)^2$, que aparece em sua definição, é precisamente a distância ao quadrado de x à média μ , ou seja, $(x - \mu)^2 = d^2(x, \mu)$ e, portanto,

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} d^2(x, \mu) f_X(x) dx.$$

Assim, a variância σ^2 é exibida em termos da métrica euclidiana, da densidade e do elemento de comprimento euclidiano. Portanto, este valor quantitativo pode ser obtido de modo semelhante em uma densidade de uma variável aleatória com espaço amostral $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$, ou seja, a **variância hiperbólica** da variável aleatória Y em $\mathbb{H}$ é dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbb{H}}^2 &= \int_{\mathbb{H}} d_{\mathbb{H}}^2(y, \mu_{\mathbb{H}}) f_Y(y) d_{\mathbb{H}}y \\ &= \int_{\mathbb{H}} \ln^2 \frac{y}{\mu_{\mathbb{H}}} f_Y(y) d_{\mathbb{H}}y. \end{aligned}$$

A média requer um pouco mais de reflexão, pois em sua definição (em $\mathbb{R}$) estamos trabalhando com “média ponderada” e, portanto, envolve elementos do espaço amostral. Isto significa que a média é uma amostra do espaço (um ponto de $\mathbb{R}$) e não um valor quantitativo como na variância e, por conseguinte, não podemos escrever a integral $\int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$ puramente em termos métricos e trabalhar como fizemos com a variância. O modo mais natural a considerar é utilizar a isometria T , ou seja, a média em $\mathbb{H}$ como sendo a imagem da média em $\mathbb{R}$. É justamente o que iremos fazer, porém respaldados num interessante resultado de [38], página 139, válido para densidades em $\mathbb{R}$:

“Dizemos que uma densidade integrável f_X de uma variável aleatória X em $(\mathbb{R}, d)$ é **simétrica** em torno de μ , se $P(X \geq \mu + z) = P(X \leq \mu - z)$, ou seja, $\int_{\mu+z}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\mu-z} f_X(x) dx$, para todo $z \in \mathbb{R}$. Desta forma, se f_X é simétrica em torno de μ , então $\int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \mu$.”

Verificando que

$$\int_0^{e^{\mu-z}} g_{\mathbb{H}}(y) d_{\mathbb{H}}y = \int_{e^{\mu+z}}^{+\infty} g_{\mathbb{H}}(y) d_{\mathbb{H}}y, \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

e observando que $d_{\mathbb{H}}(e^{\mu}, e^{\mu-z}) = d_{\mathbb{H}}(e^{\mu}, e^{\mu+z})$, $\forall z \in \mathbb{R}$, é natural chamarmos $T(\mu) = e^{\mu}$ de **média simétrica** de $g_{\mathbb{H}}$.

Sendo assim, definimos o conceito seguinte.

Definição 3.2 *Seja*

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{H}} : \quad \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto g_{\mathbb{H}}(y) \end{aligned}$$

a densidade gaussiana hiperbólica em $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$. Definimos a **média simétrica** de $g_{\mathbb{H}}$ por

$$\mu_{\mathbb{H}} = e^{\mu}$$

sendo μ média da densidade gaussiana em $\mathbb{R}$ e a **variância** de $g_{\mathbb{H}}$ como sendo

$$\sigma_{\mathbb{H}}^2 = \int_{\mathbb{H}} \ln^2 \frac{y}{e^{\mu}} g_{\mathbb{H}}(y) d_{\mathbb{H}}y.$$

Proposição 3.2 *Seja*

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{d_{\mathbb{H}}^2(y, e^{\mu})}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

densidade gaussiana hiperbólica em $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$. Então,

$$\sigma_{\mathbb{H}}^2 = \sigma^2.$$

Demonstração

Temos

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbb{H}}^2 &= \int_0^{+\infty} \ln^2 \frac{y}{\mu_{\mathbb{H}}} g_{\mathbb{H}}(y) d_{\mathbb{H}}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2 \frac{e^x}{e^{\mu}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \ln^2 \frac{e^x}{e^{\mu}}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

□

Uma das motivações para adotarmos a definição da média simétrica em $\mathbb{H}$, como acima, segue de que

$$\int_0^{\mu_{\mathbb{H}}} g_{\mathbb{H}}(y) d_{\mathbb{H}}y = \int_{\mu_{\mathbb{H}}}^{+\infty} g_{\mathbb{H}}(y) d_{\mathbb{H}}y = \frac{1}{2}$$

ou seja, $\mu_{\mathbb{H}}$ é ponto simétrico de divisão da área hiperbólica abaixo do gráfico de $g_{\mathbb{H}}$ e acima de $\mathbb{H}$. Além disso, o ponto de máximo da distribuição é exatamente a média.

Uma das motivações para a definição da variância em $\mathbb{H}$ é que

$$\int_{\mu_{\mathbb{H}}e^{-\sigma}}^{\mu_{\mathbb{H}}} g_{\mathbb{H}}(y) d_{\mathbb{H}}y = \int_{\mu_{\mathbb{H}}}^{\mu_{\mathbb{H}}e^{\sigma}} g_{\mathbb{H}}(y) d_{\mathbb{H}}y = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

Isto significa que, *independente* do valor de $\sigma_{\mathbb{H}}$, temos

$$\int_{\mu_{\mathbb{H}}e^{-\sigma}}^{\mu_{\mathbb{H}}e^{\sigma}} g_{\mathbb{H}}(y) d_{\mathbb{H}}y = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} g_{\mathbb{R}}(x) dx$$

ou seja, aproximadamente 68,27% da área abaixo do gráfico de $g_{\mathbb{H}}$, acima de $\mathbb{H}$ está entre os pontos $\mu_{\mathbb{H}}e^{-\sigma}$ e $\mu_{\mathbb{H}}e^{\sigma}$. Exatamente como ocorre com a densidade gaussiana em $\mathbb{R}$.

A Figura 3.2 apresenta os *gráficos euclidianos*⁴ de duas densidades $g_{\mathbb{H}}$ de variância $\sigma^2 = 0,1$; uma com média $\mu_{\mathbb{H}} = e^0 = 1$ e outra com média $\mu_{\mathbb{H}} = e^{-1}$.

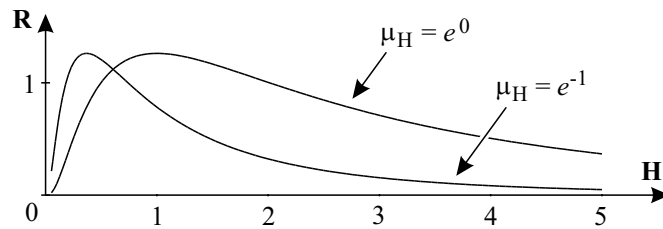


FIGURA 3.2: Gráficos euclidianos de densidades gaussianas hiperbólicas de variância $\sigma^2 = 0,1$ em $\mathbb{H}$.

⁴Entendemos por *gráfico euclidiano* de uma densidade g com domínio em $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{B}^n$ como sendo o conjunto dos pontos $(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$ do espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ tais que $\mathbf{x}$ pertence ao domínio de g .

3.4 Densidade Gaussiana no Espaço Hiperbólico de Dimensão Maior ou Igual a Dois

Aqui, deparamos com o problema da não existência de uma isometria entre $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{H}^n = \mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{B}^n$ para $n \geq 2$ (espaços de curvaturas diferentes). Logo, não há uma maneira natural de se definir, por meio de isometrias, uma densidade em $\mathcal{H}^n$ “equivalente” à **densidade gaussiana** de $\mathbb{R}^n$:

$$g_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} \exp\left(-\frac{d^2(\mathbf{x}, \mu)}{2\sigma^2}\right)$$

sendo $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ a média e σ^2 a variância da densidade $g_{\mathbb{R}^n}$.

No entanto, é possível definir uma densidade para o espaço hiperbólico que possui as mesmas características geométricas da densidade gaussiana no espaço euclidiano. O primeiro fato a ser observado em $g_{\mathbb{R}^n}$ é que a dimensão não influi no fator $\frac{1}{2\sigma^2}$ que multiplica $-d^2$ e que μ é ponto de simetria radial do gráfico de $g_{\mathbb{R}^n}$. A dedução de $g_{\mathbb{H}}$ que fizemos na seção anterior nos revelou que estas propriedades devem ser preservadas em $g_{\mathcal{H}^n}$, bem como a variância: $\sigma_{\mathcal{H}^n}^2 = \sigma^2$. Com esses apontamentos geométricos, a densidade $g_{\mathcal{H}^n}$ em $\mathcal{H}^n$ será definida com o seguinte aspecto:

$$g_{\mathcal{H}^n}(\mathbf{x}) = k_{\mathcal{H}^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} d_{\mathcal{H}^n}^2(\mathbf{x}, \mu)\right)$$

sendo $k_{\mathcal{H}^n}$ constante que, *a priori*, pode depender do modelo de Poincaré utilizado, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}^n$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ a média e σ^2 a variância da densidade $g_{\mathcal{H}^n}$.

A distância hiperbólica entre dois pontos de $\mathcal{H}^n = \mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{B}^n$ é proveniente da métrica riemanniana (2.1) e (2.2) respectivamente. Expressões analíticas para as métricas $d_{\mathcal{H}^n}$ foram fornecidas pelo Teorema 2.1

No desenvolvimento em busca de $k_{\mathcal{H}^n}$ que fazemos a seguir, optamos pelo modelo $\mathbb{B}^n$ da hipersfera devido às suas facilidades em termos de mudança de variável. No entanto, pelo fato de os dois modelos citados serem isométricos, tudo o que for feito para $\mathbb{B}^n$ pode ser transportado para $\mathbb{H}^n$ por meio das isometrias (2.3) e (2.4).

Também tomamos a média hiperbólica como sendo a origem da hipersfera, ou seja, $\mu = \mathbf{0}$, inspirados pelo fato de que em um sistema de comunicações perturbado por ruído *AWGN*, a densidade considerada possui média zero.

Assim, devemos ter a igualdade

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}^n} k_{\mathbb{B}^n} \exp\left(-\frac{d_{\mathbb{B}^n}^2(\mathbf{x}, \mathbf{0})}{2\sigma^2}\right) dV_{\mathbb{B}^n} &= 1 \\ \int_{B^n} k_{\mathbb{B}^n} \exp\left(-\frac{d_{\mathbb{B}^n}^2(\mathbf{x}, \mathbf{0})}{2\sigma^2}\right) \left(\frac{2}{1-|\mathbf{x}|^2}\right)^n dV_{\mathbb{R}^n} &= 1 \\ \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \dots \int_{-\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_n^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_n^2}} k_{\mathbb{B}^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \ln^2 \frac{1+\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}}{1-\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}}} \left(\frac{2}{1-x_1^2-\dots-x_n^2}\right)^n dx_1 \dots dx_n &= 1. \end{aligned}$$

Se utilizarmos coordenadas hipersféricas, o desenvolvimento se torna mais fácil:

$$\begin{aligned}
x_n &= r \cos \alpha_1 \\
x_{n-1} &= r \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \\
x_{n-2} &= r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 \\
x_{n-3} &= r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \cos \alpha_4 \\
&\vdots \\
x_3 &= x_{n-(n-3)} = r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \dots \sin \alpha_{n-3} \cos \alpha_{n-2} \\
x_2 &= x_{n-(n-2)} = r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \dots \sin \alpha_{n-3} \sin \alpha_{n-2} \cos \alpha_{n-1} \\
x_1 &= x_{n-(n-1)} = r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \dots \sin \alpha_{n-3} \sin \alpha_{n-2} \sin \alpha_{n-1}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

sendo: $r \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \alpha_{n-1} < 2\pi$, e $0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2} \leq \pi$.

O jacobiano da mudança de coordenadas é dado por

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(r, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \alpha_1 \sin^{n-3} \alpha_2 \dots \sin^2 \alpha_{n-3} \sin \alpha_{n-2}. \tag{3.5}$$

Logo, fazendo

$$dr d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-2} d\alpha_{n-1} = dV$$

a integral acima pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^1 k_{\mathbb{B}^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \ln^2 \frac{1+r}{1-r}\right) \left(\frac{2}{1-r^2}\right)^n \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(r, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})} \right| dV = 1 \\
&\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \left(\int_0^1 k_{\mathbb{B}^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \ln^2 \frac{1+r}{1-r}\right) \left(\frac{2}{1-r^2}\right)^n r^{n-1} dr \right) \frac{\left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(r, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})} \right|}{r^{n-1}} \frac{dV}{dr} = 1 \\
&\left(\int_0^1 k_{\mathbb{B}^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \ln^2 \frac{1+r}{1-r}\right) \left(\frac{2}{1-r^2}\right)^n r^{n-1} dr \right) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \frac{\left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(r, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})} \right|}{r^{n-1}} \frac{dV}{dr} = 1 \\
&\left(\int_0^1 k_{\mathbb{B}^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \ln^2 \frac{1+r}{1-r}} \left(\frac{2}{1-r^2}\right)^n r^{n-1} dr \right) n \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \left(\int_0^1 r^{n-1} dr \right) \frac{\left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(r, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})} \right|}{r^{n-1}} \frac{dV}{dr} = 1 \\
&\left(\int_0^1 k_{\mathbb{B}^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \ln^2 \frac{1+r}{1-r}\right) \left(\frac{2}{1-r^2}\right)^n r^{n-1} dr \right) n \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^1 \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(r, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})} \right| dV = 1.
\end{aligned}$$

Mas

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^1 \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(r, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})} \right| dV$$

é exatamente o volume $V_{B_1^n}$ da hipersfera B_1^n de dimensão n e raio 1.

Logo,

$$\int_0^1 k_{\mathbb{B}^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \ln^2 \frac{1+r}{1-r}\right) \left(\frac{2}{1-r^2}\right)^n r^{n-1} dr = \frac{1}{nV_{B_1^n}}.$$

Façamos uma pausa no desenvolvimento da densidade para o espaço hiperbólico $\mathbb{B}^n$ e trabalhem um pouco com $V_{B_1^n}$, pois, para efeitos comparativos, precisamos desse valor.

Temos a proposição seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [22]. No entanto, devido ao fato de a demonstração possuir elementos úteis a considerações ulteriores, transcrevê-mo-la abaixo.

Proposição 3.3 *Seja B_R^n a bola de dimensão n e raio R . Então, o volume de B_R^n , indicado por $V_{B_R^n}$, é dado por*

$$V_{B_R^n} = \frac{R^n \pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \text{ se } n \text{ é par}$$

$$V_{B_R^n} = \frac{R^n \pi^{\frac{n-1}{2}} 2^n \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{n!} \text{ se } n \text{ é ímpar}.$$

Demonstração

Temos de calcular $\int_{B_R^n} 1dV$, sendo dV elemento de volume cartesiano n dimensional. Utilizando as coordenadas hipersféricas dadas em (3.4), temos o jacobiano dado em (3.5) e, portanto, a integral que fornece o volume $V_{B_R^n}$ é dada por

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^R r^{n-1} \sin^{n-2} \alpha_1 \sin^{n-3} \alpha_2 \dots \sin^2 \alpha_{n-3} \sin \alpha_{n-2} dr d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1} = \\ 2\pi \frac{R^n}{n} \int_0^\pi \sin \alpha_{n-2} d\alpha_{n-2} \int_0^\pi \sin^2 \alpha_{n-3} d\alpha_{n-3} \dots \int_0^\pi \sin^{n-2} \alpha_1 d\alpha_1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Precisamos integrar potência de funções seno. Aplicando uma vez integração por partes em $\int \sin^m \alpha d\alpha$, $m \in \mathbb{Z}$, $m > 1$, obtemos

$$\int \sin^m \alpha d\alpha = -\frac{1}{n} \sin^{m-1} \alpha \cos \alpha + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} \alpha d\alpha + C.$$

Com este resultado,

$$\int_0^\pi \sin^m \alpha d\alpha = \begin{cases} \frac{m-1}{m} \frac{m-3}{m-2} \frac{m-5}{m-4} \dots \frac{4}{5} \frac{2}{3}; & \text{se } m \text{ é ímpar} \\ \frac{m-1}{m} \frac{m-3}{m-2} \frac{m-5}{m-4} \dots \frac{3}{4} \frac{1}{2} \pi; & \text{se } m \text{ é par} \end{cases}.$$

Logo, voltando à integral (3.6) e fazendo n ímpar,

$$\begin{aligned} V_{B_R^n} &= 2\pi \frac{R^n}{n} 2 \frac{\pi^{\frac{n-3}{2}} 2^{\frac{n-3}{2}}}{(n-2)(n-4) \dots (5)(3)} \\ &= \frac{2R^n (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n(n-2)(n-4) \dots (5)(3)} \\ &= \frac{2R^n (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} (n-1)(n-3)(n-5) \dots (4)(2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \dots (3)(2)} \\ &= \frac{2R^n (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} 2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right) \left(\frac{n-3}{2}\right) \left(\frac{n-5}{2}\right) \dots \left(\frac{4}{2}\right) \left(\frac{2}{2}\right)}{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (3)(2)} \\ &= \frac{2R^n (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} 2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right) \left(\frac{n-1}{2}-1\right) \left(\frac{n-1}{2}-2\right) \dots (2)(1)}{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (3)(2)} \\ &= \frac{R^n \pi^{\frac{n-1}{2}} 2^n \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{n!}. \end{aligned}$$

Para n par,

$$\begin{aligned}
 V_{B_R^n} &= 2\pi \frac{R^n}{n} \frac{(2\pi)^{\frac{n-2}{2}}}{(n-2)(n-4)\dots(4)(2)} \\
 &= \frac{R^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}}{n(n-2)(n-4)\dots(4)(2)} \\
 &= \frac{R^n \pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \left(\frac{n-2}{2}\right) \left(\frac{n-4}{2}\right) \dots \left(\frac{4}{2}\right) \left(\frac{2}{2}\right)} \\
 &= \frac{R^n \pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1\right) \left(\frac{n}{2} - 2\right) \dots (2)(1)} \\
 &= \frac{R^n \pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}.
 \end{aligned}$$

□

Retornando à densidade hiperbólica, façamos a mudança de coordenadas

$$u = \ln \frac{1+r}{1-r} \implies \frac{du}{dr} = \frac{2}{1-r^2} \text{ e } r = \frac{e^u - 1}{e^u + 1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} k_{\mathbb{B}^n} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) \left(\frac{e^{2u}-1}{2e^u}\right)^{n-1} du &= \frac{1}{nV_{B_1^n}} \implies \\
 k_{\mathbb{B}^n} &= \frac{1}{nV_{B_1^n} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) \left(\frac{e^{2u}-1}{2e^u}\right)^{n-1} du} \\
 &= \frac{1}{nV_{B_1^n} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) (\sinh u)^{n-1} du}.
 \end{aligned}$$

Observemos que $k_{\mathbb{B}^n}$ é, de fato, constante; portanto, é a mesma para qualquer média μ .

Uma vez obtida a densidade para $\mathcal{H}^n = \mathbb{B}^n$, vamos transportá-la para $\mathcal{H}^n = \mathbb{H}^n$ por meio da isometria (2.4), ou seja, a densidade $g_{\mathbb{H}^n}$ deve ser “isométrica” à densidade $g_{\mathbb{B}^n}$ no seguinte sentido:

$$\begin{aligned}
 g_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{y}) &= g_{\mathbb{B}^n}(I_{\mathbb{H}^n \mathbb{B}^n}(\mathbf{y})) \\
 &= k_{\mathbb{B}^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} d_{\mathbb{B}^n}^2(I_{\mathbb{H}^n \mathbb{B}^n}(\mathbf{y}), \mu)\right) \\
 &= k_{\mathbb{B}^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} d_{\mathbb{B}^n}^2(I_{\mathbb{H}^n \mathbb{B}^n}(\mathbf{y}), I_{\mathbb{H}^n \mathbb{B}^n}(\eta))\right); \text{ pois } \exists! \eta \in \mathbb{H}^n \text{ tal que } \mu = I_{\mathbb{H}^n \mathbb{B}^n}(\eta) \\
 &= k_{\mathbb{B}^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} d_{\mathbb{H}^n}^2(\mathbf{y}, \eta)\right).
 \end{aligned}$$

Observemos que a constante $k_{\mathbb{B}^n}$ não se altera no modelo $\mathbb{H}^n$ (como era de se esperar), ou seja, $k_{\mathbb{H}^n} = k_{\mathbb{B}^n}$. Em virtude da preservação da constante, denotamo-la simplesmente por $k_{\mathcal{H}^n}$.

Com estas considerações, podemos dar uma definição formal para a densidade nos modelos de Poincaré.

Definição 3.3 *Seja $\mathcal{H}^n$ um modelo de Poincaré para a geometria hiperbólica. Definimos a **densidade gaussiana hiperbólica n -dimensional** com média μ e variância σ^2 em $\mathcal{H}^n$ como sendo*

$$g_{\mathcal{H}^n}(\mathbf{x}) = k_{\mathcal{H}^n} \exp\left(-\frac{d_{\mathcal{H}^n}^2(\mathbf{x}, \mu)}{2\sigma^2}\right)$$

sendo

$$k_{\mathcal{H}^n} = \frac{1}{nV_{B_1^n} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) (\sinh u)^{n-1} du}$$

$$V_{B_1^n} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \text{ se } n \text{ é par}$$

$$V_{B_1^n} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} 2^n \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{n!} \text{ se } n \text{ é ímpar}.$$

Um problema de ordem numérica é trabalhar com o valor de $k_{\mathcal{H}^n}$ dado acima. Por isso, não é viável trabalhar com cálculos de probabilidade envolvendo $g_{\mathcal{H}^n}$ na prática; mas, sim, com um estimador mais simples. É o que faremos a frente. Antes, porém, é conveniente encontrar um valor manipulável para $k_{\mathcal{H}^n}$ no caso bidimensional, que é o caso mais estudado neste trabalho.

