UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Dissertação de Mestrado

Isometria entre Espaços de Wiener Abstratos

Maria Luisa Cardoso Souza

ISOMETRIA ENTRE ESPAÇOS DE WIENER ABSTRATOS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Maria Luisa Cardoso Souza e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 10 de dezembro de 2001.

Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino
Orientador

Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Jr.
Co-orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Jr.
2. Prof. Dr. Marcelo Dutra Fragoso
3. Profa. Dra. Nanci Lopes Garcia

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computacão Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Souza, Maria Luisa Cardoso

So89i Isometria entre espaços de Wiener abstratos. / Maria Luisa Cardoso Souza -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientadores : Paulo Régis Caron Ruffino; Dorival Leão Pinto Jr.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise estocástica. 2. Processo estocástico. 3. Movimento browniano. 4. Martingala (Matemática). I. Ruffino, Paulo Régis Caron. II. Pinto Jr., Dorival Leão. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 10 de dezembro de 2001 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). DORIVAL LEÃO PINTO JÚNIOR

Prof (a). Dr (a). MARCELO DUTRA FRAGOSO

Nancy L. Garcia

Prof (a). Dr (a). NANCY LOPES GARCIA

Agradecimentos

Agradeço

- *Ao professor Dr. Paulo R. C. Ruffino por me apresentar a essa área da Matemática que me despertou enorme interesse e pela orientação inicial.*

- *Ao professor Dr. Dorival Leão Jr. pela orientação, paciência e trabalho em conjunto nesse último ano.*

- *Aos meus pais pela dedicação, apoio, incentivo e patrocínio durante todos os anos de estudo, desde o ensino fundamental.*

- *Às minhas irmãs pela amizade, em especial à Liana, que morou comigo durante a graduação e parte do mestrado e que me ensinou muito sobre o mundo em que vivemos.*

- *Ao meu marido Eliseu pela força e incentivo, principalmente nos momentos mais difíceis.*

- *À Roseli pela grande amizade e maravilhosa convivência, principalmente no primeiro ano do mestrado.*

- *À Liliana pela amizade e companherismo durante toda a minha graduação.*

- *À todos os amigos com os quais tive a oportunidade de conviver desde meu ingresso na Unicamp.*

- *À CNPq pelo apoio financeiro.*

Resumo

O objetivo deste trabalho é construir um isomorfismo de espaços de Wiener abstratos (AWS) entre o espaço de Wiener canônico dado pelas trajetórias do movimento browniano (i, H_{CM}, $C_0[0,1]$) e um espaço de Wiener abstrato (i, l_2, V), definido sobre um espaço vetorial normado dado por um subconjunto do espaço de todas as seqüências de números reais. Além disso, apresentamos uma generalização da construção feita por Paul Lévy da medida de Wiener no espaço de funções contínuas $C_0[0,1]$. Mais precisamente, Paul Lévy construiu a medida de Wiener a partir da integral do sistema ortonormal completo de Haar. No nosso trabalho, tomamos a integral de uma base ortonormal qualquer de L^2 ([0,1], B([0,1], m), onde B([0,1] é a σ-álgebra de Borel do intervalo [0,1] e m é a medida de Lebesgue.

Abstract

In this monograph we construct an isomorphism of abstract Wiener space (AWS) between the canonical Wiener space given by the trajectories of the Brownian motion (i, H_{CM}, $C_0[0,1]$) and the AWS (i, l_2, V) defined over a normed vector space given by a subset of the space of sequences of real numbers. Moreover, we present a generalization of Paul Levy's Wiener measure in the space of continuous functions $C_0[0,1]$. Precisely, he constructed the Wiener measure from a series of gaussian random variables multiplied by the Haar orthonormal basis of L^2 ([0,1], B([0,1], m), where B([0,1] is the Borel σ-algebra in the interval [0,1] and m is the Lebesgue measure, we extend this method to a general orthonormal basis of this Hilbert space.

Conteúdo

Prefácio

Neste trabalho, estudamos dois resultados dentro da teoria de Probabilidade. Primeiro, fizemos uma generalização da construção da medida de Wiener feita por Paul Lévy. Depois, estabelecemos uma isometria entre os espaços de Wiener abstratos $(i, H_{CM}, C_0[0,1])$ e (i, l_2, V).

Norbert Wiener foi quem introduziu em uma série de artigos escritos na década de vinte (ver M. Kac, 1980 e referências contidas nele) o tema sobre integração em espaços de funções. Mais tarde, reuniu alguns aspectos de seu trabalho em um capítulo sobre funções aleatórias no livro "Fourier Transforms in the Complex Domain". Wiener construiu uma medida no espaço $C_0[0,1]$ das funções $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ contínuas com $f(0)=0$, baseada nas leis de probabilidade de transição do movimento browniano estabelecidas por Einstein e Smoluchowski.

Consideremos a σ-álgebra em $C_0[0,1]$ gerada pelos conjuntos de funções que nos tempos

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq 1$$

assumem valores nos intervalos

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots (\alpha_n, \beta_n),$$

ou seja, os conjuntos da forma

$$\{f \in C_0[0,1]; \alpha_1 < f(t_1) < \beta_1, \alpha_2 < f(t_2) < \beta_2, \ldots, \alpha_n < f(t_n) < \beta_n\}.$$

A medida (ou probabilidade) atribuída à esses conjuntos é dada, pela teoria de

Einstein-Smoluchowski, por

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}...\int_{\alpha_n}^{\beta_n} P\left(0 \mid x_1; t_1\right) P\left(x_1 \mid x_2; t_2 - t_1\right) ... P\left(x_{n-1} \mid x_n; t_n - t_{n-1}\right) dx_1 dx_2 ... dx_n,$$

onde $P\left(x \mid y; t\right)$ é o núcleo do calor (solução geral de $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \lambda.\Delta u$) dado por

$$P\left(x \mid y; t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{\left(y-x\right)^2}{2t}\right).$$

Wiener provou que, se $G_0, G_1, G_2, ...$ são variáveis aleatórias gaussianas independentes, cada uma com média *zero* e variância 1 então

(a) a série

$$G_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n - 1} G_k \sqrt{2} \frac{sen\pi kt}{\pi k}$$

converge uniformemente com probabilidade 1;

(b) se denotarmos por $f\left(t\right)$ a soma da série acima, tem-se

$$P\left(\left\{\alpha_1 < f\left(t_1\right) < \beta_1, ..., \alpha_n < f\left(t_n\right) < \beta_n\right\}\right) =$$

$$= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} ... \int_{\alpha_n}^{\beta_n} P\left(0 \mid x_1; t_1\right) ... P\left(x_{n-1} \mid x_n; t_n - t_{n-1}\right) dx_1 ... dx_n,$$

onde P é a medida de probabilidade produto das variáveis gaussianas e $P\left(x \mid y; t\right)$ é dado acima.

Isto significa que a medida no espaço $C_0\left[0,1\right]$ consistente com a teoria física do movimento browniano fica estabelecida pela transformação dada por

$$f\left(t\right) = G_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n - 1} G_k \sqrt{2} \frac{sen\pi kt}{\pi k},$$

de $C_0\left[0,1\right]$ no espaço produto infinito $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ...$ com a medida produto das variáveis gaussianas.

Observação 1 *A transformação acima não é 1-1 pois, enquanto para cada $f(t)$ em $C_0[0,1]$ corresponde uma única seqüência $G_0, G_1, G_2, ...$, a recíproca somente é verdadeira fora de um conjunto de seqüências de medida nula (lembremos que a série em (a) converge uniformemente com probabilidade 1).*

Mais tarde, Paul Lévy fez uma construção alternativa da medida de Wiener, descrita por Ciesielski [5] :

Consideremos o sistema ortonormal completo de Haar, cujas funções

$$h_0(t), h_{2^n}^{(k)}(t), 0 \leq k \leq 2^n - 1, 0 \leq t \leq 1$$

são dadas por

$$h_0(t) \equiv 1;$$

$$h_{2^n}^{(k)}(t) = \begin{cases} +\sqrt{2^n}; & \dfrac{k}{2^n} < t < \dfrac{k+\frac{1}{2}}{2^n} \\ -\sqrt{2^n}; & \dfrac{k+\frac{1}{2}}{2^n} < t < \dfrac{k+1}{2^n} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para $n = 0, 1, 2, ...$

As funções de Schauder

$$S_0(t) = t;$$

$$S_{2^n}^{(k)}(t) = \int_0^t h_{2^n}^{(k)}(s)\, ds, n = 0, 1, 2, ...$$

formam uma base para o espaço das funções contínuas $f : [0,t] \to \mathbb{R}$, com $f(0) = 0$, $0 \leq t \leq i$ no sentido que toda f é unicamente representado como uma série uniformemente convergente de funções de Schauder:

$$f(t) = a_0 S_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} a_{2^n}^{(k)} S_{2^n}^{(k)}(t).$$

Para se obter a medida de Wiener, basta substituir a sequência dos $a_n's$ por variáveis aleatórias gaussianas independentes $G_0, G_{2^n}^{(k)}$, cada uma com média *zero* e variância 1.

No nosso trabalho construímos a medida de Wiener generalizando a construção de Paul Lévy no sentido que definimos as funções de Schauder a partir de uma base ortonormal qualquer do $L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$, onde $\mathcal{B}([0,1])$ é a σ-álgebra de Borel do intervalo $[0,1]$ e m é a medida de Lebesgue. Isso é possível se considerarmos o produto interno em $L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$ dado por

$$< f, g >= \int_0^1 f(s) g(s) ds,$$

de modo a obtermos o $L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$ como um espaço de Hilbert separável.

Definimos as funções de Schauder pelas integrais

$$S_n(t) = \int_0^t h_n(s) ds.$$

Tomando uma seqüência de variáveis aleatórias gaussianas $\{X_n, n \geq 1\}$ independentes, definidas em um espaço abstrato de probabilidade $(X, \mathcal{F}_X, \mathbb{P}_X)$, cada uma com média *zero* e variância 1 e considerando o espaço produto infinito enumerável de $(X, \mathcal{F}_X, \mathbb{P}_X)$, que chamamos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_n(w, t) = \sum_{j=1}^{n} X_j(w_j) S_j(t),$$

onde $t \in [0,1]$ e $w = (w_1, w_2, ...) \in \Omega$, com $w_j \in X$, $j \in \mathbb{N}$.

Provamos no Capítulo 1 que, para cada $t \in [0,1]$, a seqüência $\{Z_n(., t) : n \geq 1\}$ converge $\mathbb{P}$-*q.c.* e em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ para uma variável aleatória $Z(., t)$. Além disso, o processo $\{Z(w, t), w \in \Omega, t \in [0,1]\}$ possui uma versão separável $\{W(w, t), w \in \Omega, t \in [0,1]\}$ cuja convergência se dá uniformemente em t para quase todo $w \in \Omega$.

Se escrevemos

$$\begin{array}{rccl} W: & \Omega & \to & C_0[0,1] \\ & w & \mapsto & W(w,.), \end{array}$$

temos que $W : \Omega \to C_0[0,1]$ é uma variável aleatória sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Então, a medida de Wiener é dada pela probabilidade induzida $\mu = W_*\mathbb{P}$ sobre $(C_0[0,1], \mathcal{B}(C_0[0,1]))$, onde $\mathcal{B}(C_0[0,1])$ é a σ-álgebra de Borel do $C_0[0,1]$.

O segundo resultado deste trabalho é a construção de uma isometria entre os espaços de Wiener abstratos $(i, H_{CM}, C_0[0,1])$ e (i, l_2, V), definidos abaixo.

Consideremos o espaço H_{CM}, denominado espaço de Cameron-Martin, de todas as funções $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ absolutamente contínuas tais que $f(0) = 0$ e a derivada f' está em $L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$. Tomamos em H_{CM} o produto interno $<,>_{H_{CM}}$ dado por

$$< f,g >_{H_{CM}} = \int_0^1 f'(s)\, g'(s)\, ds.$$

Com este produto, H_{CM} é um espaço de Hilbert separável.

Podemos definir em H_{CM} uma semi-norma mensurável da seguinte forma:

$$|f|_1^{H_{CM}} = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

O completamento do Cameron-Martin em relação à essa semi-norma corresponde ao espaço $C_0[0,1]$.

Obtemos desta forma o Espaço de Wiener Abstrato $(i, H_{CM}, C_0[0,1])$.

Consideremos agora uma base ortonormal $\{h_n : n \geq 1\}$ do $L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$ e tomemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, as funções de Schauder

$$S_n(t) = \int_0^t h_n(s)\, ds.$$

Provamos no Capítulo 2 que, para toda seqüência $\{a_n\} \in l_2$, a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t) \ ; \ t \in [0,1]$$

converge uniformemente em t. Assim, definimos em l_2 a semi-norma mensurável

$$|\{a_n\}|_1^{l_2} = \sup_{t \in [0,1]} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t) \right|.$$

O completamento de l_2 em relação à semi-norma $|.|_1^{l_2}$ é dado pelo conjunto

$$V = \left\{ (a_1, a_2, ...) \in \mathbb{R}^{\infty} : \sup_{t \in [0,1]} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t) \right| < \infty \right\}.$$

Obtemos desta forma o Espaço de Wiener Abstrato (i, l_2, V).

Podemos estabelecer uma isometria ϕ_1 entre o espaço de Cameron-Martin e o espaço l_2 a partir da seguinte caracterização de H_{CM} apresentada no Capítulo 2:

Seja $\{h_n : n \geq 1\}$ uma base ortonormal de $L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$. Então uma função $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ estará em H_{CM} se e somente se existir uma seqüência $\{a_n\}_{n \geq 1} \in l_2$ tal que

$$f(t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^t h_k(s)\, ds$$

com convergência uniforme em t.

Definimos então uma função $\phi_1 : H_{CM} \rightarrow l_2$ dada por

$$\phi_1(f) = (a_1, a_2, a_3, ...) \in l_2.$$

A função ϕ_1 é de fato uma isometria entre os espaços H_{CM} e l_2, como mostramos no Capítulo 2.

Além disso, considerando as medidas de Gauss $\mu_{H_{CM}}$ em H_{CM} e μ_{l_2} em l_2, temos que$\left((\phi_1)_* \mu_{H_{CM}}\right) = \mu_{l_2}$ e $\left((\phi_1^{-1})_* \mu_{l_2}\right) = \mu_{H_{CM}}$, ou seja, ϕ_1 preserva a medida de Gauss.

Podemos estender ϕ_1 a uma função $\phi : C_0[0,1] \to V$. Basta notarmos que as funções $\{S_n : n \geq 1\}$ formam uma base de Schauder para o espaço $C_0[0,1]$, ou seja, para toda $f \in C_0[0,1]$, existe uma sequência $\{a_n\}$ em V que satisfaz

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t)\,; t \in [0,1]\,.$$

Por outro lado, dado um elemento $\{a_n\} \in V$, existe uma função $f \in C_0[0,1]$ tal que a relação acima é válida.

Assim, estendemos a isometria ϕ_1 para uma função $\phi : C_0[0,1] \to V$ dada por

$$\phi(f) = (a_1, a_2, ...) \in V.$$

A estrutura desse trabalho é feita da seguinte forma:

No Capítulo 1 apresentamos o primeiro resultado, ou seja, a construção da medida de Wiener através de uma base ortonormal qualquer do $L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$. Para isso, provamos primeiro que, para cada $t \in [0,1]$, a sequência $\{Z_n(.,t) : n \geq 1\}$ é um L^2-martingale e, portanto converge $\mathbb{P}$-*q.c.* e em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ para uma variável aleatória $Z(.,t) : \Omega \to \mathbb{R}$. Mostramos, depois, que o processo $\{Z(w,t), w \in \Omega, t \in [0,1]\}$ possui uma versão separável e mensurável no sentido de Doob, que denotamos por $\{W(w,t), w \in \Omega, t \in [0,1]\}$. Finalmente, provamos que a sequência $\{Z_n(w,t) : n \geq 1\}$ converge uniformemente em t para $W(w,t)$ para quase todo $w \in \Omega$.

No Capítulo 2 estudamos primeiro uma caracterização do espaço de Cameron-Martin, estabelecendo uma isometria ϕ_1 entre este e o espaço l_2. Definimos a medida de Gauss em um espaço de Hilbert e mostramos que a isometria ϕ_1 é invariante em relação a ela. Construímos os espaços de Wiener $(i, H_{CM}, C_0[0,1])$ e (i, l_2, V) e finalmente estabelecemos a isometria ϕ entre eles.

Os Capítulos 3 e 4 foram chamamos de Apêndices por conterem as definições e resultados básicos da teoria de Probabilidade usados nos dois primeiros Capítulos.

Capítulo 1

Processo de Wiener

Seja $C_0[0,1]$ o espaço das funções $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ contínuas com $f(0)=0$. Considerando a topologia da convergência uniforme, podemos munir $C_0[0,1]$ com a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(C_0[0,1])$. Neste primeiro capítulo, construímos uma medida de probabilidade sobre $(C_0[0,1],\mathcal{B}(C_0[0,1]))$ denominada medida de Wiener. Para isso, definimos uma sequência de processos aleatórios gaussianos $\{Z_n(w,t), t\in[0,1], w\in\Omega : n\geq 1\}$ com trajetórias contínuas e mostramos que esta sequência converge uniformemente em t (a menos de um conjunto de medida nula) para um processo de Wiener.

1.1 Construção do Processo de Wiener

Consideremos o espaço de medida $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),m)$, onde $\mathcal{B}[0,1]$ é a σ-álgebra de Borel no $[0,1]$ e m é a medida de Lebesgue. Denotamos por $L^2=L^2([0,1],\mathcal{B}([0,1]),m)$ o espaço das funções $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ quadrado integráveis com o produto interno dado pela integral

$$< f,g >= \int_0^1 f(s)\,g(s)\,ds.$$

Sabemos que, com este produto interno, L^2 é um espaço de Hilbert separável. Seja

$\{h_n : n \geq 1\}$ uma base ortonormal de L^2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos as funções

$$S_n(t) = \int_0^t h_n(s)\, ds,$$

denominadas de funções de Schauder.

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n \in C_0[0,1]$ é absolutamente contínua. Além disso, mostramos no Capítulo 2 que as funções S_n formam uma base de Schauder de $C_0[0,1]$.

