SOBRE OS ESPAÇOS DE HARDY
EM
PRODUTOS DE SEMI–PLANOS E PRODUTOS DE FAIXAS

NATIVI VIANA PEREIRA BERTOLO

Orientador

DICESAR LASS FERNANDEZ

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Novembro – 1983.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dicesar deixamos nosso profundo reconhecimento pelas longas horas que nos dedicou, nunca medindo esforços , e sobretudo pela sua orientação segura, sem a qual não seria possível a realização desse trabalho.

Nosso muito obrigado ao professor Bordin pela valiosa cooperação que nos prestou, sempre disposto a ouvir-nos e ajudar nos na solução dos problemas que surgiram.

Aos professores Macias e Segóvia que muito nos incentivaram a ingressar nessa área de pesquisa, aos colegas e a todos que de uma forma ou de outra nos apoiaram, nosso muito obrigado.

Não podemos deixar de agradecer também ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação que nos deu a oportunidade de desenvolver este plano de pesquisa.

Finalmente, não menos importante deixamos aqui nosso obrigado a João Ivo, Ana Paula, Juliana e Paulo Henrique por entenderem a falta de atenção que inúmeras vezes lhes causamos.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO i

CAPÍTULO I - ANÁLISE HARMÔNICA E BI-HARMÔNICA............ 1

1.1. Preliminares.................................... 1

1.2. Propriedades das funções bi-harmônicas........... 3

1.3. Operadores de Hardy-Littlewood e a função maximal..... 9

1.4. Funções bi-harmônicas sobre $S \times S$................ 14

CAPÍTULO II - UM SISTEMA CONJUGADO DO TIPO CAUCHY-RIEMANN.... 23

2.1. Um sistema conjugado............................ 23

2.2. Sistemas elípticos.............................. 26

CAPÍTULO III - O ESPAÇO DE HARDY $H^1(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$............ 35

3.1. O espaço $H^1(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$.......................... 35

3.2. A inclusão de H^1_{anal} em H^1_{max} 38

3.3. A equivalência das definições 40

CAPÍTULO IV - OS ESPAÇOS h^1 SOBRE PRODUTOS DE FAIXAS...... 65

4.1. O espaço $h^1_{anal}(S \times S)$............................ 65

4.2. O espaço $h^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$............................ 82

4.3. O espaço $h^1_{max}(S \times S)$............................ 90

CAPÍTULO V - O PROBLEMA DA DUALIDADE DOS ESPAÇOS h^1...... 96

5.1. O espaço b.m.o. 96

5.2. O espaço $h^1_{atom}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$........................ 105

5.3. h^1_{atom} e h^1_{Hb} 117

REFERÊNCIAS.. 145

INTRODUÇÃO

Em 1972, C. Fefferman e E.M. Stein no clássico trabalho "H^p spaces of Several variables" ([8]) sugerem o desenvolvimento de uma teoria de espaços H^p sobre produtos de semi-planos. Desde então vários autores se ocuparam de diversos aspectos dessa teoria. Isto foi feito tanto do ponto de vista "analista" por Gundy-Stein [11], Chang [4], Chang-Fefferman [5], Fefferman [7], Bordin-Fernandez [2], etc., como do ponto de vista "probabilista" por Bernard [1], Brossard-Chevalier [3], Gundy [10], Sato [13], etc.

Este trabalho situa-se dentro de um programa de pesquisas que objetiva sistematizar a teoria dos espaços H^p sobre produtos de semi-espaços de modo paralelo a teoria "clássica" de Fefferman-Stein-Weiss ([8] e [15]). Lembrando que a teoria dos espaços H^p divide-se na teoria para $p=1$ e na teoria para os "outros" p's, nesta dissertação, focalizamos nossa atenção sobre os espaços H^1 sobre produtos de semi-espaços e sobre produtos de faixas.

Os espaços H^1 sobre produtos de semi-espaços já foram objetos de estudo em pelo menos duas teses: a de H. Sato ([14]), em Grenoble, que estudou a equivalência entre a definição "maximal" e a definição "via as transformadas de Hilbert parciais e duplas" e a de K.G. Merryfield [12], em Chicago, que estudou a

O principal resultado aqui é o análogo ao teorema de Stein-Weiss ([15, p.231]) sobre a existência de um p, com $0 < p < 1$, tal que $|F|^p$ é sub-harmônica. Gostaríamos de chamar a atenção que a demonstração original de Stein-Weiss não se adapta ao nosso caso. Portanto, novas idéias foram necessárias. Estas idéias envolvem certos resultados pouco conhecidos de A.P. Calderón e estudados por Coifman-Weiss [6].

A definição dos espaços H^1, sobre produtos de semi-espaços, "analítica" ou "clássica" é dada no Capítulo III. Lembramos também a definição "via as transformadas de Hilbert parciais e duplas" e demonstramos a equivalência das duas definições.

No Capítulo IV passamos a estudar os espaços H^1 sobre produtos de faixas. Estes espaços, denotados por h^1, foram introduzidos por Goldberg [9]. O aspecto fundamental aqui é que os espaços h^1 contêm os espaços S de Schwartz. Novamente aqui estabelecemos a equivalência entre as definições "clássica ou analítica" e a definição "via as transformadas de Hilbert modificadas, parciais e duplas".

Finalmente no Capítulo V estudamos o problema da dualidade para os espaços h^1. Introduzimos então os espaços b.m.o.$(\mathbb{R}^2)$ "não isotrópicos" e estudamos os espaços h^1 atômicos. Demonstramos que o dual de h^1 atômico é o b.m.o. Mas, temos somente que o dual do h^1 "analítico" está contido em b.m.o. No caso do produto de faixas, há pouca esperança de se obter uma caracterização completa do dual dos espaços h^1 analítico em termos dos espaços b.m.o. Para isso veja-se os resultados de Chang [4], Chang-Fefferman [5] e Fefferman [7].

Como foi mencionado no início desta introdução esta dissertação insere-se num amplo programa de pesquisa sobre os espaços H^p sobre domínios produtos. Mesmo no caso $p=1$, o qual aqui nos ocupamos, o assunto está longe de ser esgotado. Diversos problemas interessantes e alguns bastante difíceis estão ainda em aberto. Por outro lado, a maquinária matemática envolvida nesses problemas é não trivial e bastante rica. Tudo isso é, portanto, um convite para que no futuro continuemos nos ocupando do estudo deste tema.

CAPÍTULO I

ANÁLISE HARMÔNICA E BI-HARMÔNICA

Reuniremos neste Capítulo os resultados da Análise Harmônica e Bi-harmônica que serão utilizados posteriormente. Alguns desses resultados são clássicos (ver Stein-Weiss [17]) outros são mais recentes (ver Sato [14]) e alguns são novos (pelo menos não temos referências).

As funções aqui consideradas estarão definidas sobre produtos de semi-planos ou produtos de faixas.

1.1. PRELIMINARES

1.1.0. Indicaremos por $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$ os elementos da forma $(x,t\,;\,y,t)$ onde $x,y,s,t \in \mathbb{R}$ com $s,t > 0$. O *núcleo de Poisson* no semi-plano $\mathbb{R}_+^2 = \{(x,s) \mid x,s \in \mathbb{R}$ e $s > 0\}$ é:

(1) $$P_s(x) = c \cdot \frac{s}{s^2 + x^2} ,$$

onde a constante positiva c é escolhida de modo que P_s tenha massa total igual à 1, e o *núcleo de Poisson* conjugado é:

(2) $$Q_s(x) = c \cdot \frac{x}{s^2 + x^2} .$$

1.1.1. DEFINIÇÃO. Dizemos que uma função u, definida sobre $\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$ é bi-harmônica se u é harmônica em $(x,s) \in \mathbb{R}^2_+$ e em $(y,t) \in \mathbb{R}^2_+$, separadamente, isto é,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Exemplos de funções bi-harmônicas são as integrais de Poisson duplas de funções $g \in L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, com $1 \leq p \leq \infty$.

Sejam $x, \alpha \in \mathbb{R}$, com $\alpha > 0$. O cone com vértice $(x,0)$ e abertura α, em $\mathbb{R}^2_+$, é definido por

$$\Gamma_\alpha(x) = \{(x',s) \in \mathbb{R}^2_+ \mid |x - x'| < \alpha s\}$$

1.1.2. DEFINIÇÃO. Uma função u, definida sobre $\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$ é dita ter limite *não tangencial*, L, no ponto $(x_o, y_o) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, se $u(x,s;y,t)$ tende a L quando o ponto $(x,s;y,t)$ tende a (x_o, y_o), sem sair de $\Gamma_\alpha(x_o) \times \Gamma_\beta(y_o)$ para todo par (α, β) de números reais positivos (isto é, cada par $(x,s) \in \mathbb{R}^2_+$, $((y,t) \in \mathbb{R}^2_+))$, tende não tangencialmente a x_o, (a y_o)).

1.1.3. DEFINIÇÃO. Uma função, u, definida sobre $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$ é *não tangencialmente* limitada em $(x_o,y_o) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se u é limitada no produto cartesiano dos cones truncados:

$$\Gamma_\alpha(x_o) \cap \{(x,s) \mid 0 < s \leq 1\} \times \Gamma_\beta(y_o) \cap \{(y,t) \mid 0 < t \leq 1\}.$$

para cada par (α,β) de números positivos.

Se u é a integral de Poisson dupla de uma função $g \in L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, então, u é não tangencialmente limitada em quase todo $(x_o,y_o) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1.2. PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES BI-HARMÔNICAS

Necessitaremos de algumas propriedades básicas das funções bi-harmônicas em $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$. Para algumas delas daremos a prova, outras, apenas enunciaremos, e a prova destas pode ser encontrada, por exemplo, em [17].

1.2.1. LEMA. Seja $g \in L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Então

$$\lim_{s,t \to 0} ((P_s P_t) * g)(x,y) = g(x,y)$$

em quase toda parte, onde por $(P_s P_t) * g$ estamos indicando a integral de Poisson dupla de g:

$$(P_sP_t) * g(x,y) = \iint P_s(x-x')\, P_t(y-y')\, g(x',y')dx'dy' \;.$$

Um resultado mais geral que o lema anterior é o seguinte:

1.2.2. LEMA. Seja $g \in L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Então

$$u(x,s;y,t) = (P_sP_t) * g(x,y)$$

tem limite não tangencial, $g(x,y)$, em quase toda parte.

1.2.3. LEMA. Seja u bi-harmônica em $\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$ e tal que existe uma constante $C > 0$, finita, satisfazendo:

$$\sup_{s,t>0} \|u(\cdot,s;\cdot,t)\|_1 \leq C.$$

Então, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}} |u(x,s;y,t)| \leq KC/st.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja B_1 (resp. B_2) a bola aberta em $\mathbb{R}^2$ de centro (x,s) (resp. (y,t) e raio s (resp. t). Da propriedade do valor médio para funções harmônicas temos, fixando $(y,t) \in \mathbb{R}^2_+$,

$$(1) \quad |u(x,s;y,t)| \leq K|B_1|^{-1} \iint_{B_1} |u(x',s';y,t)|dx'ds'$$

onde K é uma constante. Da mesma forma

$$(2)\quad |u(x',s';y,t)| \leq K|B_2|^{-1} \iint_{B_2} |u(x',s';y',t')|dy'dt' .$$

Combinando (1) e (2), nós obtemos:

$$(3)\ |u(x,s;y,t)| \leq K|B_1\times B_2|^{-1} \iiiint_{B_1\times B_2} |u(x',s';y',t')|dx'ds'dy'dt' .$$

Seja $T_1 = I_1 \times J_1 = (x-s,x+s) \times (0,2s)$, (resp. $T_2 = I_2 \times J_2$). Então, existe constante K tal que

$$|T_i| = K|B_i| , \quad i=1,2 .$$

Além disso, $B_i \subset T_i$, $i=1,2$. Então, de (3), concluimos que:

$$|u(x,s;y,t)| \leq K|T_1\times T_2|^{-1} \iiiint_{T_1\times T_2} |u(x's';y't')|dx'ds'dy'dt' =$$

$$= K|I_1\times I_2|^{-1}|J_1\times J_2|^{-1}\iint_{J_1\times J_2} (\iint_{I_1\times I_2} |u(x',s';y',t')|dx'dy')ds'dt' \leq$$

$$\leq KC|J_1\times J_2|^{-1} |I_1\times I_2|^{-1}|J_1\times J_2| \leq KC/|I_1\times I_2| \leq KC/st ,$$

o que completa a demonstração do lema.

1.2.4. LEMA. Seja u satisfazendo as condições do lema anterior.

Então, u é a integral de Poisson dupla de uma medida de Borel finita, ν, isto é:

$$u(x,s;y,t) = \iint_{\mathbb{R}^2} P_s(x-x')\, P_t(y-y')\,d\nu(x',y').$$

DEMONSTRAÇÃO. Da hipótese, podemos escolher uma subsequência $u(x,s';y,t')$ que converge fracamente a uma medida de Borel finita, ν, quando $s',t' \longrightarrow 0$, isto é,

$$\iint g(x',y')\; u(x',s';y',t')dx'dy' \xrightarrow[s',t' \to 0]{} \iint g(x',y')d\nu(x',y')$$

para toda g contínua e que se anula no infinito. Como $g(x',y') = P_s(x-x')\; P_t(y-y')$ se anula no infinito e é contínua, para cada quádupla $(x,s;y,t)$ fixada. Então,

$$(1) \qquad \iint P_s(x-x')P_t(y-y')\; u(x's';y',t')dx'dy'$$

converge para

$$\iint P_s(x-x')\; P_t(y-y')d\nu(x',y') \quad ,$$

quando $s',t' \to 0$.

Suponhamos que a seguinte igualdade vale, (logo mais, a provaremos),

$$(2) \quad u(x,s+s';y,t+t') = \iint P_s(x-x')P_t(y-y')u(x',s';y',t')dx'dy'.$$

Então, em vista da continuidade de u em s e em t, e em vista da existência do limite duplo, (1), temos que

$$u(x,s;y,t) = \lim_{s'\to 0} u(x,s+s';y,t) =$$

$$= \lim_{s'\to 0} (\lim_{t'\to 0} u(x,s+s';y,t+t')) =$$

$$= \lim_{s',t'\to 0} u(x,s+s';y,t+t') =$$

$$= \iint P_s(x-x')\, P_t(y-y')\, d\nu(x',y').$$

Assim,

$$u(x,s;y,t) = \iint P_s(x-x')\, P_t(y-y')d\nu(x'y') .$$

Para a prova do lema estar completa, basta provarmos (2) e isso é o que faremos a seguir.

Sabemos que se uma função h é harmônica em $\mathbb{R}^2_+$ e limitada em cada semiplano próprio, $\mathbb{R}^2_+(s_o) = \{(x,s) \in \mathbb{R}^2_+ | 0 < s_o \leq s\}$, então, vale que:

$$(3) \qquad h(x,s+s') = \int P_s(x-x')\, h(x's')dx' .$$

Pelo lema 1.2.3. temos que existe $K > 0$ tal que:

$$|u(x,s;y,t)| \leq KC/st \ ,$$

para todo x e y em $\mathbb{R}$. Assim, fixado (y,t) e fixado $s_o > 0$, arbitrário, temos que se $s \geq s_o$, então,

$$|u(x,s;y,t)| \leq KC/st \leq KC/s_o t \ .$$

Assim, para cada par (y,t), fixado arbitrariamente, temos que u é limitada em cada $\mathbb{R}^2_+(s_o)$. Sendo u bi-harmônica, portanto, harmônica em (x,s), vem que, de (3),

$$u(x,s+s';y,t) = \int P_s(x-x')u(x',s';y,t)dx' \ .$$

Com argumento análogo, temos

$$u(x,s+s';y,t+t') = \int P_s(x-x')\left(\int P_t(y-y')u(x',s';y',t')dy'\right)dx'$$

e pelo teorema de Fubini,

$$u(x,s+s';y,t+t') = \iint P_s(x-x')\ P_t(y-y')\ u(x',s';y',t')dx'dy' \ .$$

e então (2) está provada, o que conclui a demonstração do lema.

1.2.5. LEMA. Seja u bi-harmônica em $\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$. Se u é não tangencialmente limitada em todos os pontos de um sub-conjunto $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, de medida positiva, então u tem limite não tangencial em quase todos os pontos ~~de~~ S.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [17].

1.3. OPERADORES DE HARDY - LITTLEWOOD E A FUNÇÃO MAXIMAL u^*.

O operador maximal de Hardy-Littlewood, é aquele que associa a cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, a função:

$$(Mf)(x) = \sup_{r>0} (\Omega_n r^n)^{-1} \int_{|x'|\leq r} |f(x-x')|dx' ,$$

onde Ω_n é o volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$. É sabido que, se $p > 1$, existe uma constante K, dependendo apenas da dimensão n e de p, tal que

$$\|Mf\|_p \leq K\|f\|_p$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Denotemos por $M^{10}f$ o operador maximal que associa a cada $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ a função maximal de Hardy-Littlewood de $f(\cdot,y)$, isto é,

$$(1.3.1)\qquad (M^{10}f)(x,y) = \sup_{r>0} (2r)^{-1} \int_{-r}^{r} |f(x-x',y)|dx'$$

Semelhantemente, definimos M^{01} por:

$$(1.3.2)\qquad (M^{01}f)^{-}(x,y) = \sup_{r>0} (2r)^{-1} \int_{-r}^{r} |f(x,y-y')|dy'$$

1.3.3. LEMA. Seja $f \in L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ com $1 < p \leq \infty$. Então, existe $K > 0$ tal que

$$\|M^{01}(M^{10}f)\|_p \leq K\|f\|_p .$$

DEMONSTRAÇÃO. Imediata do que foi observado no início de 1.3.

1.3.4. DEFINIÇÃO. Seja u bi-harmônica em $\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$. Definimos a função maximal u^*, de u sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, por:

$$u^*(u)(x,y) = \sup_{s,t>0} |u(x,s;y,t)| .$$

1.3.5. LEMA. Seja $1 < p \leq \infty$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que, para toda $f \in L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, tem-se que

$$\|u^*(u)\|_p \leq C\|f\|_p$$

onde u é a integral de Poisson de f, isto é, $u = (P_s P_t) * f$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $p = \infty$, então é imediato. Provaremos, o lema para $1 < p < \infty$.

$$u^*(u) = \sup_{s,t>0} \left| \iint P_s(x-x')P_t(y-y')f(x',y')dx'dy' \right| \leq$$

$$\leq \sup_{s,t>0} \iint P_s(x-x')\ P_t(y-y')\,|f(x',y')|\,dx'dy' =$$

$$= \sup_{s,t>0} \int P_s(x-x')\left(\int P_t(y-y')\,|f(x',y')|\,dy'\right)dx' \leq$$

$$\leq \sup_{s>0} \left(\int P_s(x-x')\ \sup_{t>0}\left(\int P_t(y-y')\,|f(x',y')|\,dy'\right)dx'\right) .$$

É sabido da análise harmônica, ver [15] (pág. 62) que se $1 < p < \infty$, existe uma constante $K > 0$ tal que para toda $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, tem-se que $\|\sup_{s>0} g * P_s\|_p \leq K\|g\|_p$. Então, fixando y, elevando u^* a potência p, e integrando com relação a x, temos,

$$\int u^*(u)^p(x,y)dx \leq K \int \left(\sup_{t>0}\left(\int P_t(y-y')\,|f(x',y')|\,dy'\right)\right)^p dx$$

e integrando em y, e aplicando novamente o resultado acima mencionado e aplicando o teorema de Fubini, temos,

$$\int\left(\int u^*(u)^p(x,y)dx\right)dy \leq K \iint |f(x,y)|^p\,dx\,dy$$

assim

$$\|u^*(u)\|_p \leq K\|f\|_p$$

isto é, se $f \in L^p$, $1 < p \leq \infty$, então u^* é limitado em L^p.

1.3.6. LEMA. Existe uma constante finita $K > 0$, tal que para toda $g \in L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, tem-se que se $u = (P_s P_t) * g$, então,

$$u^*(u)(x,y) \leq K\, M^{01}(M^{10}(u^*(u)))(x,y)$$

onde M^{10}, M^{01} são os operadores maximais parciais de Hardy-Littlewood definidos no início de 1.3.

DEMONSTRAÇÃO. Seja B_1 (resp. B_2) a bola aberta em $\mathbb{R}^2$ de centro (x,s) (resp. (y,t)) e raio s (resp. t). Seja $T_1 = I_1 \times J_1 = (x-s,x+s) \times (0,2s)$ (resp. $T_2 = I_2 \times J_2$). Temos então, que existe $K > 0$ tal que $|B_i| = K|T_i|$, $i = 1,2$.

Fixando (y,t), e tendo em conta que u é harmônica em (x,s), temos, pela propriedade do valor médio que existe $K > 0$ tal que

$$|u(x,s;y,t)| \leq K|B_1|^{-1} \iint_{B_1} |u(x',s';y,t)|dx'ds' .$$

Novamente, pela mesma propriedade, temos que,

$$|u(x',s';y,t)| \leq K|B_2|^{-1} \iint_{B_2} |u(x',s';y',t')|dy'dt' .$$

Combinando essas duas desigualdades então, por Fubini, temos,

$$|u(x,s;y,t)| \leq K|B_1 \times B_2|^{-1} \iiiint_{B_1 \times B_2} |u(x',s';y',t')|dx'ds'dy'dt'$$

$$\leq K|T_1 \times T_2|^{-1} \iiiint_{T_1 \times T_2} |u(x',s';y',t')|dx'ds'dy'dt'$$

$$\leq K|T_1 \times T_2|^{-1} \iint_{I_1 \times I_2} \sup_{s,t>0} |u(x',s';y',t')|dx'dy' =$$

$$= K|I_1 \times I_2|^{-1} \iint_{I_1\ I_2} u^*(u)(x',y')dx'dy' =$$

$$= K|I_2|^{-1} \int_{I_2} (|I_1|^{-1} \int_{I_1} u^*(u)(x',y')dx')dy' \leq$$

$$\leq K|I_2|^{-1} \int_{I_2} M^{10}(u^*(u))(x,y')dy' \leq$$

$$\leq K\ M^{01}(M^{10}(u^*(u)))(x,y).$$

o que completa a demonstração do lema.

1.4. FUNÇÕES BI-HARMÔNICAS SOBRE $S \times S$.

1.4.1. Seja $S = \{(x,s) \mid x \in \mathbb{R}$ e $0 < s < 1\}$ a faixa em $\mathbb{R}^2_+$. Os núcleos de Poisson para a faixa S podem ser obtidos usando a transformação conforme:

$$(u,v) \in \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \left(\frac{-\log\sqrt{u^2+v^2}}{\pi}, \frac{\arg(u,v)}{\pi}\right)$$

São eles:

(1) $$P^o_s(x) = \frac{\operatorname{sen} \pi s}{2(\cosh \pi x - \cos \pi s)}$$

(2) $$P^1_s(x) = P^o_{1-s}(x)$$

(3) $$P_s(x) = P^o_s(x) + P^1_s(x) = \frac{\operatorname{sen} \pi s \quad \cosh \pi x}{\cos^2 \pi x - \cos^2 \pi s}$$

(4) $$\hat{P}_s(x) = \frac{\cosh(1-2s)\pi |x|}{\cosh \pi |x|}$$

(5) $$Q^o_s(x) = \frac{\cosh \pi s - e^{\pi x}}{2(\cosh \pi x - \cos \pi s)}$$

$$(6) \qquad Q_s^1(x) = \frac{\cos \pi s + e^{\pi x}}{2(\cosh \pi x + \cos \pi s)} = - Q_{1-s}^0(x)$$

$$(7) \qquad Q_s(x) = - \frac{\cos \pi s - \operatorname{senh} \pi x}{\cosh^2 \pi x - \cos^2 \pi s}$$

A seguir enunciaremos alguns lemas da análise harmônica sobre a faixa dupla $S \times S$; alguns dos quais daremos a demonstração, outros, daremos a bibliografia.