Proposição 3.4 *Seja $g_{\mathcal{H}^2}(\mathbf{x}) = k_{\mathcal{H}^2} \exp\left(-\frac{d_{\mathcal{H}^2}^2(\mathbf{x}, \mu)}{2\sigma^2}\right)$ densidade gaussiana hiperbólica bidimensional em $\mathcal{H}^2$. Então⁵,*

$$k_{\mathcal{H}^2} = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi^3} \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}\right)}.$$

Demonstração

Seja $a = \frac{1}{2\sigma^2}$. Temos

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-au^2} \left(\frac{e^{2u}-1}{e^u}\right) du &= \int_0^{+\infty} e^{-au^2+u} du - \int_0^{+\infty} e^{-au^2-u} du \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}u - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2} e^{\frac{1}{4a}} du - \int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}u + \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2} e^{\frac{1}{4a}} du. \end{aligned}$$

Sejam

$$\begin{aligned} x = \sqrt{a}u - \frac{1}{2\sqrt{a}} &\implies \frac{dx}{du} = \sqrt{a} \implies \begin{cases} u = +\infty \implies x = +\infty \\ u = 0 \implies x = -\frac{1}{2\sqrt{a}} \end{cases} \\ y = \sqrt{a}u + \frac{1}{2\sqrt{a}} &\implies \frac{dy}{du} = \sqrt{a} \implies \begin{cases} u = +\infty \implies y = +\infty \\ u = 0 \implies y = \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{cases}. \end{aligned}$$

⁵É possível encontrar uma expressão analítica para a integral $\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) (\sinh u)^{n-1} du$ que aparece na constante $k_{\mathcal{H}^n}$ para **qualquer** n fixado. Abaixo apresentamos alguns destes valores (obtidos com o auxílio do software *Mathematica* v.4):

- (i) $n = 3$: $\frac{\sqrt{2\sigma^2\pi}}{4} (-1 + \exp(2\sigma^2))$;
- (ii) $n = 4$: $\frac{\sqrt{2\sigma^2\pi}}{8} \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \left(-3 \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2\sigma^2}}{2}\right) + \exp(4\sigma^2) \operatorname{erf}\left(\frac{3\sqrt{2\sigma^2}}{2}\right)\right)$;
- (iii) $n = 5$: $\frac{\sqrt{2\sigma^2\pi}}{16} (\exp(2\sigma^2) - 1)^2 (3 + 2\exp(2\sigma^2) + \exp(4\sigma^2))$.

Assim:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-au^2} \left(\frac{e^{2u} - 1}{e^u} \right) du &= \int_{-\frac{1}{2\sqrt{a}}}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{\exp\left(\frac{1}{4a}\right)}{\sqrt{a}} dx - \int_{\frac{1}{2\sqrt{a}}}^{+\infty} e^{-y^2} \frac{\exp\left(\frac{1}{4a}\right)}{\sqrt{a}} dy \\
&= \frac{\exp\left(\frac{1}{4a}\right)}{\sqrt{a}} \left(\int_{-\frac{1}{2\sqrt{a}}}^{\frac{1}{2\sqrt{a}}} e^{-x^2} dx + \int_{\frac{1}{2\sqrt{a}}}^{+\infty} e^{-x^2} dx - \int_{\frac{1}{2\sqrt{a}}}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) \\
&= \frac{\exp\left(\frac{1}{4a}\right)}{\sqrt{a}} 2 \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{a}}} e^{-x^2} dx, \quad (e^{-x^2} \text{ é função par}) \\
&= \frac{\exp\left(\frac{1}{4a}\right)}{\sqrt{a}} 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{4a}\right) \sqrt{\frac{\pi}{a}} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right).
\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
2V_{B_1^2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) \left(\frac{e^{2u} - 1}{2e^u}\right)^{2-1} du &= 2(\pi \cdot 1^2) \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) \left(\frac{e^{2u} - 1}{e^u}\right) du \\
&= \pi \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \sqrt{2\pi\sigma^2} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}\right) \\
&= \sqrt{2\sigma^2\pi^3} \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}\right).
\end{aligned}$$

□

Restam três observações importantes:

(i) a média μ é ponto de máximo no gráfico euclidiano de $g_{\mathcal{H}^n}$, ou seja, $k_{\mathcal{H}^n}$ é valor máximo de $g_{\mathcal{H}^n}$.

(ii) as **hipersuperfícies de nível**⁶ do gráfico euclidiano de $g_{\mathcal{H}^n}$ são exatamente hiperesferas hiperbólicas⁷ centradas na média. De fato:

Seja $c \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$g_{\mathcal{H}^n}(\mathbf{y}) = c.$$

Logo, $c \leq k_{\mathcal{H}^n}$ devido à observação acima e, portanto,

$$-2\sigma^2 \ln \frac{c}{k_{\mathcal{H}^n}} \geq 0.$$

De $g_{\mathcal{H}^n}(\mathbf{y}) = c$ extraímos

$$d_{\mathcal{H}^n}(\mathbf{y}, \mu) = \sqrt{-2\sigma^2 \ln \frac{c}{k_{\mathcal{H}^n}}}$$

ou seja, $g_{\mathcal{H}^n}(\mathbf{y}) = c$ é uma hiperesfera hiperbólica de centro μ e raio $\sqrt{-2\sigma^2 \ln \frac{c}{k_{\mathcal{H}^n}}}$.

A Figura 3.3 ilustra os gráficos euclidianos de $g_{\mathcal{H}^2}$ para $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{B}^2$ (deslocados para cima) e algumas curvas de nível.

⁶Se $n = 2$: curvas de nível;

Se $n = 3$: superfícies de nível.

⁷Se $n = 2$: círculos hiperbólicos;

Se $n = 3$: esferas hiperbólicas.

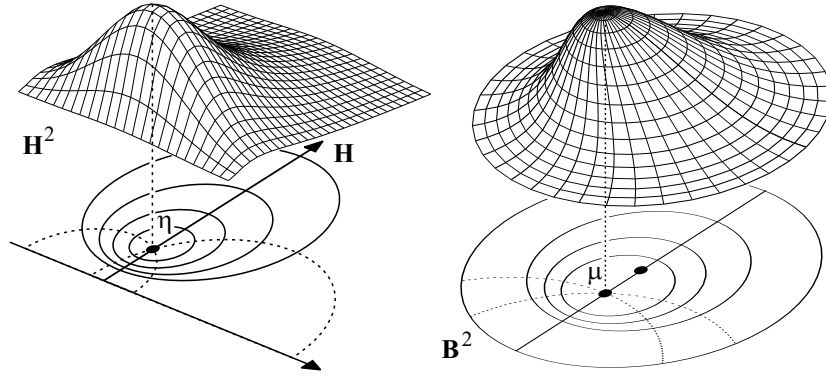


FIGURA 3.3: Gráficos euclidianos de $g_{\mathcal{H}^2}$ (deslocados para cima) com médias μ (modelo $\mathbb{B}^2$) e η (modelo $\mathbb{H}^2$). Os círculos hiperbólicos são curvas de nível.

(iii) As constantes $k_{\mathcal{H}^n}$ e $k_{\mathbb{H}}$ dependem, é claro, de σ^2 , ou seja, são funções da variância: $k_{\mathcal{H}^n} = k_{\mathcal{H}^n}(\sigma^2)$ e $k_{\mathbb{H}} = k_{\mathbb{H}}(\sigma^2)$. Definamos a função

$$Q_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ \sigma^2 \longmapsto \frac{k_{\mathcal{H}^n}(\sigma^2)}{(k_{\mathbb{H}}(\sigma^2))^n}.$$

Com o auxílio de um software algébrico-computacional, é possível verificar que

$$\lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} Q_n(\sigma^2) = 1$$

para qualquer n . Também é verificável que esta convergência é bastante rápida, a ponto de podermos substituir $k_{\mathcal{H}^n}(\sigma^2)$ por $(k_{\mathbb{H}}(\sigma^2))^n$ para $\sigma^2 < 0,25$ sem prejuízo computacional apreciável. Como exemplo, abaixo segue uma tabela com alguns valores.

σ^2	$k_{\mathbb{H}}(\sigma^2)$	$(k_{\mathbb{H}}(\sigma^2))^2$	$k_{\mathcal{H}^2}(\sigma^2)$	$(k_{\mathbb{H}}(\sigma^2))^3$	$k_{\mathcal{H}^3}(\sigma^2)$	$(k_{\mathbb{H}}(\sigma^2))^4$	$k_{\mathcal{H}^4}(\sigma^2)$
0,1	3,9894	15,915	15,863	63,493	62,861	253,3	248,27
0,01	39,894	1591,5	1591,5	63493	63487	$2,533 \times 10^6$	$2,5325 \times 10^6$

Nas densidades gaussianas euclidianas, sempre ocorre $k_{\mathbb{R}^n} = (k_{\mathbb{R}})^n$, uma vez que estas são produtos de densidades unidimensionais (independência do ruído em relação às dimensões). A igualdade não ocorre no caso hiperbólico devido ao fato do espaço hiperbólico n -dimensional não ser vetorial e, portanto, o produto de densidades hiperbólicas unidimensionais não origina uma densidade hiperbólica n -dimensional. No entanto, a observação acima nos conduz a um “produto assintótico” de funções de uma variável que são, de alguma forma, “próximas” das densidades unidimensionais.

Algumas técnicas matemáticas úteis para o aprofundamento nesta direção podem ser encontradas nos artigos [7], [15] e [6]. Estes artigos não tratam de densidades hiperbólicas como as que estamos desenvolvendo; no entanto, do ponto de vista geométrico, as densidades por eles consideradas apresentam algumas características interessantes, as quais passamos a discutir.

As densidades introduzidas por Barndorff-Nielsen [7] são chamadas de “hiperbólicas” não pelo fato de estarem definidas sobre o espaço hiperbólico; mas, sim, pelo fato de os gráficos do logaritmo natural das classes mais importantes dessas densidades (as que possuem aplicações práticas) serem *hiperbolóides n -dimensionais*. Como consequência, o logaritmo natural das densidades marginais são hipérboles. Isso significa que, além de estarmos lidando com densidades sobre o espaço euclidiano (devido à existência de densidades marginais *euclidianas*), estamos, em certo sentido, “generalizando” o conceito de densidade gaussiana no $\mathbb{R}^n$, uma vez que o gráfico do logaritmo natural desta última é um *parabolóide n -dimensional* e a densidade gaussiana pode ser obtida como limite de densidades “hiperbólicas”. Um fato geométrico

bastante curioso dessas densidades no $\mathbb{R}^2$ é que os “eixos de reflexão” das curvas de nível são hipérboles (as curvas de nível da densidade gaussiana de dimensão 2 são elipses que possuem retas ortogonais como eixos de reflexão, ou seja, cada elipse possui eixo maior e menor sobre esses eixos de reflexão). Devido às semelhanças que as superfícies de nível das densidades “hiperbólicas” apresentam com as densidades sobre os modelos hiperbólicos, é possível aplicar alguns métodos de cálculo de probabilidades que podem ser eficientes no caso que estamos abordando, apesar de a métrica hiperbólica ser de mais difícil manuseio.

3.5 Estimador para a Probabilidade de Erro Hiperbólica

Como já comentamos, trabalhar com a densidade gaussiana hiperbólica definida na seção anterior não é tarefa muito fácil. Por esse motivo, estimar a probabilidade de erro associada a sinais nos modelos hiperbólicos se torna uma questão importante em abordagens práticas ou comparativas. Conforme enfatizado acima, a densidade gaussiana hiperbólica não é produto de densidades de dimensões menores, o que, certamente, dificulta o trabalho matemático de majoração. No entanto, baseados no fato de que num esquema de modulação com M sinais a probabilidade de erro condicional $\mathcal{P}_e(s_k)$ associada ao envio do sinal s_j sempre satisfaz a condição

$$\mathcal{P}_e(s_k) \leq \sum_{m \neq k} P(s_k, s_m)$$

sendo $P(s_k, s_m)$ a probabilidade de erro conjunta $P(s_k, s_m) = P(s_k)P(s_m|s_k)$, percebemos que a estimativa de $\mathcal{P}_e(s_k)$ se dá sobre a soma de parcelas tais que cada uma depende apenas de um par de sinais. Cada par de sinais está sobre uma geodésica no modelo de Poincaré e toda geodésica é isométrica a $\mathbb{H}$. Portanto, *iremos supor* que cada par de sinais está submetido de modo independente a um ruído gaussiano unidimensional.

Nosso objetivo agora é obter limitantes para a probabilidade de erro no caso hiperbólico comparáveis ao desenvolvido no caso euclidiano (Seção 3.2).

Começamos com o lema abaixo, ressaltando que, quando não é importante a distinção entre os modelos de Poincaré em questão, denotamo-los genericamente por $\mathcal{H}^n$.

Lema 3.1 *Sejam $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}_+^*$. Então*

$$\int_a^{+\infty} y^{b-c \ln y} = \sqrt{\frac{\pi}{4c}} \exp\left(\frac{(b+1)^2}{4c}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{2c \ln a - b - 1}{\sqrt{4c}}\right).$$

Demonstração

Seja

$$x = \ln y \implies y = e^x.$$

Logo,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \implies dy = y dx = e^x dx.$$

Para $y = a$, temos $x = \ln a$ e para $y = +\infty$, temos $x = +\infty$.

Com isso,

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} y^{b-c \ln y} &= \int_{\ln a}^{+\infty} (e^x)^{b-cx} (e^x) dx \\
&= \int_{\ln a}^{+\infty} e^{(b+1)x-cx^2} dx \\
&= \int_{\ln a}^{+\infty} \exp \left(- \left(cx^2 - (b+1)x + \frac{(b+1)^2}{4c} - \frac{(b+1)^2}{4c} \right) \right) dx \\
&= \int_{\ln a}^{+\infty} \exp \left(- \left(\sqrt{c}x - \frac{b+1}{2\sqrt{c}} \right)^2 + \frac{(b+1)^2}{4c} \right) dx \\
&= \exp \left(\frac{(b+1)^2}{4c} \right) \int_{\ln a}^{+\infty} \exp \left(- \left(\sqrt{c}x - \frac{b+1}{2\sqrt{c}} \right)^2 \right) dx.
\end{aligned}$$

Seja

$$t = \sqrt{c}x - \frac{b+1}{2\sqrt{c}}.$$

Logo,

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{c} \implies dx = \frac{1}{\sqrt{c}} dt.$$

Para $x = \ln a$, temos $t = \sqrt{c} \ln a - \frac{b+1}{2\sqrt{c}}$ e para $x = +\infty$, temos $t = +\infty$.

Com isso,

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} y^{b-c \ln y} &= \exp \left(\frac{(b+1)^2}{4c} \right) \int_{\ln a}^{+\infty} \exp \left(- \left(\sqrt{c}x - \frac{b+1}{2\sqrt{c}} \right)^2 \right) dx \\
&= \exp \left(\frac{(b+1)^2}{4c} \right) \int_{\sqrt{c} \ln a - \frac{b+1}{2\sqrt{c}}}^{+\infty} e^{-t^2} \frac{1}{\sqrt{c}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{c}} \exp \left(\frac{(b+1)^2}{4c} \right) \int_{\sqrt{c} \ln a - \frac{b+1}{2\sqrt{c}}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{c}} \exp \left(\frac{(b+1)^2}{4c} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{c} \ln a - \frac{b+1}{2\sqrt{c}} \right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{4c}} \exp \left(\frac{(b+1)^2}{4c} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{2c \ln a - b - 1}{\sqrt{4c}} \right).
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.1 *Seja uma constelação de sinais com cardinalidade M no espaço hiperbólico $\mathcal{H}^n$, $n \geq 2$, empregada em um sistema de comunicações com canal afetado por ruído gaussiano hiperbólico. Se os M sinais $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_M$ forem equiprováveis e independentes, então a probabilidade de erro associada à constelação satisfaz*

$$\mathcal{P}_e \leq \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{v_k} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\mathcal{H}^n}(\mathbf{s}_k, \mathbf{s}_{k_j})}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right),$$

sendo σ^2 a variância do ruído e v_k o número de sinais $\mathbf{s}_{k_j}$ que determinam um lado⁸ na região de Voronoi de $\mathbf{s}_k$.

⁸Ver nota na Proposição 3.1.

Demonstração

Fixemos o modelo $\mathbb{H}^n$ para a demonstração.

Devido à equiprobabilidade dos sinais, podemos fixar um índice, por exemplo $k = 1$, e deduzir um limitante superior para a probabilidade de erro no envio de $\mathbf{s}_1$ e recebimento de $\mathbf{s}_m$ com $m \neq 1$. Indicaremos essa probabilidade por $P(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_m)$, $m \neq 1$. Entretanto, nem todos os m 's são necessários para o cálculo do limitante para $\mathcal{P}_e$. Façamos algumas restrições.

Tomemos a região de Voronoi V_1 de $\mathbf{s}_1$. Como a quantidade de sinais na constelação é finita, V_1 é um polítopo (poliedro n -dimensional não necessariamente compacto) hiperbólico com um número finito de hiperplanos $(n-1)$ -dimensionais delimitando-o. Cada um desses hiperplanos é mediatriz entre $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_j$ para algum j . No entanto, podem existir mediatrizes que não determinam lado em V_1 .

Como exemplo simples, o sinal $\mathbf{s}_1$ na constelação euclidiana 4-PSK ($\mathbf{s}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{s}_2 = (0, -1)$, $\mathbf{s}_3 = (-1, 0)$, $\mathbf{s}_4 = (0, 1)$) possui região de Voronoi V_1 delimitada pelas mediatrizes de $\overline{\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2}$ e $\overline{\mathbf{s}_1\mathbf{s}_4}$, mas a mediatriz de $\overline{\mathbf{s}_1\mathbf{s}_3}$ não intercepta o interior de V_1 e, portanto, pode ser descartada. Sendo assim, consideramos apenas os sinais cujas mediatrizes determinam lado em V_1 e, sem perda de generalidade, suponhamos que estes sejam $\mathbf{s}_{1_1}, \dots, \mathbf{s}_{1_{v_1}}$, $v_1 \leq M$.

Seja $j \leq v_1$. Como os sinais $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_{1_j}$ são independentes, estão submetidos ao ruído gaussiano unidimensional de mesma variância. Fazendo $\mathbf{s}_1 = (s_1, \dots, s_n)$ e tomando a geodésica que passa por estes sinais, podemos transportá-los para $\mathbb{H}$ por meio de uma isometria φ de $\mathbb{H}^n$ (dada uma geodésica, sempre existe uma isometria que a mapeia em $\mathbb{H}$). No caso $n = 2$, $\varphi = \epsilon$ é uma isometria elíptica com centro em $\mathbf{s}_1$ e raio $d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j})$, conforme ilustrada na Figura 3.4 abaixo.

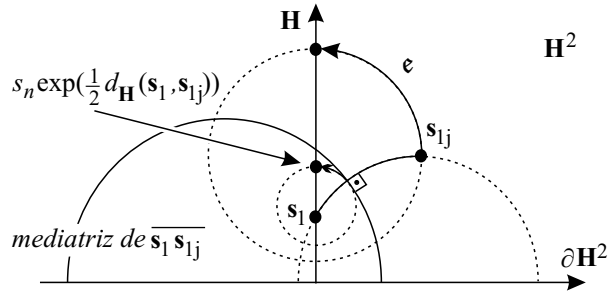


FIGURA 3.4: Ação da isometria elíptica ϵ de centro $\mathbf{s}_1$ e raio $d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j})$ em $\mathbb{H}^2$.

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j}) &\leq \int_{s_n \exp(\frac{1}{2} d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j}))}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \ln^2 \frac{y}{s_n}\right) d_{\mathbb{H}}y \\
 &= \int_{s_n \exp(\frac{1}{2} d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j}))}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\ln\left(\frac{y}{s_n}\right) - \frac{1}{2\sigma^2} \ln \frac{y}{s_n}\right) d_{\mathbb{H}}y \\
 &= \int_{s_n \exp(\frac{1}{2} d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j}))}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(\frac{y}{s_n}\right)^{-\frac{1}{2\sigma^2} \ln \frac{y}{s_n}} d_{\mathbb{H}}y \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{s_n \exp(\frac{1}{2} d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j}))}^{+\infty} \left(\frac{y}{s_n}\right)^{\ln(\frac{y}{s_n}) - \frac{1}{2\sigma^2}} \frac{1}{y} dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{s_n \exp(\frac{1}{2}d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j}))}^{+\infty} \frac{(y)^{\ln\left(\left(\frac{y}{s_n}\right)^{-\frac{1}{2\sigma^2}}\right)-1}}{(s_n)^{\ln\left(\left(\frac{y}{s_n}\right)^{-\frac{1}{2\sigma^2}}\right)}} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{s_n \exp(\frac{1}{2}d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j}))}^{+\infty} \frac{(y)^{\ln\left(y^{-\frac{1}{2\sigma^2}}\right)-\ln\left(s_n^{-\frac{1}{2\sigma^2}}\right)-1}}{(s_n)^{\ln\left(y^{-\frac{1}{2\sigma^2}}\right)-\ln\left(s_n^{-\frac{1}{2\sigma^2}}\right)}} dy \\
&= \frac{(s_n)^{\ln\left(s_n^{-\frac{1}{2\sigma^2}}\right)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{s_n \exp(\frac{1}{2}d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j}))}^{+\infty} \frac{(y)^{\ln\left(y^{-\frac{1}{2\sigma^2}}\right)-\ln\left(s_n^{-\frac{1}{2\sigma^2}}\right)-1}}{(s_n)^{\ln\left(y^{-\frac{1}{2\sigma^2}}\right)}} dy.
\end{aligned}$$

Como $s_n > 0$, $\exists! \mu \in \mathbb{R}$ tal que $s_n = e^\mu$. Assim,

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j}) &\leq \frac{(e^\mu)^{\ln\left((e^\mu)^{-\frac{1}{2\sigma^2}}\right)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\exp(\mu+\frac{1}{2}d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j}))}^{+\infty} \frac{(y)^{\ln\left(y^{-\frac{1}{2\sigma^2}}\right)-\ln\left((e^\mu)^{-\frac{1}{2\sigma^2}}\right)-1}}{(e^\mu)^{\ln\left(y^{-\frac{1}{2\sigma^2}}\right)}} dy \\
&= \frac{(e^{\mu_1})^{-\frac{\mu_1}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\exp(\mu+\frac{1}{2}d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j}))}^{+\infty} \frac{(y)^{\ln\left(y^{-\frac{1}{2\sigma^2}}\right)+\frac{\mu}{2\sigma^2}-1}}{y^{-\frac{\mu}{2\sigma^2}}} dy \\
&= \frac{\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\exp(\mu+\frac{1}{2}d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j}))}^{+\infty} y^{\frac{\mu_1}{\sigma^2}-1-\frac{1}{2\sigma^2}\ln y} dy.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1,

$$\begin{aligned}
\frac{\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\exp(\mu+\frac{1}{2}d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j}))}^{+\infty} y^{\frac{\mu_1}{\sigma^2}-1-\frac{1}{2\sigma^2}\ln y} dy &= \frac{\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}} \exp\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j})}{2\sqrt{2\sigma^2}}\right) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j})}{2\sqrt{2\sigma^2}}\right).
\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$P(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j}) \leq \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j})}{2\sqrt{2\sigma^2}}\right).$$

Com este resultado, a probabilidade de se enviar o sinal $\mathbf{s}_1$ e receber outro qualquer é limitado superiormente, ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_e(\mathbf{s}_1) &\leq \sum_{j=1}^{v_1} P(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j}) \\
&\leq \sum_{j=1}^{v_1} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j})}{2\sqrt{2\sigma^2}}\right).
\end{aligned}$$

Sendo todos os sinais equiprováveis,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_e &\leq \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathcal{P}_e(\mathbf{s}_k) \\
&\leq \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{v_k} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\mathbb{H}^n}(\mathbf{s}_k, \mathbf{s}_{k_j})}{2\sqrt{2\sigma^2}}\right),
\end{aligned}$$

lembrando que o segundo somatório é apenas sobre os índices dos sinais $\mathbf{s}_{k_j}$ que influem na região de Voronoi de $\mathbf{s}_k$.

