INTEGRAIS FUZZY

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. JORGE COSTA DUARTE FILHO, e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 25 de julho de 1988

Prof.Dr.

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

À minha esposa Rosangela e às
minhas filhas Manuela e Mariana

Aos meus pais, Jorge(in memorian)e Josefa e às minhas irmãs Rita e Márcia.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Rodney C. Bassanezi pela orientação e dedicação nestes meses de trabalho.

Aos meus colegas que de alguma maneira participaram deste trabalho.

Ao Departamento de Matemática da UFPb.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O conceito de medida de fuzzy foi introduzido por M. Sugeno (1974). Esta medida corresponde à forma mais adequada para medir graus de incerteza, valores que dependem quase exclusivamente da subjetividade de quem está medindo. Por exemplo, quando uma pessoa faz a avaliação de um carro, ela considera muitos fatores simultaneamente: cor, mecânica, opcionais, custo, etc. Note-se que a importância de cada um desses fatores pode diferir de pessoa para pessoa e algumas partes de um determinado fator podem ser redundantes.

A preocupação em medir usando a subjetividade humana não é um problema recente. Bernoulli e Lambert já conheciam a diferença entre a "probabilidade aleatória" e a "probabilidade epistêmica". No caso da probabilidade aleatória usavam funções de conjuntos aditivas. Quando os fenômenos eram descritos fazendo uso de julgamentos subjetivos usavam probabilidades epistêmicas. De qualquer forma, tanto num caso como no outro, a função de probabilidade era usada como modêlo matemático.

Quando se pesquisa a inteligência artificial fica evidente que o uso de funções probabilidades para descrever julgamentos subjetivos é inadequado e leva a resultados contraditórios. Neste caso, impor que a medida seja aditiva é uma condição muito forte e não é respeitada pelo tipo de fenômeno estudado. Isto nos dá uma motivação para se trabalhar com medidas subjetivas que não têm a propriedade de serem aditivas. No capítulo 1 deste tra balho, daremos a definição de medida de fuzzy, algumas de suas propriedades e alguns resultados que serão necessários no decorrer deste trabalho.

Uma outra teoria, chamada teoria da evidência, foi introduzida por Shafer em 1976, sempre com a preocupação em resolver problemas de julgamentos subjetivos. Ele fez isto, expressando estes julgamentos através de graus de credibilidade.

O ponto comum destas duas teorias era que elas podiam ser tratadas, do ponto de vista matemático, como teoria de funções de conjuntos monótonas em relação à inclusão isto é, se $A \subset B$ então $\mu(A) \leq \mu(B)$. Esta será uma das condições exigidas para que uma função de conjunto μ seja uma medida fuzzy.

Podemos acrescentar, ainda, no conjunto das medidas subjetivas o trabalho de Choquet:Teoria das Capacidades(1953), onde ele descreve capacidades como funções de conjuntos definidas numa classe de subconjuntos compactos de um espaço topológico adequado.

Cada uma dessas teorias cobre somente alguns aspectos do problema geral e nenhuma delas está contida nas restantes. Por exemplo, a medida de possibilidade é uma função de plausibilidade e não é uma medida fuzzy, mas é uma capacidade. Analogamente, nem toda medida fuzzy é uma função de credibilidade e/ou plausibilidade.

Com o conceito de medida fuzzy, Sugeno construiu um funcional, chamado integral fuzzy. Este funcional pode ser interpretado como a avaliação subjetivas de objetos, onde esta subjetividade está ligada à medida fuzzy. Podemos interpretar a integral fuzzy de outras maneiras. Por exemplo, nós poderíamos chamá-la de esperança fuzzy em comparação com esperança probabilistica. Isto será mostrado mais adiante no capítulo 2. Quando as integrais fuzzy são comparadas com a integral de Lebesque, elas poderiam ser chamadas de integrais não-lineares ou alguma coisa similar. Do ponto de vista de funcional, as integrais fuzzy são simplesmente um tipo de funcional não-linear, como os funcionais monótonos.

A integral fuzzy tem sido aplicada numa variedade de problemas, como por exemplo, nos processos de avaliação subjetivas, processos de decisão-fabricação, processo de aprendizagem, etc. Um dos problemas mais essenciais nestas aplicações é a identificação da medida fuzzy humana. É muito importante identificar experimentalmente esta medida fuzzy, já que ela é considerada como medida subjetiva de indivíduo. Existem dois métodos, direto e indireto, para a sua identificação. Em ambos os métodos, a medida fuzzy de Sugeno g_λ indicada no capítulo 1, é usada com maior frequência como modêlo matemático de medidas subjetivas.

No capítulo 2, introduzimos a definição de integral fuzzy dada por Sugeno, que é:

$$(S) \quad \int_A f \, d\mu = \bigvee_{\alpha \in [0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)]$$

onde $\vee, \wedge$ indicam <u>sup</u> e <u>inf</u> respectivamente, $F_\alpha = \{x \in X; f(x) \geq \alpha\}$ ou $F_\alpha = \{f \geq \alpha\}$ e A é um elemento da σ-álgebra de subconjuntos de X considerada. As condições sobre f e μ serão dadas mais adiante.

Ainda no capítulo 2, daremos algumas propriedades da integral fuzzy, bem como alguns exemplos.

Nosso principal interesse neste trabalho é mostrar as boas propriedades matemáticas desta integral. Alguns resultados clássicos da teoria da medida, como o teorema da Convergencia Monótona, Lema de Fatou e outros, serão demonstrados aqui. Quando da demonstração destes fatos, Sugeno apresentou dificuldades, sendo que estas dificuldades contornadas por Ralescu e Adams [3] dando outras definições para integral fuzzy, equivalentes à dada por Sugeno. Esta equivalência está mostrada no capítulo 2. A seguir no capítulo 3, mostraremos alguns resultados sobre convergencia de integrais fuzzy, apresentadas por Wang [4]. Para isto usaremos alguns conceitos básicos dados no capítulo 1, como a autocontinuidade e a zero-aditividade de funções de conjuntos. Com estas condições, obtemos um resultado mais geral que o teorema Convergência Dominada de Lebesgue, sendo este resultado o principal do capítulo 3. Apresentaremos ainda um teorema devido a Greco-Bassanezi [6], onde eles obtem através dele todos os outros resultados anteriormente apresentados.

CAPÍTULO I

MEDIDAS FUZZY

Como dissemos, o conceito de medida fuzzy foi introduzido , por Sugeno[1]. Aqui, os conceitos de σ-álgebra e de espaço mensurável utilizados são os mesmos da teoria clássica da medida. Dado um conjunto qualquer X, não-vázio, consideraremos neste trabalho, a menos que se faça referência ao contrário, a σ- álgebra de todos os subconjuntos de X, denotada por $\mathcal{X}$. A seguir, introduziremos o conceito de medida fuzzy dado por Sugeno. Tal conceito tem sido modificado em outros trabalhos, embora a monotocidade da medida seja sempre mantida.

<u>Definição 1.1</u> - Uma função de conjunto $\mu:\mathcal{X} \to [0,\infty)$ é uma <u>medida fuzzy</u> se são satisfeitas as propriedades:

(i) $\mu(\phi) = 0$

(ii) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$, $A,B \in \mathcal{X}$ (monotocidade)

(iii) Se $\{A_\eta\}_{\eta \in I}$ é uma sucessão de conjuntos em $\mathcal{X}$ tal que $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, então

$$\mu(\lim_{\eta\to\infty} A_\eta) = \mu(\bigcup_{\eta=1}^{\infty} A_\eta) = \lim_{\eta\to\infty} \mu(A_\eta)$$

(iv) Se $\{A_\eta\}_{\eta \in I}$ é uma sucessão de conjuntos em $\mathcal{X}$ tal que $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, com $\mu(A_1) < \infty$, então

$$\mu(\lim_{\eta\to\infty} A_\eta) = \mu(\bigcap_{\eta=1}^{\infty} A_\eta) = \lim_{\eta\to\infty} \mu(A_\eta)$$

Observação: 1) A restrição $\mu(A_1) < \infty$ exigida em (iv) pode ser colocada em uma forma mais geral, ou seja, $\mu(A_{\eta_0}) < \infty$ para algum $\eta_0 \in I$.

2) As condições (iii) e (iv) propõe a continuidade de medida fuzzy por sequências monótonas. Estas condições podem eventualmente serem dispensadas, Greco-Bassanezi [6].

3) Sem perda generalidade pode-se considerar $\mu: \mathfrak{X} \to [0,1]$, pois se $\varphi: [0,\infty) \to [0,1]$ é uma função contínua e crescente, temos:

$$\varphi(\int f\, d\mu) = \varphi[\bigvee_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(F_\alpha)]] = \bigvee_{\alpha\in[0,\infty)} [\varphi(\alpha) \wedge \varphi(\mu(F_\alpha)) =$$

$$= \int (\varphi \circ f)\, d(\varphi \circ \mu).$$

Exemplos de medidas fuzzy

1.1) Qualquer medida positiva σ-aditiva é uma medida fuzzy. Em particular, a medida de Lebesgue é uma medida fuzzy.

1.2) A função de probabilidade básica $p: 2^X \to [0,1]$, com X finito satisfazendo:

(a) $p(\emptyset) = 0$

(b) $\sum_{A\subset X} p(A) = 1$

1.3) A <u>medida concentrada de Dirac</u> em $\omega_\circ$, definida por:

$$\mu(A)\begin{cases} 1, \text{ se } \omega_\circ \in A \\ 0, \text{ se } \omega_\circ \notin A \end{cases}, \quad \forall A \subset X$$

1.4) A <u>medida g_λ de Sugeno</u> é uma função $\mu:\mathcal{X} \to [0,\infty]$ que satisfaz

(a) $\mu(X) = 1$

(b) $\forall A,B \in \mathcal{X}, A\cap B=\emptyset; \mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)+\lambda\mu(A)\mu(B), \ -1<\lambda<\infty$

toda g_λ com $-1<\lambda<\infty$ é uma medida fuzzy, ver Banon[ ] pág. 294.

1.5) <u>Medida de possibilidade de Zadeh</u> definida como segue, é uma medida fuzzy, considerando X finito.

Seja $\Pi:\mathcal{X} \to [0,1]$ tal que

(a) $\Pi(\emptyset) = 0$; $\Pi(X) = 1$

(b) $\forall A \subseteq X$, $\forall B \subseteq X$, $A\cap B = \emptyset$ então $\Pi(A\cup B) = \text{máx } (\Pi(A), \Pi(B))$.

Se μ é uma medida fuzzy, a tripla $(X,\mathcal{X},\mu)$ será chamado de <u>espaço de medida fuzzy</u>. Daremos algumas definições e resultados sobre funções de conjuntos relativos às funções sub-aditivas , zeros-aditivos e sobre a auto-continuidade de funções de conjuntos.

Adotaremos as convenções seguintes: $\sup\{i, i\in\emptyset\} = 0$; $\infty-\infty = 0$; $0.\infty = 0$ e se o conjunto de índices Γ é vazio, $\bigsqcup_{\Gamma}(\cdot) = 0$.

<u>Definição 1.2</u>: Uma medida fuzzy μ é <u>sub-aditiva</u> se para todo

par $A,B \in \mathcal{X}$, $\mu(A \cup B) \leq \mu(A)+\mu(B)$.

Exemplo 1.5: A medida de probabilidade do exemplo 1.2.

Definição 1.3: Uma função de conjunto μ é chamada zero-aditiva se $\mu(E \cup F)= \mu(E)$, com $E,F \in \mathcal{X}$, $E \cap F = \emptyset$ e $\mu(F) = 0$.

Proposição 1.4: Se uma função de conjunto μ é tal que $\mu(E) \neq 0$ para $E \in \mathcal{X}$, $E \neq \emptyset$ então μ é zero-aditiva.

Proposição 1.5: Seja $(X,\mathcal{X},\mu)$ um espaço de medida fuzzy. São equivalentes:

(a) μ é zero-aditiva

(b) $E, F \in \mathcal{X}$ $\mu(F) = 0 \Rightarrow \mu(E \cup F) = \mu(E)$

(c) $E, F \in \mathcal{X}$, $F \subset E$ e $\mu(F) = 0 \Rightarrow \mu(E-F) = \mu(E)$, onde $E-F$ é o complementar de F em E.

(d) $E, F \in \mathcal{X}$ $\bar{\mu}(F) = 0 \Rightarrow \mu(E-F) = \mu(E)$

(e) $E,F \in \mathcal{X}$, $\mu(F)=0 \Rightarrow \mu(E \Delta F)=\mu(E)$, onde $E \Delta F=(E \cup F)-(E \cap F)$. O símbolo Δ indica a diferença simétrica entre E e F.

Demonstração: (a) $\Rightarrow$(b). Sejam μ zero-aditiva e $E,F \in \mathcal{X}$ com $\mu(F)=0$ Temos que $E \cup F = E \cup (F-E)$. Note que $(F-E) \subset F$ e sendo μ uma medida fuzzy, (ii) implica que $\mu(F-E)=0$. Como μ é zero- aditiva e $E \cap (F-E) = \emptyset$, segue-se que

$$\mu(E \cup F) = \mu(E \cup (F-E)) = \mu(E).$$

(b)$\Rightarrow$ (c). Sejam $E,F\in \mathcal{X}$ com $E\supset F$ e $\mu(F) = 0$. Agora $E=(E-F)\cup F$. Por (b) temos que $\mu(E)= \mu((E-F)\cup F) = \mu(E-F)$.

(c) $\Rightarrow$(d). Sejam $E,F\in \mathcal{X}$ com $\mu(F)=0$. Temos que $E-F=E-(E\cap F)$ e note que $E\cap F\subset F$. Assim, $\mu(E\cap F)=0$. Além disso, $E\cap F\subset E$ e então temos:

$$\mu(E-F) = \mu(E-(E\cap F)) = \mu(E)$$

(d)$\Rightarrow$ (e). Sejam $E,F\in \mathcal{X}$ com $\mu(F)=0$. Como $E\cap F\subset F$ segue-se que $\mu(E\cap F)=0$. Logo $\mu(E\Delta F)= \mu((E\cup F)-(E\cap F))= \mu(E\cup F)$. Por outro lado $E-F=(E\cup F)-F$. Então $\mu(E)= \mu(E-F)= \mu(E\cup F)$.
Portanto $\mu(E\Delta F)= \mu(E\cup F)= \mu(E)$.