1.4.2. LEMA. Seja f_k uma função contínua e limitada em $\mathbb{R}^2$, para cada $k \in \square$. Então, existe uma função, F, definida sobre $S \times S$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) F é bi-harmônica em $S \times S$

(ii) F é contínua em $\bar{S} \times \bar{S}$

(iii) $F(x,k_1;y,k_2) = f_k(x,y)$, $k = (k_1,k_2) \in \square$.

A função F é:

$$F(x,s;y,t) = \sum_{k \in \square} \iint P_s(x-x')P_t(y-y')f_k(x',y')dx'dy' \, .$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver J. I. Bertolo, Tese de Doutorado. IMECC - UNICAMP, 1982.

1.4.3. LEMA. Seja u bi-harmônica em $S \times S$ e tal que:

$$\sup_{0<s,t<1} \iint |u(x,s;y,t)|dxdy < \infty .$$

Então,

(i)

$$u(x,s+s';y,t+t') = \iint P_s^{1-2s'}(x-x')P_t^{1-2t'}(y-y')u(x,s';y,t')\,dx'dy'$$

onde, por $P_s^a(x)$ estamos indicando a função tal que

$$\hat{P}_s^a(x) = \frac{\cosh(a-2s)\pi|x|}{\cosh a\pi|x|} ,$$

isto é,

$$P_s^a(x) = \frac{1}{a} P_{s/a}(x/a) .$$

(ii) Existe uma medida de Borel finita, ν, tal que:

$$u(x,s;y,t) = \iint P_s(x-x')\, P_t(y-y')d\nu(x',y') .$$

DEMONSTRAÇÃO. Faremos a demonstração para funções simétricas em relação a $s = t = 1/2$, isto é, para funções que satisfazem:

$$u(x,1-s;y,t) = u(x,s;y,t)$$

$$u(x,s;y,1-t) = u(x,s;y,t)$$

O mesmo raciocínio é válido se u é antisimétrica, isto é,

$$u(x,1-s;y,t) = -u(x,y,s,t)$$

$$u(x,s;y,1-t) = -u(x,y,s,t)$$

E para o caso geral, basta observarmos que u é a soma de quatro funções simétricas e antisimétricas em relação a $s = t = 1/2$. Assim sendo, trabalharemos com $0 < s,t < 1/2$.

É conhecido o seguinte resultado para funções harmônicas em S: se $w(x,s)$ é harmônica em S, $0 < s < 1/2$, então vale que:

$$w(x,s+s') = \int P_s^{1-2s'}(x-x')\, w(x',s')dx' .$$

No caso em que $u(x,s;y,t)$ é bi-harmônica em $S \times S$, temos que fixado o par $(y,t+t') \in S$, u é harmônica em relação a (x,s), logo,

$$u(x,s+s' ; y,t+t') = \int P_s^{1-2s'}(x-x')u(x',s';y,t+t')dx' ,$$

do mesmo modo,

$$u(x',s';y,t+t') = \int P_t^{1-2t'}(y-y')u(x',s' ; y',t')dy' ,$$

assim, combinando as duas últimas igualdades, temos que:

$$u(x,s+s';y,t+t') = \int P_s^{1-2s'}(x-x')\left(\int P_t^{1-2t'}(y-y')u(x',s';y',t')dy'\right)dx'$$

e, então,

$$u(x,s+s';y,t+t') = \iint P_s^{1-2s'}(x-x')\ P_t^{1-2t'}(y-y')u(x',s';y',t')dx'dy'$$

e assim, (i) está provada.

Provemos, agora, (ii). Como, por hipótese, $\|u(\cdot,s;\cdot,t)\|_1$ é limitada uniformemente em s,t, então, existe uma subsequência $u(\cdot,s';\cdot,t')$ que converge fracamente a uma medida de Borel finita, ν, quando s' e t' tendem a zero, isto é:

$$\iint g(x',y')\ u(x',s';y',t')dx'dy'$$

converge para

$$\iint g(x',y')d\nu(x',y')$$

quando $s',t' \longrightarrow 0$ para toda função g contínua e que se anula no ∞. Em particular, fixado $(x,s;y,t)$, consideramos

$$g(x',y') = P_s(x-x')\ P_t(y-y')\ ,$$

como P_s e $P_t \in S(\mathbb{R})$ (espaço das funções rapidamente decrescentes), então g, assim definida, é contínua e se anula no infinito, logo:

$$(1) \qquad \iint P_s(x-x')\; P_t(y-y')u(x',s';y',t')dx'dy'$$

converge para

$$\iint P_s(x-x')\; P_t(y-y')d\nu(x',y')$$

quando $s',t' \longrightarrow 0$.

Por outro lado, por (i), temos que:

$$\| u(x,s+s';y,t+t') - \iint P_s(x-x')P_t(y-y')u(x',s';y',t')dx'dy'\|_\infty =$$

$$= \|\iint P_s^{1-2s'}(x-x')P_t^{1-2t'}(y-y')u(x',s';y',t')dx'dy' -$$

$$- \iint P_s(x-x')\; P_t(y-y')\; u(x',s';y',t')dx'dy'\|_\infty$$

$$= \|\iint [P_s^{1-2s'}(x-x')P_t^{1-2t'}(y-y')-P_s(x-x')P_t(y-y')]u(x',s';y',t')dx'dy'\|_\infty \leq$$

$$\leq \|P_s^{1-2s'}\; P_t^{1-2t'} - P_s\; P_t\|_\infty \|u(\cdot,s'\,;\,\cdot,t')\|_1 \leq$$

$$\leq C\|P_s^{1-2s'}\; P_t^{1-2t'} - P_s\; P_t\|_\infty\,.$$

$$\int |\hat{P}_s^{1-2s'}(\xi) - \hat{P}_s(\xi)|d\xi$$

converge para zero, quando $s' \longrightarrow 0$, e analogamente

$$\int |\hat{P}_t^{1-2t'}(\eta) - \hat{P}_t(\eta)|d\eta \longrightarrow 0 \ ,$$

converge para zero, quando $t' \longrightarrow 0$. Também

$$\int |\hat{P}_t^{1-2t'}(\eta)|d\eta$$

converge para

$$\int |\hat{P}_t(\eta)|d\eta$$

quando $t' \longrightarrow 0$. Logo

$$\|u(x,s+s';y,t+t') - \iint P_s(x-x')P_t(y-y')u(x',s';y',t')dx'dy'\|_\infty \leq$$

$$\leq C\left[\int |\hat{P}_t^{1-2t'}(\eta)|d\eta \cdot \int |\hat{P}_s^{1-2s'}(\xi) - \hat{P}_s(\xi)|d\xi + \right.$$

$$\left. + \int |\hat{P}_s(\xi)|d\xi \int |\hat{P}_t^{1-2t'}(\eta) - \hat{P}_t(\eta)|d\eta\right]$$

que converge a 0 quando $s',t' \longrightarrow 0$. Assim, Mas, como todos os núcleos de Poisson são elementos de $S(\mathbb{R})$, então, vale a fórmula da inversão para a transformada de Fourier:

$$|P_s^{1-2s'}(x)\ P_t^{1-2t'}(y) - P_s(x)\ P_t(y)| =$$

$$= \left|\iint (\hat{P}_s^{1-2s'}(\xi)\hat{P}_t^{1-2t'}(\eta) - \hat{P}_s(\xi)\hat{P}_t(\eta)e^{-2\pi i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta\right| \leq$$

$$\leq \iint |\hat{P}_s^{1-2s'}(\xi)\hat{P}_t^{1-2t'}(\eta) - \hat{P}_s(\xi)\ \hat{P}_t(\eta)|d\xi d\eta \leq$$

$$\leq \iint |\hat{P}_s^{1-2s'}(\xi)\ \hat{P}_t^{1-2t'}(\eta) - \hat{P}_t^{1-2t'}(\xi)\ \hat{P}_s(\eta)|d\xi d\eta +$$

$$+ \iint |\hat{P}_t^{1-2t'}(\eta)\ \hat{P}_s(\xi) - \hat{P}_s(\xi)\ \hat{P}_t(\eta)|d\xi d\eta =$$

$$= \int |\hat{P}_t^{1-2t'}(\eta)d\eta \cdot \int |\hat{P}_s^{1-2s'}(\xi) - \hat{P}_s(\xi)|d\xi +$$

$$+ \int |\hat{P}_s(\xi)|d\xi \cdot \int |\hat{P}_t^{1-2t'}(\eta) - \hat{P}_t(\eta)|d\eta\ .$$

Pelo teorema da convergência monótona, uma vez que $\hat{P}_s^{1-2s'}(x)$ é crescente em s', temos que

$$u(x,s+s';y,t+t') - \iint P_s(x-s')P_t(y-y')u(x',s';y',t')dx'dy'$$

converge a 0, quando $s',t' \longrightarrow 0$. Então, por (1), temos que

$$\iint P_s(x-x')\ P_t(y-y')d\nu(x',y') =$$

$$= \lim_{s',t' \to 0} \int P_s(x-x')P_t(y-y')u(x',s';y',t')dx'dy' =$$

$$= \lim_{s',t' \to 0} u(x,s+s'\,;\,y,t+t') =$$

$$= \lim_{s' \to 0}\ (\lim_{t' \to 0}\ u(x,s+s'\,;\,y,t+t')) =$$

$$= \lim_{s' \to 0} u(x,s+s'\,;\,y,t) = u(x,s\,;\,y,t)$$

uma vez que $u(x,s;y,t)$ é contínua em (x,s) e em (y,t) separadamente. Assim, a demonstração do lema está concluída.

CAPÍTULO II

UM SISTEMA CONJUGADO DO TIPO CAUCHY-RIEMANN

Introduziremos neste capítulo uma noção de sistema conjugado de funções, $F = u_k$, $k \in \square$, que generaliza o sistema clássico de Cauchy-Riemann. O resultado principal será sobre a sub-harmonicidade de certas potências $|F|^p$ do sistema, generalizando resultados de E.M. Stein e G. Weiss.

2.1. UM SISTEMA CONJUGADO

No que segue usaremos a seguinte notação:

$\square = \{(0,0);\ (1,0);\ (0,1);\ (1,1)\}$.

2.1.1. DEFINIÇÃO. Para cada $k \in \square$, seja u_k uma função real bi-harmônica em $\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$. Dizemos que $F = (u_k)_{k \in \square}$ é um sistema conjugado se as seguintes equações se verificarem:

$$\frac{\partial u_{00}}{\partial s} + \frac{\partial u_{10}}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_{01}}{\partial s} + \frac{\partial u_{11}}{\partial x} = 0$$

(1)

$$\frac{\partial u_{00}}{\partial x} - \frac{\partial u_{10}}{\partial s} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_{01}}{\partial x} - \frac{\partial u_{11}}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial u_{00}}{\partial t} + \frac{\partial u_{01}}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_{10}}{\partial t} + \frac{\partial u_{11}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u_{00}}{\partial y} - \frac{\partial u_{01}}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_{10}}{\partial y} - \frac{\partial u_{11}}{\partial t} = 0$$

Observemos que o sistema acima (1), pode ser colocado na seguinte forma matricial:

$$(2) \qquad A_1 \frac{\partial F}{\partial s} + A_2 \frac{\partial F}{\partial x} + A_3 \frac{\partial F}{\partial t} + A_4 \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

onde A_j são as matrizes 8×4:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & & 0 & \end{array}\right) \qquad A_2 = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & 0 & \end{array}\right)$$

$$A_3 = \left(\begin{array}{cccc} & & 0 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad A_4 = \left(\begin{array}{cccc} & & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial s} = (\frac{\partial u_{00}}{\partial s}, \frac{\partial u_{10}}{\partial s}, \frac{\partial u_{01}}{\partial s}, \frac{\partial u_{11}}{\partial s}) = (\frac{\partial u_k}{\partial s})_{k \in \square}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (\frac{\partial u_{00}}{\partial x}, \frac{\partial u_{10}}{\partial x}, \frac{\partial u_{01}}{\partial x}, \frac{\partial u_{11}}{\partial x}) = (\frac{\partial u_k}{\partial x})_{k \in \square}$$

e analogamente

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (\frac{\partial u_k}{\partial t})_{k \in \square} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = (\frac{\partial u_k}{\partial y})_{k \in \square}$$

2.1.2. EXEMPLO. Seja $f \in L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, seja $P_s(x)$ o núcleo de Poisson no semiplano $\mathbb{R}^2_+$ e $Q_s(x)$ o núcleo de Poisson conjugado. Definimos,

$$u_{00}(x,s;y,t) = (P_s P_t) * f(x,y)$$

$$u_{10}(x,s;y,t) = (Q_s P_t) * f(x,y)$$

$$u_{01}(x,s;y,t) = (P_s Q_t) * f(x,y)$$

$$u_{11}(x,s;y,t) = (Q_s Q_t) * f(x,y).$$

É fácil verificar que $F = (u_k)_{k \in \square}$ é um sistema conjugado.

2.2. SISTEMAS ELÍPTICOS

Nosso objetivo neste capítulo é mostrar que todo sistema conjugado, $F = (u_k)$, tem a propriedade da sub-harmonicidade e da bi-sub-harmonicidade, isto é, existem p e $p' \in (0,1)$ tal que $|F|^p$ é sub-harmônica e $|F|^{p'}$ é bi-sub-harmônica. Para isso, necessitamos do conceito de sistema elípticos e de uma desigualdade, devido a A.P. Calderón, ver [6].

2.2.1. DEFINIÇÃO. Seja $G = (G_1, G_2, \ldots, G_m)$ um sistema de funções a valores reais, de classe C^1, definidas num domínio $D \subset \mathbb{R}^n$, satisfazendo:

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial G}{\partial x_j} = 0$$

onde A_j são matrizes constantes $d \times m$ e $\partial G/\partial x_j$ são os vetores colunas tendo componentes $\partial G_i/\partial x_j$, $i=1,2,\ldots,m$. Dizemos então que o sistema (1) é um sistema elíptico se para um vetor coluna m - dimensional v e uma enupla $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, a condição

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j v = 0$$

implique

(3) $\qquad v = 0 \qquad$ ou $\qquad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0$,

e que as matrizes A_j são as matrizes do sistema elíptico.

2.2.2. LEMA. Sejam v e $u^1, \ldots, u^n$ vetores de $\mathbb{R}^m$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e $A_1, \ldots, A_n$ as matrizes $d \times m$ de um sistema elíptico. Suponhamos que

(1) $$\sum_{j=1}^{n} A_j\, u^{(j)} = 0$$

e

(2) $$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j v = 0 \quad (\text{portanto } \lambda = 0 \text{ ou } v = 0)$$

Então, existe um número real a, $0 < a < 1$, tal que

(3) $$\max_{|v| = 1} \sum_{j=1}^{n} (u^{(j)} \cdot v)^2 \leq a \sum_{j=1}^{n} |u^{(j)}|^2$$

a dependendo somente da família de matrizes $(A_j)_j$.

DEMONSTRAÇÃO. Esse lema foi demonstrado por Calderón. Ver [6].

2.2.3. PROPOSIÇÃO. Todo sistema conjugado, $F = (u_k)_{k \in \square}$, é um sistema elíptico.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ e $v = (v_1,v_2,v_3,v_4)$ elementos de $\mathbb{R}^4$ que satisfaçam o sistema:

$$\sum_{j=1}^{4} \lambda_j A_j v = 0$$

onde as matrizes A_j são as matrizes 8×4, (2), em 2.1.1. Para provarmos a elipticidade de F devemos provar que $\lambda = 0$ ou $v = 0$. Suponhamos que $v \neq 0$ e, então, provemos que $\lambda = 0$. Com efeito,

$$\sum_{j=1}^{4} \lambda_j A_j v = 0$$

ẽ equivalente a

$$\begin{array}{llcll}
\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 & \text{(i)} & , & \lambda_3 v_1 + \lambda_4 v_3 = 0 & \text{(v)} \\
-\lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_1 = 0 & \text{(ii)} & , & -\lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_1 = 0 & \text{(vi)} \\
\lambda_1 v_3 + \lambda_2 v_4 = 0 & \text{(iii)} & , & \lambda_3 v_2 + \lambda_4 v_4 = 0 & \text{(vii)} \\
-\lambda_1 v_4 + \lambda_2 v_3 = 0 & \text{(iv)} & , & -\lambda_3 v_4 + \lambda_4 v_2 = 0 & \text{(viii)}
\end{array}$$

Suponhamos que $v_1 \neq 0$, por exemplo. Então, de (i) e (ii) concluimos que:

$$\lambda_1 = -(\lambda_2/v_1)v_2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 v_2^2 + \lambda_2 v_1^2 = 0 \quad ,$$

como $v_1 \neq 0$ então $\lambda_2 = 0$, e assim também $\lambda_1 = 0$. Com mesmo raciocínio, usando (v) e (vi) provamos que $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Assim, $v \neq 0$ implica que $\lambda = 0$, logo o sistema é elíptico.

Depois destes preliminares estamos em condições de enunciar e demonstrar o resultado mais importante deste capítulo.

2.2.4. TEOREMA. Seja $F = (u_k)_{k \in \square}$ um sistema conjugado. Então

(i) Existe p, $0 < p < 1$ tal que $|F|^p$ é sub-harmônica, isto é,

$$\Delta |F|^p = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \geq 0$$

(ii) Existem p_1 e p_2, $0 < p_1, p_2 < 1$, tal que $|F|^{p_1}$ é sub-harmônica com relação a $(x,s) \in \mathbb{R}^2_+$ e $|F|^{p_2}$ é sub-harmônica com relação a $(y,t) \in \mathbb{R}^2_+$, isto é,

$$\Delta_{10} |F|^{p_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \geq 0 \quad \text{e} \quad \Delta_{01} |F|^{p_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \geq 0.$$

Antes de demonstrarmos o teorema, façamos alguns comentá - rios sobre a sub-haomonicidade de uma função. Lembremos que uma função contínua, ϕ, sobre um domínio $U \subset \mathbb{R}^m$ é sub-harmônica se, para cada ponto $x \in U$, existe $r_x > 0$ tal que

(1) $$\phi(x) \leq \frac{1}{w_{m-1} r^{m-1}} \int_{|y-x|=r} \phi(y)\,dy$$

para $0 \leq r < r_x$, onde w_{m-1} é a medida da esfera unitária Σ_{m-1} em $\mathbb{R}^m$. Se ϕ é de classe C^2, é bem conhecido que a desigualdade (1), é equivalente a $\Delta\phi \geq 0$ em U. Se $\phi = |F|^p$, então, nossa função é de classe C^2 em

$$V = \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ - \{(x,s;y,t) \mid F(x,s;y,t) = 0\}.$$

Assim, teremos a desigualdade do valor médio, (1), desde que provemos que $\Delta\phi(x) \geq 0$ sobre V, uma vez que $\phi \geq 0$ implica a validade de (1) para os pontos x tais que $F(x) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.2.4. Provemos (i). Com os comentários feitos anteriormente vamos nos restringir ao conjunto

$$V = \{(x,s;y,t) \in \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \mid F(x,s;y,t) \neq 0\}$$

Calculemos $\Delta|F|^p$.

$$\frac{\partial|F|^p}{\partial s} = \frac{\partial(F\cdot F)^{p/2}}{\partial s} = p|F|^{p-2}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\cdot F\right)$$

e

$$\frac{\partial^2|F|^p}{\partial s^2} = p(p-2)|F|^{p-4}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\cdot F\right)^2 + p|F|^{p-2}\left\{\left|\frac{\partial F}{\partial s}\right|^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\cdot F\right)\right\}.$$

Semelhantemente calculamos $\dfrac{\partial^2 |F|^p}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 |F|^p}{\partial t^2}$, $\dfrac{\partial^2 |F|^p}{\partial y^2}$.

Assim,

$$\Delta |F|^p = p(p-2)|F|^{p-4}\{(\frac{\partial F}{\partial s}\cdot F)^2 + (\frac{\partial F}{\partial x}\cdot F)^2 + (\frac{\partial F}{\partial t}\cdot F)^2 + (\frac{\partial F}{\partial y}\cdot F)^2\} +$$

$$+ p|F|^{p-2}\{|\frac{\partial F}{\partial s}|^2 + |\frac{\partial F}{\partial x}|^2 + |\frac{\partial F}{\partial t}|^2 + |\frac{\partial F}{\partial y}|^2 +$$

$$+ F\cdot(\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2})\}$$

Levando em conta a bi-harmonicidade de cada u_k, temos,

$$\Delta |F|^p = p|F|^{p-2}\{|\frac{\partial F}{\partial s}|^2 + |\frac{\partial F}{\partial x}|^2 + |\frac{\partial F}{\partial t}|^2 + |\frac{\partial F}{\partial y}|^2 +$$

$$+ (p-2)|F|^{-2}[(\frac{\partial F}{\partial s}\cdot F)^2 + (\frac{\partial F}{\partial x}\cdot F)^2 + (\frac{\partial F}{\partial t}\cdot F)^2 + (\frac{\partial F}{\partial y}\cdot F)^2]\}.$$

Aplicando o lema 2.2.2 com $v = F/|F|$ e $u^1 = dF/ds$, $u^2 = \partial F/\partial x$, $u^3 = \partial F/\partial t$, $u^4 = \partial F/\partial y$ temos que existe um número a, $0 < a < 1$, tal que

$$(\frac{F}{|F|}\cdot\frac{\partial F}{\partial s})^2 + (\frac{F}{|F|}\cdot\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{F}{|F|}\cdot\frac{\partial F}{\partial t})^2 + (\frac{F}{|F|}\cdot\frac{\partial F}{\partial y})^2 \leq$$

$$\leq a\left[\left|\frac{\partial F}{\partial s}\right|^2 + \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|^2\right] .$$

Assim, se $p \geq 2-1/a$, temos que $p-2 \geq -1/a$ e portanto que $\Delta|F|^p \geq 0$, o que prova (i) do teorema.

Prova de (ii). Provaremos a sub-harmonicidade apenas com relação a (x,s), com relação a (y,t) segue analogamente. Por hipótese, $F = (u_k)$ é um sistema conjugado, logo suas componentes satisfazem as seguintes equações, de (1), na definição 2.1.1.

$$\frac{\partial u_{00}}{\partial s} + \frac{\partial u_{10}}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_{01}}{\partial s} + \frac{\partial u_{11}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u_{00}}{\partial x} - \frac{\partial u_{10}}{\partial s} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_{01}}{\partial x} - \frac{\partial u_{11}}{\partial s} = 0$$

Podemos colocar essas equações na seguinte forma matricial:

$$B_1 \frac{\partial F}{\partial s} + B_2 \frac{\partial F}{\partial x} = 0 .$$

onde

$$B_1 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \qquad e \quad B_2 = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Assim, temos um sistema elíptico, uma vez que se,

$\sum_{j=1}^{2} \lambda_j B_j v = 0$ então $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = 0$ ou $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) = 0$.

Logo, pelo lema 2.2.2, existe a_1, $0 < a_1 < 1$, dependendo apenas de B_1 e B_2 tal que:

$$(1) \qquad \left(\frac{F}{|F|} \cdot \frac{\partial F}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{F}{|F|} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \leq a_1 \left(\left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|^2\right)$$

Calculando o laplaciano, $\Delta_{10}|F|^{p_1}$, de $|F|^{p_1}$ com relação a (x,t), p_1 a ser determinado, temos,

$$\Delta_{10}|F|^{p_1} = p_1(p_1-2)|F|^{p_1-4}\left\{\left(F \cdot \frac{\partial F}{\partial s}\right)^2 + \left(F \cdot \frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right\}$$

$$+ p_1|F|^{p_1-2}\left\{\left|\frac{\partial F}{\partial s}\right|^2 + \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|^2 + F \cdot \left(\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\right\}$$

Como F é bi-harmônica, então $\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0$,

Logo ,

$$\Delta_{10}|F|^{p_1} = p_1|F|^{p_1-2}\{|\frac{\partial F}{\partial s}|^2 + |\frac{\partial F}{\partial x}|^2 +$$

$$+ (p_1-2)[(\frac{F}{|F|}\cdot\frac{\partial F}{\partial s})^2 + (\frac{F}{|F|}\cdot\frac{\partial F}{\partial x})^2]\}$$

Tomando $p_1 \geq 2-1/a_1$, a_1 em (1), então $p_1-2 \geq 1/a$ e, portanto, $\Delta_{10}|F|^{p_1} \geq 0$, e assim a primeira parte de (ii) está concluída. A segunda parte é provada analogamente.