Finalizando, devido ao fato de os modelos $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{B}^n$ serem isométricos e o limitante acima depender apenas da métrica $d_{\mathbb{H}^n}$, o resultado acima não depende do modelo utilizado. $\square$

Corolário 3.4 *Nas condições do Teorema 3.1, acrescido da hipótese do conjunto de sinais ser geometricamente uniforme, temos*

$$\mathcal{P}_e \leq \sum_{j=1}^{v_1} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\mathcal{H}^n}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j})}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right).$$

Demonstração

Se o conjunto dos sinais é geometricamente uniforme, a região de Voronoi de $\mathbf{s}_k$ é congruente à região de Voronoi de $\mathbf{s}_m$ para quaisquer $k, m \leq M$. Logo, $v_k = v_m$ e

$$\sum_{j=1}^{v_k} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\mathcal{H}^n}(\mathbf{s}_k, \mathbf{s}_{k_j})}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right) = \sum_{j=1}^{v_m} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\mathcal{H}^n}(\mathbf{s}_m, \mathbf{s}_{m_j})}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right), \quad \forall k, m \leq M.$$

Fazendo $k = 1$, temos o resultado. $\square$

É importante notar a similaridade dos limitantes hiperbólicos com os limitantes euclidianos dados pela Proposição 3.1 e pelo Corolário 3.3. Na verdade o que acabamos de provar é que os limitantes são válidos tanto na métrica euclidiana como na métrica hiperbólica. No entanto, os estimadores hiperbólicos são mais precisos que os euclidianos quando aplicados à constelações que possuem representantes euclidianos e hiperbólicos como os esquemas *PSK* hiperbólicos definidos adiante. Exemplificamos esta “vantagem de precisão” na próxima seção.

3.6 Constelações *PAM* e *PSK* Hiperbólicas

Nesta seção, estabelecemos os esquemas de modulação hiperbólica que fazem correspondência aos esquemas euclidianos de modulação *PAM* e *PSK* e, com a ajuda dos limitantes desenvolvidos na seção anterior, estimamos a probabilidade de erro associada a esses esquemas para canal afetado com ruído tipo gaussiano hiperbólico. Antes, porém, é importante salientar a não existência de um correspondente direto do esquema de modulação *QAM* no plano hiperbólico $\mathcal{H}^2$.

Como vimos no Capítulo 1, uma constelação do tipo *QAM* possui por “base” um conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ formado por duas funções φ_1 e φ_2 , dadas pelas expressões (1.2). Do ponto de vista geométrico, este conjunto pode ser associado à base canônica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ do $\mathbb{R}^2$ e, com isso, é possível construir a constelação $\mathcal{C}$ dada pela matriz (1.1). Esta constelação $\mathcal{C}$ possui diversas propriedades geométricas que devem ser mantidas em uma eventual constelação correspondente em $\mathcal{H}^2$. Dentre elas, regiões de Voronoi quadrangulares (hiperbólicas) com mesma área (desprezando o efeito bordo). No entanto, esta propriedade pressupõe a existência de um grupo fuchsiano abeliano gerado por duas translações hiperbólicas, ou seja, este grupo deveria ser isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, o que não é possível, devido ao Teorema 2.7 que afirma ser cíclico tal grupo.

Apesar da não existência do “*HQAM*”, podemos construir diversas outras constelações semelhantes, tanto em $\mathcal{H}^2$ quanto em superfícies não compactas provenientes de quocientes de $\mathcal{H}^2$ por um grupo fuchsiano. Algumas delas são abordadas no Capítulo 4.

3.6.1 *M-HPAM* (PAM hiperbólico)

Nesta subseção, iremos estabelecer o equivalente hiperbólico ao esquema *PAM* do caso euclidiano.

Baseados no fato de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{H}$ serem isométricos por

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ x &\longmapsto e^x, \end{aligned}$$

a constelação PAM em $\mathbb{R}$ dada pelo conjunto

$$\mathcal{C}_{M-PAM} = \left\{ s_j \in \mathbb{R} : s_j = (2j - 1 - M) \frac{d_{\min}}{2}, j = 1, \dots, M \right\}$$

pode ser transportada isometricamente por T , resultando na constelação M -**HPAM** dada por

$$\mathcal{C}_{M-HPAM} = \left\{ s_j \in \mathbb{H} : s_j = \exp \left((2j - 1 - M) \frac{d_{\min}}{2} \right), j = 1, \dots, M \right\}$$

em $\mathbb{H}$. A Figura 3.5 ilustra um 3-HPAM com $d_{\min} = 2$.

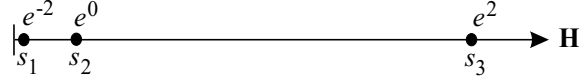


FIGURA 3.5: 3-HPAM com distância hiperbólica mínima 2.

Quanto à probabilidade de erro associada a um M -HPAM, com distância mínima $d_{\min}$, para canal afetado por ruído gaussiano hiperbólico,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e(s_j) &= 2 \int_{\exp(\frac{d_{\min}}{2})}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left(-\frac{d_{\mathbb{H}}^2(x, e^0)}{2\sigma^2} \right) d_{\mathbb{H}}x \\ &= 2 \int_{\exp(\frac{d_{\min}}{2})}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left(-\frac{\ln^2 x}{2\sigma^2} \right) \frac{1}{x} dx \\ &= \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\min} \sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}} \right), \text{ para } j = 2, \dots, M-1. \\ \mathcal{P}_e(s_j) &= \int_{\exp(\frac{d_{\min}}{2})}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} \exp \left(-\frac{d_{\mathbb{H}}^2(x, e^0)}{2\sigma^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\min} \sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}} \right), \text{ para } j = 1, M. \end{aligned}$$

Por conseguinte:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathcal{P}_e(s_j) \\ &= \frac{1}{M} \left((M-2) \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\min} \sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\min} \sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}} \right) \right) \right) \\ &= \frac{(M-1)}{M} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\min} \sqrt{2}}{4\sqrt{\sigma^2}} \right). \end{aligned}$$

Chegamos, portanto, a uma conclusão importante: a probabilidade de erro associada a um M -HPAM é a mesma de um M -PAM (ambos com a mesma distância mínima $d_{\min}$ em suas respectivas métricas). Isto é exatamente o esperado, pois estamos lidando com conjuntos isométricos e o comportamento de uma constelação $\mathcal{C}$ em $\mathbb{R}$, utilizada em um canal com ruído gaussiano, deve ser o mesmo de uma constelação $\mathcal{C}^* = T(\mathcal{C})$ em $\mathbb{H}$, utilizada em canal com ruído gaussiano hiperbólico. Também é importante ressaltar o fato de que, numa eventual aplicação prática, o que pode decidir o uso de $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}^*$ é o *tipo de ruído* do canal do sistema de comunicações e não a análise de desempenho entre as constelações. Esta observação deve se estender a espaços hiperbólicos de dimensão mais alta, apesar da não existência de isometrias entre $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 2$.

3.6.2 M -HPSK (PSK Hiperbólico)

Definamos o análogo ao PSK no caso hiperbólico.

Apesar de as constelações PSK possuírem a mesma “base” $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ do QAM , sua representação geométrica por meio do conjunto de pontos

$$\mathcal{C}_{M-PSK} = \left\{ \mathbf{s}_j \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{s}_j = \left(\sqrt{E} \cos \left(\frac{2\pi}{M} (j-1) \right), -\sqrt{E} \sin \left(\frac{2\pi}{M} (j-1) \right) \right), 1 \leq j \leq M \right\}$$

é cíclica, ou seja, existe um grupo Γ discreto de isometrias⁹ em $\mathbb{R}^2$ tal que o M - PSK é órbita de um ponto pela ação do grupo. Este grupo Γ de isometrias é isomorfo a um grupo fuchsiano no $\mathcal{H}^2$: o grupo G gerado pela isometria elíptica com centro em i (caso $\mathbb{H}^2$) ou em $\mathbf{0}$ (caso $\mathbb{B}^2$) e ângulo $\frac{2\pi}{M}$. O grupo fuchsiano G preserva todas as propriedades geométricas inerentes a Γ , tais como congruência de regiões de Voronoi.

Sendo assim, é natural definir a constelação M -HPSK em $\mathbb{B}^2$ como sendo

$$\mathcal{C}_{M-HPSK} = \left\{ \mathbf{s}_j \in \mathbb{B}^2 : \mathbf{s}_j = \left(\frac{e^{\sqrt{E}} - 1}{e^{\sqrt{E}} + 1} \cos \left(\frac{2\pi}{M} (j-1) \right), -\frac{e^{\sqrt{E}} - 1}{e^{\sqrt{E}} + 1} \sin \left(\frac{2\pi}{M} (j-1) \right) \right), 1 \leq j \leq M \right\}.$$

Notemos que o raio hiperbólico do círculo que contém a constelação é $\sqrt{E}$, como no caso euclidiano. Em $\mathbb{H}^2$, a constelação é definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{M-HPSK} &= \{ I_{\mathbb{B}^2\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_j) \in \mathbb{H}^2 : \mathbf{s}_j \in M\text{-HPSK em } \mathbb{B}^2 \text{ e } I_{\mathbb{B}^2\mathbb{H}^2} \text{ é a isometria (2.3)} \} \\ &= \left\{ \mathbf{s}_j = \mathfrak{e}^{j-1} \left(0 + \frac{1}{e^{\sqrt{E}}} i \right) : \mathfrak{e}(\mathbf{z}) = \frac{(\cos \frac{\pi}{M}) \mathbf{z} + \sin \frac{\pi}{M}}{-(\sin \frac{\pi}{M}) \mathbf{z} + \cos \frac{\pi}{M}}, j = 1, \dots, M \right\}. \end{aligned}$$

Como exemplos, vamos trabalhar a probabilidade de erro associada a um 4-HPSK e a um 8-HPSK em $\mathbb{H}^2$.

4-HPSK

Fixando $E = 1$ (por exemplo) em $\mathcal{C}_{4-HPSK}$ no modelo $\mathbb{H}^2$ e considerando as isometrias elípticas com centro em $(0, 1)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}^k : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{\mathbf{z} \cos \frac{k\pi}{4} + \sin \frac{k\pi}{4}}{-\mathbf{z} \sin \frac{k\pi}{4} + \cos \frac{k\pi}{4}} \end{aligned}$$

temos, para $k = 0, 1, 2$ e 3 , os sinais $\left(\mathbf{z} = \frac{1}{e} i \right)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= (0; 0, 37) \\ \mathbf{s}_2 &= (0, 76; 0, 65) \\ \mathbf{s}_3 &= (0; 2, 72) \\ \mathbf{s}_4 &= (-0, 76; 0, 65) \end{aligned}$$

A Figura 3.6 ilustra os sinais $\mathbf{s}_j$ do 4-HPSK e suas respectivas regiões de Voronoi V_j .

⁹Grupo gerado pela rotação euclidiana de centro na origem e ângulo $\frac{2\pi}{M}$.

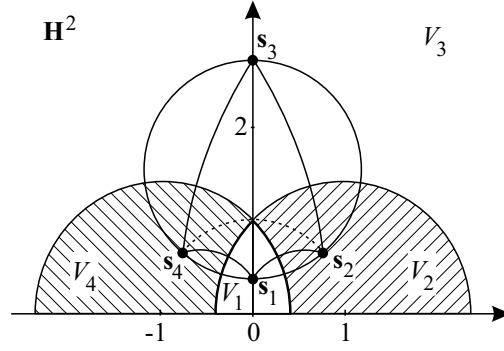


FIGURA 3.6: Uma constelação 4-HPSK e as regiões de Voronoi V_j dos sinais s_j .

Esta constelação é geometricamente uniforme e, de acordo com o Corolário 3.4, a probabilidade de erro satisfaz

$$\mathcal{P}_e \leq \sum_{j=1}^{v_1} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j})}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right).$$

Como o somatório é sobre os índices dos sinais que influem em V_1 , temos, no presente caso, que a soma possui dois termos apenas, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e &\leq \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_4)}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right) \\ &= \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right) \end{aligned}$$

pois $d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_4)$.

Como

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) &= \ln \frac{|0,76 + 0,65i + 0,37i| + |0,76 + 0,65i - 0,37i|}{|0,76 + 0,65i + 0,37i| - |0,76 + 0,65i - 0,37i|} \\ &= 1,5053 \end{aligned}$$

concluimos

$$\mathcal{P}_e \leq \operatorname{erfc} \left(\frac{1,5053}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right).$$

O gráfico do limitante superior $\operatorname{erfc} \left(\frac{1,5053}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right)$ está ilustrado na Figura 3.7 (curva indicada por 4-HPSK).

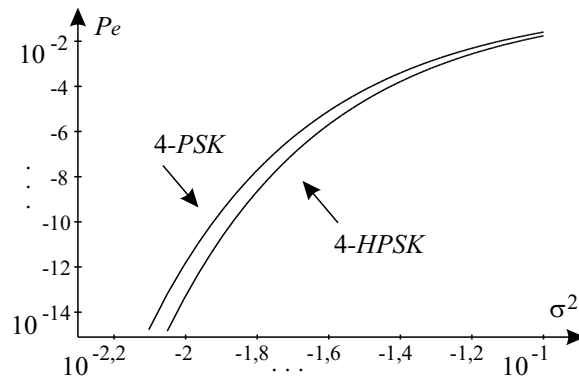


FIGURA 3.7: Gráficos dos limitantes superiores para a probabilidade de erro em função da variância σ^2 para o 4-HPSK e o 4-PSK.

Na tabela abaixo, apresentamos alguns valores numéricos para o limitante superior esboçado no gráfico acima (segunda coluna). A terceira coluna apresenta alguns valores para o limitante superior $\operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{2}\sigma^2}\right)$ (cujo gráfico também está ilustrado na figura acima), apresentado em (3.2), para o 4-PSK euclidiano ($d_{\min} = \sqrt{2}$). Vemos, claramente, uma equivalência numérica entre os estimadores, com uma leve precisão no caso hiperbólico. Esta comparação *qualitativa* mostra a relevância do limitante encontrado no Teorema 3.1.

σ^2	4-HPSK	4-PSK
0,4	0,234	0,264
0,2	0,092	0,114
0,1	$1,73 \times 10^{-2}$	$2,53 \times 10^{-2}$
0,05	$7,63 \times 10^{-4}$	$1,57 \times 10^{-3}$
0,025	$1,93 \times 10^{-6}$	$7,74 \times 10^{-6}$
0,0125	$1,67 \times 10^{-11}$	$2,54 \times 10^{-10}$

8-HPSK

Fixando $E = 1$ e considerando as isometrias elípticas com centro em $(0, 1)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^k : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{\mathbf{z} \cos \frac{k\pi}{8} + \operatorname{sen} \frac{k\pi}{8}}{-\mathbf{z} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{8} + \cos \frac{k\pi}{8}}, \end{aligned}$$

temos, para $k = 0, \dots, 7$, os sinais $\left(\mathbf{z} = \frac{1}{e}i\right)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= (0; 0, 37) \\ \mathbf{s}_2 &= (0, 35; 0, 42) \\ \mathbf{s}_3 &= (0, 76; 0, 65) \\ \mathbf{s}_4 &= (1, 17; 1, 40) \\ \mathbf{s}_5 &= (0; 2, 72) \\ \mathbf{s}_6 &= (-1, 17; 1, 40) \\ \mathbf{s}_7 &= (-0, 76; 0, 65) \\ \mathbf{s}_8 &= (-0, 35; 0, 42) \end{aligned}$$

A constelação está ilustrada na Figura 3.8, bem como as geodésicas que delimitam as regiões de Voronoi dos sinais.

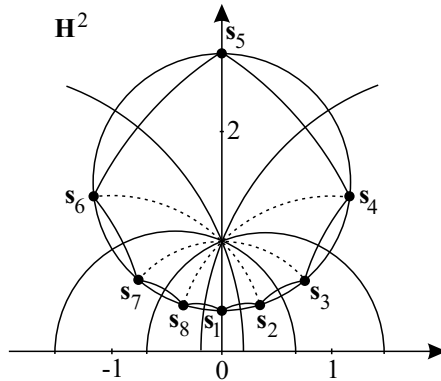


FIGURA 3.8: Constelação 8-HPSK e suas regiões de Voronoi.

Nas condições do Corolário 3.4,

$$\mathcal{P}_e \leq \sum_{j=1}^{v_1} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{1_j})}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right).$$

Analogamente ao caso acima, a região de Voronoi de $\mathbf{s}_1$ é delimitada pelos sinais $\mathbf{s}_2$ e $\mathbf{s}_8$. Portanto,

$$\mathcal{P}_e \leq \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right).$$

Como

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) &= \ln \frac{|0,35 + 0,42i + 0,37i| + |0,35 + 0,42i - 0,37i|}{|0,35 + 0,42i + 0,37i| - |0,35 + 0,42i - 0,37i|} \\ &= 0,86924 \end{aligned}$$

concluimos

$$\mathcal{P}_e \leq \operatorname{erfc} \left(\frac{0,86924}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right).$$

A Figura 3.9 ilustra o gráfico do limitante $\operatorname{erfc} \left(\frac{0,86924}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right)$ (curva indicada por 8-HPSK).

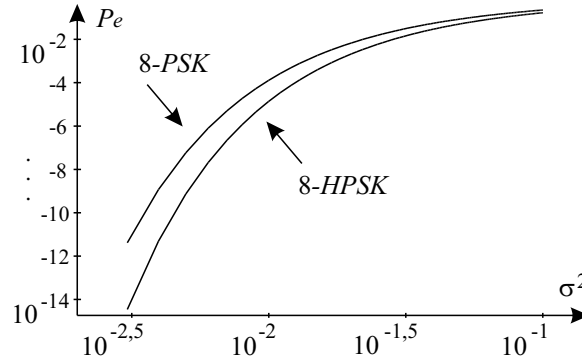


FIGURA 3.9: Gráficos dos limitantes superiores para a probabilidade de erro em função da variância σ^2 para o 8-HPSK e o 8-PSK.

A tabela abaixo consta de alguns valores numéricos para o limitante esboçado acima (segunda coluna). Como no caso do 4-HPSK, a terceira coluna apresenta alguns valores do limitante superior $\operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right)$ (ilustrado na figura) para o 8-PSK euclidiano ($d_{\min} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$).

σ^2	8-HPSK	8-PSK
0,4	0,492	0,545
0,2	0,331	0,392
0,1	0,169	0,226
0,05	$5,19 \times 10^{-2}$	$8,70 \times 10^{-2}$
0,025	$5,98 \times 10^{-3}$	$1,55 \times 10^{-2}$
0,0125	$1,01 \times 10^{-4}$	$6,20 \times 10^{-4}$
0,00625	$3,85 \times 10^{-8}$	$1,29 \times 10^{-6}$

Capítulo 4

Constelações de Sinais em Superfícies Quocientes $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$

Neste capítulo, introduzimos algumas famílias de constelações de sinais para ambiente hiperbólico. As constelações presentemente estudadas foram consideradas devido ao fato de satisfazerem alguns princípios, ora algorítmicos (em termos de geração a partir de isometrias), ora simétricos que fazem com que expressões analíticas gerais possam ser deduzidas. Neste âmbito, a explicitação das constelações, das isometrias, dos grupos, das geodésicas e do espaço quociente em termos de expressões analíticas se torna algo quase inevitável, estando, portanto, presente no decorrer do capítulo. Alguns conceitos e ferramentas analíticas para tal abordagem em dimensão dois foram extraídas de livros-texto de funções complexas como [27] e [46]; outros, de livros-texto de geometria hiperbólica plana e grupos fuchsianos como [31] e [52]. Algumas referências mais específicas foram introduzidas no decorrer do capítulo.

4.1 Preliminares

Conforme comentado na Seção 1.8, o estudo de constelações de sinais em superfícies compactas, tendo em vista suas propriedades métricas e desempenho em codificação e modulação de canal, tem ocorrido com frequência nos últimos anos em Teoria da Informação e Codificação. Constelações de pontos na esfera $\mathbb{S}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, têm sido bastante estudadas e efetivamente usadas em sistemas de comunicações desde meados do século 20 (M -PSK's se enquadram neste âmbito), principalmente após o trabalho de Claude Shannon [53] que é um marco na Teoria da Informação e Codificação. A partir de 1968, com o trabalho de David Slepian [54], constelações de sinais em esferas n -dimensionais passaram a ter maior importância prática e, portanto, a serem estudadas de forma mais intensa. Esse trabalho consolidou a associação de estruturas algébricas, como grupos discretos de isometrias, a tais constelações. Após o conceito de *Códigos Geometricamente Uniformes*, introduzido por David Forney em 1991 [32], a busca por constelações associadas a grupos discretos de isometrias em espaços métricos tornou-se bastante frequente, visto que, em qualquer sistema prático de comunicações, a simetria da constelação sempre desempenha papel de otimizadora, tanto em códigos corretores de erros quanto em probabilidade de erro. Em particular, códigos geometricamente uniformes sobre toros têm despertado, recentemente, o interesse de diversos pesquisadores da área, tanto de codificação de canal, quanto de codificação de fonte. Alguns trabalhos nessa linha são [25], [37] e [34].

Um dos objetivos neste capítulo é prosseguir no caminho delineado acima, ou seja, estudar constelações de sinais sobre superfícies compactas com gênero maior que um ou não-compactas obtidas por quociente. Para tanto, o espaço hiperbólico desempenha um papel bastante importante, visto que qualquer g -toro T_g (toro de gênero g) localmente isométrico a $\mathcal{H}^2$ pode ser obtido topologicamente por quociente de $\mathcal{H}^2$

por algum grupo fuchsiano G de $\mathcal{H}^2$, ou seja,

$$T_g = \frac{\mathcal{H}^2}{G}.$$

Particularmente, para cada gênero g , esta ação pode se processar pela identificação de lados de um polígono regular de $4g$ ou $4g + 2$ lados em $\mathcal{H}^2$ por $2g$ ou $2g + 1$ isometrias que geram G . Com isso, temos uma via natural para a geração de constelações sobre T_g , ou seja, qualquer grupo fuchsiano Γ de $\mathcal{H}^2$ tal que $G \subset \Gamma$ é subgrupo normal, pode gerar constelações, ou sub-constelações, $\mathcal{C}$ geometricamente uniforme (ou um grafo aresta-regular) sobre T_g . Neste âmbito, também há a facilidade de análise de desempenho de $\mathcal{C}$ em termos da probabilidade de erro, aplicando o majorante desenvolvido no Capítulo 3. Antes, porém, de introduzirmos estas constelações, é conveniente tecer alguns apontamentos sobre quociente de espaços hiperbólicos por grupos discretos de isometrias e sua importância como ferramenta matemática ([10], pp. 258-268).