(e)$\Rightarrow$ (a). Sejam $E,F\in \mathcal{X}$ com $E\cap F=\emptyset$ e $\mu(F)=0$. Então $E\Delta F=E\cup F$. Logo $\mu(E\cup F)= \mu(E\Delta F)= \mu(E)$ e portanto μ é zero-aditiva.
$\ddagger$

<u>Observação</u>: Da proposição 1.5 podemos notar que se é uma medida fuzzy, a condição "$E\cap F=\emptyset$" pode ser omitida da definição de função de conjunto zero-aditiva.

Daremos abaixo exemplos relativos às medidas zero-aditivas:

<u>Exemplo 1.6</u>: Seja $X=\{0,1,2,\ldots.\}$ e $\mathcal{X}$ σ-álgebra dos subconjuntos de X. Defina $\mu:\mathcal{X}\to [0,\infty]$ por

$$\mu(E)=\begin{cases} \sum_{i\in E} \dfrac{1}{2^{i+1}} & , \text{ se } 0\notin E \\ \infty & , \text{ se } 0\in E \text{ e } E-\{0\}\neq\emptyset \\ 1 & , \text{ se } E=\{0\} \end{cases}$$

É simples verificar que μ é uma medida fuzzy, e pela proposição 1.4, μ é zero-aditíva.

<u>Exemplo 1.7</u>: Sejam $X = \{a,b\}$ e μ uma medida fuzzy definida por:

$$\mu : \mathcal{X} \to [0,\infty)$$

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } E = X \\ 0, & \text{se } E \neq X \end{cases}$$

Considere $E = \{a\}$ e $F = \{b\}$. Temos que $\mu(F) = \mu(E) = 0$ e $E\cup F = X$. Então $\mu(E\cup F) = \mu(X) = 1$. Logo μ não é zero-adtiva , pois $\mu(E\cup F) \neq \mu(E)$.

<u>Definição 1.6</u>: Uma função de conjunto μ é dita <u>autocontínua superiormente</u> se, sempre que $A, B_n \in \mathcal{X}$ com $A\cap B_n = \emptyset$, $\forall_n$ e $\mu(B_n) \to 0$ tivermos $\mu(A\cup B_n)$ $\mu(A)$.

<u>Definição 1.7</u>: Uma função de conjunto μ é dita <u>autocontínua inferiormente</u> se, sempre que $A, B_n \in \mathcal{X}$ com $B_n \subset A$, $\forall_n$ e $\mu(B_n) \to 0$ tivermos $\mu(A-B_n) \to \mu(A)$.

Uma função de conjunto μ que é autocontínua superiormente e inferiormente será chamada de <u>autocontínua</u>. Se μ é uma medida fuzzy as condições "$A\cap B_n = \emptyset$" e "$B_n \subset A$" podem ser omitidas das definições acima.

<u>Proposição 1.8</u>: Se μ é autocontínua superiormente ou inferiormente então μ é zero aditiva.

<u>Demonstração</u>: Suponhamos que μ seja autocontínua superiormente e sejam $E, F \in \mathcal{X}$, $E \cap F = \emptyset$ com $\mu(F) = 0$. Tomemos em 1.6 $A = E$ e $B_n = F$, $\forall_n$. Então $A, B_n \in \mathcal{X}$, $A \cap B_n = \emptyset$, $\forall_n$ e $\mu(B_n) \to 0$. Assim:

$$\mu(E) = \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cup B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E \cup F) = \mu(E \cup F)$$

Portanto μ é zero-aditiva.

Suponhamos agora que μ seja autocontínua inferiormente e sejam $E, F \in \mathcal{X}$ com $E \cap F = \emptyset$ e $\mu(F) = 0$. Tomemos em 1.7, $A = E \cup F$ e $B_n = F$. Como $E \cap F = \emptyset$, temos que $(E \cup F) - F = E$ e é claro que $B_n \subset A$. Assim:

$$\mu(E \cup F) = \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A - B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu((E\ F) - F) = \lim_{n\to\infty} \mu(E) = \mu(E).$$

Logo μ é zero-aditiva e a proposição está demonstrada.

<u>Proposição 1.9:</u> Uma medida fuzzy μ é autocontínua se, e sómente se, $\mu(A \Delta B_n) \to \mu(A)$, com $A, B_n \in \mathcal{X}$ e $\mu(B_n) \to 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

<u>Demonstração</u>: Suponhamos que μ é autocontínua e sejam $A, B_n \in \mathcal{X}$ tal que $\mu(B_n) \to 0$. Considere $C_n = B_n - A$. Temos que $C_n \cap A = \emptyset$ e como $C_n \subset B_n$ e μ é uma medida fuzzy $\mu(C_n) \to 0$.

Logo $\mu(A\cup C_n)\to\mu(A)$. Seja agora $D_n = A\cap B_n$, $\forall_n$. Então $D_n\subset A$ e $\mu(D_n)\to 0$ pois $D_n\subset B_n$ e μ é uma medida fuzzy. Portanto $\mu(A-D_n)\to \mu(A)$. Mas $A-D_n\subset A\Delta B_n\subset A\cup C_n$, $\forall_n$.

Logo $\mu(A-D_n)\leq \mu(A\Delta B_n)\leq \mu(A\cup C_n)$ e portanto:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A\Delta B_n)= \mu(A)$$

Suponhamos que se $A,B_n\in \mathcal{X}$ e $\mu(B_n)\to 0$ se tenha $\mu(A\Delta B_n)\to\mu(A)$. Suponha também que $A\cap B_n = \emptyset$. Temos então que $A\Delta B_n = (A\cup B_n) - (A\cap B_n) = A\cup B_n$. Logo $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A\Delta B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A\cup B_n)$ e portanto μ é autocontínua superiormente. Seja agora $A,B_n\in \mathcal{X}$ tal que $B_n\subset A$, $\forall_n$ e $\mu(B_n) \to 0$. Então $A\Delta B_n = (A\cup B_n) - (A\cap B_n) = A - B_n$. Logo $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A\Delta B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A-B_n)$ e portanto μ é autocontínua inferiormente. Assim sendo, μ é autocontínua. ‡

<u>Exemplo 1.8</u>: Uma g_λ-medida é autocontínua. De fato, sejam $A,B_n\in \mathcal{X}$ com $\mu(B_n)\to 0$. Então $\mu(A\Delta B_n) = \mu((A\cup B_n)-(A\cap B_n)) = \mu(A\cup B_n) = \mu(A)+ \mu(B_n)+ \lambda\mu(A)\mu(B_n)$. Tomando o limite quando $n\to\infty$ temos:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A\Delta B_n) = \mu(A)$$

Logo μ é autocontínua.

Notemos que uma medida fuzzy não é necessariamente autocontínua superiormente e inferiormente, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 1.9: Seja $X = \{1,2,3,\ldots\}$ e $\mathcal{X}$ a σ-álgebra de todos os subconjuntos de X. Defina $\mu:\mathcal{X}\to[0,\infty)$ por $\mu(E)=k\sum_{i\in E}\frac{1}{2^i}$ para $E\in\mathcal{X}$, onde k é o número de pontos de E. Afirmamos que μ é autocontínua inferiormente e consequentemente zero-aditiva (proposição 1.8), mas não é autocontínua. De fato, tomemos $A=\{1\}$ e $B_n=\{n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Então

$$\mu(B_n)=\frac{1}{2^n}\to 0 \quad \text{e} \quad \mu(A\cup B_n)=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right)\longrightarrow 1 \quad \text{e} \quad \mu(A)=\frac{1}{2}.$$

Segue-se outras definições de diferentes tipos de "continuidade" em relação à uma função de conjunto, dadas por Wang [4] que serão úteis no estudo da convergência das integrais fuzzy.

Definição 1.10: Uma coleção $\mathcal{C}$ de conjuntos em $\mathcal{X}$ é chamada cadeia se, para todo par $C_1, C_2\in\mathcal{C}$ tivermos $C_1\subset C_2$ ou $C_2\subset C_1$.

Definição 1.11: Uma cadeia $\mathcal{C}$ é chamada μ-limitada, se existe $M>0$ tal que $|\mu(C)|<M$, para todo $C\in\mathcal{C}$.

Definição 1.12: Uma função de conjunto μ é chamada autocontínua superiormente localmente uniforme se ela é autocontínua superior e para toda cadeia μ-limitada $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\mathcal{C}, \varepsilon) > 0$ tal que

$$\mu(A) - \varepsilon \leq \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \varepsilon$$

onde $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{X}$, $A \cap B = \emptyset$, $|\mu(B)| < \delta$

<u>Definição 1.13</u>: Uma função de conjunto é chamada <u>autocontínua inferiormente localmente uniforme</u> se ela é autocontínua inferior e para toda cadeia μ-limitada $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\mathcal{C}, \varepsilon) > 0$ tal que

$$\mu(A) - \varepsilon \leq \mu(A - B) \leq \mu(A) + \varepsilon$$

onde $A \in \mathcal{C}$ $B \in \mathcal{X}$, $B \subset A$, $|\mu(B)| < \delta$

<u>Definição 1.14</u>: Uma função de conjunto é chamada <u>autocontínua localmente uniforme</u> se ela é autocontínua superiormente e inferiormente localmente uniforme.

<u>Definição 1.15</u>: Uma função de conjunto μ é chamada <u>uniformemente autocontínua superior</u> se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que sempre que $A, B \in \mathcal{X}$, $A \cap B = \emptyset$, $|\mu(B)| < \delta$ então

$$\mu(A) - \varepsilon \leq \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \varepsilon$$

<u>Definição 1.16</u>: Uma função de conjunto é chamada <u>inferiormente</u>

<u>autocontínua inferior</u> se para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que sempre que $A,B\in \mathcal{X}$, $B\subset A$, $|\mu(B)|<\delta$ então

$$\mu(A)-\varepsilon \leq \mu(A-B) \leq \mu(A)+\varepsilon$$

Uma função de conjunto μ é chamada de <u>autocontínua uniforme</u> se ela é uniformemente autocontínua superior e inferior.

CAPÍTULO II

A INTEGRAL FUZZY

1. Funções Mensuráveis

Vamos apresentar agora algumas definições e resultados clássicos sobre mensurabilidade, que nos serão úteis no estudo da integral fuzzy..

Definição 2.1: Seja X um conjunto qualquer não vazio e $\mathcal{X}$ uma σ-álgebra em X. Uma função $f:X\to\mathbb{R}$ é mensurável se para todo α real, o conjunto $\{x\ X; f(X)>\alpha\}$ pertence a $\mathcal{X}$.

Exemplos: 2.1) Toda função constante é mensurável pois se $f(x)=c$, $\forall_x \in X$ e se $\alpha \geq c$ então $\{x\ X; f(X)>\alpha\} = \emptyset \in \mathcal{X}$ enquanto que se $\alpha < c$, $\{x \in X; f(X)>\alpha\} = X \in \mathcal{X}$

2.2) Se $A \in \mathcal{X}$ então a função característica de A, definida por

$$X_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

é mensurável pois $\{x \in X;\ X_A(x)>\alpha\}$ ou é X, ou A ou $\emptyset$ que pertencem a $\mathcal{X}$.

2.3) Se f é contínua sobre $\mathbb{R}$ e $\mathcal{X}$ é a σ-álgebra de Borel β então f é mensurável, pois o conjunto $\{x \in X; f(x)>\alpha\}$ é aberto de $\mathbb{R}$ e portanto é a união de intervalos abertos, pertencendo então a β .

O próximo lema também nos dá uma caracterização para funções mensuráveis.

<u>Lema 2.2</u>: Seja $f: X \to [0,\infty)$ uma função. São equivalentes:

(a) $\forall_\alpha \in \mathbb{R}$, $A_\alpha = \{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{X}$

(b) $\forall_\alpha \in \mathbb{R}$, $B_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{X}$

(c) $\forall_\alpha \in \mathbb{R}$, $C_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{X}$

(d) $\forall_\alpha \in \mathbb{R}$, $D_\alpha = \{x \in X;\ f(x) < \alpha\} \in \mathcal{X}$

<u>Lema 2.3</u>: Sejam f e g funções mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então são mensuráveis as funções cf, f^2, $f+g$, fg e $|f|$.

<u>Lema 2.4</u>: Seja (f_n) uma sequência no conjunto das funções mensuráveis de valores reais extendidos $M(X,\mathcal{X})$ e defina as funções:

$$f(x) = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \quad ; \quad F(x) = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

$$f^*(x) = \liminf f_n(x) \ ; \ F^*(x) = \limsup f_n(x).$$

Então $f(x)$, $F(X)$, $f^*(x)$ e $F^*(x)$ pertencem a $M(X,\mathcal{X})$.

<u>Corolário 2.5</u>: Se (f_n) é uma sequencia que converge em $M(X,\mathcal{X})$

para uma função f, então $f \quad M(X,\mathcal{X})$.

Lema 2.6: Se f é uma função não-negativa em $M(X,\mathcal{X})$ então existe uma sequência (φ_n) em $M(X,\mathcal{X})$ tal que:

(a) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$

(b) $f(X) = \lim \varphi_n(x)$, para cada $x \in X$

(c) Cada φ_n tem somente um número finito de valores reais, isto é, são funções simples.

2. Integrais Fuzzy

As integrais fuzzy foram introduzidas por M. Sugeno [1] , em sua tese de doutorado , utilizando medidas fuzzy(definição 1.1). A seguir daremos a definição dada por Sugeno.

Definição 2.6: Seja $f:X \to [0,\infty)$ uma função mensurável, positiva e μ uma medida fuzzy. Sugeno definiu o funcional F da seguinte forma

$$F(f) = (S)\int_A f\, d\mu = \bigvee_{\alpha \in [0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)] \qquad (1)$$

onde $A \in \mathcal{X}$, $F_\alpha = \{x \in X; f(X) \geq \alpha\}$ e $\wedge, \vee$ indicam respectivamente o inf e o sup em $[0,\infty)$. O funcional F é denominado integral fuzzy ou integral de Sugeno.

Daremos alguns exemplos de integral fuzzy.