CAPÍTULO III

O ESPAÇO DE HARDY $H^1(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$.

O objetivo deste capítulo é introduzir várias definições do espaço de Hardy $H^1(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$ e mostrar suas equivalências. Estas definições são as dadas pela via analítica, via a função maximal, via as transformadas de Hilbert parciais e dupla.

3.1. OS ESPAÇOS $H^1(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$.

3.1.1. DEFINIÇÃO. A classe de Hardy $H^1_{anal}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$ é o espaço vetorial dos sistemas conjugados que verificam a condição:

$$(1) \qquad \sup_{s,t>0} \iint |F(x,s;y,t)|\,dx\,dy < \infty .$$

Munimos o espaço $H^1_{anal}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$ com a norma:

$$(2) \qquad \|F\|_{H^1_{anal}} = \sup_{s,t>0} \iint |F(x,s;y,t)|\,dx\,dy$$

3.1.2. DEFINIÇÃO. Seja $f \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. A transformada de Fourier de f é definida por:

$$\hat{f}(x,y) = \iint f(x',y')e^{2\pi i(xx'+yy')}\,dx'dy'$$

3.1.3. DEFINIÇÃO. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Suas transformadas de Hilbert, $H_k f$, $k \in \square$, são as distribuições temperadas definidas por:

$$F(H_{10}f)(x,y) = i\,\mathrm{sg}\,x\,\hat{f}(x,y)$$

$$F(H_{01}f)(x,y) = i\,\mathrm{sg}\,y\,\hat{f}(x,y)$$

$$F(H_{11}f)(x,y) = (i\,\mathrm{sg}\,x)(i\,\mathrm{sg}\,y)\hat{f}(x,y).$$

Da mesma forma são definidas as transformadas de Hilbert de uma medida de Borel finita μ sobre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

3.1.4. DEFINIÇÃO. $H^1_{Hb}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ é o espaço vetorial das funções $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, a valores reais, tais que suas transformadas de Hilbert, $H_k f$, estão em $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

Munimos o espaço $H^1_{Hb}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ com a seguinte norma:

$$\|f\|_{H^1_{Hb}} = \sum_{k\in\square} \|H_k f\|_1$$

onde $H_{00}f = f$.

Notamos que se $f \in H^1_{Hb}$, então $\int f(x,y)dx=0$, $\int f(x,y)dy = 0$, isso decorre imediatamente da definição 3.1.3.

Observamos que quem primeiro trabalhou com tais transformadas e com o espaço $H^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ foi Sato [13]. Este definiu, também, o espaço H^1_{max} e mostrou a equivalência do H^1_{max} e H^1_{Hb}, via métodos probabilísticos [13]. O objetivo deste capítulo é introduzir o espaço H^1_{anal} e mostrar a equivalência com H^1_{Hb}.

Observemos que se $f \in H^1_{Hb}$, então, os momentos na direção x e na direção y são nulos. Dai o fato do espaço das funções rapidamente decrescentes, $S(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, não estar contido em H^1_{Hb}.

O que faremos a seguir é dar a definição do espaço $H^1_{max}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$.

No capítulo I, definição 1.3.4, definimos a função maximal de uma função bi-harmônica u, sobre $\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$ por:

$$u^*(u)(x,y) = \sup_{s,t>0} |u(x,s;y,t)|$$

3.1.5. DEFINIÇÃO. $H^1_{max}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$ é o espaço vetorial das funções bi-harmônicas reais, u, sobre $\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$ que verificam $u^*(u) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Munimos $H^1_{max}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$ com a seguinte norma:

$$\|u\|_{H^1_{max}} = \|u^*(u)\|_1$$

3.2. $H^1_{anal}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+) \hookrightarrow H^1_{max}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$

O objetivo deste parágrafo é mostrar que o espaço H^1_{anal} está continuamente imerso em H^1_{max}.

3.2.1. TEOREMA. O espaço H^1_{anal} está continuamente imerso em H^1_{max}.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $F \in H^1_{anal}$. Logo $F = (u_k)_{k \in \square}$ satisfaz:

$$\sup_{s,t>0} \|u(\cdot,s\,;\,\cdot,t)\|_1 < \infty.$$

Assim, cada u_k é bi-harmônica e mais, $u_k^*(u_k) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, pois:

$$\iint |u_k^*(u_k)(x,y)|\,dx\,dy = \iint \sup_{s,t>0} |u_k(x,s;y,t)|\,dx\,dy\,.$$

Mas,

$$|u_k(x,s;y,t)| \leq |F(x,s;y,t)|,$$

logo,

$$\sup_{s,t>0} |u_k(x,s;y,t)| \leq \sup_{s,t>0} |F(x,s;y,t)|.$$

Assim,

$$\iint \sup_{s,t>0} |u_k(x,s;y,t)|dxdy \leq \iint \sup_{s,t>0} |F(x,s;y,t)|dxdy < \infty$$

e então,

$$u^*_k(u_k) \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \quad \text{com}$$

$$\|u_k^*(u_k)\|_1 \leq \|F\|_{H^1_{anal}} .$$

Então, definamos u por:

$$u(x,s;y,t) = \sum_{k\in\square} u_k(x,s;y,t)$$

e então, u é bi-harmônica em $\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$ e além disso temos:

$$\|u^*(u)\|_1 = \iint \sup_{s,t>0} |u(x,s;y,t)|dxdy \leq$$

$$\leq \iint \sup_{s,t>0} \left(\sum_{k\in\square} |u_k(x,s;y,t)|dxdy\right.$$

$$\leq \sum_{k\in\square} \iint \sup_{s,t>0} |u_k(x,s;y,t)|dxdy \leq$$

$$\leq \sum_{k\in\square} \|F\|_{H^1_{anal}} = C\|F\|_{H^1_{anal}} .$$

Assim, a cada $F \in H^1_{anal}$ fizemos corresponder um elemento $u \in H^1_{max}$ com

$$\|u\|_{H^1_{max}} \leq C\|F\|_{H^1_{anal}}$$

3.3. EQUIVALÊNCIA DAS DEFINIÇÕES.

$$H^1_{anal}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+) \approx H^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

A seguir provaremos um resultado que é o ponto central para a demonstração da equivalência entre os espaços $H^1_{anal}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$ e $H^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

3.3.1. TEOREMA. Seja $F = (u_k,\ k \in \square) \in H^1_{anal}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$. Então existe uma constante C tal que

$$(1) \quad \iint \sup_{s,t>0} |F(x,s;y,t)|dxdy \leq C \sup_{s,t>0} \iint |F(x,s;y,t)|dxdy \ ,$$

e

$$(2) \qquad \lim_{s,t\to 0} F(x,s;y,t) = F(x,y) \ ,$$

existe em quase toda parte e em norma L^1.

DEMONSTRAÇÃO. Vamos supor que cada u_k assuma valores no espaço $V_1 = \{(x,0,0)/x \in \mathbb{R}\}$. Também, vamos considerar um outro espaço de Hilbert, V_2, de dimensão finita e seja $V = V_1 \oplus V_2$ a soma direta de V_1 e V_2 (V_1 e V_2 são complementos ortogonais em V).

Consideremos um sistema conjugado

$$\phi(v_k,\ k \in \square) : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow V_2$$

que satisfaça

$$(3) \qquad \phi|(x,s;y,t)|^2 = 2/[x^2 + (1+s)^2]^2[y^2 + (1+t)^2]^2$$

Um tal sistema conjugado existe. De fato, consideremos a seguinte função definida sobre $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$:

$$(4) \qquad H(x,s;y,t) = (1/2)\log[(x^2 + (1+s)^2)^{-1}(y^2 + (1+t)^2)^{-1}]$$

Como

$$\frac{\partial^2 H}{\partial s^2} = [(1+s)^2 - x^2)]/[x^2 + (1+s)^2]^2 = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x} = 2x(1+s)/[x^2 + (1+s)^2]^2$$

As expressões de $\partial^2H/\partial t^2$, $\partial^2H/\partial y^2$ e $\partial^2H/\partial t\partial y$ são idênticas. Assim, H é bi-harmônica.

Definamos cada v_k, $k \in \square$, por:

$$v_{00} = (\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 H}{\partial s\partial x}\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial y})$$

$$v_{10} = (\frac{\partial^2 H}{\partial s\partial x}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial y})$$

$$v_{01} = (\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial y}, \frac{\partial^2 H}{\partial s\partial x}\frac{\partial^2 H}{\partial y^2})$$

$$v_{11} = (\frac{\partial^2 H}{\partial s\partial x}\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial y}, \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\frac{\partial^2 H}{\partial y^2})$$

Como H é bi-harmônica é fácil concluir que cada v_k é também bi-harmônica. Agora, calculando as derivadas de primeira ordem de cada v_k, temos:

$$\frac{\partial v_{00}}{\partial s} = (\frac{\partial^3 H}{\partial s^3}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \frac{\partial^3 H}{\partial s^2\partial x}\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial y})$$

$$\frac{\partial v_{00}}{\partial x} = \frac{\partial^3 H}{\partial s^2\partial x}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \frac{\partial^3 H}{\partial s\partial x^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial y})$$

$$\frac{\partial v_{00}}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s^2} \; \frac{\partial^3 H}{\partial t^3} \, , \; \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x} \; \frac{\partial^3 H}{\partial t^2 \partial y}\right)$$

$$\frac{\partial v_{00}}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s^2} \; \frac{\partial^3 H}{\partial t^2 \partial y} \, , \; \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x} \; \frac{\partial^3 H}{\partial t \partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_{10}}{\partial s} = \left(\frac{\partial^3 H}{\partial s^2 \partial x} \; \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \, , \; \frac{\partial^3 H}{\partial s \partial x^2} \; \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y}\right)$$

$$\frac{\partial v_{10}}{\partial x} = \left(\frac{\partial^3 H}{\partial s \partial x^2} \; \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \, , \; \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \; \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y}\right)$$

$$\frac{\partial v_{10}}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x} \; \frac{\partial^3 H}{\partial t^3} \, , \; \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \; \frac{\partial^3 H}{\partial t^2 \partial y}\right)$$

$$\frac{\partial v_{10}}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x} \; \frac{\partial^3 H}{\partial t^2 \partial y} \, , \; \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \; \frac{\partial^3 H}{\partial t \partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_{01}}{\partial s} = \left(\frac{\partial^3 H}{\partial s^3} \; \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y} \, , \; \frac{\partial^3 H}{\partial s^2 \partial x} \; \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_{01}}{\partial x} = \left(\frac{\partial^3 H}{\partial s^2 \partial x} \; \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y} \, , \; \frac{\partial^3 H}{\partial s \partial x^2} \; \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_{01}}{\partial t} = (\frac{\partial^2 H}{\partial s^2} \frac{\partial^3 H}{\partial t^2 \partial y} , \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x} \frac{\partial^3 H}{\partial t \partial y^2})$$

$$\frac{\partial v_{01}}{\partial y} = (\frac{\partial^2 H}{\partial s^2} \frac{\partial^3 H}{\partial t \partial y^2} , \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x} \frac{\partial^3 H}{\partial y^3})$$

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial s} = (\frac{\partial^3 H}{\partial s^2 \partial x} \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y} , \frac{\partial^3 H}{\partial s \partial x^2} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2})$$

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial x} = (\frac{\partial^3 H}{\partial s \partial x^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y} , \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2})$$

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial t} = (\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x} \frac{\partial^3 H}{\partial t^2 \partial y} , \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial^3 H}{\partial t \partial y^2})$$

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial t} = (\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x} \frac{\partial^3 H}{\partial t \partial y^2} , \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial^3 H}{\partial y^3})$$

pela bi-harmonicidade de H, concluimos que $(v_k , k \in \Box)$ é um sistema conjugado. Também,

$$|\phi(x,s;y,t)|^2 = \sum_{k \in \Box} |v_k^2| =$$

$$= (\frac{\partial^2 H}{\partial s^2})^2 [(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2})^2 + (\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y})^2] +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y}\right)^2 \right] +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial s}\right)^2 \left[2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)^2 \right] =$$

$$= 2/[x^2 + (1+s)^2]^2 [y^2 + (1+t)^2]^2$$

e assim existe um sistema conjugado $\phi = (v_k,\ k \in \square)$ tal que(3) se verifica.

Também, afirmamos que $|v_k| \longrightarrow 0$ quando $|(x,s)| \longrightarrow \infty$ independentemente de (y,t), pois,

$$|v_k(x,s;y,t)| \leq |\phi(x,s;y,t)| = \sqrt{2}/[x^2 + (1+s)^2] [y^2 + (1+t)^2] \leq$$

$$\leq \sqrt{2}/[x^2 + (1+s)^2] .$$

e, analogamente, $|v_k| \longrightarrow 0$ quando $|(y,t)| \longrightarrow \infty$, independentemente de (x,s).

Para cada ε positivo, seja F_ε definida sobre $\overline{\mathbb{R}}^2_+ \times \overline{\mathbb{R}}^2_+$, onde $\overline{\mathbb{R}}^2_+ = \{(x,s) \in \mathbb{R}^2 / s \geq 0\}$, por:

(5) $F_\varepsilon(x,s;y,t) = F(x,s+\varepsilon;y,t+\varepsilon) + \varepsilon\,\phi(x,s;y,t)$.

Pondo:

(6) $\quad u_k^{\varepsilon}(x,s;y,t) = u_k(x,s+\varepsilon;y,t+\varepsilon) + \varepsilon\,\phi(x,s;y,t) \quad , \; k \in \square$

temos que cada u_k^{ε} é contínua em $(x,s) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$ e em $(y,t) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$. Assim, F_ε é contínua em $(x,s) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$, fixado (y,t) e em $(y,t) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$, fixado (x,s). Também, pelo fato de $F \in H^1_{anal}$, temos que, para cada $k \in \square$, existe uma medida de Borel finita, μ_k, tal que

$$u_k(x,s;y,t) = \iint P_s(x-x')P_t(y-y')\,d\mu_k(x',y').$$

Então, para cada ε fixado temos que

$$u_k(x,s+\varepsilon\,;\,y,t+\varepsilon) \quad \text{converge para zero}$$

quando $|(x,s)| \longrightarrow \infty$, ou quando $|(y,t)| \longrightarrow \infty$, pois,

$$u_k(x,s+\varepsilon;y,t+\varepsilon) = \iint \frac{s+\varepsilon}{(s+\varepsilon)^2+(x-x')^2}\,\frac{t+\varepsilon}{(t+\varepsilon)^2+(y-y')^2}\,d\mu_k(x',y').$$

Suponhamos que μ_k seja medida positiva, pois se não for, trabalhamos com sua parte positiva e negativa,

$$|u_k(x,s+\varepsilon;y,t+\varepsilon)| \leq (t+\varepsilon)^{-1} \iint \frac{s+\varepsilon}{(s+\varepsilon)^2+(x-x')^2}\, d\mu_k(x',y')$$

$$\leq \varepsilon^{-1} \iint \frac{s+\varepsilon}{(s+\varepsilon)^2+(x-x')^2}\, d\mu_k(x',y').$$

Mas,

$$\left|\frac{s+\varepsilon}{(s+\varepsilon)^2+(x-x')^2}\right| \leq 1/(s+\varepsilon) \leq 1/\varepsilon.$$

e

$$\lim_{|(x,s)|\to\infty} (s+\varepsilon)/[(s+\varepsilon)^2+(x-x')^2] = 0$$

para todo ε positivo. Então, como a medida do espaço é finita, temos, pelo teorema da convergência dominada, que $u_k(x,s+\varepsilon;y,t+\varepsilon) \longrightarrow 0$ quando $|(x,s)| \longrightarrow \infty$, $(x,s) \in \overline{\mathbb{R}}^2_+$ uniformemente em $(y,t) \in \overline{\mathbb{R}}^2_+$, para todo ε positivo. O mesmo acontecendo quando $|(y,t)| \longrightarrow \infty$. Também

$$|F_\varepsilon(x,s;y,t)|^2 = \sum_{k\in\square} |u_k^\varepsilon(x,s;y,t)|^2 = \sum_{k\in\square} |u_k + \varepsilon v_k|^2 =$$

$$= \sum_{k\in\square} (u_k+\varepsilon v_k)\cdot(u_k+\varepsilon v_k) = \sum_{k\in\square} |u_k|^2 + \varepsilon \sum_{k\in\square} |v_k|^2 ,$$

uma vez que V_1 e V_2 são complementos ortogonais em V.

Assim, $|F_\varepsilon|^2$ é positivo.

Resumindo, a função F_ε tem as seguintes propriedades:

(7) F_ε é contínua em $(x,s) \in \overline{\mathbb{R}}^2_+$ (resp. $(y,t) \in \overline{\mathbb{R}}^2_+$) para cada par (y,t), (resp. (x,s)).

(8) $F_\varepsilon \longrightarrow 0$ quando $|(x,s)| \longrightarrow \infty$, $(x,s) \in \overline{\mathbb{R}}^2_+$, uniformemente em $(y,t) \in \overline{\mathbb{R}}^2_+$. O mesmo ocorrendo quando $|(y,t)| \longrightarrow \infty$ em $\overline{\mathbb{R}}^2_+$.

(9) $|F_\varepsilon| > 0$, logo, pelo teorema 2.2.4, temos que existe q, $0 < q < 1$, tal que $|F_\varepsilon|^q$ é bi-sub-harmônica em $\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$.

Definimos, agora, a seguinte função sobre $\mathbb{R}^2$:

(10) $g_\varepsilon(x;y) = |F_\varepsilon(x,0;y,0)|^q = ((F(x,\varepsilon;y,\varepsilon))^2 + \varepsilon^2(\phi(x,0;y,0)^2)^{q/2}$

Assim,

$$|g_\varepsilon(x,y)| \leq (|F(x,\varepsilon;y,\varepsilon)| + \varepsilon|\phi(x,0;y,0)|^2)^q .$$

Tomando $p = 1/q$, logo $p > 1$, então

$$|g_\varepsilon(x,y)|^p \leq |F(x,\varepsilon;y,\varepsilon)| + \varepsilon|\phi(x,0;y,0)|,$$

então,

$$\iint |g_\varepsilon|^p \, dxdy \leq \|F\|_{H^1_{anal}} + \varepsilon \|\phi\|_1$$

onde

$$\|\phi\|_1 = \iint \sqrt{2}/(x^2+1)(y^2+1)\,dxdy \ .$$

Assim, $g_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e mais,

(11) $$\|g_\varepsilon\|_p^p \leq \|F\|_{H^1_{anal}} + \varepsilon \|\phi\|_1$$

Consideremos agora a integral de Poisson dupla de g_ε.

(12) $$G_\varepsilon(x,s;y,t) = \iint P_s(x-x')P_t(y-y')g_\varepsilon(x'-y')\,dx'dy' \ .$$

Assim, por Fubini,

$$G_\varepsilon(x,s;y,t) = \int P_s(x-x')\left(\int P_t(y-y')g_\varepsilon(x',y')\,dy'\right)dx' \ .$$

Como a função em x'; para cada par (y,t) fixado:

$$h_{(y,t)}(x) = \int P_t(y-y')g_\varepsilon(x',y')\,dy'$$

é contínua em x' e se anula no ∞ quando $|x'| \longrightarrow \infty$, então, temos que $P_s * h_{(y,t)}(x)$ é a integral de Poisson de uma função contínua e que se anula no ∞. Assim, $\varphi_1(x,s) = P_s * h_{(y,t)}(x)$

converge a zero, quando $|(x,s)| \longrightarrow \infty$, para cada par (y,t) fixado. O mesmo ocorrendo com $\varphi_2(y,t) = P_t * h_{(x,s)}(y)$. Assim, a integral de Poisson dupla G_ε tem as seguintes propriedades:

(13) Para cada par (y,t) fixado arbitrariamente, tem-se que $G_\varepsilon(x,s;y,t)$ é contínua em $(x,s) \in \overline{\mathbb{R}}^2_+$, (o mesmo ocorrendo em relação a $(y,t) \in \overline{\mathbb{R}}^2_+$).

(14) $G_\varepsilon(x,s;y,t)$ converge a zero quando $|(x,s)| \longrightarrow \infty$, em $\overline{\mathbb{R}}^2_+$, para cada (y,t) (o mesmo ocorrendo em relação a $(y,t) \in \overline{\mathbb{R}}^2_+$).

(15) $G_\varepsilon(x,s;y,t)$ é bi-harmônica, logo $\Delta_{10}G_\varepsilon \geq 0$ e $\Delta_{01}G_\varepsilon \geq 0$, onde com Δ_{10} (resp. Δ_{01}) estamos indicando o laplaciano em relação a (x,s) (resp. (y,t)).

(16) $G_\varepsilon(x,0;y,0) = \lim\limits_{s,t \to 0} (P_s P_t) * g_\varepsilon(x,y) = g_\varepsilon(x,y) = |F_\varepsilon(x,0;y,0)|^q$

Afirmamos agora que a seguinte desigualdade vale:

(17) $\quad |F_\varepsilon(x,s;y,t)|^q \leq G_\varepsilon(x,s;y,t) \quad$ em $\overline{\mathbb{R}}^2_+ \times \overline{\mathbb{R}}^2_+$.

Com efeito. Fixemos $(y,0)$ arbitrariamente. Então, por (8) e (14) temos que para todo $\delta > 0$ e arbitrário, existe um número K, positivo, tal que:

Se $|(x,s)| \geq K$, então $|F_\varepsilon|^q - G_\varepsilon < \delta$.

Seja $\mathcal{R} = \{(x,s) \in \mathbb{R}^2_+ / |(x,s)| \leq K\}$. Então, observemos, devido (16), que $(|F_\varepsilon|^q - G_\varepsilon) < \delta$ na fronteira de $\mathcal{R}$; devido à (9) e (15), temos que $\Delta_{10}(|F_\varepsilon|^q - G_\varepsilon) \geq 0$ no interior de $\mathcal{R}$; e devido a (7) e (13), $|F_\varepsilon|^q - G_\varepsilon$ é contínua em $\overline{\mathcal{R}}$ ($\overline{\mathcal{R}}$ é a região união com sua fronteira). Assim, pelo princípio do máximo, ver [15] (apêndice) temos que

$$(18) \qquad (|F_\varepsilon|^q - G_\varepsilon)(x,s;y,0) < \delta \quad \text{em} \quad \overline{\mathbb{R}}^2_+ \times \{(y,0)\}.$$

Agora, seja $(x,s) \in \overline{\mathbb{R}}^2_+$ arbitrário. Por (8) e (14), temos que, dado $\delta > 0$ e arbitrário, existe número M positivo, tal que

Se $|(y,t)| \geq M$ então $(|F_\varepsilon|^q - G_\varepsilon)(x,s;y,t) < \delta$.

Seja $\mathcal{R}' = \{(y,t) \in \mathbb{R}^2_+ / |(y,t)| < M\}$. Então, devido também a (18), temos que $(|F_\varepsilon|^q - G_\varepsilon) < \delta$ na fronteira de $\mathcal{R}'$; devido a (9) e (15), temos que $\Delta_{01}(|F_\varepsilon|^q - G_\varepsilon) \geq 0$ no interior de $\overline{\mathcal{R}}'$; e, finalmente, devido a (7) e (13), temos que $|F_\varepsilon|^q - G_\varepsilon$ é contínua em $\overline{\mathbb{R}}'$. Novamente, pelo princípio do máximo temos que

$$(|F_\varepsilon|^q - G_\varepsilon)(x,s;y,t) < \delta \quad \text{em} \ \{(x,s)\} \times \overline{\mathbb{R}}^2_+ \quad ,$$

como (x,s) é arbitrário, então (17) está provada.