Os quocientes $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$ começaram a ser considerados com mais afinco na comunidade matemática como consequência natural do desenvolvimento de problemas de **uniformização de curvas algébricas planas** ($p(x, y) = 0$; $p(x, y)$ polinômio em x e y), sub-área da **Teoria de Uniformização**. Uniformizar uma curva algébrica plana $p(x, y) = 0$ (ou a superfície de Riemann $p(x, y) = 0$) consiste em encontrar um par de funções meromorfas¹ $x(z)$, $y(z)$ que sejam “parametrizações” não triviais (diferentes de $x(z) = z$, $y(z) = f(x(z))$) de $p(x, y) = 0$ com domínios em subconjuntos simplesmente conexos $D \subset \mathbb{C}$ tais que:

- a) $(x(z), y(z)), z \in D \iff p(x(z), y(z)) = 0$.
- b) Existe um grupo G de bijeções analíticas de D tal que: $p(x(z_1), y(z_1)) = p(x(z_2), y(z_2)) = 0 \iff \exists g \in G$ tal que $g(z_1) = z_2$.

O **Teorema de Riemann**²; [46], páginas 439 e 444) diz que um conjunto $D \subset \tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ simplesmente conexo é conformemente equivalente a um dos seguintes conjuntos³:

- i) $D = \tilde{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{S}^2$ (via projeção estereográfica);
- ii) $D = \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$;
- iii) $D = \mathcal{H}^2$,

e, ainda, como consequência, as bijeções conformes de tais domínios são do tipo $\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ac - bd \neq 0$, ou seja: transformações de Möbius em D .

Temos ainda o **Teorema de Uniformização de Köbe e Poincaré** que afirma que qualquer curva algébrica plana possui uniformização. Assim, toda curva algébrica $p(x, y) = 0$ pode ser descrita como o quociente $\frac{D}{G}$, uma vez que todos os pontos da órbita de $z_0 \in D$ por G são identificados em um mesmo ponto da curva $p(x, y) = 0$. Desta forma, o estudo de curvas algébricas planas possui um paralelo muito interessante com o estudo de grupos discretos de isometrias de $\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2$ ou $\mathcal{H}^2$. Como a classificação de grupos discretos de isometrias (não isomorfos) em $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{R}^2$ é algo bem conhecido, as curvas algébricas planas “contidas” no quociente de $\mathbb{S}^2$ ou $\mathbb{R}^2$ por esses grupos são também bem classificadas; no entanto, a riqueza e complexidade advém do “caso hiperbólico”, uma vez que, ao contrário da esfera e do plano, podemos obter uma infinidade de superfícies (compactas ou não) provenientes de quocientes de $\mathcal{H}^2$ por seus grupos discretos de isometrias. Aliás, a pesquisa e desenvolvimento do “caso hiperbólico” na Teoria de Uniformização se encontram em plena fase de expansão nos dias atuais.

Esses apontamentos sobre uniformização de curvas algébricas são importantes de serem mencionados no presente contexto basicamente por dois motivos:

(i) a importância de se considerar constelações de sinais em superfícies obtidas do plano hiperbólico, visto que há uma infinidade de constelações e grafos “não isomorfos” contidos nessas superfícies, ou

¹Funções $F: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que são analíticas em $D - P$, sendo P um conjunto discreto de polos de $F|_{D-P}$.

²Ou Teorema de Uniformização de Riemann.

³Existe uma função analítica $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D} \subset \tilde{\mathbb{C}}$, que preserva ângulos (entre curvas) em módulo e orientação.

seja, há todo um universo inexplorado, em termos de codificação e transmissão de sinais, nos espaços hiperbólicos;

(ii) há muito desenvolvimento teórico pronto, proveniente da Teoria de Uniformização, que pode ser usado no enfoque deste trabalho.

Um outro fato muito importante de se observar quando tratamos de quocientes $\frac{\mathbb{E}}{G}$ de espaços de curvatura constante por grupos discretos de isometrias é que a geometria do espaço $\mathbb{E}$ “desce” ao quociente através da projeção das órbitas

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{E} &\longrightarrow \frac{\mathbb{E}}{G} \\ x &\longmapsto \Pi(x) = Gx \end{aligned}$$

ou seja, todas as propriedades métricas locais em $\mathbb{E}$ se preservam em $\frac{\mathbb{E}}{G}$ devido ao fato de existir, para cada ponto $p \in \mathbb{E}$, uma vizinhança $V_p \subset \mathbb{E}$ tal que $\Pi|_{V_p}$ é injetora e também devido ao fato de G ser composta por isometrias (portanto preservam propriedades métricas). Isto significa que o estudo de constelações de pontos no quociente está diretamente ligado ao estudo de constelações de pontos no próprio espaço $\mathbb{E}$, atentando-se, é claro, para o fato da não globalidade métrica existente entre esses dois espaços. Veremos adiante como isso ocorre com mais detalhes.

4.2 Constelações não Geometricamente Uniformes sobre Superfícies $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$ não Compactas

A busca por constelações de sinais que possuam comportamento similar à constelação QAM do plano euclidiano leva-nos a considerar estruturas de pontos sobre superfícies quocientes que possuem propriedades interessantes enquanto reticulado. As constelações que estudamos a seguir não são geometricamente uniformes (assim como as QAM 's também não o são), no entanto, podem ser vistas como uma seqüência de $HPSK$'s sobre um reticulado cilíndrico ou cônico. Constelações geometricamente uniformes sobre estas superfícies serão consideradas após a introdução das superfícies compactas, aproveitando os desenvolvimentos analíticos e conceituais que serão introduzidos.

Consideremos algumas proposições que ajudarão (principalmente nos exemplos) a fornecer expressões analíticas para as isometrias que geram os reticulados.

Proposição 4.1 *O eixo $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}$ da translação hiperbólica*

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{a\mathbf{z} + b}{c\mathbf{z} + d} \end{aligned}$$

(ou de sua inversa $\mathfrak{h}^{-1}(\mathbf{z}) = \frac{d\mathbf{z} - b}{-c\mathbf{z} + a}$), $ad - bc = 1$, é a geodésica com centro em $\frac{a-d}{2c} + 0i$ e raio

$$\sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4}{4c^2}}, \text{ ou seja, } \mathcal{E}_{\mathfrak{h}} = C_{\sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4}{4c^2}}} \left(\frac{a-d}{2c} + 0i \right).$$

Reciprocamente, dado um eixo com centro em $(m + 0i)$ e raio r , uma translação hiperbólica $\mathfrak{h}$ com círculo isométrico $\mathcal{I}_{\mathfrak{h}} = C_{\sqrt{k^2 - r^2}}(m + k + 0i)$, $k > r$, é

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{\left(\frac{m-k}{\sqrt{k^2 - r^2}} \right) \mathbf{z} + \left(\frac{-m^2 + k^2}{\sqrt{k^2 - r^2}} - \sqrt{k^2 - r^2} \right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{k^2 - r^2}} \right) \mathbf{z} + \left(\frac{-m-k}{\sqrt{k^2 - r^2}} \right)} \end{aligned}$$

ou, simplificadaamente,

$$\mathfrak{h}(\mathbf{z}) = \frac{(m-k)\mathbf{z} - m^2 + r^2}{\mathbf{z} - m - k}.$$

Usando os círculos isométricos das isometrias, a demonstração desta proposição se torna essencialmente euclidiana e, portanto, vamos omiti-la.

Proposição 4.2 *A isometria elíptica $\mathfrak{e}$ com ponto fixo em $\mathbf{p} = i$ e ângulo $\alpha < \pi$ no sentido anti-horário pode ser dada pela expressão*

$$\begin{aligned} \mathfrak{e} : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{\mathbf{z} \cos \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{-\mathbf{z} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Este resultado é também facilmente demonstrado, levando-se em conta que os círculos isométricos de $\mathfrak{e}$ e $\mathfrak{e}^{-1}$ são

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathfrak{e}} &= C_{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \left(\cotan \frac{\alpha}{2} + 0i \right); \text{ e} \\ \mathcal{I}_{\mathfrak{e}^{-1}} &= C_{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \left(-\cotan \frac{\alpha}{2} + 0i \right) \end{aligned}$$

respectivamente.

Proposição 4.3 *A isometria parabólica $\mathbf{p}$ com ponto fixo em $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ que possui círculo isométrico $\mathcal{I}_{\mathbf{p}} = C_r(m + 0i)$, $m > 0$, pode ser dada pela expressão*

$$\begin{aligned} \mathbf{p} : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{\mathbf{z}}{-\frac{1}{m}\mathbf{z} + 1}. \end{aligned}$$

Proposição 4.4 *Dados dois pontos $\tilde{a} + \tilde{b}i$ e $\tilde{c} + \tilde{d}i$ em $\mathbb{H}^2$, a geodésica γ que os contém é dada por*

$$\gamma = C_{\sqrt{\left(\frac{(\tilde{a}-\tilde{c})^2 - \tilde{b}^2 + \tilde{d}^2}{2(\tilde{a}-\tilde{c})}\right)^2 + \tilde{b}^2}} \left(\frac{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 - \tilde{c}^2 - \tilde{d}^2}{2(\tilde{a} - \tilde{c})} + 0i \right).$$

Por fim, as demonstrações destas duas últimas proposições são triviais.

Retomemos a Definição 1.3 para $\mathbb{E} = \mathcal{H}^2$. Seja $G = \langle T \rangle$ grupo fuchsiano cíclico. Definindo a relação de equivalência sobre $\mathcal{H}^2$:

$$\mathbf{z} \sim \mathbf{w} \iff \mathbf{z} = T^k(\mathbf{w}) \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}$$

temos a *superfície quociente* $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$,

$$\frac{\mathcal{H}^2}{G} = \{[\mathbf{z}] : [\mathbf{z}] \text{ é classe de equivalência da relação } \sim\}.$$

Como comentamos acima, toda a estrutura métrica de $\mathcal{H}^2$ é preservada em $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$, pois sua métrica é obtida da métrica de $\mathcal{H}^2$ do seguinte modo:

$$d_{\frac{\mathcal{H}^2}{G}}([\mathbf{z}], [\mathbf{w}]) = \min \{d_{\mathcal{H}^2}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) : \mathbf{z} \in [\mathbf{z}] \text{ e } \mathbf{w} \in [\mathbf{w}]\}.$$

4.2.1 O Cone Elíptico

Começemos com o tipo mais trivial de superfície quociente: a gerada por grupo fuchsiano cíclico $G = \langle \mathfrak{e} \rangle$, sendo $\mathfrak{e}$ isometria elíptica com ponto fixo i e ângulo α no sentido anti-horário. Deste modo, G é composto apenas por elementos elípticos.

A superfície $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$ é um *cone com bico*, como os cones euclidianos (topologicamente um plano) e a chamamos de *cone elíptico*. O ponto fixo de $\mathfrak{e}$ gera uma singularidade ordinária na superfície quociente.

A Figura 4.1 ajuda a compreender o procedimento topológico envolvido neste quociente, via identificação dos lados γ_1 e γ_2 de uma região de Voronoi de $\mathfrak{e}$.

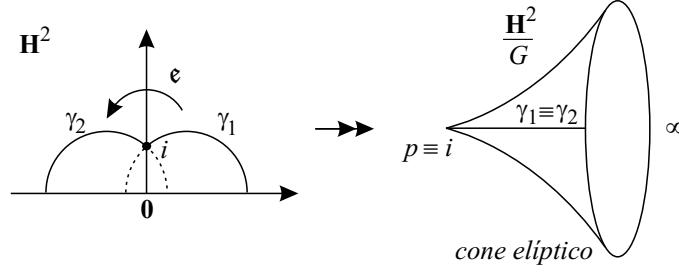


FIGURA 4.1: O cone elíptico: superfície quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\langle \epsilon \rangle}$, sendo ϵ isometria elíptica com ponto fixo i .

Para construir uma constelação de sinais homogênea em $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$, consideremos o grupo Γ gerado pelas isometrias ϵ_n (tal que $(\epsilon_n)^n = \epsilon$) e $\mathfrak{h}_{\mathcal{I}}$ uma translação hiperbólica com eixo no círculo isométrico de ϵ , $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\epsilon}$, ou seja, $\Gamma = \langle \epsilon_n, \mathfrak{h}_{\mathcal{I}} \rangle \equiv \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}$. Com isso, $G \subset \Gamma$.

A órbita de $\mathbf{p} = i$ sobre $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$, indicada por

$$\frac{\Gamma i}{G} = \{[T(i)] : T \in \Gamma, [T(i)] \text{ é classe de equivalência de } T(i)\}$$

é um reticulado sobre $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$ de difícil estudo e determinação. Porém, é possível tomar uma constelação (não geometricamente uniforme) no formato de uma rede circular de pontos uniformemente espaçados, dado pela órbita

$$\frac{\Gamma_{kj}i}{G} = \left\{ \left[\epsilon_n^k \left(\mathfrak{h}_{\mathcal{I}}^j(i) \right) \right] \in \frac{\Gamma i}{G} : k, j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Cada ponto (classe de equivalência) dessa constelação é cruzamento de uma das n geodésicas (que dividem homogeneamente uma região de Voronoi de $G\mathbf{q}$, $\mathbf{q} \neq i$) com um dos infinitos círculos hiperbólicos que contêm as órbitas $\frac{\Gamma_{kj}i}{G}$. Este reticulado é semelhante às constelações concêntricas de *PSK*'s no plano euclidiano, em que cada ponto é cruzamento de reta com círculo, ou ainda, é semelhante a uma malha circular sobre um cone euclidiano onde, em cada nível (altura), temos uma constelação *PSK*. Obviamente, a variação dos raios dos *PSK*'s no cone euclidiano é linear, fato que não ocorre no caso hiperbólico (que possui variação exponencial).

Outro fato interessante a ressaltar é o procedimento algorítmico que envolve a geração do reticulado $\frac{\Gamma_{kj}i}{G}$. A partir do ponto i , todos os demais podem ser gerados computacionalmente pela composta $\epsilon_n^k \left(\mathfrak{h}_{\mathcal{I}}^j(i) \right)$ fazendo, para cada j , k variar de 0 até $n - 1$.

Análise de Desempenho de $\frac{\Gamma_{kj}i}{G}$

Devido à não congruência hiperbólica das regiões de Voronoi do reticulado $\frac{\Gamma_{kj}i}{G}$, o meio mais coerente de utilização da constelação em canal hiperbólico é como sequência de *HPSK*'s de diferentes raios, ou seja, cada elemento de $\left(\frac{\Gamma_{kj}i}{G} \right)_{j \in \mathbb{N}^*}$ é um ciclo fechado de n pontos todos sobre um círculo hiperbólico

“quocientado”. Desta forma, fixado um sinal $[\mathbf{s}] \in \frac{\Gamma_{kj}i}{G}$, seus vizinhos de mesma energia (raio) são $[\epsilon_n(\mathbf{s})]$ e $[\epsilon_n^{-1}(\mathbf{s})]$ e, portanto, a probabilidade de erro associada a sinal no mesmo nível de energia (indicada por $P_e^{||\mathbf{s}||}$, $||\mathbf{s}|| = d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}, i)$), é majorada por

$$P_e^{||\mathbf{s}||} \leq \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\mathbb{H}^2}([\mathbf{s}], [\epsilon_n(\mathbf{s})])}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right)$$

de acordo com o Corolário 3.4.

Para fins comparativos entre constelações de sinais em $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$, podemos traçar o gráfico do estimador da probabilidade de erro em função da variância para qualquer constelação, como fizemos nos exemplos do final do Capítulo 3. Também, como no caso de qualquer constelação euclidiana, podemos aumentar indefinidamente a distância hiperbólica mínima entre os pontos da constelação, ao custo do aumento da energia média do sistema.

Um exemplo ajudará a compreender os procedimentos acima esboçados.

Exemplo

Tomemos:

(i) a isometria elíptica de ponto fixo $\mathbf{p} = i$ e ângulo $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário

$$\begin{aligned} \mathfrak{e} : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{\mathbf{z} + 1}{-\mathbf{z} + 1} \end{aligned} .$$

(ii) a isometria elíptica de ponto fixo $\mathbf{p} = i$ e ângulo $\frac{\pi}{8}$ no sentido anti-horário

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_4 : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{\mathbf{z}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{-\mathbf{z}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \end{aligned} .$$

(iii) a translação hiperbólica de eixo $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathfrak{e}} = C_{\sqrt{2}}(1 + 0i)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{\mathcal{I}} : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{(3 + \sqrt{2})\mathbf{z} + 1}{\mathbf{z} + (1 + \sqrt{2})} \end{aligned} .$$

Consideremos os grupos $G = \langle \mathfrak{e} \rangle$ e $\Gamma = \langle \mathfrak{e}_4, \mathfrak{h}_{\mathcal{I}} \rangle$. Logo, $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$ é um cone elíptico e Γ age de maneira transitiva sobre a constelação $\frac{\Gamma_{kj}i}{G}$, que está ilustrada na Figura 4.2.

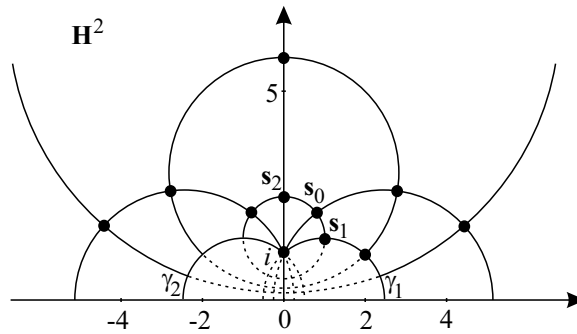


FIGURA 4.2: A constelação $\frac{\Gamma_{kj}i}{G}$ no cone elíptico.

Quanto à análise de desempenho, fixando o sinal

$$\mathbf{s}_0 = \mathfrak{e}_4(\mathfrak{h}_{\mathcal{I}}(i)) \cong 0,78 + 2,04i$$

seus vizinhos de mesma energia são

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \mathfrak{h}_{\mathcal{I}}(i) = 1 + \sqrt{2}i \\ \mathbf{s}_2 &= \mathfrak{e}_4^2(\mathfrak{h}_{\mathcal{I}}(i)) = (1 + \sqrt{2})i. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}_0\| &= d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_0, i) \cong 0,88 \\ d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1) &= d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_2) \cong 0,39 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} P_e^{0,88} &\leq \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1)}{2\sqrt{2\sigma^2}}\right) \\ &\cong \operatorname{erfc}\left(\frac{0,39}{2\sqrt{2\sigma^2}}\right). \end{aligned}$$

4.2.2 O Cone Parabólico

Neste caso, a superfície quociente é obtida por meio de um grupo fuchsiano G gerado por isometria parabólica $\mathfrak{p}$, sendo $\mathfrak{p} = \mathbf{0}$ ponto fixo ideal da isometria.

A superfície $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$ é um *cone com bico no infinito* (topologicamente isomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$) e chamamos de **cone parabólico**. O ponto fixo ideal de $\mathfrak{p}$ gera uma singularidade ideal na superfície.

A Figura 4.3 ilustra a ação de G na obtenção dessa superfície quociente.

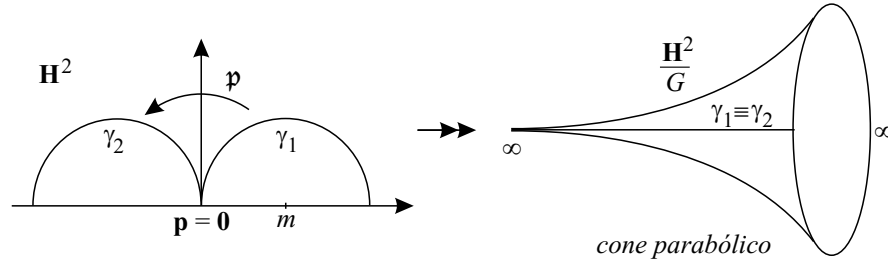


FIGURA 4.3: O cone parabólico: superfície quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\langle \mathfrak{p} \rangle}$, sendo $\mathfrak{p}$ isometria parabólica com ponto fixo $\mathbf{0}$.

Observemos que, apesar de estarmos chamando esta superfície de “cone”, ela também pode ser vista como um **cilindro parabólico**, uma vez que não possui singularidades ordinárias.

Como no caso elíptico, uma constelação de sinais homogênea (mas não geometricamente uniforme) em $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$ pode ser construída considerando o grupo Γ gerado pelas isometrias $\mathfrak{p}_n$ (tal que $(\mathfrak{p}_n)^n = \mathfrak{p}$) e $\mathfrak{h}_{\mathcal{I}}$ uma translação hiperbólica com eixo no círculo isométrico de $\mathfrak{p}$, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathfrak{p}}$.

No caso anterior, havia um ponto natural que podíamos tomar como partida para a obtenção de uma constelação homogênea, o ponto fixo de isometria elíptica. Neste caso, não podemos tomar o ponto fixo de uma isometria parabólica $\mathfrak{p}$, pois este é ideal. Fazemos uma opção aleatória por qualquer ponto $\mathbf{q}$ não ideal de $\mathcal{I}$ ⁽⁴⁾. Assim, a órbita de $\mathbf{q}$ sobre $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$, indicada por

$$\frac{\Gamma \mathbf{q}}{G} = \{[T(\mathbf{q})] : T \in \Gamma\}$$

⁴Como o subreticulado que será considerado não possui regiões de Voronoi congruentes, para cada ponto escolhido como representante de órbita, temos um subreticulado distinto em termos de perfil de distâncias entre pontos.

é um reticulado sobre $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$ que possui uma constelação dada por

$$\frac{\Gamma_{kj}\mathbf{q}}{G} = \left\{ \left[\mathbf{p}_n^k \left(\mathfrak{h}_I^j(\mathbf{q}) \right) \right] \in \frac{\Gamma\mathbf{q}}{G} : k, j \in \mathbb{Z} \right\}$$

que, por sua vez, possui as propriedades geométricas que estamos procurando.

Os sinais dessa constelação estão situados sobre os cruzamentos das n geodésicas que dividem homogeneamente uma região de Voronoi de G com os horocírculos originados pelas isometrias $\mathbf{p}_n^k$. No entanto, ao contrário do caso elíptico que possui um ciclo de pontos com raio mínimo sobre círculos hiperbólicos identificados, se fixarmos uma isometria parabólica $\mathbf{p}_I$, há infinitos ciclos de pontos sobre horocírculos identificados que possuem raios decrescentes tendendo a zero.

Como no caso anterior, o procedimento algorítmico para a obtenção da constelação de sinais sobre $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$ é feito dentro das mesmas considerações já traçadas.