<u>Exemplo 2.4</u>: Seja $f: [0,1] \to [0,1]$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 \ , \ \text{se} \ \ 0 \leq x \leq 1/2 \\ x \ \ , \ \text{se} \ 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Seja μ a medida de Lebesgue. Então

$$\int f d\mu = \bigvee_{\alpha \in [0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(F_\alpha)] = \bigvee_{\alpha \in [0,1/2]} [\alpha \wedge \mu(F_\alpha)] \bigvee_{\alpha \in [1/2,1]} [\alpha \wedge \mu(F_\alpha)] \vee \bigvee_{\alpha > 1}$$

$$[\alpha \wedge \mu(F_\alpha)] = \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} \vee 0 = 1/2.$$

<u>Exemplo 2.5</u>: Seja $X = \{1,2,3,\ldots\ldots\}$ e considere $\mu: \to [0,\infty)$ a medida dada no exemplo 1.9. Seja $A = \{2,3,4,5\}$ e considere $f: X \to [0,\infty)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ , \ \text{se} \ \ 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \ \text{[redacted]} \ \text{se} \ x \geq 4 \end{cases}$$

Então:

$$\int f d\mu = \bigvee_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)] = \bigvee_{\alpha\in[0,1/2]} [\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)] \quad {}_{(1/2,1]} [\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)] \bigvee_{\alpha>1}$$

$$= [\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)] = \bigvee_{\alpha\in[0,1/2]} [\alpha\wedge\mu(\{2,3\})] \quad \bigvee_{\alpha\in(1/2,1]} [\alpha\wedge\mu(\{4,5\})]$$

$$= \bigvee_{\alpha\in[0,1/2]} [\alpha\wedge\tfrac{2}{3}] \quad \bigvee_{\alpha\in(1/2,1]} [\alpha\wedge\tfrac{3}{16}] = \bigvee_{\alpha\in[0,1/2]} \alpha \vee \tfrac{3}{16} = \tfrac{1}{2} \vee \tfrac{3}{16} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

Com o intuito de avaliar objetos fuzzy é que Sugeno introduziu estas integrais. Por exemplo, suponha que se queira avaliar um objeto O segundo um conjunto de criterios X. Se f(X) denota o grau de satisfação do qual é munido o objeto O se o critério x é considerado, e se $\mu(x)$ denota o grau de importância deste critério x, a integral fuzzy pode ser interpretada, comparando estas duas quantidades no sentido do operador $\wedge$, com a procura do máximo grau de concordância entre as duas tendências opostas, isto é, o valor da integral fuzzy pode ser "o melhor valor pessimista" ou o "pior valor otimista".

Mais especificamente, suponhamos que se queira avaliar subjetivamente um objeto, por exemplo, uma casa. Assuma que o objeto pode ser dividido em n elementos. Seja $k=\{s_1, \ldots, s_n\}$ o conjunto de tais elementos. Em geral k não é necessariamente um conjunto de elementos físicos mas ele poderia ser um conjunto de pontos de vista ou de critérios. Seja $h:k \to [0,1]$ uma avaliação parcial do objeto. Isto é, h(s) implica na avaliação parcial do objeto, do ponto de vista do elemento s. Se pensamos no modelo de reconhecimento , h(s) pode ser olhado como a função característica do modelo. A avaliação parcial h(s) pode ser determinada subjetivamente ou objetivamente. Por exemplo, nós podemos ter objetivamente h(área)=$200m^2$, o qual deve ser normalizado. Assuma que a medida fuzzy é uma medida subjetiva expressando o grau de importância do subconjunto de k. Por exemplo, $g(\{s_1\})$ expressa o quanto s_1 é importante para avaliar o objeto $g(\{s_1,s_2\})$ implica o grau de importância de s_1 e s_2. É necessário assumir que o grau de importância de k é

1. Portanto a integral fuzzy de h representa a agregação de n avaliações parciais e pode ser considerada como a melhor de todas as avaliações do objeto.

Com a definição 2.6, Sugeno procurou mostrar que os teoremas da teoria da medida clássica ainda continuaram válidos na teoria da medida fuzzy. Porém, quando da demonstração do análogo ao teorema da convergência monótona de Lebesque, Sugeno usou a igualdade

$$(\{x\in X;\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) \geq \alpha\}) = \lim_{n\to\infty} \mu\{x\in X;\ f_n(x)\geq\alpha\}$$

que não é verdadeira. Para ver isto, tome um espaço de medida fuzzy $(X,\mathcal{X},\mu)$ com $(X)=1$ e considere $f_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n= 1,2,\ldots.$ e $\alpha=1$. Temos então que $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$ e $(\{x\in X,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x)\geq 1\})=\mu(x)=1$. Mas $(\{x\in X,\ f_n(x)\geq 1\})= \mu(\emptyset) = 0$.

Entretanto, Ralescu e Adams[3], contornam este problema dando outras definições equivalentes para integral fuzzy. É o que faremos a seguir.

Seja $(X,\mathcal{X},\mu)$ um espaço de medida fuzzy e $f:X\to[0,\infty)$ uma função mensurável, positiva. Seja $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{A_i}$ uma função simples, μ-mensurável e positiva com $\alpha_i\neq\alpha_j$ para $i\neq j$ e X_{A_i} é a função característica de A_i.

Definimos então

$$Q_A(s) = \bigvee_{i=1}^{n} [\alpha_i\wedge \mu(A\cap A_i)],\quad A\in\mathcal{X}$$

Observação: Se $A = X$, denotaremos $Q_X(s)$ por $Q(s)$

Com isto, Ralescu definiu o integral fuzzy como sendo:

Definição 2.7: Seja $f:X \to [0,\infty)$ mensurável, positiva e μ uma medida fuzzy. Então

$$(R)\int_A f d\mu = \sup_{s \leq f} Q_A(s) \qquad (2)$$

onde o sup é tomado sobre as funções simples s tais que $s \leq f$.

Também, Ralescu-Adams deram uma outra definição de integral fuzzy. É o que apresentaremos agora:

Definição 2.8: Seja $f:X \to [0,\infty)$ uma função mensurável positiva. Então:

$$(RA)\int_A f\, d\mu = \sup_{A \in X} [\mu(A) \wedge \inf_{X \in A} f(X)] \qquad (3)$$

Mostraremos que as definições 2.6, 2.7 e 2.8 são equivalentes e com isto poderemos mostrar o teorema da Convergência Monótona, usando a definição 2.7 dada por Ralescu-Adams; Mostraremos inicialmente algumas propriedades das integrais fuzzy, que nos serão úteis para a demonstração dessa equivalência.

Proposição 2.9: Sejam $f:X \to [0,\infty)$ e $g:X \to [0,\infty)$ funções mensuráveis, positivas. Então:

i) Se $f \leq g$ em $A \in \mathcal{X}$ então $(R)\int_A f\,d\mu \leq (R)\int_A g\,d\mu$

ii) Se $A \subset B$ então $(R)\int_A f\,d\mu \leq (R)\int_B f\,d\mu$, $A, B \in \mathcal{X}$

iii) Se $\mu(A)=0$ então $(R)\int_A f\,d\mu = 0$, $A \in \mathcal{X}$

iv) $(R)\int_A c\,d\mu = c \wedge \mu(A)$, onde c é uma constante não-negativa e $A \in \mathcal{X}$.

Demonstração: i) Observe em (2) que o sup é tomado sobre todas as funções simples $s \leq f$. Como $f \leq g$ então: $\sup_{s \leq f} Q_A(s) \leq \sup_{s \leq g} Q_A(s)$. Logo $(R)\int_A f\,d\mu \leq (R)\int_A g\,d\mu$.

ii) Basta observar que $fX_A \leq fX_B$ e usar o ítem anterior.

iii) Como $A \cap A_i \in \mathcal{X}$ e $A_i \cap A \subset A$ e μ é uma medida fuzzy temos que $\mu(A \cap A_i)=0$. Então $\alpha_i \wedge \mu(A \cap A_i)=0 \Rightarrow Q_A(s)=0$. Portanto $\int_A f\,d\mu = 0$

iv) Temos $Q_A(c) = \bigvee_{i=1}^{n} [c \wedge \mu(A)] = c \wedge \mu(A)$. Logo

$\sup Q_A(s) = c \wedge \mu(A)$ e $(R)\int_A f\,d\mu = c \wedge \mu(A)$.

Provaremos agora a equivalência das definições 2.6, 2.7 e 2.8.

<u>Teorema 2.10</u>: Seja $(X,\mathcal{X},\mu)$ um espaço de medida fuzzy e $f:X\to[0,\infty)$ uma função mensurável, são equivalentes:

a) $(R)\displaystyle\int f d\mu = (RA)\int f d\mu$

b) $(S)\displaystyle\int f d\mu = (RA)\int f d\mu$

Demonstração: a) Sejam $A\in\mathcal{X}$ e $\alpha_o = \inf\limits_{x\in A} f(x)$ e considere a função $s_o = \alpha_o X_A$, que é uma função simples, mensurável e $s_o \leq f$. Então:

$$(R)\int f d\mu \geq (R)\int s_o d\mu \geq Q(s_o) = \alpha_o \wedge \mu(A) = \mu(A)\wedge \inf_{x\in A} f(x)$$

Logo

$$(R)\int f d\mu \geq \sup_{A\in} [\mu(A)\wedge \inf_{x\in A} f(x)] = (RA)\int f d\mu \qquad (4)$$

Seja agora $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i X_{A_i}$ uma função simples, positiva, mensurável tal que $s\leq f$. Então

$$Q(s) = \bigvee_{i=1}^{k} [\alpha_i \wedge \mu(A_i)] = \alpha_{i_o}\wedge\mu(A_{i_o}) \quad \text{para algum } i_o,\ 1\leq i_o\leq k.$$

Como $s \leq f$, $\alpha_{i_o} \leq \inf_{x \in A_{i_o}} f(x)$. Logo

$$Q(s) \leq \mu(A_{i_o}) \wedge \inf_{x \in A_{i_o}} f(x) \leq \sup_{A \in} [\mu(A) \wedge \inf_{x \in A} f(x)] = (RA)\int f d\mu \ .$$

Portanto

$$(R)\int f d\mu = \sup_{s \leq f} Q(s) \leq (RA)\int f d\mu \ . \qquad (5)$$

De (4) e (5) segue a).

b) Sejam $A \in \mathfrak{X}$ e $\alpha_o = \inf_{x \in A} f(x)$. Então para $x \in A, f(x) \geq \alpha_o$.

Logo $A \subset \{x \in X; f(x) \geq \alpha_o\}$. Sendo μ uma medida fuzzy temos que $\mu(A) \leq \mu(\{x \in X; f(x) \geq \alpha_o\})$. Então $\mu(A) \wedge \alpha_o \leq \mu(\{x \in X; f(x) \geq \alpha_o\}) \wedge \alpha_o$.

Portanto

$$\mu(A) \wedge \inf_{x \in A} f(x) \leq \bigvee_{\alpha \geq 0} [\alpha \wedge \mu\{x \in X; f(x) \geq \alpha\}]$$

onde concluímos que:

$$(RA)\int f d\mu = \sup_{A \in} [\mu(A) \wedge \inf_{x \in A} f(x)] \leq (S)\int f d\mu \qquad (6)$$

Seja agora $\alpha \geq 0$. Como f é mensurável, o conjunto $A_o = \{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \in \mathfrak{X}$ e $\inf_{x \in A_o} f(x) \geq \alpha$. Logo

$$\sup_{A \in} [\mu(A) \wedge \inf_{x \in A} f(x)] \geq \mu(A_o) \wedge \inf_{x \in A_o} f(x) \geq \alpha \wedge \mu\{x \in X; f(x) \geq \alpha\}$$

Então

$$(RA)\int f d\mu = \sup_{A\in}[\mu(A)\wedge \inf_{x\in A} f(x)] \geq \bigvee_{\alpha\geq 0}[\alpha\wedge\mu\{x\in X; f(x)\geq\alpha\}] = (S)\int f d\mu \quad (7)$$

De (6) e (7) segue b.

Assim as definições dadas por Sugeno, Ralescu e Ralescu/Adams são portanto, equivalentes e serão denotadas simplesmente por $\int$.

Algumas propriedades da integral fuzzy já foram mostradas anteriormente. Aqui, acrescentaremos mais algumas delas. Denotaremos

$\int_X f d\mu$ por $\int f d\mu$.

<u>Proposição 2.11</u>: Sejam $f,g: X \to [0,\infty)$ mensuráveis e $A\in \mathcal{X}$ então

(i) $\int_A f d\mu = \int f X_A d\mu$, onde X_A é a função característica de A

(ii) $\int_A (f+a) d\mu \leq \int_A f d\mu + a\wedge\mu(A) = \int_A f d\mu + \int_A a d\mu$, $a\in[0,\infty)$

(iii) Se $|f-g|\leq a$ em A, $a\in[0,\infty)$ então $|\int_A f d\mu - \int_A g d\mu| \leq a$.

<u>Demonstração</u>: (i) Temos $\int_A f d\mu = \bigvee_{\alpha\in[0,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)]$ onde

$F_\alpha = \{x\in X; f(x)\geq\alpha\}$ e que $\int f X_A d\mu = \bigvee_{\alpha\in[0,\infty)}[\alpha\wedge\mu(G_\alpha)]$ onde

$G_\alpha = \{x\in X; fX_A(x)\geq\alpha\} = \{x\in X; f(x)X_A(x)\geq\alpha\}$. Se $x\in A$, $X_A(x)=1$.