Consideremos agora um espaço abstrato de probabilidade $(X, \mathcal{F}_X, \mathbb{P}_X)$ e tomemos uma sequência $\{X_n : n \geq 1\}$ de variáveis aleatórias gaussianas, independentes e identicamente distribuídas, com média *zero* e variância 1, definidas sobre $(X, \mathcal{F}_X, \mathbb{P}_X)$. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ o espaço produto infinito enumerável, onde Ω é o conjunto das sequências $w = (w_1, w_2, ...)$, com $w_k \in X$, para todo k, $\mathcal{F}$ é a σ-álgebra gerada pelos cilindros e $\mathbb{P}$ é a probabilidade produto (Apêndice 1). Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$Z_n(w,t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(w_i)\, S_i(t),$$

onde $w \in \Omega$ e $t \in [0,1]$. Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $Z_n(w,t)$ é mensurável em relação à σ-álgebra produto $\mathcal{F} \times \mathcal{B}([0,1])$.

Proposição 1.1 *Para cada $t \in [0,1]$ fixo, existe uma variável aleatória $Z(.,t)$ tal que*

$$\lim_{n \to \infty} Z_n(.,t) = Z(.,t)$$

em $L^2(\Omega)$ e $\mathbb{P}$-q.c.

Demonstração: Vamos provar primeiro que, para cada $t \in [0,1]$, a sequência $\{Z_n(.,t) : n \geq 1\}$ é um L^2-martingale discreto (Capítulo 4) sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ com respeito à filtração $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ dada por

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, X_2, ...X_n\}; n \in \mathbb{N}.$$

A família $\{Z_n(.,t), n \geq 1\}$ é claramente $(\mathcal{F}_n)$-adaptada, como também é claro que $\mathbb{E}\left[|Z_n(.,t)|^p\right] < \infty, 1 \leq p < \infty$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_{n+1}(.,t) \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n+1} X_k(.)S_k(t) \mid \mathcal{F}_n\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k(.)S_k(t) \mid \mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}(.)S_{n+1}(t) \mid \mathcal{F}_n\right] = \\
&= \sum_{k=1}^{n} X_k(.)S_k(t) = Z_n(.,t) \ \mathbb{P}\text{-}q.c.
\end{aligned}$$

pois, como as variáveis aleatórias $\{X_k\}$ são independentes, segue que

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1}(.)S_{n+1}(t) \mid \mathcal{F}_n\right] = S_{n+1}(t)\mathbb{E}\left[X_{n+1}(.)\right] = 0.$$

Logo, para cada $t \in [0,1]$, $\{Z_n(.,t) : n \geq 1\}$ é martingale.

A seguir, vamos mostrar que $\sup\limits_n \mathbb{E}\left[Z_n^2(.,t)\right] < \infty$. Tomamos, primeiro

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_n^2(.,t)\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k(.)S_k(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k(.)S_k(t)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} X_k(.)S_k(t)\right)\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(X_k(.)S_k(t)\right)\left(X_j(.)S_j(t)\right)\right] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\mathbb{E}\left[\left(X_k(.)S_k(t)\right)\left(X_j(.)S_j(t)\right)\right]\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(S_k(t)S_j(t)\mathbb{E}\left[X_k(.)X_j(.)\right]\right) = \sum_{k=1}^{n} S_k^2(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^t h_k(s)ds\right)^2 = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1 I_{[0,t]}(s)h_k(s)ds\right)^2.
\end{aligned}$$

Então

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[Z_n^2(.,t)\right] = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1 I_{[0,t]}(s)h_k(s)ds\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1 I_{[0,t]}(s)h_k(s)ds\right)^2.$$

Aplicando a identidade de Parseval, obtemos

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[Z_n^2(.,t)\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^1 I_{[0,t]}(s)h_k(s)ds\right)^2 = \left\|I_{[0,t]}\right\|_{L^2} = t < \infty.$$

Portanto, para cada $t \in [0,1]$, $\{Z_n(.,t) : n \geq 1\}$ é um L^2-martingale. Segue do Teorema 4.3 e Proposição 4.8 do Apêndice 2 que, para cada $t \in [0,1]$, existe uma variável aleatória integrável $Z(.,t) : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} Z_n(.,t) &\to Z(.,t) \ \mathbb{P}\text{-}q.c. \text{ e em } L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \text{ e} \\ \mathbb{E}[Z(.,t) \mid \mathcal{F}_n] &= Z_n(.,t) \ \mathbb{P}\text{-}q.c. \end{aligned}$$

□

Temos que

$$\begin{aligned} Z: \ \Omega \times T &\to \mathbb{R} \\ (w,t) &\mapsto Z(w,t) \end{aligned}$$

define um processo aleatório gaussiano. De fato, desde que, para todo $t \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$, as variáveis aleatórias $Z_n(.,t)$ são gaussianas, então $Z(.,t) = \lim_{n\to\infty} Z_n(.,t)$ $\mathbb{P}$-qc também é gaussiana (Apêndice 1 - Proposição 3.3 e Teorema 3.10). Com isso, obtemos uma família de variáveis aleatórias gaussianas $\{Z(.,t) : t \in [0,1]\}$ que é um processo aleatório gaussiano.

Lema 1.2 *O processo Z possui as seguintes propriedades:*

1. *A variância de Z é dada por $\mathbb{E}[Z^2(.,t)] = t$;*

2. *A covariância de Z é dada por $\Gamma(s,t) = \mathbb{E}[Z(.,s)\,Z(.,t)] = \min\{s,t\}$, $s,t \in [0,1]$;*

3. *O processo $\{Z(.,s) - Z(.,t)\}$ possui média $\mathbb{E}[Z(.,s) - Z(.,t)] = 0$ e variância $\mathbb{E}\left[(Z(.,s) - Z(.,t))^2\right] = |s-t|$, $s,t \in [0,1]$.*

Demonstração: (1) Como $Z_n(.,t)$ é L^2-martingale para todo $t \in [0,1]$, segue que, para cada $t \in [0,1]$ a família $\{Z_n(.,t) : n \geq 1\}$ é uniformemente integrável. Utilizando o

Teorema 4.13 do Apêndice 2, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z^2(.,t)\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k(.)\, S_k(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k(.)\, S_k(t)\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} X_j(.)\, S_j(t)\right)\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left(X_k(.)\, S_k(t)\right)\left(X_j(.)\, S_j(t)\right)\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{E}\left[\left(X_k(.)\, S_k(t)\right)\left(X_j(.)\, S_j(t)\right)\right]\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left(S_k(t)\, S_j(t)\, \mathbb{E}\left[X_k(.)\, X_j(.)\right]\right).
\end{aligned}$$

Como as variáveis $\{X_k\}$ são independentes, segue que

$$\mathbb{E}\left[Z^2(.,t)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} S_k^2(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^t h_k(s)\, ds\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^1 I_{[0,t]}(s)\, h_k(s)\, ds\right)^2.$$

Pela identidade de Parseval,

$$\mathbb{E}\left[Z^2(.,t)\right] = \left\|I_{[0,t]}\right\|_{L^2} = t.$$

(2) Sejam $s, t \in [0,1]$ com $s < t$. Temos que

$$\mathbb{E}\left[Z(.,s)\, Z(.,t)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} X_k(.)\, S_k(s) \sum_{j=1}^{\infty} X_j(.)\, S_j(t)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left(X_k(.)\, S_k(s)\, X_j(.)\, S_j(t)\right)\right]$$

Novamente pelo Teorema 4.13 obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z(.,s)\, Z(.,t)\right] &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{E}\left[X_k(.)\, S_k(s)\, X_j(.)\, S_j(t)\right]\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} S_k(s)\, S_j(t)\, \mathbb{E}\left[X_k(.)\, X_s(.)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} S_k(s)\, S_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 I_{[0,t]} h_k(u)\, du \int_0^1 I_{[0,s]} h_k(u)\, du.
\end{aligned}$$

Pela identidade de Parseval,

$$\mathbb{E}\left[Z(.,s)\, Z(.,t)\right] = \ < I_{[0,t]}, I_{[0,s]} > \ = s.$$

(3)Temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Z\left(.,s\right)-Z\left(.,t\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty}X_n\left(.\right)S_n\left(s\right)-\sum_{n=1}^{\infty}X_n\left(.\right)S_n\left(t\right)\right]= \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty}X_n\left(.\right)\left(S_n\left(s\right)-S_n\left(t\right)\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left(S_n\left(s\right)-S_n\left(t\right)\right)\mathbb{E}\left[X\left(.\right)\right]=0\end{aligned}$$

e, tomando $s<t$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(Z\left(.,s\right)-Z\left(.,t\right)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[Z^2\left(.,s\right)-2Z\left(.,s\right)Z\left(.,t\right)+Z^2\left(.,t\right)\right]= \\ &= s-2s+t=t-s.\end{aligned}$$

□

A seguir, vamos provar que o processo $\{Z\left(w,t\right),t\in[0,1],w\in\Omega\}$ possui uma modificação separável no sentido de Doob (Apêndice 1) com trajetórias contínuas $\mathbb{P}$-$q.c.$

Lema 1.3 *Existe um processo aleatório gaussiano* $W=\{W\left(w,t\right):w\in\Omega,t\in[0,1]\}$ *separável e mensurável tal que*

$$\mathbb{P}\left(W\left(.,t\right)=Z\left(.,t\right)\right)=1,\forall t\in[0,1].$$

Demonstração: Considere, para cada $n\in\mathbb{N}$ e $k=1,...,2^n$ os intervalos

$$C_{n,k}=\begin{cases}\left[\dfrac{k-1}{2^n},\dfrac{k}{2^n}\right) & \text{se}\quad k=1,...2^{n-1}\\ \left[\dfrac{k-1}{2^n},1\right] & \text{se}\quad k=2^n.\end{cases}$$

Temos que, para todo $n\in\mathbb{N}$, os intervalos $C_{n,k}$ formam uma partição $\mathcal{B}$-mensurável do intervalo $[0,1]$, ou seja,

$$C_{n,k}\in\mathcal{B}\left([0,1]\right),\forall k=1,...,2^n;$$

$$C_{n,k_1}\cap C_{n,k_2}=\emptyset;$$

$$\bigcup_{k=1}^{2^n} C_{n,k} = [0,1].$$

Definimos

$$W_n(w,t) = Z\left(w, \frac{k}{2^n}\right) \text{ se } t \in C_{n,k}.$$

As funções W_n são processos aleatórios gaussianos mensuráveis (observe que cada W_n é uma função escada).

Utilizando a desigualdade de Chebychev, obtemos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|W_n(w,t) - Z(w,t)| > \frac{1}{n}\right) &\leq n^2 \mathbb{E}\left[(W_n(w,t) - Z(w,t))^2\right] = \\
&= n^2 \mathbb{E}\left[\left(Z\left(w, \frac{k}{2^n}\right) - Z(w,t)\right)^2\right]
\end{aligned}$$

quando $t \in C_{n,k}$. Assim,

$$\mathbb{P}\left(|W_n(w,t) - Z(w,t)| > \frac{1}{n}\right) \leq n^2 \left|\frac{k}{2^n} - t\right| \leq n^2 \frac{1}{2^n}$$

e, portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|W_n(w,t) - Z(w,t)| \geq \frac{1}{n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{1}{2^n} < \infty.$$

De fato, pelo teste da raiz,

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 \frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(n^2\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

logo, a série é convergente.

Utilizando o Lema de Borel-Cantelli, obtemos

$$\mathbb{P}(W_n(w,t) \to Z(w,t)) = 1, \forall t \in [0,1].$$

Definimos, então, o processo aleatório gaussiano

$$W(w,t) = \limsup_{n\to\infty} W_n(w,t)\,;w \in \Omega, t \in [0,1]\,.$$

Temos que $W : \Omega \times [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável e $\mathbb{P}(W(.,t) = Z(.,t)) = 1$ para todo $t \in [0,1]$.

Falta provar que o processo W é separável. Observemos que, se $t = \dfrac{k}{2^n}$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $k = 1, ..., 2^n$, então $W(w,t) = Z(w,t)$ para todo $w \in \Omega$.

Assim, para todo $w \in \Omega$,

$$\begin{aligned} W(w,t) &= \limsup_{n\to\infty} W_n(w,t) = \limsup_{n\to\infty} Z\left(w, \frac{k}{2^n}\right) = \\ &= \limsup_{n\to\infty} W\left(w, \frac{k}{2^n}\right), \end{aligned}$$

com

$$\left|\frac{k}{2^n} - t\right| < \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Isto significa que, dado $\varepsilon > 0$,

$$W(w,t) \in \overline{\left\{W\left(w, \frac{k}{2^n}\right) : n \in \mathbb{N}, \left|\frac{k}{2^n} - t\right| \leq \varepsilon\right\}},$$

ou ainda,

$$W(w,t) \in \overline{\{W(w,s) : s \in S \cap B(t,\varepsilon)\}},$$

onde $S = \left\{\dfrac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k = 1, ...2^n\right\}$. $\square$

Vamos mostrar agora que W possui trajetórias contínuas $\mathbb{P}$-*q.c.*. Para isso, utilizamos o seguinte Teorema:

Teorema 1.4 (Fernique, pag.47) *Seja* $X = \{X(t,w), t \in [0,1], w \in \Omega\}$ *um processo* *aleatório gaussiano separável e seja $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ a função definida por*

$$\varphi(h) = \sup_{\substack{s,t\in[0,1] \\ |s-t|\leq h}} \sqrt{\Gamma(s,s) - 2\Gamma(s,t) + \Gamma(t,t)},$$

onde Γ é a covariância de X. Suponha que a integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(e^{-x^2}\right) dx$ seja convergente. Então, as trajetórias de X são contínuas $\mathbb{P}$-q.c.

No nosso caso, temos que, para $s, t \in [0,1]$,

$$Cov\left[W(.,s)\, W(.,t)\right] = \Gamma(s,t) = Cov\left[Z(.,s)\, Z(.,t)\right] = \min\{t,s\},$$

logo

$$\varphi(h) = \sup_{\substack{s,t\in[0,1] \\ |s-t|\leq h}} \sqrt{s - 2\min\{s,t\} + t} = \sup_{\substack{s,t\in[0,1] \\ |s-t|\leq h}} \sqrt{|t-s|} = \sqrt{h}.$$

Portanto

$$\int\limits_0^\infty \varphi\left(e^{-x^2}\right) dx = \int\limits_0^\infty \sqrt{e^{-x^2}} dx < \infty.$$

Pelo Teorema 1.4, W tem trajetórias contínuas $\mathbb{P}$-q.c.

Teorema 1.5 *O processo W é um processo de Wiener (movimento browniano gaussiano).*

Demonstração: Devemos provar que

1. A covariância $\Gamma(s,t) = \mathbb{E}\left[Z(.,t)\, Z(.,s)\right] = \min\{t,s\}$;

2. O processo $\{W(.,s) - W(.,t)\}$ tem distribuição gaussiana com média *zero* e variância $|t-s|$, $\forall s,t \in [0,1]$;

3. W tem incrementos independentes;

4. W tem trajetórias contínuas $\mathbb{P}$-$q.c.$

Os ítens (1) e (2) seguem imediatamente do Lema 1.2 e o ítem (4) foi provado acima. Vamos, então, provar o ítem (3):

Consideremos $u, v, s, t \in [0,1]$, tais que $u < v < s < t$. Então

$$\mathbb{E}\left[\left(W(.,v) - W(.,u)\right)\left(W(.,t) - W(.,s)\right)\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[W(.,v)\,W(.,t) - W(.,v)\,W(.,s) - W(.,u)\,W(.,t) + W(.,u)\,W(.,s)\right] =$$

$$= v - v - u - u = 0.$$

□

Finalmente, vamos mostrar que a convergência da sequência $\{Z_n(.,t) : n \in \mathbb{N}\}$ se dá uniformemente em t para $W(.,t)$ $\mathbb{P}$-$q.c.$ Para isso, utilizamos a seguinte lema:

Lema 1.6 *Seja $t \in [0,1]$ fixo e seja $\{t_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência em $[0,1]$ tal que*

(1) t_n converge para t;

(2) $\delta_n = |t_n - t|$ satisfaz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n^{1/2} < \infty$.

Então, $Z_n(.,t_n) \to W(.,t)$ $\mathbb{P}$-$q.c.$.

Demonstração: Fixado $n \in \mathbb{N}$, suponhamos que $t_n \leq t$. Então, pela desigualdade de Chebyshev,

$$\mathbb{P}\left[\left\{w \in \Omega : |Z_n(w,t_n) - Z_n(w,t)| > \delta_n^{1/4}\right\}\right] \leq \left(\frac{1}{\delta_n^{1/4}}\right)^2 \mathbb{E}\left[\left(Z_n(w,t_n) - Z_n(w,t)\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\delta_n^{1/2}}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k(.)\,S_k(t_n) - \sum_{k=1}^{n} X_k(.)\,S_k(t)\right)^2\right] = \frac{1}{\delta_n^{1/2}}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k(.)\int_{t_n}^{t} h_k(s)\,ds\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\delta_n^{1/2}}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k(.)\int_0^1 I_{[t_n,t]}(s)\,h_k(s)\,ds\right)^2\right] = \frac{1}{\delta_n^{1/2}}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1 I_{[t_n,t]}(s)\,h_k(s)\,ds\right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta_n^{1/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 I_{[t_n,t]}(s)\, h_k(s)\, ds \right)^2 = \frac{1}{\delta_n^{1/2}} \delta_n = \delta_n^{1/2}.$$

Notemos que, se $t_n \geq t$, o resultado é análogo, logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{ |Z_n(w,t_n) - Z_n(w,t)| \geq \delta_n^{1/4} \right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{1/2} < \infty.$$

Pelo Lema de Borel-Cantelli obtemos

$$|Z_n(.,t_n) - Z_n(.,t)| \to 0 \ \mathbb{P}\text{-}q.c. \text{ quando } n \to +\infty.$$

Desde que, para todo $w \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |Z_n(w,t_n) - W(w,t)| &= |Z_n(w,t_n) - Z_n(w,t) + Z_n(w,t) - W(w,t)| \leq \\ &\leq |Z_n(w,t_n) - Z_n(w,t)| + |Z_n(w,t) - W(w,t)|, \end{aligned}$$

segue que

$$|Z_n(.,t_n) - W(.,t)| \to 0 \ \mathbb{P}\text{-}q.c.$$

□

Teorema 1.7 *(convergência uniforme em t)*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} |Z_n(.,t) - W(.,t)| = 0 \ \mathbb{P}\text{-}q.c.,$$

isto é, $Z_n(w,t)$ converge uniformemente em t para $W(w,t)$ para quase todo $w \in \Omega$.