Análise de Desempenho em $\frac{\Gamma_{kj}\mathbf{q}}{G}$

As considerações sobre análise de desempenho requerem um pouco mais de cuidado, se comparadas ao caso anterior. O fato de não haver um ponto ordinário que funcione como centro dos sucessivos elementos de $\left(\frac{\Gamma_{kj}\mathbf{q}}{G} \right)_{j \in \mathbb{Z}}$, faz com que não possamos falar em energia destes elementos e, portanto, é incorreto atribuir o sentido de “sucessão de *HPSK's*” a este reticulado. Para contornar este problema, vamos tomar o ponto $\mathbf{q}$ acima como “origem” para o cálculo da probabilidade de erro que, além da variância, depende apenas da distância mínima entre pontos de cada elemento da sucessão. Assim, diremos que a órbita $\frac{\Gamma_{kj_0}\mathbf{q}}{G}$, j_0 fixo, possui “energia” $j_0 = d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{q}, \mathfrak{h}_I^{j_0}(\mathbf{q}))$.

Um sinal $[\mathbf{s}] \in \frac{\Gamma_{kj_0}\mathbf{q}}{G}$ possui por vizinhos os pontos $[\mathbf{p}_n(\mathbf{s})]$ e $[\mathbf{p}_n^{-1}(\mathbf{s})]$ e a probabilidade de erro no nível j_0 é estimada por

$$P_e^{j_0} \leq \text{erfc} \left(\frac{d_{\mathbb{H}^2}([\mathbf{s}], [\mathbf{p}_n(\mathbf{s})])}{2\sqrt{2\sigma^2}} \right).$$

Exemplo

Consideremos as isometrias:

(i) parabólica com ponto fixo $\mathbf{0}$ e círculo isométrico $\mathcal{I}_{\mathbf{p}} = C_1(1 + 0i)$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{\mathbf{z}}{-\mathbf{z} + 1} \end{aligned}.$$

(ii) parabólica $\mathbf{p}_4$ com ponto fixo $\mathbf{0}$ e tal que $\mathbf{p}_4^4 = \mathbf{p}$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_4 : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{4\mathbf{z}}{-\mathbf{z} + 4} \end{aligned}.$$

(iii) translação hiperbólica de eixo $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathbf{p}}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_I : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{4\mathbf{z}}{\mathbf{z} + 2} \end{aligned}.$$

Tomando o ponto $\mathbf{q} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$, a constelação $\frac{\Gamma_{kj}\mathbf{q}}{G}$ é ilustrada na Figura 4.4.

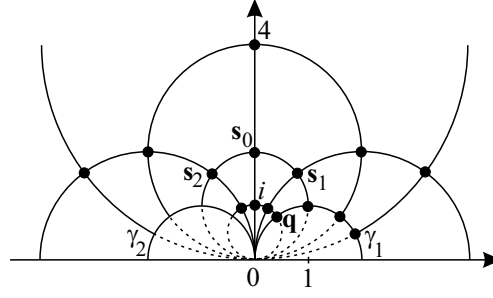


FIGURA 4.4: A constelação $\frac{\Gamma_{kj}\mathbf{q}}{G}$ no cone parabólico.

Quanto à análise de desempenho, fixemos o nível $j_0 = 1$ e tomemos o ponto

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{p}_4^2(\mathbf{h}_{\mathcal{I}}(\mathbf{q})) = 2i.$$

Os sinais vizinhos que determinam lado em sua região de Voronoi no mesmo nível são

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_1 &= \mathbf{p}_4(\mathbf{h}_{\mathcal{I}}(\mathbf{q})) = \frac{4}{5} + \frac{8}{5}i \\ \mathbf{s}_2 &= \mathbf{p}_4^3(\mathbf{h}_{\mathcal{I}}(\mathbf{q})) = -\frac{4}{5} + \frac{8}{5}i.\end{aligned}$$

Temos

$$d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_2) = d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_4) \cong 0,50$$

Logo,

$$\begin{aligned}P_e^1 &\leq \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1)}{2\sqrt{2}\sigma^2}\right) \\ &\cong \operatorname{erfc}\left(\frac{0,50}{2\sqrt{2}\sigma^2}\right).\end{aligned}$$

4.2.3 O Cilindro Hiperbólico

Neste caso, a superfície quociente é obtida por meio de um grupo fuchsiano G gerado por translação hiperbólica $\mathbf{t}$.

A superfície $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$ é um **cilindro hiperbólico**.

A Figura 4.5 ilustra o procedimento de obtenção desta superfície quociente.

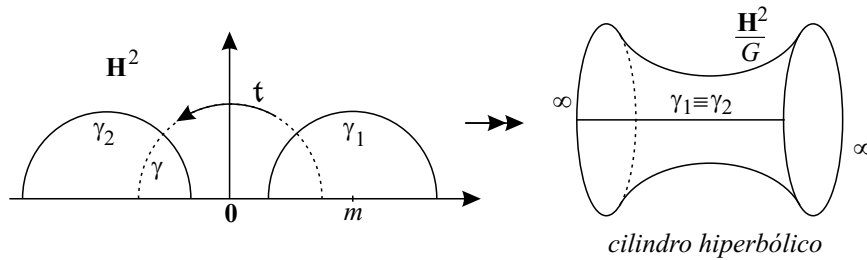


FIGURA 4.5: O cilindro hiperbólico: superfície quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\langle \mathbf{t} \rangle}$, sendo $\mathbf{t}$ translação hiperbólica com eixo γ .

Como nos casos anteriores, uma constelação de sinais homogênea em $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$ pode ser construída considerando o grupo Γ gerado pelas isometrias $\mathbf{t}_n$ (tal que $(\mathbf{t}_n)^n = \mathbf{t}$) e $\mathbf{h}_{\mathcal{I}}$ uma translação hiperbólica com eixo no círculo isométrico de $\mathbf{t}$, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathbf{t}}$.

Seja um ponto $\mathbf{q}$ em $\mathcal{I}$. Assim, a órbita de $\mathbf{q}$ sobre $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$, indicada por

$$\frac{\Gamma \mathbf{q}}{G} = \{[T(\mathbf{q})] : T \in \Gamma\}$$

é um reticulado sobre $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$ que possui a constelação dada por

$$\frac{\Gamma_{kj} \mathbf{q}}{G} = \left\{ \left[\mathbf{t}_n^k \left(\mathbf{h}_{\mathcal{I}}^j(\mathbf{q}) \right) \right] \in \frac{\Gamma \mathbf{q}}{G} : k, j \in \mathbb{Z} \right\}$$

que é alvo de nossas atenções.

Neste caso, os pontos de $\frac{\Gamma_{kj} \mathbf{q}}{G}$ estão sobre o cruzamento das n geodésicas que particionam uma região de Voronoi de G com as curvas equidistantes ao eixo γ . Vale observar que $\left(\mathbf{t}_n^k \left(\mathbf{h}_{\mathcal{I}}^j(\mathbf{q}) \right) \right)_{j \in \mathbb{Z}}$ é uma seqüência cujos “raios” dos elementos possuem um limitante inferior diferente de zero e, como no caso parabólico, a inexistência de um ponto fixo ordinário impossibilita considerarmos os elementos desta seqüência como “camadas de *HPSK*’s”.

Análise de Desempenho em $\frac{\Gamma_{kj} \mathbf{q}}{G}$

Aqui, as mesmas considerações quanto ao caso parabólico são observadas. O fato de não haver um ponto ordinário, que funcione como centro dos sucessivos elementos de $\left(\frac{\Gamma_{kj} \mathbf{q}}{G} \right)_{j \in \mathbb{Z}}$, nos conduz a considerar o ponto $\mathbf{q}$ acima como “origem” para o cálculo da probabilidade de erro. Assim, dizemos que a órbita $\frac{\Gamma_{kj_0} \mathbf{q}}{G}$, j_0 fixo, possui “energia” $j_0 = d_{\mathbb{H}^2} \left(\mathbf{q}, \mathbf{h}_{\mathcal{I}}^{j_0}(\mathbf{q}) \right)$.

Um ponto $[\mathbf{s}] \in \frac{\Gamma_{kj_0} \mathbf{q}}{G}$ possui por vizinhos os pontos $[\mathbf{t}_n(\mathbf{s})]$ e $[\mathbf{t}_n^{-1}(\mathbf{s})]$ e a probabilidade de erro no nível j_0 é estimada por

$$P_e^{j_0} \leq \text{erfc} \left(\frac{d_{\frac{\mathbb{H}^2}{G}}([\mathbf{s}], [\mathbf{t}_n(\mathbf{s})])}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right).$$

Exemplo

Consideremos as isometrias:

(i) translação hiperbólica com eixo $\gamma = C_1(\mathbf{0})$ e círculo isométrico $\mathcal{I}_{\mathbf{t}} = C_{\sqrt{(\frac{3}{2})^2 - 1}} \left(\frac{3}{2} + 0i \right)$

$$\begin{aligned} \mathbf{t} : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{3\mathbf{z} - 2}{-2\mathbf{z} + 3} \end{aligned}$$

(ii) translação hiperbólica $\mathbf{t}_4$ com eixo γ e tal que $\mathbf{t}_4^4 = \mathbf{t}$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_4 : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{-\sqrt{6 + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{20 + 9\sqrt{5}}}\mathbf{z} + 1}{\mathbf{z} - \sqrt{6 + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{20 + 9\sqrt{5}}}} \end{aligned}$$

(iii) translação hiperbólica de eixo $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathbf{t}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\mathcal{I}} : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{(7 + \sqrt{11})\mathbf{z} - 2}{2\mathbf{z} + 1 + \sqrt{11}} \end{aligned}$$

Tomando o ponto $\mathbf{q} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}i$, a constelação $\frac{\Gamma_{kj} \mathbf{q}}{G}$ é ilustrada na Figura 4.6.

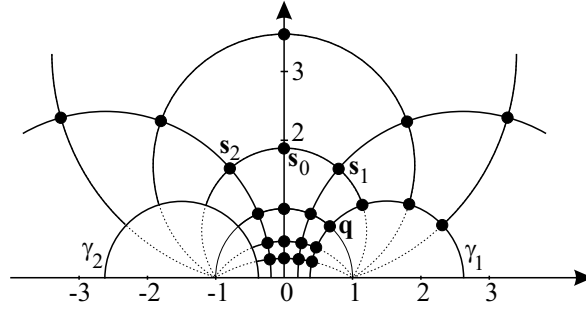


FIGURA 4.6: A constelação $\frac{\Gamma_{kj}\mathbf{q}}{G}$ no cilindro hiperbólico.

Quanto à análise de desempenho, fixemos o nível $j_0 = 1$ e tomemos o ponto

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{t}_4^2(\mathbf{h}_I(\mathbf{q})) \cong 1,88i$$

os sinais vizinhos que determinam lado em sua região de Voronoi no mesmo nível são

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{t}_4(\mathbf{h}_I(\mathbf{q})) \cong 0,79 + 1,59i$$

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{t}_4^3(\mathbf{h}_I(\mathbf{q})) \cong -0,79 + 1,59i$$

Temos

$$d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1) = d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_2) \cong 0,48$$

Logo,

$$\begin{aligned} P_e^1 &\leq \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1)}{2\sqrt{2}\sigma^2}\right) \\ &\cong \operatorname{erfc}\left(\frac{0,48}{2\sqrt{2}\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

4.2.4 Grupos de Schottky

É importante ressaltar que, em superfícies quocientes $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$ não-compactas, uma região fundamental de G em $\mathbb{H}^2$ deve sempre ser ilimitada na métrica hiperbólica (Proposição 2.28). Tendo em vista essa condição, podemos obter infinitas superfícies com características tanto do cone parabólico quanto do cilindro hiperbólico, mas que não são obtidas por quocientes de grupos cíclicos. Por exemplo, se $G = \langle \mathbf{p}, \mathbf{t} \rangle$ é gerado pela isometria parabólica $\mathbf{p}$ e pela translação hiperbólica $\mathbf{t}$, o quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{G}$ pode possuir aspecto como o da Figura 4.7 abaixo.

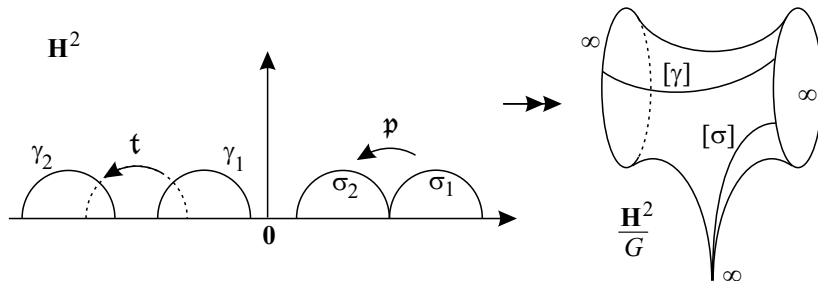


FIGURA 4.7: Superfície quociente obtida por grupo de Schottky.

Os grupos fuchsianos que originam superfícies não-compactas como as descritas acima pertencem a uma classe mais abrangente de grupos incluídos em $PSL_2(\mathbb{C})$ (ver Seção 2.11 sobre grupos kleinianos) que passamos a introduzir por meio da definição seguinte.

Definição 4.1 *Sejam $m \geq 2$ e $J = \{C_1, C'_1, \dots, C_m, C'_m\}$ conjunto com $2m$ curvas de Jordan em $\tilde{\mathbb{C}}$ disjuntas e tais que a região ilimitada determinada por cada curva contém todas as demais curvas. Sejam I_{C_j} e L_{C_j} as regiões ilimitadas e limitada, respectivamente, determinadas por $C_j \in J$ e $h_1, \dots, h_m$ elementos de $PSL_2(\mathbb{C})$ tais que $h_j(I_{C_j}) = L_{C'_j}$. Ao grupo $H = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$ chamamos de **Grupo de Schottky**.*

Como consequência segue que todo grupo de Schottky é kleiniano. Fazendo a restrição da definição acima a $\hat{\mathcal{H}}^2$, concluímos que todo grupo de Schottky nos modelos da geometria hiperbólica é fuchsiano. Em particular, o cone parabólico e o cilindro hiperbólico são obtidos por grupos de Schottky, mas o cone elíptico não.

Como nos casos dos quocientes gerados por grupos de Schottky cíclicos, também é possível gerar constelações homogêneas sobre superfícies quocientes geradas por grupos de Schottky não cíclicos. No entanto, caracterizar uma constelação homogênea como as consideradas nesta seção não é tarefa fácil.

4.3 Constelações Geometricamente Uniformes sobre Superfícies $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$ Compactas

4.3.1 Obtendo o g -toro como Quociente $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$

Nesta subseção, dedicamo-nos ao estudo analítico das superfícies de gênero $g \geq 2$ localmente isométricas a $\mathcal{H}^2$ (portanto, diferenciáveis) obtidas por quociente por grupos fuchsianos. Embora o procedimento de obtenção de superfícies de gênero g a partir de $\mathcal{H}^2$ seja abordado em vários textos de geometria hiperbólica, o seqüenciamento das demonstrações que desenvolvemos aqui visa introduzir o ambiente dos grafos e constelações trabalhados nas próximas seções.

A Região Fundamental de G

Recordando o Teorema 2.9 e definições pertinentes que foram fornecidas no Capítulo 2, o quociente $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$ que origina o g -toro⁵ é obtido por parelhamento de lados da região fundamental $\mathcal{F}$ de G e esta deve possuir um número par de lados. Impondo a condição de que $\mathcal{F}$ seja um polígono hiperbólico regular centrado na origem do modelo $\mathbb{B}^2$ (6), podemos caracterizar (encontrar expressões) para as isometrias que geram o grupo fuchsiano G de assinatura $(g; -)$ (7) a partir de $\mathcal{F}$.

Nestas circunstâncias, a condição

$$\mu_{\mathbb{B}^2} \left(\frac{\mathbb{B}^2}{G} \right) = \mu_{\mathbb{B}^2}(\mathcal{F}) = 4\pi(g-1)$$

implica que $\mathcal{F}$ deve ser um polígono hiperbólico regular com $4g$ lados (todos os vértices formam um único ciclo cuja soma dos ângulos é 2π) ou com $4g+2$ lados (os vértices formam dois ciclos).

Concentremo-nos na região $\mathcal{F}$ mais simples, ou seja, a que possui $4g$ lados. Esta região fundamental é composta por $4g$ triângulos hiperbólicos isósceles, sendo que um dos ângulos internos possui medida $\frac{\pi}{2g}$.

⁵Superfície diferenciável de gênero g .

⁶Optamos pelo modelo do disco devido à sua simetria euclidiana em relação à origem. Isto facilita tanto a visualização quanto a construção que iremos empreender.

⁷Para que tenhamos o quociente localmente isométrico a $\mathcal{H}^2$, não podemos ter elementos elípticos fixando os vértices da região fundamental $\mathcal{F}$ de G , ou seja, não temos os parâmetros $m_1, \dots, m_r$ da assinatura $(g, m_1, \dots, m_r)$ de G , o que implica a inexistência do somatório $\sum_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_k}\right)$ na medida da área hiperbólica do quociente fornecida pelo Teorema 2.9.

Além disso, os vértices de ângulo $\frac{\pi}{2g}$ de todos os triângulos se encontram na origem. Assim, a área $\mathcal{A}_\Delta$ de cada um desses triângulos é dada pela expressão

$$\mathcal{A}_\Delta = \frac{4\pi(g-1)}{4g} = \pi - \frac{\pi}{g}. \quad (4.1)$$

Seja α a medida de cada um dos outros dois ângulos de cada triângulo em questão. Pelo Teorema de Gauss-Bonnet (Teorema 2.4):

$$\mathcal{A}_\Delta = \pi - \left(\frac{\pi}{2g} + \alpha + \alpha \right). \quad (4.2)$$

De (4.1) e (4.2) temos

$$\alpha = \frac{\pi}{4g}$$

ou seja, os ângulos internos dos $4g$ triângulos hiperbólicos isósceles que compõem $\mathcal{F}$ são $\frac{\pi}{2g}$, $\frac{\pi}{4g}$ e $\frac{\pi}{4g}$.

O próximo passo, um tanto quanto euclidiano, é encontrar as equações dos círculos que contêm as geodésicas que formam os lados de $\mathcal{F}$. Para tanto, consideremos a Figura 4.8, que destaca em $\mathbb{B}^2$ uma das geodésicas de $\mathcal{F}$ em consideração.

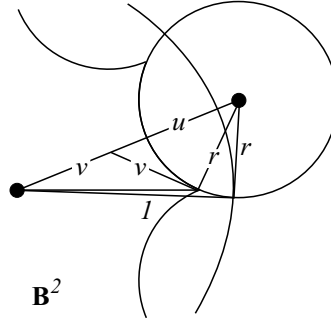


FIGURA 4.8: Obtendo expressões analíticas para as geodésicas de $\mathcal{F}$.

Temos as seguintes relações obtidas a partir dos dois triângulos retângulos:

$$\begin{aligned} r^2 &= u^2 \sin^2 \frac{\pi}{2g} \\ (u+v)^2 &= \left(u + u \cos \frac{\pi}{2g} \right)^2 = 1 + r^2 \end{aligned}$$

resultando

$$\begin{aligned} r &= \frac{\tan \frac{\pi}{2g}}{\sqrt{2 + 2 \sec \frac{\pi}{2g}}} \\ u+v &= \sqrt{\frac{1 + \sec \frac{\pi}{2g}}{2}}. \end{aligned}$$

Com isso, os centros euclidianos das geodésicas dos lados de $\mathcal{F}$ são

$$\exp \left(i \frac{\pi}{2g} \left(\frac{1}{2} + k \right) \right) \sqrt{\frac{1 + \sec \frac{\pi}{2g}}{2}}, \quad k = 0, \dots, 4g-1$$

e os raios (que são todos iguais)

$$r = \frac{\tan \frac{\pi}{2g}}{\sqrt{2 + 2 \sec \frac{\pi}{2g}}}.$$

Sintetizando os resultados desta subseção, temos:

Proposição 4.5 *Seja $\mathcal{F}$ - polígono hiperbólico regular de $4g$ lados centrado na origem de $\mathbb{B}^2$ com um vértice no eixo real positivo - região fundamental do grupo fuchsiano de assinatura $(g, -)$ gerador de $\frac{\mathbb{B}^2}{G} = T_g$. Então, os lados de $\mathcal{F}$ estão contidos nos círculos euclidianos*

$$C_{\frac{\tan \frac{\pi}{2g}}{\sqrt{2+2\sec \frac{\pi}{2g}}}} \left(\exp \left(i \frac{\pi}{2g} \left(\frac{1}{2} + k \right) \right) \sqrt{\frac{1 + \sec \frac{\pi}{2g}}{2}} \right).$$

Observemos que procedimento totalmente análogo poderia ser empregado se houvésssemos optado por $\mathcal{F}$ com $4g + 2$ lados.

As Isometrias Geradoras de G

Fazendo uso das isometrias elípticas com centro na origem⁸ e ângulo $\frac{2\pi}{8g} + k\frac{2\pi}{4g}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_k : \mathbb{B}^2 &\longrightarrow \mathbb{B}^2, \quad k = 0, \dots, 4g - 1 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \exp \left(i \frac{\pi}{2g} \left(\frac{1}{2} + k \right) \right) \mathbf{z} \end{aligned} \quad (4.3)$$

temos o trabalho de encontrar apenas uma isometria geradora de G . As outras são conjugadas com rotações do tipo acima.

Rotulemos os lados de $\mathcal{F}$ com $\gamma_1, \dots, \gamma_{4g}$, sendo a contagem iniciada no sentido anti-horário e a partir do ângulo zero no primeiro quadrante.

Seja

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} : \mathbb{B}^2 &\longrightarrow \mathbb{B}^2, \quad a, c \in \mathbb{C}, \quad a\bar{a} - c\bar{c} = 1 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{a\mathbf{z} + \bar{c}}{c\mathbf{z} + \bar{a}} \end{aligned}$$

a translação hiperbólica que parelha os lados γ_1 e γ_3 de $\mathcal{F}$.

Também consideremos a inversa de $\mathfrak{h}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}^{-1} : \mathbb{B}^2 &\longrightarrow \mathbb{B}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{\bar{a}\mathbf{z} - \bar{c}}{-c\mathbf{z} + a} \end{aligned}$$

O centro de γ_1 pode ser dado por

$$\exp \left(i \frac{\pi}{4g} \right) \sqrt{\frac{1 + \sec \frac{\pi}{2g}}{2}}$$

e o centro de γ_3 por

$$\exp \left(i \frac{\pi}{2g} \left(\frac{1}{2} + 2 \right) \right) \sqrt{\frac{1 + \sec \frac{\pi}{2g}}{2}}$$

O círculo isométrico de $\mathfrak{h}$ possui centro $-\frac{\bar{a}}{c}$ e raio $\frac{1}{|c|}$, e o de $\mathfrak{h}^{-1}$ centro $\frac{a}{c}$ e mesmo raio.

Logo,

$$-\frac{\bar{a}}{c} = \exp \left(i \frac{\pi}{4g} \right) \sqrt{\frac{1 + \sec \frac{\pi}{2g}}{2}} \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{|c|} = \frac{\tan \frac{\pi}{2g}}{\sqrt{2 + 2\sec \frac{\pi}{2g}}} \quad (4.5)$$

$$\frac{a}{c} = \exp \left(i \frac{\pi}{2g} \left(\frac{1}{2} + 2 \right) \right) \sqrt{\frac{1 + \sec \frac{\pi}{2g}}{2}}. \quad (4.6)$$

⁸Neste caso, essas rotações coincidem com as rotações euclidianas de mesmo centro e giro.