Então $G_\alpha = \{x\in X; f(x)\geq\alpha\} = F_\alpha$. Logo

$$\int_A f\chi_A d\mu = \bigvee_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)] = \int_A f d\mu$$

(ii) Temos $\displaystyle\int_A (f+a)d\mu = \bigvee_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)]$, onde

$$F_\alpha = \{x\in X; f(x)+a\geq\alpha\}$$

Então:

$$\int (f+a)d\mu = \bigvee_{\alpha\in[0,a)} [\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha) \quad \bigvee_{\alpha\geq a} [\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)] \;.$$

$$= \bigvee_{\alpha\in[0,a)} [\alpha\wedge\mu(A)] \quad \bigvee_{\alpha\geq a} [\alpha\wedge\mu(A\cap\{f\geq\alpha-a\})] \;.$$

pois se $\alpha\in[0,a)$, $\alpha-a< 0$ e $\{x\in X; f(x)+a\geq\alpha\} = \{x\in X; f(x)\geq\alpha-a\} = X$ e portanto $A\cap F_\alpha = A$. Notemos que

$$\alpha\wedge\mu(A\cap\{f\geq\alpha-a\}) = (\alpha-a)+a\wedge\mu(A\cap\{f\geq\alpha-a)\}$$

$$\leq (\alpha-a)\wedge\mu(A\cap\{f\geq\alpha-a\}) + a\wedge\mu(A\cap\{f\geq\alpha-a\})$$

$$\leq (\alpha-a)\wedge\mu(A\cap\{f\geq\alpha-a)\} + a\wedge\mu(A).$$

Nas desigualdades acima usamos o fato de que $A\cap\{f\geq\alpha-a\}\subset A$ e a desigualdade $(a+b)\wedge c\leq a\wedge c + b\wedge c$. Portanto

$$\int (f+a)d\mu = \bigvee_{\alpha\in[0,a)} [\alpha\wedge\mu(A)] \bigvee_{\alpha\geq a} [\alpha\wedge\mu(A\cap\{f\geq\alpha-a\})]$$

$$\leq (a\wedge\mu(A)) \bigvee_{\alpha\geq a} [(a\wedge\mu(A)) + (\alpha-a)\wedge\mu(A\cap\{f\geq\alpha-a\})]$$

$$= a\wedge\mu(A) + \int_A f d\mu = \int_A f d\mu + \int_A a d\mu \quad .$$

(iii) Como $|f-g| < a$, temos $f \leq g+a$. Então pela proposição 2.9, ítem (i),

$$\int_A f d\mu \leq \int_A (g+a) d\mu \leq \int_A g d\mu + a\wedge\mu(A) \leq \int_A g d\mu + a \qquad (*)$$

Por outro lado, $g \leq f+a$ e

$$\int_A g d\mu \leq \int_A (f+a) d\mu \leq \int_A f d\mu + a\wedge\mu(A) \leq \int_A f d\mu + a. \qquad (**)$$

De (*) e (**) segue o resultado.

<u>Proposição 2.12</u>: Se $\int_A f d\mu = 0$ então $\mu(\{x\in A;\ f(x)>0\}) = 0$

<u>Demonstração</u>: Seja $A_n = \{x\in A; f(x) > \frac{1}{n}\}$. Então $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ e $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\in A; f(x)>0\}$. Logo

$$0 = \int_A f d\mu \geq \int_{A_n} f d\mu \geq \int_{A_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n}\wedge\mu(A_n) \therefore \mu(A_n) = 0, \ \forall_n$$

Mas sendo μ uma medida fuzzy temos

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$$ ou seja,

$\mu(\{x\in A; f(x)>0\}) = 0.$ ‡

Os resultados a seguir serão úteis no estudo da convergência de integrais fuzzy.

Lema 2.13: Seja h_α, $\alpha\in[0,\infty)$ uma função não-negativa, decrescente de valores reais extendidos de α. Se $\alpha_0 = \sup\limits_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha\wedge h_\alpha]$ então

$$h_{\alpha_0+0} \leq \alpha_0 \leq h_{\alpha_0-0}, \text{ onde } h_{\alpha_0-0} = \lim_{\alpha\to\alpha_0-0} h_\alpha \text{ e } h_{\alpha_0+0} = \lim_{\alpha\to\alpha_0+0} h_\alpha .$$

Demonstração: Se $\alpha_0 = 0$ temos que $h_\alpha = 0$, para $\alpha>0$. Se $\alpha_0 = \infty$ então $h_\alpha = \infty$ para $\alpha\in[0,\infty)$. Nestes casos o lema está demonstrado. Suponhamos $\alpha_0\in(0,\infty)$. Como $\alpha\wedge h_\alpha \leq \alpha_0$ temos para todo $\alpha > \alpha_0$ que $h_\alpha\leq\alpha_0$ e portanto $h_{\alpha_0+0}\leq \alpha_0$. Por outro lado, assuma que $h_{\alpha_0-0}< \alpha_0$. Então existe $\alpha'<\alpha_0$ tal que $h_{\alpha'}< \alpha_0$. Como h é monótona decrescente, temos que $h_\alpha\leq h_{\alpha'}\leq \alpha_0$ para $\alpha\geq\alpha'$. Consequentemente,

$$\sup[\alpha\wedge h_\alpha] = \sup_{\alpha\in[0,\alpha')} [\alpha\wedge h_\alpha] \vee \sup_{\alpha\in[\alpha',\infty)} [\alpha\wedge h_\alpha]$$

$$\leq \sup_{\alpha\in[0,\alpha')} \vee \sup_{\alpha\in[\alpha',\infty)} h_\alpha < \alpha_0 \quad \text{(contradição)}$$

Portanto, $h_{\alpha_\circ - 0} \geq \alpha_\circ$. O lema está demonstrado. ‡

Denotaremos $\lim\limits_{\alpha' \to \alpha+0} F_{\alpha'}$ por $F_{\alpha+0}$.

<u>Teorema 2.14</u>: Seja $f: X \to [0,\infty)$ uma função mensurável e seja μ uma medida fuzzy. Então, para $A \in \mathcal{X}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos:

$$\text{(i)} \quad \int_A f d\mu = \alpha \Leftrightarrow \mu(A \cap F_\alpha) \geq \alpha \geq \mu(A \cap F_{\alpha+0})$$

$$\text{(ii)} \quad \int_A f d\mu > \alpha \Rightarrow \mu(A \cap F_\alpha) > \alpha$$

$$\text{(iii)} \quad \int_A f d\mu \geq \alpha \Leftrightarrow \mu(A \cap F_\alpha) \geq \alpha$$

<u>Demonstração</u>: (i) Suponhamos que $\mu(A \cap F_\alpha) \geq \alpha \geq \mu(A \cap F_{\alpha+0})$. Então

$$\int_A f d\mu = \bigvee_{\lambda \in [0,\infty)} [\lambda \wedge \mu(A \cap F_\lambda)] = \bigvee_{\lambda \in [0,\alpha]} [\lambda \wedge \mu(A \cap F_\lambda)] \bigvee_{\lambda > \alpha} [\lambda \wedge \mu(A \cap F_\lambda)]$$

Observe que $\lambda < \alpha \leq \mu(A \cap F_\alpha)$ e $\lambda > \alpha \geq \mu(A \cap F_{\alpha+0})$. Logo

$$\int_A f d\mu = \bigvee_{\lambda \in [0,\alpha]} \lambda \bigvee_{\lambda > \alpha} \mu(A \cap F_\alpha) = \mu(A \cap F_\alpha) = \alpha$$

Suponha agora que $\int_A f d\mu = \alpha$. Seja $h_\lambda = \mu(A \cap F_\lambda)$. Temos que $_\lambda$ é decrescente em relação a λ. Como $\alpha = \sup\limits_{\lambda \in [0,\infty)} [\lambda \wedge h_\lambda]$ e $h_{\lambda - 0} = h_\lambda$, usando o lema anterior, obtem-se o resultado desejado.

(ii) Seja $\alpha_0 \hat{=} \int_A f d\mu$. Então $\alpha_0 > \alpha$. Logo $\mu(A\cap F_\alpha) \geq \mu(A\cap F_{\alpha_0}) \geq \alpha_0 > \alpha$.

(iii) Suponha que $\mu(A\cap F_\alpha) \geq \alpha$. Então

$$\int_A f d\mu \hat{=} \bigvee_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(A\cap F_\alpha)] \geq \mu(A\cap F_\alpha) \geq \alpha$$

A recíproca decorre dos ítens anteriores.

Sabemos que se f_1, f_2 são funções mensuráveis então $f_1 = f_2$ quase sempre se $\mu(\{x\in X; f_1(x) \neq f_2(x)\}) = 0$. Na teoria de medida clás sica temos que se $f_1 = f_2$ quase sempre ou quase toda parte, aqui denotado por q.t.p., então suas integrais são iguais. Isto ainda será verdadeiro para integral fuzzy? O seguinte teorema responderá esta questão.

Teorema 2.15: Se $f_1 = f_2$ q.t.p. então $\int f_1 d\mu = \int f_2 d\mu$ se e somente se μ é zero-aditiva.

Demonstração: Suponhamos que é zero-aditiva. Para 0 e como $f_1 = f_2$ q.t.p. isto é, $\mu(\{x\in X; f_1(x)\}) = 0$ ou $\mu(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$ temos:

$$\{x\in X; f_2(x) \geq \alpha\} \subset \{x\in X; f_1(x) \geq \alpha\} \cup \{x\in X; f_2(x) \neq f_1(x)\} \Rightarrow$$

$$\mu(\{x\in X; f_2(x) \geq \alpha\}) \leq \mu(\{x\in X; f_1(x) \geq \alpha\} \cup \{x\in X; f_2(x) \neq f_1(x)) = \mu(\{x\in X; f_1(x) \geq \alpha\})$$

$$\leq \mu(\{x\in X; f_2(x) \geq \alpha\} \cup \{x\in X; f_2(x) \neq f_1(x)) = \mu(\{x\in X; f_2(x) \geq \alpha\})$$

Logo $\mu(\{x\in X; f_2(x)\geq\alpha\}) = \mu(\{x\in X; f_2(x)\geq\alpha\})$. Segue-se então da definição 2.6 que

$$\int f_1 d\mu = \int f_2 d\mu \ .$$

Suponha que $\int f_1 d\mu = \int f_2 d\mu$. Considere $E, F\in\mathfrak{X}$ com $\mu(F)=0$ e defina

$$f_1(x)=\begin{cases}\infty, & \text{se } x\in E\\ 0, & \text{se } x\notin E\end{cases} \qquad \text{e} \qquad f_2(x)=\begin{cases}\infty, & \text{se } x\in E\cup F\\ 0, & \text{se } x\notin E\cup F\end{cases}$$

Temos então que $f_1=f_2$ q.t.p. Mas $\int f_1 d\mu = \infty\wedge\mu(E)$ e $\int f_2 d\mu=\infty\wedge\mu(E\cup F)$ Logo $\infty\wedge\mu(E)=\infty\wedge\mu(E\ F)\Rightarrow\mu(E\cup F)=\mu(E)$. Assim μ é zero-aditiva. ‡

<u>Proposição 2.16</u>: Se μ é zero-aditiva então que $E,F\in\mathfrak{X}$ com $\mu(F)=0$ então

$$\int_{E\cup F} f d\mu = \int_{E} f d\mu$$

<u>Demonstração</u>: Seja $F_\alpha = \{f\geq\alpha\}$. Então $F_\alpha\cap(E\cup F)=(F_\alpha\cap E)\cup(F_\alpha\cap F)$. Como $\mu(F)=0$ e $F_\alpha\cap F\subset F$ segue-se que $\mu(F_\alpha\cap F)=0$. Sendo zero-aditiva, temos que $\mu(F_\alpha\cap(E\cup F))=\mu((F_\alpha\cap E)\cup(F_\alpha\cap F))=\mu(F_\alpha\cap E)$. Portanto

$$\int_{E\cup F} f d\mu = \bigvee_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha\wedge\mu(F_\alpha\cap(E\cup F))] = \bigvee_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha\wedge\mu(F_\alpha\cap E)] = \int_E f d\mu \ .$$ ‡

3. O espaço $L^1(\mu)$

Chamaremos de $L^1(\mu)$ ao espaço das funções mensuräveis positivas tais que

$$\int f d\mu < \infty$$

Uma caracterização para o espaço $L^1(\mu)$ é:

Proposição 2.17: Se $f:X\to[0,\infty)$ é uma função mensurável, então são equivalentes:

(a) $f \in L^1(\mu)$

(b) o conjunto $M=\{\alpha\geq 0;\mu\{f\geq\alpha\}=\infty\}$ é limitado.

Demonstração: Suponhamos, por contradição que M não é limitado. Seja M' o complemento de M. Então, observado o fato de que em M, $\mu(F_\alpha)=\infty$, temos:

$$\int f d\mu = \bigvee_{\alpha\geq 0}[\alpha\wedge\mu(F_\alpha)] = \bigvee_{\alpha\in M}[\alpha\wedge\mu(F_\alpha)] \quad \bigvee_{\alpha\in M'}[\alpha\wedge\mu(F_\alpha)]$$

$$= \bigvee_{\alpha\in M}\alpha \vee \bigvee_{\alpha\in M'}[\alpha\wedge\mu(F_\alpha)] = \sup M \vee \bigvee_{\alpha\in M'}[\alpha\wedge\mu(F_\alpha)] \geq \sup M = \infty$$

Logo $f\notin L^1(\mu)$, o que prova que $a)\Rightarrow b)$.

Suponhamos que M seja limitado e provemos que $f\in L^1(\mu)$.

Então

$$\int f d\mu = \bigvee_{\alpha \geq 0} [\alpha \wedge \mu(F_\alpha)] = \bigvee_{\alpha \in M} [\alpha \wedge \mu(F_\alpha)] \quad \bigvee_{\alpha \in M'} [\alpha \wedge \mu(F_\alpha)]$$

$$= \sup M \quad \bigvee_{\alpha \in M'} [\alpha \wedge \mu(F_\alpha)] \; .$$

Sendo M limitado, M' não o é. Logo $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \mu(F_\alpha)=0$. Procuremos esta afirmação. Seja $G(\alpha)= \mu\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} = \mu\{f \geq \alpha\}$. Temos que $G(\alpha)$ é decrescente e limitado inferiormente. Logo existe $\lim\limits_{\alpha \to \infty} G(\alpha) = \lim\limits_{n \to \infty} F(n)$, $n \in \mathbb{N}$

Como a sucessão de conjuntos $\{f \geq n\}$ é decrescente, então

$$\lim \; \{f \geq n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f \geq n\} \; .$$

Por outro lado, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{f \geq n\} = \emptyset$ pois caso contrário, existiria $x_o \in \{f \geq n\}$, $\forall_n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_o) \geq n$, $\forall_n \in$. Mas sendo $f < \infty$ temos que $f(x_o) = k_o < \infty$. Logo $k_o = f(x_o) \geq n$, $\forall_n$ implicaria que $\mathbb{N}$ seria limitado , o que é absurdo. Logo

$$\lim_n \{f \geq n\} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \lim_\alpha G(\alpha) = 0$$

Com isto, é impossível que $\mu\{f \geq \alpha\} \geq \alpha, \forall \alpha \in M'$. Portanto , $\mu\{f \geq \alpha_o\} < \alpha_o$ para algum $\alpha_o \in M'$. Então para $\alpha > \alpha_o$

$$\mu\{f \geq \alpha\} \leq \mu\{f \geq \alpha_o\} < \alpha_o < \alpha \; . \tag{9}$$

Assim

$$\int f d\mu = \sup M \quad \bigvee_{\alpha\in M'} [\alpha\wedge\mu(\{f\geq\alpha\}) = \sup M \vee \bigvee_{\substack{\alpha\in M' \\ \alpha<\alpha_o}} [\alpha\wedge\mu(\{f\geq\alpha\}) \vee \bigvee_{\substack{\alpha\in M' \\ \alpha\geq\alpha_o}} [\alpha\wedge\mu(\{f\geq\alpha\})]$$

Agora observe que:

$$\alpha\wedge\mu(\{f\geq\alpha\}) = \begin{cases} \alpha \\ \mu(\{f\geq\alpha\}) \end{cases} . \text{ Então , } \bigvee_{\substack{\alpha\in M' \\ \alpha<\alpha_o}} [\alpha\wedge\mu(\{f\geq\alpha\})] \leq \alpha_o$$

Por(9) temos que $\bigvee_{\substack{\alpha\in M' \\ \alpha\geq\alpha_o}} [\alpha\wedge\mu(\{f\geq\alpha\})] \leq \sup_{\alpha\geq\alpha_o} \mu(\{f\geq\alpha\}) \leq \mu(\{f\geq\alpha_o\})$.

