

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado

Simulações Numéricas do Colapso Gravitacional de
um Campo Escalar sem Massa

Autor: Raphael de Oliveira Garcia

Orientador: Samuel Rocha de Oliveira

Campinas - SP
Março/2007

Simulações Numéricas do Colapso Gravitacional de um Campo Escalar sem Massa

Este exemplar corresponde a redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Raphael de Oliveira Garcia** e avaliada pela comissão julgadora.

Campinas, 13 de março de 2007.

Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira
Orientador.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira (IMECC/UNICAMP)

Prof. Dr. Eduardo Gueron (UFABC)

Prof. Dr. Patrício A. Letelier Sotomayor (IMECC/UNICAMP)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Garcia, Raphael de Oliveira

G165s Simulações numéricas do colapso gravitacional de um campo
escalar sem massa / Raphael de Oliveira Garcia -- Campinas, [S.P.
:s.n.], 2007.

Orientador : Samuel Rocha de Oliveira

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Física matemática. 2. Relatividade geral. 3. Métodos numéricos.

I. Oliveira, Samuel Rocha de . II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Numerical simulations of the gravitational collapse of a massless scalar field.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Mathematical physics. 2. General relativity.
3. Numerical methods.

Área de concentração: Física-Matemática

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Eduardo Gueron (UFABC)
Prof. Dr. Patrício Aníbal Letelier Sotomayor (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 13/03/2007

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 13 de março de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). SAMUEL ROCHA DE OLIVEIRA



Prof. (a). Dr (a). EDUARDO GUERON



Prof. (a). Dr (a). PATRICIO ANIBAL LETELIER SOTOMAYOR

“Sonho que se sonha só é só um sonho que se sonha só,
mas sonho que se sonha juntos é realidade.”

Prelúdio - Raul Seixas

Agradecimentos

Ao Samuel Rocha de Oliveira por todos os ensinamentos e orientações feitos nesses anos de convivência, pela sua dedicação e sabedoria, pelo seu carisma, pelo seu companheirismo e pelas inúmeras ajudas realizadas.

Aos meus pais - Edson e Ailda - que não mediram esforços para me incentivar, apoiar e me sustentar nos estudos, pela maravilhosa educação que vocês passaram não somente a mim, mas para todos os seus filhos. Sei que se hoje realizo mais um objetivo em minha vida é porque tenho uma fortaleza para me apoiar, tenho vocês.

Aos meus irmãos - Alexandre e Adriana - que sempre me apoiaram, por todos aos anos de amizade e por tudo que vivemos juntos.

A Graciele por todo amor, carinho, atenção, paciência, respeito, por todos esses maravilhosos anos que estamos vivendo juntos. A toda luta que enfrentamos juntos ao longo desses anos, ao longo do Mestrado, que enfrentaremos ao longo do Doutorado e por toda a nossa vida. E a todo instante que vivemos intensivamente, juntos.

Ao Niki (in memorium) por ser um membro inesquecível da família. A todos os meus familiares que sempre torceram por mim - minhas tias Nina, Fátima e Vilma, meus tios Foca, Zé, Nenem e Nunes, meus primos Edmilson, Edmundo, Gabriel, Felipe, Rodrigo e Leonardo, minhas primas Érika, Janaina, Jacyara e Carol, meus avôs Bento e Pedro e minhas avós Flôr (in memorium) e Aulida (in memorium).

A todos os meus familiares São Paulinos que fazem permanecer a força tricolor em nossa família. A excelente influência musical que meu irmão me passou, ao bom Rock'n'Roll e Punk Rock que corre em nossas veias.

Ao Dente, pela nossa amizade e pelas nossas sagas realizadas em Bauru. Ao Eder - profeta do Tereré - pelo seu humor. Ao Cleber por toda sua magia. Ao Pedro, Tiago, Renata, Izabel, Fabiano - Paixão, Douglas e todas as outras pessoas que tornaram os quatro anos de graduação inesquecíveis. Ao Igor, Ilan, Paulo e o Renato, pela incrível amizade que temos desde a infância.

A todos que lutam pela não poluição do meio ambiente, que reciclam o lixo, que no seu dia-a-dia contribuem de alguma maneira a preservação os

animais e a natureza. E, por fim, a todos que lutam honestamente contra a desigualdade social.

Abstract

This dissertation is about a problem of gravitational collapse of the spherically symmetric massless scalar field in accord to the Einstein equations with minimal coupling.

We developed simple but with adaptative mesh refinement algorithm to obtain numerical solutions. The mesh refinement is required to describe the collapse phenomena.

We used common routines to solve ordinary differential equations that come from the method of lines applied to the partial differential equations of the mathematical model, namely, Runge-Kutta and cubic splines routines.

We showed that it is possible to get solutions as close as we want to the Black Holes solution and to the critical solution using our developed algorithms and simple desktop computers.

Resumo

Esta dissertação trata de um problema de colapso gravitacional do campo escalar sem massa com simetria esférica, de acordo com as equações de Einstein com acoplamento mínimo.

Desenvolvemos algoritmos simples mas com ajuste automático de refinamento para obter soluções numéricas. O refinamento é necessário para descrever os fenômenos do colapso.

Utilizamos rotinas comuns para resolver equações diferenciais ordinárias advindas do método das linhas aplicado às equações diferenciais parciais do modelo matemático, a saber, rotinas de Runge-Kutta e de splines cúbicas.

Mostramos que é possível obter soluções tão próximas quanto se queria à solução de Buracos Negros e da solução crítica com os algoritmos desenvolvidos e simples computadores de mesa.

Sumário

1	Introdução	1
2	Colapso Gravitacional do Campo Escalar	4
2.1	Equações do campo	5
2.2	O Buraco Negro Limite	7
2.3	Comportamento Crítico	8
3	A Estrutura Básica do Sistema Dinâmico	11
3.1	O Espaço de Fase	11
3.2	Fenômenos Críticos	14
3.2.1	Fenômenos Críticos do tipo 1	14
3.2.2	A Solução Crítica de Fenômenos Críticos do tipo 2	16
3.2.3	Fenômenos Críticos do tipo 2	17
4	Estrutura Geral do Colapso Gravitacional	21
4.1	Auto-similaridade em Relatividade Geral	21
4.2	Cálculo de soluções críticas	25
4.3	Aproximações Analíticas	30
4.3.1	Previsões do estudo sobre fluido perfeito	31
4.3.2	Aproximações para o fluido perfeito e o campo escalar	32
4.4	Espaço-tempo de $2 + 1$ dimensões	33
4.4.1	A solução exata de Garfinkle	35
4.5	Relatividade Geral como um Sistema Dinâmico	40
4.5.1	A escolha de funções métricas	40
4.5.2	As variáveis do espaço de fase	41
4.6	Fenômenos Críticos e Singularidades Nuas	42
4.7	Fenômenos Críticos são gerais ?	48
5	Métodos Numéricos	51
5.1	Técnicas para a Implementação Numérica	51

5.1.1	O Método de Linhas	52
5.1.2	O Método de linhas adaptativo, com refinamento	53
5.2	Implementação numérica do campo escalar	55
5.2.1	A estrutura do algoritmo	55
5.2.2	A condição inicial	57
5.2.3	As condições de contorno	58
5.2.4	Os critérios de parada	60
5.3	Sensibilidade do algoritmo	61
5.4	Simulação	61
5.4.1	Informações sobre os Hardwares e Softwares utilizados	62
5.4.2	Protótipo	62
6	Implementação Numérica	65
6.1	Performance do algoritmo	65
6.2	Métodos de interpolação	66
6.3	Comparação entre as subrotinas de interpolação	69
6.4	Outras Modificações	73
6.5	Simulações Numéricas	74
6.6	Exemplo de Choptuik	87
7	Conclusões	93
	Referências Bibliográficas	95
	Anexo I - arquivos do algoritmo do campo escalar	99
	Anexo II - Informações obtidas da opção Profiler	115
	Anexo III - Arquivo MEX	117

Capítulo 1

Introdução

As equações de Einstein são muito complexas e não lineares, isso faz com que a obtenção de soluções analíticas seja praticamente inviável, na maioria dos problemas propostos. Por isso precisamos de métodos computacionais para encontrarmos soluções não triviais.

Um dos problemas relevantes na Relatividade Geral é o colapso de matéria com auto-gravitação. Mesmo para um campo escalar sem massa, os resultados são surpreendentes devido a grande quantidade de fenômenos que aparece, mas para descobri-los de maneira convincente, devemos ter métodos precisos e computacionalmente viáveis.

O principal objetivo dessa dissertação é propor uma técnica numérica capaz de desenvolver um algoritmo simples, eficiente e confiável, que encontre soluções numéricas de um sistema modelo estudado por Choptuik.

A confiabilidade do algoritmo é adquirida ao utilizar uma malha adaptativa com refinamento, que distribui adequadamente os pontos da malha, com o intuito de obter soluções numéricas dentro de uma precisão exigida.

O ponto crucial da técnica numérica desenvolvida é a escolha de um método de interpolação, para as exigências da malha adaptativa. Nessa dissertação são feitas comparações entre alguns métodos de interpolação, para a escolha de um bom método que se adapte ao algoritmo.

A implementação numérica foi fundamentada no método de linhas adaptativo com refinamento, integrado ao método de Runge-Kutta e a interpolação cúbica de Hermite.

Nosso trabalho possui dois propósitos centrais: o primeiro é estudar os principais resultados e fenômenos que surgem no colapso gravitacional de alguns modelos de matéria e o segundo é apresentar as simulações numéricas para um campo escalar específico.

Em particular, estudamos o colapso gravitacional de um campo escalar sem massa, minimamente acoplado ao campo gravitacional, com simetria

esférica e foram feitas simulações numéricas destes, com o MatLab. A motivação de se usar o MatLab está no fato de que a elaboração do algoritmo é rápida, em relação às linguagens de **baixo nível**, por possuir rotinas prontas, bem otimizadas e de fácil manuseio.

Os capítulos 2, 3 e 4 são dedicados à uma leitura dos principais resultados sobre colapso gravitacional. Estudamos diversos tipos de matéria, embora nossas atenções estejam focalizadas no campo escalar sem massa.

Chamamos a atenção para a primeira solução de buraco negro e para os estudos analíticos sobre colapso gravitacional de Christodoulou (1986) [9]. Em seguida, iniciamos um primeiro contato com os resultados de Choptuik (1992) [7], para os fenômenos descobertos através de simulações numéricas e, por fim, citamos outros estudos de colapso gravitacional com diferentes tipos de matéria.

O capítulo 2 é dedicado à obtenção das equações de Einstein para o campo escalar sem massa, com simetria esférica, através da métrica radial-polar. Essas equações representam a evolução temporal, de um campo escalar em estudo, cujo estágio final é um buraco negro ou a dispersão do campo.

Os fenômenos descobertos por Choptuik - *Universalidade*, *Eco* e uma *relação de potência para massa do buraco negro* - são definidos. Esses fenômenos são conhecidos como comportamento crítico ou *fenômenos críticos* e acontecem na vizinhança de uma hipersuperfície, que define a transição entre os campos iniciais que formam buracos negros e os que dispersam.

Uma característica de destaque é o expoente crítico, que aparece na relação de potência da massa do buraco negro. Para o campo escalar, o expoente crítico é universal, ou seja, assume o mesmo valor para qualquer relação de potência obtida através da evolução de campos escalares, especificados nos capítulos 2 e 3.

No capítulo 3 detalhamos a dinâmica dos campos escalares iniciais, através de um espaço de fase, que leva em consideração os dois possíveis estágios finais e a hipersuperfície que delimita as regiões onde teremos a dinâmica de campos escalares, que dispersam e que formam buraco negro.

Toda a atenção deste capítulo está na distinção entre fenômenos críticos do tipo 1 e fenômenos críticos do tipo 2, onde surgem as definições de auto-similaridade discreta e contínua. O segundo fenômeno é considerado mais interessante, pois é nele que ocorre a relação de potência para a massa do buraco negro. Também falamos sobre a natureza da *Universalidade*, do fenômeno *Eco* e do *expoente crítico*.

No capítulo 4 apresentamos as características do colapso gravitacional, através da Relatividade Geral sob um ponto de vista dinâmico. O conceito de auto-similaridade é aprofundado, fazendo um paralelo com a Física Clássica e também comparando com as equações que aparecem no estudo de um fluido

perfeito.

Neste capítulo, mostramos como obter soluções críticas e algumas aproximações analíticas, que auxiliam no estudo de soluções obtidas no colapso de um campo escalar e de um fluido perfeito.

A seção 4.4 destaca o colapso gravitacional do campo escalar em estudo, em um espaço-tempo de $2 + 1$ dimensões. Veremos que, nesse caso, existe uma solução analítica e bem definida. Já a seção 4.7 é reservada para a seguinte pergunta: fenômenos críticos são gerais? Aqui, um paralelo com a mecânica estatística é traçado.

Nos capítulos 5 e 6 tratamos das simulações numéricas, onde apresentamos o algoritmo desenvolvido, as teorias envolvidas, alguns exemplos e modificações que ajudam na otimização do algoritmo.

No capítulo 5 elaboramos um algoritmo para fazer a simulação numérica, baseado no *Métodos de Linhas adaptativo e com refinamento* e utilizando o *Método de Runge-Kutta* com a *Interpolação (por spline) cúbica*. Além disso, são apresentados alguns aspectos teóricos e exemplos.

O capítulo 6 foi destinado a apresentar alguns caminhos para a otimização do algoritmo, elaborado no capítulo 5. Investigamos a performance de vários métodos de interpolação, visto que a principal mudança está no tipo de interpolação, e optamos pela *interpolação cúbica de Hermite*.

Neste capítulo, para o exemplo de um campo escalar com um perfil Gaussiano, buscamos a vizinhança da transição de fase entre os campos escalares que dispersam e os que formam buraco negro. Discutimos as soluções obtidas, as quais representam os estágios finais da evolução temporal destes campos.

Finalmente, no capítulo 7, apresentamos as conclusões do nosso trabalho.