Demonstração: Vamos supor que a convergência não é uniforme $\mathbb{P}$-$q.c.$, ou seja, que existe um conjunto $\Delta \in \mathcal{F}$, com $\mathbb{P}[\Delta] > 0$ tal que $Z_n(w,t)$ não converge uniformemente em t para $Z(w,t)$ se $w \in \Delta$. Então, existe $\varepsilon = \varepsilon(w) > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos achar um $j \geq n$ tal que

$$|Z_j(w, t_j) - W(w, t_j)| > \varepsilon$$

para algum $t_j \in [0,1]$ e $w \in \Delta$. Assim, obtemos uma subsequência $\{Y_j\}$ de $\{Z_n\}$ e uma sequência $\{t_j\} \subset [0,1]$ tal que

$$(1) \qquad |Y_n(w, t_n) - W(w, t_n)| > \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}, \forall w \in \Delta.$$

Desde que o intervalo $[0,1]$ é compacto, a sequência $\{t_n\}$ admite uma subsequência convergente no $[0,1]$ que também denotamos por $\{t_n\}$. Seja $\tau = \lim_{n \to \infty} t_n$. Definimos

$$\delta_n = |\tau - t_n|, n \geq 1.$$

Ao tomarmos qualquer enumeração da sequência $\{t_n\}$, tomamos outra subsequência $\{t_{n_k}\}$ com

$$n_k = \inf\left\{n \in \mathbb{N} : |\tau - t_n| < (1/k)^4\right\}.$$

Desta forma, a subsequência $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ é tal que

$$\begin{array}{rcl} t_{n_k} & \to & \tau \quad \text{e} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{n_k}^{1/2} & \leq & \sum_{k=1}^{\infty} (1/k)^2 < \infty. \end{array}$$

Pelo Lema 1.6, $Z_{n_k}(., t_{n_k}) \to W(., \tau)$ $\mathbb{P}$-*q.c.* Além disso, como $W(w, .)$ é contínua $\mathbb{P}$-*q.c.* segue que, a menos de um conjunto de medida nula, $W(w, t_{n_k}) \to W(w, \tau)$.

Então temos que, a menos de um conjunto de medida nula, dado $\varepsilon > 0$ e $w \in \Omega$, existe um $k_0(\varepsilon, w) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq k_0(\varepsilon, w)$,

$$\begin{aligned} |Y_{n_k}(w, t_{n_k}) - W(w, t_{n_k})| &= |Y_{n_k}(w, t_{n_k}) - W(w, \tau) + W(w, \tau) - W(w, t_{n_k})| \leq \\ &\leq |Y_{n_k}(w, t_{n_k}) - W(w, \tau)| + |W(w, \tau) - W(w, t_{n_k})| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Observe que k_0 muda conforme o w que tomamos, mas sempre vai existir um, o que contradiz a expressão (1). $\square$

Corolário 1.8 *(Convergência uniforme em (w,t)) Dado $\delta > 0$, existe um conjunto $\Omega' \subset \Omega$ com $\mathbb{P}(\Omega') > 1 - \delta$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{t\in[0,1]\\ w\in\Omega'}} |Z_n(w,t) - W(w,t)| = 0,$$

isto é, $Z_n(w,t)$ converge uniformemente para $W(w,t)$ em $\Omega' \times [0,1]$.

Demonstração: Pelo Teorema anterior, a sequência de funções $\sup_{t\in[0,1]} |Z_n(w,t) - W(w,t)|$ converge para zero $\mathbb{P}$-*q.c.* Pelo Teorema de Egorov, dado $\delta > 0$, existe $\Omega' \subset \Omega$, com $\mathbb{P}(\Omega') > 1 - \delta$ tal que

$$\sup_{t\in[0,1]} |Z_n(w,t) - W(w,t)| \to 0$$

uniformemente em Ω'. $\square$

1.2 Medida de Wiener

Consideremos o espaço $C_0[0,1]$ com a norma $\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Então, temos que $d(f,g) = \|f-g\|$ é uma distância em $C_0[0,1]$ e define a topologia da convergência uniforme. Definimos a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(C_0[0,1])$ de $C_0[0,1]$ como a σ-álgebra gerada pelos abertos desta topologia.

Vamos definir a medida de Wiener no espaço $(C_0[0,1], \mathcal{B}(C_0[0,1]))$. Para isso, escrevemos:

$$\begin{array}{rcl} W: \Omega & \to & C_0[0,1] \\ w & \mapsto & W(w,.) \end{array}$$

Podemos ver claramente que W é uma variável aleatória sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. A medida de Wiener é a probabilidade induzida $\mu = Z_* \mathbb{P}$ sobre $(C_0\,[0,1]\,, \mathcal{B}\,(C_0\,[0,1]))$.

Capítulo 2

Espaços de Wiener

Neste Capítulo, estabelecemos uma isometria entre os espaços de Wiener Abstratos $(i, H_{CM}, C_0[0,1])$ e (i, l_2, V), onde H_{CM} é o espaço denominado Cameron-Martin e V é um subconjunto de $\mathbb{R}^{\infty}$. Para isso, estudamos primeiro uma caracterização de H_{CM} de forma a estabelecermos uma isometria ϕ_1 entre este e o espaço l_2 das sequências quadrado somáveis. Depois mostramos que a medida de Gauss, a ser definida, é invariante em relação à isometria ϕ_1. Finalmente, estudamos cada um dos espaços de Wiener acima e chegamos à isometria entre eles.

2.1 Caracterização do Cameron Martin

Consideremos o espaço $H_{CM} \subset C_0[0,1]$ de todas as funções $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ absolutamente contínuas tais que $f(0) = 0$ e a derivada f' está em $L^2 = L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$, onde m é a medida de Lebesgue. Tomemos em H_{CM} o produto interno $<,>_{H_{CM}}$ dado pela integral

$$< f, g >_{H_{CM}} = \int_0^1 f'(s)\, g'(s)\, ds.$$

Com este produto, H_{CM} é um espaço de Hilbert separável (Kuo, pag. 88). Sej $\{h_n : n \geq 1\}$ uma base ortonormal de L^2. Como f' está em L^2, pela identidade c

Parseval, existe uma única sequência $\{a_n\} \in l_2$ tal que

$$f'(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k h_k(t)$$

com convergência no L^2.

Desde que a convergência no L^2 implica em convergência no L^1, segue da Proposição 3.4 do Apêndice 1, que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \sum_{k=1}^{n} a_k h_k(s)\, ds = \int_0^t f'(s)\, ds = f(t)$$

uniformemente em t. Ou seja, existe uma única sequência $\{a_n\} \in l_2$ tal que

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^t h_k(s)\, ds.$$

Por outro lado, se tomarmos uma sequência $\{a_n\} \in l_2$, existe uma única função $g \in L^2$ tal que

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k h_k(t)$$

com convergência no L^2. Novamente pela Proposição 3.4, temos

$$\int_0^t g(s)\, ds = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \sum_{k=1}^{n} a_k h_k(s)\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^t h_k(s)\, ds$$

com convergência uniforme em t. Logo, existe uma única função f absolutamente contínua, com $f(0) = 0$ tal que

$$f(t) = \int_0^t g(s)\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^t h_k(s)\, ds.$$

Com isso, obtemos a seguinte caracterização do espaço de Cameron Martin (H_{CM}):

Proposição 2.1 *Seja* $\{h_n : n \geq 1\}$ *uma base ortonormal de* L^2. *Uma função* $f \in C_0[0,1]$ *estará em* H_{CM} *se e somente se existir uma sequência* $\{a_n\} \in l_2$ *tal que*

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^t h_k(s)\,ds$$

com convergência uniforme em t.

Podemos, então associar a f uma função $\phi_1 : H_{CM} \to l_2$, definida por

$$\phi_1(f) = (a_1, a_2, a_3, ...) \in l_2.$$

Teorema 2.2 *A função* ϕ_1 *estabelece uma isometria entre os espaços de Hilbert* H_{CM} *e* l_2.

Demonstração: Sejam $f, g \in H_{CM}$. Tomamos as sequências $\{a_n\}, \{b_n\} \in l_2$ tais que

$$f'(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k h_k(t)$$

e

$$g'(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k h_k(t)$$

com convergência no L^2. Utilizando a identidade de Parseval, obtemos:

$$< f, g >_{H_{CM}} = \int_0^1 f'(s)\, g'(s)\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = < \{a_n\}, \{b_n\} >_{l_2} = < \phi_1(f), \phi_1(g) >_{l_2}.$$

□

2.2 Medida de Gauss

Nesta seção, mostramos que a medida de Gauss é invariante em relação à isometria $\phi_1 : H_{CM} \to l_2$. Antes, apresentamos algumas definições clássicas de probabilidade cilíndrica.

Consideremos um espaço de Hilbert H separável, infinito dimensional, com produto interno $<,>_H$ e norma $|.|_H$. Seja $\mathcal{P}(H)$ a classe de todas as projeções ortogonais P com imagem de dimensão finita.

Os conjuntos da forma:

$$\mathcal{C}_P = \left\{P^{-1}(B) : B \text{ Boreliano na imagem de } P\right\}$$

são chamados cilindros de dimensão finita. A classe dos cilindros de H é definida por

$$\mathcal{C}_H = \bigcup_{P \in \mathcal{P}(H)} \mathcal{C}_P.$$

Observemos que $\mathcal{C}_H$ é álgebra, mas não é uma σ-álgebra. Para todo $P \in \mathcal{P}(H)$, a classe $\mathcal{C}_P$ consiste nos conjuntos:

$$C = \{h \in H : (< h, h_1 >_H, ... < h, h_k >_H) \in F\},$$

onde $\{h_1, ..., h_k\} \subset P(H), F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ e $k \geq 1$. Os elementos $\{h_1, ..., h_k\}$ podem ser tomados como uma base ortonormal na imagem de P.

Definição 2.1: Uma probabilidade cilíndrica n sobre $(H, \mathcal{C}_H)$ é uma função de conjunto $n : \mathcal{C}_H \to [0,1]$ finitamente aditiva, tal que para todo $P \in \mathcal{P}(H)$, a restrição n_P de n sobre $(P(H), \mathcal{B}(P(H)))$ é σ-aditiva (probabilidade).

Uma forma bastante interessante de caracterizar uma probabilidade cilíndrica é o funcional característico cilíndrico:

Definição 2.2: Seja $n : \mathcal{C}_H \to [0,1]$ uma probabilidade cilíndrica sobre $(H, \mathcal{C}_H)$. A função $\psi : H \to \mathbb{C}$, definida por

$$\psi(h) = \int_H \exp\left(i < h, h_1 >_H\right) n(dh_1) \quad ; \quad h \in H$$

é denominada funcional característico cilíndrico.

Observação 2 *A integral na definição de ψ está bem definida, pois o integrando é uma função $\mathcal{C}_P$-mensurável para qualquer $P \in \mathcal{P}(H)$, tal que $h \in P(H)$. Basicamente, a mesma relação entre uma probabilidade e uma função característica é estabelecida entre uma probabilidade cilíndrica e seu funcional característico cilíndrico, como mostra o Teorema seguinte:*

Teorema 2.3 (Kallianpur, pag.59) *(a) Seja n uma probabilidade cilíndrica em $(H, \mathcal{C}_H)$ e seja ψ o funcional característico cilíndrico de n. Então:*

(i) $\psi(-h) = \overline{\psi(h)}$ e $\psi(0) = 1$;

(ii) ψ é definido positivo, isto é

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_i \overline{a_j} \psi(h_i - h_j) \geq 0$$

para $h_1, ..., h_k \in H$, $a_i, ...a_k \in \mathbb{C}$ e $k \geq 1$. Aqui, $\overline{a_j}$ é o complexo conjugado de a_j;

(iii) A restrição de ψ a qualquer subespaço H_1 finito-dimensional de H é contínua (na topologia relativa em H_1).

(b) Inversamente, se ψ é qualquer função de H em $\mathbb{C}$ satisfazendo (i), (ii), (iii) acima, então existe uma única probabilidade cilíndrica n em $(H, \mathcal{C}_H)$ tal que ψ é seu funcional característico cilíndrico.

Definição 2.3: A única probabilidade cilíndrica μ_H sobre $(H, \mathcal{C}_H)$ tal que

$$\psi(h) = \exp\left(-\frac{1}{2}|h|_H^2\right) \quad ; \quad h \in H$$

é denominada medida de Gauss.

A seguir, vamos mostrar que a isometria $\phi_1 : H_{CM} \to l_2$ é invariante em relação à medida de Gauss.

Para todo cilindro $C \in \mathcal{C}_{H_{CM}}$, existe $P \in \mathcal{P}(H_{CM})$ tal que

$$C = \{h \in H_{CM} : (< h, h_1 >_{H_{CM}}, ..., < h, h_k >_{H_{CM}}) \in F\},$$

onde $\{h_1, ..., h_k\} \subset P(H_{CM}), F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ e $k \geq 1$. Desde que ϕ_1 é uma isometria, obtemos

$$C = \{h \in H_{CM} : (< \phi_1(h), \phi_1(h_1) >_{l_2}, ..., < \phi_1(h), \phi_1(h_k) >_{l_2}) \in F\}.$$

Assim

$$\phi_1(C) = \{a \in l_2 : (< a, b_1 >_{l_2}, ..., < a, b_k >_{l_2}) \in F\},$$

onde $a = \phi_1(h)$ e $b_k = \phi_1(h_k)$.

De maneira análoga, podemos mostrar que todo cilindro do l_2 pode ser transformado em um cilindro do H_{CM} via a isometria ϕ_1. Desta forma, ϕ_1 estabelece uma transformação bijetora entre os cilindros de H_{CM} e l_2.

Consideremos agora as medidas de Gauss $\mu_{H_{CM}}$ sobre $(H_{CM}, \mathcal{C}_{H_{CM}})$ e μ_{l_2} sobre $(l_2, \mathcal{C}_{l_2})$. A imagem de $\mu_{H_{CM}}$ sobre $(l_2, \mathcal{C}_{l_2})$ através de ϕ_1 é dada por

$$\left((\phi_1)_* \mu_{H_{CM}}\right)(E) = \mu_{H_{CM}}\left(\phi_1^{-1}(E)\right) \ ; \ E \in \mathcal{C}_{l_2}$$

e a imagem de μ_{l_2} sobre $(H_{CM}, \mathcal{C}_{H_{CM}})$ através de ϕ_1^{-1}, é dada por

$$\left(\left(\phi_1^{-1}\right)_* \mu_{l_2}\right)(C) = \mu_{l_2}(\phi_1(C)) \ ; \ C \in \mathcal{C}_{H_{CM}}.$$

Lema 2.4 *As seguintes relações são válidas:*

(i) Para todo $C \in \mathcal{C}_{H_{CM}}$, temos que

$$\mu_{H_{CM}}(C) = \mu_{l_2}(\phi_1(C));$$

(ii) Para todo $E \in \mathcal{C}_{l_2}$, temos que

$$\mu_{l_2}(E) = \mu_{H_{CM}}\left(\phi_1^{-1}(E)\right).$$

Logo, temos que $\left((\phi_1)_* \mu_{H_{CM}}\right) = \mu_{l_2}$ e $\left(\left(\phi_1^{-1}\right)_* \mu_{l_2}\right) = \mu_{H_{CM}}$, ou seja, ϕ_1 é invariante em relação à medida de Gauss.

Demonstração: Vamos provar a parte (ii). Para todo $a \in l_2$, seja

$$\begin{aligned}
\psi(a) &= \int_{l_2} \exp\left(i < a, b >_{l_2}\right)\left((\phi_1)_* \mu_{H_{CM}}\right)(db) = \\
&= \int_{l_2} \exp\left(i < \phi_1^{-1}(a), \phi_1^{-1}(b) >_{H_{CM}}\right)\left((\phi_1)_* \mu_{H_{CM}}\right)(db).
\end{aligned}$$

Denotemos por $h := \phi_1^{-1}(a)$. Segue do Teorema da medida induzida que

$$\begin{aligned}
\psi(a) &= \int_{H_{CM}} \exp\left(i < h, h_1 >_{H_{CM}} \mu_{H_{CM}}(dh_1)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}|h|^2_{H_{CM}}\right) = \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}|\phi_1(h)|^2_{l_2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}|a|^2_{l_2}\right).
\end{aligned}$$

Desde que $\left((\phi_1)_* \mu_{H_{CM}}\right)$ tem funcional característico cilíndrico dado por

$$\psi(a) = \exp\left(-\frac{1}{2}|a|^2_{l_2}\right),$$

concluímos que $\left((\phi_1)_* \mu_{H_{CM}}\right)$ corresponde à medida de Gauss no $(l_2, \mathcal{C}_{l_2})$. A parte (i) prova-se da mesma maneira. □

2.3 Espaço de Wiener Abstrato

Seja H um espaço de Hilbert infinito dimensional, separável, com produto interno $<,>_H$ e norma $|.|_H$ e seja $\mathcal{P}(H)$ a classe de todas as projeções ortogonais P com imagem de dimensão finita.

Definição 2.4: Uma semi-norma $|.|_1^H$ em H é denominada mensurável se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(H)$ tal que

$$\mu_H \left\{ h \in H : |P(h)|_1^H > \varepsilon \right\} < \varepsilon \ ; \ \forall P \perp P_\varepsilon \, , \, P \in \mathcal{P}(H) \, .$$

Observe que, se $\dim(H) = \infty$, então, $|.|_H$ não é uma norma mensurável.

Lema 2.5 (Kuo, pag. 61) *Seja $\|.\|$ uma semi-norma mensurável. Então, existe uma constante c tal que $\|h\| \leq c\,|h|_H \, , \forall h \in H$.*

Em vista do Lema 2.5, qualquer semi-norma mensurável é mais fraca que a norma $|\cdot|_H$.