Logo

$$\int f d\mu = \sup M \vee \bigvee_{\substack{\alpha\in M' \\ \alpha<\alpha_o}} [\alpha\wedge\mu(\{f\geq\alpha\})] \vee \bigvee_{\substack{\alpha\in M' \\ \alpha\geq\alpha_o}} [\alpha\wedge\mu(\{f\geq\alpha\})]$$

$$\leq \sup M \vee \alpha_o \vee \mu(\{f\geq\alpha_o\}) < \infty \Rightarrow f\in L^1(\mu).$$

<u>Teorema 2.18</u>: Se $f: X\to [0,\infty)$ e $f\in L^1(\mu)$ então

$$\int f d\mu = \int_o^\infty \mu(\{f\geq\alpha\}) dx.$$

onde a integral do lado direito da igualdade é a integral fuzzy de $G(\alpha)=\mu(\{f\geq\alpha\})$, com respeito a medida de Lebesque em $[0,\infty)$.

<u>Demonstração</u>: Para demonstrarmos o teorema, basta provarmos que

$$\int_o^\infty G(\alpha) dx = \bigvee_{x\geq 0} [x\wedge G(x)]$$

Como $f \in L^1(\mu)$, segue-se que $\lim\limits_{\alpha\to\infty} G(\alpha)=0$ (ver demonstração da proposição anterior). Seja $x_o \geq 0$ e $s_o = G(x_o)\chi_{[0,x_o]}$. Temos que s_o é uma função simples tal que $s_o \leq G$ e

$$Q(s_o) = G(x_o) \wedge x_o \leq \sup_{s \leq G} Q(s) = \int_0^\infty G(\alpha)dx$$

Logo $\displaystyle\int f d\mu = \bigvee_{x\geq 0} [x \wedge G(x)] \leq \int_0^\infty G(\alpha)dx$. Mostremos a outra desigualdade.

Considere agora uma função simples $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$, $s \neq 0$, $s \leq G$.

Então:

$$Q(s) = \bigvee_{i=1}^{k} [\alpha_i \wedge \lambda(A_i)] = \alpha_{i_o} \wedge \lambda(A_{i_o})$$

para algum i_o, $1 \leq i_o \leq k$, com λ a medida de Lebesque em $[0,\infty)$.

Como $\lim\limits_{\alpha\to\infty} G(\alpha)=0$ então A_{i_o} é limitado. Seja $\beta = \sup A_{i_o}$. Logo $A_{i_o} \subset [0,\beta]$ e $\lambda(A_{i_o}) \leq \beta$. Portanto

$$Q(s) = \alpha_{i_o} \wedge \lambda(A_{i_o}) \leq \alpha_{i_o} \wedge \beta \leq G(\beta) \wedge \beta \leq \sup_{x\geq 0} [x \wedge G(x)] = \int f d\mu$$

e então

$$\int_0^\infty G(\alpha)dx = \int f d\mu.$$

4. Comparação Entre a Esperança Classica e a Esperança Fuzzy

Nesta seção nós comparamos a integral clássica (Lebesque) e a integral fuzzy, aqui denominadas por esperança clássica e por esperança fuzzy, uma vez que a medida usada é a medida da probabilidade que também é uma medida fuzzy, e isso dando sentido a comparação. Salientamos ainda, que no caso de medidas mais gerais, tal comparação não terá sentido, pois, por exemplo, a medida de possibilidade não precisa ser uma medida fuzzy.

Seja $(\Omega,\mathcal{X},\mu)$ um espaço de probabilidade ou um espaço de medida fuzzy tal que $\mu(\Omega)=1$. Note que a medida fuzzy é considerada como uma medida de grau de inexatidão. Uma função $X:\Omega\to[0,1]$ mensurável, será chamada de variável inexata ou v.i.. Então a esperança fuzzy $E_f(X)=\bigvee_{0\leq\alpha\leq 1}[\alpha\wedge\mu(x\geq\alpha)]$ e a esperança clássica

$E(X)=(L)\int_\Omega X d\mu$ fazem sentido. Sugeno mostrou que

$$|E(X)-E_f(X)|\leq 1/4 \tag{4.1}$$

Nosso problema aqui é computar o supremo do lado esquerdo de (4.1). Antes, porém, de computarmos tal supremo, daremos alguns resultados e definições preliminares.

A função $F:[0,\infty)\to[0,1]$ definida por $F(\alpha)=\mu\{X\geq\alpha\}$ é análoga a uma função distribuição. Ela tem as seguintes propriedades:

(1) $F(0)=1$ e $\lim_{\alpha\to\infty} F(X)=0$

(2) $\alpha \leq \beta$, $F(\alpha) \geq F(\beta)$

(3) F é contínua à esquerda.

<u>Definição 2.19</u>: <u>Uma variável inexata X é do tipo contínuo</u> ou simplesmente, contínua se $F(\alpha)=\mu\{X \geq \alpha\}$ é contínua.

Daremos um teorema básico que diz respeito a esperança de uma variável inexata do tipo contínuo.

<u>Teorema 2.20</u>: Se X é uma variável inexata do tipo contínuo, então $E_f(X)=\mu\{X \geq \bar{\bar{\alpha}}\}$ para algum $\bar{\bar{\alpha}} \in (0,1]$

<u>Demonstração</u>: Considere a função $F(\alpha)=\mu\{X \geq \alpha\}$ tal que $E_f(X)= \bigvee_{\alpha \geq 0} [\alpha \wedge F(\alpha)]$. Sendo X do tipo contínuo, $F:[0,\infty) \to [0,1]$ é contínua e portanto tem um ponto fixo $\bar{\alpha} \in [0,1]$. Como $F(0)=1$, $\bar{\alpha} \in (0,1]$. Vamos mostrar que

$$E_f(X) = \bar{\alpha} = F(\bar{\alpha}) = \mu\{X \geq \bar{\alpha}\}$$

Denote por $G(\alpha)=\alpha \wedge F(\alpha)$. Queremos mostrar que $G(\alpha) \leq G(\bar{\alpha})$, para algum $\alpha \in [0,\infty)$. Se $\alpha < \bar{\alpha}$ então $F(\alpha) \geq F(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} > \alpha$. Então

$$G(\alpha) = \alpha < \bar{\alpha} = G(\bar{\alpha})$$

Se $\alpha > \bar{\alpha}$ então $F(\alpha) \leq F(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} < \alpha$. Então

$$G(\alpha) = F(\alpha) \leq \bar{\alpha} = G(\bar{\alpha})$$

Concluímos que $G(\bar{\alpha}) = \sup_{\alpha \geq 0} G(\alpha) = E_f(X)$ e portanto

$$E_f(X) = \bar{\alpha} = F(\bar{\alpha}) = \mu\{X \geq \bar{\alpha}\}$$

para algum $\bar{\alpha} \in (0,1]_+$.

Voltando ao nosso problema, nós mostraremos que 1/4 é a melhor constante, tanto no caso de v.i., como no caso mais particular de variável inexata do tipo contínuo.

É conhecido que $E(X) = (L)\int_0^1 \mu\{X \geq \alpha\} d\alpha$. Denote por $F(\alpha) = \mu\{X \geq \alpha\}$.

Como para qualquer "distribuição F" nós podemos encontrar uma variável inexata X cuja distribuição e exatamente F e o problema de avaliação do lado esquerdo de 3.1 pode ser dito em termos de F. Então nosso problema é computar

$$\sup_{F \in U} \left| (L) \int_0^1 F(\alpha) d\alpha - \bigvee_{0 \leq \alpha \leq 1} [\alpha \wedge F(\alpha)] \right|$$

onde $U = \{F: [0,1] \to [0,1];\ F$ é não-crescente$\}$, contínua à esquerda e $F(0) = 1$.

<u>Proposição 2.21</u>: $\sup_{F \in U} \left| (L) \int_0^1 F(\alpha) d\alpha - \bigvee_{\alpha} [\alpha \wedge F(\alpha)] \right| = \frac{1}{4}$ e o supremo é atingido.

<u>Demonstração</u>: Sugeno mostrou em sua tese que o supremo é $\leq 1/4$. Considere a função

$$F_0(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \leq \alpha \leq 1/2 \\ 1/2 & \text{se} \quad 1/2 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Então $(L) \int_0^1 F_0(\alpha) d = \int_0^{1/2} 1 d\alpha + \int_{1/2}^1 1/2 d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ e

$$\bigvee_{\alpha} [\alpha \wedge F_0(\alpha)] = \bigvee_{0 \leq \alpha \leq 1/2} [\alpha \wedge F_0(\alpha)] \quad \bigvee_{\frac{1}{2} < \alpha \leq 1} [\alpha \wedge F_0(\alpha)] =$$

$$= \frac{1}{2} \vee 1 = 1$$

Logo

$$\left| (L) \int_0^1 F_0(\alpha) d\alpha - \bigvee_{\alpha} [\alpha \wedge F_0(\alpha)] \right| = \left| \frac{3}{4} - 1 \right| = 1/4$$

Isto mostra que o supremo é atingido. ‡

Agora nos restringimos nossa atuação a variáveis inexatas do tipo contínuo.

O problema é computar: $\sup_{F \in V} \left| \int_0^1 F(\alpha) d\alpha - \bigvee_{\alpha} [\alpha \wedge F(\alpha)] \right|$, onde

$V = \{F \in U;\ F \text{ é contínua}\}$.

<u>Teorema 2.22</u>: $\sup_{F \in V} \left| \int_0^1 F(\alpha) d\alpha - \bigvee_{\alpha} [\alpha \wedge F(\alpha)] \right| = \frac{1}{4}$ e o supremo não é atingido.

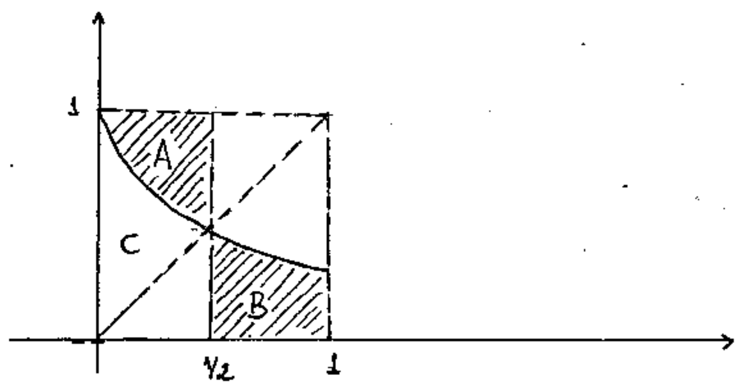
<u>Prova</u>: Usando o teo. 2.20,temos, para $F \in U$:

$$\bigvee_{0\le\alpha\le 1} [\alpha \wedge F(\alpha)] = F(\bar\alpha) = \bar\alpha \quad \text{para algum} \quad \bar\alpha \ (0,1].$$

Também, $(L)\int_0^1 F(\alpha)d\alpha$ pode ser pensada como uma área, e então obtemos:

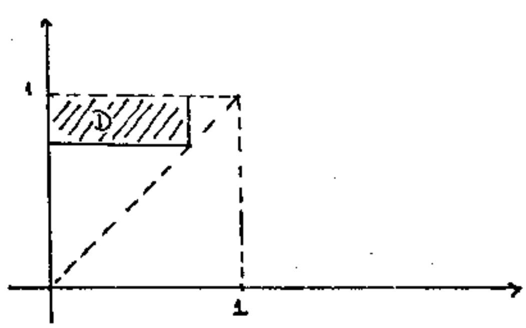
$$\sup_{F\in U} \left|(L)\int_0^1 F(\alpha)d\alpha - \bigvee_{\alpha}[\alpha\wedge F(\alpha)]\right| = \sup_{F} |(B+C)-(A+C)| = \sup_{F\in U} |B-A|$$

As notações são ilustradas abaixo:



Dois casos sã considerados: $A>B$, $B>A$.

Se $A>B$, então $\sup_F (A-B) \le \frac{1}{4}$ pois $A\le\frac{1}{4}$ e $B\ge 0$. Observe que 1/4 é a área máxima do retangulo inscrito, como na ilustração

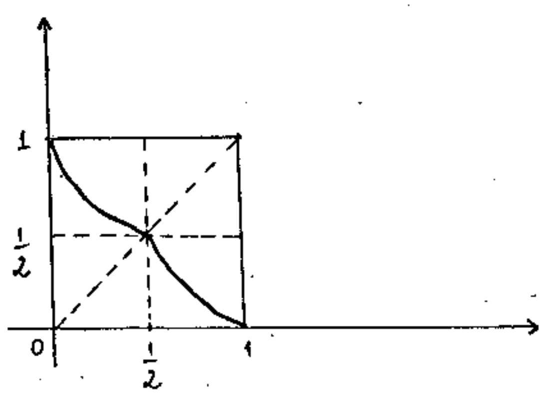


Do mesmo modo, se $B > A$, $\sup_{F}(B-A) \leq \frac{1}{4}$. Portanto

$\sup_{F}|A-B| = \text{máx}\ \{\sup_{\substack{F \\ A>B}}(A-B),\ \sup_{\substack{F \\ B>A}}(B-A)\} \leq \frac{1}{4}$. Para mostrar que o

$\sup|A-B| = 1/4$ temos que mostrar que podemos tê-lo mais perto de 1/4 quando quisermos, com $F \in V$.