Capítulo 2

Colapso Gravitacional do Campo Escalar

Uma das primeiras soluções exatas para as equações de Einstein foi apresentada por Karl Schwarzschild (1916) e posteriormente ficou conhecida como solução de buraco negro, [3].

Em meados de 1990, os pesquisadores sabiam que uma configuração de matéria, suficientemente forte, pode gerar um buraco negro e que uma configuração suficientemente fraca, nunca se tornaria singular a ponto de formar um buraco negro. No entanto, a região intermediária entre formação e não formação era pouco conhecida.

Choptuik (1992) [7], foi um dos pioneiros a utilizar simulações numéricas para investigar essa região intermediária. Ele construiu um modelo simplificado de colapso gravitacional, de um tipo de matéria que tem apenas dois possíveis estágios finais - formação de buraco negro ou dispersão da matéria.

Em 1992, Choptuik [7] apresentou três inesperados fenômenos: a Lei de Potência para a massa do buraco negro, caracterizado por expoente crítico; a Universalidade e o fenômeno Eco.

Esses resultados numéricos impulsionaram a Relatividade Numérica e diversos trabalhos posteriores que identificavam esses fenômenos, para outros modelos de colapso gravitacional, com diferentes tipos de matéria.

O problema do colapso de um campo escalar sem massa, acoplado ao campo gravitacional de Einstein, com simetria esférica, tem sido estudado em detalhes, analiticamente por Christodoulou (1986) [9], e numericamente por Choptuik (1992) [7], Goldwirth & Piran (1987), Goldwirth et al (1989), Gómez & Winicour (1989, 1992) e Gómez et al (1992).

Segundo Choptuik (1992) [7], esse sistema fornece um modelo ideal para apresentar uma variedade de resultados básicos em relatividade numérica. O campo escalar fornece o modelo com um grau radioativo de liberdade que

é, necessariamente, ausente em qualquer “Dinâmica” do campo de Einstein (ou de Maxwell), em simetria esférica. Ao mesmo tempo, através de uma escolha adequada de dados iniciais, a própria gravitação do campo escalar pode ser feita arbitrariamente forte e, dessa maneira, evoluir para a dissipação de radiação com curvatura no espaço-tempo e assim a formação de buraco negro pode ser estudada. Operacionalmente, a restrição da simetria esférica cria a tarefa de resolver, numericamente, o conjunto de equações diferenciais, de modo mais fácil do que a forma geral, o que facilita a exploração da fenomenologia do colapso gravitacional.

2.1 Equações do campo

O primeiro sistema que Choptuik (1992) [7] estudou, através de simulações numéricas, foi o limite da formação de buraco negro do campo escalar, com simetria esférica, sem massa e minimamente acoplado ao campo gravitacional de Einstein. Pela simetria esférica, o campo depende apenas das coordenadas r e t , radial e temporal, respectivamente, ou seja, as duas dimensões efetivas do espaço-tempo, que são simbolizadas por $(1+1)$. O campo escalar representa um modelo simples de matéria bem comportada e também pode ser usado como um modelo simples de radiação gravitacional, mesmo não existindo em sistemas com simetria esférica.

O tensor energia-momentum, de um campo escalar sem massa, ϕ , minimamente acoplado é

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla_c \phi \nabla^c \phi \quad (2.1)$$

e a equação da matéria é

$$\nabla_a \nabla^a \phi = 0. \quad (2.2)$$

Note que, nesse caso, a equação da matéria é a conservação do tensor de energia-momentum, Gundlach (2003) (2.1).

Para a simetria esférica, Choptuik [7] adota o sistema de coordenadas radial-polar, que é uma generalização do usual sistema de coordenadas de Schwarzschild para o caso dependente do tempo, cujo elemento de linha é definido por

$$ds^2 = -\alpha^2(r, t) dt^2 + a^2(r, t) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.3)$$

onde α é uma função lapso temporal, a é uma função de escala radial, que serão denominadas apenas por funções lapso e radial respectivamente e $d\Omega^2$ é a métrica na superfície de uma esfera unitária, ou seja, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$.

A opção por esse sistema de coordenadas se deve a duas propriedades: a área da superfície definida pelas constantes r e t quaisquer é $4\pi r^2$ e as coordenadas r e t são ortogonais. Para definir completamente a coordenada t , Choptuik escolheu $\alpha = 1$ em $r = 0$ e definiu a coordenada t como o tempo próprio de um observador localizado em $r = 0$.

Um importante diagnóstico geométrico é a massa Hawking m ou função perfil da massa, [19]. Em sistemas com simetria esférica, a massa de Hawking é representada por

$$1 - \frac{2m(r, t)}{r} = a^{-2}. \quad (2.4)$$

Note que a função perfil da massa está relacionada com a função radial a e esse fato justifica o termo diagnóstico geométrico.

Através da equação (2.4), define-se a massa total do espaço-tempo. O resultado de

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m(r, t)$$

é a *massa total do espaço-tempo*, também denominada por *massa de Arnowitt, Desner e Misner* ou simplesmente massa **ADM**, [2]. Se $r \rightarrow 2m$, então tem-se a formação de buraco negro.

As equações de Einstein,

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (2.5)$$

desenvolvidas para o campo escalar sem massa, ϕ , minimamente acoplado com a métrica (2.3) e os campos auxiliares $\Phi \equiv \phi'$ e $\Pi \equiv \frac{a}{\alpha} \dot{\phi}$, são as seguintes:

$$\dot{\Phi} = \left(\frac{\alpha}{a} \Pi \right)'; \quad (2.6)$$

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\alpha}{a} \Phi \right)'; \quad (2.7)$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{a'}{a} + \frac{1 - a^2}{r} = 0; \quad (2.8)$$

$$\frac{a'}{a} + \frac{a^2 - 1}{2r} - 2\pi r (\Pi^2 + \Phi^2) = 0; \quad (2.9)$$

$$\frac{\dot{a}}{\alpha} - 4\pi r \Phi \Pi = 0 \quad (2.10)$$

em que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \alpha(r, t) = \alpha_0,$$

onde α_0 é uma constante escolhida convenientemente. Tomamos $\alpha_0 = 1$.

A equação (2.10) é satisfeita automaticamente, se as equações (2.8) e (2.9) forem.

Para que o espaço-tempo seja regular na origem, a seguinte condição de contorno é necessária:

$$\lim_{r \rightarrow 0} a(r, t) = 1.$$

Nota-se que as equações do campo não contêm uma escala intrínseca, pois as transformações,

$$t \rightarrow kt, \quad r \rightarrow kr, \quad \Phi \rightarrow k^{-1}\Phi \quad \text{e} \quad \Pi \rightarrow k^{-1}\Pi,$$

mudam de uma solução à outra, para qualquer constante positiva k .

A condição inicial, $\phi(r, 0)$, especifica a forma ou perfil do campo escalar em $t = 0$, que evoluirá para um dos seguintes estágios finais: a formação de buraco negro ou a dispersão do campo.

Estudar a evolução temporal de um campo escalar é resolver o sistema de equações, formado por (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9), sujeito à métrica (2.3). Mas, para isso, estudaremos estruturas básicas que nos auxiliarão no entendimento da evolução temporal.

2.2 O Buraco Negro Limite

Com as equações do campo escalar, sem massa, minimamente acoplado e com simetria esférica estabelecidas, apresentamos um resultado que auxilia na investigação da fenomenologia do colapso gravitacional e na determinação do buraco negro limite.

Em 1986, Christodoulou [9] provou que, se os dados iniciais do campo escalar com simetria esférica forem bem definidos, suficientemente fracos e diferenciáveis, a evolução temporal resultará numa dispersão do campo escalar, ou seja, o espaço-tempo resultante é o de Minkowski. Por outro lado, se os dados forem bem definidos, suficientemente fortes e diferenciáveis, a evolução desse campo escalar resultará na formação de um buraco negro, ou seja, uma curvatura infinita no espaço-tempo aparecerá.

Através de simulações numéricas, Choptuik estudou o colapso de um campo escalar sem massa, com simetria esférica. Em 1993, Choptuik [8] apresentou diversos resultados focalizando famílias de soluções S , dependentes de um parâmetro arbitrário p , isto é $S[p]$, com as seguintes propriedades:

1. cada campo escalar é representado pelo parâmetro p , que caracteriza uma medida da intensidade da auto-interação gravitacional;

2. cada família contém todos os campos com um mesmo perfil;
3. existe um parâmetro p_{fraco} tal que, para $p < p_{fraco}$ o espaço-tempo é assintoticamente plano;
4. existe um parâmetro p_{forte} tal que, para $p > p_{forte}$ o estágio final é a formação de buraco negro;
5. existe um parâmetro crítico p_* , que separa as soluções que caracterizam a formação de buraco negro das que não representam o buraco negro.

Os resultados de Christodoulou (1986) [9] garantem a existência dos parâmetros p_{fraco} e p_{forte} .

Choptuik (1993) [8], assumiu que $p_{fraco} < p_* < p_{forte}$ e referiu-se a $S[p < p_*]$ e $S[p > p_*]$ como soluções subcríticas e supercríticas, respectivamente. Assim, dada uma família $S[p]$, que possui soluções, tanto subcríticas quanto supercríticas, fixam-se duas soluções, uma subcrítica e a outra supercrítica. Pode-se determinar o parâmetro p_* utilizando, por exemplo, o método da Bissecção. Como consequência, Choptuik determinou o parâmetro crítico p_* , que estabelece a transição entre soluções $S[p < p_*]$ e $S[p > p_*]$, e, no parâmetro crítico, tem-se a formação do buraco negro limite.

2.3 Comportamento Crítico

Na seção anterior apresentamos o parâmetro p , que caracteriza a intensidade do campo escalar inicial. Sabe-se que a evolução temporal de um campo escalar, suficientemente forte, e de um campo escalar suficientemente fraco, resultará na formação de buraco negro ou na dispersão do campo, respectivamente.

Nessa seção focalizamos nossa atenção nos campos escalares em que $p \cong p_*$. Para isto, especificamos as propriedades que um campo escalar deve satisfazer para ser considerado suficientemente forte ou suficientemente fraco.

Ao especificar o perfil do campo escalar inicial, estamos considerando uma família de dados iniciais que representa os campos escalares iniciais de um mesmo perfil. Cada campo escalar inicial tem sua evolução temporal definida pelas as equações do campo e o estágio final da evolução temporal, de cada campo escalar, se encontra em uma das famílias de soluções. Então, o estágio final, isto é, a solução das equações de campo pertence à família de soluções $S[p < p_*]$ ou à família de soluções $S[p > p_*]$.

As famílias de soluções dependem dos parâmetros que definem o perfil. Choptuik (1993) [8] estudou, dentre outras, a família de dados iniciais que possui o perfil Gaussiano,

$$\phi(r, 0) = \phi_0 r^3 \exp\left(-\left(\frac{r - r_0}{\delta}\right)^q\right). \quad (2.11)$$

Consideramos essa família para auxiliar na investigação dos parâmetros, do campo escalar, que influenciam na formação ou não formação de buraco negro.

Na equação (2.11), Choptuik exigiu que a radiação escalar se aproximasse de $r = 0$, ao longo da evolução temporal. O parâmetro variável foi ϕ_0 e os demais, r_0 , δ e q , são parâmetros fixos para qualquer campo inicial, da família de dados iniciais especificado. Assim, os parâmetros fixos caracterizam o perfil Gaussiano da família e cada valor de ϕ_0 representa um elemento da família especificada. Consequentemente, a amplitude ϕ_0 da Gaussiana é o parâmetro p que caracteriza os elementos de uma dada família.

Intuitivamente, podemos associar duas escalas de medidas do campo gravitacional, a extensão radial L do pulso e o raio gravitacional de Schwarzschild, R_s ,

$$R_s = 2M_\infty = 2 \lim_{r \rightarrow \infty} m(r, t). \quad (2.12)$$

Quando $L \gg R_s$ temos o perfil de um campo fraco: o pacote de onda deslocará na direção de $r = 0$, implodirá em $r = 0$, ocorrerá auto-reflexão e dissipará para o infinito, resultando no espaço-tempo de Minkowski. Por outro lado, quando $L \gtrsim R_s$ temos o perfil do campo forte e, nesse caso, o campo possuirá auto-gravitação e a formação de buraco negro é possível. Em coordenadas polar-radial, o campo forte pode ser diagnosticado pela quantidade

$$\frac{2m(r, t)}{r} \cong 1. \quad (2.13)$$

Para o campo Gaussiano, definido pela equação (2.11), onde o parâmetro ϕ caracteriza a família, obtemos campos fracos fazendo $\phi_0 \cong 0$, o que é equivalente a fazer $L \gg R_s$ e, para campos fortes, consideramos $\phi_0 \cong (\phi_0)_*$, o que é análogo a $L \gtrsim R_s$.

As soluções, segundo Gundlach (2003) [19], próximas do buraco negro limite, $p \cong p_*$, possuem o espaço-tempo criado pela evolução do campo escalar e caracterizado pelo parâmetro $p = p_*$. Esse espaço-tempo é dito universal, pois Choptuik (1992) [7] mostrou que os espaços-tempos de soluções que estão na vizinhança da solução que define o buraco negro limite, definem o mesmo espaço-tempo crítico, também chamado de solução crítica ou solução universal

$$Z(r, t) = Z_*(kr, r(t - t_*)). \quad (2.14)$$

O ponto de acumulação t_* e o fator k dependem da família de dados iniciais, mas a escala periódica das soluções próximas à solução crítica, não depende. A solução universal Z_* tem a seguinte propriedade

$$Z_* = Z_*(e^{n\Delta}r, e^{n\Delta}t), \quad (2.15)$$

para todo n inteiro e $\Delta \cong 0,344$. Choptuik chamou esse fenômeno de *Eco*. Veremos mais detalhes na seção 3.2.

As propriedades *Universalidade* e *Eco* são definidas a seguir.