Dada $|.|_1^H$ uma seminorma mensurável, denotaremos por B o completamento de H em relação a esta seminorma.

Sejam H' e B' os duais de H e B, respectivamente. Como H é Hilbert, identificamos $H' \equiv H$. Observemos que cada elemento $y \in B'$ pode então ser interpretado como um elemento de H, ou seja, podemos mergulhar B' em H. Assim definimos

$$\mu_B \{x \in B : (y_1(x), ..., y_n(x)) \in F\} = \mu_H \{h \in H : (< y_1, h >_H, ..., < y_n, h >_H) \in F\} \, ,$$

onde $y_k \in B'$, $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e $n \in \mathbb{N}$. Um conjunto da forma $\{x \in B : (y_1(x), ..., y_n(x)) \in F\}$ é chamado cilindro em B. Seja R_B a coleção de cilindros em B.

Teorema 2.6 (Kuo, pags. 63 e 74) *A função de conjunto μ_B é σ-aditiva na σ-álgebra gerada por R_B. Além disso, temos que $\sigma(R_B) = \mathcal{B}(B)$.*

Ao denotarmos por $i : H \to B$ a injeção canônica, obtemos o espaço de Wiener abstrato (i, H, B).

2.3.1 O Espaço de Wiener Clássico

Vamos tomar o espaço H_{CM} com a seguinte norma:

$$|f|_1^{H_{CM}} = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| .$$

Então, $|.|_1^{H_{CM}}$ é mais fraca que $|.|_{H_{CM}}$. De fato, se $f \in C$, então, para todo $0 \leq t \leq 1$,

$$|f(t)| = \left| \int_0^t f'(s)\, ds \right| \leq \int_0^t |f'(s)|\, ds \leq \int_0^1 |f'(s)|\, ds \leq |f|_{H_{CM}} .$$

Lema 2.7 (Kuo, pag. 91) $|f|_1^{H_{CM}}$ *é uma norma mensurável sobre* H_{CM}.

O complemento do espaço de Cameron Martin em relação à norma $|.|_1^{H_{CM}}$ corresponde ao espaço $C_0[0,1]$.

De fato, seja A_n o conjunto das funções $x \in C_0[0,1]$ tais que x toma valores racionais em $k/2^n$, $n \in \mathbb{N}, k = 1, ...2^n$, e é linear entre estes pontos binários. Seja $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Então, A é denso em $C_0[0,1]$ e, consequentemente, H_{CM} é denso em $C_0[0,1]$, uma vez que $A \subset H_{CM}$.

Ao interpretarmos um elemento $y \in C_0'$ como um elemento de $H_{CM}' \equiv H_{CM}$, podemos definir uma função de conjunto

$$\mu_{C_0} \{g \in C_0[0,1] : (y_1(g), ..., y_n(g)) \in E\} =$$

$$= \mu_{H_{CM}} \{f \in H_{CM} : (< f, y_1 >_{H_{CM}}, ..., < f, y_n >_{H_{CM}}) \in E\} ,$$

onde $y_k \in C_0'$ para $k = 1, ..., n$ e $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Os conjuntos $\{g \in C_0[0,1] : (y_1(g), ...y_n(g)) \in E\}$ são chamados de cilindros em $C_0[0,1]$. Denotamos por R_{C_0} a coleção dos cilindros de

$C_0[0,1]$.

Pelo Teorema 2.6, a σ-álgebra gerada por R_{C_0} coincide com a σ-álgebra de Borel de $C_0[0,1]$ e μ_{C_0} estende-se a uma probabilidade sobre $(C_0[0,1], \mathcal{B}(C_0[0,1]))$, que coincide com a medida de Wiener. Com isso, obtemos o Espaço de Wiener Clássico $(i, H_{CM}, C_0[0,1])$, onde $i : H_{CM} \to C_0[0,1]$ é a injeção canônica.

Proposição 2.8 *As funções $\{S_n, n \geq 1\}$ definidas no Capítulo 1 formam uma base de Schauder de funções absolutamente contínuas para o espaço $C_0[0,1]$.*

Demonstração: Observemos que, por construção, $S_n = \displaystyle\int h_n(s)\,ds$ é uma base ortonormal do espaço de Cameron-Martin. Portanto, todo $h \in H_{CM}$ pode ser escrito como

$$h = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} a_j S_j,$$

onde $a_j =< h, S_n >_{H_{CM}}= \int\limits_{[0,1]} h'.h_n dx$.

Como a inclusão $i : H_{CM} \to C_0[0,1]$ é contínua (nas respectivas topologias), temos que

$$i(h) = i\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} a_j S_j\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} a_j i(S_j) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} a_j S_j,$$

ou seja $ger\{S_j\} \subset H_{CM}$ é denso na topologia da convergência uniforme.

Como $H_{CM} \subset C_0[0,1]$ é denso na topologia da convergência uniforme, concluímos que S_n é base de Schauder em $C_0[0,1]$. $\square$

Observação 3 *No caso de base trigonométrica, por exemplo, se $f \in C_0[0,1]$ for absolutamente contínua, a sequência de polinômios trigonométricos que converge uniformemente para f é dada pela série de Fourier da f. Mas, se f não for absolutamente contínua, essa sequência de polinômios trigonométricos pode não ser a série de Fourier da f.*

2.3.2 O Espaço de Wiener (i, l_2, V)

Seja $\{h_n : n \geq 1\}$ uma base ortonormal de $L^2 = L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$ e sejam $\{S_n, n \geq 1\}$ as funções de Schauder definidas no Capítulo 1.

Pela Proposição 2.1, para toda sequência $\{a_n\} \in l_2$, temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t) \quad ; \quad t \in [0,1]$$

converge uniformemente em t. Assim, definimos a norma

$$|\{a_k\}|_1^{l_2} = \sup_{t \in [0,1]} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t) \right|.$$

Desde que a isometria $\phi_1 : H_{CM} \to l_2$ é invariante em relação à medida de Gauss e a norma $|.|_1^{H_{CM}}$ é mensurável, obtemos que a norma $|.|_1^{l_2}$ também é mensurável. Denotamos por $V \subset \mathbb{R}^\infty$ o completamento de l_2 em relação à norma $|.|_1^{l_2}$, ou seja

$$V = \left\{ (a_1, a_2, ...) \in \mathbb{R}^\infty : \sup_{t \in [0,1]} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t) \right| < \infty \right\}.$$

Definimos, então, a função de conjunto:

$$\mu_V \{x \in V : (y_1(x), ..., y_n(x)) \in F\} = \mu_{l_2} \{a \in l_2 : (< y_1, a >_{l_2}, ..., < y_n, a >_{l_2}) \in F\},$$

onde $y_k \in V'$, $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e $n \in \mathbb{N}$. Um conjunto da forma $\{x \in N : (y_1(x), ..., y_n(x)) \in F\}$ é chamado de cilindro em V. Denotamos por R_V a coleção dos cilindros em V.

Novamente pelo Teorema 2.6, $\sigma(R_V) = \mathcal{B}(V)$ e μ_V estende-se a uma probabilidade sobre $(V, \mathcal{B}(V))$, onde $\mathcal{B}(V)$ é a σ-álgebra de Borel de V.

Obtemos dessa forma o Espaço de Wiener Abstrato (i, l_2, V), onde $i : l_2 \to V$ é a injeção canônica.

2.4 Isometria entre os Espaços de Wiener

Vamos estabelecer uma isometria $\phi : C_0[0,1] \to V$. Pela Proposição 2.8, as funções $\{S_n, n \geq 1\}$ formam uma base de Schauder para o espaço $C_0[0,1]$. Logo, para toda $f \in C_0[0,1]$, existe uma sequência $\{a_n\}$ em $\mathbb{R}^\infty$ que satisfaz:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t)\,;\; t \in [0,1]$$

com convergência uniforme em t, ou seja, a sequência $\{a_n\}$ está em V.

Por outro lado, dado um elemento $\{a_n\} \in V$, existe uma função $f \in C_0[0,1]$ tal que a relação acima é válida. Assim, podemos estender a isometria ϕ_1 para uma função $\phi : C_0[0,1] \to V$ tal que

$$\phi(f) = (a_1, a_2, ...) \in V.$$

Observe que, para toda $f \in C_0[0,1]$,

$$\begin{aligned} |f|_1^{H_{CM}} &= \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = \sup_{t\in[0,1]} \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t)\right| = |\{a_k\}|_1^{l_2} = \\ &= |\phi(f)|_1^{l_2}. \end{aligned}$$

Com isso, estabelecemos o seguinte Teorema:

Teorema 2.9 *A transformação $\phi : C_0[0,1] \to V$ é uma isometria.*

Ao restringirmos ϕ ao espaço de Cameron Martin H_{CM}, obtemos a isometria $\phi_1 : H_{CM} \to l_2$. Além disso, temos que

$$\mu_{C_0}\{f \in C_0[0,1] : (y_1(f), ...y_n(f)) \in F\} =$$

$$= \mu_{H_{CM}}\{g \in H_{CM} : (< y_1, g >_{H_{CM}}, ..., < y_n, g >_{H_{CM}}) \in F\} =$$

$$= \mu_{l_2}\{b \in l_2 : (< z_1, b >_{l_2}, ..., z_n, b >_{l_2}) \in F\} =$$

$$= \mu_V \{a \in N : (z_1(a), ..., z_n(a)) \in F\},$$

onde $y_k \in C_0'$, $z_k \in V'$ para $k = 1, ...n$, $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e $n \in \mathbb{N}$. Com isso, obtemos a seguinte Proposição:

Proposição 2.10 *As seguintes relações são válidas:*

(*i*) *Para todo* $C \in \mathcal{B}(C_0[0,1])$, *temos*

$$\mu_{C_0}(C) = \mu_V(\phi(C));$$

(*ii*) *Para todo* $E \in \mathcal{B}(V)$, *temos*

$$\mu_V(E) = \mu_{C_0}(\phi^{-1}(E)).$$

Logo, $((\phi)_* \mu_{C_0}) = \mu_V$ *e* $((\phi^{-1})_* \mu_V) = \mu_{C_0}$.

Demonstração: Temos que, para todo cilindro $C \in R_{C_0}$ vale

$$\mu_{C_0}(C) = \mu_V(\phi(C)).$$

Desde que a classe R_{C_0} é fechada por intersecção finita e gera a σ-álgebra $\mathcal{B}(C_0[0,1])$, concluímos que $((\phi^{-1})_* \mu_V) = \mu_{C_0}$. A parte (*ii*) pode ser demonstrada de forma análoga. $\square$

Capítulo 3

Apêndice 1

Neste Apêndice, encontram-se as definições e os resultados básicos da teoria de Probabilidade utilizados nos dois primeiros Capítulos.

3.1 Definições Básicas

Definição 3.1: Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Uma medida de probabilidade em $(\Omega, \mathcal{F})$ é uma aplicação $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ tal que:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,

2. $\mathbb{P}(\Omega)=1$,

3. Se $(A_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência disjunta em $\mathcal{F}$ então $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Chamamos a tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de espaço de probabilidade. Os conjuntos $F \in \mathcal{F}$ são chamados eventos. Dizemos que $\mathbb{P}(F)$ é a probabilidade do evento F acontecer. Em particular, quando $\mathbb{P}(F) = 1$, dizemos que F ocorre com probabilidade 1 ou quase certamente.

Lema 3.1 *(Borel-Cantelli) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e seja $(A_n)_{n\geq 1}$*

uma sequência em $\mathcal{F}$. Entao

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

Definição 3.2: Seja E um espaço métrico completo munido com a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ e seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Uma variável aleatória no espaço $(E, \mathcal{B})$ é uma função mensurável $X : \Omega \to E$.

Dada uma variável aleatória X, denotamos por σ_X a sub-σ-álgebra gerada por X, isto é: $\sigma_X = \{X^{-1}(B); B \in \mathcal{B}\}$.

Definição 3.3: Dizemos que os eventos $A, B \in \mathcal{F}$ são independentes se tivermos

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Se $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ são sub-σ-álgebras, então $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ são independentes se

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \forall A \in \mathcal{G}, \forall B \in \mathcal{H}.$$

Duas variáveis aleatórias X e Y são independentes se σ_X e σ_Y são independentes.

Definição 3.4: Seja $X : \Omega \to E$ uma variável aleatória. X induz uma medida $X_*\mathbb{P}$ em E definida por $X_*\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \forall B \in \mathcal{B}$. Dizemos que $X_*\mathbb{P}$ é a distribuição de X (ou lei de X).

Definição 3.5: Definimos a esperança (ou média) de X pela integral

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(w) d\mathbb{P}(w).$$

Teorema 3.2 *(Da medida induzida) Sejam $(X, \mathcal{E}_X, \mu)$ um espaço de medida e $(Y, \mathcal{E}_Y)$ um espaço mensurável. Se $\xi : X \to Y$ e $f : Y \to \mathbb{R}$ são mensuráveis, então*

$$\int_X (f o \xi)(x) d\mu(x) = \int_Y f(y) d(\xi_*\mu)(y).$$

Definição 3.6: Duas variáveis aleatórias X, X' são ditas iguais quase certamente se $\mathbb{P}(X \neq X') = 0$. Esta relação é claramente uma relação de equivalência e é denotada por $X = X'$ $\mathbb{P}$-*q.c.*.

Temos que

$$X = X' \ \mathbb{P}\text{-}q.c. \text{ e } Y = Y' \ \mathbb{P}\text{-}q.c. \Rightarrow \begin{cases} cX = cX' \ \mathbb{P}\text{-}q.c. \\ X + Y = X' + Y' \ \mathbb{P}\text{-}q.c. \\ XY = X'Y' \ \mathbb{P}\text{-}q.c. \end{cases}$$

Da mesma forma, se I é um conjunto enumerável e $X_i = X_i'$ $\mathbb{P}$-*q.c.* para todo $i \in I$, então

$$\sup_I X_i = \sup_I X_i' \ \mathbb{P}\text{-}q.c. \text{ e } \inf_I X_i = \inf_I X_i' \ \mathbb{P}\text{-}q.c..$$

Definição 3.7: Dizemos que uma sequência $(X_n)_{n \geq 1}$ de variáveis aleatórias converge quase certamente se

$$\limsup_n X_n = \liminf_n X_n \ \mathbb{P}\text{-}q.c..$$

Definição 3.8: Uma sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n \geq 1}$ converge em probabilidade para uma variável aleatória X se, dado $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Escrevemos $\mathbb{P}\text{-}\lim X_n = X$.

Proposição 3.3 *Toda sequência $(X_n)_{n \geq 1}$ de variáveis aleatórias que converge quase certamente, converge em probabilidade ao mesmo limite. Inversamente, de toda sequência $(X_n)_{n \geq 1}$ que converge em probabilidade, podemos extrair uma subsequência que converge quase certamente ao mesmo limite.*

Demonstração: Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias e seja X uma variável aleatória. Então:

(1) $X_n \to X$ $\mathbb{P}$-$q.c.$ $\Rightarrow$ $\mathbb{P}$-$\lim X_n = X$ desde que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\limsup_n \mathbb{P}\left(\{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) &\leq \mathbb{P}\left[\limsup_n \{|X_n - X| > \varepsilon\}\right] \leq \\
&\leq \mathbb{P}\left(\left\{-\varepsilon + \limsup_n X_n < X < \varepsilon + \liminf_n X_n\right\}^C\right) = 0.
\end{aligned}$$

(2) $\mathbb{P}$-$\lim X_n = X \Rightarrow \mathbb{P}$-$\lim (X_m - X_n) = 0$ qdo $m, n \to \infty$ desde que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\{|X_m - X_n| > \varepsilon\} \subset \left\{|X_m - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

e portanto

$$\mathbb{P}\left(|X_m - X_n| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(|X_m - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0 \text{ qdo } m, n \to \infty.$$

(3) $\mathbb{P}$-$\lim X_m - X_n = 0$ qdo $m, n \to \infty \Rightarrow X_{n_j} \to X$ $\mathbb{P}$-$q.c.$ e $\mathbb{P}$-$\lim X_n = X$ para alguma variável aleatória X e alguma subsequência (n_j). De fato, determinamos os termos dessa sequência passo a passo colocando $n_1 = 1$ e tomando para n_j o menor inteiro $N > n_{j-1}$ tal que

$$\mathbb{P}\left(|X_r - X_s| > \frac{1}{2^j}\right) < \frac{1}{3^j} \text{ se } r, s \geq N.$$

Segue então de

$$\sum_j \mathbb{P}\left(\left|X_{n_{j+1}} - X_{n_j}\right| > \frac{1}{2^j}\right) < \sum_j \frac{1}{3^j} < \infty$$

que a sequência $\left(X_{n_j}\right)_{j\geq 1}$ é convergente quase certamente. Além disso, se X denota seu limite, fazendo $n, j \to \infty$ em

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|X_n - X_{n_j}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\left|X_{n_j} - X\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

e usando a hipótese e (1), segue que $\mathbb{P}$-$\lim X_n = X$. $\square$

Definição 3.9: Dizemos que uma sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\geq 1}$ converge em L^p para X se

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] = 0.$$

Proposição 3.4 *Uma sequência de variáveis aleatórias integráveis* $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge em média* ($p = 1$) *para uma variável aleatória* X *se e somente se* $\int_A X_n \underset{n\to\infty}{\to} \int_A X$ *uniformemente em* A.

Demonstração: Temos, por um lado, que

$$\left|\int_A X_n - \int_A X\right| \leq \int_A |X_n - X| \leq \int |X_n - X|$$

e, por outro,

$$\int |X_n - X| = \left(\int_{A_n} X_n - \int_{A_n} X\right) - \left(\int_{A_n^C} X_n - \int_{A_n^C} X\right)$$

onde $A_n = \{X_n > X\}$. $\square$

Definição 3.10: Uma seqüência (f_n) de funções mensuráveis é dita convergente quase uniformemente a uma função f se para cada $\delta > 0$ existir um conjunto E_δ em X com $\mathbb{P}(E_\delta) < \delta$ tal que (f_n) converge uniformemente a f em $X \backslash E_\delta$.