A próxima ilustração mostra que existe uma sequencia $\{F_n\}$ com $|A_n - B_n| \to 1/4$.



Para mostrar que o supremo não é atingido, vamos considerar os mesmos casos:

(i) Se $F_o \in V$ com $|A_o - B_o| = 1/4$; e suponhamos $A_o > B_o$. Então $A_o = \frac{1}{4}$ e $B_o = 0$. Mas $B_o = 0$ implica $F_o = 0$ em $(0,1]$, isto é F_o não é contínua no zero.

(ii) Se $B_o > A_o$, então $B_o = \frac{1}{4}$ e $A_o = 0$ implica $F_o(\alpha) = 1$, $\forall_\alpha$ e $B_o = 1/4$ neste caso. ‡

Apesar das equivalências das integrais definidas por Sugeno, Ralescu e Ralescu-Adams nos permitirem provar alguns teoremas equivalentes aos clássicos, como veremos, outros resultados continuavam falsos como, por exemplo, o teorema de Fubini. Entretanto Wang Zi-Xiao [5] , dá uma nova definição de medida fuzzy, bem como de integral fuzzy, procurando resolver este fato. Apresentaremos agora estas definições.

Definição 2.23: Seja $(X,\mathcal{X})$ um espaço mensurável. Uma função de conjunto $\mu:\mathcal{X}\to[0,1]$ é umamedida fuzzy(segundo Wang Zi-Xiao) se são satisfeitas:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ $\mu(X)=1$

(ii) Se $A,B\in\mathcal{X}$ e $A\cap B=\emptyset$ então $\mu(A\cup B)=\mu(A)\vee\mu(B)$ (aditividade fuzzy)

(iii) Se $\{A_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequencia monótona em $\mathcal{X}$, então

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \qquad \text{(continuidade)}$$

Com esta definição de medida fuzzy, Wang Zi-Xiao definiu uma integral fuzzy:

Definição 2.24: Seja $(X,\mathcal{X},\mu)$ um espaço de medida fuzzy e seja $h:X\to[0,1]$ uma função mensurável.

(i) Se h é uma função simples, isto é, $h(x)= \bigvee_{i=1}^{n} [\alpha_i \wedge X_{E_i}(x)]$ $E_i\cap E_j=\emptyset$, $i\neq j$, então para todo $A\in\mathcal{X}$, a integral fuzzy de h(x)

<u>com respeito a medida fuzzy μ em A</u> é definida por:

$$(W)\int_A h(x)d\mu = \bigvee_{i=1}^{n} [\alpha_i \wedge \mu(F_i \cap A)]$$

(ii) Se h é uma função qualquer, então h é limite uniforme de uma sequência monótona crescente $\varphi_n(x)$ de funções simples (Lema 2.6). Neste caso, <u>a integral fuzzy de h com respeito a medida fuzzy μ em A</u> é definida como:

$$(W)\int_A h(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} (W)\int_A \varphi_n(x)d\mu$$

Mostremos agora que estas integrais são bem definidas através da

<u>Prposição 2.25</u>: O valor da integral fuzzy na definição 2.10 não depende da expressão de $h(x)$, isto é:

(i) Se h é uma função simples e tem duas expressões, digamos:

$$h(x) = \bigvee_{i=1}^{n} [\alpha_i \wedge X_{E_i}(x)] = \bigvee_{j=1}^{n} [\beta_j \wedge X_{F_j}(x)]$$

então

$$\bigvee_{i=1}^{n} [\alpha_i \wedge \mu(E_j)] = \bigvee_{j=1}^{n} [\beta_j \wedge \mu(F_j)]$$

(ii) Se h e uma função tal que existem duas sequencias crescentes de funções simples $\varphi_n(x)$ e $\psi_m(x)$ as quais convergem uniformemente para h, então:

$$\lim_{n\to\infty}(W)\int\varphi_n(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}(W)\int\psi_n(x)d\mu$$

CAPÍTULO III

CONVERGÊNCIA DE INTEGRAIS FUZZY

3. A Autocontinuidade de Funções de Conjuntos e a Integral Fuzzy

Veremos mais adiante que o teorema da Convergência Monótona, Lema de Fatou, resultados clássicos da teoria da medida de Lebesgue, continuam sendo válidos na linguagem fuzzy. O teorema da Convergência Dominada de Lebesque teria um análogo na teoria fuzzy que seria: "Se (f_n) é uma sequência de funções mensuráveis, positivas, com $f_n \to f$ e $f_n \leq g$, $g \in L^1(\mu)$ então $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$. O exemplo a seguir, mostra que isto não é verdadeiro na linguagem fuzzy.

Exemplo 3.1: Considere $X = [0,\infty)$ e μ a medida de Lebesque. Tome $f_n = \chi_{[0,n]} + 2\chi_{(n,\infty)}$ e note que $f_n \to 1$. Também $0 \leq f_n \leq 2$ e $2 \in L^1(\mu)$.

Mas $\int f_n d\mu = 2$ pois

$$\int f_n d\mu = \bigvee_{\alpha \geq 0} [\alpha \wedge \mu(\{f_n \geq \alpha\})]$$

$$= \bigvee_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \mu(\{f_n \geq \alpha\})] \quad \bigvee_{\alpha \in (1,2]} [\alpha \wedge \mu(\{f_n \geq \alpha\})] \quad \bigvee_{\alpha > 2} [\alpha \wedge \mu(\{f_n \geq \alpha\})]$$

$$= 1 \vee 2 \vee 0 = 2$$

Porém $\int 1 d\mu = 1 \wedge \mu(X) = 1$ e portanto $\int f_n d\mu \not\to \int f_n d\mu$ $\ddagger$

Vê-se então que o <u>teorema da Convergência Dominada de Lebesgue não é válido aqui</u>. Um outro problema nosso seria se $f_n \to f$ em medida, sob que condições $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$?

Lembramos que $f_n \to f$ <u>em medida</u> se $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X; |f_n(x)-f(x)| \geq \varepsilon\})=0$ para todo $\varepsilon>0$.

Ralescu e Adams[3] resolveram este problema, tomando μ uma medida fuzzy sub-aditiva, como veremos no decorrer deste capítulo . Êles tentam mostrar, através de um exemplo dado a seguir que a condição de sub-aditividade não pode ser retirada.

<u>Exemplo 3.2</u>: Sejam $X=\{1,2,3,\ldots.\}$ e $=P(X)$ partes de X e seja $\mu: X \to [0,\infty)$ definida por:

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } E = \emptyset \\ \frac{1}{n} & , \text{ se } E = \{n\},\ n= 1,2,3,\ldots. \\ 100 & , \text{ se } = E \geq 2. \end{cases}$$

Considere as funções:

$$f_n(x) = \begin{cases} 100 & \text{se } x = 1 \text{ ou } x = n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad f(x) = \begin{cases} 100 & \text{se } x=1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Temos que $f_n \to f$ em medida, mas $\int f_n d\mu = 100$ e $\int f d\mu = 1$. Entretanto a medida μ usada por Ralescu e Adams não é fuzzy. De fato, seja $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$. Então $\mu(A_n)=100$, $n=1,2,\ldots$. Observe que (A_n) é uma sequencia decrescente e então $\lim_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Logo

$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)=0$. Mas $\lim_n \mu(A_n)=100$. $\#$

Pode-se então observar que a condição de sub-aditividade, requerida por Ralescu e Adams era muito forte para resolver o problema. Wang em [4] dá condição necessária e suficiente para que uma sequência de funções que convirja em medida, tenha sua sequencia de integrais convirgindo. Esta condição é a autocontinuidade da medida μ . Outros problemas também serão tratados aqui.

<u>Teorema 3.1</u>: (Teorema da Convergência Monótona) - Sejam $f_n \to [0,\infty)$ mensuráveis para todo $n \in \mathbb{N}$ tais que $f_n \leq f_{n+1} \leq \ldots \leq f$ e $f_n(x) \to f(x)$, $\forall_x \in X$. Então f é mensurável e

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu .$$

<u>Demonstração</u>: Como $f_n \leq f_{n+1}$ então $\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu$, isto é, a sequencia de integrais é monótona crescente e portanto convergente. Além disso, $f_n \leq f$, $\forall_n \in$, o que implica

$$\int f_n d\mu \leq \int f d\mu \qquad \text{e então}$$

(*) $$\lim_n \int f_n d\mu = a \leq \int f d\mu$$, para algum $\alpha \geq 0$ real.

Mostraremos agora que $\lim \int f_n d\mu \geq \int f d\mu$. Para isto, seja s uma função simples, mensurável, tal que $0 \leq s \leq f$ e seja $0<c<1$. Defina $E_n = \{x \in X; f_n(x) \geq c\, s(x)\}$, $n=1,2,\ldots$. A sequencia (E_n) é crescente pois se $x \in E_n$, $f_n(x) \geq c\, s(x)$. Mas $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ e portanto $x \in E_{n+1}$. Além disso, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. De fato, é claro que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset X$. Provemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset X$. Seja $x \in X$. Como $f(x) = \lim_n f_n(x)$ existe n_0 tal que $cs(x) \leq f_{n_0}(x)$, pois $cs(x) \leq s(x) \leq f(x)$. Logo $x \in E_{n_0}$ e então $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Agora

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \int_{E_n} cs\, d\mu \geq Q_{E_n}(cs) \tag{8}$$

Considere a função $\nu(E) = Q_E(cs)$. Afirmamos que ν é uma medida fuzzy. Com efeito.

(i) $\nu(\emptyset) = 0$

(ii) Sejam $A, B \in \mathfrak{X}$ com $A \subset B$. Então $Q_A(cs) \leq Q_B(cs) \Rightarrow (A) \leq (B)$

(iii) Seja (A_n) uma sequencia crescente. Então:

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = Q_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}(cs) = \bigvee_{i=1}^{k} \left[\alpha_i \wedge \mu\left(E_i \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right)\right]$$

$$= \bigvee_{i=1}^{k} \left[\alpha_i \wedge \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_i \cap A_n)\right)\right]$$

$$= \bigvee_{i=1}^{k} \left[\alpha_i \wedge \lim_n \mu(E_i \cap A_n)\right]$$

$$= \lim_n \bigvee_{i=1}^{k} \left[\alpha_i \wedge \mu(E_i \cap A_n)\right]$$

$$= \lim_n Q_{A_n}(cs) = \lim \nu(A_n)$$

De maneira semelhante prova-se que $\lim_n \nu(A_n) = \nu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$, onde (A_n) é uma sequencia decrescente em $\mathfrak{X}$ e $\mu(A_{n_o}) < \infty$ para algum n_o. Voltando a (8) temos:

$$a = \lim_n \int f_n d\mu \geq \lim_n Q_{E_n}(cs) = \lim_n \nu(E_n) = \nu(\lim E_n) = \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) =$$

$$= \nu(X) = Q_X(cs) = Q(cs) \Rightarrow a \geq Q(cs) = \bigvee_{i=1}^{k} \left[\alpha_i \wedge \mu(A_i)\right].$$

Se tomarmos $c \to 1$, temos:

$$a \geq Q(s) = \bigvee_{i=1}^{k} \left[\alpha_i \wedge \mu(A_i)\right] \qquad \Rightarrow$$

$$(**) \qquad \lim_n \int f_n d\mu = a \geq \sup_{s \leq f} Q(s) = \int f d\mu$$

De (*) e (**) segue o resultado. ‡

Lema 3.2: (Lema de Fatou). Se $f_n: X \to [0,\infty)$ são mensuráveis então

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu .$$

Demonstração: Prova clássica.

Teorema 3.3: [4](Teorema da Convergencia Monótona)

Seja $\{f_n\}$ uma sequencia crescente de funções mensuráveis não-negativas convergindo para uma função mensurável, não-negativa, f e seja $A \in \mathcal{X}$. Então

$$\int_A f_n d\mu \to \int_A f_n d\mu .$$

Demonstração: Seja $c = \int f d\mu$. Se $c=0$ então $0 \leq \int f_n d\mu \leq \int f d\mu = 0$. Neste caso o teorema está provado. Suponhamos $0<c<\infty$. Para $\varepsilon \in (0, c/2)$, existe α_o tal que $c \geq \alpha_o \wedge \mu(\{f \geq \alpha_o\}) > c-\varepsilon$. É claro que $\alpha_o > \varepsilon$. Seja $E_n = \{f_n \geq \alpha_o - \varepsilon\}$. A sequencia (E_n) é crescente e $\lim_n E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$. Segue-se da monotocidade e continuidade de μ que $\mu(E_n) \nearrow \mu(E)$. Além disso, como $f_n \to f$ temos que $E \supset \{f \geq \alpha_o\}$ pois se $x \in \{f \geq \alpha_o\}$ existe n tal que $f_n \geq \alpha_o - \varepsilon \Rightarrow x \in E_n \subset E$. Logo $\mu(E) \geq \mu(\{f \geq \alpha_o\})$ e portanto existe n_o tal que $\mu(E_n) \geq \mu(\{f \geq \alpha_o\}) - \varepsilon$, $n \geq n_o$. Temos então que

$$\int f_n d\mu = \bigvee_{\alpha \in [0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(\{f_n \geq \alpha\})] \geq \alpha_o - \varepsilon \wedge \mu(\{f_n \geq \alpha_o - \varepsilon\})$$

$\geq \alpha_0 - \varepsilon \wedge [\mu(\{f \geq \alpha_0\}) - \varepsilon] = \alpha_0 \wedge \mu(\{f \geq \alpha_0\}) - \varepsilon \geq c - 2\varepsilon$, $n \geq n_0$.

Por outro lado, como $f_n \leq f$, $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu = c$. Logo $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$.