Consequência de 4.4 e 4.6:

$$a = -\exp\left(i\frac{\pi}{g}\right)\bar{a}.$$

De $a\bar{a} - c\bar{c} = 1$ e 4.5:

$$a = -\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2g}}{\sin \frac{\pi}{2g}} \exp\left(\frac{\pi}{2g}i\right)i.$$

Utilizando novamente 4.6:

$$c = -\frac{\sqrt{2\left(1 + \cos \frac{\pi}{2g}\right)\cos \frac{\pi}{2g}}}{\sin \frac{\pi}{2g}} \exp\left(-i\frac{3\pi}{4g}\right)i$$

que explicita os valores dos coeficientes de $\mathfrak{h}$ em termos do gênero g de $\frac{\mathbb{B}^2}{G}$.

Finalmente, observemos que as isometrias geradoras de G são, de fato, hiperbólicas, pois seus traços são $2 + 2\cos \frac{\pi}{2g}$.

Sintetizando:

Proposição 4.6 *Seja $\mathcal{F}$ como na Proposição 4.5. A translação hiperbólica $\mathfrak{h}$ que parelha os lados γ_1 e γ_3 - rotulados em sentido anti-horário a partir do semi-eixo real positivo - é dada por*

$$\mathfrak{h}(\mathbf{z}) = \frac{\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{2g}} \exp\left(i\frac{\pi}{2g}\right)\mathbf{z} - \sqrt{2\cos \frac{\pi}{2g}} \exp\left(i\frac{3\pi}{4g}\right)}{\sqrt{2\cos \frac{\pi}{2g}} \exp\left(-i\frac{3\pi}{4g}\right)\mathbf{z} - \sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{2g}} \exp\left(-i\frac{\pi}{2g}\right)}.$$

As outras isometrias que geram G podem ser obtidas por conjugação com (4.3).

Mais uma vez, se a opção fosse por $\mathcal{F}$ com $4g + 2$ lados, o procedimento seria totalmente análogo.

As Figuras 4.9 e 4.10⁹ ilustram a ação topológica de G sobre $\mathcal{F}$ de $4g$ lados no caso $g = 2$ (bitoro) e $g = 3$ (tritoro). Elas servem também como sugestão para a escolha dos pares de lados (e isometrias que os parelhem) em um g -toro com g maior que 3.

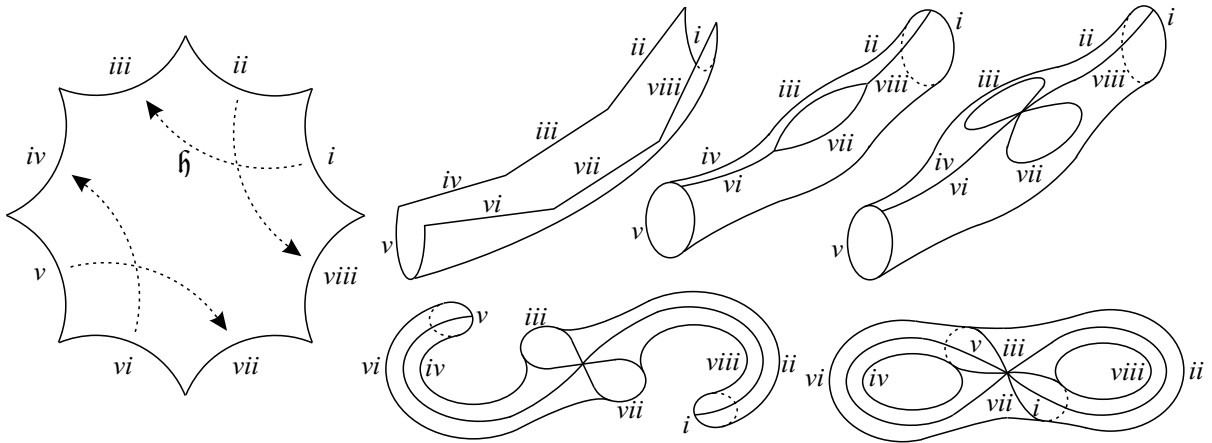


FIGURA 4.9: Ação topológica de G sobre a região fundamental octogonal regular $\mathcal{F}$ para a obtenção de um bitoro.

⁹- baseadas nas ilustrações da página 301 de [36].

- optamos por trocar o rótulo γ_k das geodésicas por k (em algarismos romanos).

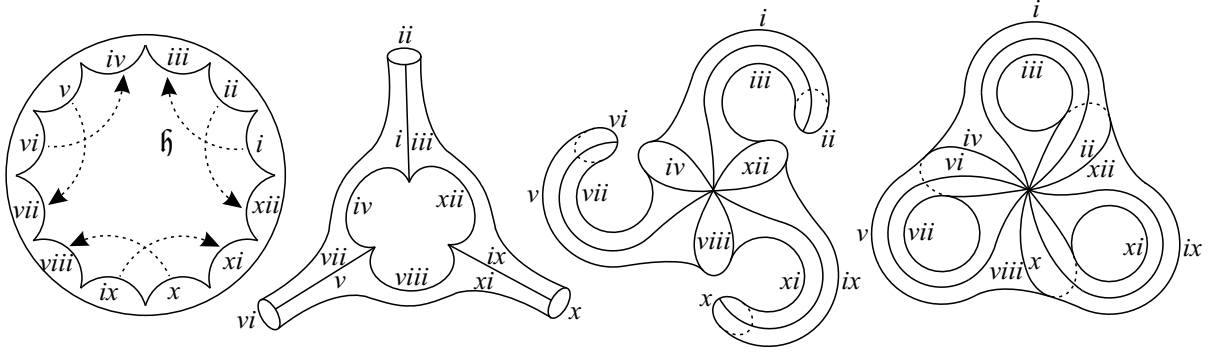


FIGURA 4.10: Ação topológica de G sobre $\mathcal{F}$ para obtenção de um tritoro com G gerado por 6 translações hiperbólicas.

Os Eixos das Isometrias Geradoras

Em se tratando de geradores hiperbólicos em G , podemos utilizar, na geração de constelações de sinais em $\frac{\mathbb{B}^2}{G}$, os eixos dessas isometrias. É o que consideramos concisamente abaixo, aproveitando a notação desenvolvida até então.

Sejam:

- D a distância euclidiana entre a origem e o centro do eixo $\mathcal{E}_h$;
- R o raio de $\mathcal{E}_h$;
- M a distância entre centros de $\mathcal{E}_h$ e da geodésica γ_1 ;
- d a distância entre a origem e o centro de γ_1 e;
- r o raio de γ_1 .

Como a fronteira ideal de $\mathbb{B}^2$, $\partial\mathbb{B}^2$, a geodésica γ_1 e o eixo $\mathcal{E}_h$ são ortogonais entre si, temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} D^2 &= R^2 + 1 \\ M^2 &= R^2 + r^2 \\ d^2 &= 1 + r^2 \\ M^2 &= D^2 + d^2 - 2Dd \cos \frac{\pi}{2g}. \end{aligned}$$

Logo,

$$D = \frac{1}{d \cos \frac{\pi}{2g}}.$$

Mas

$$d = \left| \frac{a}{c} \right|$$

e, portanto,

$$D = \left| \frac{c}{a} \right| \sec \frac{\pi}{2g}.$$

Como $\frac{\frac{a}{c} - \frac{\bar{c}}{a}}{\left| \frac{a}{c} - \frac{\bar{c}}{a} \right|}$ é versor do vetor que liga a origem ao centro de $\mathcal{E}_h$,

$$D \frac{\frac{a}{c} - \frac{\bar{c}}{a}}{\left| \frac{a}{c} - \frac{\bar{c}}{a} \right|} = \left(\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} a) \frac{\sec \frac{\pi}{2g}}{|a|} \right) i\bar{c}$$

é centro de $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}$. Finalmente, o raio de $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}$ é dado por

$$\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|^2 \sec^2 \frac{\pi}{2g} - 1}.$$

Sintetizando:

Proposição 4.7 *Nas condições da Proposição 4.6, o eixo $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}$ de uma isometria $\mathfrak{h}(\mathbf{z}) = \frac{a\mathbf{z} + \bar{c}}{c\mathbf{z} + \bar{a}}$, $a\bar{a} + c\bar{c} = 1$, geradora de G é dado por*

$$C \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|^2 \sec^2 \frac{\pi}{2g} - 1} \left(\left(\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} a) \frac{\sec \frac{\pi}{2g}}{|a|} \right) i\bar{c} \right).$$

Famílias de g -toros Metricamente Distintos

Nesta pequena subseção, pretendemos traçar alguns apontamentos sobre uma questão que surge naturalmente durante o desenvolvimento do g -toro acima.

Obviamente, a região fundamental $\mathcal{F}$ que foi considerada para a obtenção analítica de G poderia ser outra. As condições que devem ser preservadas na obtenção do g -toro são, basicamente, o parelhamento de lados de $\mathcal{F}$ de mesma medida hiperbólica, a medida da área hiperbólica de $\mathcal{F}$ e a ausência de singularidades na superfície quociente (os ciclos devem somar ângulo 2π). Dentro deste contexto, existem infinitas maneiras de obtermos g -toros *metricamente distintos*¹⁰ e, portanto, é natural pensar no *espaço $\mathcal{M}_g$ das superfícies diferenciáveis de gênero $g \geq 2$* ⁽¹¹⁾, sendo cada elemento deste espaço uma classe de equivalência das superfícies (diferenciáveis de gênero g) metricamente idênticas.

A determinação de $\mathcal{M}_g$ não é um problema fácil, uma vez que as simetrias de uma superfície de gênero g introduz “singularidades” e “bordos” em $\mathcal{M}_g$. No entanto, sua dimensão pode ser determinada sem muito esforço: $6(g-1)$; por meio da análise da quantidade de variáveis livres após o processo de identificação dos lados de $\mathcal{F}$.

O maior desenvolvimento na caracterização de $\mathcal{M}_g$ foi feito por Teichmüller que definiu um espaço $\mathcal{T}_g$, chamado de *espaço de Teichmüller*, que é uma espécie de recobrimento com “pontos de ramificações” para $\mathcal{M}_g$ em que cada uma destas ramificações correspondem a g -toros com simetrias. A principal vantagem do espaço de Teichmüller é o fato de ser homeomorfo a $\mathbb{R}^{6(g-1)}$ e os espaços $\mathcal{M}_g$ podem ser obtidos de $\mathcal{T}_g$ por meio de quocientes, assim como os g -toros.

Percebemos que, assim como existem infinitos g -toros metricamente distintos, também existem infinitas constelações (geometricamente uniformes ou não) metricamente distintas sobre estes mesmos g -toros; uma via para classificá-las é possível com o auxílio dos espaços de Teichmüller.

Referências interessantes para o estudo destes espaços são [10], páginas 268 a 286, e [11], capítulos 5 e 6.

4.3.2 Ladrilhamentos Hiperbólicos e Constelações Geometricamente Uniformes em T_g

Constelações $\mathcal{C}$ de sinais geometricamente uniformes em $\mathcal{H}^n$, com região de Voronoi possuindo um número finito de lados delimitados por hiperplanos, podem ser obtidas por meio de ladrilhamentos por grupos discretos de isometrias G de $\mathcal{H}^n$, ou seja, dado um grupo discreto de isometrias G em $\mathcal{H}^n$, podemos pensar na constelação $\mathcal{C}$ como sendo a órbita por G de um ponto fixado $\mathbf{p} \in \mathcal{H}^n$ tal que este seja o “centro” de uma região fundamental do tipo região de Voronoi de $\mathbf{p}$. Esta é uma maneira genérica de gerar uma constelação de sinais geometricamente uniforme em $\mathcal{H}^n$; no entanto, não muito eficiente no seu caso mais geral, uma vez que a partir de G , nem sempre é possível descobrir, com muita facilidade, propriedades de

¹⁰Entendemos por metricamente distintos quando considerados *globalmente*. Localmente, é claro que não são distintos devido ao fato de a métrica induzida sobre o quociente ser precisamente a métrica hiperbólica de $\mathcal{H}^2$.

¹¹Ou *espaço de módulos das curvas de gênero g* .

$\mathcal{C}$ como distância mínima entre sinais, número de vizinhos de um sinal sobre o grafo de arestas ortogonais aos lados das regiões de Voronoi e mesmo o próprio formato da região de Voronoi de um sinal de $\mathcal{C}$. Tendo em vista facilitar este estudo, as hipersuperfícies quocientes compactas $\frac{\mathcal{H}^n}{G}$ localmente isométricas a $\mathcal{H}^n$ (portanto, diferenciáveis) obtidas a partir de $\mathcal{H}^n$ desempenham uma ferramenta matemática importante, pois seu recobrimento universal constitui um ladrilhamento em $\mathcal{H}^n$, o que significa que, se conseguirmos “sub-ladrilhamentos” de $\frac{\mathcal{H}^n}{G}$, estes originarão constelações finitas de sinais geometricamente uniformes sobre hipersuperfícies compactas.

Restringamo-nos ao espaço hiperbólico bidimensional.

O primeiro passo nesta direção consiste em considerar os grupos triângulos T_Δ (Seção 2.10), pois estes geram naturalmente ladrilhamentos em $\mathcal{H}^2$ que possuem regiões fundamentais “básicas”, no sentido de que uma região fundamental poligonal homogênea de um grupo G pode ser triangulada em m partes tal que $G \subset T_\Delta$ de índice m .

É conveniente observar que, ao contrário de $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{H}^2$ possui infinitos ladrilhamentos por triângulos. Verificamos esse fato por meio da condição necessária sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo em $\mathcal{H}^2$, ou seja, para que $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$ sejam ângulos de um triângulo que ladrilhe $\mathcal{H}^2$, devemos ter $p, q, r \in \mathbb{N}^*$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$, inequação esta que possui infinitas soluções. O grupo triângulo T_Δ de isometrias que gera este ladrilhamento é gerado pelas três reflexões sobre os lados do triângulo (ver [2], Teorema 8 página 103). Também observemos que existe um subgrupo fuchsiano natural de índice dois em T_Δ obtido pela composição duas a duas das reflexões que geram T_Δ . É o grupo fuchsiano G_Δ de tipo (p, q, r) .

Nosso trabalho será, portanto, procurar sub-ladrilhamentos triângulos no g -toro obtido de acordo com o procedimento delineado na Subseção 4.3.1. Começemos com o resultado abaixo.

Proposição 4.8 *Seja T_g g -toro, $g \geq 2$, dado pelo quociente $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$, sendo G com região fundamental $\mathcal{F}$ poligonal regular. Se G possuir um número par de geradores, então o grupo triângulo T_Δ gerado pelas reflexões sobre o triângulo hiperbólico Δ de ângulos internos $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2g}$ gera uma constelação $\mathcal{C}$ de sinais geometricamente uniforme sobre T_g com cardinalidade $8g$.*

Demonstração

O principal ponto nesta demonstração é verificar que $G \subset T_\Delta$ de índice $8g$ ou, equivalentemente, verificar que Δ ladrilha (por reflexões) $\mathcal{F}$, a região fundamental de G poligonal regular com centro em $\mathbf{O}$ ⁽¹²⁾, com $8g$ ladrilhos. Para tanto, consideremos os pontos médios $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_{4g}$ dos lados de $\mathcal{F}$ e os segmentos geodésicos que ligam a origem a estes pontos médios. Chamemos os vértices de $\mathcal{F}$ de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{4g}$ tal que $\mathbf{m}_j$ está entre $\mathbf{v}_j$ e $\mathbf{v}_{j+1}$ (índices mod $4g$).

Os pontos $\mathbf{O}, \mathbf{m}_j, \mathbf{v}_j, \mathbf{m}_{j+1}$ formam um losango hiperbólico $\mathcal{L}$ de ângulos internos $\frac{\pi}{2g}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2g}, \frac{\pi}{2}$ respectivamente.

Afirmamos que o segmento geodésico γ_b bissetriz de um dos ângulos $\frac{\pi}{2}$ (em $\mathbf{m}_j$ o $\mathbf{m}_{j+1}$) divide $\mathcal{L}$ em dois triângulos hiperbólicos congruentes.

Para verificar esta asserção, fixemos o modelo do disco $\mathbb{B}^2$ e consideremos uma isometria φ que transporte os lados $\overline{\mathbf{O}\mathbf{m}_j}$ e $\overline{\mathbf{m}_j\mathbf{v}_j}$ de $\mathcal{L}$ sobre os semi-eixos imaginário e real positivos respectivamente. Com isso, o segmento geodésico $\varphi(\gamma_b)$ bissetriz do ângulo do vértice $\varphi(\mathbf{m}_j) = \mathbf{0}$ está sobre a bissetriz euclidiana do primeiro quadrante. Como a geodésica $\varphi(\overline{\mathbf{O}\mathbf{v}_j})$ está sobre um círculo euclidiano com centro na mesma bissetriz euclidiana do primeiro quadrante, concluímos que $\varphi(\gamma_b)$ é ortogonal a $\varphi(\overline{\mathbf{O}\mathbf{v}_j})$. Como qualquer isometria em $\mathbb{B}^2$ é conforme, resulta que as bissetrizes dos dois ângulos retos de $\mathcal{L}$ coincidem e dividem $\mathcal{L}$ em dois triângulos hiperbólicos com os mesmos ângulos internos. Pelo Teorema de Gauss-Bonnet, estes dois triângulos devem possuir a mesma área, ou seja, os triângulos são congruentes.

¹² $\mathbf{O} = \mathbf{0}$ se $\mathcal{H}^2 = \mathbb{B}^2$;
 $\mathbf{O} = i$ se $\mathcal{H}^2 = \mathbb{H}^2$.

Seja Δ triângulo hiperbólico de vértices $\mathbf{O}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$.

Definamos:

- (i) $\mathbf{r}_1$ como sendo a reflexão com eixo geodésico contendo $\overline{\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2}$ (base de Δ).
- (ii) $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$ como sendo as reflexões com eixos geodésicos contendo $\overline{\mathbf{O}\mathbf{m}_1}$ e $\overline{\mathbf{O}\mathbf{m}_2}$ respectivamente (lados de Δ).
- (iii) $T_\Delta = \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle$.

Assim, Δ é região fundamental de T_Δ e a órbita de Δ por T_Δ , $T_\Delta\Delta$, é um ladrilhamento de $\mathcal{F}$, ou seja, $T_\Delta\Delta$ é um ladrilhamento em $\mathcal{H}^2$ e $\frac{T_\Delta\Delta}{G}$ é um ladrilhamento no g -toro $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$.

Definindo a constelação $\mathcal{C}$ como sendo o conjunto das classes de equivalências dos incentros hiperbólicos dos triângulos $\frac{T_\Delta\Delta}{G}$, obtemos uma constelação geometricamente uniforme sendo cada triângulo de $\frac{T_\Delta\Delta}{G}$ uma região de Voronoi da constelação. O grupo de simetrias de $\mathcal{C}$ em T_g contém $\frac{T_\Delta}{G}$.

Quanto à cardinalidade, basta observar que para cada losango $\mathcal{L}$ existem dois triângulos Δ . Como o número de losangos é $4g$, concluímos a asserção sobre a cardinalidade no enunciado da proposição. $\square$

Na construção das constelações apontadas pela proposição, devemos fazer uso dos incentros hiperbólicos. Por este motivo, enunciamos a proposição seguinte.

Proposição 4.9 *O raio hiperbólico r do círculo inscrito no triângulo hiperbólico Δ de ângulos internos α, β, γ satisfaz*

$$\tanh^2 r = \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1}{2(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \gamma)}.$$

A demonstração deste resultado pode ser conferida em [8], página 152.

Observações

(i) os geradores de G : $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{2g}$ são obtidos por compostas de duas reflexões em lados alternados de $\mathcal{F}$, portanto, são elementos de T_Δ .

(ii) O grafo $\Gamma_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ com arestas geodésicas ortogonais aos lados da região de Voronoi é *aresta-regular*, ou seja, de cada ponto partem sempre três arestas. Além disso, $\Gamma_{\mathcal{C}}$ não é planar e se realiza apenas em T_g .

(iii) a distância de um ponto a seus três vizinhos sobre o grafo $\Gamma_{\mathcal{C}}$ é a mesma, ou seja, é a *distância hiperbólica mínima* $d_{\min}$ de $\mathcal{C}$.

(iv) o caso $g = 2$ é especial devido ao fato de apresentar um ladrilhamento por triângulos hiperbólicos equiláteros.

(v) cada triângulo isósceles do ladrilhamento sobre T_g pode ser dividido em dois triângulos retos. Os incentros destes formam uma constelação geometricamente uniforme sobre T_g com cardinalidade $16g$.

Exemplo

Consideremos o bitoro T_2 .

Confome a Proposição 4.8, a constelação $\mathcal{C}$ é obtida por incentros dos ladrilhos $\frac{T_\Delta\Delta}{G}$.

Tomemos duas geodésicas consecutivas que formam dois lados da região fundamental poligonal regular $\mathcal{F}$ de G . Por exemplo (Proposição 4.5):

- geodésica *viii*: centro $\left(\frac{\sqrt{8+6\sqrt{2}}}{4}, -\frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{4} \right)$ e raio $\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$.

-geodésica i : centro $\left(\frac{\sqrt{8+6\sqrt{2}}}{4}, \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{4}\right)$ e mesmo raio.

Logo, o ponto $\mathbf{v}_8 = \left(\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{8+6\sqrt{2}}}{2}, 0\right)$ é vértice de $\mathcal{F}$.

Mas

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{B}^2}(\mathbf{0}, \mathbf{v}_8) &= \ln \frac{1 + \frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{8+6\sqrt{2}}}{2}}{1 - \frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{8+6\sqrt{2}}}{2}} \\ &\cong 2,45 \end{aligned}$$

O raio r dos círculos inscritos nos triângulos Δ (equiláteros de ângulos internos $\frac{\pi}{4}$) é tal que

$$\begin{aligned} \tanh^2 r &= \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} + 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} - 1}{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{4}\right) \left(1 + \cos \frac{\pi}{4}\right) \left(1 + \cos \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{2\sqrt{2} + 2}{(2 + \sqrt{2})^3} \Rightarrow \\ r &\cong 0,36 \end{aligned}$$

Seja $\mathbf{c}_8$ e $\mathbf{d}_8$ pontos sobre $\overline{\mathbf{0}\mathbf{v}_8}$ tais que

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{B}^2}(\mathbf{0}, \mathbf{c}_8) &= \frac{d_{\mathbb{B}^2}(\mathbf{0}, \mathbf{v}_8)}{2} - r \cong 0,86 \\ d_{\mathbb{B}^2}(\mathbf{0}, \mathbf{d}_8) &= \frac{d_{\mathbb{B}^2}(\mathbf{0}, \mathbf{v}_8)}{2} + r \cong 1,59 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_8 &\cong (0, 41; 0) \\ \mathbf{d}_8 &\cong (0, 66; 0) \end{aligned}$$

Para gerar $\mathcal{C}$, basta aplicar as rotações $\exp\left(ik\frac{\pi}{4}\right)$, $k = 1, \dots, 8$, sobre $\mathbf{c}_8$ e $\mathbf{d}_8$. O resultado é a constelação da Figura 4.11, sendo que as linhas pontilhadas são do grafo aresta-regular $\Gamma_{\mathcal{C}}$ que contém a constelação.