Teorema 3.5 *(Egorov) Suponha que* $\mathbb{P}(X) < \infty$ *e que* (f_n) *é uma seqüência de funções reais mensuráveis que converge* $\mathbb{P}$*-q.c. em* X *a uma função real mensurável* f. *Então a seqüência* (f_n) *converge quase uniformemente a* f.

3.2 Variáveis Gaussianas

Teorema 3.6 *(Radon-Nikodyn) Seja* (X, Σ) *um espaço mensurável e sejam* ν *e* μ *duas medidas* σ*-finitas definidas em* Σ *tais que* $\nu << \mu$ *(*ν *é absolutamente contínua em relação* *a μ). Então, existe uma função Σ-mensurável positiva f tal que*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \ , \forall A \in \Sigma.$$

Além disso, a função f é unicamente determinada μ-quase certamente (a menos de um conjunto de medida μ nula). A função f é chamada de derivada de "Radon-Nikodyn" e denotada por

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Definição 3.11: Seja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ uma variável aleatória e seja $X_*\mathbb{P}$ sua distribuição em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Definimos a densidade (de probabilidade) de X como a derivada de Radon-Nikodyn de $X_*\mathbb{P}$ em relação à medida de Lebesgue λ:

$$p_X = \frac{d(X_*\mathbb{P})}{d\lambda}.$$

Observação 4 *Isto é possível se $X_*\mathbb{P} << \lambda$. Neste caso, $(X_*\mathbb{P})(A) = \int_A p_X d\lambda$, onde $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Definição 3.12: Uma variável aleatória X é chamada gaussiana (ou normal) se sua distribuição tiver densidade da forma

$$p_X(x) = p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}),$$

onde $\sigma > 0$ e m são constantes. Neste caso,

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} xp(x)dx = m$$

e

$$var(X) = \mathbb{E}\left[(X-m)^2\right] = \int_\mathbb{R} (x-m)^2 p(x)dx = \sigma^2.$$

Observação 5 *$var(X) :=$ variância de X.*

Definição 3.13: Dizemos que X está na classe de variáveis gaussianas com média m e variância σ^2.

NOTAÇÃO: $X \in N(m, \sigma^2)$.

No geral, a variável aleatória $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, ou seja $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$, é gaussiana $N(m, C)$ se

$$p(x) = \frac{\sqrt{\det C}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp(-\frac{1}{2}\langle C(x-m), (x-m)\rangle) = \frac{\sqrt{\det C}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp(-\frac{1}{2}\sum_{j,k}(x_j-m_j)c_{jk}(x_k-m_k))$$

onde $C = [c_{jk}]$ é uma matriz simétrica. Neste caso, $\mathbb{E}[X] = m$ e $C^{-1} = A = [a_{jk}]$ é a matriz covariante de X, isto é:

$$a_{jk} = \mathbb{E}\left[(X_j - m_j)(X_k - m_k)\right],$$

onde $m_j = \mathbb{E}[X_j]$.

Definição 3.14: Seja $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma variável aleatória. A função característica de X é definida por

$$\begin{aligned} \Phi_X : \ & \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \\ & u \longmapsto \mathbb{E}\left[e^{i\langle u\,,\,X\rangle}\right] = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle u\,,\,x\rangle} d\left(X_*\mathbb{P}\right)(x). \end{aligned}$$

Observação 6 $\mathbb{E}\left[e^{i\langle u\,,\,X\rangle}\right] = \int_{\Omega} e^{i\langle u\,,\,X\rangle} d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle u\,,\,X\rangle} d\left(X_*\mathbb{P}\right)(x)$.

Observação 7 *A função Φ_X depende somente da lei $X_*\mathbb{P}(x)$ da variável aleatória X. Além disso, ela determina unicamente a distribuição de X.*

Teorema 3.7 *Se $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é gaussiana $N(m, C)$, então*

$$\Phi_X(u) = e^{i\langle u\,,\,m\rangle - \frac{1}{2}\langle u\,,\,Cu\rangle}.$$

Demonstração: $\Phi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{i\langle u\,,\,X\rangle}\right] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle u\,,\,X\rangle} \frac{\sqrt{\det C}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\langle C(x-m)\,,\,(x-m)\rangle} dx.$ $\square$

Teorema 3.8 *Sejam* $X_1, ..., X_d : \Omega \to \mathbb{R}$ *variáveis aleatórias. Então, o vetor* $X = (X_1, ..., X_d) \in \mathbb{R}^d$ *é uma variável gaussiana se e somente se* $Y = \lambda_1 X_1 + ... + \lambda_d X_d \in \mathbb{R}$ *é gaussiana,* $\forall \lambda_1, ...\lambda_d \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $u \in \mathbb{R}$. Se $X = (X_1, ..., X_d)$ é gaussiana, então:

$$\begin{aligned}
\Phi_X(u\lambda_1, ..., u\lambda_d) &= \mathbb{E}\left[e^{iu(\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_d X_d)}\right] = e^{i\langle u\lambda\,,\,m\rangle - \frac{1}{2}\langle Cu\lambda\,,\,u\rangle} = \\
&= e^{iu\langle\lambda\,,\,m\rangle - \frac{1}{2}u^2\langle C\lambda\,,\,\lambda\rangle} = \Phi_Y(u),
\end{aligned}$$

onde $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_d)$ e $m = \mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X_1], ..., \mathbb{E}[X_d])$.

Portanto $Y = \lambda_1 X_1 + ... + \lambda_d X_d$ é gaussiana de média $\langle\lambda, m\rangle$ e variância $\sigma^2 = \langle C\lambda, \lambda\rangle$.

Inversamente, suponhamos Y normal com $\mathbb{E}[Y] = m_Y$ e $\mathbb{E}\left[(Y - m_Y)^2\right] = \sigma^2$. Então:

$$\lambda_Y(u) = \mathbb{E}\left[e^{iu(\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_d X_d)}\right] = e^{ium_Y - \frac{1}{2}u^2\sigma^2},$$

onde

$m_Y = \lambda_1 m_1 + ... + \lambda_d m_d; m_j = \mathbb{E}[X_j]$

$\sigma^2 = \mathbb{E}\left[\left(\sum\limits_{j=1}^{d} \lambda_j X_j - \sum\limits_{j=1}^{d} \lambda_j m_j\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum\limits_{j=1}^{d} \lambda_j (X_j - m_j)\right)^2\right] = \sum\limits_{i,j} \lambda_i \lambda_j c_{ij}$;

$c_{ij} = \mathbb{E}[(X_i - m_i)(X_j - m_j)]$.

Logo $\Phi_Y(u) = e^{iu\langle\lambda\,,\,m\rangle - \frac{1}{2}u^2\langle C\lambda\,,\,\lambda\rangle} = \Phi_X(u\lambda)$, onde $C = (c_{ij})$.

Portanto $X = (X_1, ..., X_d)$ é gaussiana $N(m, C)$. $\square$

Teorema 3.9 *Sejam* X *e* Y *variáveis aleatórias gaussianas. Então,* X *e* Y *são independentes se e somente se* $E[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = 0$.

Demonstração: Temos que provar que

$$\mathbb{P}(\{w : X\ (w) \in G_1 \text{ e } Y(w) \in G_2\}) = \mathbb{P}(\{X \in G_1\})\mathbb{P}(\{X \in G_2\}), \forall G_1, G_2 \subset \mathbb{R} \text{ mensuráveis.}$$

Consideremos a variável aleatória $Z(w) = (X, Y) \in \mathbb{R}^2$ e sejam
$m = \mathbb{E}[Z] = (\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y])$ e
$C = \begin{pmatrix} \sigma^2(x) & 0 \\ 0 & \sigma^2(y) \end{pmatrix}$ a matriz de covariância de Z.
Pelo teorema anterior, Z é gaussiana. Então

$$v \in \mathbb{R}^2 \mapsto p(v) = \frac{\sqrt{\det C^{-1}}}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle C^{-1}(v-m), (v-m)\rangle\right).$$

$$\mathbb{P}(\{w : Z(w) \in G_1 \times G_2\}) = Z_*\mathbb{P}(G_1 \times G_2) = \int_{G_1 \times G_2} p d\lambda \text{ , onde } d\lambda = dxdy.$$

Suponhamos $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$. Então, $m = 0$ e

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z \in G_1 \times G_2) &= \int_{G_1 \times G_2} \frac{\sqrt{\det C^{-1}}}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\langle C^{-1}v\,,\,v\rangle} dxdy = \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma(x)\sigma(y)} \int_{G_1 \times G_2} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2(x)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\sigma^2(y)}} dxdy = \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\sigma(x)} \int_{G_1} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2(x)}} dx\right)\left(\frac{1}{2\pi\sigma(y)} \int_{G_2} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\sigma^2(y)}} dy\right) = \\
&= \mathbb{P}[(X \in G_1)(Y \in G_2)].
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.10 *Seja $X_j : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma sequência de variáveis aleatórias gaussianas tal que $X_n \to X$ em probabilidade. Então, X é gaussiana.*

Demonstração: Temos que

$$\left|e^{i\langle u\,,\,x\rangle}-e^{i\langle u\,,\,y\rangle}\right|<\left|\langle u\,,\,x\rangle-\langle u\,,\,y\rangle\right|=\left|\langle u\,,\,x-y\rangle\right|\leq\|u\|\,\|x-y\|.$$

Assim, fixado $u\in\mathbb{R}^n-\{0\}$,

$$\mathbb{P}\left(\left\{w:\left|e^{i\langle u\,,\,X_n\rangle}-e^{i\langle u\,,\,X\rangle}\right|>\varepsilon\right\}\right)\leq\mathbb{P}\left(\left\{w:\|X_n-X\|>\frac{\varepsilon}{\|u\|}\right\}\right).$$

Como X_n converge em probabilidade para X, segue que $e^{i\langle u\,,\,X_n\rangle}$ converge em probabilidade para $e^{i\langle u\,,\,X\rangle}$. Pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, $e^{i\langle u\,,\,X_n\rangle}$ converge em L^1 para $e^{i\langle u\,,\,X\rangle}$, ou seja

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[e^{i\langle u\,,\,X_n\rangle}\right]=\mathbb{E}\left[e^{i\langle u\,,\,X\rangle}\right]\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\Phi_{X_n}=\Phi_X.$$

Logo

$$\Phi_X(u)=\lim_{n\to\infty}e^{i\langle u\,,\,m_n\rangle-\frac{1}{2}\langle C_n^{-1}u\,,\,u\rangle}=e^{i\langle u\,,\,\lim_{n\to\infty}m_n\rangle-\frac{1}{2}\langle\lim_{n\to\infty}C_n^{-1}u\,,\,u\rangle}.$$

Portanto, X é gaussiana com média $m=\lim_{n\to\infty}m_n$ e matriz de covariância dada por $C^{-1}=\lim_{n\to\infty}C_n^{-1}$. □

3.3 Esperança Condicional

Definição 3.15: Sejam $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espaço de probabilidade, X variável aleatória integrável e $\mathcal{A}\in\mathcal{F}$ sub-σ-álgebra. Definimos a esperança condicional $\mathbb{E}[X\mid\mathcal{A}]$ de X em relação a $\mathcal{A}$ como a variável aleatória (única $\mathbb{P}|_{\mathcal{A}}$-quase certamente) que satisfaz:

1. $\mathbb{E}[X\mid\mathcal{A}]$ é $\mathcal{A}$-mensurável,

2. $\int\limits_A \mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}]\, d\,\mathbb{P}|_{\mathcal{A}} = \int\limits_A X d\mathbb{P}$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

Proposição 3.11 *Dada* $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *existe uma única* $\widetilde{f} : \Omega \to \mathbb{R}$, $\widetilde{f} \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}|_{\mathcal{A}})$ *tal que*

$$\int\limits_A \widetilde{f}(x) d\,\mathbb{P}|_{\mathcal{A}}(x) = \int\limits_A f(x) d\mathbb{P}(x), \ \forall A \in \mathcal{A}.$$

Demonstração: (Existência)

Se $f \geq 0$, defina a medida $\mu_f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ por $\mu_f(A) = \int\limits_A f d\mathbb{P}$, $\forall A \in \mathcal{A}$. Então, $\mu_f << \mathbb{P}|_{\mathcal{A}}$.

Pelo Teorema de Radon-Nikodyn, existe $\dfrac{d\mu_f}{d\,\mathbb{P}|_{\mathcal{A}}} : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathcal{A}$-mensurável tal que

$$\mu_f(A) = \int\limits_A \frac{d\mu_f}{d\,\mathbb{P}|_{\mathcal{A}}}(x) d\,\mathbb{P}|_{\mathcal{A}}(x), A \in \mathcal{A}.$$

Tome

$$\widetilde{f} = \frac{d\mu_f}{d\,\mathbb{P}|_{\mathcal{A}}}.$$

(Unicidade) Seja $\widetilde{\widetilde{f}}$ tal que $\int\limits_A \widetilde{\widetilde{f}} d\,\mathbb{P}|_{\mathcal{A}} = \int\limits_A f d\mathbb{P} = \int\limits_A \widetilde{f} d\,\mathbb{P}|_{\mathcal{A}}$.

Então $\int\limits_A (\widetilde{\widetilde{f}} - \widetilde{f}) d\,\mathbb{P}|_{\mathcal{A}} = 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

Portanto $\widetilde{\widetilde{f}} = \widetilde{f}$, $\mathbb{P}|_{\mathcal{A}}$-quase certamente.

Para uma f em geral, tome $f_1, f_2 \geq 0$ tais que $f = f_1 - f_2$. Então, $\widetilde{f} = \widetilde{f_1} - \widetilde{f_2}$. □

Proposição 3.12 *A esperança condicional satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathcal{A}] = a\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{A}]$,

2. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}]] = \mathbb{E}[X]$,

3. $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}] = X$ *se* X *for* $\mathcal{A}$*-mensurável,*

4. $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}] = \mathbb{E}[X]$ *se* X *é independente de* $\mathcal{A}$*.,*

5. $\mathbb{E}[YX \mid \mathcal{A}] = Y.\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}]$ *se* Y *for* $\mathcal{A}$*-mensurável (. denota o produto interno usual em* $\mathbb{R}^n$*).*

Demonstração: (4) Se X é independente de $\mathcal{A}$, temos que, para todo $A \in \mathcal{A}$,

$$\int_A E[X \mid \mathcal{A}]\, d\,\mathbb{P}|_{\mathcal{A}} = \int_A X d\mathbb{P} = \int_\Omega X 1_A d\mathbb{P} = \int_\Omega X d\mathbb{P} \int_\Omega 1_A d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X]\, \mathbb{P}(A).$$

Logo, $\mathbb{E}[X]$ satisfaz as condições (1) e (2) da definição.

(5) Seja $Y = 1_A$, $A \in \mathcal{A}$. Então, para todo $G \in \mathcal{A}$,

$$\int_G Y\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}]\, d\mathbb{P} = \int_{G\cap A} \mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}]\, d\mathbb{P} = \int_{G\cap A} X d\mathbb{P} = \int_G YX d\mathbb{P}.$$

Logo, $Y\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}]$ satisfaz (1) e (2) na definição.

Similarmente, obtemos o resultado no caso geral, usando o fato de o operador linear $\mathbb{E}[. \mid \mathcal{A}] : L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}) \to L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}|_{\mathcal{A}}; \mathbb{R})$ ser contínuo. De fato:

Seja $f \geq 0$. Então $\mathbb{E}[f \mid \mathcal{A}] \geq 0$ e

$$||\mathbb{E}[f \mid \mathcal{A}]||_{L^1} = \int_\Omega |\mathbb{E}[f \mid \mathcal{A}]|\, d\mathbb{P} = \int_\Omega f d\mathbb{P} = ||f||_{L^1}.$$

No caso geral:

$f = f^+ - f^-$, com $f^+ = f \vee 0$ e $f^- = -(f \wedge 0)$. Logo

$$\begin{aligned} ||\mathbb{E}[f_1 - f_2 \mid \mathcal{A}]||_{L^1} &= ||\mathbb{E}[f_1 \mid \mathcal{A}] - \mathbb{E}[f_2 \mid \mathcal{A}]||_{L^1} \leq ||\mathbb{E}[f_1 \mid \mathcal{A}]||_{L^1} + ||\mathbb{E}[f_2 \mid \mathcal{A}]||_{L^1} = \\ &= ||f_1||_{L^1} + ||f_2||_{L^1} = ||f||_{L^1}. \end{aligned}$$

Portanto, no caso geral, o resultado segue aproximando-se f por funções simples. $\square$

Definição 3.16: Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita convexa se, $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \alpha$ tal que $f(y) \geq f(x) + \alpha(y - x)$.

Proposição 3.13 *(Desigualdade de Jensen) - Seja X uma variável aleatória real, integrável e seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então*

1. $\mathbb{E}\left[f\left(X\right)\right] \geq f\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)$,
2. $\mathbb{E}\left[f\left(X\right) \mid \mathcal{A}\right] \geq f\left(\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{A}\right]\right)$.

Demonstração: (1) Seja $m = \mathbb{E}\left[X\right]$. Então, $\exists \alpha$ tal que

$$f\left(X\right) \geq f\left(m\right) + \alpha\left(X - m\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[f\left(X\right)\right] \geq \mathbb{E}\left[f\left(m\right)\right] + \alpha\mathbb{E}\left[\left(X - m\right)\right] = f\left(m\right) = f\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right).$$

De fato,

$\mathbb{E}\left[f\left(m\right)\right] = \int\limits_{\Omega} f\left(m\right) d\mathbb{P} = f\left(m\right)\mathbb{P}\left(\Omega\right) = f\left(m\right) = f\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)$ e

$\mathbb{E}\left[X - m\right] = \int\limits_{\Omega} \left(X - m\right) d\mathbb{P} = \mathbb{E}\left[X\right] - m\mathbb{P}\left(\Omega\right) = 0.$

(2) Tomemos $m = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{A}\right]$. Existe uma variável aleatória α (dependente de m e, portanto $\mathcal{A}$-mensurável) tal que

$$f\left(X\right) \geq f\left(m\right) + \alpha\left(X - m\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[f\left(X\right) \mid \mathcal{A}\right] \geq \mathbb{E}\left[f\left(m\right) \mid \mathcal{A}\right] + \alpha\mathbb{E}\left[X - m \mid \mathcal{A}\right] = f\left(m\right).$$

De fato,

$\mathbb{E}\left[f\left(m\right) \mid \mathcal{A}\right] = f\left(m\right)$ e

$\mathbb{E}\left[X - m \mid \mathcal{A}\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{A}\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{A}\right] \mid \mathcal{A}\right] = 0.$ $\square$

Proposição 3.14 *O operador linear* $\mathbb{E}[. \mid \mathcal{A}] : L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}) \to L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}|_{\mathcal{A}}; \mathbb{R})$ *é contínuo,* $1 \leq p < \infty$.