Universalidade: Dado um tempo finito, em uma região finita do espaço, todos os campos iniciais de uma dada família, próximas ao campo inicial crítico, evoluirão para soluções próximas à solução crítica.

Eco: Seja $\phi(r, t)$ um campo escalar qualquer. A solução crítica será a mesma quando as mudanças de escalas, $r \rightarrow e^\Delta r$ e $t \rightarrow e^\Delta t$, forem efetuadas e portanto,

$$\phi_*(r, t) = \phi_*(e^\Delta r, e^\Delta t), \quad (2.16)$$

onde $\Delta \cong 0,344$ e $e^\Delta \cong 30$.

Assim, o conceito de universalidade atua na vizinhança da solução crítica, [7] e [19].

Existem dois tipos de solução crítica: solução crítica independente do tempo (estática) e solução crítica independente de escala (similaridade própria). No último caso, a massa final do buraco negro é universal e podemos obtê-la pela seguinte relação

$$M_{BH} \cong C(p - p_*)^\gamma, \quad (2.17)$$

onde C depende da família de soluções escolhida, o expoente γ é universal, $\gamma \cong 0,374$, independente da família e a equação (2.17) determina uma escala para a massa do buraco negro [19].

Capítulo 3

A Estrutura Básica do Sistema Dinâmico

Com o auxílio dos conceitos estudados no capítulo anterior, dada uma família de dados iniciais, construímos o espaço de fase, onde são representados os valores assumidos pelo parâmetro p , associando-o à formação de um buraco negro ou à dispersão do campo. Identificamos a solução crítica como um ponto fixo, no sistema dinâmico do colapso gravitacional e chamamos de ponto crítico. E por fim, examinamos a universalidade do buraco negro limite e o ponto crítico, para melhor compreender a lei de massa do buraco negro, e assim, obtivemos uma estrutura básica que nos auxilia na investigação de colapsos gravitacionais.

3.1 O Espaço de Fase

O intuito de descrever um sistema dinâmico através do espaço de fase, é representar a evolução temporal de todos os campos iniciais, de uma dada família, que é caracterizada pelo parâmetro p . O espaço de fase é fundamental para uma explicação qualitativa do fenômeno da **Universalidade** e para estudarmos fenômenos que ocorrem nas proximidades do buraco negro limite.

A evolução temporal de um sistema isolado em Relatividade Geral, pode terminar em um desses três estados: formação de um buraco negro, solução espacialmente localizada ou dispersão do campo. Como estamos focalizando os estudos em campos escalares sem massa e com simetria esférica, não há solução espacialmente localizada. Dessa maneira, outros dois pontos do espaço de fase devem representar os estágios finais de evolução dos campos.

No espaço de fase, definiremos uma curva Γ , para representar todos os valores que o parâmetro p pode assumir, onde cada valor de p representa um

campo escalar inicial. A evolução dos campos é indicada por curvas, onde o ponto inicial é um valor do parâmetro p , da curva Γ e a outra extremidade da curva é representada por uma seta, que aponta para um dos estágios finais. Assim, quando $p < p_*$, a seta indicará como estágio final, o ponto fixo que representa a dispersão do campo, ou seja, o espaço-tempo plano. Se $p > p_*$, a seta apontará para o ponto fixo que representa a formação de buraco negro (conferir figura 3.1).

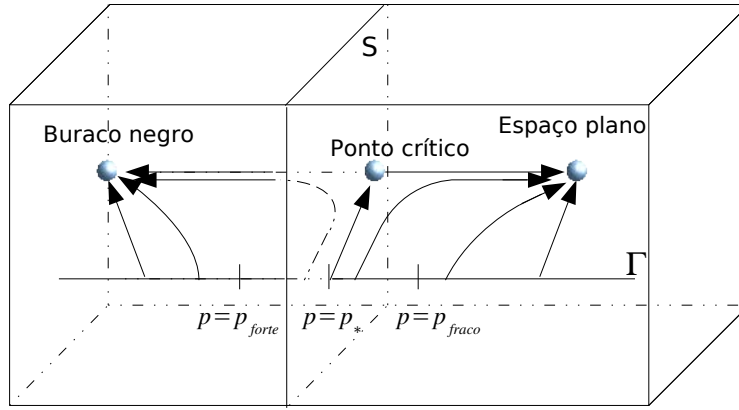


Figura 3.1 - O espaço de fase de um buraco negro limite na presença de um ponto crítico. A superfície S , que contém o ponto crítico, representa o buraco negro limite; os pontos buraco negro e espaço plano representam os estágios finais da evolução temporal dos campos escalares iniciais, que pertencem à família de dados iniciais, caracterizada por um parâmetro p . A curva Γ representa essa família de dados iniciais e intercepta o buraco negro limite no parâmetro crítico p_* .

No ponto $p = p_*$, a curva Γ intercepta a superfície S , que representa o buraco negro limite, e a evolução do campo, representado pelo parâmetro crítico p_* , é representada pela seta que pertence à superfície S e aponta para o ponto crítico. O seu estágio final será um dos estágios possíveis e a diferença $p - p_*$ nos fornece a distância entre o parâmetro p e o buraco negro limite.

Qualquer evolução temporal, ou trajetória, iniciada suficientemente próxima ao buraco negro limite, mas não necessariamente próxima do ponto

crítico, move-se quase paralelamente à trajetória do parâmetro crítico. Isto é, quando o valor do parâmetro p , de um campo inicial, for aproximadamente igual ao valor de p_* , a distância $p - p_*$ quase não se altera ao longo de uma evolução temporal lenta e a partir de um determinado tempo, o campo terminará sua evolução em um dos estágios finais possíveis [19] (ver figura 3.1).

Essa é a origem da **Universalidade**: *Qualquer campo inicial, com o parâmetro p suficientemente próximo ao parâmetro crítico p_* , evolui para uma estrutura do espaço-tempo, semelhante ao espaço-tempo crítico, e a partir de um determinado tempo, a evolução caminha para um dos possíveis estágios finais.*

Essa solução universal, também chamada de solução crítica, possui uma simetria interessante: ela é periódica em uma escala logaritma do espaço-tempo, com período de $\Delta \cong 3,44$. Esse é o fenômeno **Eco**, também conhecido como solução de auto-similaridade discreta.

No contexto da Relatividade Geral, um ponto fixo do espaço de fase é uma solução independente do tempo ou uma solução simétrica, em relação ao tempo. Isso significa que o espaço-tempo é independente do tempo ou existe uma escala de invariância para o tempo.

Quando a solução crítica é periódica no tempo, o espaço-tempo possui uma simetria discreta e nesse caso, podemos representar por um círculo, o ponto crítico no espaço de fase (ver figura 3.2).

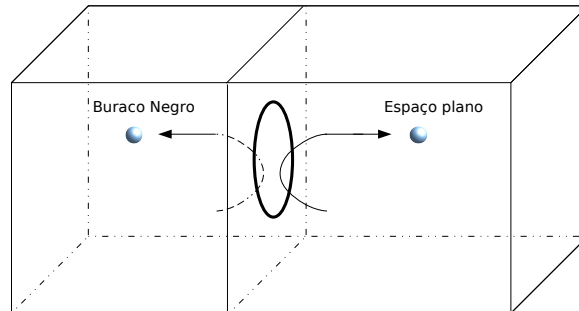


Figura 3.2 - Esboço do espaço de fase da solução crítica que é periódica no tempo. Representamos a evolução de dois campos escalares que, a partir de um determinado tempo, atingem seus estágios finais.

3.2 Fenômenos Críticos

Essa seção será destinada à investigação da solução crítica ou do ponto crítico do espaço de fase, assumindo a existência de simetrias adicionais no espaço-tempo. Desse modo, temos dois tipos de soluções à serem estudadas.

3.2.1 Fenômenos Críticos do tipo 1

Fenômenos críticos do tipo 1 são caracterizados pelo surgimento de soluções críticas, independentes da variável temporal, e pelo aparecimento de uma lei de escala. Essa lei é um modelo simplificado da lei de potência para fenômenos críticos do tipo 2.

Uma solução contínua e estática é invariante sob deslocamentos infinitesimais do tempo e as variáveis dinâmicas do sistema são independentes do tempo, quando um sistema de coordenadas é determinado convenientemente.

Se a solução é invariante sob deslocamentos discretos do tempo, dizemos que a solução é periódica, ou oscilante, e temos que todas as variáveis desse sistema são periódicas.

Por simplicidade, assumimos que a solução crítica tem simetria contínua e estática, ou seja, que a solução crítica é independente do tempo. Considerando as coordenadas r e t , do sistema de coordenadas esférico, podemos representar a solução crítica por

$$Z_*(r, t) = Z_*(r). \quad (3.1)$$

Com a solução crítica definida fizemos uma perturbação linear, para estudar as soluções que estão em sua vizinhança.

Considerando uma perturbação linear geral, definida pela soma de pequenas perturbações lineares da forma $C_i(p) e^{\lambda_i t} Z_i(r)$, também chamadas de modos de perturbações, temos

$$\delta Z_*(r, t) = \sum_i C_i(p) e^{\lambda_i t} Z_i(r), \quad (3.2)$$

onde C_i são amplitudes que dependem da família de dados iniciais, ou seja, dependem do parâmetro p .

Seja $Z(r, t)$, uma solução definida na vizinhança da solução crítica, podemos assumir que

$$Z(r, t) \cong Z_* + \delta Z_*. \quad (3.3)$$

Se $p \cong p_*$, o fenômeno da Universalidade nos diz que as soluções obtidas, ao longo da evolução temporal, passam muito tempo próximas à solução

crítica e a partir de um determinado tempo, a evolução temporal resulta em um dos estágios finais.

Em termos perturbativos, isso significa que uma das pequenas perturbações é crescente, ou seja, existe um $\lambda_i > 0$. Consideramos que $\lambda_0 > 0$ e que os demais λ_i têm a parte Real negativa, isto é, $Re\lambda_i < 0$ para $i \neq 0$. Assim, das equações (3.2) e (3.3), obtemos

$$Z(r, t) \cong Z_*(r) + C_0 e^{\lambda_0 t} Z_0(r) + \text{modos de decaimento.} \quad (3.4)$$

Se $p = p_*$, sabemos que a evolução temporal desse campo inicial é a própria solução crítica (ver figura 3.1). Nesse caso a amplitude C_0 é zero e obtemos $Z(r, t) = Z_*$ da equação (3.4), assim podemos concluir que, C_0 é proporcional a $(p - p_*)$.

Reescrevendo a equação (3.4), temos

$$Z(r, t) \cong Z_*(r) + \mu(p - p_*) e^{\lambda_0 t} Z_0(r) + \text{modos de decaimento,} \quad (3.5)$$

onde μ é o parâmetro de proporcionalidade entre C_0 e $(p - p_*)$.

A equação (3.5) define uma região denominada *regime intermediário linear*. Essa região é a parte do espaço de fase onde a equação (3.5) é válida.

Definimos o tempo t_p através da seguinte expressão, observada na equação (3.5),

$$\mu|p - p_*| e^{\lambda_0 t_p} \equiv \varepsilon, \quad (3.6)$$

onde ε é uma constante arbitrária positiva.

Tomando $t = t_p$, na equação (3.5), substituindo a identidade (3.6) e desconsiderando os modos de decaimento da equação(3.5), obtemos

$$Z(r, t_p) \cong Z_*(r) \pm \varepsilon Z_0(r), \quad (3.7)$$

onde o símbolo $\pm$ é o sinal de $(p - p_*)$.

Podemos atribuir um dos sinais de $\pm$ para a formação de buraco negro e o outro sinal para a dispersão.

Em $t = t_p$, a solução $Z(r, t_p)$ independe de $|p - p_*|$. Se $p > p_*$, temos um buraco negro final com a massa sendo uma fração da massa da solução crítica Z_* .

A magnitude $|p - p_*|$ está definida apenas em t_p . Nesse intervalo de tempo, a solução Z permanece aproximadamente igual a solução crítica e, por isso, t_p é chamado de "tempo de vida" da solução crítica.

Colocando em evidência t_p , da equação (3.6), obtemos

$$t_p = \frac{1}{\lambda_0} \ln |p - p_*| + \text{constante}. \quad (3.8)$$

O tempo de vida da solução crítica, equação (3.8), define uma escala de medida para o tempo.

3.2.2 A Solução Crítica de Fenômenos Críticos do tipo 2

As principais propriedades da solução crítica que investigamos são: uma das pequenas perturbações é crescente e as demais decaem exponencialmente a zero. Nessa seção, falaremos de um sistema de coordenadas que nos auxiliam na investigação da solução crítica de fenômenos críticos do tipo 2.

Em fenômenos críticos do tipo 2 esperamos que a solução crítica seja auto-similar, isto é, que a solução crítica seja invariante sob algum tipo de escala.

Dizemos que uma solução é continuamente auto-similar, se ela for invariante perante ao deslocamento infinitesimal $(1 + \varepsilon)$, ou seja, $Z_*(r, t) = Z_*((1 + \varepsilon)r, (1 + \varepsilon)t)$ para qualquer ε . Referimos a essa solução pela abreviatura **CSS**.

A solução discreta e auto-similar é abreviada pela sigla **DSS**. Ela é caracterizada por ser invariante a uma reescala, determinada por uma constante fixa qualquer, ou seja, $Z_*(r, t) = Z_*(kr, kt)$.

Mesmo sabendo que as soluções críticas do tipo 2 independem de uma escolha de escala, podemos construir uma escala para o sistema de coordenada. Em uma das novas coordenadas utilizamos uma escala logarítmica e as definimos a seguinte maneira

$$x = -\frac{r}{t} \quad e \quad \tau = -\ln\left(-\frac{t}{l}\right), \quad t < 0, \quad (3.9)$$

onde r , t e l têm dimensão de comprimento, x e τ são adimensionais em unidades $c = G = 1$.