Por (11), tomando $\varepsilon < 1$, podemos escolher uma sub-sequência g_ε que converge fracamente a uma função g de L^p, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$, isto é,

$$(19) \quad \iint f(x',y')\, g_\varepsilon(x',y')dx'dy' \quad \text{converge a}$$

$$\iint f(x',y')\, g(x',y')dx'dy' \quad .$$

quando ε tende a zero, para toda função f de $L^{p'}$. Assim, por (11), concluimos que

$$(20) \qquad \|g\|_p^p \leq \|F\|_{H^1_{anal}} \quad .$$

Seja $G(x,s;y,t)$ a integral de Poisson dupla de g, isto é,

$$G(x,s;y,t) = (P_s P_t) * g(x,y).$$

Então,

$$(21) \qquad |F|^q(x,s;y,t) \leq G(x,s;y,t) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$$

Com efeito, temos que $|F_\varepsilon|^q$ converge a $|F|^q$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$, pela própria definição de F_ε. Também, pela convergência fraca, tomando em (19), $f(x,y) = P_s(x-x')\,P_t(y-y')$, temos que $G_\varepsilon(x,s;y,t)$ converge a $G(x,s;y,t)$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$, daí a validade de (21). Assim, de (21) concluimos que

$$|F|(x,s;y,t) \leq (G(x,s;y,t))^p ,$$

e então,

$$\sup_{s,t>0} |F|(x,s;y,t) \leq (\sup_{s,t>0} G(x,s;y,t))^p$$

Como $G(x,s;y,t) = (P_sP_t) * g(x,y)$ e $g \in L^p$, $p > 1$, então, pelo lema 1.3.6, temos que

$$u^*(G)(x,y) = \sup_{s,t>0} G(x,s;y,t) \leq C\,M^{01}(M^{10}(u^*(G))(x,y) ,$$

e assim,

$$\sup_{s,t>0} |F|(x,s;y,t) \leq C\,[M^{01}(M^{10}(u^*(G))]^p(x,y)$$

e assim,

$$\iint \sup_{s,t>0} |F(x,s;y,t)|dxdy \leq C \iint (M^{01}(M^{10}(u^*(G)))^p(x,y)\,dxdy$$

e então, pelo lema 1.3.5 , temos que

$$\iint \sup_{s,t>0} |F(x,s;y,t)|dxdy \le C\|M^{01}(M^{10}g)\|_p^p \quad ,$$

e pelo lema 1.3.3.,

$$\sup_{s,t>0} |F'(x,s;y,t)|dxdy \le C\|g\|_p^p$$

e então, de (20), vem que

$$\iint \sup_{s,t>0} |F(x,s;y,t)|dxdy \le C\|F\|_{H^1_{anal}} \quad .$$

o que demonstra (1) do teorema.

Passemos à demonstração de (2). De (21), concluimos que

$$|u_k(x,s;y,t)| \le (G(x,s;y,t))^p \quad ,$$

para todo $k \in \square$. Como G é a integral de Poisson dupla de $g \in L^p$, $p > 1$, temos que G é não tangencialmente limitada, veja [17], pág. 70. Assim, cada u_k é não tangencialmente limitada e então,

$$\sup_{s,t \to 0} u(x,s;y,t)$$

existe em quase toda parte, ver [17]. Logo, existe em quase toda parte o limite:

$$(22) \qquad \sup_{s,t \to 0} F(x,s;y,t) = F(x,y)$$

e pelo fato de $|F|(x,s;y,t) \leq M^{01}(M^{10}(u^*(G)))$, então pelo teorema da convergência dominada, concluimos que o limite também existe em norma L^1, o que completa a demonstração do teorema.

3.3.2. COROLÁRIO. Um sistema conjugado $F = (u_k,\ k \in \square)$ está em $H^1_{anal}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$ se, e somente se existe uma função f em $H^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e existem constantes C_1, C_2 positivas tal que

$$(1) \qquad C_1 \|F\|_{H^1_{anal}} \leq \|f\|_{H^1_{Hb}} \leq C_2 \|F\|_{H^1_{anal}}$$

DEMONSTRAÇÃO. Inicialmente consideremos $f \in H^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Logo $H_k f \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, para todo $k \in \square$. Definamos, então, y sobre $\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$ por:

$$(2) \qquad u_k(x,s;y,t) = (P_s P_t) * H_k f(x,y) .$$

Assim, é fácil concluir que cada u_k é bi-harmônica sobre $\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$. A seguir, verifiquemos que $F = (u_k,\ k \in \square)$ é um sistema conjugado. Para isso, tomemos a transformada de Fourier de u_k, em relação a x e y:

$$\hat{u}_k(x,s;y,t) = (P_s P_t)^{\wedge}(x,y)\ (H_k f)^{\wedge}(x,y) .$$

Como $H_k f \in L^1$, então $(H_k f)^\wedge \in L^\infty$, e então,

$$\iint |\hat{u}_k(x,s;y,t)|dxdy \leq \|(H_k f)^\wedge\|_\infty \iint (P_s P_t)^\wedge (x,y)dxdy$$

Assim, $\hat{u}_k \in L^1$ e portanto vale a fórmula de inversão da transformada de Fourier:

$$u_k(x,s;y,t) = \iint \hat{u}_k(x',s;y',t)\ e^{-2\pi i(xx'+yy')}\ dx'dy' =$$

$$= \iint (P_s P_t)^\wedge (x',y')(H_k f)^\wedge (x',y')\ e^{-2\pi i(xx'+yy')}\ dx'dy' =$$

$$= \iint \hat{P}_s(x')\ \hat{P}_t(y')\ (H_k f)^\wedge (x',y')\ e^{-2\pi i(xx'+yy')}\ dx'dy' ,$$

onde $\hat{P}_s$ e $\hat{P}_t$ são as transformadas de Fourier de P_s e P_t em relação a x e a y , respectivamente, e mais

$$\hat{P}_s(x) = e^{-2\pi|x|s} \qquad \text{e} \qquad \hat{P}_t(y) = e^{-2\pi|y|t} .$$

Assim,

$$u_{00}(x,s;y,t) = \iint e^{-2\pi|x'|s}\ e^{-2\pi|y'|t}\ \hat{f}(x',y')\ e^{-2\pi i(xx'+yy')}\ dx'dy'$$

$$u_{10}(x,s;y,t) = \iint e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t} (i\,sgx')\hat{f}(x',y') e^{-2\pi i(xx'+yy')} dx'dy'$$

$$u_{01}(x,s;y,t) = \iint e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t} (i\,sgy')\hat{f}(x',y') e^{-2\pi i(xx'+yy')} dx'dy'$$

$$u_{11}(x,s;y,t) = \iint e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t} (i\,sgx')(i\,sgy')\hat{f}(x',y') e^{-2\pi i(xx'+yy')} dx'dy'.$$

Então,

$$\frac{\partial u_{00}}{\partial s} = \iint (-2\pi|x'|) e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t}\, \hat{f}(x',y')\, e^{-2\pi i(xx'+yy')} dx'dy'$$

$$\frac{\partial u_{00}}{\partial x} = \iint (-2\pi i x') e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t}\, \hat{f}(x',y') e^{-2\pi i(xx'+yy')} dx'dy'$$

$$\frac{\partial u_{00}}{\partial t} = \iint (-2\pi|y'|) e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t}\, \hat{f}(x',y') e^{-2\pi i(xx'+yy')} dx'dy'$$

$$\frac{\partial u_{00}}{\partial y} = \iint (-2\pi i y') e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t}\, \hat{f}(x',y') e^{-2\pi i(xx'+yy')} dx'dy'$$

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial s} = \iint (-2\pi i x') e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t}\, \hat{f}(x',y') e^{-2\pi i(xx'+yy')} dx'dy'$$

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial x} = \iint (2\pi|x'|) e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t}\, \hat{f}(x',y') e^{-2\pi i(xx'+yy')} dx'dy'$$

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial t} = \iint (-2\pi|y'|)e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t}(isgx')\hat{f}(x',y')e^{-2\pi i(xx'+yy')}dx'dy'$$

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial y} = \iint (-2\pi iy')e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t}(isgx')\hat{f}(x',y')e^{-2\pi i(xx'+yy')}dx'dy'$$

$$\frac{\partial u_{01}}{\partial s} = \iint (-2\pi|x'|)e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t}(isgy')\hat{f}(x',y')e^{-2\pi i(xx'+yy')}\, dx'dy'$$

$$\frac{\partial u_{01}}{\partial x} = \iint (-2\pi ix')e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t}(isgy')\hat{f}(x',y')e^{-2\pi i(xx'+yy')}\, dx'dy'$$

$$\frac{\partial u_{01}}{\partial t} = \iint (-2\pi iy')e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t}\, \hat{f}(x',y')e^{-2\pi i(xx'+yy')}\, dx'dy'$$

$$\frac{\partial u_{01}}{\partial y} = \iint (2\pi|y'|)e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t}\, \hat{f}(x',y')e^{-2\pi i(xx'+yy')}\, dx'dy'$$

$$\frac{\partial u_{11}}{\partial s} = \iint (-2\pi ix')e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t}(isgy')\hat{f}(x',y')e^{-2\pi i(xx'+yy')}\, dx'dy'$$

$$\frac{\partial u_{11}}{\partial x} = \iint (2\pi|x'|)e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t}(isgy')\hat{f}(x',y')e^{-2\pi i(xx'+yy')}\, dx'dy'$$

$$\frac{\partial u_{11}}{\partial t} = \iint (-2\pi i y')e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t}(i\,sgx')\hat{f}(x',y')e^{-2\pi i(xx'-yy')}dx'dy'$$

$$\frac{\partial u_{11}}{\partial y} = \iint (2\pi|y'|)e^{-2\pi|x'|s}\, e^{-2\pi|y'|t}(i\,sgx')\hat{f}(x',y')e^{-2\pi i(xx'+yy')}dx'dy'$$

Assim , $(u_k,\ k \in \square)$ é um sistema conjugado. Para concluirmos que $F = (u_k)$ está em $H^1_{anal}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$ basta provarmos que:

$$\sup_{s,t>0} \iint |F|dx\,dy < \infty.$$

Com efeito, por (2), e pela desigualdade de Young,

$$\iint |F(x,s;y,t)|dxdy = \iint \Big(\sum_{k\in\square} |u_k(x,s;y,t)|^2\Big)^{1/2} dxdy \le$$

$$\le \iint \Big(\sum_{k\in\square}|u_k(x,s;y,t)|dxdy = \sum_{k\in\square} \iint |u_k(x,s;y,t)|dxdy =$$

$$= \sum_{k\in\square} \|(P_sP_t) * H_kf\|_1 \le \sum_{k\in\square} \|P_sP_t\|_1\ \|H_kf\|_1 =$$

$$= \sum_{k\in\square} \|H_kf\|_1 = \|f\|_{H^1_{Hb}} .$$

Assim, concluimos que $F = (u_k)$ está em $H^1_{anal}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$, e mais,

$$(3) \qquad \|F\|_{H^1_{anal}} \leq \|f\|_{H^1_{Hb}}$$

Agora, consideremos $F = (u_k) \in H^1_{anal}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$. Logo, temos que

$$\sup_{s,t>0} \|u_k(\cdot,s\,;\,\cdot,t)\|_1 < \infty$$

Assim, para cada $k \in \square$, existe uma medida de Borel finita μ_k, sobre $\mathbb{R}^2$, tal que

$$(4) \qquad u_k(x,s;y,t) = (P_s P_t) * \mu_k(x,y) \ .$$

Além disso, pelo teorema 3.3.1 , temos que

$$\sup_{s,t \to 0} u_k(x,s\,;\,y,t) = f_k(x,y) \ ,$$

existe em norma L^1. Afirmamos que f_{00} está em $H^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, e mais, $H_k f_{00} = f_k$. Para isso, usamos transformada de Fourier. De (4), temos que:

$$\hat{u_k}(x,s;y,t) = (P_s P_t)^{\wedge}(x,y) \cdot \hat{\mu_k}(x,y) =$$

$$= e^{-2\pi|x|s}\, e^{-2\pi|y|s}\ \hat{\mu_k}(x,y) .$$

Assim,

$$\hat{u_k}(x,s;y,t) \longrightarrow \hat{\mu_k}(x,y)$$

quando $s,t \longrightarrow 0$. Assim,

$$\hat{\mu_k}(x,y) = \hat{f_k}(x,y)$$

e então,

$$d\mu_k(x,y) = f_k(x\ ,\ y)dxdy$$

assim, de (4), obtemos,

$$u_k(x,s;y,t) = \iint P_s(x-x')\ P_t(y-y')\ f_k(x',y')dx'dy' .$$

e assim,

$$(5) \qquad \hat{u_k}(x,s;y,t) = (P_s P_t)^{\wedge}(x,y)\ \hat{f_k}(x,y)$$

e então,

$$\iint |\hat{u_k}(x,s;y,t)|dxdy \leq \iint \hat{P_s}(x')\hat{P_t}(y')|\hat{f_k}(x',y')|dx'dy' \leq$$

$$\leq \|\hat{f_k}\|_\infty \cdot \iint e^{-2\pi s|x'|} e^{-2\pi t|y'|} dx'dy' = C\|f_k\|_\infty$$

Logo, $\hat{u_k} \in L^1$ e portanto vale a fórmula de inversão da transformada de Fourier, isto é:

$$u_k(x,s;y,t) = \iint \hat{u_k}(x',s;y',t)\, e^{-2\pi i(xx'+yy')}\, dx'dy'$$

e então, por (5), vem que:

$$u_k(x,s;y,t) = \iint (P_sP_t * f_k)^\wedge(x',y')e^{2\pi i(xx'+yy')}dx'dy'$$

$$= \iint e^{-2\pi s|x'|} e^{-2\pi t|y'|}\hat{f_k}(x',y')e^{-2\pi i(xx'+yy')}\, dx'dy'$$

Logo:

$$\frac{\partial u_{00}}{\partial s} = \iint (-2\pi|x'|)\, e^{-2\pi s|x'|} e^{-2\pi t|y'|}\hat{f}_{00}(x',y')e^{-2\pi i(xx'+yy')}dx'dy'$$

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial x} = \iint (-2\pi i x')\, e^{-2\pi s|x'|} e^{-2\pi t|y'|}\, \hat{f}_{10}(x',y')\, e^{-2\pi i(xx'+yy')}\, dx'dy'$$

Como $F = (u_k) \in H^1_{anal}$, então $\dfrac{\partial u_{00}}{\partial s} = -\dfrac{\partial u_{10}}{\partial x}$, logo

$$\iint (-2\pi|x'|)\, e^{-2\pi s|x'|} e^{-2\pi t|y'|}\, \hat{f}_{00}(x',y')\, e^{-2\pi i(xx'+yy')}\, dx'dy'$$

$$= \iint (2\pi i(x')\, e^{-2\pi s|x'|}\, e^{-2\pi t|y'|}\, \hat{f}_{10}(x',y') e^{-2\pi i(xx'+yy')}\, dx'dy' .$$

Assim,

$$\iint (-2\pi|x'|\, \hat{f}_{00} - 2\pi i x'\, \hat{f}_{10}) e^{-2\pi s|x'|}\, e^{-2\pi t|y'|}\, e^{-2\pi i(xx'+yy')}\, dx'dy' = 0.$$

Assim,

$$2\pi i x\, \hat{f}_{10}(x,y) = -2\pi|x|\, \hat{f}_{00}(x,y)$$

isto é,

$$\hat{f}_{10}(x,y) = i \operatorname{sg} x\, \hat{f}_{00}(x,y)$$

então $f_{10}(x,y) = (H_{10} f_{00})(x,y)$

e, com raciocícnio análogo conluimos que

(6) $$f_k(x,y) = (H_k f_{00})(x,y)$$

Como, $f_k \in L^1$, então, por (6) concluimos que f_{00} pertence a $H^1_{Hb}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ e mais,

$$\|f_{00}\|_{H^1_{Hb}} = \sum_{k\in\square} \|H_k f_{00}\|_1 = \sum_{k\in\square} \|f_k\|_1 =$$

$$= \sum_{k\in\square} \|\lim_{s,t>0} u_k(x,s;y,t)\|_1 \leq 4 \sup_{s,t>0} \iint |F|\,dxdy = 4\|F\|_{H^1_{anal}} .$$

Então,

$$(7) \qquad \|f\|_{H^1_{Hb}} \leq 4\|F\|_{H^1_{anal}} .$$

Logo, de (3) e (7) concluimos que existem constantes C_1 e C_2 positivas tais que:

$$C_1\|F\|_{H^1_{anal}} \leq \|f\|_{H^1_{Hb}} \leq C_2\|F\|_{H^1_{anal}} ,$$

o que prova o corolário.

CAPÍTULO IV

OS ESPAÇOS h^1 SOBRE O PRODUTO DE FAIXAS

Introduzimos neste capítulo os espaços de Hardy, $h^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Os espaços $h^1(\mathbb{R})$ foram introduzidos por Goldberg [9] considerando funções harmônicas $u(x,t)$ definidas na faixa unitária $\{(x,t)\,|\,x\in\mathbb{R},\ 0<t<1\}$. Ao contrário dos espaços $H^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ já que foram estudados por diversos autores, não temos referências sobre os espaços h^1 em produtos de faixas. Acreditamos então que estão sendo considerados aqui pela primeira vez.

4.1. O ESPAÇO $h^1_{anal}(S\times S)$.

4.1.1. DEFINIÇÃO. Seja $F=(u_k)_{k\in\square}$ um sistema conjugado de Cauchy Riemann sobre $S\times S$. Suponhamos que u_{00} seja simétrica em relação a $s=t=1/2$. Dizemos que $F\in h^1_{anal}(S\times S)=h^1_{anal}$ se

$$(1)\qquad \sup_{0<s,t<1}\iint|F(x,s;y,t)\,dxdy<\infty\,.$$

Definimos a seguinte norma em h^1_{anal}

$$(2) \qquad \|F\|_{h^1_{anal}} = \sup_{0<s,t<1} \iint |F(x,s;y,t)|\,dxdy .$$

4.1.2. TEOREMA. Seja $F = (u_k)_{k \in \square} \in h^1_{anal}$. Então, existe uma constante positiva C tal que

$$(1) \quad \iint \sup_{0<s,y<1} |F(x,s;y,t)|\,dxdy \leq C \sup_{0<s,t<1} \iint |F(x,s;y,t)|\,dxdy ,$$

e para cada $k \in \square$, o limite

$$(2) \qquad \lim_{(s,t) \to k} F(x,s;y,t) = F_k(x,y),$$

existe em quase toda parte e em norma L^1.

DEMONSTRAÇÃO. Por razões técnicas vamos supor que as funções u_k tomem valores num espaço de Hilbert de dimensão finita, V_1 . Também, vamos considerar um outro espaço de Hilbert, V_2, de dimensão finita e $V = V_1 \oplus V_2$.

Consideremos um sistema conjugado

$$\phi = (v_k)_{k \in \square} : S \times S \longrightarrow V_2$$

que satisfaça:

$$(3) \quad |\phi(x,0;y,0)|^2 \leq C \, \frac{e^{2\pi x}}{(1+e^{2\pi x})^3} \quad \frac{e^{2\pi y}}{(1+e^{2\pi y})^3} \, .$$

Um tal sistema conjugado existe. De fato, consideremos a seguinte função

$$(4) \quad H(x,s;y,t) = (1/2)\log\left(\frac{e^{2\pi x}}{1+2e^{\pi x}\,\mathrm{sen}\pi s+e^{2\pi x}} \cdot \frac{e^{2\pi y}}{1+2e^{\pi y}\,\mathrm{sen}\pi t+e^{2\pi y}}\right).$$

Então:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial s^2} = \frac{\pi^2 e^{\pi x}(\mathrm{sen}\pi s + \mathrm{sen}\pi s\; e^{2\pi x} + 2e^{\pi x})}{(1+2e^{\pi x}\;\mathrm{sen}\pi s + e^{2\pi x})^2} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial s} = -\frac{\pi^2\; e^{\pi x}\; \cos\pi s}{(1+2e^{\pi x}\;\mathrm{sen}\pi s + e^{2\pi x})^2} \, .$$

As expressões de $\partial^2 H/\partial y^2$, $\partial^2 H/\partial t^2$ e $\partial^2 H/\partial y \partial t$ são idênticas. Assim, H é bi-harmônica em $S \times S$.

Definamos, agora, as funções v_k, $k \in \square$, por

$$v_{00} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}\;\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\, ,\; \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x}\;\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y}\right)$$

$$v_{10} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x}\ \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\ ,\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y}\right)$$

$$v_{01} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}\ \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y}\ ,\ \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x}\ \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)$$

$$v_{11} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x}\ \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y}\ ,\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)$$

Como H é bi-harmônica, então, é fácil concluir que cada v_k é bi-harmônica, também, como:

$$\frac{\partial v_{00}}{\partial s} = \left(\frac{\partial^3 H}{\partial s^3}\ \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\ ,\ \frac{\partial^3 H}{\partial s^2 \partial x}\ \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y}\right)$$

$$\frac{\partial v_{00}}{\partial x} = \left(\frac{\partial^3 H}{\partial s^2 \partial x}\ \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\ ,\ \frac{\partial^3 H}{\partial s \partial x^2}\ \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y}\right)$$

$$\frac{\partial v_{00}}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}\ \frac{\partial^3 H}{\partial t^3}\ ,\ \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x}\ \frac{\partial^3 H}{\partial t^2 \partial y}\right)$$

$$\frac{\partial v_{00}}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}\ \frac{\partial^3 H}{\partial t^2 \partial y}\ ,\ \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x}\ \frac{\partial^3 H}{\partial t \partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_{10}}{\partial s} = \left(\frac{\partial^3 H}{\partial s^2 \partial x}\ \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\ ,\ \frac{\partial^3 H}{\partial x^2 \partial s}\ \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y}\right)$$

$$\frac{\partial v_{10}}{\partial x} = \left(\frac{\partial^3 H}{\partial s \partial x^2} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \; , \; \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y}\right)$$

$$\frac{\partial v_{10}}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x} \quad \frac{\partial^3 H}{\partial t^3} \; , \; \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^3 H}{\partial t^2 \partial y}\right)$$

$$\frac{\partial v_{10}}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x} \quad \frac{\partial^3 H}{\partial t^2 \partial y} \; , \; \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^3 H}{\partial t \partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_{01}}{\partial s} = \left(\frac{\partial^3 H}{\partial s^3} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y} \; , \; \frac{\partial^3 H}{\partial s^2 \partial x} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_{01}}{\partial x} = \left(\frac{\partial^3 H}{\partial s^2 \partial x} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y} \; , \; \frac{\partial^3 H}{\partial s \partial x^2} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_{01}}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s^2} \quad \frac{\partial^3 H}{\partial t^2 \partial y} \; , \; \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x} \quad \frac{\partial^3 H}{\partial t \partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_{01}}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s^2} \quad \frac{\partial^3 H}{\partial t \partial y^2} \; , \; \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x} \quad \frac{\partial^3 H}{\partial y^3}\right)$$

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial s} = \left(\frac{\partial^3 H}{\partial s^2 \partial x} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y} \; , \; \frac{\partial^3 H}{\partial s \partial x^2} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial x} = \left(\frac{\partial^3 H}{\partial s \partial x^2} \; \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y} \; , \; \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \; \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x} \; \frac{\partial^3 H}{\partial t^2 \partial y} \; , \; \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \; \frac{\partial^3 H}{\partial y^2 \partial t}\right)$$

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x} \; \frac{\partial^3 H}{\partial t \partial y^2} \; , \; \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \; \frac{\partial^2 H}{\partial y^3}\right) ,$$

pela bi-harmonicidade de H, temos que $(v_k)_{k \in \square}$ é um sistema conjugado.