Finalmente, se $c=\infty$ então $\mu(\{f \geq \alpha\}) = \infty$, $\forall_\alpha \in [0,\infty)$. Dado $N>0$ arbitrário, seja $F_N^n = \{f_n \geq N\}$. Então $F_N^n \nearrow F_N^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_N^n$ e portanto $\mu(F_N^n) \nearrow \mu(F_N^\infty)$. Por outro lado, como $f_n \nearrow f$ temos $F_N^\infty \supset \{f \geq N+1\}$. e então $\mu(F_N^\infty) \leq \mu(\{f \geq N+1\}) = \infty$. Logo existe n_0 tal que $\mu(F_N^n) > N$, $n \geq n_0$. Pelo teorema 2.14 $\int f_n d\mu > N$, $n > n_0$. O teorema está então provado.

<u>Teorema 3.4</u> - Se $\{f_n\}$ é uma sequencia de funções mensuráveis, não-negativas, decrescente, convergindo para uma função mensurável f, não-negativa, em $A \in \mathcal{X}$ e se existem n_0 e uma constante $c' \leq \int f_n d\mu$ tal que $\mu(\{f_{n_0} \geq c'\} \cap A) < \infty$ então

$$\int_A f_n d\mu \to \int_A f d\mu \quad .$$

<u>Demonstração</u>: Seja $c = \int f d\mu$. Temos então que $\lim \int f_n d\mu \geq c$. Se $c = \infty$, nada a provar. Se $c < \infty$, assuma que $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu > c$. Então

existe $\delta > 0$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq c+\delta$. Como f_n é decrescente, $\int f_n d\mu \geq c+\delta$ e portanto usando o teorema 2.14, $\mu(\{f_n \geq c+\delta\}) \geq c+\delta$, $\forall_n$. Por hipótese, temos que $\mu(\{f_{n_o} \geq c^1\}) < \infty$. Então $\mu(\{f_{n_o} \geq c+\delta\}) \leq \leq \mu(\{f_{n_o} \geq c^1\}) < \infty$ e como $f_n \searrow f$, $\{\{f_n \geq c+\delta\}\}$ é decrescente em n temos:

$$\{f_n \geq c+\delta\} \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \geq c+\delta\} = \{f \geq c+\delta\}.$$

Segue-se da continuidade de μ que:

$$\mu(\{f \geq c+\delta\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(\{f_n \geq c+\delta\}) \geq c+\delta .$$

Logo do teorema 2.14 temos $\int f d\mu \geq c+\delta$ o que é uma contradição. Isto completa a prova do teorema. ‡

Corolário 3.5: Se $f_n \searrow f$ e μ é finita, então $\int f_n d\mu \searrow \int f d\mu$.

Demonstração: Sendo μ finita, $\mu(\{f_n \geq c\}) < \mu(X) < \infty$. O resultado segue do teorema.

Observemos que hipótese de finitude no teorema anterior não pode ser retirada, como mostrará o exemplo seguinte.

Exemplo 3.3: Seja $X = (0, \infty)$ e a σ-álgebra de Borel e μ a medida de Lebesgue. Tomemos $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Então $f_n \searrow f \equiv 0$.

É claro que as hipóteses do teorema anterior não são satisfeitas. Consequentemente,

$$\int f_n d\mu=\infty \ , \ n=1,2,\ldots \quad e \quad \int f d\mu=0, \text{ isto é, } \int f_n d\mu \not\to \int f d\mu.$$

Corolário 3.6: Seja μ zero-aditiva. Então

i) $f_n \nearrow f$ quase sempre $\Rightarrow \int f_n d\mu \nearrow \int f d\mu$.

ii) $f_n \searrow f$ quase sempre e existe $n_\circ$ e $c^1 < \int f d\mu$ tal que $\mu(\{f_{n_\circ} > c^1\}) < \infty \Rightarrow \int f_n d\mu \searrow \int f d\mu$.

Demonstração: i) Sejam $B = \{x \in X; |f_n(x)-f(x)| \geq \varepsilon\}$ e $A=X-B$. Temos que $\mu(B)=0$, pois $f_n \to f$ quase sempre. Como μ é zero-aditiva,

$$\int f_n d\mu = \int_{A\cup B} f_n d\mu = \int_A f_n d\mu$$

Em A, $f_n \to f$. Pelo teorema da Convergência Monótona,

$$\int_A f_n d\mu \to \int_A f d\mu.$$

Mas

$$\int_A f d\mu = \int_{A\cup B} f d\mu = \int f d\mu. \quad \text{Logo}$$

$$\fint f_n d\mu \to \fint f d\mu.$$

ii) Sejam A,B como antes sendo μ zero-aditiva, temos do teorema anterior que

$$\fint_A f_n d\mu \to \fint_A f d\mu$$

Mas

$$\fint_A f_n d\mu = \fint_{A\cup B} f_n d\mu = \fint f_n d\mu \quad \text{e} \quad \fint_A f d\mu = \fint_{A\cup B} f d\mu = \fint f d\mu.$$

Logo

$$\fint f_n d\mu \to \fint f d\mu.$$

‡

No teorema 3.4, tomamos uma sequencia de funções mensuráveis decrescente convergindo para uma nova função f mensurável. Vamos generalizar este resultado.

<u>Teorema 3.7</u>: Se $\{f_n\}$ converge para f em $A\in\mathcal{X}$, e existem n_o e uma constante $c' < \fint_A f d\mu$ tal que $\mu(\{\sup_{n\; n_o} f_n > c'\}\cap A) < \infty$ então

$$\lim_{n\to\infty} \fint_A f_n d\mu \quad \text{existe e é igual a} \quad \fint_A f d\mu.$$

<u>Demonstração</u>: Sem a perda de generalidade, suponhamos A=X. Escre-

va $\bar{f}_n = \sup\limits_{i \geq n} f_i$ e $\underline{f}_n = \inf\limits_{i \geq n} f_i$. Então $\bar{f}_n$ e $\underline{f}_n$ $n=1,2,\ldots$ são

mensuráveis com $\bar{f}_n \searrow f$ e $\underline{f}_n \nearrow f$.

Como $\underline{f}_n \leq f_n \leq \bar{f}_n$ segue-se que

$$\int \underline{f}_n d\mu \leq \int f_n d\mu \leq \int \bar{f}_n d\mu.$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty} \int \underline{f}_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int \bar{f}_n d \ .$$

Usando o teorema de Convergencia Monótona e teorema 3.4, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int \underline{f}_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \bar{f}_n d\mu = \int f d\mu.$$

Consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

E o teorema está provado.

‡

<u>Corolário 3.8</u>: Se $f_n \to f$ quase sempre e se existem $n_\circ$ e uma constante $c' \leq \int f d\mu$ tal que $\mu(\{\sup\limits_{n \geq n_\circ} f_n > c'\}) < \infty$ então $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$

se, e somente se, μ é zero-aditiva.

<u>Demonstração</u>: Suponha que μ é zero-aditiva e seja $B=\{x\in X;\ f_n(x)\nrightarrow f(x)\}$. Temos então que $\mu(B)=0$. Seja $A=X-B$... Pelo teorema 3.7:

$$\int_A f_n d\mu \to \int_A f d\mu$$

Mas da proposição 2.16 temos:

$$\int_A f_n d\mu = \int_{A\cup B} f_n d\mu = \int_X f_n d\mu \quad \text{e} \quad \int_A f d\mu = \int_{A\cup B} f d\mu = \int_X f d .$$

Portanto

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu$$

Suponhamos agora que $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$. Usaremos a proposição 2.15 para demonstrarmos o teorema. Seja $f_1=f_n$ como $f_1=f_2$ qtp então $f_n \to f_1$ e $f_n \to f_2$. Logo, por hipótese,

$$\int f_n d\mu \to \int f_1 d\mu \quad \text{e} \quad \int f_n d\mu \to \int f_2 d\mu$$

donde concluímos que $\int f_1 d\mu = \int f_2 d\mu$ e portanto μ é zero-aditiva.

<u>Teorema 3.9</u>: [4] Suponhamos que (f_n) e f sejam funções mensuráveis, positivas, $f_n \in L^1(\mu)$ e $f_n \to f$ em medida. Suponha que a medida fuzzy é sub-aditiva. Então $f \in L^1(\mu)$ e

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu.$$

<u>Demonstração</u>: Usaremos a seguinte desigualdade na demonstração do teorema.

$$(a+b)\wedge c \leq (a\wedge c)+(b\wedge c)\ a+(b\wedge c) \tag{10}$$

com $a,b,c,\in \mathbb{R}^+$. Mostraremos que $f \in L^1(\mu)$. Para isto, seja $\varepsilon>0$ fixo. Temos para algum $\alpha \geq 0$ que

$$\{x\in X; f(x)\geq\alpha\} \subset \{x\in X; |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\} \cup \{x\in X; f_n(x)\geq\alpha-\varepsilon\}$$

De fato, seja $y \in \{x\in X; f(x)\geq\alpha\}$ e suponhamos que $y \notin \{x\in X; f_n(x)-f(x)\geq\varepsilon\}$ Como $f_n \to f$ em medida, $|f_n(y)-f(y)|<\varepsilon$. Então $f_n(y)\ f(y)-\varepsilon\geq\alpha-\varepsilon$ e portanto $y\in\{x\in X; f_n(x)\geq\alpha-\varepsilon$. Sendo μ sub-aditiva, temos:

$$\mu(\{x\in X; f(x)\geq\alpha\}) \leq \mu(\{x\in X; |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}) + \mu(\{x\in X; f_n(x)\geq\alpha-\varepsilon\})$$

Então

$$\alpha\wedge\mu(\{x\in X; f(x)\geq\alpha\}) \leq \alpha\wedge[\mu(\{x\in X; |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}) + \mu(\{x\in X; f_n(x)\geq\alpha-\varepsilon\})]$$

$$\leq \mu(\{x\in X \, |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})+\alpha\wedge\mu(\{x\in X \; f_n(x)\geq\alpha-\varepsilon\})$$

$$= \mu(\{x\in X;|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})+(\alpha-\varepsilon+\varepsilon)\wedge\mu(\{x\in X;f_n(x)\geq\alpha-\varepsilon\})$$

$$\leq \mu(\{x\in X;|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})+(\alpha-\varepsilon)\wedge\mu(\{x\in X;f_n(x)\geq\alpha-\varepsilon\})+\varepsilon \; .$$

Portanto, para $\alpha\geq 0$

$$\alpha\wedge\mu(\{x\in X;f(x)\geq\alpha\})\leq\varepsilon+\mu(\{x\in X;|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})+ \int f_n d\mu \; .$$

Tomando o sup sobre $\alpha\geq 0$, obtemos:

$$\int f d\mu\leq \varepsilon + \mu(\{x\in X;|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})+ \int f_n d\mu \qquad (11)$$

Como $f_n\to f$ em medida e $f_n\in L^1(\mu)$, $\forall_n$ segue-se que $f\in L^1(\mu)$.

Temos também que, para $\alpha\geq 0$ e $\varepsilon>0$ fixado,

$$\{x\in X;f_n(x)\geq\alpha\}\subset\{x\in X;|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}\subset\{x\in X;f(x)\geq\alpha \;\; \varepsilon\} \qquad \text{e}$$

$$\alpha\wedge\mu(\{x\in X;f_n(x)\geq\alpha\})\leq\mu(\{x\in X;|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})+\alpha\wedge\mu(\{x\in X;f(x)\geq\alpha-\varepsilon\})$$

$$=\mu(\{x\in X;|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})+(\alpha-\varepsilon+\varepsilon)\wedge\mu(\{x\in X;f(x)\geq\alpha-\varepsilon\})$$

$$\leq\mu(\{x\in X;|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})+\alpha-\varepsilon\wedge\mu(\{x\in X;f(x)\geq\alpha-\varepsilon\})+\varepsilon$$

Tomando o sup sobre $\alpha \geq 0$, obtemos:

$$\fint f_n d\mu \leq \varepsilon + \mu(\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) + \fint f d\mu \tag{12}$$

De (11) e (12) e como $f_n \to f$ em medida temos, tomando o limite quando $n \to \infty$, o resultado desejado. ‡

Corolário 3.10: Se μ é uma medida fuzzy sub-aditiva, finita, com (f_n) e f funções mensuráveis, positivas e $f_n \to f$ em quase toda parte, então:

$$\fint f_n d\mu \to \fint f d\mu.$$

Demonstração: Como convergencia quase sempre implica em convergencia em medida, segue o corolário do teorema anterior.

Teorema 3.11: Suponhamos que a sequencia de funções mensuráveis (f_n) convirja para a função mensurável f, finita quase-sempre, sobre $A \in \mathcal{X}$. Então $\fint_A f_n d\mu \to \fint_A f d\mu$ se e só se μ é autocontínua.

Demonstração: Sem perda de generalidade, seja $A = X$ e f finita. Provemos a suficiência. Escreva $F_\alpha = \{x \in X; f(x) \geq \alpha\} = \{f \geq \alpha\}$, $F_{\alpha+0} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{f \geq \alpha\}$, F_α^n $\{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\} = \{f_n \geq \alpha\}$. Seja $\alpha \in [0, \infty)$ e $c = \fint f d\mu$.