A mudança de coordenadas definida pelas equações (3.9), desloca a origem de t para o ponto de acumulação de Ecos, t_* , definida pela Universalidade e obtida por Choptuik, equação (2.14). Dessa maneira Choptuik (1992) [7] observou que, para qualquer solução próxima da solução crítica existe uma região do espaço-tempo em que os campos a , α e ϕ , da solução próxima, são bem aproximados pelos campos da solução universal, isto é,

$$Z(x, \tau) \cong Z_*(x, \tau), \quad (3.10)$$

onde os campos $Z_* = \{a_*, \alpha_*, \phi_*\}$ da solução crítica têm periodicidade Δ ,

$$Z_*(x, \tau + \Delta) = Z(x, \tau). \quad (3.11)$$

As constantes t_* e l dependem da família de soluções, mas os campos críticos a_* , α_* , ϕ_* e o período Δ são universais, ou seja, independem da família escolhida.

Note que, a coordenada τ é do tipo tempo e também é uma escala logarítmica no espaço-tempo da solução crítica. A equação (3.11) nos diz que, se aplicarmos uma translação na coordenada τ para $\tau + \Delta$ em um x fixo qualquer, obtemos novamente a solução crítica, mas com uma redução na escala do espaço e do tempo pelo fator $e^{-\Delta}$.

Introduzimos o vetor $Z(x)$, com variáveis suficientes para determinar o estágio de um sistema em um determinado tempo e com as seguintes propriedades: a solução $Z(x, \tau)$ é CSS se, e somente se, $Z(x, \tau)$ for independente de τ e a solução é DSS se $Z(x, \tau)$ for periódico em τ .

Em simetria esférica não existem graus de liberdade independentes do campo gravitacional, assim os dados iniciais são automaticamente os campos escalares iniciais que satisfazem as condições de Cauchy. Como esses campos obedecem equações de ondas, as condições de Cauchy são exigidas em ϕ e $\phi_{,t}$.

Se o campo escalar for CSS temos $\phi(r, t) = \phi(x)$ e que $r\phi_{,t}$ depende apenas de x , assim podemos escolher $Z = \{\phi, \phi_{,t}\}$ para ser o vetor $Z(x)$. Se o campo for DSS temos o mesmo vetor $Z(x)$, porém as variáveis de $Z = \{\phi, \phi_{,t}\}$ são periódicas na coordenada τ , [19].

A solução crítica de um campo escalar sem massa é DSS, mas por exemplo, a solução de um fluido perfeito é CSS, [34]. O caso em que a matéria é um fluido perfeito, as variáveis de Z são de maneira que $Z_*(x)$ independe de τ .

3.2.3 Fenômenos Críticos do tipo 2

As soluções críticas do tipo 2 são caracterizadas pelas propriedades de auto-similaridade CSS ou DSS, de analiticidade no passado do cone de luz e da exigência de um único modo de perturbação crescente. A principal propriedade de fenômenos críticos do tipo 2 é a relação de escala para a massa do buraco negro,

$$M_{BH} \cong C(p - p_*)^\gamma. \quad (3.12)$$

Nessa seção, detalhamos sobre esse fenômeno.

Evans e Coleman (1994) [12], sugeriram que o expoente universal γ pode ser calculado através de uma perturbação linear da solução crítica, em conjunto com uma análise dimensional.

Antes de considerar a perturbação linear sob a solução crítica, assumimos o sistema de coordenadas x e τ , definidas pelas equações (3.9).

Seja $Z_*(x, \tau) = Z_*(x)$ a solução crítica CSS do nosso sistema dinâmico e seja $Z(x, \tau)$ uma solução que pertence ao regime intermediário do espaço de fase. Assim, podemos dizer que

$$Z(x, \tau) \cong Z_*(x) + \sum_i C_i(p) e^{\lambda_i \tau} Z_i(x). \quad (3.13)$$

Se, de fato, Z_* é uma solução crítica, então existe um único λ_i real e positivo, que chamamos de λ_0 . Quando $t \rightarrow t_*$, temos que $\tau \rightarrow \infty$ e então, todas as perturbações decrescentes desaparecem.

Seja τ um valor suficientemente pequeno, de modo que garanta a permanência da solução no regime intermediário e suficientemente grande para podermos desconsiderar os modos perturbativos decrescentes. A única perturbação que sobra é a crescente e assim obtemos

$$Z(x, \tau) \cong Z_*(x) + \mu(p - p_*) e^{\lambda_0 \tau} Z_0(x), \quad (3.14)$$

onde μ é o parâmetro de proporcionalidade entre C_0 e $(p - p_*)$, ver seção 3.2.1.

Tomando um valor particular de τ , por exemplo $\tau = \tau_p$, pela equação (3.14), τ_p é definido por

$$\mu(p - p_*) e^{-\lambda_0 \tau_p} \equiv \varepsilon, \quad (3.15)$$

onde ε é uma constante fixa.

Se afirmarmos que t_p é o tempo em que a amplitude de Z_0 é suficientemente pequena, para termos a aproximação linear da solução, mas também, suficientemente grande de modo que, a partir de um incremento positivo qualquer, a solução deixa de estar próxima à solução crítica. Então, ao continuarmos a evolução temporal, estamos extrapolando o *regime intermediário linear* e caminhando para um dos estágios finais possíveis.

A menos de uma constate, τ_p é o tempo que a solução ou a trajetória da evolução de um campo, permanece no *regime intermediário linear* e através da equação (3.15), temos

$$\tau_p = \frac{1}{\lambda_0} \ln |p - p_*| + \text{constante}. \quad (3.16)$$

Para soluções críticas DSS com periodicidade Δ , o número de ecos observados, no *regime intermediário linear*, é

$$N = \frac{\tau_p}{\Delta}. \quad (3.17)$$

Em um τ suficientemente grande, a aproximação linear, equação (3.14), não satisfaz $Z(r, t) \cong Z_*$ e a solução final, formação de um buraco negro ou dispersão do campo, é determinada apenas pelo sinal de $p - p_*$.

O ponto crucial é que não precisamos conhecer a evolução em detalhes, não precisamos saber o que acontece com ε quando a perturbação não é mais linear. É suficiente notar que a solução em $\tau = \tau_p$, depende apenas de r , pois pelas equações (3.14) e (3.15),

$$Z(x, \tau_p) \cong Z_*(x) \pm \varepsilon Z_0(x), \quad (3.18)$$

onde $\pm$ é o sinal de $p - p_*$.

Voltando para as coordenadas originais t e r , e deslocando a origem de t , de maneira que $\tau = \tau_p$, obtemos

$$Z(r, 0) \cong Z_*\left(-\frac{r}{L_p}\right) \pm \varepsilon Z_0\left(-\frac{r}{L_p}\right) \quad \text{e} \quad L_p \equiv l e^{-\tau_p}. \quad (3.19)$$

Os valores intermediários da equação (3.19), em $t = 0$, dependem apenas dos dados iniciais do campo na escala L_p e do sinal de $p - p_*$. As equações do campo não têm uma escala intrínseca e então, segue-se que a solução em $t = 0$ deve ser universal e independente de qualquer escala, assim

$$Z(r, t) = f_{\pm}\left(\frac{r}{L_p}, \frac{t}{L_p}\right) \quad (3.20)$$

onde as duas funções $f_{\pm}$ são universais, [19] e [25].

A forma universal da solução (3.20), implica que, para todo $t > 0$, depois do *regime intermediário linear*, a aproximação por perturbação linear não é mais satisfeita.

Considerando o caso em que a solução final é um buraco negro, a massa do buraco negro formado deve ser proporcional a L_p , das soluções $f_{\pm}$, pois a massa do buraco negro tem dimensão de comprimento. Assim, pelas equações (3.15) e (3.19), concluímos que

$$M_{BH} \propto L_p \propto (p - p_*)^{\frac{1}{\lambda_0}} \quad (3.21)$$

e o expoente crítico universal é determinado por

$$\gamma = \frac{1}{\lambda_0}.$$

Portanto, pela equação (3.21), a lei de potência pode ser escrita como segue

$$M_{BH} = C (p - p_*)^{\gamma}.$$

Note que a lei de potência determina uma escala para a massa de buraco negro.

Para o caso de soluções DSS, Gundlach (1997) [20] prevê uma modificação para a lei de escala, Hod e Piran (1997) [27] verifica essa modificação, através de simulações e determinam que

$$M_{BH}(p - p_*) = (p - p_*)^\gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n (p - p_*)^{in2\pi\gamma/\Delta} \quad (3.22)$$

onde f_n são coeficientes de Fourier de $e^{f(p-p_*)}$ e $\gamma_n = \gamma + in2\pi\gamma/\Delta$ é uma família de expoentes críticos complexos.

O valor da curvatura escalar maximal e de quantidades similares, adquiridas de soluções próximas à solução crítica, também determinam uma escala para a massa do buraco negro, mas com um expoente crítico de -2γ , pois a dimensão da curvatura é $(\text{comprimento})^{-2}$ e proporcional a L_p^{-2} . Essa consideração é relevante, pois muitas vezes é mais fácil calcular a curvatura maximal de uma evolução subcrítica, do que medir a massa do buraco negro em um regime supercrítico, Garfinkle e Duncan (1998) [15].

Tendo em mente as estruturas básicas, que auxiliam na investigação de colapso gravitacional, junto com a Relatividade Geral, podemos partir para uma investigação mais detalhada e completa sobre fenômenos críticos e sobre a evolução temporal de campos escalares.

Capítulo 4

Estrutura Geral do Colapso Gravitacional

Nesse capítulo, detalharemos sobre a auto-similaridade em Relatividade Geral e sobre soluções auto-similares. Vamos expor alguns resultados sobre fluido perfeito e apresentaremos aproximações analíticas para soluções críticas, em particular, de fluido perfeito e campo escalar. Investigaremos soluções críticas de colapso gravitacional, de um campo escalar sem massa, em $2 + 1$ dimensões.

Nossas atenções estarão focalizadas em três aspectos das soluções do tipo 2: a existência de soluções críticas, conexão entre fenômenos críticos e singularidades nuas e possíveis generalizações para os fenômenos críticos.

4.1 Auto-similaridade em Relatividade Geral

No capítulo anterior vimos que a solução crítica de um campo escalar, com simetria esférica, encontrada por Choptuik, [7], é periódica, ou seja, discretamente auto-similar (DSS). A solução crítica de um fluido perfeito, com simetria esférica, é invariante por escala, isto é, continuamente auto-similar (CSS) [12] e [34]. Nessa seção, investigaremos o significado dessas auto-similaridades.

Por simplicidade, primeiro consideramos simetrias contínuas, pois estamos interessados em soluções CSS. Em Física Newtoniana, a solução Z é auto-similar se

$$Z(\mathbf{x}, t) = z\left(\frac{\mathbf{x}}{f(t)}\right), \quad (4.1)$$

onde a função $f(t)$ é obtida apenas de uma análise dimensional, isso é válida

para auto-similaridade do tipo 1.

Por exemplo, a solução Z da equação de difusão, $Z_t = \lambda \Delta Z$, satisfaz a equação (4.1) para $f(t) = \sqrt{\lambda t}$. Em exemplos mais complicados, deve-se usar outros tipo de similaridade.

Em Física Newtoniana, sob coordenadas espaciais e temporal adequadas, a auto-similaridade é um *ansatz*, definido pela equação (4.1), do campo Z .

Esse *ansatz* simplifica as equações do campo eliminando uma das coordenadas. Em particular, se o campo tem simetria esférica, o *ansatz* auto-similar simplifica as equações do campo, que são equações diferenciais parciais de variáveis r e t , em equações diferenciais ordinárias cuja variável independente é $\zeta = r/f(t)$.

Soluções auto-similares são boas aproximações para as soluções gerais em uma região, durante algum estágio da evolução temporal, onde no máximo uma variável é revelante para descrever o sistema.

Em Relatividade Geral, ao criarmos a função $f(t)$, temos uma liberdade de escolha em relação às coordenadas espaciais e temporal. Assim, a noção de auto-similaridade, exemplificada na equação da difusão, não pode ser utilizada. É conveniente que a auto-similaridade, em Relatividade Geral, seja uma homotetia [19].

Uma solução continuamente auto-similar pressupõe a existência de um campo vetorial homotético ξ , definido pela propriedade

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = -2g_{ab}, \quad (4.2)$$

onde a constante -2 é convencional [20], e $\mathcal{L}$ é uma derivada de Lie. Segue-se que

$$\mathcal{L}_\xi R^a_{bcd} = 0 \quad (4.3)$$

e, portanto,

$$\mathcal{L}_\xi G_{ab} = 0. \quad (4.4)$$

O tensor de Riemann e a métrica não precisam satisfazer as equações (4.3) e (4.2), se o tensor de Einstein satisfaz a equação (4.4).

Em coordenadas $x^\mu = (\tau, x^i)$, adaptadas à homotetia, os coeficientes da métrica são definidos por

$$g_{\mu\nu}(\tau, x^i) = l^2 e^{-2\tau} \bar{g}_{\mu\nu}(x^i), \quad (4.5)$$

onde a constante l tem dimensão de comprimento. Nesse sistema de coordenadas, o campo vetorial homotético é

$$\xi \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} \quad . \quad (4.6)$$

Se fizermos a seguinte substituição, $\tau \equiv x^0$ por $t \equiv -le^{-\tau}$, na equação (4.5), a métrica passa a ser

$$ds^2 = \bar{g}_{00}dt^2 + 2t\bar{g}_{0i}dtdx^i + t^2\bar{g}_{ij}dx^i dx^j. \quad (4.7)$$

Substituindo x^i , $i = 1, 2, 3$, por $r^i \equiv (-t)x^i$, na equação (4.7), obtemos

$$ds^2 = (\bar{g}_{00} + 2\bar{g}_{0i}x^i + g_{ij}x^i x^j) dt^2 + 2(\bar{g}_{0i} + \bar{g}_{ij}x^j) dt dr^i + \bar{g}_{ij}dr^i dr^j, \quad (4.8)$$

onde as coordenadas x^i e τ não têm dimensão e as coordenadas r^i e t têm dimensão de comprimento.