Passemos à prova de (3). Também, pelo fato de H ser bi-harmônica, temos , fazendo alguns cálculos, que:

$$|\phi|^2 = 2 \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial x}\right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y}\right)^2 \right] =$$

$$= 2 \left[\pi^4 \, e^{2\pi x} \frac{((\operatorname{sen}\pi s + \operatorname{sen}\pi s \, e^{2\pi x} + 2e^{\pi x})^2 + \cos^2 \pi s)}{(1 + 2e^{\pi x} \operatorname{sen}\pi s + e^{2\pi x})^4}\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\pi^4 \, e^{2\pi y} \frac{((\operatorname{sen}\pi t + \operatorname{sen}\pi t \, e^{2\pi y} + 2e^{\pi y})^2 + \cos^2 \pi t)}{(1 + 2e^{\pi y} \operatorname{sen}\pi t + e^{2\pi y})^4}\right]$$

Assim, fazendo $s = t = 0$ temos (3).

Também

$$|\phi|^2 \le 2\pi^4 e^{2\pi x} \frac{[((1+e^{2\pi x} + 2e^{\pi x})^2 + 1]}{(1+e^{2\pi x})^4} \cdot$$

$$\cdot \pi^4 \frac{e^{2\pi y}[(1+e^{2\pi y} + 2e^{\pi y})^2 + 1]}{(1+e^{2\pi y})^4} -$$

$$\le 8\pi^8 \frac{e^{2\pi x} e^{2\pi y}(1+e^{2\pi x} + 2e^{\pi x})^2 (1+e^{2\pi y} + 2e^{\pi y})^2}{(1+e^{2\pi x})^4 \quad (1+e^{2\pi y})^4} ,$$

e então não é difícil de ver que $|\phi| \longrightarrow 0$, uniformemente em s, y,t, quando $|x| \longrightarrow \infty$; e também $|\phi| \longrightarrow 0$, uniformente em s,x,t, quando $|y| \longrightarrow \infty$, pois

$$\frac{e^{2\pi x} (1+e^{2\pi x} + 2e^{\pi x})^2}{(1+e^{2\pi x})^4} \le C ,$$

Agora, definamos a seguinte função:

(5) $\quad F_\varepsilon(x,s;y,t) = F(x,s+\varepsilon;y,t+\varepsilon) + \varepsilon\, \phi(x,s;y,t)$

com $0 < \varepsilon < 1/2$. Seja:

$$u_k^\varepsilon(x,s;y,t) = u_k(x,s+\varepsilon;y,t+\varepsilon) + \varepsilon v_k(x,s;y,t) \quad , \; k \in \square.$$

A seguir veremos algumas propriedades das u_k^ε .

(a) $u_k^\varepsilon \longrightarrow 0$, uniformemente em s,y,t , (t,x,s), quando $|x| \longrightarrow \infty$, $(|y| \longrightarrow \infty)$. Com efeito, basta provarmos essa afirmação apenas para as $u_k(x,s+\varepsilon;y,t+\varepsilon)$, uma vez que acabamos de provar esse resultado para as v_k. Como, por hipótese $F = (u_k) \in h^1_{anal}$, então, pelo lema 1.4.3, para cada $k \in \square$, existe uma medida de Borel finita, $d\nu_k$, tal que:

$$u_k(x,s+\varepsilon;y,t+\varepsilon) = \iint P_{s+\varepsilon}(x-x')P_{t+\varepsilon}(y-y')d\nu_k(x',y').$$

Vamos supor que $d\nu_k$ sejam positivas caso contrário, decompomos $d\nu_k$ na sua parte positiva e negativa. Mas,

$$P_{s+\varepsilon}(x) = P^0_{s+\varepsilon}(x) + P^1_{s+\varepsilon}(x) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\pi(s+\varepsilon)}{2(\cosh\pi x - \cos\pi(s+\varepsilon))} + \frac{\operatorname{sen}\pi(s+\varepsilon)}{2(\cosh\pi x - \cos\pi(1-s-\varepsilon))}$$

Mas,

$$0 < \varepsilon\pi < \pi(s+\varepsilon) < \pi$$

$$0 < \pi(\tfrac{1}{2}-\varepsilon) < \pi(1-s-\varepsilon) < \pi(1-\varepsilon) < \pi$$

assim,

$$\cos\pi(s+\varepsilon) < \cosh \pi\varepsilon$$

e

$$\cos\pi(1-s-\varepsilon) < \cos\pi(\tfrac{1}{2} - \varepsilon)$$

e, então,

$$\cosh\pi x - \cos\pi(s+\varepsilon) > \cosh\pi x - \cos\pi\varepsilon > 0$$

e

$$\cosh\pi x - \cos\pi(1-s-\varepsilon) > \cosh\pi x - \cos\pi(\tfrac{1}{2} - \varepsilon) > 0$$

logo.

$$P_{s+\varepsilon}(x) = \frac{1}{2(\cosh\pi x - \cos\pi\varepsilon)} + \frac{1}{2(\cosh\pi x - \cos\pi(\frac{1}{2} - \varepsilon))}$$

assim, $P_{s+\varepsilon}(x) \longrightarrow 0$ quando $|x| \longrightarrow \infty$, uniformemente em s, e,

$$P_{s+\varepsilon}(x) \leq \frac{1}{2(1-\cos\pi\varepsilon)} + \frac{1}{2(1-\cos\pi(\frac{1}{2} - \varepsilon)} \leq C_\varepsilon .$$

Então, com estimativas semelhantes para $P_{t+\varepsilon}(y)$, temos que

$$P_{s+\varepsilon}(x-x') \cdot P_{t+\varepsilon}(y-y') \leq$$

$$\leq C_\varepsilon\left(\frac{1}{2(\cosh\pi(x-x')-\cos\pi\varepsilon)} + \frac{1}{2(\cosh\pi(x-x')-\cos\pi(\frac{1}{2} - \varepsilon))}\right)$$

Também, como a medida $d\nu_k$ é finita, a constante é integrável, assim, $P_{s+\varepsilon}(x-x')\ P_{t+\varepsilon}(y-y')$ é majorado por uma função integrável, e pelo teorema da convergência dominada temos que:

$$\iint P_{s+\varepsilon}(x-x')P_{t+\varepsilon}(y-y')\ d\nu_k(x',y') \longrightarrow 0$$

uniformemente em y,s,t, $0 \leq s,t \leq 1/2$, quando $|x| \longrightarrow \infty$ para todo $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Analogamente, provamos que a convergência a zero é uniforme em x,s,t, quando $|y| \longrightarrow \infty$, $0 \leq s,t \leq 1/2$.

Por (1), é fácil ver que $|\phi| > 0$ e assim, conluimos que $|F_\varepsilon| > 0$. Então, por resultado semelhante ao teorema 2.2.6, para o duplo produto das faixas, concluimos que existe q, $0 < q < 1$, tal que $|F_\varepsilon|^q$ é bi-sub-harmônica. Lembramos também que F e ϕ são simétricas em relação a $s = t = 1/2$. Também, é fácil ver que F_ε é contínua em $(x,s) \in \overline{S}$ e em $(y,t) \in \overline{S}$, separadamente.

Agora, definamos a seguinte função sobre $\mathbb{R}^2$.

$$(6) \qquad g_\varepsilon(x,y) = |F_\varepsilon(x,0;y,0)|^q .$$

Assim,

$$g_\varepsilon(x,y) = |F(x,\varepsilon;y,\varepsilon) + \varepsilon\phi(x,0;y,0)|^q =$$

$$= (|F(x,\varepsilon;y,\varepsilon)|^2 + \varepsilon^2|\phi(x,0;y,0)|^2)^{q/2}$$

$$\leq |F(x,\varepsilon;y,\varepsilon)| + \varepsilon|\phi(x,0;y,0)|.$$

Tomando $p = 1/q$, vem que:

$$\iint |g_\varepsilon(x,y)|^p \, dxdy \leq \iint |F(x,\varepsilon;y,\varepsilon)| dxdy +$$

$$+ \varepsilon \iint |\phi(x,0;y,0)| dxdy \; .$$

Por (3), temos que $\phi(x,0;y,0)$ é integrável. Assim,

(7) $$\|g_\varepsilon\|_p^p \leq \|F\|_{h^1_{anal}} + \varepsilon\|\phi\| \; .$$

Seja G_ε a integral de Poisson dupla da função g_ε, em S×S, isto é,

$$G_\varepsilon(x,s;y,t) = \iint P_s(x-x')P_t(y-y') \; g_\varepsilon(x',y')dx'dy'$$

Assim,

$$\lim_{(s,t)\to 0} G_\varepsilon(x,s;y,t) = g_\varepsilon(x,y) .$$

Assim,

$$\lim_{(s,t)\to 0} G_\varepsilon(x,s;y,t) = |F_\varepsilon(x,0;y,0)|^q \; .$$

Afirmamos que a seguinte desigualdade é verdadeira:

(8) $\quad |F_\varepsilon(x,s;y,t)|^q \leq G_\varepsilon(x,s;y,t)$, em $\bar{S}\times\bar{S}$.

Para isso, fixemos $(y,0)$ arbitrariamente. Como F_ε e G_ε convergem para zero, quando $|x| \longrightarrow \infty$, então:

$$\forall\delta > 0 \ , \quad \exists M > 0 \quad \text{tal que:}$$

se $\quad |x| \geq M \longrightarrow |F_\varepsilon(x,s;y,t)|^q - G_\varepsilon(x,s;y,t) < \delta$.

Também, se $s = 0$, ou $s = 1$, vale a igualdade: $G_\varepsilon(x,s;y,0) = |F_\varepsilon(x,s;y,0)|^q$, pela definição da função $g_\varepsilon(x,y)$. Seja R_y a seguinte região:

$$R_y = \{(x,s) \in S \ / \ |x| < M\}.$$

Então, temos que:

a) $|F_\varepsilon|^q - G_\varepsilon < \delta$ na fronteira de R_y .

b) $|F_\varepsilon|^q - G_\varepsilon$ é contínua em $\bar{R}_y$.

c) $\Delta_{10}(|F|^q - G_\varepsilon) \geq 0$ em R_y .

Logo, pelo princípio do máximo para funções sub-harmônicas, temos que

(9) $\quad |F_\varepsilon(x,s;y,0)|^q - G_\varepsilon(x,s;y,0) < \delta \quad$ em $\bar{S}\times\{(y,0)\}$.

Com raciocínio análogo, se fixarmos $(y,1)$, provamos que

$$(9') \quad |F_\varepsilon(x,s;y,1)|^q - G_\varepsilon(x,s;y,1) < \delta \ , \quad \text{em} \quad \bar{S} \times \{(y,1)\}.$$

Agora, fixemos (x,s), arbitrariamente em $\bar{S}$. Novamente, como G_ε e $|F_\varepsilon|^q$ se anulam, quando $|y| \longrightarrow \infty$, então

$$\forall \delta > 0 \ , \quad \exists M > 0 \quad \text{tal que}$$

$$\text{se} \quad |y| \geq M \quad \longrightarrow \quad |F_\varepsilon(x,s;y,t)|^q - G_\varepsilon(x,s;y,t) < \delta \ .$$

Também, se $t = 0$, ou $t = 1$, por (9) e (9'), temos que a mesma desigualdade vale.

Seja $\mathcal{R}_{(x,s)}$ a seguinte região:

$$\mathcal{R}_{(x,s)} = \{(y,t) \in S \ / \ |y| < M\} \ .$$

Então, temos que:

(a') $|F_\varepsilon|^q - G_\varepsilon < \delta$ na fronteira de $\mathcal{R}_{(x,s)}$

(b') $|F|^q - G_\varepsilon$ é contínua em $\bar{\mathcal{R}}_{(x,s)}$

(c') $\Delta_{01}(|F_\varepsilon|^q - G_\varepsilon) \geq 0$ em $\mathcal{R}_{(x,s)}$.

Logo, pelo princípio do máximo para funções sub-harmônicas, temos que:

$$|F_\varepsilon(x,s;y,t)|^q - G_\varepsilon(x,s;y,t) < \delta \quad \text{em} \quad \{(x,s)\} \times \overline{S} \ .$$

Como (x,s) foi tomado arbitrariamente em $\overline{S}$, então segue a desigualdade (8), uma vez que δ é positivo e arbitrário.

Por (7), como $0 < \varepsilon < 1/2$, temos que a norma p de g_ε é uniformemente limitada em ε, logo, existe uma subsequência g_ε que converge fracamente a uma $g(x,y) \in L^p$, isto é,

$$\iint g_\varepsilon(x',y')f(x',y')dx'dy' \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \iint g(x',y')f(x,y')dx'dy'$$

para toda $f \in L^{p'}$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$. Em particular, se considerarmos:

$$f(x',y') = P_s(x-x') \ P_t(y-y')$$

temos que:

$$\iint P_s(x-x') \ P_t(y-y')g_\varepsilon(x',y')dx'dy' = G_\varepsilon(x,s;y,t)$$

converge para

$$\iint P_s(x-x') \ P_t(y-y')g(x',y')dx'dy' = G(x,s;y,t)$$

quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Assim,

$$G_\varepsilon(x,s;y,t) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} G(x,s;y,t) .$$

Também, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$, temos que $|F_\varepsilon|^q \longrightarrow |F|^q$, e assim, de (8),

$$(10) \qquad |F(x,s;y,t)|^q \leq G(x,s;y,t) \quad \text{em} \quad S \times S .$$

Assim, lembrando que G é simétrica em relação a $s = t = 1/2$, temos de (10), que:

$$|F(x,s;y,t)|^q \leq G(x,s;y,t) \leq \sup_{0<s,t<1} G(x,s;y,t) .$$

Assim,

$$|F(x,s;y,t)| \leq (\sup_{0<s,t<1} G(x,s;y,t))^p .$$

Logo,

$$\sup_{0<s,t<1} |F(x,s;y,t)| \leq (\sup_{0<s,t<1} G(x,s;y,t))^p =$$

$$=(\sup_{0<s,t<1/2} G(x,s;y,t))^p \leq (\sup_{(x',s;y',t)\in\Gamma(x)\times\Gamma(y)} G(x',s;y',t))^p .$$

onde,

$$\Gamma(x) = \{(x',s) \ / \ |x-x'| < s \ , \ 0 < s < 1/2\}$$

e

$$\Gamma(y) = \{(y',t) \ / \ |y-y'| < t \ , \ 0 < t < 1/2\} \ .$$

Lembrando que com $M^{10}g$, $(M^{01}g)$, estamos indicando a função maximal de Hardy-Littlewood de $g(\cdot,y)$, $(g(x,\cdot))$. Como $g \in L^{p'}$, então, (ver [9]),

$$\sup_{\Gamma(x)\times\Gamma(y)} G(x's;y',t) = \sup_{\Gamma(x)\times\Gamma(y)} \int P_t(y'-\eta)\left(\int P_s(x'-\xi)\ g(\xi,\eta)\ d\xi\right)d\eta$$

$$\leq \sup_{\Gamma(x)\times\Gamma(y)} \int P_t(y'-\eta)\left(\sup_{\Gamma(x)} \int P_s(x'-\xi)\ g(\xi,\eta)d\xi\right)d\eta$$

$$\leq \sup_{\Gamma(y)} \int P_t(y'-\eta)\cdot M^{10}(g)(x,\eta)d\eta \leq M^{01}(M^{10}g)(x,\eta)d\eta$$

Assim,

$$\sup_{\Gamma(x)\times\Gamma(y)} G(x,s;y,t) \leq M^{01}(M^{10}g)(x,y) \ .$$

Logo,

$$\sup_{0<s,t<1} |F(x,s;y,t)| \leq (M^{01}(M^{10}g))^p(x,y).$$

Assim,

$$\iint \sup_{0<s,t<1} |F(x,s;y,t)|dxdy \leq \|M^{01}(M^{10}g)\|_p^p \leq C\|g\|_p^p .$$

Como g é limite fraco de g_ε, então, por (7), temos que $\|g\|_p^p \leq \|F\|_{h^1_{anal}}$. Assim,

$$\iint \sup_{0<s,t<1} |F(x,s;y,t)|dxdy \leq C\|F\|_{h^1_{anal}}$$

Passamos à prova de (2). Como G é não tangencialmente limitada, então é fácil concluir que cada U_k é não tangencialmente limitada, donde o

$$\lim_{s,t\to 0} U_k(x,s;y,t),$$

existe em quase toda parte. Assim, existe

$$\lim_{s,t\to 0} F(x,s;y,t) = F_{00}(x,y).$$

Observamos que, devido à simetria, não há necessidade de se calcular o limite acima quando $(s,t) \to k = (k_1,k_2) \neq (0,0)$.

Como, o limite existe em quase toda parte, e lembrando que:

$$|F(x,s;y,t)| \leq (M^{01}(M^{10}(g))^{p}$$

então, pelo teorema da convergência dominada temos que F_{00} é integrável e assim, a prova de (2) está concluída.

4.2. O ESPAÇO $h^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

4.2.1. DEFINIÇÃO: Seja f pertencente a $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. As transformadas de Hilbert modificadas são as distribuições temperadas h_k, definidas por:

$$\mathcal{F}(h_{10}f)(x,y) = i\,sgx\, tgh(\pi|x|) \cdot f^{\wedge}(x^2,y)$$

$$(1) \quad \mathcal{F}(h_{01}f)(x,y) = i\,sgy\, tgh(\pi|y|) \quad \hat{f}(x,y)$$

$$\mathcal{F}(h_{11}f)(x,y) = (i\,sgx)(i\,sgy)tgh(\pi|x|)tgh(\pi|y|) \quad f^{\wedge}(x,y).$$

4.2.2. DEFINIÇÃO: Definimos $h^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ como sendo o espaço vetorial das funções f em $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ cujas transformadas de Hilbert modificadas estão em $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Munimos $h^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ com a seguinte norma:

$$\|f\|_{h^1_{Hb}} = \sum_{k \in \square} \|h_k f\|_1 .$$

Algumas diferenças existem entre os espaços $h^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e $H^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. As funções de $H^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tem momentos nulos nas duas direções, ao passo que para as funções de $h^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ isso não necessariamente ocorre. Já que os elementos de $H^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ têm momentos nulos, então $S(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ não está contido em $H^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$; já é fácil ver que $S(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ está contido em $h^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

A seguir veremos que os espaços $h^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e $h^1_{anal}(S \times S)$ são equivalentes, isto é:

4.2.3. TEOREMA: Para todo elemento $F = (U_k, k \in \square)$ de $h^1_{anal}(S \times S)$ existe uma função f de $h^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ com

(1) $$\|f\|_{h^1_{Hb}} \leq C \|F\|_{h^1_{anal}}$$

onde C é uma constante positiva. E, reciprocamente, para toda f em $h^1_{Hb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ existe um elemento $F \in h^1_{anal}$, tal que

(2) $$\|F\|_{h^1_{anal}} \leq C \|f\|_{h^1_{Hb}}$$

onde C é uma constante positiva.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $F = (U_k, k \in \square) \in h^1_{anal}$. Então temos,

$$\sup_{s,t>0} \|U_k(\cdot, s; \cdot, t)\|_1 < \infty .$$

Assim, existe, para cada $k \in \square$, uma medida de Borel finita, ν_k, sobre $\mathbb{R}^2$, tal que:

$$(3) \qquad U_k(x,s;y,t) = \int\int P_s(x - x')P_t(y - y')d\nu_k(x',y'),$$

e também, pelo teorema 4.1.2,

$$\lim_{s,t\to 0} U_k(x,s;y,t) = f_k(x,y),$$

existe em quase toda parte e em norma L^1. Afirmamos, então, $h_k f_{00} = f_k$, e então $f_{00} \in h^1_{Hb}$. Com efeito, de (3), temos,

$$U_k^{\hat{}}(x,s;y,t) = ((P_sP_t)*\nu_k)^{\hat{}}(x,y) = (P_sP_t)^{\hat{}}(x,y)\ \nu_k^{\hat{}}(x,y),$$

onde a transformada de Fourier é tomada em relação às variáveis x e y, e como P_sP_t tem variáveis separadas, por $P_s^{\hat{}}(x)$ e $P_t^{\hat{}}(y)$ estamos indicando as transformadas de Fourier de P_s e P_t, em relação a x e em relação a y, respectivamente. Assim,

$$U^{\hat{}}(x,s;y,t) = P_s^{\hat{}}(x)P_t(y)\nu_k^{\hat{}}(x,y).$$

Mas,

$$P_s^{\hat{}}(x) = [\cosh (1 - 2s)\ \pi|x|\,]/\ \cosh \pi|x|,$$

então, quando $s \to 0$, temos que $P_s^{\wedge}(x)$ converge a 1. Também, como $P_s^{\wedge}(x)$ é simétrica em relação à reta $s = 1/2$, pois $\cosh\xi$ é par, então $P_s^{\wedge}(x)$ também converge a 1 quando $s \to 1$. Assim, $P_s^{\wedge}(x)P_t^{\wedge}(y)$ converge a 1 quando $(s,t) \to k = (k_1,k_2) \in \square$. Assim,

(4) $\hat{U}_k(x,s;y,t)$ converge a $\nu_k^{\wedge}(x,y)$,

quando (s,t) converge a $(k_1,k_2) \in \square$. Também, pelo teorema 4.1.2, temos que

(5) $U_k^{\wedge}(x,s;y,t)$ converge a $f_k^{\wedge}(x,y)$,

quando (s,t) converge a $(k_1,k_2) \in \square$.