Dividiremos em dois casos. Se $c=\infty$ então $\mu(F_\alpha)=\infty$, $\forall\alpha\in[0,\infty)$. Dado $\alpha\in(0,\infty)$ arbitrário temos:

$$F_\alpha^n \supset F_{\alpha+1}\{x\in X;|f(x)-f_n(x)|\geq 1\}. \tag{12}$$

De fato, seja $y\in F_{\alpha+1}\{x\in X;|f(x)-f_n(x)|\geq 1\}$. Então $y\in F_{\alpha+1}\Rightarrow f(y)\geq\alpha+1$ e $y\notin\{x\in X;|f(x)-f_n(x)|\geq 1\}$. Como $f_n\to f$ em medida, temos que $|f_n(y)-f(y)|<1\Rightarrow f_n(y)\geq f(y)-1\geq\alpha+1-1=\alpha\Rightarrow y\in F_\alpha^n$. Sendo μ autocontínua inferior, existe $\delta=\delta(\alpha)>0$ tal que $\mu(B)<\delta$, $B\in\mathcal{X}$, e $\mu(F_{\alpha+1}B)\geq\alpha$ Como $f_n\to f$ em medida, existe $n_o=n_o(\alpha)$ tal que $\mu(\{|f_n-f|\geq 1\})<\delta$, para $n>n_o$. Consequentemente,

$$\mu(F_\alpha^n)\geq\mu(F_{\alpha+1}\{|f_n-f|\geq 1\})\geq\alpha\ ,\ n>n_o$$

Do teorema 2.15 temos que $\displaystyle\fint f_n d\mu\geq\alpha$, $n>n_o$, isto é, $\displaystyle\fint f_n d\mu\to\infty$. Considere agora $c<\infty$. Para $\alpha>c$ temos que $\mu(F_\alpha)\leq\mu(F_{\alpha+0})\leq c<\infty$. Portanto $\{F_\alpha\}_{\alpha>c}$ é uma cadeia μ-limitada. Seja $\varepsilon>0$ dado. Temos que $F_{\alpha+\varepsilon}^n\subset F_\alpha\cup\{|f_n-f|\geq\varepsilon\}$ e sendo μ autocontínua temos que μ é autocontínua localmente uniforme superior e usando o fato de que $f_n\to f$ em medida, existe n_o tal que

$$\mu(F_{\alpha+\varepsilon}^n)\leq\mu(F_\alpha\cup\{|f_n-f|\geq\varepsilon\})\leq\mu(F_\alpha)+\varepsilon$$

para $n > n_o$, $\forall \alpha > c$.

Por outro lado, para todo $\alpha \in [0,c]$ temos pelo teorema 2.15 que $\mu(F_\alpha) \geq \alpha$ e portanto

$$\alpha \wedge \mu(F^n_{\alpha+\varepsilon}) \leq \alpha \wedge \mu(F_\alpha), \quad \forall_n .$$

Consequentemente, para todo $\alpha \geq 0$,

$$\alpha \wedge \mu(F^n_{\alpha+\varepsilon}) \leq \alpha \wedge \mu(F_\alpha) + \varepsilon \qquad \Rightarrow$$

$$(\alpha+\varepsilon) \wedge \mu(F^n_{\alpha+\varepsilon}) \leq [\alpha \wedge \mu(F^n_{\alpha+\varepsilon})] + \varepsilon \leq \alpha \wedge \mu(F_\alpha) + 2\varepsilon .$$

Obviamente a desigualdade acima vale também para $\alpha \in [-\varepsilon, 0)$ e temos:

$$(\alpha+\varepsilon) \wedge \mu(F^n_{\alpha+\varepsilon}) \leq \alpha \wedge \mu(F_\alpha) + 2\varepsilon \leq \int f d\mu + 2\varepsilon \quad , \alpha \in [-\varepsilon, \infty).$$

Segue-se então que

$$\int f_n d\mu \leq \int f d\mu + 2\varepsilon \tag{13}$$

Analogamente, para $\varepsilon > 0$ e $\alpha > c$ e como

$$F^n_{\alpha-\varepsilon} \supset F_\alpha - \{|f_n - f|\}$$

temos, usando os fatos que é autocontínua localmente uniforme inferior e que $f_n \to f$ em medida, que existe n_1 tal que

$$\mu(F^n_{\alpha-\varepsilon}) \geq \mu(F_\alpha)-\varepsilon \quad , \quad n \geq n_1.$$

Além disso, como $F^n_{c-\varepsilon} \supset F_c - \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}$ e sendo μ autocontínua inferior, existe n_2 tal que

$$\mu(F^n_{c-\varepsilon}) \geq \mu(F_\alpha)-\varepsilon \qquad n \geq n_2.$$

Então para $\alpha \in [0,c]$ temos

$$\mu(F^n_{\alpha-\varepsilon}) \geq \mu(F^n_{-\varepsilon}) \geq \mu(F_\alpha) -\varepsilon \geq c-\varepsilon \geq \alpha-\varepsilon \quad , \quad n \geq n_2$$

Consequentemente, para, $n > n_o' = n_1 \vee n_2$ tem-se:

$$(\alpha-\varepsilon) \wedge \mu(F^n_{\alpha-\varepsilon}) \geq \alpha-\varepsilon \wedge \mu(F_\alpha)-\varepsilon \geq \alpha \wedge \mu(F_\alpha)-2\varepsilon \quad , \qquad \forall_\alpha \geq 0.$$

Como $\int f_n d\mu \geq \alpha-\varepsilon \wedge \mu(F^n_{\alpha-\varepsilon}), \forall_\alpha > \varepsilon$ e para $\alpha \in [0,\varepsilon)$ obviamente vale

$$\int f_n d\mu \geq 0 \geq \alpha-\varepsilon \geq \alpha-\varepsilon \wedge \mu(F^n_{\alpha-\varepsilon})$$

Temos então

$$\int f_n d\mu \geq \alpha-\varepsilon \wedge \mu(F_\alpha)-2\varepsilon \quad , \quad \forall_\alpha \geq 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\int f_n d\mu \geq \int f d\mu-2\varepsilon \quad , \quad n > n_o \tag{14}$$

De (13) e (14) temos:

$$\left|\int f_n d\mu - \int f d\mu\right| < 2\varepsilon \quad , \quad n > n_o \vee n_o' \quad .$$

Provemos agora a necessidade. Sejam $A \in \mathfrak{X}$ e $\{B_n\}$ uma sequencia de conjuntos em $\mathfrak{X}$ com $\lim_n \mu(B_n)=0$. Se $\mu(A)<\infty$, tomemos $\alpha>\mu(A)$ e defina

$$f(x)=\begin{cases} \alpha & , x\in A \\ 0 & , x\notin A \end{cases} \qquad \text{e}$$

$$f_n(x)=\begin{cases} \alpha & , \text{ se } x\in A\Delta B_n \\ 0 & , \text{ se } x\notin A\Delta B_n \end{cases} \quad , \quad n = 1,2,\ldots .$$

Dado $\varepsilon>0$ arbitrário, temos $\mu(\{|f_n-f|\geq\varepsilon\})\leq\mu(B_n) \to 0$ quando $n \to\infty$, pois $f_n\to f$ em medida. Portanto, pela hipótese do teorema

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu$$

Consequentemente, dos fatos $\int f_n d\mu=\alpha\wedge(A\Delta B_n)$ e $\int f d\mu=\alpha\wedge\mu(A)=\mu(A)$, temos que $\lim\limits_{n} \mu(A\Delta B_n)=\mu(A)$. Logo μ é autocontínua. Se $\mu(A)=\infty$, é suficiente provar que μ é autocontínua inferiormente em A. Dado $N>0$ arbitrário defina:

$$f(x)=\begin{cases} N+1 , & x\in A \\ 0 , & x\notin A \end{cases}$$

$$f_n(x)=\begin{cases} N+1 , & x\in A-B_n \\ 0 , & x\notin A-B_n , \quad n = 1,2,\ldots. \end{cases}$$

É claro que $f_n\to f$ em medida e portanto $\int f_n d\mu\to \int f d\mu$. Como $\int f d\mu=N+1$ e $\int f_n d\mu=N+1\wedge\mu(A-B_n)$, $n=1,2,\ldots$, segue-se que existe $n_\circ$ tal que $\mu(A-B_n)\geq N$, $n>n_\circ$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A-B_n)=\infty=\mu(A)$. Logo μ é autocontínua. O teorema está provado.$_{\ddagger}$

Daremos um exemplo para mostrar que $f_n\to f$ em medida mas $\int f_n d\mu \not\to \int f d\mu$, tomando μ não autocontínua.

<u>Exemplo 3.4</u>: Sejam $X=\{1,2,3,\ldots\}$, $\mathfrak{X}$ σ-álgebra de todos subconjuntos de X e $\mu:\mathfrak{X}\to[0,\infty)$ definida por $\mu(E)=k \sum\limits_{i\in E} \frac{1}{2^i}$, onde k é o número de pontos de E.

Afirmamos que μ não é autocontínua. Com efeito, tomemos $A=\{1\}$ e $B_n=\{n\}$, $n=1,2,\ldots$. Então $\mu(B_n)=\frac{1}{2^n} \to 0$ quando $n\to\infty$ e $\mu(A\cup B_n)=2(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n})\to 1$ quando $n\to\infty$ e $\mu(A)=\frac{1}{2}$. Logo $\lim\limits_n \mu(A\cup B_n)\neq\mu(A)$ e então μ não é autocontínua superior, consequentemente não é autocontínua. Agora, tome:

$f(x) = \chi_{[1]}(x)$, $f_n(x) = \chi_{[1,n]}(x)$. Então para $\varepsilon\in(0,1)$ temos

$$\mu(\{|f_n-f|\geq\varepsilon)= \mu(\{n\}) = \frac{1}{2^n} \to 0$$

O que implica que $f_n\to f$ em medida. Mas $\int f d\mu=\frac{1}{2}$ e $\int f_n d\mu= 1$, $n=1,2,\ldots.$ e $\int f_n d\mu \not\to \int f d\mu$.

Nosso próximo resultado refere-se ao conceito de $L^1(\mu)$ dado anteriormente.

<u>Teorema 3.12</u>: Se μ é uniformemente contínua e $\{f_n\}$ é uma sequencia de funções mensuráveis, não-negativas, que converge para uma função mensurável f, não-negativa, finita quase sempre e $A\in \mathcal{X}$ então:

i) $\int_A f d\mu= \infty \Leftrightarrow$ existe n_o, tal que $\int_A f_n d\mu= \infty$, $n\geq n_o$

ii) $f\in L^1(\mu) \Leftrightarrow$ existe n_o, tal que $f_n\in L^1(\mu)$, $n\geq n_o$

<u>Demonstração</u>: i) É suficiente provar que, se $\int f d\mu= \infty$ então exis

te n_o tal que $\int f_n d\mu=\infty$, $n\geq n_o$, pois a recíproca decorre diretamente do teorema 3.11, já que uniformemente autocontínua implica em autocontínua. Usaremos a notação dada na prova do teorema.

Seja $\int f d\mu=\infty$ então $\mu(F_\alpha)=\infty$ para $\alpha\in[0,\infty)$. Como

$$F_\alpha^n \supset F_{\alpha+1}-\{|f-f_n|\geq 1\}$$

segue-se usando a autocontinuidade uniforme de μ e o fato de que $f_n\to f$ em medida, que existe n_o tal que

$$\mu(F_\alpha^n)\geq\mu(F_{\alpha+1}-\{|f-f_n|\geq 1\}) = \infty$$

para todo $\alpha\in[0,\infty)$ e $n\geq n_o$. Consequentemente $\int f_n d\mu=\infty$, $n\geq n_o$.

ii) A necessidade está provada dentro da demonstração do teorema 3.11. A recíproca é demonstrada usando i). ‡

<u>Teorema 3.13</u>: Se $\{f_n\}$ converge uniformemente para uma função finita f em $A\in\mathfrak{X}$ então:

$$\int_A f_n d\mu \to \int_A f d\mu.$$

<u>Demonstração</u>: Dado $\varepsilon>0$ arbitrário, temos pelo fato de $f_n\to f$ uniformemente que existe n_o tal que $|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$ para todo $x\in A$, $n\geq n_o$. Segue-se da proposição 2.12 que

$$\left|\int_A f_n d\mu - \int f d\mu\right|\leq\varepsilon \quad , \quad n\geq n_o$$ ‡

2. Continuidade das Integrais de Fuzzy

Vimos, no contexto das medidas fuzzy contínuas que existem os seguintes teoremas sobre continuidade de integrais fuzzy:

- $\{f_n\}_n \to f$, μ sub-aditiva $\Rightarrow \int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ (Ralescu-Adams, [3])

- $\{f_n\}_n \longrightarrow f$, μ autocontínua $\Rightarrow \int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f d\mu$ (Wang, [4])

Apresentaremos um resultado que engloba estes resultados. Para maiores detalhes vide Greco-Bassanezi [6] .

Teorema de Continuidade: Sejam μ e ν medidas fuzzy sobre X e uma família qualquer de subconjuntos de X. Seja $f:X\to[0,1]$ uma função $\mathcal{X}$-mensurável e $\{f_n\}_n$ uma sucessão qualquer de funções de X em $[0,1]$. Se μ é $F_{\mathcal{X}}$ -contínua em relação ν e $\{f_n\}_n$ ν-converge para f então

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

onde $F_{\mathcal{X}}$-contínua, significa que para todo $A\in\mathcal{X}$ e $\{A_n\}\subset P(x)$, $\nu(A_n \Delta A)\to 0 \Rightarrow \mu(A_n)\to \mu(A)$ e a convergência da sequência de funções é convergência em medida.

Com êste resultado pode-se obter os anteriores, num contexto mais geral de medidas fuzzy, englobando também as que não são sub-aditivas, autocontínuas e contínuas. Isto se deve os fatos:

(1) ν é sub-aditiva $\Rightarrow \nu$ é $F_{P(x)}$ contínua em relação a si mesma

(2) ν é autocontínua $\Rightarrow \nu$ é $F_{P(x)}$ contínua em relação a si mesma.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] M. Sugeno, Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals. - A Survey , "Fuzzy Automata and Decision Process"(M.M. Gupta et al Eds) - North Holland - Amsterdam (1977, 89-102.

[2] D. Ralescu, Toward a General Theory of Fuzzy Variables, J. Math. Anal. Appl., 86(1982), 176-193.

[3] D. Ralescu and G. Adams, The Fuzzy Integral, J. Math. Anal. Appl., 75(1980), 562-570.

[4] Z. Wang , The Autocontinuity of Set Function and the Fuzzy Integral, J. Math. Anal. Appl. 99(1984), 195-218.

[5] W. Zi-Xiao, Fuzzy Measures and Measures of Fuzziness, J. Math. Anal. Appl., 104(1984), 569-601.

[6] G. Greco e R. Bassanezi, Continuidade de Fuzzy-Integrais.

[7] G. Banon, Distinction Between Several Subsets of Fuzzy Measures, Fuzzy Sets and Sistems,5(1981), 291-305.

[8] R. G. Bartle, "The Elements of Integration", John Wiley e Sons Inc., New York, 1966.

[9] D. Dubois and A. Prade, "Fuzzy Sets and Sistems: Theory and Applications" - Academic Press, 1980.

[10] S. T. Wierzchon, On Fuzzy Measure and Fuzzy Integral, "Fuzzy Automata and Decision Process"(M.M. Gupta and I. Sanduz eds), North Holland, Amsterdam(1982), 79-86.