Observe que todas as coordenadas, apresentadas na equação (4.8), podem ser do tipo espaço, do tipo tempo ou do tipo luz, pois não colocamos hipóteses adicionais em relação ao sinal dos coeficientes da métrica. Note também que os coeficientes da métrica, em coordenadas r^i e t , dependem apenas de $x^i \equiv r^i/(-t)$.

Para as soluções CSS, com simetria esférica, podemos escrever três tipos de métrica. Da equação (4.5) obtemos a seguinte métrica

$$ds^2 = l^2 e^{-2\tau} (A d\tau^2 + 2B d\tau dx + C dx^2 + F^2 d\Omega^2), \quad (4.9)$$

onde A , B , C , e F são funções de x .

Partindo da equação (4.7), temos a métrica

$$ds^2 = A dt^2 + 2B dt dx + t^2 C dx^2 + t^2 F^2 d\Omega^2, \quad (4.10)$$

onde os coeficientes dependem apenas de x .

E, finalmente, utilizando a equação (4.8) determinamos a métrica

$$ds^2 = (A + 2xB + x^2 C) dt^2 + 2(B + xC) dt dr + C dr^2 + t^2 F^2 d\Omega^2, \quad (4.11)$$

onde os coeficientes dependem apenas de x .

Logo, as equações (4.9), (4.10) e (4.11) são os perfis das soluções CSS, com simetria esférica.

Um espaço-tempo tem auto-similaridade discreta se existir um número real Δ , tal que

$$\widehat{g}_{ab} = e^{-2\Delta} g_{ab}. \quad (4.12)$$

Em termos de coordenadas $x^\mu = (\tau, x^i)$, as soluções auto-similares discretas (DSS) são equivalentes a

$$g_{\mu\nu}(\tau, x^i) = e^{-2\tau} \bar{g}_{\mu\nu}(x^i), \quad (4.13)$$

onde

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\tau, x^i) = \bar{g}_{\mu\nu}(\tau + \Delta, x^i), \quad (4.14)$$

[19] e [20].

A métrica conforme $\bar{g}_{\mu\nu}$, depende de τ apenas de maneira periódica. Note que, para a solução auto-similar discreta não foi preciso introduzir o campo vetorial ξ , definido pela equivalência (4.6) e que, a constante Δ independe das coordenadas [20].

Prosseguindo de maneira análoga, a obtenção das soluções auto-similares contínuas, encontramos as mesmas três métricas, equações (4.9), (4.10) e (4.11). Porém, nesse caso os coeficientes das métricas também dependem de t , de uma maneira periódica.

Além das três métricas obtidas acima, podemos determinar uma outra, através do sistema de coordenadas radial-polar, o mesmo sistema utilizado por Choptuik (1992) [7] em suas simulações numéricas.

Aplicando a mudança de coordenadas, definida pelas equações (3.9), no sistema de coordenadas radial-polar - equação(2.3) - a métrica geral, esfericamente simétrica, torna-se

$$ds^2 = l^2 e^{-2\tau} [-\alpha^2 d\tau^2 + a^2 (dx - x d\tau)^2 + x^2 d\Omega^2]. \quad (4.15)$$

Observe que as superfícies encontradas para qualquer τ fixo, são do tipo espaço e que o vetor tipo tempo $\partial/\partial\tau$, torna-se tipo espaço quando x é muito grande, devido à presença de um desvio.

O espaço-tempo, definido pela equação (4.15), é continuamente auto-similar se a e α dependem apenas de x e é discretamente auto-similar se a e α forem funções periódicas em τ .

Os sistemas de coordenadas adaptados para soluções CSS, equação (4.5) e soluções DSS, equação(4.13), formam uma grande quantidade de sistemas de coordenadas com simetria esférica. No caso CSS, a liberdade de escolha em um sistema ocorre quando fixamos $\tau = 0$ e determinamos as coordenadas espaciais x^i . Em DSS, podemos fixar uma superfície arbitrária em $\tau = 0$ [19].

A solução CSS é um caso particular da solução DSS e para obtermos tal solução CSS, devemos exigir que Δ seja um deslocamento infinitesimal, Gundlach (1997) [20].

Se o nosso interesse é encontrar uma solução auto-similar para um fluido perfeito, com tensor energia-momentum

$$T_{ab} = (p + \rho)U_a U_b + p g_{ab}, \quad (4.16)$$

então, das equações (4.2), (4.4) e das equações de Einstein, temos

$$\mathcal{L}_\xi U_a = U_a, \quad \mathcal{L}_\xi \rho = 2\rho \text{ e } \mathcal{L}_\xi p = 2p. \quad (4.17)$$

Somente os fluidos perfeitos que satisfazem a equação de estado $p = k\rho$, onde k é uma constante, permitem soluções CSS [12]. Posteriormente, consideramos um fluido perfeito que satisfaz tal equação de estado.

Em coordenadas CSS, a direção da quadrivelocidade U_a , do fluido perfeito, depende apenas de x . Por isso, a densidade de energia satisfaz

$$\rho(x, \tau) = e^{2\tau} \bar{\rho}(x). \quad (4.18)$$

Analogamente, se a matéria estudada é um campo escalar sem massa, com o tensor energia-momentum definido pela equação (2.1), obtemos

$$\mathcal{L}_\xi \phi = \kappa, \quad (4.19)$$

onde κ é uma constante.

A solução CSS mais geral é

$$\phi = f(x) + \kappa\tau \quad (4.20)$$

e a solução DSS geral é

$$\phi = f(\tau, x^i) + \kappa\tau, \quad (4.21)$$

onde

$$f(\tau, x^i) = f(\tau + \Delta, x^i).$$

Assim, se a matéria é um fluido perfeito, com tensor energia-momentum definido pela equação (4.16), temos que todas as soluções CSS são representadas pela equação (4.18). Se a matéria for um campo escalar sem massa, todas as soluções CSS estão representadas pela equação (4.20) e as soluções DSS têm o perfil da equação (4.21).

Após esse detalhe sobre as soluções auto-similares, na próxima seção analisaremos as soluções críticas e suas auto-similaridades.

4.2 Cálculo de soluções críticas

Inicialmente, os fenômenos críticos em colapso gravitacional foram descobertos por Choptuik (1992) [7], através de estudos numéricos que simulam a dinâmica de campos escalares.

Dada uma família de soluções, $S[p]$, que possui soluções subcríticas e supercríticas, Choptuik [7] determinou uma solução crítica, a partir de um refinamento dos campos escalares iniciais, de maneira que as soluções subcríticas ficassem cada vez mais próximas da solução crítica.

Uma outra maneira de encontrar, aproximadamente, a solução crítica, advém da construção de um candidato à solução crítica. Para esse candidato, devemos exigir que a solução seja CSS ou DSS, que seja adequadamente regular e também devemos obter seu espectro de perturbação, para verificar que existe apenas um modo de perturbação crescente [19].

Nessa seção, mostraremos como construir um candidato à solução crítica fazendo essas exigências.

A combinação entre soluções CSS e simetria esférica reduz as equações do campo em um sistema de equações diferenciais ordinárias. Nesse ansatz, as exigências de analiticidade no centro e no passado da matéria, antes da formação de singularidade, são suficientes para fornecer as condições de contorno ao sistema de equações diferenciais ordinárias [19].

Todas as soluções críticas CSS são soluções numéricas de um problema de valor de contorno, cujo sistema é formado por equações diferenciais ordinárias. Um fato interessante é que soluções críticas CSS são determinadas analiticamente, em um espaço-tempo de $2 + 1$ dimensão. Falaremos disso com detalhes na seção 4.4.

Os *Ansatz's* são condições acrescentadas na solução, ou nas equações do campo, que visam obter simplificações que mantêm as soluções numéricas consistentes, estáveis e convergentes para uma solução que representa o sistema físico em questão.

O *ansatz de soluções CSS*, com regularidade no centro e no passado do cone de som, de um fluido perfeito, que satisfaz a equação de estado $\rho = 3p$, foi inicialmente utilizado por Evans e Coleman (1994) [12].

Nesse trabalho, esses autores verificaram que na vizinhança do centro do sistema de coordenadas, as soluções se aproximam de $r = 0$ e que para um determinado raio, as soluções dispersam.

O trabalho de Evans e Coleman serviu de base para que diversos autores investigassem o colapso gravitacional de fluidos perfeitos, com outros valores de k na equação de estado $p = k\rho$.

Nielsen e Choptuik (2000) [34] encontraram soluções numéricas para $0 < k \leq 1$, complementando o trabalho de Gundlach [18], que já havia observado possíveis soluções críticas, utilizando argumentos analíticos da Teoria de Perturbação.

Diferentemente do ansatz para soluções CSS, um *ansatz DSS* não reduz as equações do campo escalar em equações diferenciais ordinárias, devido a simetria ser discreta. A vantagem é que podemos construir um ansatz DSS

exato, que incorpore a escala invariante $\Delta \cong 3,44$, como sendo o período da coordenada τ .

A solução crítica do colapso gravitacional de um campo escalar, obtida de um problema de valor de contorno, foi desenvolvida por Gundlach (1997) [20] e Martín-Garcia e Gundlach (2003) [33]. Na segunda referência, os autores analisaram a estrutura global da solução crítica e determinaram uma singularidade nua, através da solução universal de auto-similaridade discreta.

Para termos certeza de que uma solução DSS ou CSS é de fato uma solução crítica, precisamos mostrar que a solução tem apenas um modo crescente de perturbação - ver procedimentos efetuados no capítulo 4 - seção 3.2.

Considerando uma solução crítica DSS (ou CSS) do tipo 2, que tipo de regularidade deve ter essa solução?

Apenas exigir suavidade nos dados iniciais, não é suficiente para que os dados iniciais sejam analíticos. A solução crítica deve ser analítica em todos os pontos que não são influenciados causalmente pela singularidade.

Em particular, o passado do cone de luz, de uma singularidade, não deveria ser menos regular do que um outro ponto qualquer, mas campos de matéria auto-similares, com simetria esférica, em um espaço-tempo plano são singulares do centro da simetria esférica para o passado da singularidade, ou no passado do cone de luz da singularidade.

Pelo fato de que soluções DSS são mais gerais do que soluções CSS, focalizamos as atenções em soluções DSS. Sendo assim, considerando um campo escalar com simetria esférica, a solução geral em um espaço-tempo plano é

$$\phi(r, t) = \frac{1}{r} [f(t+r) - g(t-r)], \quad (4.22)$$

onde $f(z)$ e $g(z)$ são funções de uma variável, $z \in [-\infty, +\infty]$.

A função f descreve ondas que se movem para $r = 0$ e g descreve ondas que se afastam de $r = 0$. Para que $r = 0$ seja regular, para todo t , devemos exigir que $f(z) = g(z)$ em $r = 0$. Fisicamente, essa exigência significa que as ondas, representadas pela função f , mudam de direção em $r = 0$ e depois, se afastam do centro.

Aplicando a mudança de coordenadas

$$x = -\frac{r}{t} \quad \text{e} \quad \tau = -\ln\left(-\frac{t}{l}\right), \quad \text{para} \quad t < 0, \quad (4.23)$$

na equação (4.22), estaremos representando a solução geral em termos de coordenadas auto-similares x e τ . Sendo assim, considerando a mudança de coordenadas (4.23), para $t < -r$, obtemos a solução no passado do ponto $(r, t) = (0, 0)$,

$$\phi(x, \tau) = \frac{1-x}{x} F(\tau - \ln(1-x)) - \frac{1+x}{x} G(\tau - \ln(1+x)), \quad (4.24)$$

onde F e G estão relacionados com f e g , respectivamente.

Para que a equação (4.24) seja continuamente auto-similar, ou seja $\phi = \phi(x)$, as funções F e G devem ser constantes. Se temos interesse em solução com auto-similaridade discreta, devemos exigir periodicidade em τ , de período Δ .

Impondo regularidade no centro $r = 0$, para todo $t < 0$, obtemos $x = 0$ e isso exige que $F = G$ quando $x = 0$. A regularidade no passado do cone de luz, em $t = -r$ para $t < 0$, nos fornece $x = 1$, o que resulta em $F = 0$.

Apenas uma das condições sobre F pode ser imposta, pois soluções DSS (ou CSS) não podem ser regulares ao mesmo tempo, no centro e no passado do cone de luz, quando o espaço-tempo é plano (exceto para $\phi = 0$).

Expandindo esse argumento, a solução pode ser regular apenas em uma das quatro regiões: no passado do centro da singularidade; passado do cone de luz; no futuro do centro da singularidade ou no futuro do cone de luz [20] e [19].

Na presença de gravidade, a estrutura da singularidade muda e, em princípio, as soluções auto-similares podem ser regulares tanto no centro da singularidade, quanto no passado do cone de luz.

Considerando o espaço-tempo definido pela métrica (4.15),

$$ds^2 = l^2 e^{-2\tau} [-\alpha^2 d\tau^2 + a^2 (dx - x d\tau)^2 + x^2 d\Omega^2], \quad (4.25)$$

com x e τ definidos pelas equações (4.23).

Introduzindo como variáveis de primeira ordem da matéria, os campos auxiliares

$$U = r \left(\frac{a}{\alpha} \partial_t \phi - \partial_r \phi \right) \quad (4.26)$$

e

$$V = r \left(\frac{a}{\alpha} \partial_t \phi + \partial_r \phi \right), \quad (4.27)$$

onde V descreve ondas indo em direção de $r = 0$ (ondas colapsando) e U ondas indo em direção contrária de V (ondas dispersando) [33].

As equações do campo (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9), em termos de U e V , podem ser reescritas das seguintes formas

$$\partial_x U = \frac{f[(1-a^2)U + V] - x \partial_\tau U}{x(f+x)} \quad (4.28)$$

e

$$\partial_x V = \frac{f[(1-a^2)V + U] + x\partial_\tau V}{x(f-x)}, \quad (4.29)$$

onde

$$f \equiv \frac{\alpha}{a}.$$

O denominador da equação (4.29) desaparece no passado do cone de luz, quando $f - x = 0$. Logo, podemos usar a liberdade do gauge residual $t \rightarrow t'(t)$, para fixar o passado do cone de luz do no ponto $(r, t) = (0, 0)$, em $r = -t$ (conforme a métrica).