Demonstração:

$$\|\mathbb{E}[f \mid \mathcal{A}]\|_{L^p}^p = \int_\Omega |\mathbb{E}[f \mid \mathcal{A}]|^p \, d\mathbb{P} \overset{*}{\leq} \int_\Omega \mathbb{E}[|f|^p \mid \mathcal{A}] \, d\mathbb{P} = \int_\Omega |f|^p \, d\mathbb{P} = \|f\|_{L^p}^p .$$

$*$ $|.|^p$ é convexa. □

Em particular, para $p = 2$:

Proposição 3.15 $\mathbb{E}[. \mid \mathcal{A}]$ *é a projeção ortogonal de* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R})$ *no subspaço fechado* $L^2 \ (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}|_{\mathcal{A}}; \mathbb{R})$.

Demonstração: $\mathbb{E}[. \mid \mathcal{A}]$ é projeção, pois $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}] \mid \mathcal{A}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}]$.

Logo, $\mathbb{E}[. \mid \mathcal{A}]$ é auto-adjunto em L^2 , ou seja,

$$\langle \mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}] \ , \ Y \rangle = \langle X \ , \ \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{A}] \rangle \iff \int_\Omega \mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}] \, Y d\mathbb{P} = \int_\Omega X \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{A}] \, d\mathbb{P}.$$

Além disso,

$$\operatorname{Im}(\mathbb{E}[. \mid \mathcal{A}]) = L^2$$

e tomando $\widetilde{X} = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}]$, temos que

$$\langle X - \widetilde{X}, f \rangle_{L^2} = 0, \forall f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}).$$

De fato, para $f = 1_A$, $A \in \mathcal{A}$, temos

$$\langle X - \widetilde{X} \ , \ f \rangle_{L^2} = \int_\Omega \left(X - \widetilde{X} \right) 1_A d\mathbb{P} = \int_A \left(X - \widetilde{X} \right) d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} - \int_A \widetilde{X} d\mathbb{P} = 0.$$

$\square$

3.4 Processos Aleatórios

Definição 3.17: Seja T um conjunto qualquer (em geral, $\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{N}$, Hilbert) e seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Um processo aleatório indexado por T com valores no espaço de estados $(E, \mathcal{E})$ é uma aplicação

$$\begin{aligned} X: \quad & (T \times \Omega) \to E \\ & (t, w) \mapsto X_t(w) \end{aligned}$$

tal que $X_t : \Omega \to E$ é variável aleatória mensurável $\forall t \in T$.

$X_{.}(w) : T \to E$ é chamada de trajetória de $w \in \Omega$.

Definição 3.18: Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ dois espaços de probabilidade. Então, os processos $X : T \times \Omega \to E$ e $X' : T \times \Omega' \to E$ são equivalentes (versão) se $\forall t_1, ..., t_n \in T$ e $\forall A_1, ..., A_n \in E$, tem-se

$$\mathbb{P}(\{X_{t_i} \in A_i, i = 1, ..., n\}) = \mathbb{P}'\left(\{X'_{t_i} \in A_i, i = 1, ..., n\}\right).$$

Definição 3.19: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Dizemos que os processos $X, X' : T \times \Omega \to E$ são modificações um do outro se $\mathbb{P}(\{X_t = X'_t\}) = 1$ para cada $t \in T$. Dizemos que X e X' são indistinguíveis se $\mathbb{P}(\{X_t = X'_t,\ \forall t \ \in T\}) = 1$.

Exemplo: $\Omega = [0, 1]$, com a medida de Lebesgue, $T = [0, 1]$, $X_t(w) = w$, $\forall t$ e

$$X'_t(w) = \begin{cases} w & se \quad t \neq w \\ 0 & se \quad t = w \end{cases}.$$

Então:

$\mathbb{P}(\{w : X_t(w) \neq X'_t(w)\}) = \mathbb{P}(\{t\}) = 0 \Rightarrow$ modificação.

$\mathbb{P}(\{X_t = X'_t,\ \forall t \in T\}) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.$ $\square$

Observação 8 *Indistinguível $\Rightarrow$ Modificaçào $\Rightarrow$ Versão.*

Definição 3.20: Sejam T e E espaços topológicos. Dizemos que $X : \Omega \times T \to E$ é contínua $\mathbb{P}$-quase certamente se $\mathbb{P}\left(\{w : t \mapsto X_t(w) \text{ é contínua }\}\right) = 1$.

Teorema 3.16 *(critério de Kolmogorov): Se $X : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ é tal que existem constantes $\alpha, \beta, K > 0$ com $\mathbb{E}\left[|X_{t+h} - X_t|^\alpha\right] < K|h|^{1+\beta}$ para todo $t, h > 0$, então X tem uma modificação contínua.*

Definição 3.21: Seja $X = \{X(t,w) : t \in T, w \in \Omega\}$ um processo gaussiano, ou seja, para todo conjunto finito $\{t_1, ..., t_n\} \subset T$, o vetor $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ é uma variável aleatória gaussiana. Dizemos que o processo X é separável se existir um conjunto enumerável $S \subset T$, denominado separante, e um conjunto $N(S) \in \mathcal{F}^\infty$, com $\mu(N(S)) = 0$ tal que, $\forall w \notin N(S), t \in T$ e $\varepsilon > 0$,

$$X(t,w) \in \overline{\{X(s,w) : s \in S \cap B(t,\varepsilon)\}}.$$

Isto significa que X_t é ponto limite de uma sequência no conjunto $\{X_s : s \in S \cap B(t,\varepsilon)\}$.

Em outras palavras, um processo X é separável se quase todas as suas trajetórias são "tão regulares "quanto sua restrição a um conjunto enumerável S escolhido convenientemente.

Observação 9 *O conjunto separante não é único. Além disso, um tal conjunto é necessariamente denso em T. De fato, $\overline{\{X_s : s \in S \cap B(t,\varepsilon)\}}$ é não-vazio para todo $w \notin N(S)$ e todo $t \in T$ somente sob essa condição.*

Definição 3.22: Dizemos que um processo $X : \{X(t,w) : t \in T, w \in \Omega\}$ é mensurável se a aplicação $(t,w) \mapsto X(t,w)$ é mensurável de $(T \times \Omega, \mathcal{T} \times \mathcal{F})$ em $\left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$.

3.4.1 Movimento Browniano

Proposição 3.17 *Dada uma medida de probabilidade μ em $\mathbb{R}$, existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e uma sequência de variáveis aleatórias reais independentes definidas* *em Ω, tal que $X_{n*}\mathbb{P} = \mu$ para todo n.*

Demonstração: Tome:

$\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ...,$

$\mathcal{F} = \sigma\left(\{cilindros\, finitos\}\right),$

$\mathbb{P}\left(A_1 \times ... \times A_k \times \mathbb{R} \times ...\right) = \mu\left(A_1\right)...\mu\left(A_k\right),$

$X_n\left((a_1, a_2, ..., a_n, ...)\right) = a_n.$

Pelo Teorema de extensão de Kolmogorov, existe uma única probabilidade $\mathbb{P}$ definida em $\mathcal{F}$ satisfazendo $X_{n*}\mathbb{P} = \mu$. $\square$

Como consequência, temos:

Proposição 3.18 *Seja H um espaço de Hilbert real separável. Então, existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e uma família $X(h)$, $h \in H$ de variáveis aleatórias em Ω tal que:*

O mapa $h \mapsto X(h)$ é linear

Para cada h, a variável aleatória $X(h)$ é gaussiana centrada e $\mathbb{E}\left[X(h)^2\right] = \|h\|_H^2$ (ou seja, $\|X(h)\|_{L^2} = \|h\|_H$).

Demonstração: Seja (e_n) uma base ortonormal em H. Pela Proposição 3.17, existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ no qual podemos definir uma sequência (g_n) de variáveis aleatórias independentes, $N(0,1)$ e reais.

Definimos, para cada $h \in H$, $X(h) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle g_n$. Temos que $X(h)$ está bem definida, pois

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle g_n \right\|_{L^2}^2 &= \int \left| \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle g_n \right|^2 d\mathbb{P} = \\
&= \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\langle h, e_n \rangle g_n\right)^2 + 2 \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \langle h, e_i \rangle \langle h, e_j \rangle g_i g_j \right) d\mathbb{P} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle^2 = \|h\|_H^2 .
\end{aligned}$$

$\square$

Por construção, $\{X(h), h \in H\}$ é subespaço de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ isométrico a H. Além disso,

$$\mathbb{E}[X(h) X(h')] = \langle h, h' \rangle_H.$$

Como, no caso de variáveis aleatórias normais de média 0, independência é equivalente a ortogonalidade, segue que $X(h)$ e $X(h')$ são independentes se e só se h e h' são ortogonais em H.

Consideremos, agora, $H = L^2([0, \infty), \mathcal{B}, \lambda)$ e seja $B(h)$ tal que

$$h \mapsto B(h) \text{ é linear,}$$
$$\mathbb{E}\left[B(h)^2\right] = \|h\|_H^2.$$

Tome $B_t = B\left(I_{[0,t]}\right), t \geq 0$ (B_t está na classe de equivalência $B\left(I_{[0,t]}\right)$. Temos que:

1. O processo B tem incrementos independentes, isto é, se $0 = t_0 < t_1 < ... < t_k$ então as variáveis aleatórias $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}, i = 1, ..., k$ são independentes. De fato,

$$\mathbb{E}[(B_v - B_u)(B_t - B_s)] = \mathbb{E}\left[B\left(I_{[u,v]}\right) B\left(I_{[s,t]}\right)\right] = \langle I_{[u,v]}, I_{[s,t]} \rangle = 0,$$

$\forall u < v < s < t$.

2. O processo B é gaussiano, isto é, se $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$ então o vetor v.a. $(B_{t_0}, ..., B_{t_n})$ é um vetor v.a. Gaussiana.

3. Para cada t, $\mathbb{E}[B_t^2] =< I_{[0,t]}, I_{[0,t]} >= t$. Em particular, $\mathbb{E}[B_0^2] = 0 \Rightarrow B_0 = 0$ $\mathbb{P}$-$q.c.$

Segue que, para um conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$ e $t > 0$,

$$\mathbb{P}[B_t \in A] = \int_A g_t(x)\, dx,$$

onde $g_t(x) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$ (densidade de B_t)

Igualmente, o incremento $B_t - B_s$ tem variância $t - s$. Além disso, a covariância $\mathbb{E}[B_s B_t] = \inf(s,t)$. De fato, usando a independência dos incrementos e o fato de todos os B_t serem centrados, temos, para $s < t$,

$$\mathbb{E}[B_s B_t] = \mathbb{E}[B_s(B_s + B_t - B_s)] = \mathbb{E}\left[B_s^2\right] + \mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)] = s$$

Lema 3.19 *Seja X uma v.a. $N(0,h)$. Então, $\mathbb{E}[X^4] = 3h^2$*

Demonstração: Definimos: $\widetilde{X}(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \int e^{tx} d\nu(x) = \widetilde{\nu}(t)$ (transformada de Laplace da medida $\nu = X_* \mathbb{P}$)

Então $X \in N(m, \sigma^2) \Rightarrow \widetilde{X}(t) = e^{tm + \frac{\sigma^2}{2}t^2} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\widetilde{X}(t))|_{t=0} = \mathbb{E}[Xe^{tx}] = \mathbb{E}[X]$

Em geral: $\frac{d^n}{dt^n}(\widetilde{X}(t)) = \mathbb{E}[X^n]$ □

Considerando a v.a. $X = B_{t+h} - B_t$, temos: $\widetilde{X}(v) = e^{-\frac{1}{2}v^2 h}$.

Logo $\mathbb{E}\left[(B_{t+h} - B_t)^4\right] = 3h^2$. Pelo Critério de Kolmogorov:

Teorema 3.20 *Existe um processo contínuo $\mathbb{P}$-q.c. com incrementos independentes tal que, para cada t, a v.a. B_t é centrada, gaussiana e tem variância t.*

Definição 3.23: O processo cuja existência é garantida pelo Teorema acima é chamado de Movimento Browniano.

Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, o processo $B_t^x = x + B_t$ é chamado de Movimento Browniano inicializado em x. É claro que $\mathbb{P}[B_t^x \in A] = \int_A g_t(y - x)\, dy$

Se $B_t^1, B_t^2, ..., B_t^d$ são d cópias independentes de B_t, definimos um processo X no espaço de estados $\mathbb{R}^d$, estipulando que a i−ésima componente de X_t é B_t^i. Este processo é chamado de d−dimensional Movimento Browniano. X é um processo gaussiano contínuo $\mathbb{P}$-*q.c.* tal que $\mathbb{P}[X_0 = 0] = 1$.

Proposição 3.21 *Existe uma única medida W em $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ para a qual o processo coordenado é um M.B.*

Observação 10 *Processo Coordenado:*

$$\begin{array}{rcl} B' : \mathbb{R}_+ \times C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (t, w) & \mapsto & B'_t(w) = w\,(t) \end{array}$$

Demonstração: Tomamos W como a imagem por $B. : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ da medida de probabilidade $\mathbb{P}$ em $(\Omega, \mathcal{F})$, onde B é um M.B. □

3.5 Espaço Produto Infinito Enumerável

Definição 3.25: Considere o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definimos o produto Ω^∞ como o conjunto de todas as sequências da forma $(w_1, w_2, w_3, ...)$, onde $w_i \in \Omega, \forall i$.

Vamos munir Ω^∞ de uma σ-álgebra $\mathcal{F}^\infty$ e uma probabilidade μ. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, o espaço produto mensurável $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$, onde Ω^n é o conjunto de todas as n-uplas $(w_1, w_2, ..., w_n)$, com $w_i \in \Omega, i = 1, 2, ..., n$ e $\mathcal{F}^n = \mathcal{F} \times \mathcal{F} \times ... \times \mathcal{F}$ é a σ-álgebra produto.

Seja $\mathcal{D} = \{u = (u_1, u_2, ..., u_n) \subset \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Para cada $u \in \mathcal{D}$, seja Π_u a projeção ortogonal com imagem finita:

$$\begin{array}{rccc} \Pi_u : & \Omega^\infty & \rightarrow & \Omega^n \\ & w = (w_1, w_2, w_3, ...) & \mapsto & (w_{u_1}, w_{u_2}, ..., w_{u_n}) \end{array}$$

Definição 3.26: Os conjuntos da forma $\{\Pi_u^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}^n\}$ são chamados de cilindros em Ω^∞.

Denotamos por C a classe dos cilindros, ou seja, $C = \{\Pi_u^{-1}(B) : u \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{F}^n, n \geq 1\}$.

Proposição 3.22 *C é uma álgebra de subconjuntos de Ω^∞.*

Demonstração: É claro que $\emptyset, \Omega^\infty \in C$.

Se $A \in C$, então $\exists u \in \mathcal{D}$ e $B \in \mathcal{F}^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$ tais que $A = \Pi_u^{-1}(B)$. Logo: $A^c = (\Pi_u^{-1}(B))^c = \Pi_u^{-1}(B^c) \in C$ já que $B^c \in \mathcal{F}^n$.

Finalmente, sejam $A_1, A_2 \in C$. Então $\exists m$ $u = (u_1, u_2, ..., u_n), v = (v_1, v_2, ..., v_m) \in \mathcal{D}$ e $B_1 \in \mathcal{F}^n, B_2 \in \mathcal{F}^m$ tais que $A_1 = \Pi_u^{-1}(B_1)$ e $A_2 = \Pi_v^{-1}(B_2)$.

Suponhamos que $u \cap v = \emptyset$. Seja $w = u \cup v$ e sejam $B^1 = B_1 \times \underbrace{\Omega \times \Omega \times ... \times \Omega}_{\text{(m vezes)}}$ e $B^2 = \underbrace{\Omega \times \Omega \times ... \times \Omega}_{\text{(n vezes)}} \times B_2$.

Então, $B^1, B^2 \in \mathcal{F}^{m+n}$ e $A_1 = \Pi_w^{-1}(B^1)$, $A_2 = \Pi_w^{-1}(B^2)$. Logo:

$A_1 \cup A_2 = \Pi_w^{-1}(B^1) \cup \Pi_w^{-1}(B^2) = \Pi_w^{-1}(B^1 \cup B^2) \in C$.

Se $u \cap v \neq \emptyset$, basta tomar o número apropriado de produtos de Ω para os conjuntos B^1 e B^2. □

Observemos que C não é σ-álgebra, C é união de σ-álgebras e não a σ-álgebra da união.

Definição 3.27: Definimos a σ-álgebra produto $\mathcal{F}^\infty$ como a menor σ-álgebra que contém C.

Vamos definir, agora, uma probabilidade μ em $(\Omega^\infty, \mathcal{F}^\infty)$.

Sabemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,existe uma única probabilidade $\mathbb{P}^n$ em $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$ que satisfaz: $\mathbb{P}^n(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)...\mathbb{P}(A_n), \forall A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$.

Seria interessante que $(\Pi_u)_*\mu = \mathbb{P}^n, \forall u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathcal{D}, n \geq 1$. Definimos

$$\begin{array}{rccc} \mu: & C & \to & [0,1] \\ & \Pi_u^{-1}(B) & \mapsto & \mu(\Pi_u^{-1}(B)) = \mathbb{P}^n(B) \end{array}.$$

Vejamos, primeiro, que μ está bem definida:

Sejam $B_1 \in \mathcal{F}^n, B_2 \in \mathcal{F}^m, u = (u_1, u_2, ..., u_n), v = (v_1, v_2, ..., v_m) \in \mathcal{D}, m, n \in \mathbb{N}$. Temos que $\Pi_u^{-1}(B_1) = \Pi_v^{-1}(B_2)$ se e só se uma das duas condições abaixo acontece:

(i) $u \subset v$ e $B_2 = B_1 \times \underbrace{\Omega \times \Omega \times ... \times \Omega}_{\text{(m-n vezes)}}$,

(ii) $v \subset u$ e $B_1 = B_2 \times \underbrace{\Omega \times \Omega \times ... \times \Omega}_{\text{(n-m vezes)}}$.