Assim, de (4) e (5) conduzimos que

$$\nu_k^{\wedge}(x,y) = f_k^{\wedge}(x,y)$$

e assim,

$$d\nu_k(x,y) = f_k(x,y)dxdy,$$

e então, de (3), temos

$$U_k(x,s;y,t) = \int\int P_s(x - x')P_t(y - y')f_k(x',y')dx'dy',$$

assim,

$$U_k(x,s;y,t) = ((P_s P_t) * f_k)(x,y)$$

assim,

$$U_k^\wedge(x,s;y,t) = P_s^\wedge(x) P_t^\wedge(y) f_k^\wedge(x,y)$$

assim,

$$(6) \quad \int\int |U_k^\wedge(x,s;y,t)| dxdy = \int\int P_s^\wedge(x) P_t^\wedge(y) \; f_k^\wedge(x,y) \; dxdy \leq$$

$$\leq C_{st} \|f^\wedge\| \quad .$$

Então, $U_k^\wedge \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, para cada par s,t, e portanto, vale a fórmula de inversão da transformada de Fourier:

$$U_k(x,s;y,t) = \int\int U_k^\wedge(x',s;y',t) e^{-2\pi i(xx' + yy')} dx'dy'$$

e então, por (6),

$$(7) \quad U_k(x,s;y,t) = \int\int P_s^\wedge(x') P_t^\wedge(y') f_k^\wedge(x',y') e^{-2\pi i(xx'+yy')} dx'dy'.$$

Agora, pelo fato do sistema $F = (U_k, k \in \square)$ ser conjugado, então, levando em conta as expressões de $P_s^\wedge$ e $P_t^\wedge$, temos,

$$\frac{\partial U_{00}}{\partial s} = \int\int (-\,2\pi|x'|)\,\frac{\operatorname{senh}(1-2s)\pi|x'|}{\cosh\pi|x'|}\cdot P_{\hat{t}}(y')\,f_{\hat{00}}(x',y')\cdot$$

$$\cdot\; e^{-2\pi i(xx'+yy')}dx'dy' = -\,\frac{\partial U_{10}}{\partial x} =$$

$$= -\int\int(-\,2\pi i x')P_{\hat{s}}(x')P_{\hat{t}}(y')f_{\hat{10}}(x',y')e^{-2\pi i(xx'+yy')}dx'dy' \;.$$

E então,

$$-\,2\pi|x|\;\frac{\operatorname{senh}(1-2s)\pi|x|}{\cosh\pi|x|}\;P_{\hat{t}}(y)f_{\hat{00}}(x,y) =$$

$$= (2\pi i x)P_{\hat{s}}(x)P_{\hat{t}}(y)f_{\hat{10}}(x,y).$$

Fazendo $s \to 0$, então, temos

$$-\,2\pi|x|\;\operatorname{tgh}\pi|x|\;\;P_{\hat{t}}(y)f_{\hat{00}}(x,y) = 2\pi i x\;P_{\hat{t}}(y)f_{\hat{10}}(x,y)$$

e então,

$$f_{\hat{10}}(x,y) = i\,\operatorname{sg}x\;\;\operatorname{tgh}\pi|x|\;f_{\hat{00}}(x,y),$$

e assim, pela definição 4.3.1,

$$f_{\hat{10}}(x,y) = F(h_{10}f_{00})(x,y)$$

assim,

$$f_{10}(x,y) = h_{10}f_{00}(x,y).$$

De modo análogo provamos

$$f_{01}(x,y) = h_{01} f_{00}(x,y).$$

Se $k = (1,1)$, então, pelo fato do sistema (U_k) ser conjugado, temos que $\partial^2 U_{11} / \partial x dy = \partial^2 U_{00} / \partial s \partial t$, então, procedendo da mesma forma que para $K = (0,1)$, e $k = (1,0)$, concluimos que

$$f_{11}(x,y) = h_{11} f_{00}(x,y).$$

Assim, $h_k f_{00} = f_k$, e então, $f_{00} \in h^1_{Hb}$. Agora, mostremos (1).

$$\|f_{00}\|_{h^1_{Hb}} = \sum_{k\in\Box} \|h_k f_{00}\|_1 = \sum_{k\in\Box} \|f_k\|_1 =$$

$$= \sum_{k\in\Box} \|\lim_{s,t\to 0} U_k(x,s;y,t)\|_1 = \sum_{k\in\Box} \lim_{s,t\to 0} \|U_k(x,s;y,t)\|_1 \leq$$

$$\leq \sum_{k\in\Box} \sup_{0<s,t<1} \int\int |F(x,s;y,t)| dxdy = 4 \|F\|_{h^1_{anal}},$$

o que prova (1).

Reciprocamente, seja $f \in h^1_{Hb}$, logo $h_k f \in L^1$, para todo $k \in \Box$. Definimos

(8) $$U_k(x,s;y,t) = (P_s P_t) * (h_k f)(x,y).$$

De (8), desde que $Q_s^\wedge(x) = i\,tgh\,\pi x\; P_s^\wedge(x)$, temos que

$$U_{10}^{\wedge}(x,s;y,t) = P_s^{\wedge}(x)P_t^{\wedge}(y)(h_{10}f)^{\wedge}(x,y) =$$

$$= P_t^{\wedge}(y)P_s^{\wedge}(x)(i\,\mathrm{tgh}\pi x)\,f^{\wedge}(x,y)$$

$$= P_y^{\wedge}(y)Q_s^{\wedge}(x)f^{\wedge}(x,y) =$$

$$= (Q_sP_t)^{\wedge}(x,y)f^{\wedge}(x,y)$$

$$= ((Q_sP_t) * f)^{\wedge}(x,y).$$

Assim,

$$U_{10}(x,s;y,t) = (Q_sP_t) * f(x,y)$$

e analogamente,

$$U_{01}(x,s;y,t) = (P_sQ_t) * f(x,y)$$

$$U_{11}(x,s;y,t) = (Q_sQ_t) * f(x,y).$$

e então, é fácil concluir que $(U_k\,, k \in \square)$ é um sistema conjugado. Desde que cada U_k é biharmonica e simétrica em relação a $s = t = 1/2$, além disso,

$$\int\int |F(x,s;y,t)|dxdy = \int\int (\sum_{k\in\square}|U_k(x,s;y,t)|^2)^{1/2}dxdy \leq$$

$$\leq \int\int \sum_{k\in\square}|U_k(x,s;y,t)|dxdy = \sum_{k\in\square} \|U_k(\cdot, s; \cdot, t)\|_1$$

$$\leq \sum_{k\in\square} \|P_sP_t\|_1 \quad \|h_kf\|_1 = \sum_{k\in\square} \|h_kf\|_1 = \|f\|_{h^1_{Hb}}.$$

Assim, $F = (u_k) \in h^1_{anal}(S \times S)$ e satisfaz (2), o que complete a demonstração do teorema.

4.3. O ESPAÇO $h^1_{max}(S \times S)$.

4.3.1. DEFINIÇÃO: Seja u bi-harmônica sobre $S \times S$. Definimos u^* e u^{**} por

$$u^{**}(u)(x,y) = \sup\{\, |u(x',s;y',t)| \;\; |(x',s;y',t) \in \Gamma(x) \times \Gamma(y)\}$$

onde $\Gamma(x) = \{(x',s) \in S \,/\, |x - x'| < s,\ 0 < s < 1/2\}$ e

$$\Gamma(y) = \{(y',t) \in S \,/\, |y - y'| < t,\ 0 < t < 1/2\}$$

e

$$u^*(u)(x,y) = \sup_{0<s,t<1} |u(x,s;y,t)|.$$

4.3.2. LEMA: Seja u bi-harmônica em $S \times S$ e $0 < p < \infty$ e $u^* \in L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, então existe uma constante C positiva, tal que

$$\text{(1)} \qquad \|u^{**}\|_p \leq C\, \|u^*\|_p .$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $B_1 = B_s(x,s)$, com $0 < s < 1/2$ a bola aberta de centro (x,s) e raio s, e analogamente, $B_2 = B_t(y,t)$.

Seja $T_1 = I_1 \times J_1 = (x - 2s,\ x + 2s) \times (0,2s)$ e analogamente, $T_2 = I_2 \times J_2 = (y - 2t,\ y + 2t) \times (0,2t)$.

Como $0 < s,\ t < 1/2$, então $(-2s, 2s) \subset (-1, 1)$, o mesmo ocorrendo com $(-2t, 2t)$; também, $(0,2s) \subset (0,1)$, o mesmo ocorrendo com $(0,2t)$. Também,

$$(2) \qquad |T_i| \,/\, |B_i| = C, \qquad i = 1,2.$$

Como u é bi-harmônica fixado $(y,t) \in S$, $u(x,s;y,t)$ é harmônica em $(x,s) \in S$ e portanto em B_1, assim, ver [8],

$$|u(x,s;y,t)|^{p/2} \le (C / |B_1|) \int\int_{B_1} |u(x',s';y,t)|^{p/2} dx'ds' .$$

Da mesma forma, fixado (x',s'), temos que

$$|u(x',s';y,t)|^{p/2} \le (C / |B_2|) \int\int_{B_2} |u(x',s';y',t')|^{p/2} dy'dt' .$$

Assim, combinando essas duas últimas desigual dadas, temos,

$$|u(x,s;y,t)|^{p/2} \le (C/|B_1 \times B_2|) \int\int\int\int_{B_1 \times B_2} |u(x',s';y',t')|^{p/2} dx'dy'dt'ds'$$

e então, por (2), temos

$$|u(x,s;y,t)|^{p/2} \le (C/|T_1 \times T_2|) \int\int\int\int_{T_1 \times T_2} |u(x',s';y',t')|^{p/2} dx'dy'ds'dt' \le$$

$$= (C/|I_1||I_2|) \int\int_{I_1 \times I_2} u^*(|u|^{p/2})(x',y') dx'dy' \;=$$

$$\leq C|I_2|^{-1} \int_{I_2} M^{10}(u^*(|u|^{p/2}))(x',y')dy' \leq$$

$$\leq C\ M^{01}(M^{10}(u^*(|u|^{p/2}))(x,y).$$

Assim, provamos que:

$$|u(x,s\ ;y,t)|^{p/2} \leq C\ M^{01}(M^{10}(u^*(|u|^{p/2}))(x,y).$$

Assim,

$$\iint |u^{**}(u)(x,y)|^p dxdy = \iint ((|u^{**}(u)(x,y)|)^{p/2})^2\ dxdy \leq$$

$$\leq C \iint (M^{01}(M^{10}(u^*(|u|^{p/2}))))^2\ dxdy =$$

$$= C\|M^{01}(M^{10}(u^*(|u|^{p/2})))\|_2^2 \leq$$

$$\leq C\|M^{10}(u^*(|u|^{p/2}))\|_2^2 \leq C\|u^*(|u|^{p/2})\|_2^2 =$$

$$= C \iint |u^*(|u|^{p/2})|^2(x',y')dx'dy' =$$

$$= C \iint \Big(\sup_{0<s,t<1} |u(x',s;y',t)|^{p/2} \Big)^2 \, dx'dy' \; .$$

Mas,

$$|u(x',y;y',t)^{p/2} \leq \Big(\sup_{0<s,t<1} |u(x',s;y',t)| \Big)^{p/2} \; .$$

Logo,

$$\sup_{0<s,t<1} \big(|u\ (x',s;y',t)|\big)^{p/2} \leq \Big(\sup_{0<s,t<1} |u(x',s;y',t)|\Big)^{p/2} .$$

Logo,

$$\Big(\sup_{0<s,t<1} \big(|u(x',s;y',t)|\big)^{p/2}\Big)^2 \leq \Big(\sup_{0<s,t<1} |u(x',s;y',t)|\Big)^p \; .$$

Assim,

$$\iint |u^{**}(u)|^p \, dx'dy' \leq C \iint \Big(\sup_{0<s,t<1} |u(x',s;y',t)|\Big)^p dx'dy' =$$

$$= C \iint |u^*(u)|^p \, dx'dy' \; .$$

Então,

$$\|u^{**}(u)\|_p \leq C \|u^*(u)\|_p \; .$$

e assim o lema fica provado.

4.3.3. DEFINIÇÃO. A classe de Hardy $h^1_{max}(S \times S)$ é o espaço vetorial das funções bi-harmônicas reais u, sobre $S \times S$ tal que $u^{**} \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e normado por

$$\|u\|_{h^1_{max}} = \|u^{**}\|_1 .$$

4.3.4. TEOREMA. O espaço h^1_{anal} está imersamente contínuo em h^1_{max}.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $F = (u_k,\ k \in \square) \in h^1_{anal}$. Assim, cada u_k é bi-harmônica. Definamos u sobre $S \times S$ por:

$$u(x,s;y,t) = \sum_{k \in \square} u_k(x,s;y,t) .$$

Assim, u é bi-harmônica e mais, pelo lema 4.4.2

$$\|u^{**}(u)\|_1 \leq C\|u^*(u)\|_1 = \iint \sup_{0<s,t<1} |u(x,s;y,t)|dxdy \leq$$

$$\leq \iint \sup_{0<s,t<1} \sum_{k \in \square} |u_k(x,s;y,t)|dxdy \leq$$

$$\leq \iint \sum_{k \in \square} \sup_{0<s,t<1} |u_k(x,s;y,t)|dxdy \leq$$

$$\leq \iint \sum_{k \in \Box} \sup_{0<s,t<1} |F(x,s;y,t)|\,dxdy =$$

$$= 4 \iint \sup_{0<s,t<1} |F(x,s;y,t)|\,dxdy \; .$$

Como $F \in h^1_{anal}$, então, pelo teorema 4.1.2, temos

$$\|u^{**}(u)\|_1 \leq C\|F\|_{h^1_{anal}} \; ,$$

o que completa a prova do teorema.

CAPÍTULO V

O PROBLEMA DA DUALIDADE DOS ESPAÇOS h^1

Neste Capítulo fazemos um estudo do problema da dualidade dos espaços h^1 sobre produtos de faixas. Para isso introduzimos os espaços b.m.o. "naturais" para o caso dos espaços h^1 atômicos. Através desses espaços b.m.o. é possível caracterizar o dual dos espaços h^1 atômicos. Entretanto, temos somente que os espaços atômicos estão contidos nos espaços analíticos. Portanto, obtemos apenas uma caracterização parcial do dual dos espaços h^1 sobre produtos de faixas.

5.1. O ESPAÇO b.m.o.

5.1.1. DEFINIÇÃO. Uma função f definida sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a valores reais está em b.m.o. se ela verifica as seguintes condições:

(i) $$f \in L^2_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

(ii) $$A = \sup_{|I|,|J|<1} |I \times J|^{-1} \iint_{I\times J} |f - f_I - f_J + f_{IJ}|^2 \, dxdy < \infty,$$

$$B = \sup_{|I|,|J|>1} |I \times J|^{-1} \iint_{I\times J} |f|^2 \, dxdy < \infty ,$$

$$C = \sup_{|I|>1,|J|<1} |I\times J|^{-1} \iint_{I\times J} |f - f_J|^2 \, dxdy < \infty,$$

e

$$D = \sup_{|I|<1,|J|>1} |I\times J|^{-1} \iint_{I\times J} |f - f_I|^2 \, dxdy < \infty,$$

onde I,J são intervalos fechados e

$$f_I(y) = |I|^{-1} \int_I f(x,y)dx$$

$$f_J(x) = |J|^{-1} \int_J f(x,y)dy$$

$$f_{IJ} = |I\times J|^{-1} \iint_{I\times J} f(x,y)dxdy .$$

Agora, definimos sobre b.m.o. a seguinte norma:

$$\|f\|_{b.m.o.} = \max\{A, B, C, D\}.$$

5.1.2. DEFINIÇÃO. Uma função a definida sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a valores reais, é um átomo se ela verifica as seguintes condições:

(i) $$a \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

(ii) Existem $I, J \subset \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{supp} a \subset I \times J$ e

$$\|a\|_2^2 \leq 1 / |I \times J|.$$

(iii) $$\int a(x,y)\,dx = 0 \quad , \text{ a.e. } y \in \mathbb{R}, \quad \text{se} \quad |I| < 1$$

e

$$\int a(x,y)\,dy = 0 \quad , \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}, \quad \text{se} \quad |J| < 1 .$$

Observamos que as condições de momento nulo são apenas para o caso da medida do intervalo ser menor que 1.

5.1.3. LEMA. Seja $f \in$ b.m.o. . Então, vale o seguinte:

$$\|f\|_{b.m.o.} = \sup \left\{ \left| \iint a\, f\, dxdy \right| \ / \ a \text{ é átomo} \right\}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja a um átomo qualquer. Suponhamos que $\operatorname{supp} a \subset I \times J$. Então temos quatro casos a considerar:

(a_1) $|I|$, $|J| < 1$. Como para este caso temos que as condições de momento nulo valem, então, podemos escrever:

$$\left|\iint a(x,y)f(x,y)dxdy\right| = \left|\iint_{I\times J} a(f - f_I - f_J + f_{IJ})dxdy\right| \leq$$

$$\leq \iint_{I\times J} |a||f - f_I - f_J + f_{IJ}|\, dxdy$$

e da desigualdade de Schwartz, e das definições 5.1.1 e 5.1.2., a última quantidade é majorada por

$$\leq \|a\|_2 \left(\iint_{I\times J} |f - f_I - f_J + f_{IJ}|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{|I\times J|} \iint_{I\times J} |f - f_I - f_J + f_{IJ}|^2\right)^{1/2} \leq \|f\|_{b.m.o.} \; .$$

Logo,

$$\left|\iint a\, f\, dxdy\right| \leq \|f\|_{b.m.o.} \; . \tag{1}$$

(a_2) $|I|,|J|>1$. Então, pela desigualdade de Schwartz a definição 5.1.2, vem que

$$\left|\iint a\, f\, dxdy\right| = \left|\iint_{I\times J} a\, f\, dxdy\right| \leq$$

$$\leq \|a\|_2 \left(\iint |f|^2\, dxdy\right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{|I\times J|} \iint |f|^2\, dxdy\right)^{1/2} \; .$$

Assim,

$$(2) \qquad \left|\iint a\, f\, dxdy\right| \leq \|f\|_{b.m.o.} \quad .$$

(a_3) $|I|<1$ e $|J|>1$. Neste caso, temos apenas o momento com relação a x, nulo. Assim, pela desigualdade de Schwartz e definição 5.1.2, vem que

$$\left|\iint a\, f\, dxdy\right| = \left|\iint_{I\times J} a\, f\, dxdy\right| =$$

$$= \left|\iint_{I\times J} a(f - f_I)dxdy\right| \leq \|a\|_2 \left(\iint |f - f_I|^2\, dxdy\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(|I\times J|^{-1} \iint |f - f_I|^2\, dxdy\right)^{1/2} \leq \|f\|_{b.m.o.} \quad .$$

Assim,

$$(3) \qquad \left|\iint a\, f\, dxdy\right| \leq \|f\|_{b.m.o} \quad .$$

(a_4) $|I| > 1$ e $|J| < 1$. Analogamente ao caso (3) concluimos que:

$$(4) \qquad \left|\iint a\, f\, dxdy\right| \leq \|f\|_{b.m.o.} \quad .$$

Assim, de (1), (2), (3) e (4), concluimos que

$$\text{(5)} \qquad \sup \{ \left| \iint a\, f\, dxdy \right| \ / \ a \text{ é átomo} \} \leq \| f \|_{b.m.o.} \ .$$

Provemos, agora, a desigualdade contrária. Para isso, sejam I e J quaisquer. Vamos, novamente discutir quatro casos:

(b_1) $|I|, |J| < 1$. Neste caso definimos:

$$a(x,y) = \frac{\chi_{I\times J}(f - f_I - f_J + f_{IJ})}{\| \chi_{I\times J}(f - f_I - f_J + f_{IJ}) \|_2 \ |I\times J|^{1/2}} \ .$$

É fácil verificar que a é um átomo, e mais

$$\left| \iint a\, f\, dxdy \right| = (|I\times J|^{-1} \iint |f - f_I - f_J + f_{IJ}|^2 \ dxdy)^{1/2} \ ,$$

e assim,

$$\sup \{ \left| \iint a\, f\, dxdy \right| \ / \ a \text{ é átomo} \} \geq (|I\times J|^{-1}) \iint |f-f_I - f_J+f_{IJ}|^2)^{1/2}$$

e então,

$$\text{(6)} \quad \sup\{ \left| \iint a\, f\, dxdy \right| / a \text{ é átomo} \} \geq \sup_{|I|,|J|<1} (|I\times J|^{-1} \iint_{I\times J} |f-f_I - f_J+f_{IJ}|^2)^{1/2}$$

(b_2) $|I|, |J| > 1$. Neste caso definimos:

$$a(x,y) = \frac{\chi_{I\times J}(f)}{\|\chi_{I\times J}(f)\|_2 \; |I\times J|^{1/2}}$$

Também, é fácil verificar que a é um átomo, e mais,

$$\iint a\, f\, dxdy = (|I\times J|^{-1} \iint_{I\times J} |f|^2)^{1/2} \;,$$

assim,

$$\text{(7)} \quad \begin{aligned} &\sup\{|\iint a\, f\, dxdy| \;/\; a \;\; \text{átomo}\} \geq \\ &\leq \sup_{|I|, |J|>1} (|I\times J|^{-1} \iint_{I\times J} |f|^2)^{1/2} \;. \end{aligned}$$

(b_3) $|I| < 1$ e $|J| > 1$. Neste caso definimos:

$$a(x,y) = \frac{\chi_{I\times J}(f - f_I)}{\|\chi_{I\times J}(f - f_I)\|_2 |I\times J|^{1/2}}$$

que também é um átomo, e mais,

$$\iint_{I\times J} (f - f_I)^2 dxdy = \iint_{I\times J} (f^2 - ff_I) dxdy + \iint_{I\times J} (f_I^2 - ff_I) dxdy$$

e notamos que,

$$\iint_{I\times J} (f_I^2 - ff_I) dxdy = \iint_{I\times J} f_I^2 \, dxdy = \iint_{I\times J} ff_I \, dxdy =$$

$$= |I| \int_J f_I^2 \, dy - |I| \int_J f_I^2 \, dy = 0 \; .$$

Então, levando isso em conta, temos

$$\iint a \, f \, dxdy = \frac{1}{|I\times J|^{1/2} \| \chi_{I\times J} (f - f_I) \|_2} \iint_{I\times J} f(f - f_I) dxdy =$$

$$= \frac{1}{|I\times J|^{1/2} \| \chi_{I\times J} (f - f_I) \|_2} \iint_{I\times J} (f^2 - ff_I - ff_I + f_I^2) dxdy =$$

$$= \frac{1}{|I\times J|^{1/2} \| \chi_{I\times J} (f - f_I) \|_2} \iint_{I\times J} (f - f_I)^2 \, dxdy =$$

$$= (|I\times J|^{-1} \iint_{I\times J} |f - f_I|^2 \, dxdy)^{1/2} \; .$$

Assim,

$$\sup\{|\iint a\,f\,dxdy| \;/\; a \text{ é átomo}\} \geq (|I\times J|^{-1} \iint_{I\times J} |f - f_I|^2\, dxdy)^{1/2}$$

e portanto

$$(8)\qquad \sup\{|\iint a\,f\,dxdy\;|/\; a \text{ é átomo}\} \geq$$
$$\geq \sup_{|I|<1,\,|J|>1} (|I\times J|^{-1} \iint_{I\times J} |f - f_I|^2\, dxdy)^{1/2}$$

(b_4) $|I| > 1$ e $|J| < 1$. Analogamente ao caso (b_3), concluimos que:

$$(9)\qquad \sup\{|\iint a\,f\,dxdy| \;/ a \text{ é átomo}\} \geq$$
$$\geq \sup_{|I|>1,\,|J|<1} (|I\times J|^{-1} \iint_{I\times J} |f - f_J|^2\, dxdy)^{1/2} .$$

Assim, de (6), (7), (8) e (9), concluimos que

$$(10)\qquad \sup\{|\iint a\,f\,dxdy| \;/\; a \text{ é átomo}\} \geq \|f\|_{b.m.o.} .$$

De (5) e (10) concluimos que o lema é verdadeiro.

5.2. O ESPAÇO $h^1_{atom}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

5.2.1. DEFINIÇÃO. $h^1_{atom}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = h^1_{atom}$ é o espaço vetorial gerado pelos átomos, isto é,

$$h^1_{atom} = \{f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \ / \ a_i \text{ são átomos e } \alpha_i \text{ são reais}\}.$$

Munimos h^1_{atom} com a seminorma associada ao conjunto:

$$\hat{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \ / \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \,,\ \alpha_i \geq 0 \quad \text{e} \quad a_i \quad \text{átomo} \right\}.$$

Para cada $f \in h^1_{atom}$, definimos

$$\|f\|_{atom} = \inf\{\alpha > 0 \ / \ f \in \alpha\hat{A}\} \ .$$

Observamos que se a é um átomo então $\|a\|_{h^1_{atom}} \leq 1$.

O ponto importante nesse espaço é que seu dual é o b.m.o. É o que diz o seguinte teorema:

5.2.1. TEOREMA. O dual de h^1_{atom} é o espaço b.m.o., no seguinte sentido:

(i) Seja $f \in$ b.m.o. A aplicação que a cada átomo a associa o número real $L_f(a) = \iint a\, f\, dxdy$ se prolonga, por linearidade, a uma forma linear contínua L_f sobre h^1_{atom}, e mais

$$\|L_f\|_{(h^1_{atom})^*} = \sup\{|\iint a\, f| \;/\; a \text{ é átomo}\} = \|f\|_{b.m.o.}\} .$$

(ii) Para todo $L \in (h^1_{atom})^*$, existe uma $f^L \in$ b.m.o. tal que $L(a) = L_{f^L}(a)$, para todo átomo a.