Devido a essas considerações, no passado do cone de luz, temos que $f = 1$, pois quando $r = -t$ a equação (4.23) nos diz que $x = 1$. Além disso, o ponto $x = 1$ é um ponto singular do sistema de equações diferenciais parciais que temos que resolver.

Note que nessa convenção, $\alpha(0, t) \neq 1$, pois

$$r = 0 \Rightarrow x = -\frac{r}{t} = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow \alpha \equiv 0.$$

Por outro lado, Choptuik (1993) [8] e Gundlach (1997) [20], utilizaram a convenção $\alpha(0, t) = 1$.

Similarmente, o denominador da equação (4.26) desaparece no futuro do cone de luz da singularidade, em $f + x = 0$.

Para entender o comportamento da solução no ponto singular $x = 1$, analisamos tal solução no passado do cone de luz. Em um espaço-tempo plano, $f = a = \alpha = 1$, então a equação (4.29) se reduz à

$$\partial_x V = \frac{U + x\partial_\tau V}{x(1-x)}. \quad (4.30)$$

A solução geral, no ponto singular $x = 1$, pode ser escrita como a soma de uma solução regular com uma solução singular [19]. Da equação (4.30), temos que, no limite $x \rightarrow 1^-$,

$$V \cong F[\tau - \ln(1-x)], \quad (4.31)$$

onde $F(z)$ tem período Δ e o símbolo de aproximadamente foi utilizado porque a solução foi calculada apenas considerando os termos que envolve V , desconsiderando o termo U da equação (4.30).

A equação (4.31) é uma solução singular, pois oscila infinitamente quando $x \rightarrow 1^-$ e, em um espaço-tempo plano, a equação (4.31) é uma solução exata, devido a equação (4.24).

Agora, na presença de gravidade, ou seja, em um espaço-tempo curvo, o numerador da equação (4.29) contém um termo adicional, proporcional

a $(1 - a^2)$, devido a curvatura induzida pelo tensor energia-momentum do campo escalar.

Utilizamos esse termo adicional para impor a seguinte condição: o numerador da equação (4.29) desaparece no cone de luz. Assim, encontramos que o denominador e o numerador desaparecem em mesma ordem $\mathcal{O}(x - 1)$, logo a solução torna-se analítica na vizinhança do cone de luz.

A condição para que o numerador da equação (4.29) desapareça em $x = 1$, é dada por

$$(1 - a^2) V + \partial_\tau V = 0. \quad (4.32)$$

Lembrando que pelo gauge, $f = 1$ em $x = 1$, a equação (4.32) é uma EDO de V , definida no passado do cone de luz, com condição de contorno periódica em τ , para U e a dados no passado do cone de luz [33] e [19].

Diante disso, obtemos um problema de valor de contorno misto, elíptico e hiperbólico, de dimensão $(1 + 1)$, no domínio $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq \tau \leq \Delta$, com regularidade em $x = 0$, $x = 1$ e condição de contorno periódica em τ , de período Δ .

Soluções numéricas do problema de valor de contorno foram obtidas, Gundlach (1997) [20], Martín-García e Gundlach (2003) [33], e estão de acordo com a solução crítica encontrada por Choptuik (1993). A prova de existência e unicidade local dessas soluções numéricas é um problema em aberto. Nessa dissertação, fizemos algumas simulações numéricas de colapso gravitacional.

4.3 Aproximações Analíticas

Diversos trabalhos têm intensificado o estudo de soluções CSS, independentemente de colapso gravitacional crítico. Muitos desses estudos focalizam soluções auto-similares, para um fluido perfeito com equação de estado $p = k\rho$, em simetria esférica.

Evans e Coleman (1994) [12] encontraram soluções auto-similares ao simular o colapso de um fluido perfeito, em simetria esférica, com equação de estado $p = \frac{1}{3}\rho$. Eles também obtiveram um ponto crítico, semelhante ao caso estudado por Choptuik [8], que define uma lei de potência para a massa do buraco negro.

Nessa seção mostraremos uma breve história sobre os resultados de fenômenos críticos em fluido perfeito e as aproximações analíticas adotadas para o estudo das soluções auto-similares.

4.3.1 Previsões do estudo sobre fluido perfeito

Logo após a descoberta de fenômenos críticos do tipo 2 em colapso de campo escalar, Evans tentou obter, analiticamente, a solução crítica de um campo escalar sem massa, mas não obteve sucesso e então voltou suas atenções para o colapso de fluido perfeito, Neilsen e Choptuik (2000) [34].

Conscientizados da existência de auto-similaridade contínua, em fluxo de fluidos relativísticos, e de que a auto-similaridade tem características bem definidas, Evans e Coleman (1994) [12] construíram um modelo simplificado de colapso de fluido perfeito e obtiveram uma solução crítica, utilizando o *ansatz* que reduz as equações de Einstein em um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Eles também encontraram um ponto crítico, através do refinamento dos dados iniciais e uma lei de potência com o expoente crítico, $\gamma \cong 0,36$, através de uma análise de perturbação.

Os estudos de Koike, Hara e Adachi (1999) [29] acrescentaram detalhes sobre o uso da análise de perturbação, no trabalho de Evans e Coleman. Eles encontraram apenas um modo de crescimento associado a solução crítica e determinaram uma relação entre o expoente de Lyapunov e o expoente crítico.

Koike obteve para o expoente de Lyapunov, aproximadamente, o valor de 2,81055, o que corresponde ao valor de 0,35582 para o expoente crítico. Assim, Koike, Evans e Coleman obtiveram o mesmo valor para o expoente crítico.

Assumindo que soluções críticas sejam continuamente auto-similares para outros valores de k , na equação de estado $p = k\rho$, Maison (1996) [32] adaptou o *ansatz* de Evans e Coleman, para encontrar soluções CSS quando $0,01 \leq k \leq 0,88$. Maison mostrou que o expoente crítico não é um expoente universal, quando mudamos o valor de k , pois para $k = 0,01$ e $k = 0,88$ ele obteve $\gamma = 0,1143$ e $\gamma = 0,8157$, respectivamente.

Diversos autores tentaram expandir o intervalo de valores para a constante k , mas a dificuldade para tal feito era grande, pois as conclusões sempre diziam que não existem soluções críticas para $k \gtrsim 0,89$.

Neilsen e Choptuik (2000) [34] listaram os principais resultados sobre o *ansatz* do fluido perfeito e, nesse mesmo trabalho, eles mostram que existem soluções para $k \gtrsim 0,89$.

Considerando o *ansatz* CSS, os resultados de Nielsen e Choptuik apresentaram a existência de soluções CSS globalmente regulares para $k \leq 1$ e para $k = 1$. A solução crítica encontrada é CSS e do tipo 2, com expoente crítico $\gamma = 0,96 \pm 0,02$ [34].

4.3.2 Aproximações para o fluido perfeito e o campo escalar

Um dos resultados mais interessantes, nos estudos sobre fluido perfeito, é o aparecimento de singularidades nuas, tanto para fluido perfeito com pressão quanto para fluido perfeito sem pressão.

Ori e Piran (1987) [36] investigaram a auto-similaridade em colapso gravitacional de um fluido perfeito, com equação de estado $p = k\rho$ e simetria esférica, e encontraram uma singularidade nua para $k < 0,0105$.

Esses autores obtiveram um limite Newtoniano para auto-similaridade do fluido perfeito, correspondente ao limite $k \rightarrow 0$.

A solução de Evans e Coleman para o fluido perfeito é a única solução analítica no centro e no passado do cone de som. Ela representa ondas que se movem em direção da origem, do sistema de coordenadas esférico, quando considera-se a vizinhança da origem e ondas que se dispersam nas demais localidades.

Carr e Gundlach (2003) [6] classificaram todas as soluções auto-similares, com simetria esférica, para fluidos perfeitos que têm a equação de estado $p = k\rho$, onde $0 \leq k < 1$ constante. Incluíram também as soluções críticas auto-similares em seus resultados e construíram diagramas conformes, de todas as soluções.

As soluções CSS para campos escalares foram estudadas por Brady (1995) [5], com propósito de entender a formação de singularidades nuas, partindo de dados iniciais regulares. Algumas dessas soluções exigiam regularidades no centro e no passado do cone de luz, mas essas soluções não formavam soluções críticas, pois possuíam muitos modos de crescimento perturbativos.

A família de soluções auto-similares exatas, de um campo escalar sem massa, foi descoberta primeiro por Roberts (1989) [41]. O autor utilizou o sistema de coordenadas duplamente tipo luz

$$ds^2 = -dudv + r^2(u, v) d\Omega^2, \quad (4.33)$$

onde

$$r^2(u, v) = \frac{1}{4} [(1 - p^2) v^2 - 2vu + u^2], \quad (4.34)$$

e encontrou a solução

$$\phi(u, v) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(1 - p)v - u}{(1 + p) - u} \right), \quad (4.35)$$

onde p é um parâmetro constante e o sistema de coordenadas está no sistema de unidades de medidas $G = c = 1$. Dois importantes indicadores de curvatura são o escalar de Ricci

$$R = \frac{p^2 uv}{2r^4} \quad (4.36)$$

e a massa de Hawking

$$m = -\frac{p^2 uv}{8r}. \quad (4.37)$$

O centro $r = 0$ tem duas ramificações: uma sendo $u = (1 + p)v$, definida no passado de $(u, v) = (0, 0)$ e a outra $u = (1 - p)v$, definida no futuro de $(u, v) = (0, 0)$.

Para $0 < p < 1$, as singularidades da curvatura são do tipo tempo, elas têm a massa de Hawking negativa nas regiões do passado e do futuro do cone de luz. Fora dessas regiões, o espaço-tempo pode ser substituído pelo espaço-tempo de Minkowski, sem a necessidade de criar um tensor de energia-momentum.

Em alguns aspectos, o espaço-tempo resultante assemelha-se as soluções críticas de colapso gravitacional, pois o espaço-tempo obtido é auto-similar, possui regularidade em $r = 0$ e no passado do cone de luz da singularidade de curvatura, é contínua no passado do cone de luz e, também, no futuro do cone de luz e no futuro de $r = 0$.

As soluções de Roberts, para $p > 1$, podem ser consideradas buracos negros se forem truncadas adequadamente. Assim, na vizinhança do valor crítico $p = 1$, a massa do buraco negro formado é dada por

$$M \cong (p - 1)^{1/2}.$$

A preocupação em usar as soluções de Robert como aproximações, para as soluções críticas de colapso gravitacional, se deve ao fato de que apenas famílias de soluções auto-similares são consideradas. Além disso, o expoente crítico só aparece para esse caso particular, para $p = 1$.

Essas soluções têm muitos modos crescentes de perturbação, sendo assim, não são soluções críticas no sentido de possuir um único modo crescente de perturbação, Gundlach (2003) [19].

4.4 Espaço-tempo de $2 + 1$ dimensões

A Relatividade Geral, em um espaço-tempo de $(2 + 1)$ dimensões, possui características completamente diferentes das características da Relatividade Geral em um espaço-tempo de $(3 + 1)$ dimensões.

A principal diferença, que trará diversas conseqüências, é que o espaço-tempo de $(2 + 1)$ dimensões é plano em todo lugar que não tem matéria.

As conseqüências são: não existem ondas gravitacionais; buracos negros só podem ser formados na presença de uma constante cosmológica negativa e o espaço-tempo é assintoticamente anti-Sitter, ao invés de ser assintoticamente plano.

Uma constante cosmológica negativa em $(2 + 1)$ dimensões acarreta três importantes efeitos:

- localmente, ela introduz uma escala de comprimento $l = (-\Lambda)^{-1/2}$, nas equações do campo, que muda a estrutura global do espaço-tempo. O infinito tipo luz torna-se uma superfície tipo tempo, isto é, em uma circunferência de centro infinito, distância infinita no centro e de raio $\bar{r}$, um raio tipo luz pode sair para o infinito tipo luz e retornar para o centro da circunferência, enquanto um tempo próprio finito, πl , passa pelo centro da circunferência;
- as únicas condições de contorno, consistentes com as equações de onda sem massa, são as condições de contorno de Dirichlet;
- a presença da constante cosmológica permite formação de buracos negros.

A métrica com simetria circular, estática e constante cosmológica negativa, pode ser escrita como

$$ds^2 = - \left(-M + \frac{\bar{r}^2}{l^2} \right) dt^2 + \left(-M + \frac{\bar{r}^2}{l^2} \right)^{-1} dr^2 + \bar{r}^2 d\theta^2, \quad (4.38)$$

onde a constante M pode assumir os valores $-1 \leq M < \infty$.

Se $M = -1$, o espaço é anti-Sitter, com centro regular. No entanto, se $-1 < M < \infty$, a solução tem um ponto de singularidade nua no centro. As soluções com $M \geq 0$ são buracos negros e o horizonte do buraco negro está em $\bar{r} = l\sqrt{M}$, Gundlach (2003) [19].

Birmingham e Sen (2000) [4], estudaram a formação de buracos negros na colisão de duas partículas pontuais, de mesma massa, em $(2+1)$ dimensões com constante cosmológica negativa. Nesse caso, o buraco negro é calculado de uma maneira fechada, próximo do buraco negro limite e a massa do buraco negro é $M \cong \sqrt{P}$, onde P é uma função de duas variáveis e o expoente crítico é 0,5.

Peleg e Steif (1995) [37] investigaram o colapso de um anel de poeira, em $(2+1)$ dimensões, com constante cosmológica negativa, onde os dados iniciais são bidimensionais. Nesse caso, o expoente crítico também foi encontrado $\gamma = 0,5$.

Em ambos os casos, soluções CSS não foram obtidas e a noção de massa do buraco negro é completamente diferente da interpretação de massa em $(3+1)$ dimensões [19].