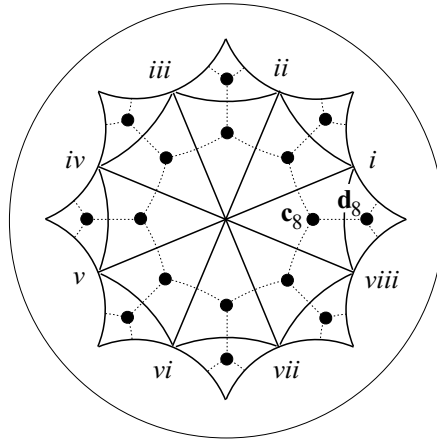


FIGURA 4.11: Um exemplo de constelação geometricamente uniforme obtida por ladrilhamento de um bitoro.

Análise de Desempenho da Constelação do Exemplo

Como a constelação $\mathcal{C}$ é geometricamente uniforme, precisamos apenas analisar o perfil de distâncias de um sinal qualquer. Neste caso, a distância hiperbólica mínima entre sinais da constelação é

$$d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{c}_8, \mathbf{d}_8) = 2r \cong 0,73$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e &\leq \frac{3}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{c}_8, \mathbf{d}_8)}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right) \\ &\cong \frac{3}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{0,73}{2\sqrt{2}\sigma^2} \right). \end{aligned}$$

Podemos ampliar muito o alcance da Proposição 4.8 em busca de constelações de sinais geometricamente uniformes sobre grafos aresta regulares em g -toros. No entanto, esta generalização permanece no campo teórico, ou seja, nem todas as constelações apontadas pelo teorema abaixo possuem um procedimento algorítmico de geração como estes que estamos utilizando até o momento (na verdade, são poucas as constelações “factíveis”).

Teorema 4.1 *Seja T_g g -toro obtido por quociente $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$. Uma condição necessária e suficiente para que m triângulos hiperbólicos de ângulos internos $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$ ladrilhem (lado a lado) $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$ é*

$$(i) \ m \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) = 4(g-1).$$

(ii) a união de todos os m triângulos forme uma região fundamental de G .

A demonstração do item (i) procede do Teorema 2.9. A condição (ii) restringe (e é decorrente do) o ladrilhamento em T_g .

O “problema” desta generalização é construir os ladrilhamentos (e conseqüentemente a constelação de sinais) em T_g . Hipóteses restritivas como as da Proposição 4.8 são necessárias para fornecer respaldos algorítmicos para a geração de constelações. No entanto, mesmo sem conhecer o formato da constelação em T_g , podemos calcular o estimador para a probabilidade de erro, uma vez que esta depende apenas da distância mínima entre os sinais da constelação. É o próximo resultado.

Proposição 4.10 *Seja $\mathcal{C}$ constelação de sinais geometricamente uniforme obtida por grupo triângulo T_Δ de ângulos $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$ em $T_g = \frac{\mathcal{H}^2}{G}$. Suponhamos que $\mathcal{C}$ seja utilizada em um sistema de comunicações com canal perturbado por ruído gaussiano hiperbólico. Então, a probabilidade de erro associada a sinais do sistema de comunicações é majorada por ⁽¹³⁾*

$$\mathcal{P}_e \leq \frac{3}{2} \operatorname{erfc} \left(\left(\sqrt{2}\sigma \right)^{-1} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\pi}{p} + \cos^2 \frac{\pi}{q} + \cos^2 \frac{\pi}{r} + 2 \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} \cos \frac{\pi}{r} - 1}{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{p} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi}{q} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi}{r} \right)}} \right) \right).$$

A demonstração segue do fato de a distância mínima em $\mathcal{C}$ ser duas vezes o raio do círculo inscrito num ladrilho (ver Proposição 4.9 acima) e do fato de que cada sinal possui três vizinhos.

Finalizamos esta seção com uma constelação $\mathcal{C}$ geometricamente uniforme composta por 336 pontos sobre um tritoro cujo grupo fuchsiano G é gerado por 7 translações hiperbólicas (a região fundamental $\mathcal{F}$ é um polígono hiperbólico regular com 14 lados). Este exemplo ilustra bem a dificuldade em encontrar um ladrilhamento satisfazendo as hipóteses do Teorema 4.1. Neste caso, temos a condição

$$336 \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) = 4(3-1)$$

e, percebemos que $p = 2$, $q = 3$ e $r = 7$ a satisfaz¹⁴. A parte central da constelação está ilustrada na

¹³ $\tanh^{-1}(x)$ designa a inversa de $\tanh(x)$, uma vez que esta última é injetora.

¹⁴Este ladrilhamento em particular foi descoberto por F. Klein em 1879.

Figura 4.12.

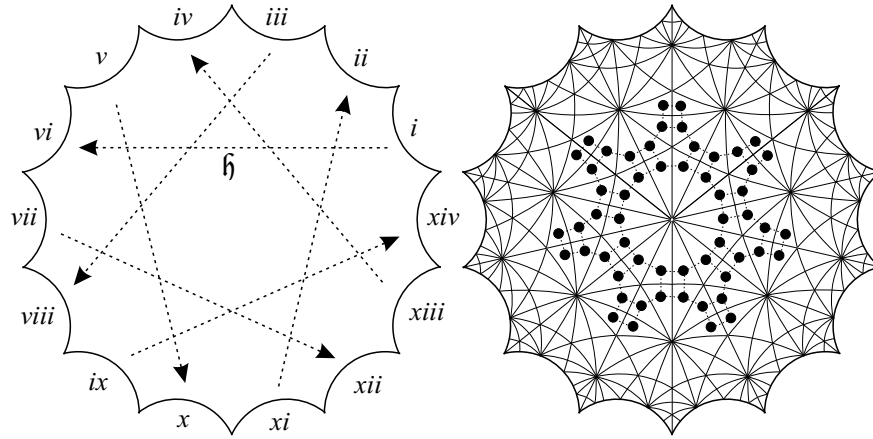


FIGURA 4.12: Um exemplo de constelação geometricamente uniforme com 336 pontos (só os centrais estão ilustrados) em um tritoro quociente por grupo fuchsiano gerado por 7 translações hiperbólicas.

Quanto à probabilidade de erro em um sistema com canal hiperbólico utilizando esta constelação, temos, de acordo com a Proposição 4.10, o seguinte estimador:

$$\mathcal{P}_e \leq \frac{3}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{0,105}{\sqrt{2\sigma^2}} \right).$$

Quanto ao procedimento algorítmico para a geração de $\mathcal{C}$, bastam as expressões das três isometrias geradoras de T_Δ (que geram uma constelação geometricamente uniforme infinita em $\mathbb{B}^2$) e as sete isometrias geradoras de G (que determinam as 336 classes de equivalências sobre a superfície do tritoro). Estas expressões, conforme procedimento delineado na Subseção 4.3.1, são fáceis de serem obtidas.

4.4 Constelações Geometricamente Uniformes sobre Superfícies $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$ não Compactas

Nesta seção, retomamos os conceitos introduzidos na Seção 4.2 em que tratamos de constelações de sinais não geometricamente uniforme sobre quocientes não-compactos.

O Cilindro Hiperbólico

Constelações infinitas geometricamente uniformes sobre o cilindro hiperbólico podem ser obtidas a partir de ladrilhamentos em $\mathcal{H}^2$ por grupos triângulos e, por conseguinte, como casos particulares dos resultados que obtivemos para o g -toro. Neste último, ao invés de considerarmos um grupo G com $2g$ ou $2g+1$ geradores, tomamos apenas um gerador para quocientar o espaço, originando o cilindro hiperbólico e “herdando” o ladrilhamento por triângulos do g -toro que, naturalmente, se estende por todo o cilindro (lembramos que T_Δ ladrilha $\mathcal{H}^2$ por cópias de Δ).

Aproveitando a Proposição 4.8, temos como corolário a seguinte família de constelações geometricamente uniformes.

Proposição 4.11 *Sejam T_Δ grupo triângulo com Δ de ângulos internos $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2g}$ e $G = \langle \mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_{2g} \rangle$ grupo fuchsiano gerador do quociente T_g . Então o cilindro hiperbólico $\frac{\mathcal{H}^2}{\langle \mathfrak{h}_j \rangle}$ é ladrilhado por $\frac{T_\Delta}{\langle \mathfrak{h}_j \rangle}$ e as classes de equivalência originada pelos incentros de $T_\Delta \Delta$ formam uma constelação geometricamente uniforme infinita sobre o cilindro.*

Quanto à análise de desempenho, é exatamente a mesma do g -toro.

O Cone Parabólico

Constelações geometricamente uniformes no cone parabólico podem ser obtidas a partir de grupos triângulos que tenham pelo menos um vértice ideal. Dentre as constelações infinitas sobre quocientes não-compactos, o cone parabólico é, sem dúvida, o “locus” mais atraente devido ao fato de alojar algumas constelações realmente especiais.

Duas famílias de tais constelações são caracterizadas pelas proposições abaixo.

Proposição 4.12 *Sejam $\mathcal{P}$ polígono hiperbólico de $2k$ lados com ângulos internos $0, \frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \dots, \frac{2\pi}{m}, \frac{\pi}{m}$; $m \in \mathbb{N}^*$; e γ_1, γ_2 geodésicas de $\mathcal{H}^2$ que contém os lados de $\mathcal{P}$ que convergem ao vértice ideal. Seja $\mathfrak{p}$ isometria que parelha γ_1, γ_2 . Então, o cone parabólico $\frac{\mathcal{H}^2}{\langle \mathfrak{p} \rangle}$ é ladrilhado pelo grupo triângulo T_Δ ; sendo Δ de ângulos internos $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{m}$; e as classes de equivalência formadas pelos incentros de $T_\Delta \Delta$ formam uma constelação geometricamente uniforme infinita sobre o cone.*

Proposição 4.13 *Sejam $\mathcal{P}$ polígono hiperbólico de $k > 4$ lados com todos os vértices ideais e γ_1, γ_2 duas geodésicas de $\mathcal{H}^2$ que contém dois lados adjacentes de $\mathcal{P}$. Seja $\mathfrak{p}$ isometria que parelha γ_1 e γ_2 . Então, o cone parabólico $\frac{\mathcal{H}^2}{\langle \mathfrak{p} \rangle}$ é ladrilhado pelo grupo triângulo T_Δ ; sendo Δ de vértices ideais; e as classes de equivalência formadas pelos incentros de $T_\Delta \Delta$ formam uma constelação geometricamente uniforme sobre o cone.*

Os enunciados das proposições são extensos devido ao fato da descrição da região fundamental de $\langle \mathfrak{p} \rangle$. No entanto as demonstrações destas seguem o mesmo molde de demonstração da Proposição 4.8 e vamos omiti-las, observando apenas que as condições $2k$ e $k > 4$ nas hipóteses são para garantir a propriedade “aresta-regular” dos grafos das constelações.

Particularmente, uma constelação sobre o cone obtida da Proposição 4.12 é de especial importância. Trata-se da constelação gerada pelo grupo triângulo T_Δ , sendo Δ triângulo hiperbólico de ângulos internos $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$. Neste caso, o polígono $\mathcal{P}$ pode ter 4 lados e ângulos internos $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ e a isometria $\mathfrak{p}$ pode ser dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}: \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \mathbf{z} - 2 \end{aligned}.$$

Sobre esse ladrilhamento de $\mathcal{H}^2$ - que pode ser quocientado a um cone parabólico - urge apontar que o grupo fuchsiano G_Δ de tipo $(\infty, 2, 3)$ é isomorfo ao grupo modular $PSL_2(\mathbb{Z})$ ([48], Teoremas 3.1 e 3.2, pp. 108-111). Em termos de nomenclatura, o grupo triângulo T_Δ é chamado de **grupo modular estendido**.

A Figura 4.13 ilustra a constelação geometricamente uniforme obtida do grupo modular estendido sobre o cone parabólico $\frac{\mathcal{H}^2}{\langle \mathfrak{p} \rangle}$.

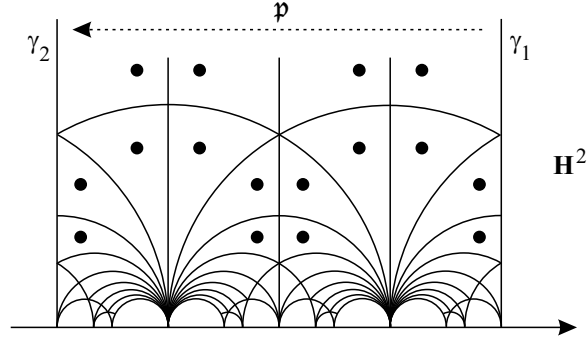


FIGURA 4.13: Constelação geometricamente uniforme sobre um cone parabólico gerada a partir do grupo modular estendido.

Em termos de desempenho da constelação em canal gaussiano hiperbólico, pela Proposição 4.10, temos

$$\mathcal{P}_e \leq \frac{3}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{0,21}{\sqrt{2\sigma^2}} \right).$$

Quanto à Proposição 4.13, um exemplo interessante é obtido quando se toma $\mathcal{P}$ como sendo, por exemplo, um hexágono hiperbólico. Neste caso, a isometria parabólica pode ser tomada como sendo

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \mathbf{z} &\longmapsto \frac{\mathbf{z}}{-2\mathbf{z} + 1} \end{aligned}.$$

Chama-nos a atenção nesta constelação o fato de ela ser a que possui a maior distância mínima dentre todas as constelações obtidas por grupos triângulos. Esse fato se deve ao triângulo ideal Δ ser equilátero e possuir a maior área possível dentre todos os triângulos hiperbólicos, o que se traduz como o maior raio para o círculo hiperbólico inscrito. Neste caso, o desempenho desta constelação em termos de probabilidade de erro é, pela Proposição 4.10, majorada por

$$\mathcal{P}_e \leq \frac{3}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{0,55}{\sqrt{2\sigma^2}} \right).$$

A Figura 4.14 ilustra tal constelação sobre o cone.

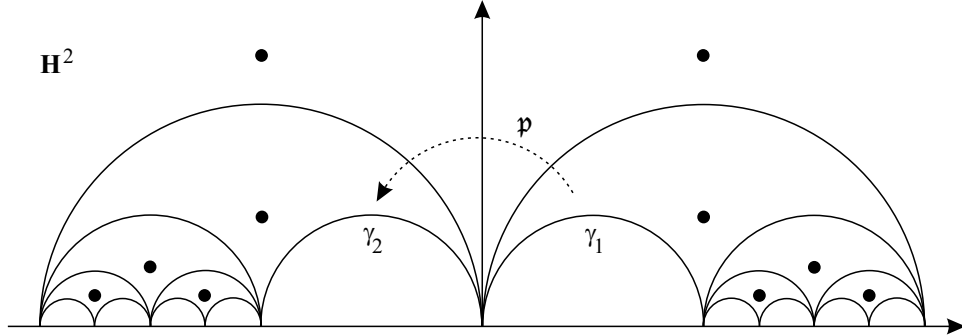


FIGURA 4.14: Constelação geometricamente uniforme gerada por grupo triângulo de maior distância mínima sobre um cone parabólico.

O Cone Elíptico

O cone elíptico é realmente um caso mais apartado dos demais devido ao fato de não ser uma superfície totalmente “diferenciável”, possuindo uma singularidade ordinária não muito interessante do ponto de vista de homogeneidade. É possível caracterizar algumas constelações geometricamente uniformes originadas por grupos triângulos sobre este cone. No entanto, pelo fato de não haver (ou termos descoberto) propriedades mais relevantes que as já comentadas no caso do cilindro hiperbólico, optamos por ignorá-las.

4.5 Constelações não Geometricamente Uniformes sobre Superfícies $\frac{\mathcal{H}^2}{G}$ Compactas

4.5.1 Constelações Cíclicas em Nós sobre o g -toro

A busca por constelações de sinais com propriedades análogas ao QAM euclidiano leva-nos a considerar algumas classes interessantes de curvas sobre o g -toro: os nós. A inspiração para o tipo de constelação que iremos introduzir vem do toro usual ($g = 1$). Constelações QAM com cardinalidade $p^2 + q^2$, p e q primos entre si, podem ser alocadas em um nó sobre o toro (ref. [1], [23] e [24]), o que faz com que constelações do tipo QAM admitam estrutura cíclica, uma vez que todos os sinais da constelação podem ser gerados e rotulados por uma isometria que atue sobre o nó.

Como já comentado, a ausência da estrutura vetorial no espaço hiperbólico não permite que tenhamos constelações QAM hiperbólicas, mas permite que tenhamos constelações cíclicas sobre nós. Nos g -toros, ao contrário do que ocorre nos toros, as constelações cíclicas não são geometricamente uniformes, o que representa, sem dúvida, uma desvantagem que é parcialmente recuperada pela ciclicidade e pela regularidade dos grafos que estes nós originam, abrindo a possibilidade de um estudo nos moldes da teoria de códigos sobre grafos (ver [20]).

Aproveitando as notações estabelecidas até o momento, temos o resultado abaixo que apresenta algumas propriedades de constelações cíclicas sobre g -toros. Para tanto, consideramos apenas quocientes por grupos gerados por número par de isometrias.

Proposição 4.14 *Sejam:*

(a) $G = \langle t_1, \dots, t_{2g} \rangle$ grupo fuchsiano gerador do g -toro $T_g = \frac{\mathbb{B}^2}{G}$ com região fundamental poligonal regular $\mathcal{F}$ centrada na origem de $\mathbb{B}^2$ (com lados rotulados de 1 a $4g$ no sentido anti-horário).

(b) $h_1, \dots, h_{4g}$ translações hiperbólicas tal que h_j parelha os lados j e $j + (2g - 1)$.

Então:

(i) os eixos $\mathcal{E}_{h_j}$, $j = 1, \dots, 4g$ formam uma única curva geodésica (portanto, diferenciável) sobre T_g , ou seja, um único nó sobre T_g .

(ii) o número de auto-intersecções do nó de eixos $\mathcal{E}_{h_j}$ sobre T_g é $8g(g - 1)$.

Demonstração

(i) Primeiramente, mostremos que os eixos $\mathcal{E}_{h_j}$ realmente interceptam os lados de $\mathcal{F}$. Para verificarmos essa intersecção, basta considerarmos tal propriedade para o eixo da translação h_1 que parelha os lados 1 e $2g$. Os demais eixos possuirão propriedade semelhante devido à simetria de $\mathcal{F}$. Rotulemos os dois vértices de $\mathcal{F}$ pertencentes ao lado 1 de a_1, a'_1 e ao lado $2g$ de a_{2g}, a'_{2g} de tal modo que a_1 e a_{2g} sejam opostos em relação à origem. Veja a figura 4.15.

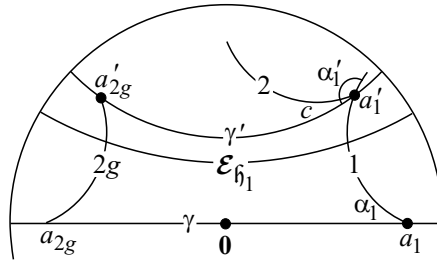


FIGURA 4.15: Figura auxiliar de demonstração.

Consideremos duas geodésicas: γ ligando a_1 a a_{2g} (γ contém a origem) e γ' ligando a'_1 a a'_{2g} . A medida α_1 do ângulo formado pelo lado 1 de $\mathcal{F}$ e γ é

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4g} < \frac{\pi}{2}.$$

A medida α'_1 do ângulo externo formado pelo prolongamento do lado 1 de $\mathcal{F}$ e γ' é

$$\alpha'_1 = \left(\pi - \frac{\pi}{2g} \right) + c > \frac{\pi}{2}$$

sendo c a medida do ângulo entre γ' e o lado 2 de $\mathcal{F}$. O mesmo procedimento repete-se no lado $2g$ de $\mathcal{F}$. Devido à variação contínua dos ângulos das geodésicas que interceptam os lados 1 e $2g$ de $\mathcal{F}$ com mesmo ângulo (em ambos os lados), necessariamente há uma geodésica que intercepta esses lados com ângulo $\frac{\pi}{2}$. Esta geodésica é o eixo $\mathcal{E}_{h_1}$.

Seja o eixo $\mathcal{E}_{h_j}$. Observemos que devido ao fato de todos os lados de $\mathcal{F}$ serem círculos isométricos das isometrias $h_1, \dots, h_{4g}$, as imagens de $\mathcal{E}_{h_j}$ via as isometrias elípticas

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_k : \mathbb{B}^2 &\longrightarrow \mathbb{B}^2, \quad k = 1, \dots, 4g \\ \mathbf{z} &\longmapsto \exp\left(ik\frac{\pi}{2g}\right)\mathbf{z} \end{aligned}$$

formam, precisamente, o conjunto de todos os eixos das isometrias h 's. Como as isometrias geradoras de G são obtidas por conjugação com $\mathfrak{e}_k$, cada par de eixos que cortam um lado j de $\mathcal{F}$ é simétrico em relação ao ponto médio do lado j . Logo, o parelhamento de lados via as isometrias t 's implicam o ligamento dos eixos das isometrias h 's. A diferenciabilidade da(s) curva(s) formada(s) segue do fato de os eixos serem todos ortogonais aos lados de $\mathcal{F}$.

A priori, a identificação descrita no parágrafo anterior poderia gerar mais de uma curva geodésica fechada sobre T_g . No entanto, isso não ocorre, ou seja, o *nó dos eixos* $\mathcal{E}_{h_j}$ forma uma única curva geodésica fechada sobre T_g . Para verificar isso, rotulemos os pontos de intersecção dos eixos com os lados de $\mathcal{F}$ de 1 a $4g$ no sentido anti-horário a partir do cruzamento de $\mathcal{E}_{h_1}$ com o círculo isométrico $\mathcal{I}_{h_1}$. Sejam $k = 1 + 4(g-1)$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de números naturais tal que:

$$x_1 = 1;$$

$$x_j = x_{j-1} + k \text{ para } j \text{ par};$$

$$x_j = x_{j-1} + 5 \text{ se } j \text{ é ímpar e da forma } 3 + 8m \text{ ou } 5 + 8m;$$

$$x_j = x_{j-1} - 3 \text{ se } j \text{ é ímpar e da forma } 7 + 8m \text{ ou } 9 + 8m;$$

A sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui período $4g$ e descreve, em cada período, a sucessão de rótulos sobre o nó de eixos à medida que se percorre o nó a partir do rótulo inicial. Esta propriedade segue como consequência do fato do número $4g$ de lados de $\mathcal{F}$ e o *período* $2g-1$ dos parelhamentos de lados pelas h 's¹⁵ serem *primos entre si*, ou seja,

$$\text{mdc}(4g, 2g-1) = 1.$$

Concluimos daí que o nó de eixos contém todos os $4g$ rótulos.