Supondo que aconteça o caso (i), temos que

$$\mu(\Pi_v^{-1}(B_2)) = \mathbb{P}^m(B_2) = \mathbb{P}^m(B_1 \times \Omega \times \Omega \times ... \times \Omega) = \mathbb{P}^n(B_1) = \mu(\Pi_u^{-1}(B_1)).$$

Logo, μ está bem definida.

Além disso,

$\mu(\emptyset) = \mu(\Pi_u^{-1}(\emptyset)) = \mathbb{P}^n(\emptyset) = 0,$

$\mu(\Omega) = \mu(\Pi_u^{-1}(\Omega^n)) = \mathbb{P}(\Omega^n) = 1.$

Sejam $A_1, A_2 \in C, A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Então, $\exists m\, u = (u_1, u_2, ..., u_n), v = (v_1, v_2, ..., v_m) \in \mathcal{D}$ e $B_1 \in \mathcal{F}^n$ e $B_2 \in \mathcal{F}^m$ tais que $A_1 = \Pi_u^{-1}(B_1)$ e $A_2 = \Pi_v^{-1}(B_2)$. Sendo $w = u \cup v$ e tomando B^1 e B^2 como antes, temos que $A_1 = \Pi_w^{-1}(B^1)$, $A_2 = \Pi_w^{-1}(B^2)$ e $B^1 \cap B^2 = \emptyset$. Logo:

$$\begin{aligned}
\mu(A_1 \cup A_2) &= \mu(\Pi_w^{-1}(B^1) \cup \Pi_w^{-1}(B^2)) = \mu(\Pi_w^{-1}(B^1 \cup B^2) = \\
&= \mathbb{P}^{m+n}(B^1 \cup B^2) = \mathbb{P}^{m+n}(B^1) + \mathbb{P}^{m+n}(B^2) = \\
&= \mu(\Pi_w^{-1}(B^1)) + \mu(\Pi_w^{-1}(B^2)) = (A_1) + \mu(A_2)
\end{aligned}$$

Ou seja, μ é finitamente aditiva.

O Teorema abaixo garante a σ-aditividade de μ.

Teorema 3.23 (Halmos, pag. 57) *Se $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade, então existe uma única probabilidade μ definida na σ-álgebra $\mathcal{F}^\infty$ com a propriedade que, para todo conjunto mensurável $E \in C$ com $E = \Pi_u^{-1}(A)$, onde $A \in \mathcal{F}^n$, tem-se $\mu(E) = \mathbb{P}^n(A)$.*

Definição 3.28: A medida μ é chamada de medida produto e o espaço $(\Omega^\infty, \mathcal{F}^\infty, \mu)$ de espaço produto infinito enumerável de probabilidade.

Consideremos, agora, uma sequência $(X_n)_{n \geq 1}$ de variável aleatória reais definidas em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tomamos $Y = (X_1, X_2, X_3, ...)$, isto é

$$\begin{array}{rccc}
Y: & (\Omega^\infty, \mathcal{F}^\infty) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)) \\
& w = (w_1, w_2, w_3, ...) & \longmapsto & (X_1(w_1), X_2(w_2), X_3(w_3), ...)
\end{array}$$

Proposição 3.24 *Y é uma variável aleatória.*

Demonstração: Seja B um retângulo mensurável em $\mathbb{R}^\infty$, ou seja:

$$B = B_1 \times B_2 \times ... \times B_n \times \Omega \times \Omega \times ...,$$

onde $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i = 1, 2, ..., n$. Então

$$\begin{aligned} Y^{-1}(B) &= \{w = (w_1, w_2, ...) \in \Omega^\infty; X_1(w_1) \in B_1, X_2(w_2) \in B_2, ..., X_n(w_n) \in B_n\} = \\ &= \{w = (w_1, w_2, ...) \in \Omega^\infty; w_1 \in X_1^{-1}(B_1), w_2 \in X_2^{-1}(B_2), ...w_n \in X_n^{-1}(B_n)\}. \end{aligned}$$

Como cada X_i ê mensurável, $i = 1, ..., n$, segue que $Y^{-1}(B) \in \mathcal{F}^\infty$.

Vamos provar que $Y^{-1}(B) \in \mathcal{F}^\infty$ para cada conjunto $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$.

Considere o conjunto $\mathcal{A} = \{B \subset \mathbb{R}^\infty : Y^{-1}(B) \in \mathcal{F}^\infty\}$. Sabemos que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^\infty$. Além disso, o conjunto R dos retângulos mensuráveis em $\mathbb{R}^\infty$ está em $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) = \sigma(R) \subset \mathcal{A}$, o resultado segue. $\square$

Podemos tomar, então, em $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ a medida induzida $\eta = Y_*\mu$. Temos que η satisfaz

$$\eta(B_1 \times B_2 \times ... \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ...) = (X_1 * \mathbb{P})(B_1).(X_2 * \mathbb{P})(B_2)...(X_n * \mathbb{P})(B_n), n \geq 1,$$

onde $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), k = 1, ...n$.

Capítulo 4

Apêndice 2

Neste Apêndice estudamos alguns resultados sobre Martingales. Começamos definindo Filtração e Martingale para depois nos concentrarmos na convergência de Martingales Discretos.

4.1 Filtrações e Martingales

Definição 4.1: Uma filtração no espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ é uma família crescente $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, de sub-$\sigma$-álgebras $\mathcal{F}_t$ de $\mathcal{F}$. Um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ munido de uma filtração $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ é chamado de espaço filtrado.

Definição 4.2: Dizemos que um processo X em $(\Omega, \mathcal{F})$ é adaptado à filtração $(\mathcal{F}_t)$ se X_t é $\mathcal{F}_t$-mensurável para cada t.

Qualquer processo X é adaptado à sua filtração natural $\mathcal{F}_t^o := \sigma(X_s, s \leq t)$. $(\mathcal{F}_t^o)$ é a filtração mínima para a qual X é adaptado. Dizer que X é adaptado a $(\mathcal{F}_t^o)$ significa que $\mathcal{F}_t^o \subset \mathcal{F}_t$ para cada t.

Definição 4.3: Um tempo de parada relativo à filtração $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ é uma variável aleatória

$$T : \Omega \to [0, \infty]$$

tal que, para todo t, o conjunto $\{w : T(w) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Definição 4.4: Seja τ um conjunto qualquer (em geral $\mathbb{R}_+, \mathbb{N}$, *Hilbert*). Um processo $(X_t)_{t\in\tau}$, $(\mathcal{F}_t)$-adaptado é chamado de Martingale com respeito a $(\mathcal{F}_t)$ se

1. $\mathbb{E}\left[X_t^+\right] < \infty$ para todo $t \in \tau$,

2. $\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s$ quase sempre, $\forall s, t$ tais que $s < t$.

(X_t) é Submartingale se $\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] \geq X_s$, $\forall s < t$.

(X_t) é Supermartingale se $\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] \leq X_s$, $\forall s < t$.

Em outras palavras, um Martingale é uma família adaptada de variáveis aleatórias integráveis tal que

$$\int_A X_s d\mathbb{P} = \int_A X_t d\mathbb{P}$$

para todo $s < t$ e $A \in \mathcal{F}_s$.

Se $\tau = \mathbb{N}$, dizemos que $(X_t)_{t\in\tau}$ é um Martingale discreto. Neste caso, escrevemos $(X_n)_{n\geq 1}$.

Um $(\mathcal{F}_t)$-martingale X é um martingale com respeito à sua filtração natural $\sigma\left(X_s,\ s \leq t\right)$. Mas, se $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, não podemos afirmar que um $(\mathcal{F}_t)$-martingale seja um $(\mathcal{G}_t)$-martingale. O conjunto dos Martingales com respeito a uma dada filtração é um espaço vetorial.

4.2 Convergência de Martingales Discretos

Nesta seção, $(X_n)_{n\geq 1}$ denotará sempre um Martingale discreto com relação à filtração discreta $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.

Proposição 4.1 *Suponhamos que $X_k \in L^2(\Omega, \mathcal{F})$, $1 \leq k \leq s$. Então, para $p < s$,*

$$\mathbb{E}\left[X_k^2\right] - \mathbb{E}\left[X_p^2\right] = \sum_{j=p}^{k-1} \mathbb{E}\left[(X_{j+1} - X_j)^2\right].$$

Demonstração: Para $m \leq j$, temos

$$\mathbb{E}\left[X_{j+1} - X_j \mid \mathcal{F}_m\right] = \mathbb{E}\left[X_{j+1} - X_j \mid \mathcal{F}_j \mid \mathcal{F}_m\right] = 0.$$

Escrevendo $X_n = X_p + \sum_{j=p}^{n-1} (X_{j+1} - X_j)$ e expandindo X_n^2, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_n^2\right] &= \mathbb{E}\left[X_p^2\right] + \sum_{j=p}^{n-1} \mathbb{E}\left[(X_{j+1} - X_j)^2\right] + 2 \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbb{E}\left[(X_{i+1} - X_i)(X_{j+1} - X_j)\right] + \\
&\quad + 2 \sum_{j=p}^{n-1} \mathbb{E}\left[X_p (X_{j+1} - X_j)\right].
\end{aligned}
$$

Vamos provar que todos os termos das últimas duas somas são nulos. Suponha $j < i$. Então

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X_{j+1} - X_j)(X_{i+1} - X_i)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(X_{j+1} - X_j)(X_{i+1} - X_i) \mid \mathcal{F}_{j+1}\right]\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[(X_{j+1} - X_j)\,\mathbb{E}\left[X_{i+1} - X_i \mid \mathcal{F}_{j+1}\right]\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Similarmente,

$$
\mathbb{E}\left[X_p (X_{j+1} - X_j)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_p (X_{j+1} - X_j) \mid \mathcal{F}_j\right]\right] = \mathbb{E}\left[X_p \mathbb{E}\left[X_{j+1} - X_j \mid \mathcal{F}_j\right]\right] = 0.
$$

□

Corolário 4.2 $\left(\mathbb{E}\left[X_n^2\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência crescente.*

Demonstração: Basta aplicar a Proposição acima a $p = k - 1$. □

Definição 4.5: Dizemos que a sequência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um L^2-martingale se tivermos $\sup_n \mathbb{E}\left[X_n^2\right] < \infty$. Segue do Corolário 6 que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n^2\right]$ existe e é finito.

Teorema 4.3 *Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um L^2- martingale. Então, existe $X_\infty \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ tal que*

1. $\|X_n - X_\infty\|_{L^2} \to 0$,

2. $X_k = \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathbb{F}_k]$.

X_∞ é chamado de valor final do Martingale (X_n).

Inversamente:

Sejam $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente de sub-$\sigma-$álgebras em $(\Omega,\mathcal{F})$ e $\mathcal{G}_\infty := \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{G}_n\right)$. Sejam $f \in L^2(\Omega,\mathcal{G}_\infty)$ e $X_k = \mathbb{E}[f \mid \mathcal{G}_k]$. Então

1. *(X_n) é um L^2-martingale,*

2. *$\|X_n - f\|_{L^2} \to 0$.*

Para demonstrarmos esse Teorema, vamos primeiro provar o seguinte Lema:

Lema 4.4 $\mathbb{E}\left[(X_{n+p} - X_n)^2\right] = \mathbb{E}\left[X_{n+p}^2\right] - \mathbb{E}[X_n^2]$.

Demonstração: $\mathbb{E}\left[(X_{n+p} - X_n)^2\right] = \mathbb{E}\left[X_{n+p}^2\right] + \mathbb{E}[X_n^2] - 2\mathbb{E}[X_{n+p}X_n]$.

Mas $\mathbb{E}[X_{n+p}X_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+p}X_n \mid \mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[X_n^2]$. $\square$

Demonstração: (do Teorema) Temos que a sequência $\alpha_n = \mathbb{E}[X_n^2]$ é convergente. Logo, dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall p > 0$,

$$\|X_{n+p} - X_n\|_{L^2}^2 < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Logo, (X_n) é uma sequência de Cauchy em L^2 e, portanto, converge. Além disso,

$$X_k = \mathbb{E}[X_{k+r} \mid \mathcal{F}_k] \text{ para todo } r > 0.$$

Fazendo $r \to \infty$, temos $X_{k+r} \to X_\infty$ em L^2.

Como o operador linear

$$\mathbb{E}[. \mid \mathcal{A}] : L^p(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) \to L^p(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}|_{\mathcal{A}})$$

é contínuo, $1 \leq p < \infty$, segue que

$$\mathbb{E}\left[X_{k+r} \mid \mathcal{F}_k\right] \rightarrow \mathbb{E}\left[X_\infty \mid \mathcal{F}_k\right].$$

Para provar o inverso, temos que

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f \mid \mathcal{G}_{n+k}\right] \mid \mathcal{G}_n\right] = \mathbb{E}\left[f \mid \mathcal{G}_n\right],$$

ou seja

$$\mathbb{E}\left[X_{n+k} \mid \mathcal{G}_n\right] = X_n.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|X_n\|_{L^2}^2 &= \mathbb{E}\left[X_n^2\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f \mid \mathcal{G}_n\right]^2\right] \underset{Jensen}{\leq} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f^2 \mid \mathcal{G}_n\right]\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[f^2\right] = \|f\|_{L^2}^2 . \end{aligned}$$

Logo, (X_n) é um L^2- martingale. Pela primeira parte do Teorema, $\exists f_\infty \in L^2$ tal que

$$\|X_n - f_\infty\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ e } X_n = \mathbb{E}\left[f_\infty \mid \mathcal{G}_n\right].$$

Pelo Lema, $f = f_\infty$. □

Lema 4.5 *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, filtrado por $(\mathcal{F}_n)$.*

Pomos $\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\cup \mathcal{F}_n\right)$. Então

$$\left\|\mathbb{E}\left[f \mid \mathcal{F}_n\right] - \mathbb{E}\left[f \mid \mathcal{F}_\infty\right]\right\|_{L^2} \rightarrow 0 \textit{ para toda } f \in L^2.$$

Demonstração: Consideremos o espaço (fechado) de $L^2(\Omega, \mathcal{F})$,

$$V_n := L^2\left(\Omega, \mathcal{F}_n\right)$$

e seja

$$V_\infty := \overline{\underset{n}{\cup} V_n}.$$

Denotamos por Π_{V_n} e Π_{V_∞} as respectivas projeções ortogonais. Então

$$\|\Pi_{V_n} f - \Pi_{V_\infty} f\|_{L^2} \to 0.$$

Além disso, $V_n \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty), \forall n$. Como V_∞ é o menor subespaço fechado de L^2 que contém todos os V_n, segue que $V_\infty \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$. Seja $\mathcal{B} = \underset{n}{\cup} \mathcal{F}_n$. Então, $\mathcal{B}$ é uma álgebra em Ω e $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}_\infty$. Temos que, se $B \in \mathcal{B}$, então $I_B \in V_\infty$. Seja $\mathcal{M}$ a classe dos subconjuntos $D \subset \Omega$ tais que $I_D \in V_\infty$. Vamos provar que $\mathcal{M}$ é um classe monótona.

Seja (D_n) uma sequência de elementos de $\mathcal{M}$ com limite D_∞. Então, $I_{D_n} \to I_{D_\infty}$ e, pelo Teorema da Convergência de Lebesgue: $\|I_{D_n} - I_{D_\infty}\|_{L^2} \to 0$.

Como $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, o resultado análogo para sequências decrescentes segue tomando-se complementos.

Logo $\mathcal{M}$ é uma classe monótona, ou seja, $\mathcal{M} = \mathcal{F}_\infty$. Segue que, se $B \in \mathcal{F}_\infty$, então $I_B \in V_\infty$. Como o conjunto de todas as funções simples é denso em $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, segue que $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty) \subset V_\infty$ e, portanto, $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty) = V_\infty$. □

Vamos definir agora

$$X_n^* := \sup_{1 \le p \le n} |X_n| \text{ e } X^* := \lim_{n \to \infty} X_n^*.$$

Chamamos X^* de função maximal do Martingale (X_n).

Proposição 4.6 *(Desigualdade maximal de Doob): Para toda constante* $\gamma > 0$:

1. $\mathbb{P}(X_n^* \ge \gamma) \le \frac{2}{\gamma}(\mathbb{E}[|X_n|] + \mathbb{E}[|X_1|]), n = 0, 1, ...,$

2. $\mathbb{P}(X^* \ge \gamma) \le \frac{4}{\gamma} \sup_n \mathbb{E}[|X_n|]$.

Demonstração: Seja $A_\gamma^n = \{w : \sup_{p<n} X_p(w) \geq \gamma\}$ e seja

$$T(w) = \begin{cases} \inf\{p : X_p(w) \geq \gamma\} & , w \in A_\gamma^n \\ n & , w \notin A_\gamma^n \end{cases}.$$

Então, $T(w) \leq n$. Além disso,

$$\begin{aligned} \{w : T(w) > q\} &= \bigcup_{p\leq q} \{w : X_p(w) < \gamma\} \in \mathcal{F}_q \text{ se } q < n, \\ \{w : T(w) > n\} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Por exemplo: $T(w) > 3 \Rightarrow X_1(w) < \gamma, X_2(w) < \gamma$ e $X_3(w) < \gamma$.