O Colapso gravitacional de um campo escalar sem massa, com simetria esférica e constante cosmológica negativa, foi investigado por Pretorius e Choptuik (2000) [40] e independentemente por Husain e Olivier (2001) [28]. A introdução de uma constante cosmológica impôs condições de contorno de Dirichlet para a equação do campo, de maneira que toda matéria deve, eventualmente, cair dentro do buraco negro. Nesse modelo, a massa do buraco negro é a massa assintótica do espaço-tempo e não existe a formação de buraco negro limite.

Se estamos interessados em que o colapso de um campo escalar em $(2+1)$ dimensões seja um modelo simplificado do colapso em $(3+1)$ dimensões, então é conveniente utilizar os dados iniciais com um suporte compacto, para definir o buraco negro limite como sendo a formação de um horizonte aparente, antes da onda escalar ser refletida, e para definir a massa do buraco negro inicial como sendo $M_{AH} = \bar{r}_{AH}^2/l^2$.

Nessa situação, um horizonte aparente é uma superfície, onde o gradiente de $\bar{r}$ é nulo. Assim, teremos semelhança entre os dois colapsos [19].

Se podemos assumir $M \ll 1$, então a constante cosmológica pode ser desconsiderada e a dinâmica será aproximadamente escala-invariante, permitindo, em princípio, fenômenos críticos do tipo 2. Para mais detalhes, ver [28] e [40].

Através de simulações numéricas, Pretorius e Choptuik (2000) [40], encontraram fenômenos críticos em colapso gravitacional de um campo escalar sem massa, com simetria esférica e constante cosmológica em $(2+1)$ dimensões.

Um dos fenômenos críticos encontrados, foi a relação de potência para o horizonte aparente

$$M_{AH} \cong (P - P_*)^{2\gamma},$$

onde $\gamma = 1,20 \pm 0,05$ e P representa a amplitude de um campo escalar inicial.

Após Pretorius e Choptuik (2000) [40] terem encontrado, através de simulação numérica, que a solução crítica é CSS. Garfinkle (2001) [13], encontrou uma solução exata, de acordo com as simulações numéricas de Pretorius e Choptuik.

4.4.1 A solução exata de Garfinkle

Garfinkle (2001) [13], considerou o colapso gravitacional de um campo escalar sem massa, em $2+1$ dimensões, modelado pelas equações de Einstein, com

a constante cosmológica

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = \kappa T_{ab}, \quad (4.39)$$

onde T_{ab} é o tensor energia-momentum do campo escalar, definido pela equação (2.1) e κ uma constante que, assumindo a convenção de Pretorius e Choptuik (2000) [40], temos $\kappa = 4\pi$.

Esse autor utilizou o *método de Christodoulou* para obter um sistema de coordenadas cuja métrica nos fornece uma solução crítica, continuamente auto-similar.

Nesse método, Christodoulou (1986) [9] expõe os procedimentos para construir um sistema de coordenada Bondi. Nesse sistema de coordenadas, a coordenada radial $\bar{r}$ é obtida, de maneira que $2\pi\bar{r}$ seja o comprimento de uma circunferência e que a métrica tenha simetria circular.

A coordenada tempo u é constante para um raio de luz saindo, que pertence a linha de mundo de um observador central, e igual ao tempo próprio do observador.

A coordenada *theta* é definida para que

$$\frac{\partial}{\partial \theta}$$

seja um vetor de Killing, assim a métrica obtida pelo método de Christodoulou tem a seguinte forma

$$ds^2 = -e^{2\nu} du^2 - 2e^{\nu+\lambda} du d\bar{r} + \bar{r}^2 d\theta^2, \quad (4.40)$$

onde ν e λ são funções de u e $\bar{r}$.

Introduzindo os vetores do tipo luz,

$$l^a = e^{-\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \right)^a \quad (4.41)$$

e

$$n^a = e^{-\nu} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^a - \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \right)^a, \quad (4.42)$$

as equações de Einstein, com constante cosmológica, são satisfeitas, sujeitas às condições de que o campo escalar satisfaça a equação de onda e que as seguintes relações sejam satisfeitas,

$$G_{ab} l^a l^b = 4\pi (l^a \nabla_a \phi) \quad (4.43)$$

e

$$G_{ab} l^a n^b = \Lambda. \quad (4.44)$$

Desenvolvendo as equações (4.43) e (4.44), obtemos

$$\frac{1}{\bar{r}} e^{-2\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\lambda + \nu) = 4\pi e^{-2\lambda} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{r}} \right)^2 \quad (4.45)$$

e

$$-\frac{1}{2\bar{r}} e^{-2\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\nu - \lambda) = \Lambda. \quad (4.46)$$

Definindo as quantidades

$$g = e^{\nu+\lambda} \quad \text{e} \quad \bar{g} = e^{\nu-\lambda}$$

e substituindo-as nas equações (4.45) e (4.46), obtemos

$$g = \exp \left[4\pi \int_0^{\bar{r}} \bar{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{r}} \right)^2 d\bar{r} \right] \quad (4.47)$$

e

$$\bar{g} = 1 - 2\Lambda \int_0^{\bar{r}} \bar{r} g d\bar{r}. \quad (4.48)$$

Assim, a equação de onda para ϕ torna-se

$$2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \bar{g} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{r}} \right) = 0. \quad (4.49)$$

Após obter a equação (4.49), Garfinkle (2001) [13] utilizou o ansatz CSS, para resolver as equações do campo e encontrar a solução crítica. Esse ansatz é sugerido pelas simulações numéricas de Pretorius e Choptuik (2000) [40].

Garfinkle define um sistema de coordenadas de maneira que a origem de u seja uma singularidade, assim

$$u = -e^{-T} \quad (4.50)$$

e

$$\bar{r} = e^{-T} R, \quad (4.51)$$

onde R e T são as coordenadas.

Impor o ansatz CSS é exigir que

$$\phi = cT + \psi(R), \quad (4.52)$$

onde c é uma constante.

Esse ansatz requer que a constante cosmológica seja desconsiderada, em outras palavras, que $\bar{g} = 1$. Assim, a equação (4.49) reduz-se à uma equação de onda, em um espaço-tempo plano. Substituindo o ansatz na equação (4.49), obtemos

$$R(1-2R)\psi'' + (1-3R)\psi' - c = 0, \quad (4.53)$$

onde $(\)' \equiv \frac{d}{dR}$.

A solução da equação (4.53) é dada por

$$\psi = -2c \ln \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1-2R} \right) \right]. \quad (4.54)$$

Note que essa solução é regular na origem, assim, o campo escalar é dado por

$$\phi = c \left\{ T - 2 \ln \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1-2R} \right) \right] \right\}. \quad (4.55)$$

Agora, podemos encontrar a função da métrica, g , pela equação (4.47), logo

$$g = \exp \left[4\pi \int_0^{\bar{r}} \bar{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{r}} \right)^2 d\bar{r} \right] = \left[\frac{(1 + \sqrt{1-2R})^2}{4\sqrt{1-2R}} \right]^{8\pi c^2}. \quad (4.56)$$

A métrica da solução crítica deve ser singular em $u = 0$, mas a solução crítica, definida pelas equações (4.55) e (4.56), possui uma singularidade adicional em $R = 1/2$, para qualquer valor de T . Verificaremos se essa singularidade é, de fato, uma singularidade real, ou se é apenas uma singularidade aparente, devido a escolha do sistema de coordenadas.

Consideramos uma nova coordenada, definida por

$$\vartheta = -(u + 2\bar{r}).$$

Assim, a métrica definida pela equações (4.40) e (4.56), adquire a seguinte forma

$$ds^2 = \left[\frac{-u}{16} \left(1 + \sqrt{\frac{\vartheta}{-u}} \right)^4 \right]^{4\pi c^2} \vartheta^{-4\pi c^2} d\vartheta du + \frac{1}{4} (u + \vartheta)^2 d\theta^2. \quad (4.57)$$

Definindo um número q e uma nova coordenada w , onde

$$w^{2q} = \vartheta \quad \text{e} \quad \frac{1}{2q} = 1 - 4\pi c^2,$$

obtemos a seguinte métrica

$$ds^2 = \left[\frac{-u}{16} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{-u}} w^q \right)^4 \right]^{1-(2q)^{-1}} 2q \, dudw + \frac{1}{4} (u + w^{2q})^2 d\theta^2, \quad (4.58)$$

onde a métrica é suave em $w = 0$, quando $q = n$ e $n \in \mathbb{Z}_*^+$, ou seja, q é um número inteiro positivo. Assim, essa métrica é suave para valores de c , dados por

$$c = \pm \sqrt{\frac{1}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{2n} \right)}. \quad (4.59)$$

Note que para $n = 1$, o espaço-tempo é a métrica de Robert-Walker, em $(2 + 1)$ dimensões.

A solução crítica que Garfinkle encontrou, equação (4.58), está de acordo com a solução crítica encontrada pelas simulações numéricas de Pretorius e Choptuik, ao considerar $q = 4$.

Garfinkle e Gundlach (2002) [17], calcularam o expoente crítico para a solução encontrada por Garfinkle, equação (4.58), e encontraram o valor de $\gamma = 8/7 \cong 1,14$, obtendo uma boa aproximação do resultado numérico $\gamma \cong 1,2$, encontrado por Pretorius e Choptuik (2000) [40].

A solução crítica encontrada por Garfinkle é um excelente exemplo de que a formação de superfícies críticas não implica, necessariamente, em formação de buraco negro limite. Essa solução não é uma solução de buraco negro, pois para isso, a constante cosmológica deve ser negativa e Garfinkle considerou $\Lambda = 0$.

Clément e Fabbri (2001) [10] e (2002) [11], generalizaram a solução exata de Garfinkle, para o caso em que a constante cosmológica é negativa. A extensão feita por Clément e Fabbri considera uma nova classe de soluções, as soluções *quasi-CSS*.

Para que uma solução seja *quasi-CSS*, ela deve ser assintoticamente, uma solução CSS na vizinhança do centro do sistema de coordenadas, ou seja, a métrica definida por uma solução *quasi-CSS* deve ser, aproximadamente, igual a métrica definida por uma solução CSS, na vizinhança do centro. Ou ainda, a solução *quasi-CSS* é também uma solução CSS, na vizinhança do centro do sistema de coordenadas.

Clément e Fabbri, [10] e [11], mostraram que as soluções para $\Lambda < 0$ são *quasi-CSS* e verificaram que a solução de Garfinkle, quando $\Lambda = 0$, é uma assíntota para as soluções *quasi-CSS*. A solução de Garfinkle é uma solução crítica, para o problema do colapso gravitacional de um campo escalar sem massa, com simetria esférica, em $(2 + 1)$ dimensões.

4.5 Relatividade Geral como um Sistema Dinâmico

Koike, Hara e Adachi (1999) [29], mostraram que a evolução temporal, próxima à solução crítica, pode ser considerada como um grupo de renormalização, que flui no espaço de dados iniciais. Para equações diferenciais simples, parabólicas ou hiperbólicas, pode-se definir um semi-grupo discreto de renormalização, atuando nas soluções das equações diferenciais. Nesse aspecto, soluções são pontos fixos, são invariantes por alguma escala bem definida e são, frequentemente, pontos críticos.

Nessa seção vimos que, com uma escolha apropriada de *shift* e *lapso*, pode-se transformar a evolução temporal, definida pelas equações do campo, em um sistema dinâmico.

4.5.1 A escolha de funções métricas

Vamos construir o espaço de fase com uma métrica (espacial) de uma variedade tridimensional e com a curvatura extrínseca da decomposição $(3 + 1)$ do espaço-tempo [2].

Nessa seção, todos os dados iniciais são assintoticamente planos, para podermos representar um sistema isolado que possui auto gravidade.

Em uma notação sem muito rigor, as equações que têm a seguinte estrutura

$$\left(\dot{h}, \dot{K}\right) = F(h, K, \alpha, \beta),$$

onde h_{ij} são as componentes da parte espacial da métrica, K_{ij} são as componentes da curvatura extrínseca, α é a função *lapso*, β é a função *shift* e F é um operador diferencial não linear, de segunda ordem, e linear em α e β , são chamadas de equações *ADM*.

A evolução temporal de um sistema dinâmico é definida, em princípio, por equações que têm a forma das equações *ADM*. Essas equações contêm o *shift* e o *lapso* como campos arbitrários fornecidos.

Para obtermos um sistema dinâmico autônomo, precisamos de uma descrição do sistema que define um *shift* e um *lapso*, em conjunto com os dados iniciais.

O *shift* e o *lapso* podem ser pensados como geradores infinitesimais de coordenadas, devido a liberdade de escolha que a Relatividade Geral proporciona.

Por meio de um *shift* conveniente, podemos incorporar uma escala na evolução temporal de um sistema dinâmico. Através de uma escolha adequada

de *lapso*, podemos criar uma escala, definida por um intervalo temporal constante.

Uma escolha de *shift* e de *lapso* que exige que os pontos fixos do espaço de fase sejam espaços-tempo CSS, e que seus limites circulares sejam espaços-tempo DSS, nos fornece uma solução crítica do tipo 2 [19].

Alternativamente, podemos escolher o *shift* e o *lapso* de maneira que os pontos fixos sejam soluções estacionárias e que seus limites circulares sejam periódicos. Assim, as soluções críticas apresentam os fenômenos críticos do tipo 1.

O *shift* e o *lapso* são independentes dos dados iniciais e eles apenas influenciam nas coordenadas da métrica.

Especificando as equações $(\alpha, \beta) = F(h, K)$, podemos substituí-las nas equações *ADM* e, então, adquirir as equações $(\dot{h}, \dot{K}) = F(h, K)$, que definem o sistema dinâmico [19].

Agora, temos condições de fazer a seguinte questão: Dado os dados iniciais, existe uma descrição do *shift* e do *lapso* de maneira que se esses têm informações de uma solução auto-similar, o resultado da evolução temporal é uma métrica, que apresenta auto-similaridade? Ou seja, após a evolução de um campo escalar sem massa, minimamente acoplado, com simetria esférica, a métrica resultante tem a forma da equação (4.13)?