DEMONSTRAÇÃO (i). Sabemos, pelo Lema 5.1.3, que se a é um átomo, então,

(1) $$|L_f(a)| \leq \|f\|_{b.m.o.} .$$

Provemos que:

(3) $$|L_f(a)| \leq C\|a\|_{h^1_{atom}} \leq C ,$$

onde C é uma constante independente do átomo a. Pois bem,

$$\|a\|_{h^1_{atom}} = \inf\{\alpha > 0 \;/\; a \in \alpha\hat{A}\} = \inf B.$$

Seja $\alpha \in B$, logo $a \in \alpha\hat{A}$, logo temos,

$$a = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \quad \text{com} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \ , \ \alpha_i \geq 0 \quad \text{e} \quad \alpha > 0 \ .$$

Assim, por (1),

$$|L_f(a)| = \alpha \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_f(a_i) \right| \leq \alpha \cdot \|f\|_{b.m.o.} \ .$$

Assim, tomando o ínfimo de B, temos,

$$|L_f(a)| \leq \|f\|_{b.m.o.} \cdot \|a\|_{h^1_{atom}}$$

e, então, (2) está provada.

Agora, provemos que

$$(3) \qquad |L_f(g)| \leq \|f\|_{b.m.o.} \cdot \|g\|_{h^1_{atom}} \quad , \quad \forall g \in h^1_{atom} \ .$$

Seja $g \in h^1_{atom}$. Logo

$$\|g\|_{h^1_{atom}} = \inf\{\alpha > 0 \ / \ g \in \alpha \hat{A}\}.$$

Seja $g = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \ , \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geq 0 \quad \text{e} \quad \alpha > 0$.

Assim, por (1),

$$|L_f(g)| = |L_f(\alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i)| \leq \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |L_f(a_i)| \leq \alpha \|f\|_{b.m.o.} .$$

Tomando o ínfimo dos α's temos

$$\|L_f(g)\| \leq \|f\|_{b.m.o.} \cdot \|g\|_{h^1_{atom}}$$

e então (3) está provada, e mais, $L_f \in (h^1_{atom})^*$ com

$$\|L_f\|_{(h^1_{atom})^*} \leq \|f\|_{b.m.o.} .$$

A seguir, demonstremos (ii). Fixemos dois intervalos I_o e J_o e sejam I, J contendo I_o e J_o, respectivamente.

Definimos espaços $L^2_k(I \times J)$ da seguinte maneira:

Se $|I|, |J| < 1$,

$$(4) \qquad L^2_{11}(I \times J) = \{g \in L^2(I\times J) \ / \int g(x,y)dx = 0 \ , \text{ a.e. } y \in \mathbb{R}$$

$$\int g(x,y)dy = 0 \ , \text{ a.e. } y \in \mathbb{R}\}.$$

Se $|I|, |J| > 1$.

$$(5) \qquad L^2_{00}(I \times J) = L^2(I \times J).$$

Se $|I| < 1$ e $|J| > 1$

(6) $L^2_{10}(I\times J) = \{g \in L^2(I\times J) \;/\; \int g(x,y)dx = 0 \;,\quad \text{a.e. } y \in \mathbb{R}\}.$

Se $|I| > 1$ e $|J| < 1$

(7) $L^2_{01}(I\times J) = \{g \in L^2(I\times J) \;/\; \int g(x,y)dy = 0 \;,\quad \text{a.e. } y \in \mathbb{R}\}.$

Seja $g \in L^2_k(I\times J)$, $k \in \square$, e definamos:

$$a(x,y) = \frac{g(x,y)}{|I\times J|^{1/2}\,\|g\|_2} \;.$$

É fácil verificar que para todo $k \in \square$, tem-se que a é um átomo. Assim,

$$g(x,y) = |I\times J|^{1/2}\,\|g\|_2\; a(x,y) \;,$$

e então, $g \in h^1_{atom}$, e mais,

(8) $$\|g\|_{h^1_{atom}} \leq |I\times J|^{1/2}\,\|g\|_2 \;.$$

Então, concluimos que $L^2_k(I\times J)$ está contido em h^1_{atom} e por (8),

(9) $\quad |L(g)| \leq \|L\|_{(h^1_{atom})^*} \cdot |I\times J|^{1/2} \|g\|_2 \;, \; \forall g \in L^2_{\mathbb{R}}(I\times J).$

Assim, aplicando o teorema de Hahn-Banach, L pode ser extendido sobre $L^2(I\times J)$, com mesma norma. Pelo teorema de representação de Riesz, existe uma $f_k^{I\times J} \in L^2(I\times J)$, tal que:

(10) $$L(g) = \iint g(x,y)\, f_k^{I\times J}(x,y)\,dxdy \;, \quad \forall g \in L^2_{\mathbb{R}}(I\times J).$$

A seguir, como $I \subset I_o$ e $J \subset J_o$, podemos trabalhar com $f^{I\times J} - f^{I\times J}_{I_o} - f^{I\times J}_{J_o} + f^{I\times J}_{I_oJ_o}$ no lugar de $f^{I\times J}$, sem modificar (10), se $k = (1,1)$; se $k = (1,0)$, (10) continuará válida se trocarmos $f^{I\times J}$ por $f^{I\times J} - f^{I\times J}_{I_o}$; analogamente se $k = (0,1)$, (10) continuará válida se trocarmos $f^{I\times J}$ por $f^{I\times J} - f^{I\times J}_{J_o}$. Assim sendo vamos trabalhar com $f^{I\times J}$, satisfazendo (10), tal que

$$\iint_{I_o\times J_o} f^{I\times J} = 0 \;,$$

isto é, $f^{I\times J}$ são normalizadas.

Nosso próximo passo é mostrarmos que: se $I \subset I'$ e $J \subset J'$, então:

(11) $$f^{I'\times J'}\Big|_{I\times J} = f^{I\times J}$$

isto é, $f^{I'\times J'}$ restrita a $I\times J$ coincide com $f^{I\times J}$. Para isso, vamos estudar cada caso separadamente.

Seja $k=(1,1)$. Afirmamos que $f^{I'\times J'}\Big|_{I\times J} - f^{I\times J}$ é ortogonal a $L^2_{11}(I\times J)$. Com efeito,

Seja $g\in L^2_{11}(I\times J)$, então $g\in L^2_{11}(I'\times J')$, assim, por (10),

$$\iint_{I\times J}(f^{I'\times J'} - f^{I\times J})g\,dxdy = 0 \ .$$

Assim $f^{I'\times J'}\Big|_{I\times J} - f^{I\times J}$ está no ortogonal de $L^2_{11}(I\times J)$.

Logo, existem $w_1\in L^2(I)$ e $w_2\in L^2(J)$ tal que

$$f^{I'\times J'}\Big|_{I\times J} - f^{I\times J} = w_1(x) + w_2(y) \ .$$

Mas, $f^{I'\times J'}\Big|_{I\times J} - f^{I\times J}$ é normalizada, logo:

$$0 = \frac{1}{|J_o|}\int_{J_o}(f^{I'\times J'} - f^{I\times J})dy = \frac{1}{|J_o|}\left(\int_{J_o} w_1(x)\,dy + \int_{J_o} w_2(y)dy\right) =$$

$$= w_1(x) + \frac{1}{|J_o|}\int_{J_o} w_2(y)dy = w_1(x) + (w_2)_{J_o} \ .$$

Logo,

$$w_1(x) = -(w_2)_{J_o}$$

Então,

$$(w_1)_{I_o} = -(w_2)_{J_o}$$

e

$$w_2 = (w_2)_{J_o}$$

e então, $w_1 = -w_2$, logo, $f^{I'\times J'}\Big|_{I\times J} - f^{I\times J} = 0$, e então a prova de (11) está concluida se $k = (1,1)$.

Se $k=(1,0)$, concluimos da mesma forma que $f^{I'\times J'}\Big|_{I\times J} - f^{I\times J}$ pertence ao ortogonal de $L^2_{10}(I\times J)$, assim,

$$f^{I'\times J'}\Big|_{I\times J} - f^{I\times J} = w(y)$$

com $w(y) \in L^2(I)$. Assim,

$$\frac{1}{|I_o|}\int_{I_o} w(y)dx = \frac{1}{|I_o|}\int_{I_o}(f^{I'\times J'}\Big|_{I\times J} - f^{I\times J})dx = 0$$

pois $f^{I'\times J'}\Big|_{I\times J} - f^{I\times J}$ é normalizada.

Logo, $w(y) = 0$, e então (11) está concluida. Se $k = (0,1)$ a prova é análoga ao caso em que $k = (1,0)$; e finalmente, se $k = (0,0)$, não há nada a provar.

Nosso objetivo agora é definir uma função f^L sobre $\mathbb{R}^2$, $f^L \in$ b.m.o., e que satisfaça a relação (10) para toda $g \in L^2_k(I \times J)$. Basta então, definirmos f^L por:

$$f^L(x,y) = f^{I\times J}(x,y) \text{ se } (x,y) \in I \times J \supset I_o \times J_o .$$

A relação (11) garante a boa definição de f_L. A seguir, mostremos que $f_L \in$ b.m.o. . Para isso, vamos estudar quatro casos:

Sejam I,J intervalos quaisquer.

1º CASO: Se $|I|,|J| < 1$, então,

$$\|f^L - f^L_I - f^L_J + f^L_{IJ}\|_2 = \sup_{\|g\|_2=1} \left| \iint_{I\times J} (f^L - f^L_I - f^L_J + f^L_{IJ}) g \right|$$

$$= \sup_{\|g\|_2=1} \left| \iint_{I\times J} f^L (g - g_I - g_J + g_{IJ}) \right| = \sup_{\|g\|_2=1} \left| \iint_{I\times J} f^{I\times J} (g - g_I - g_J - g_{IJ}) \right|$$

Como, $g - g_I - g_J + g_{IJ} \in L^2_{11}(I \times J)$, então (10) vale, logo, a última quantidade fica:

$$\sup_{\|g\|_2=1} |L(g - g_I - g_J + g_{IJ})|,$$

a qual, por (9) é majorada por

$$\|L\|_{(h^1_{atom})^*} |I\times J|^{1/2} \sup_{\|g\|_2=1} (\|g - g_I - g_J + g_{IJ})\|_2)$$

que por sua vez é majorada por

$$C\|L\|_{(h^1_{atom})} \|I\times J\|^{1/2} .$$

Logo,

$$(12) \qquad \sup_{|I|,|J|<1} |I\times J|^{-1/2} \|f^L - f^L_I - f^L_J + f^L_{IJ}\|_2 \leq C\|L\|_{(h^1_{atom})^*} .$$

2º CASO: Se $|I| < 1$ e $|J| > 1$.

$$\|f^L - f^L_I\|_2 = \sup_{\|g\|_2=1} |\iint (f^L - f^L_I)g| =$$

$$= \sup_{\|g\|_2=1} |\iint f^L(g - g_I)| = \sup_{\|g\|_2=1} |\iint f^{I\times J}(g - g_I)|$$

Como, $g - g_I \in L^2_{10}(I \times J)$, então (10) vale, logo a última quantidade fica:

$$= \sup_{\|g\|_2=1} |L(g - g_I)| ,$$

que, por (9), é majorada por

$$\|L\|_{(h^1_{atom})^*} |I\times J|^{1/2} \sup_{\|g\|_2=1} (\|g - g_I\|_2)$$

a qual por sua vez é majorada por

$$C\|L\|_{(h^1_{atom})^*} |I\times J|^{1/2} .$$

Logo,

$$(13) \qquad \sup_{|I|<1,\, |J|>1} |I\times J|^{-1/2} \|f^L - f^L_I\|_2 \leq C\|L\|_{(h^1_{atom})^*} .$$

3º CASO: Se $|I| > 1$ e $|J| < 1$. Analogamente ao 2º Caso, concluimos que:

$$(14) \qquad \sup_{|I|>1,\, |J|<1} |I\times J|^{-1/2} \|f^L - f^L_J\|_2 \leq C\|L\|_{(h^1_{atom})^*} .$$

4º CASO. Se $|I|, |J| > 1$. Nesse caso, temos que $L^2_{00}(I \times J) = L^2(I \times J)$. Então, (10) vale para toda $g \in L^2(I \times J)$. Assim,

$$\|f^L\|_2 = \sup_{\|g\|_2=1} \left|\iint f^L g\right| = \sup_{\|g\|_2=1} |L(g)| \leq$$

por (9)

$$\leq \|L\|_{(h^1_{atom})^*} |I \times J|^{1/2} \sup_{\|g\|_2=1} (\|g\|_2) \, .$$

Assim,

(15) $$\sup_{|I|,|J|>1} |I \times J|^{-1/2} \|f^L\|_2 \leq C\|L\|_{(h^1_{atom})^*} \, .$$

Assim, de (12), (13), (14) e (15), concluimos que $f^L \in$ b.m.o. e mais

$$\|f^L\|_{b.m.o.} \leq C\|L\|_{(h^1_{atom})^*} \, ,$$

o que prova a segunda parte do teorema.

5.3. $h^1_{atom}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ E $h^1_{Hb}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$

Neste parágrafo provaremos que o espaço h^1_{atom} está continuamente imerso em h^1_{Hb}. Mas para isso, vários lemas serão necessários.

5.3.1. DEFINIÇÃO. Seja u bi-harmônica em $S\times S$, $S=\{(x,s)/x\in\mathbb{R},\ 0<s<1\}$. A função maximal u^* de u é, por definição

$$u^*(u)(x,y) = \sup_{0<s,t<1} |u(x,s;y,t)|$$

5.3.2. LEMA. Seja u bi-harmônica em $S\times S$ com $u^*(u)\in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Então, existe $f\in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ tal que

$$u(x,s;y,t) = (P_s\ P_t) * f(x,y)$$

onde P_s, P_t são os núcleos de Poisson definidos em 1.4.

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos u simétrica em relação a $s=t=1/2$. O argumento é o mesmo se u for antisimétrica e no geral, decompomos u na soma de simétricas e antisimétricas. Para efeitos de simplicidade adotemos a seguinte notação:

$$f_{st}(x,y) = u(x,s;y,t)\ .$$

Como

$$|f_{st}(x,y)| \leq u^*(u)(x,y)$$

então, da hipótese de $u^*(u) \in L^1$ vem que f_{st} é uniformemente integrável, isto é,

$$\|f_{st}\|_1 \leq \|u^*(u)\|_1 \quad , \quad \forall s,t \in (0,1).$$

Assim, pelo critério de compacidade de Dunford-Pettis, podemos escolher uma sub-sequência s',t', tal que $f_{s't'}$ converge a uma função $f \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ no sentido fraco, quando $s',t' \longrightarrow 0$; isto é,

$$\iint f_{s't'}(x',y') \; g(x',y')dx'dy'$$

converge a

$$\iint g(x',y') \; f(x',y')dx'dy' \; ,$$

quando s',t' convergem a zero, para toda função $g \in L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ Em particular, consideremos $g(x',y') = P_s(x-x') \; P_t(y-y')$. Assim,

$$\iint P_s(x-x') \; P_t(y,y') \; f_{s't'}(x',y')dx'dy'$$

converge para

$$\iint P_s(x-x')\, P_t(y-y')\, f(x',y')dx'dy'$$

quando $s',t' \longrightarrow 0$.

Agora, seguindo os mesmos argumentos na prova do lema 4.1.2, concluimos que

$$u(x,s;y,t) = f_{st}(x,y) = (P_s\ P_t) * f(x,y)$$

onde $f \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e assim a demonstração do lema está concluída.

5.3.3. LEMA. Seja μ_k , $k \in \square$, medida de Borel finita tal que

$$\mu_k = h_k \mu^{00} .$$

Então, existe $f^k \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tal que $d\mu_k = f^k\, dxdy$. E mais, $f^k = h_k f^{00}$ e assim $f^{00} \in h^1_{Hb}$.

DEMONSTRAÇÃO. Definimos $u_k(x,s;y,t) = (P_s\ P_t) * \mu_k$ e seja

$$F(x,s;y,t) = (u_k)_{k \in \square} .$$

Assim, F é um sistema conjugado, simétrica, e mais,

$$\sup_{0<s,t<1} \|u_k(x,s;y,t)\|_1 < \infty$$

pois,

$$\|u_k(\cdot,s;\cdot,t)\|_1 = \|P_s P_t * \mu_k\|_1 \leq \|P_s P_t\|_1 \; \|\mu_k\| = \|\mu_k\|$$

uma vez que $\|P_s P_t\|_1 = 1$. Assim $F \in h^1_{anal}$. Agora, consideramos

$$(1) \qquad f^k(x,y) = \lim_{s,t \to 0} u_k(x,s;y,t)$$

A existência desse limite em norma L^1 é garantida pelo teorema 4.2.2.

Consideremos as transformadas de Fourier, $\hat{\mu}_k$ e $\hat{f}^k$, de μ_k e f^k, respectivamente. Então,

$$\hat{u}_k(x,s;y,t) = (P_s P_t)^{\wedge}(x,y) \; \hat{\mu}_k \, ,$$

como

$$\hat{P}_s(x) = \frac{\cosh(1-2s)\pi|x|}{\cosh \pi |x|}$$

e expressão análoga vale para $\hat{P}_t(y)$, então temos:

$$\hat{u_k}(x,s;y,t) = \frac{\cosh(1-2s)\pi|x|}{\cosh\pi|x|} \cdot \frac{\cosh(1-2t)\pi|y|}{\cosh\pi|y|} \cdot \hat{u_k} .$$

Então,

(2) $$\lim \hat{u_k}(x,s;y,t) = \hat{\mu_k} .$$

De (1) também concluirmos que

(3) $$\lim_{s,t\to 0} \hat{u_k}(x,s;y,t) = \hat{f}^k(x,y)$$

Logo, de (2) e (3) concluimos que

(4) $$\hat{\mu_k}(x,y) = \hat{f}^k(x,y)$$

e assim,

$$d\mu_k = f^k \, dxdy ,$$

o que demonstra o Lema.

5.3.4. LEMA. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ a valores reais. Suponhamos que exista $C \geq 0$ tal que:

$$\sup_{0<s,t<1} \|h_k\, f_{st}\|_1 \leq C$$

onde $f_{st}(x,y) = (P_s P_t) * f(x,y)$. Então,

$$\|h_k f\|_1 \leq C\ ,$$

para todo $k \in \square$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $\|h_k f_{st}\|_1 \leq C$, $\forall s,t \in (0,1)$, existe uma subsequência $h_k f_{s',t'}$ que converge fracamente a uma medida de Borek finita, μ_k, quando $s',t' \longrightarrow 0$. Observemos que $h_k f_{s',t'}$ é simétrica em relação a $s' = t' = 1/2$. Admitamos a seguinte igualdade que logo após provaremos.

(1) $$h_k f_{st} = (P_s P_t) * \mu_k\ .$$

Assim,

(2) $$(h_k f_{st})^{\wedge}(x,y) = (P_s P_t)^{\wedge}\,(\mu_k)^{\wedge}(x,y)\ .$$

De onde, por transformada de Fourier, provamos que

(3) $$\mu_k = h_k f\ ,$$

para todo $k \in \square$

Verifiquemos (2) para $k = (1,0)$, por exemplo. De

$$(h_{10}f_{st})^{\wedge}(x,y) = i\, sgx\, tgh\, \pi |x| (P_s P_t)^{\wedge}(x,y)\hat{f}(x,y)$$

então de (2) temos que

$$\hat{\mu}^{10}(x,y) = i\, sg\, xtgh\, \pi |x| \hat{f}(x,y)$$

isto é,

$$\hat{\mu}_{10}(x,y) = (h_{10}f)^{\wedge}(x,y)$$

ou seja

$$\mu_{10} = h_{10}f \ .$$

Analogamente, concluimos (3) para outros valores de k.

Como μ_k são medidas de Borel finitas e como f por hipótese está em L^1, então pelo lema 5.3.3, temos que existe $f^k \in L^1$ tal que $f^k = h_k f$, $k \in \square$, e $d\mu_k = f^k\, dxdy$. Assim, nestas condições temos que $f \in h^1_{Hb}$, e por (1) e (3),

$$h_k(f_{s',t'}) = (P_{s'}P_{t'}) * \mu_k = (P_{s'}P_{t'}) * h_k f \longrightarrow h_k f$$

em L^1 quando $s,t \longrightarrow 0$. Assim, concluimos que:

$$\|h_k(f_{s',t'})\|_1 \le C \longrightarrow \|h_k f\|_1 \le C \ , \quad (\forall k \in \square) .$$

Para que a prova do Lema seja completa basta provarmos(1). Pela convergência fraca temos que

$$\iint P_s(x-x')\ P_t(y-y')h_k(f_{s',t'})dx'dy'$$

converge para

$$(4) \qquad \iint P_s(x-x')\ P_t(y-y')\ d\mu_k(x',y') \ ,$$

quando $s',t' \longrightarrow 0$.

Por outro lado, afirmamos que:

$$(5) \quad h_k(f_{s+s',t+t'})(x,y) = (P_s^{1-2s'}\ P_t^{1-2t'}) * (h_k f_{s',t'}) \ ,$$

Provemos (5) para $k = (1,0)$, para outros valores de k, sai semelhantemente

$$(h_{10} f_{s+s',t+t'})^{\wedge}(x,y) = i sgx\ tgh\ \pi\ |x|\ \hat{f}_{s+s',t+t'}(x,y)$$

$$= i\ sgx\ tgh\ \pi\ |x|(P_{s+s'}\ P_{t+t'}) * f)^{\wedge}(x,y) =$$

$$= i\ sg\ x\ tgh\pi|x|((P_s^{1-2s'}\ P_t^{1-2t'}) * f_{s',t'})^{\wedge}(x,y) =$$

$$= ((P_s^{1-2s'}\ P_t^{1-2t'}) * h_{10} f_{s't'})\hat{\ }(x,y)$$

e portanto,

$$h_{10} f_{s+s',t+t'} = (P_s^{1-2s'}\ P_t^{1-2t'}) * (h_{10}\ f_{s't'})\ .$$

Assim, por (5), temos,

$$\| h_k f_{s+s',t+t'} - \iint P_s(x-x')P_t(y-y')h_k(f_{s't'})dx'dy'\|_\infty =$$

$$= \| \iint (P_s^{1-2s'}(x-x')P_t^{1-2t'}(y-y') - P_s(x-x')P_t(y-y')h_k(f_{s't'})\ dx'dy'\|_\infty \leq$$

$$\leq \| P_s^{1-2s'}\ P_t^{1-2t'} - P_s P_t\|_\infty\ \| h_k f_{s't'}\|_1$$

$$\leq C\| P_s^{1-2s'}\ P_t^{1-2t'} - P_s P_t\|_\infty\ .$$

Mas, pela fórmula de inversão de Fourier, temos,

$$|P_s^{1-2s'}(x)P_t^{1-2t'}(y) - P_s(x)P_t(y)| =$$

$$= |\iint \hat{P}_s^{1-2s'}(\xi)\hat{P}_t^{1-2t'}(\eta) - \hat{P_s}(\xi)\ \hat{P_t}(\eta)\ e^{-2\pi i(\xi x+\eta y)}\ d\xi d\eta| \leq$$

$$\leq \left|\iint \hat{P}^{1-2s'}(\xi)\hat{P}^{1-2t'}(\eta) - \hat{P}_t^{1-2t'}(\eta)\ P_s^{\wedge}(\xi)\right| d\xi d\eta \ +$$

$$+ \iint |\hat{P}^{1-2t'}(\eta) P_s^{\wedge}(\xi) - P_s^{\wedge}(\xi)\ P_t^{\wedge}(\eta)| d\xi d\eta =$$

$$= \int |\hat{P}_t^{1-2t'}(\eta)| d\eta \int |\hat{P}_s^{1-2s'}(\xi) - P_s^{\wedge}(\xi)| d\xi \ +$$

$$+ \int |P_s^{\wedge}(\xi)| d\xi \int |\hat{P}_t^{1-2t'}(\eta) - P_t^{\wedge}(\eta)| d\eta \ .$$

Lembrando que $\hat{P}_s^{1-2s'}(x) = \dfrac{\cosh(1-2s'-2s)\pi|x|}{\cosh(1-2s')\pi|x|}$ é crescente em s', então pelo teorema da convergência monótona temos que as duas últimas parcelas tendem a zero, quando $s',t' \longrightarrow 0$, Assim,

$$(6)\quad h_k f_{s+s',t+t'}(x,y) = \iint P_s(x-x')P_t(y-y')h_k(f_{s',t'})(x',y')dx'dy'$$

converge para zero quando $s',t' \longrightarrow 0$.