(ii) Para cada j , $\mathcal{E}_{h_j}$ divide $\mathcal{F}$ em duas regiões geodesicamente convexas. A região $\mathcal{R}_{h_j}$ de menor área hiperbólica é a que contém integralmente os lados $j+1, \dots, j+2g-2$. Portanto, $\mathcal{R}_{h_j}$ possui $2g-2$ lados de $\mathcal{F}$. Cada um destes lados, é interceptado por 2 eixos. Logo, $\mathcal{E}_{h_j}$ é interceptado por $2(2g-2)$ eixos distintos. Existem $4g$ isometrias h 's, portanto, $4g$ eixos distintos. Logo, o número de intersecções de eixos é

$$\frac{(4g) 2(2g-2)}{2}$$

(dividido por 2 porque cada intersecção é contada duas vezes). Conclusão: o número de auto-intersecções do nó constituído por eixos é

$$8g(g-1).$$

□

¹⁵Pois h_j parelha os lados j e $j+(2g-1)$.

Observemos que, se tomarmos a constelação de sinais $\mathcal{C}$ como sendo as auto-intersecções do nó de eixos, todos os sinais da constelação pertencem a uma única curva e podemos induzir um rotulamento dos sinais pelos elementos do grupo $\mathbb{Z}_{8g(g-1)}$. Observemos, ainda, que o único caso possível de constelação com cardinalidade potência de 2 é no bitoro (16 pontos).

Exemplo

Ilustremos a constelação cíclica sobre o nó dos eixos para o caso $g = 2$. Utilizando as Proposições 4.5, 4.6 (junto com a isometria elíptica 4.3) e 4.7, podemos obter todas as expressões e equações analíticas necessárias para a geração de $\mathcal{F}$, do grupo G , das isometrias $\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_{4g}$ e de todos os seus eixos. O resultado é a constelação cíclica da Figura 4.16, que rotulamos por elementos $\mathbb{Z}_{16}$ alternadamente, como ilustrado.

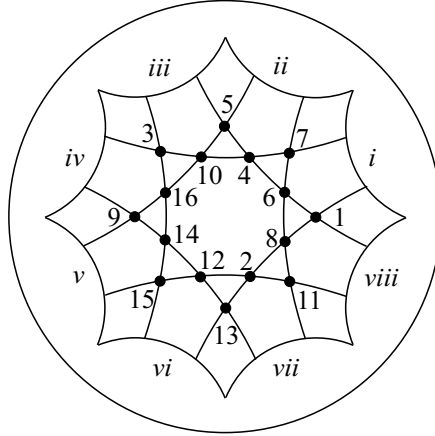


FIGURA 4.16: A constelação cíclica sobre o nó dos eixos de $\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_{4g}$ sobre um bitoro.

Finalizamos esta seção observando que, assim como no casos das constelações não geometricamente uniformes introduzidas na Seção 4.2, as constelações cíclicas $\mathcal{C}$ sobre o nó de eixos de $\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_{4g}$ em T_g podem ser vistas como uma sequência de $2(g-1)$ $4g$ -HPSK's concêntricos (com centro na origem) de raios crescentes, uma vez que a configuração de pontos de $\mathcal{C}$ é sempre *estrelada*. Quanto à probabilidade de erro associada a sinais de $\mathcal{C}$ em canal hiperbólico, há duas abordagens possíveis: $\mathcal{C}$ como sequência de HPSK's ou $\mathcal{C}$ como constelação única. Em ambos os casos a determinação do perfil de distâncias não é difícil de ser obtida.

Também cabe citar que o estudo de nós sobre superfícies compactas, como o toro usual por exemplo, tem resultado em aplicações práticas na codificação de fontes contínuas como podemos constatar em [59]. Este trabalho sem dúvida abre caminho para a possibilidade de aplicações de nós sobre g -toros em codificações de mesma natureza.

Perspectivas Futuras

Gostaríamos, para finalizar, de tecer sucintamente alguns apontamentos sobre caminhos para uma possível continuidade deste trabalho. Alguns destes já foram considerados no decorrer dos capítulos, quais sejam:

(i) A caracterização do ruído hiperbólico. O fato do espaço hiperbólico não ser vetorial indica a natureza não aditiva deste ruído. A implementação prática do canal hiperbólico depende desta caracterização e, conseqüentemente, o uso de constelações de sinais hiperbólicas em sistemas de comunicações de mesma natureza também depende desta modelagem.

(ii) O estudo quantitativo da aproximação de densidades hiperbólicas de dimensão n ao produto de n densidades de dimensão 1. A ausência da estrutura vetorial em $\mathcal{H}^n$ impossibilita que tenhamos o referido produto. No entanto, conforme indicado no final da Seção 3.4, há uma espécie de “convergência assintótica de densidades” à medida que a variância tende a zero, o que faz com que a densidade hiperbólica de dimensão n , para variâncias pequenas, possa ser considerada “quase produto” de n densidades de dimensão 1.

(iii) O Teorema 3.1 apresenta um limitante superior para a probabilidade de erro associada a constelações de sinais hiperbólicos em relação à variância e à distância hiperbólica. Uma questão que se faz pertinente diz respeito a margem de erro do estimador e se há como obter estimadores melhores e tão simples quanto o apresentado pelo referido teorema.

(iv) No campo das constelações sobre superfícies não-compactas, há todo o estudo de constelações sobre superfícies hiperbólicas obtidas por grupo de Schottky. Em última análise, todas as constelações obtidas sobre o cone elíptico, o cone parabólico e o cilindro hiperbólico são “casos particulares” de constelações sobre “superfícies de Schottky”.

(v) A caracterização de constelações geometricamente uniformes sobre g -toros que não são provenientes de grupos triângulos. Em nosso trabalho, as constelações dessa natureza foram todas obtidas a partir de grupos triângulos. Proposições como a 4.8 e Teoremas como o 4.1 seriam necessários para outras famílias de constelações.

(vi) A questão do mergulho isométrico de superfícies hiperbólicas compactas ou não em espaços hiperbólicos ou reais de dimensão maior. Fizemos alguns apontamentos sobre esse tema na Seção 1.8. Este estudo é interessante, porque constelações QAM cíclicas sobre o toro possuem mergulho isométrico em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ (ver [25], por exemplo), resultando em propriedades bastante atraentes do ponto de vista de implementação prática.

(vii) O estudo de constelações de sinais sobre nós do g -toro. Uma vez mais nos reportamos à existência de constelações QAM cíclicas sobre nós no toro. Em nosso trabalho, apenas apresentamos uma família de constelações cíclicas sobre nós no g -toro (Seção 4.5). A caracterização de outras famílias de tais constelações, via proposições como a 4.14, torna-se necessária para desenvolvimentos futuros.

(viii) A caracterização de constelações (geométrica ou não geometricamente uniformes) sobre toros metricamente distintos dos g -toros presentemente considerados. Fizemos menção sobre tais g -toros na Subseção 4.3.1, em que ressaltamos o estudo dos espaços de Teichmüller como ferramenta importante.

(ix) A questão da comparação de desempenho entre constelações de mesma cardinalidade e dimensão no ambiente hiperbólico. O desenvolvimento de parâmetros de comparação adaptados ao ambiente hiperbólicos se faz necessário. Parâmetros como o apresentado no final da Seção 1.7 são insuficientes. Cabe salientar que comparações entre constelações reais e hiperbólicas se mostram como algo não coerente devido ao fato de estas estarem submetidas a tipos de ruídos diferentes.

(x) As constelações sobre hipersuperfícies hiperbólicas n -dimensionais. Este item pode estar relacionado de modo direto à questão do mergulho isométrico de g -toros. Generalizações de grupos fuchsianos triângulos para grupos kleinianos “tetraedros” são uma via natural de obtenção de constelações geometricamente uniformes sobre hipersuperfícies hiperbólicas.

Referências Bibliográficas

- [1] AGUSTINI, E., COSTA, S. & PALAZZO, R. “Codes on Graphs on Flat Tori”. *Proceedings of the VII International Workshop ACCT 2000*, Bansko-Bulgaria, 18-24 June, 2000, pp. 11-14.
- [2] AGUSTINI, E. *Ladrilhamentos*. Dissertação de Mestrado. IMECC-UNICAMP, 1998.
- [3] ANDERSON, J. *Hyperbolic Geometry*. Springer-Verlag. New York, 1999.
- [4] ARMSTRONG, M. *Basic Topology*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [5] ASH, R. *Information Theory*. Wiley & Sons, New York, 1965.
- [6] ATKINSON, A. C. “The Simulation of Generalized Inverse Gaussian and Hyperbolic Random Variables”. *SIAM - Journal on Scientific and Statistical Computing*, v. 3, n. 4, Dec. 1982, pp. 502-515.
- [7] BARNDORFF-NIELSEN, O. “Hyperbolic Distributions and Distributions on Hyperbolae”. *Scandinavian Journal of Statistics*, v. 5, n. 3, 1978, pp. 151-157.
- [8] BEARDON, A. *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag. New York. 1983.
- [9] BENEDETTO, S. & BIGLIERI, E. *Principles of Digital Transmission With Wireless Applications*. Kluwer Academic / Plenum Publishers, New York, 1999.
- [10] BERS, L. “Uniformization, Moduli, and Kleinian Groups”. *The Bulletin of the London Mathematical Society*, v. 4, part 3, n. 12, nov. 1972, pp. 257-300.
- [11] BERS, L. & KRA, I. (editors) “A Crash Course on Kleinian Groups”. *Lecture Notes in Mathematics*, n. 400, 1974.
- [12] BIGLIERI, E. & ELIA, M. “On the Existence of Group Codes for the Gaussian Channel”. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. IT 18, 1972, pp. 399-402.
- [13] BIGLIERI, E. & ELIA, M.. “Cyclic-Group Codes for the Gaussian Channel”. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. IT 22, sept. 1976, pp. 624-629.
- [14] BIGLIERI, E., KARLOF, J. & VITERBO, E. “Representing Group Codes as Permutation Codes”. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 45, sept. 1999, pp. 2204-2207.
- [15] BLAESILD, P. “The Two-Dimensional Hyperbolic Distribution and Related Distributions, with an Application to Johannsen’s Bean Data”. *Bometrika*, v. 68, n. 1, 1981, pp. 251-263.
- [16] BLANUSA, D. “ C^∞ -isometric Embeddings of the Hyperbolic Plane and of Cylinders with Hyperbolic Metric in Spherical Spaces”. *Annals of Mathematics Pura and Applied*, v. 4, n. 57, 1962, pp. 321-337.
- [17] BLANUSA, D. “Isometric Embedding of the Hyperbolic n -space in a Spherical $(6n - 4)$ -space”. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Ser. II Drustvo Mat. Fiz. Hrvatske*, n. 19, 1964, pp. 53-61.
- [18] BORELI, W. & AGUSTINI, E. Anotações e notas de aula do curso “Introdução à Teoria da Informação e Codificação”. FEEC-UNICAMP, 1º. sem. 1999.

- [19] BRANDANI, E. *Constelações de Sinais e Análise de Desempenho no Plano Hiperbólico*. Tese de Doutorado. FEEC-UNICAMP, 2000.
- [20] BROWER, A., COHEN, A. & NEUMAIER, A. *Distance-Regular Graphs*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [21] DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. IMPA: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2^a. ed., 1988.
- [22] CONWAY, J. & SLOANE, N. *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Springer-Verlag, New York, 2nd. ed., 1988.
- [23] COSTA, S., AGUSTINI, E. & PALAZZO, R. "On Knotted M -PSK Correct Reception Performance". *Seventh Internacional Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory, ACCT-2000*, Bansko-Bulgária, June 18-24, 2000, pp. 103-106.
- [24] COSTA, S., AGUSTINI, E. MUNIZ, M. & PALAZZO, R. "Slepian-Type Codes on a Flat Torus". *Proceedings of International Symposium on Information Theory, ISIT-2000*, Sorrento-Italy, June 25-30, 2000, p. 58.
- [25] COSTA, S., MUNIZ, M., AGUSTINI, E. & PALAZZO, R. "Graphs, Tessellations and Perfect Codes on Flat Tori". Artigo submetido a *IEEE Transactions on Information Theory*.
- [26] COVER, T., THOMAS, J. *Elements of Information Theory*. Wiley & Sons, New York, 1991.
- [27] CHURCHILL, R. *Variáveis Complexas e suas Aplicações*. McGraw-Hill, São Paulo, 1975.
- [28] DOWNEY, C. & KARLOF, J. "On the Existence of $[M, n]$ Group Code for the Gaussian Channel with M and n odd". *IEEE Transactions on Information Theory*, v. IT 23, n. 4, 1977, pp. 500-503.
- [29] FARIA, M. *Empacotamento de Esferas em Espaços Hiperbólicos*. Dissertação de Mestrado. IMEEC-UNICAMP, 2000.
- [30] FENN, R. "What is the Geometry of a Surface?". *The American Mathematical Monthly*, v. 90, n. 2, Feb. 1983, pp. 87-98.
- [31] FIRER, M. Notas de aula do curso "Grupos Fuchsianos". IMECC-UNICAMP, 1^o. sem. 1998.
- [32] FORNEY, D. "Geometrically Uniform Codes". *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 37, n. 5, 1991, pp. 1241-1260.
- [33] GALLOT, S., HULIN, D. & LAFONTAINE, J. *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, New York, 2nd. ed., 1990.
- [34] HATA, M. ET ALLI. "Decoding Algorithm for the High-Dimensional Discrete Torus Knot Code". *Proceedings of International Symposium on Information Theory, ISIT-2000*, Sorrento-Italy, June 25-30, 2000, p. 59.
- [35] HAYKIN, S. *Communication Systems*. Wiley & Sons, New York, 3rd. ed., 1994.
- [36] HILBERT, D. & COHN-VOSSEN, S. *Geometry and the Imagination*. Chelsea Publishing Company, New York, 1952.
- [37] HUBER, K. "Codes over Tori". *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 43, n. 2, March 1997, pp. 740-744.
- [38] JAMES, B. *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*. IMPA: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2^a. ed., 1996.
- [39] KATOK, S. *Fuchsian Groups*. The University of Chicago Press, Chicago, 1991.

- [40] KING, R. *Transmission-line Theory*. Dover Publications, New York, 1965.
- [41] KOBAYASHI, S. & NOMIZU, K. *Foundations of Differential Geometry*. Interscience Publishers. New York, v. 1, 1963.
- [42] KRUSHKAL, S., APANASOV, B. & GUSEVSKII, N. "Kleinian Groups and Uniformization in Examples and Problems". *Translations of Mathematical Monographs - AMS*. v. 62, 1986.
- [43] KUIPER, N. "Hyperbolic 4-manifolds and Tesselations". *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, n. 68, 1988, pp. 47-76.
- [44] LAZARI, H. *Uma Contribuição à Teoria dos Códigos Geometricamente Uniformes Hiperbólicos*. Tese de Doutorado. FEEC-UNICAMP, 2000.
- [45] LIN, S. & COSTELLO, D. *Error Control Coding: Fundamentals and Applications*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, 1983.
- [46] LINS NETO, A. *Funções de Uma Variável Complexa*. IMPA: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1993.
- [47] LOELIGER, H. "Signal Sets Mached to Groups". *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 37, n. 6, 1991, pp. 1675-1682.
- [48] MAGNUS, W. *Noneuclidean Tesselations and Their Groups*. Academic Press, New York, 1974.
- [49] MEYER, P. *Probabilidade - Aplicações à Estatística*. LTC, Rio de Janeiro, 2^a. ed., 1983.
- [50] NASH, J. "The Embedding Problem for Riemannian Manifolds". *Annals of Mathematics*, n. 63, 1956, pp. 20-63.
- [51] PROAKIS, J. *Digital Communications*. McGraw-Hill, New York, 3rd. ed., 1995.
- [52] ROCHA, L. *Introdução à Geometria Hiperbólica Plana*. 16^o. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1987.
- [53] SHANNON, C. "A Mathematical Theory of Communication". *Bell Systems Technical Journal*, v. 27, 1948, pt. I: pp. 379-423; pt. II: pp. 623-656.
- [54] SLEPIAN, D. "Group Codes for the Gaussian Channel". *The Bell System Technical Journal*, v. 47, 1968, pp. 575-602.
- [55] SLEPIAN, D. "On Neighbor Distances and Symmetry in Group Codes". *IEEE Transactions on Information Theory*, v. IT 17, 1971, pp. 630-632.
- [56] STILLWELL, J. *Geometry and Surfaces*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [57] STILLWELL, J. *Sources of Hyperbolic Geometry* (History of Mathematics v. 10). American Mathematical Society, 1996.
- [58] UNGERBOECK, G. "Channel Coding with Multilevel/Phase Signals". *IEEE Transactions on Information Theory*, v. IT 28, Jan. 1982 pp. 55-67.
- [59] VAISHAMPAYAN, V. & COSTA, S. "Curves on a Sphere: Error Control for Continuous Alphabeth Sources". Artigo submetido a *IEEE Transactions on Information Theory*.
- [60] WOLF, J. *Spaces of Constant Curvature*. Publish or Perish Inc., Boston, 3rd. ed., 1974.

Índice Remissivo

- ação propriamente descontínua, 63
- alfabeto do código de fonte, 25
- algoritmo de Viterbi, 29
- amostragem, 25
- ângulo de paralelismo, 61
- ângulo entre geodésicas, 51
- aplicação conforme, 51
- area hiperbólica, 60
- arestas parelhadas, 67
- assinatura de grupo fuchsiano, 69

- círculo hiperbólico, 57
- círculo isométrico, 60
- código (de fonte) casado com a fonte, 28
- código corretor de erro aleatório, 35
- código corretor de erro tipo surto, 35
- código de bloco, 28
- código de canal, 28
- código de fonte unicamente decodificável, 27
- código de repetição, 30
- código geometricamente uniforme, 41
- códigos convolucionais, 29
- códigos corretores de erro, 28
- códigos de Grupo, 41
- canais de erro aleatório, 35
- canal, 24
- canal discreto sem memória, 33
- canal simétrico binário, 33
- capacidade de canal, 30
- centralizador de elemento de grupo, 64
- ciclo de vértices, 67
- cilindro hiperbólico, 111
- cilindro parabólico, 109
- codificação (de fonte), 25
- codificador de canal, 24
- codificador de fonte, 24
- comprimento hiperbólico (de curva), 49
- cone elíptico, 106
- cone parabólico, 109
- conjunto limite, 64
- constelação de sinais, 35
- curvatura de variedade riemanniana, 49

- decisões abruptas, 33
- decisões suaves, 33
- decodificador de canal, 25
- decodificador de fonte, 25
- decodificador de máxima verossimilhança, 34
- demodulador, 25
- densidade gaussiana, 74, 85
- densidade gaussiana hiperbólica (dim. 1), 82
- densidade gaussiana hiperbólica (dim. n), 88
- densidade lognormal, 82
- densidade simétrica, 83
- densidades equivalentes por isometria, 81
- desigualdade de Jorgensen, 65
- distância hiperbólica, 49
- domínio de Dirichlet, 66
- domínio fundamental de grupo, 65

- eixo de translação hiperbólica, 59
- entropia de fonte, 27
- espaço de Teichmüller, 119
- estabilizador de elemento da órbita, 63
- expressões para distância hiperbólica, 50

- família de conjuntos localmente finita, 63
- fonte, 24
- fronteira ideal, 48
- função erro, 75
- função erro complementar, 75

- geodésicas concorrentes, 53
- geodésicas hiperparalelas, 53
- geodésicas paralelas, 53
- grupo co-compacto, 68
- grupo de Möbius, 53
- grupo de Picard, 71
- grupo de primeiro tipo, 64
- grupo de segundo tipo, 64
- grupo de tipo (p,q,r) , 70
- grupo discreto de isometrias, 63
- grupo elementar, 65
- grupo fuchsiano, 63
- grupo geometricamente finito, 68
- grupo geral de Möbius, 53
- grupo kleiniano, 70
- grupo modular, 64

- grupo modular estendido, 125
- grupo não-elementar, 65
- grupo topológico especial linear projetivo, 55
- grupo triângulo, 70
- grupos de Schottky, 114

- hipersuperfícies de nível de dens. hiperbólica, 90
- horocírculo, 57
- horocírculo degenerado, 57

- inversão em hipersfera, 51
- isometria elíptica, 56
- isometria entre modelos de Poincaré, 54
- isometria entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{H}$, 80
- isometria entre variedades riemannianas, 47
- isometria parabólica, 56
- isometria própria ou positiva, 56

- limitante de Bhattacharyya, 77

- média simétrica em $\mathbb{H}$, 83
- método de Huffman, 28
- métrica riemanniana, 46
- modelos euclidianos de Poincaré, 48
- modulador, 24
- multiplicidade de elemento da órbita, 63

- normalizador de grupo, 65

- órbita de ponto, 63

- PAM hiperbólico (HPAM), 97
- PAM ou ASK, 36
- plano de Lobatchevski, 48
- ponto ideal, 48
- PSK, 36
- PSK hiperbólico (HPSK), 98

- QAM, 37
- quantização, 25
- Quinto Postulado de Euclides, 49

- razão cruzada, 53
- reflexão em hiperplano, 51
- região de Nielsen, 68
- região de Voronoi, 66, 74
- reta hiperbólica, 80
- ruído gaussiano branco aditivo (AWGN), 32

- símbolos da fonte, 25
- sistema analógico, 23
- sistema de comunicações, 23
- sistema de coordenadas, 45
- sistema digital, 24
- superfície quociente, 42

- superfície quociente $\mathbb{H}^2/\mathbb{G}$, 106

- taxa de informação, 39
- teorema da Amostragem, 26
- teorema da Capacidade de Canal AWGN, 34
- teorema de Codificação de Canal, 30
- teorema de Codificação de Fonte, 27
- teorema de Riemann, 104
- teorema de uniformização de Köbe/Poincaré, 104
- teoria de uniformização, 104
- traço de isometria própria, 56
- transformação de Möbius, 53
- translação hiperbólica, 56
- trigonometria hiperbólica, 61

- uniformização de curvas algébricas planas, 104

- vértice ordinário, 66
- vértice singular, 66
- variância em $\mathbb{H}$, 83
- variância hiperbólica, 83
- variedade diferenciável, 45
- variedade riemanniana, 46

Scientific Work Place / Maple (3.0)

WinShell (2.0)

MiK TeX (2.1)

Ghost View (4.0) / Ghost Script (7.0)

Mathematica (4.0)

CorelDraw (9.0)

WinZip (8.0)