Então, T é tempo de parada. Seja $\left(X_n^T\right)$ o Martingale truncado por T, ou seja, $X_n^T = X_{n\wedge T}$. Então

$$\mathbb{E}\left[X_1^T\right] = \mathbb{E}\left[X_n^T I_{[T<n]}\right] + \mathbb{E}\left[X_n^T I_{[T=n]}\right].$$

Temos que: $X_n^T \geq \gamma$ em $\{T < n\}$ e $\gamma\mathbb{P}(\{T < n\}) = \gamma\mathbb{P}\left(A_\gamma^n\right)$, portanto

$$\mathbb{E}\left[X_n^T\right] \geq \gamma\mathbb{P}\left(A_\gamma^n\right) + \mathbb{E}\left[X_n I_{[T=n]}\right].$$

Logo

$$\mathbb{E}[X_1] \geq \gamma\mathbb{P}\left(A_\gamma^n\right) + \mathbb{E}\left[X_n I_{[T=n]}\right] \Rightarrow \gamma\mathbb{P}\left(A_\gamma^n\right) \leq \mathbb{E}[X_1] - \mathbb{E}\left[X_n I_{[T=n]}\right]$$

e

$$\gamma\mathbb{P}\left(A_\gamma^n\right) \leq \mathbb{E}[|X_n|] + \mathbb{E}[|X_1|].$$

(1) segue observando que

$$\{w : X_n^*(w) \geq \gamma\} = A_\gamma^n \cup \left\{w : \sup_{p<n}(-X_p) \geq \gamma\right\}.$$

Para provar (2), basta notarmos que (X_n^*)é uma sequência crescente com limite X^*. Desta forma, $X^* \geq \gamma \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n$ tal que $X_n^* \geq \gamma - \varepsilon$. Logo, por (1),

$$\mathbb{P}(X^* \geq \gamma) \leq \frac{4}{\gamma - \varepsilon} \sup_n \mathbb{E}[|X_n|].$$

$\square$

Dizemos que (X_n) é Regular se existir $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que $X_n = \mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}_n], \forall n$.

Exemplo: Todo L^2- martingale é regular. $\square$

Seja $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\underset{n}{\cup}\mathcal{F}_n\right)$ e ponha $X_\infty = \mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}_\infty]$. X_∞ é chamado de valor final de(X_n).

Teorema 4.7 *(Convergência em L^1): Seja (X_n) um Martingale regular e seja X_∞ seu valor final. Então:*

1. $X_n = \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_n]$,
2. $\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|] \to 0$ *quando* $n \to \infty$.

Demonstração: Considere a função: $\phi_M(t) = \begin{cases} t & \text{se } -M \leq t \leq M \\ M & \text{se } t > M \\ -M & \text{se } t < M \end{cases}$.

Ponha $Z^M = \phi_M(Z)$. Então

$$(1) \qquad \left\|Z^M - Z\right\|_{L^1} \to 0 \text{ quando } M \to \infty.$$

Além disso,

$$(2) \qquad \left\|\mathbb{E}\left[Z^M \mid \mathcal{F}_n\right] - X_n\right\|_{L^1} \leq \left\|Z^M - Z\right\|_{L^1}$$

e

$$\left\|\mathbb{E}\left[Z^M \mid \mathcal{F}_n\right]\right\|_{L^\infty} \leq \left\|Z^M\right\|_{L^\infty} = M$$

Observação 11 $X_n = \mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}_n]$ *e* $\|\mathbb{E}[f \mid \mathcal{B}]\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$ *para* $1 \leq p \leq \infty$.

Portanto $\mathbb{E}\left[Z^M \mid \mathcal{F}_n\right]$ é um L^2- martingale. Usando o Teorema 4.3 e o Lema 4.5, obtemos

$$\mathbb{E}\left[Z^M \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Z^M \mid \mathcal{F}_\infty\right] \mid \mathcal{F}_n\right]$$

e

$$\left\|\mathbb{E}\left[Z^M \mid \mathcal{F}_n\right] - \mathbb{E}\left[Z^M \mid \mathcal{F}_\infty\right]\right\|_{L^2} \to 0.$$

Desta forma, (1) é provado usando (1) e (2) com M tendendo ao infinito.

Similarmente, como a convergência em L^2 implica em convergência em L^1 pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, (2) segue para $\mathbb{E}\left[Z^m \mid \mathcal{F}_n\right]$. Fazendo $M \to \infty$, (2) segue para X_n. □

Proposição 4.8 *(Convergência Quase Certamente): Seja (X_n) um Martingale regular e seja X_∞ seu valor final. Então*

$$X_n(w) \to X_\infty(w) \ \textit{quase certamente.}$$

Demonstração: Seja $\beta_q(w) = \sup_{n>q} |X_n(w) - X_q(w)|$ e seja $\beta(w) = \lim_{q\to\infty} \beta_q(w)$.

Para um q fixo, seja: $Z_m = X_{q+m} - X_q$ $(m \geq 0)$.

Então (Z_m) é um Martingale regular relativo à filtração $(\mathcal{F}_{q+m})$ e

$$\begin{aligned} \sup_m \|Z_m\|_{L^1} &= \sup_m \|X_{q+m} - X_q\|_{L^1} = \sup_m \|X_{q+m} - X_\infty + X_\infty - X_q\|_{L^1} \leq \\ &\leq \|X_\infty - X_q\|_{L^1} + \sup_{p>q} \|X_\infty - X_p\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.7, o lado direito é menor que ε se $q \geq q_0$. Portanto, usando a desigualdade maximal de Doob

$$\mathbb{P}\left(\left\{w : \beta_q(w) > \gamma\right\}\right) < \frac{2\varepsilon}{\gamma} \text{ se } q > q_0.$$

Fixado γ e fazendo $q \to \infty$, temos que

$$\mathbb{P}\left(\{w : \beta(w) > \gamma\}\right) = 0,$$

pois (β_q) é uma sequência decrescente de funções. Logo $\beta(w) = 0$ quase certamente e, portanto, (X_n) converge quase certamente ($q.c.$). Seja Z_∞ seu limite. Como (X_n) converge em L^1 a X_∞, existe uma subsequência (X_{n_k}) que converge $q.c.$ a X_∞. Logo, $Z_\infty = X_\infty$. □

Definição 4.6: Dizemos que um Martingale (X_n) é um L^1- martingale se tivermos $\sup_n \|X_n\|_{L^1} < \infty$.

Exemplo: Todo Martingale regular é um L^1- martingale. □

Proposição 4.9 *Seja (X_n) um L^1- martingale. Seja (T_n) uma sequência de tempos de parada tal que, para todo j, $T_j(w) < \infty$ q.c. Então*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(X_{T_{j+1}}(w) - X_{T_j}(w)\right)^2 < \infty \ q.c.$$

Demonstração: Seja $a = \sup_n \|X_n\|_{L^1}$ e seja X^* a função maximal. Então, pela Desigualdade Maximal de Doob,

$$\mathbb{P}(X^* \geq p) \leq \frac{4a}{p}.$$

Portanto

$$(1) \qquad X^*(w) < \infty \ q.c.$$

Seja f a função convexa continuamente diferenciável definida por

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & , |t| \leq p \\ 2p|t| - p^2 & , |t| \geq p \end{cases} \ (p \text{ fixo}).$$

Seja g a função não-negativa definida por

$$g(v_1, v_2) = f(v_2) - f(v_1) - (v_2 - v_1) f'(v_1).$$

Então: $g(v_1, v_2) = (v_2 - v_1)^2$ se $|v_i| \leq p, i = 1, 2.$

$$(2) \qquad \mathbb{E}[f(X_n)] \leq 2p\mathbb{E}[|X_n|] \leq 2pa.$$

$$\begin{aligned}(3) \qquad \mathbb{E}[(X_{j+1} - X_j) f'(X_j)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X_{j+1} - X_j) f'(X_j) \mid \mathcal{F}_j]] = \\ &= \mathbb{E}[f'(X_j)\mathbb{E}[X_{j+1} - X_j \mid \mathcal{F}_j]] = 0.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_n) - f(X_1)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n-1} (f(X_{j+1}) - f(X_j))\right] = \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}[g(X_{j+1}, X_j)] = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[(X_{j+1} - X_j)^2\right] \text{ se } |X_k| \leq p, k = 1, ...n.\end{aligned}$$

Portanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{\infty} (X_{j+1} - X_j)^2 I_{[X^* \leq p]}\right] \leq 2pa.$$

Fazendo $p \to \infty$ e usando (1),

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} (X_{j+1}(w) - X_j(w))^2 < \infty \ q.c.$$

Agora, seja (T_n) uma sequência crescente de tempos de parada. Queremos mostrar que

$$(5) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \left(X_{T_{j+1}}(w) - X_{T_j}(w)\right)^2 < \infty \ q.c.$$

Temos que

$$f\left(X_{T_j}\right)-f\left(X_1\right)=\sum_{q=1}^{\infty}\left(f\left(X_{q+1}\right)-f\left(X_q\right)\right)I_{[T_j>q]},$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f\left(X_{T_j}\right)-f\left(X_1\right)\right] &= \sum_{q=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[g\left(X_{q+1},X_q\right)I_{[T_j>q]}\right]\leq \\ &\leq \sum_{q}\mathbb{E}\left[g\left(X_{q+1},X_q\right)\right]\leq 2pa.\end{aligned}$$

Portanto

$$(2') \qquad \mathbb{E}\left[f\left(X_{T_j}\right)\right]\leq 4pa.$$

Seja $\mathcal{F}_{T_j}=\sigma\left(\mathcal{F}_q\cap T_j^{-1}(q)\right), q\in\mathbb{N}$. Então

$$(3') \qquad \mathbb{E}\left[\left(X_{T_{j+1}}-X_{T_j}\right)f'\left(X_{T_j}\right)\mid\mathcal{F}_{T_j}\right]=0.$$

Isto prova (5). □

Teorema 4.10 *(Fatou): Seja (X_n) um L^1- martingale. Então, $\lim_{n\to\infty}X_n(w)$ existe q.c.*

Demonstração: Vamos assumir que o limite não exista. Então, existe $b>0$ tal que

$$\mathbb{P}\left(\left\{w:\lim_{n,m\to\infty}\sup\left|X_n(w)-X_m(w)\right|>2b\right\}\right)>0.$$

Seja $T_1(w)=1$ e

$$T_{j+1}(w)=\inf\left\{q:q>T_j(w)\text{ e }\left|X_{T_j}(w)-X_q(w)\right|>b\right\}.$$

Então, a sequência $(T_n(w))$ é crescente e

$$\left|X_{T_{j+1}}(w)-X_{T_j}(w)\right|>b,\forall j.$$

Isto contradiz a Proposição anterior. □

Definição 4.7: Dizemos que um subconjunto H de L^1 é uniformemente integrável se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $\eta > 0$ tal que $\mathbb{E}[|h| I_A] < \varepsilon$ para todo $h \in H$ e todo $A \in \mathcal{F}$ com $\mathbb{P}(A) \leq \eta$.

Proposição 4.11 *Seja H um subconjunto de L^1. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *H é uniformemente integrável,*

2. $\lim_{q\to\infty} \left[\sup_{h\in H} \int\limits_{|h|>q} |h| \, d\mathbb{P} \right] = 0.$

Demonstração: Para provar que (1) → (2) vamos primeiro provar que (1) implica que existe $M < \infty$ tal que $\|h\|_{L^1} < M, \forall h \in H$.

Seja $\eta > 0$ o número associado com $\varepsilon = 1$. Então, o resultado segue colocando-se $M = \frac{1}{\eta} + 1$.

Por Chebyshev: $\mathbb{P}(|h| > q) \leq \frac{1}{q} M$.

Como esta expressão tende a zero quando $q \to \infty$, (1) implica (2) formalmente. Vamos provar agora que (2) → (1). Suponha que existe $\varepsilon_0 > 0$ e sequências (h_n) em H e (F_n) em $\mathcal{F}$ tais que

$$\mathbb{E}[h_n I_{A_n}] > \varepsilon_0 \text{ e } \mathbb{P}(A_n) \to 0.$$

Seja q_0 escolhido de maneira que $\int\limits_{|h|>q_0} h d\mathbb{P} < \frac{\varepsilon_0}{2}, \forall h \in H.$

Seja $B_n = \{w : |h_n(w)| > q_0\}$. Então

$$\varepsilon_0 < \mathbb{E}\left[h_n I_{A_n}\left(I_{B_n} + I_{B_n^C}\right)\right] \leq \mathbb{E}[h_n I_{B_n}] + q_0 \mathbb{P}(A_n).$$

Como o primeiro termo do lado direito é menor que $\frac{\varepsilon_0}{2}$ e o segundo tende a zer quando $n \to \infty$, isto nos dá uma contradição.

Proposição 4.12 *Seja H im subconjunto uniformemente integrável de L^1 e seja H_1 o fecho de H na topologia da convergência quase certa. Então H_1 é uniformemente integrável.*

Demonstração: Colocamos $\phi(\varepsilon) = \sup_h \mathbb{E}[|h| I_A]$, com $h \in H$ e $\mathbb{P}(A) < \varepsilon$. Seja (h_n) uma sequência de elementeos de H que converge a h_0 q.c. O Lema de Fatou implica que

$$\phi(\varepsilon) \geq \liminf \mathbb{E}[|h_n| I_A] \geq \mathbb{E}[|h_0| I_A].$$

Portanto

$$\sup \mathbb{E}[|h_1| I_A] \leq \phi(\varepsilon), \forall h_1 \in H_1, \forall A \text{ tal que } \mathbb{P}(A) < \varepsilon.$$

□

Teorema 4.13 *(Generalização da Convergência Dominada de Lebesgue): Seja (u_n) uma sequência de funções integráveis no espaço de medida (X, Σ, μ), $\mu(X) < \infty$, tal que*

1. *a família (u_n) é uniformemente integrável,*
2. *u_n converge q.c. a u_0.*

Então, $\|u_n - u_0\|_{L^1} \to 0$.

Demonstração: Pelo Teorema de Egoroff, existe $\varepsilon > 0$ e $B \in \Sigma$ tal que $\mu(B^C) < \varepsilon$ e (u_n) converge uniformemente a u_0 em B. Então

$$\|u_n - u_0\|_{L^1} \leq \mathbb{E}[|u_n - u_0| I_B] + \mathbb{E}[|u_n| I_{B^C}] + \mathbb{E}[|u_0| I_{B^C}].$$

O primeiro termo do lado direito tende a zero pela convergência uniforme, o segundo pela integrabilidade uniforme e o terceiro pela mesma razão que na Proposição anterior.
□

Teorema 4.14 *(Critério de Regularização): Seja* (X_n) *um* L^1*- martingale. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. (X_n) *é regular,*

2. $\{X_n : 1 \leq n \leq \infty\}$ *é uniformemente integrável.*

Demonstração: (2) $\rightarrow$ (1) Pelo Teorema de Fatou, $X_q(w) \rightarrow Z$ *q.c.* Pelo Teorema 4.13, isto implica que $\|X_q - Z\|_{L^1} \rightarrow 0$. Portanto, usando a identidade $X_n = \mathbb{E}[X_q \mid \mathcal{F}_n], q > n$, fixando n e tomando $q \rightarrow \infty$, temos

$$X_n = \mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}_n].$$

(1) $\rightarrow$ (2) Para um c a ser fixado, seja $B_n = \{w : |X_n(w)| > c\}$. Então, como $B_n \in \mathcal{F}_n$ e $|X_n| \leq \mathbb{E}[|Z| \mid \mathcal{F}_n]$ segue que

$$\mathbb{E}[|X_n| I_{B_n}] \leq \mathbb{E}[I_{B_n}\mathbb{E}[|Z| \mid \mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[|Z| I_{B_n} \mid \mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[|Z| I_B].$$

Portanto, com b também a ser fixado,

$$\begin{aligned}\int\limits_{|X_n|>c} |X_n|\, d\mathbb{P} &\leq \int\limits_{|X_n|>c} |Z|\, d\mathbb{P} = \int\limits_{(|X_n|>c)\cap(|Z|>b)} |Z|\, d\mathbb{P} + \int\limits_{(|X_n|>c)(|Z|<b)} |Z|\, d\mathbb{P} \leq \\ &\leq \int\limits_{|Z|>b} |Z|\, d\mathbb{P} + b\mathbb{P}(|X_n| > c).\end{aligned}$$

Mas, pela desigualdade de Chebyshev

$$\mathbb{P}(|X_n| > c) \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}[|X_n|] \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}[|Z|].$$

Portanto

$$\int\limits_{|X_n|>c} |X_n|\, d\mathbb{P} \leq \int\limits_{|Z|>b} |Z|\, d\mathbb{P} + \frac{b}{c}\mathbb{E}[|Z|].$$

Ponha $b = q^{\frac{1}{2}}$ e $c = q$. Então, o lado direito tende a zero quando $q \to \infty$ e a conclusão segue da Proposição 4.11. $\square$

Bibliografia

[1] ANDRADE, ALEXANDRE, Wiener Integral in the Space of Sequences of Real Numbers, Paulo R. C. Ruffino, *Archivum Mathematicum, Tomus 36, 2000/2, Masaryk University,* Brno, Czech Republic (2000)

[2] BREZIS, H., Analyse Functionnelle: Theórie et Applications, *Masson*, Paris (1983)

[3] CIESIELSKI, Z., Holder Conditions for Realizations of Gaussian Processes, *Trans. Am. Math. Soc.*, 99 (1961)

[4] FERNIQUE, X, Regularite des Trajectoires des Fonctions Aleatories Gaussienes,*Calcul des Probabilites, EcoleD 'Ete*, Saint Flour(1974)

[5] HALMOS, PAUL R., Measure Theory, *Van Nostrand*, New York (1950)

[6] IKEDA, N, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, S. Watanabe, *Nort-Holland Mathematical Library, Nort-Holland, Segunda Edição*, Amsterdam (1989)

[7] KAC, M, Integration in Function Spaces and Some of Its Applications, *Accademia Nazionale Dei Lincei Scuola Normale Superiore*, Pisa (1980)

[8] KALLIANPUR, GOPINATH, White Noise Theory of Prediction, Filtering and Smothing, Rajeeva L. Karandikar, *Stochastics Monografhis V.3, Gordon and Breach Science Publishers*, New York (1988)

[9] KUO, Gaussian Measures in Banach Spaces. *Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag*, Berlin - New York (1975)

[10] LUKACS, EUGENE, Stochastic Convergence, *Probability and Mathematical Statistics, Academic Press, Segunda Edição* (1975)

[11] MALLIAVIN, PAUL, Integration and Probability, *Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag*, New York (1995)

[12] NEVEU, JACQUES, Mathematical Foundations of the Calculus of Probability, *Series in Probability and Statistics, Holden-Day*, San Francisco (1965)

[13] REVUZ, DANIEL, Continuous Martingales and Brownian Motion, Mark Yor, *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag*, Berlin (1991)

[14] SINGER, IVAN, Bases in Banach Spaces I. *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag*, Berlin (1970)