De (4) e (6), concluimos que:

$$(7)\qquad h_k f_{s+s',t+t'} \longrightarrow (P_s\ P_t) * \mu_k\ ,\ \text{quando}\quad s',t' \longrightarrow 0\ .$$

Assim, para $k = (0,0)$, temos,

$$(P_sP_t) * \mu_{00}(x,y) = \lim_{s',t' \to 0} f_{s+s',t+t'}(x,y) =$$

$$= \lim_{s' \to 0} (\lim_{t' \to 0} f_{s+s',t+t'}(x,y)) =$$

$$= \lim_{s' \to 0} (\lim_{t' \to 0} (P_{s+s'} P_{t+t'}) * f(x,y)) =$$

$$= \lim_{s' \to 0} ((P_{s+s'} P_t) * f(x,y)) = (P_sP_t) * f(x,y),$$

uma vez que $(P_sP_t) * f$ é contínua em s e em t. Logo,

$$f_{st}(x,y) = (P_sP_t) * \mu_{00}(x,y). \tag{8}$$

E, por transformada de Fourier, de (8), concluimos que

$$h_k(f_{st})(x,y) = (P_sP_t) * h_k\mu_{00})(x,y) \quad , \quad \forall k \in \Box. \tag{9}$$

Logo, de (7) e (9)

$$(P_sP_t) * \mu_k = \lim_{s',t' \to 0} (h_k f_{s+s',t+t'}) =$$

$$= \lim_{s',t' \to 0} ((P_{s+s'} P_{t+t'}) * h_k\mu_{00}) = \lim_{s' \to 0} (\lim_{t' \to 0} (P_{s+s'} P_{t+t'}) * h_k\mu_{00}) =$$

$$= (P_sP_t) * h_k\mu_{00} = h_k(f_{st}) \ .$$

Assim,

$$P_sP_t * \mu_k = h_k(f_{st})$$

que é exatamente (1). Assim a prova do lema está completa.

5.3.5. LEMA. Seja a um átomo. Então vale que:

(a) $h_{10}(a_{st}) = (Q_sP_t) * a.$

(b) $h_{01}(a_{st}) = (P_sQ_t) * a.$

(c) $h_{11}(a_{st}) = (Q_sQ_t) * a.$

onde $a_{st} = (P_sP_t) * a.$

DEMONSTRAÇÃO. Demonstremos (a); a demonstração de (b) e (c) são semelhantes.

$$(h_{10}(a_{st}))^{\wedge}(x,y) = i \operatorname{sg} x \operatorname{tgh} \pi |x| (a_{st})^{\wedge}(x,y) =$$

$$= i \operatorname{sg} x \operatorname{tgh} \pi |x| (P_sP_t)^{\wedge}(x,y) \ \hat{a}(x,y) \ .$$

Mas $sg\, x\, tgh\, \pi|x| = tgh(\pi x)$, pois é ímpar. Assim,

$$(h_{10}(a_{st})\hat{}\,(x,y) = i\, tgh(\pi x)\; \hat{P_s}(x)\; \hat{P_t}(y)\; \hat{a}(x,y).$$

Por outro lado,

$$\hat{Q_s}(x) = \hat{P_s}(x)(i\; tgh(\pi x)).$$

Assim,

$$(h_{10}(a_{st}))\hat{}\,(x,y) = \hat{Q_s}(x)\; \hat{P_t}(y)\; \hat{a}(x,y) \; .$$

Isto é,

$$h_{10}(a_{st})(x,y) = (Q_s P_t) * a(x,y).$$

5.3.6. PROPOSIÇÃO. Seja a um átomo. Então vale que

$$\sup_{0<s,t<1} \| h_k(a_{st}) \|_1 \leq C \quad ,$$

onde C é uma constante que independe do átomo.

DEMONSTRAÇÃO. Faremos a demonstração para $k = (1,0)$. Pelo lema anterior, temos que:

$$h_{10}(a_{st}) = (Q_s P_t) * a .$$

Suponhamos que $\operatorname{supp}(a) \subset I \times J$. Vamos estudar quatro casos:

1º) Se $|I|, |J| < 1$. Neste caso, a definição de átomo garante a existência de momentos nulos. Vamos supor I e J centrados na origem. Temos,

$$\|(Q_s P_t) * a\|_1 \iint |Q_s P_t * a| dxdy =$$

$$= \iint_{2I\times 2J} + \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times 2J} + \iint_{2I\times(\mathbb{R}-2J)} + \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times(\mathbb{R}-2J)}$$

$$+ (1) + (2) + (3) + (4) .$$

Estimemos cada uma separadamente. Pela desigualdade de Schwartz e por Plancherel, temos:

$$(1) \quad \iint_{2I\times 2J} |(Q_s P_t) * a| dxdy \leq |2I|^{1/2} \; |2J|^{1/2} \|(Q_s P_t) * a\|_2 =$$

$$= |2I|^{1/2} \; |2J|^{1/2} \|((Q_s P_t) * a)^{\wedge}\|_2 = C|I|^{1/2} |J|^{1/2} \|(Q_s P_t)^{\wedge} \hat{a}\|_2 .$$

Mas $|\hat{P_t}(y)| \leq 1$ e $\hat{Q_s}(x) = -\, i\,tgh(\pi x)\, \hat{P_s}(x)$.

Assim, também $|\hat{Q_s}(x)| \leq 1$. Logo,

$$\text{(1)} \leq C|I|^{1/2}\, |J|^{1/2}\, \|\hat{a}\|_2 = C|I|^{1/2}\, |J|^{1/2}\, \|a\|_2 \leq C\,.$$

Agora

$$\text{(2)} = \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times 2J} |Q_sP_t * a|\,dxdy =$$

$$= \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times 2J} \left|\iint_{I\times J} (Q_s(x-x')-Q_s(x))P_t(y-y')a(x',y')dx'dy'\right| dxdy$$

$$= \iint_{(\mathbb{R}-2I)2\times J} \left|\int_I (Q_s(x-x')-Q_s(x))\left(\int_J P_t(y-y')a(x',y')dy'\right)dx'\right| dxdy$$

$$\leq \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times 2J} \left(\int_I |Q_s(x-x')-Q_s(x)| \int_J P_t\,(y-y')|a(x',y')|dy'dx'\right)dxdy$$

Mas,

$$|Q_s(x-x') - Q_s(x)| = |x'|\,|grad\ Q_s(x-\theta x')|$$

com $\theta \in (0,1)$. Mas, $|grad\ Q(x-\theta x')| \leq C / |x-\theta x'|^2$, logo,

$$|Q_s(x-x') - Q_s(x)| \le C|x'|/|x-\theta x'|^2$$

Mas, como $x' \in I$ e $x \notin 2I$, então é fácil concluirmos que $1/|x-\theta x'| \le C/|x|$, e então,

$$(1) \qquad |Q_s(x-x') - Q_s(x)| \le C|x'|/|x|^2 \quad .$$

Assim, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz (na variável y)

$$2 \quad \le C\iint_{(\mathbb{R}-2I)\times 2J} \left(\int_I |x'|\,|x|^{-2} \left|\int_J P_s(y-y')\, a(x',y')dy'\right| dx'\right) dxdy$$

$$\le C\left(\sup_{x'\in I} |x'| \int_{(\mathbb{R}-2I)} |x|^{-2}\, dx\right) \int_I \left(\int_{2J} |P_s * a|dy\right) dx'$$

$$\le C\left(\sup_{x'\in I} |x'| \int_{\mathbb{R}-2I} x^2\, dx\right) \int_I |2J|^{1/2} \, \| P_s * a(x',\cdot)\|_2 \, dx' .$$

Mas

$$\sup_{x'\in I} |x'| \int_{\mathbb{R}-2I} x^{-2}\, dx < \infty$$

independentemente de I e

$$\|P_s * a(x',\cdot)\|_2 = \|(P_s * a)^{\wedge}(x',\cdot)\|_2 = \|\hat{P_s}\,\hat{a}(x',\cdot)\|_2 \le \|a(x',\ )\|_2 .$$

Assim, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz (em relação a x'),

$$2 \quad \le C|J|^{1/2} \int_I \|a(x',\cdot)\|_2\, dx'$$

$$\le C|J|^{1/2}\, |I|^{1/2}\, \|a\|_2 \le C .$$

Analogamente, usando o fator de (1) ser válida para P_t, temos,

$$3 \quad \le C .$$

Finalmente, estimemos 4 . Uma vez que os momentos são nulos, podemos escrever:

$$4 \quad \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times(\mathbb{R}-2J)} |(Q_sP_t) * a|\,dxdy =$$

$$= \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times(\mathbb{R}-2J)} \left|\iint_{I\times J} (Q_s(x-x')-Q_s(x))(P_t(y-y')-P_t(y))a(x',y')dx'dy'\right|.$$

Por (1) para Q_s e P_t , temos,

$$4 \le C \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times(\mathbb{R}-2J)} \left(\iint_{I\times J} (|x'|/x^2)(|y'|/y^2)|a(x',y')|dx'dy'\right)$$

$$\le C(\sup_{x'\in I} |x'| \int_{\mathbb{R}-2I} x^{-2}\,dx)(\sup_{y'\in J} |y'| \int_{\mathbb{R}-2J} y^{-2}dy) \iint_{I\times J} |a|dx'dy'.$$

$$\le C \,\|a\|_1 \le C .$$

Assim, $1 + 2 + 3 + 4 \le C$. Passemos ao segundo caso.

2º CASO. $|I|, |J| > 1$.

$$\|(Q_sP_t) * a\|_1 = \iint |(Q_sP_t) * a|dxdy =$$

$$= \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times(\mathbb{R}-2J)} + \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times 2J} + \iint_{2I\times(\mathbb{R}-2J)} + \iint_{2I\times 2J}$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 .$$

Inicialmente estimemos 4. Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e o teorema de Plancherel, temos que

$$4 = C|I|^{1/2} |J|^{1/2} \|Q_sP_t * a\|_2 = C|I\times J|^{1/2}\|(Q_sP_t)^{\wedge}\hat{a}\|_2 \le$$

$$\leq C|I\times J|^{1/2}\ \|\hat{a}\|_2 = C|I\times J|^{1/2}\ \|a\|_2 \leq C.$$

Passemos, agora, a estimar 1 . Lembremos que:

$$|Q_s(x)| = \left|-\frac{\cos\pi s\ \ \operatorname{senh}\pi x}{\cosh^2\pi x - \cos\pi s}\right| \leq 1 / |\operatorname{senh}\pi x| .$$

Assim, como $x' \in I$

$$\int_{\mathbb{R}-2I} |Q_s(x-x')|dx = 2\int_{|I|-x'}^{\infty} |Q_s(w)|dw \leq$$

$$\leq 2\int_{\frac{|I|}{2}}^{\infty} |Q_s(w)|dw \leq 2\int_{\frac{|I|}{2}}^{\infty} (\operatorname{senh}\pi w)^{-1}\, dw \leq 8|I|^{-1}.$$

Analogamente,

$$|P_t(y)| = \left|\frac{\operatorname{sen}\pi s\ \ \cosh\pi y}{\cosh^2\pi y - \cos^2\pi s}\right| \leq \cosh\pi y / \operatorname{senh}^2\pi y .$$

Assim, como $y' \in J$, então:

$$\int_{(\mathbb{R}-2J)} |P_t(y-y')|dy = 2\int_{|J|-y'}^{\infty} |P_t(w)|dy \leq 2\int_{|J|/2}^{\infty} \frac{\cosh\pi w}{\operatorname{senh}^2(\pi w)}\ dw$$

$$\leq 12/\pi^2 |J| \leq C/|J|.$$

Então,

$$\textcircled{1} = \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times(\mathbb{R}-2J)} \left(\iint_{I\times J} |a(x',y')|\,|Q_s(x-x')|\,|P_t(y-y')|\,dx'dy'\right)dxdy =$$

$$= \iint_{I\times J} |a(x',y')| \left(\iint_{(\mathbb{R}-2I)\times(\mathbb{R}-2J)} |Q_s(x-x')|\,|P_t(y-y')|\,dxdy\right)dx'dy'$$

$$\leq C\|a\|_2 / |I|\ |J| \leq C/|I|\ |J| \leq C\ ,$$

uma vez que $|I|$, $|J| > 1$, então $1/|I|$, $1/|J| < 1$.

$$\textcircled{2} = \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times 2J} |(Q_s P_t) * a|\,dxdy =$$

$$= \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times 2J} \left|\int_I Q_s(x-x')\left(\int_J P_t(y-y')a(x',y')dy'\right)dx'\right|dxdy$$

$$\leq \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times 2J} \left(\int_I |Q_s(x-x')|\,\left|\int_J P_t(y-y')a(x',y')dy'\right|dx'\right)dxdy$$

$$= C|I|^{-1} \int_{2J}\int_I \left|\int_J P_t(y-y')a(x',y')dy'\right|dx'\,dy =$$

$$\leq C|I|^{-1} \int_I \left(\int_{2J} |P_t * a(x',y')|dy\right)dx'$$

e pela desigualdade de Schwartz (na variável y) e o teorema de Plancherel

$$\leq \frac{C}{|I|} \int_I |2J|^{1/2} \|P_t * a(x',\cdot)\|_2 \, dx'$$

$$\leq \frac{C}{|I|} |J|^{1/2} \int_I \|\hat{P_t} \hat{a}(x',\cdot)\|_2 \, dx'$$

$$\leq C \; |J|^{1/2} |I|^{-1} \int_I \|a(x',\cdot)\|_2 \, dx'$$

e pela desigualdade de Schwartz (na variável x),

$$\leq C|J|^{1/2}|I|^{-1} |I|^{1/2} \|\|a(x',\cdot)\|_2\|_2$$

$$\leq C|I\times J|^{1/2}|I|^{-1} |I\times J|^{1/2} \leq C|I|^{-1} \leq C$$

uma vez que $|I| > 1$.

Assim,

$\textcircled{2} \quad \leq C$

Analogamente, uma vez que $|J| > 1$, encontramos que

$\textcircled{3} \quad \leq C$.

3º CASO. Se $|I| > 1$ e $|J| < 1$. Nesse caso, o momento na direção y é nulo.

$$\iint |(Q_s P_t)| * a\,|dxdy =$$

$$= \iint_{2I\times 2J} + \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times 2J} + \iint_{2I\times(\mathbb{R}-2J)} + \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times(\mathbb{R}-2J)} |(Q_s P_t) * a|dxdy$$

$$= \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} .$$

A estimativa de $\textcircled{1}$ é análoga nos casos anteriores. Assim,

$\textcircled{1} \quad \leq C$

Passemos a estimar $\textcircled{2}$.

$$2 = \iint_{2I\times(\mathbb{R}-2J)} |(Q_sP_t) * a|\,dxdy = \int_{\mathbb{R}-2J} (\int_{2I} |Q_sP_t * a(x,y)|\,dx)dy =$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}-2J} (|2I|^{1/2} \|(Q_sP_t) * a(\cdot,y)\|_2 dy = C|I|^{1/2} \int_{\mathbb{R}-2J} \|((Q_sP_t) * a)\hat{}\,(\cdot,y)\|_2 dy \leq$$

$$\leq C|I|^{1/2} \int_{\mathbb{R}-2J} \|P_t * a(\cdot, y)\|_2\, dy =$$

$$= C|I|^{1/2} \int_{\mathbb{R}-2J} (\int_{\mathbb{R}} |P_t * a(x',y)|^2\, dx')^{1/2}\, dy =$$

$$\leq C|I|^{1/2} \int_{\mathbb{R}-2J} (\int_I (\int_J |P_t(y-y')-P_t(y)|\,|a(x',y')|dy')^2\, dx')^{1/2}\, dy \leq$$

$$\leq C|I|^{1/2} \int_{\mathbb{R}-2J} (\int_J (\int_I |P_t(y-y')-P_t(y)|^2 |a(x',y')^2|dx')^{1/2}\, dy')dy$$

$$= C|I|^{1/2} \int_{\mathbb{R}-2J} (\int_J |P_t(y-y') - P_t(y)|\ \|a(\cdot,y')\|_2\, dy')dy$$

$$\leq C|I|^{1/2} \int_{\mathbb{R}-2J} (\int_J (|y'|y^{-2})\ \|a(\cdot,y')\|_2\, dy')dy$$

$$= C|I|^{1/2} \int_J \|a(\cdot,y')\|_2 \,(\sup_{y'\in J} |y'| \int_{\mathbb{R}-2J} y^{-2}\, dy)dy'$$

$$\leq C|I|^{1/2} \int_J \|a(\cdot,Y')\|_2 \, dy' \leq$$

$$\leq C|I|^{1/2} \, |J|^{1/2} \, \|a\|_2 \leq C|I\times J|^{1/2} \cdot |I\times J|^{-1/2} = C.$$

A estimativa de 3 é análoga a 2 e assim,

$$3 \quad \leq C \,.$$

Passemos a estimar 4.

$$4 = \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times(\mathbb{R}-2J)} |(Q_s P_t) * a| dxdy$$

$$= \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times(\mathbb{R}-2J)} dxdy \, \left| \iint_{I\times J} Q_s(x-x')(P_t(y-y')-P_t(y'))a(x',y')dx'dy' \right|$$

$$\leq \iint_{(\mathbb{R}-2I)\times(\mathbb{R}-2J)} dxdy \left(\int_I |Q_s(x-x')| \int_J |P_t(y-y') - P_t(y)| \, |a(x',y')| dx'dy'\right)$$

$$\leq \iint_{\mathbb{R}-2I} \left(\int_I |Q_s(x-x')| \left(\iint_{(\mathbb{R}-2J)\times J} |P_t(y-y')-P_t(y)| \, |a(x',y')| dy'dy\right)dx'\right)dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}-2I} \left(\int_I |Q_s(x-x')| \left(\int_J |a(x',y')| \left(\int_{\mathbb{R}-2J} (|y'| y^{-2}) \; dy\right) dy'\right) dx'\right) dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}-2I} \left(\int_I |Q_s(x-x')| \left(\int_J |a(x',y')| \left(\sup_{y'\in J} |y'| \int_{\mathbb{R}-2J} y^{-2} \, dy\right) dy'\right) dx'\right) dx$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}-2I} \left(\int_I |Q_s(x-x')| \left(\int_J | a(x',y') | dy'\right) dx'\right) dx$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}-2I} \left(\int_I |Q_s(x-x')| \; |J|^{1/2} \, \|a(x',\cdot)\|_2 \, dx'\right) dx$$

$$= C|J|^{1/2} \int_I \|a(x',\cdot)\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}-2I} |Q_s(x-x')| dx\right) dx' \leq$$

$$\leq C|J|^{1/2} \int_I \|a(x',\cdot)\|_2 \; 8|I|^{-1} \, dx'$$

$$\leq C|J|^{1/2} \, |I|^{-1} \, |I|^{1/2} \, \|a\|_2 \leq C|I\times J|^{1/2} \, |I|^{-1} \, |I\times J|^{-1} \leq C$$

pois $|I| > 1$. Assim,

$$4 \leq C \, .$$

4º CASO. Se $|I|<1$ e $|J|>1$. A prova é semelhante ao 3º caso.

Assim, concluimos que

$$\|(Q_s P_t) * a\|_1 \leq C$$

onde C é uma constante que não depende do átomo. A demonstração de

$$\|(P_s Q_t) * a\|_1 \leq C \quad \text{e} \quad \|(Q_s Q_t) * a\|_1 \leq C$$

segue mesmo raciocínio.

5.3.7. TEOREMA. O espaço h^1_{atom} está imersamente contínuo em h^1_{Hb}.

DEMONSTRAÇÃO. Basta provarmos que se a é um átomo, então $a \in h^1_{Hb}$ e mais

(1) $$\|a\|_{h^1_{Hb}} \leq C\|a\|_{h^1_{atom}} .$$

Pela proposição 5.3.6, temos que existe uma constante C, que independe de a, tal que

$$\|(Q_s P_t) * a\|_1 \leq C$$

$$\|(P_s Q_t) * a\|_1 \leq C$$

$$\|(Q_s Q_t) * a\|_1 \leq C .$$

Então, pelo lema 5.3.5 temos que,

$$\sup_{0<s,t<1} \|h_k(a_{st})\|_1 \leq C , \quad \forall k \in \square.$$

Logo, pelo lema 5.3.4, vem que

(1) $$\|h_k(a)\|_1 \leq C ,$$

para todo $k \in \square$.

Assim, $a \in h^1_{Hb}$. Também ,

$$\|a\|_{h^1_{atom}} = \inf\{\alpha > 0 \,/\, a \in \alpha\hat{A}\}.$$

Se $a = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$; $\alpha_i \geq 0$ e $\alpha > 0$, então

$$\|a\|_{h^1_{Hb}} = \|\alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\|_{h^1_{Hb}} \leq \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \|a_i\|_{h^1_{Hb}} .$$

E então, por (1), temos:

$$\|a\|_{h^1_{Hb}} \leq 2C\,\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) = C \cdot \alpha .$$

Tomando o ínfimo desses α temos:

$$\|a\|_{h^1_{Hb}} \leq C\|a\|_{h^1_{atom}}$$

o que completa a demonstração do teorema.

REFERÊNCIAS

[1] A. BERNARD, Espaces H^1 de martingales à deux indices. Dualite avec les martingales de type "B.M.O.". Bull. Sc. Math. (1979).

[2] B. BORDIN - D.L. FERNANDEZ, Sobre os espaços H^p em produtos de semi-espaços, Anais Acad. Brasil. Ciências, a aparecer.

[3] J. BROSSARD, L. CHEVALIER, Espaces H^p de martingales bi-brownoennes, C.R.A.S., Paris, 289, Serie A(1979), 223-236.

[4] S. - Y. A. CHANG, Carleson measure on the bi-disc., Ann. Math. 109(1979), 13-620.

[5] S. - Y. A. CHANG - R. FEFFERMAN, A continuous version H^1 with B.M.O. on the bidisc, Ann. Math. 112(1980), 179-202.

[6] R.R. COIFMAN and G. WEISS, On sub-harmonicity inequalities involving solutions of generalized Cauchy-Riemann equations, Studia Mathematica, 36(1970), 77-83.

[7] R. FEFFERMAN, Bounded mean oscillation of the polydisk, Ann. Math. 110(1979), 395-406.

[8] C. FEFFERMAN and E.M. STEIN, H^p spaces of several variables. Acta Math. 129(1972), 137-193.

[9] D. GOLDBERG, A local version of real Hardy Spaces, Duke Mathematical Journal, 46(1979), 27-42.

[10] R.F. GUNDY, Inégalités pour martingales a un et deux indices: l'space H^p, cours à l'Ecole d'été de calcul des probabilités de St-Flour (1978), Lecture Notes in Math. Nº 774, Springer-Verlag (1980).

[11] R.F. GUNDY and E.M. STEIN, H^p theory for the polydisk, Proc. Natl. Acad. Sc., 79(3), (1979), 1026-1029.

[12] K.G. MERRYFIELD, H^p Spaces in PolyHalf Spaces, Ph.D. dissertation, University of Chicago, 1980.

[13] H. SATO, La classe de Hardy H^1 de fonctions bi-harmoniques sur $\mathbb{R}_+^{m+1} \times \mathbb{R}_+^{n+1}$; sa caracterisation par les transformations de Riesz, C.R. Acad. Sc. Paris, t.291 (1980), 91-94.