Garfinkle e Gundlach (1999) [16] conseguiram várias combinações de condições para o *shift* e o *lapso*, que deixa o espaço-tempo CSS invariante e coloca o espaço-tempo DSS dentro de um círculo limite.

Assim, a solução encontrada por Choptuik (1992) [7], para a evolução de um campo escalar sem massa, com simetria esférica e minimamente acoplado, possui um círculo limite, pois a solução de Choptuik é DSS. Mesmo sem ainda ter apresentado o significado de soluções DSS, um esboço do círculo limite foi apresentado na figura 3.2.

A principal dificuldade, na escolha de uma combinação de *shift* e *lapso*, está na especificação das equações $(\alpha, \beta) = F(h, K)$. Isso se deve às condições de contorno adequadas, necessárias para fixar o espaço-tempo CSS em um ponto fixo (ou o espaço-tempo DSS em um círculo limite).

Assim, uma boa escolha de *shift* e *lapso* não é suficiente para garantir que a solução seja auto-similar.

4.5.2 As variáveis do espaço de fase

Para obtermos dados iniciais que, após uma evolução temporal, a solução seja auto-similar, além de uma boa escolha de *shift* e *lapso*, é preciso uma escolha adequada de variáveis. Essas variáveis especificam as componentes

$Z(x^i)$, do vetor $Z(x)$, e esse vetor é justamente, o vetor que determina o estágio do sistema dinâmico em um tempo fixo.

Dado um espaço-tempo estático, ou periódico, é usual escolhermos h e K para serem as variáveis do espaço de fase.

Os dados de Cauchy, de um campo gravitacional, são as componentes da parte espacial da métrica, se considerarmos que $h_{ij}(x^k)$ e $K_{ij}(x^k)$ são induzidos pelos dados de Cauchy, em uma parte do espaço-tempo definido pelo sistema de coordenadas da equação (4.5),

$$g_{\mu\nu}(\tau, x^i) = l^2 e^{-2\tau} \bar{g}_{\mu\nu}(x^i),$$

obtemos

$$h_{ij}(x, \tau) = l^2 e^{-2\tau} \bar{h}_{ij}(x) \quad (4.60)$$

e

$$K_{ij}(x, \tau) = l e^{-\tau} \bar{K}_{ij}(x), \quad (4.61)$$

onde $i, j, k = 1, 2, 3$ e as variáveis h_{ij} e K_{ij} são determinadas pelo Momentum e pela Hamiltoniana do problema [19].

Frequentemente, designa-se dimensões para essas variáveis, as coordenadas x^i e τ são adimensionais, $l e^{-\tau}$ tem dimensão de comprimento e $g_{\mu\nu}$ tem a dimensão de l^2 . Dessa definição, segue que h_{ij} e K_{ij} tem dimensão de l^2 e de l , respectivamente e $\bar{h}_{ij}$ e $\bar{K}_{ij}$ são adimensionais.

Note que é preciso a variável τ para construir as variáveis físicas, a partir das variáveis destacadas por barra.

Uma dificuldade em formular a Relatividade Geral, como um sistema dinâmico, é que uma vez determinado o *shift* e o *lapso*, o espaço-tempo não necessariamente corresponde a uma única trajetória, no espaço de fase. E também, a solução crítica pode não corresponder a um ponto crítico.

4.6 Fenômenos Críticos e Singularidades Nuas

Nessa seção discutiremos a singularidade, geralmente formada quando obtemos uma solução crítica.

Sob várias circunstâncias, as soluções das equações de Einstein resultam em formação de singularidades. A conjectura de que singularidades de colapso gravitacional sempre estão escondidas dentro de um buraco negro, nos mostra que não há formação de singularidades nuas, Wald (1997) [44]. Essa conjectura é conhecida por *censura cósmica fraca* e nas últimas décadas sempre esteve em discussão.

Os resultados de Choptuik [7] e [8], sobre o colapso gravitacional de um campo escalar sem massa, mostraram que qualquer formulação de uma *censura cósmica* deve ser restrita aos dados iniciais suaves e aos tipos de matéria bem comportada. Outra consequência é que a ocorrência de singularidades não é genérica.

Uma singularidade é dita *singularidade nua*, se for uma singularidade de curvatura que, de alguma maneira, um observador distante possa obter informações da mesma. Veremos, ao longo dessa seção, que o espaço-tempo crítico possui singularidade nua.

Choptuik e outros autores sugeriram que, em simetria esférica, o espaço-tempo crítico pode ser aproximado por um refinamento, nos dados iniciais, de uma família caracterizada por um parâmetro genérico e, dessa maneira, obter o buraco negro limite.

Em termos de sistema dinâmico, o espaço-tempo crítico é a superfície que separa as dinâmicas de campos escalares que colapsam, das que dispersam.

Considerando um dos sistemas estudado por Choptuik (1993) [8] e apresentado no capítulo 2, o colapso gravitacional de um campo escalar sem massa, com simetria esférica e dados iniciais suaves, podemos desenvolver o seguinte raciocínio, que foi feito por Choptuik, através de simulações numéricas.

Na medida em que o refinamento aplicado aos dados iniciais é melhorado, surge uma região com alta curvatura que, após o término do refinamento, teríamos uma região com curvatura infinita, se nessa mesma região o buraco negro limite se formar, consequentemente temos um buraco negro limite de singularidade nua e curvatura infinita. Portanto, uma singularidade nua formou-se a partir de dados iniciais suaves.

O raciocínio do refinamento foi estendido para outros tipos de matéria, sempre acompanhado das simulações numéricas. Assim, para se aproximar do espaço-tempo crítico, uma boa estratégia é fazer o refinamento dos dados iniciais, a partir dos dados iniciais suaves (verificaremos essa afirmação nas simulações numéricas do capítulo 6).

Em matérias do tipo campo escalar sem massa e fluido perfeito, com simetria esférica, o espaço-tempo crítico pode ser obtido, através da teoria de perturbação, quando se tem um candidato à solução crítica (capítulo 3 - seção 3.2).

A estratégia do refinamento parece indicar que, fenômenos críticos são independentes do modelo de matéria em um regime dinâmico, onde as equações do movimento possui, aproximadamente, uma escala invariante.

Após a obtenção de uma solução crítica, por um dos métodos descritos acima, passaremos a investigar a singularidade de uma solução crítica DSS.

A métrica geral de uma solução crítica DSS é dada pelas equações (4.12)

e (4.13),

$$g_{\mu\nu}(\tau, x^i) = e^{-2\tau} \bar{g}_{\mu\nu}(\tau, x^i) \quad \text{onde,} \quad \bar{g}_{\mu\nu}(\tau, x^i) = \bar{g}_{\mu\nu}(\tau + \Delta, x^i).$$

Uma maneira de indentificarmos a singularidade é observarmos a curvatura, pois se, de alguma maneira, a curvatura estiver tendendo ao infinito, teremos uma singularidade. A curvatura da métrica geral, de uma solução DSS, é dada por

$$R = l^{-2} e^{2\tau} \bar{R}(x, \tau),$$

onde o escalar de Ricci $\bar{R}$ é periódico em τ , de período Δ .

As simulações numéricas de Choptuik, Evans e Coleman consideram a métrica radial-polar, equação (2.3), ajustada de maneira que a singularidade ocorra em $t = 0$.

Baseado no fato de que a coordenada α , da equação (2.3), é uma função crescente, quando temos $r \rightarrow \infty$, para todo t fixo (α cresce a uma potência pequena de r). Evans e Coleman (1994) [12] conjecturaram que a singularidade é coberta por um desvio para o vermelho, com magnitude infinita.

Isso está relacionado com a coordenada a , pois

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(r, t) = a_\infty > 1, \quad (4.62)$$

para todo t fixo, onde a_∞ é uma constante.

Podemos verificar a equação (4.62) diretamente da equação (2.9) e concluir que o espaço-tempo não é assintoticamente plano, mas é assintoticamente cônico no infinito tipo espaço e com massa de Hawking proporcional a r .

Hamadé e Stewart (1996) [22] utilizaram a estrutura de espaço-tempo, que pertence a vizinhança do espaço-tempo crítico de uma família de campos escalares, para analisar o futuro do cone de luz da singularidade.

Os autores encontraram evidência de que o futuro do cone de luz não é uma singularidade de curvatura. Isso foi confirmado por Gundlach (1997) [20], ao construir a solução crítica de Choptuik como um problema de valor de contorno.

Aparentemente, todo espaço-tempo crítico obtido de um sistema com simetria esférica, tem a mesma estrutura de singularidade, independentemente do tipo de matéria em estudo, Gundlach (2003) [19].

Uma vez feita a análise sobre a estrutura da singularidade, conheceremos a estrutura do espaço-tempo crítico.

Na seção 4.2, discutimos que a solução crítica é regular no centro e no passado do cone de luz da singularidade, mas ainda não sabemos como é o futuro do cone de luz, ou seja, não conhecemos o horizonte de Cauchy do espaço-tempo crítico.

Hirschmann e Eardley (1995) [24] consideraram a solução de um campo escalar complexo e encontraram um candidato à solução crítica para o futuro do cone de luz.

Para a obtenção da solução, os autores elaboraram um problema de valor de contorno, para uma equação diferencial ordinária não linear. O ansatz considerado foi

$$\phi(x, \tau) = f(x) e^{i\omega\tau}, \quad a = a(x) \quad \text{e} \quad \alpha = \alpha(x),$$

onde ϕ é o campo escalar e ω uma constante real. A solução crítica obtida foi CSS e regular nas mesmas regiões da solução, para o campo escalar real.

A evolução temporal foi continuada considerando uma nova coordenada auto-similar x , através de uma coordenada singular em $t = 0$, que avança para o futuro do cone de luz. O ansatz reduz as equações de campo para um sistema de equações diferenciais ordinárias, e o passado e o futuro do cone de luz, respectivamente em $x = x_1$ e $x = x_2$, são “pontos” singulares desse sistema.

Esses pontos resultam em uma solução regular e uma solução singular, ambas independentes uma da outra. O problema de valor de contorno que, originalmente, definiu a solução crítica, corresponde à solução singular em $x = x_1$ e o ponto $x = x_2$ é o limite da evolução temporal no futuro do cone de luz.

Hirschmann e Eardley [24] encontraram uma solução mista, de solução regular e de solução singular, que é aproximadamente expressa por

$$f(x) \cong f_{reg}(x) + (x_2 - x)^{(i\omega+1)(1+\varepsilon)} f_{sing}(x),$$

onde ε é uma constante positiva pequena e f_{reg} e f_{sing} são regulares em $x = x_2$.

O mesmo efeito ocorre quando a solução do campo escalar real, obtida por Choptuik, é estendida para o futuro do cone de luz, Gundlach (1997) [20]. Considerando a equação de onda, (4.29), no futuro do cone de luz $f + x = 0$. Martín-García e Gundlach (2003) [33], mostraram que a solução próxima ao futuro do cone de luz é dada por,

$$U(\tau, x) = U_0(\tau) + |y|^\varepsilon \widehat{U}_\varepsilon(\tau) \widehat{U}_\varepsilon(\widehat{\tau}) + y U_1(\tau) + \mathcal{O}(|y|^{1+\varepsilon}), \quad (4.63)$$

$$V(\tau, x) = V_0 + y V_1(\tau) + \mathcal{O}(|y|^{1+\varepsilon}) \quad (4.64)$$

e

$$a(\tau, x) = a_0 + ya_1(\tau) + \mathcal{O}(|y|^{1+\varepsilon}), \quad (4.65)$$

onde nas equações (4.63), (4.64) e (4.65), temos

$$y \equiv x - x_f, \hat{\tau} \equiv \tau + H(\tau) - (1 - \varepsilon) \ln|y| \quad \text{e} \quad \varepsilon = \frac{2\overline{V}_0^2}{1 - 2\overline{V}_0^2},$$

onde todas as funções de τ e $\bar{\tau}$ são conhecidas e periódicas, ε é uma média quadrática e, $x = x_f$ são os pontos onde está definido o futuro do cone de luz.

A solução crítica pode ser estendida para o futuro do cone de luz, porém não é feita de maneira única. Fisicamente, podemos pensar na não unicidade como informações que surgem da singularidade e que se propagam ao longo do horizonte de Cauchy. Localmente, podemos continuar a solução através do horizonte de Cauchy, para um espaço-tempo quase plano e auto-similar. Entretanto, não é claro que tal continuação preserve o centro regular em $r = 0$ para $t > 0$.

Uma descrição completa da estrutura de espaços-tempos CSS, com simetria esférica, é apresentado por Carr e Gundlach (2003) [6]. O futuro do cone de luz, para soluções críticas DSS, é descrita por Martin-García e Gundlach (2003) [33] e inclui uma continuação com um centro regular.

Uma região de uma solução de colapso, que iniciou de dados iniciais regulares e assintoticamente planos, pode ser modelada para criar uma solução crítica, a partir de dados iniciais caracterizados por um parâmetro qualquer, e através de um refinamento desses dados, encontramos o buraco negro limite. Nessa situação descrita, a região considerada pode incluir todos os valores de x , que passa de um centro regular para o horizonte de Cauchy.

Entender a estrutura do horizonte de Cauchy é de grande interesse para os físicos, porém a possível continuação do espaço-tempo ainda é uma curiosidade matemática.

Uma questão de interesse é, o que sai da singularidade nua ? Ou seja, o que é evidenciado da singularidade nua ? Essa resposta não é respondida pela Relatividade Geral Clássica e depende de efeitos de Gravitação Quântica [19].

A seguir, apresentaremos a descrição de uma solução de colapso gravitacional, próxima à solução crítica de um campo escalar sem massa e com simetria esférica. Por simplicidade, consideraremos as coordenadas usuais r e t , de um espaço-tempo plano, com simetria esférica.

Seja t o tempo próprio de um observador, localizado no centro da origem do sistema de coordenadas, e seja $t = 0$ o tempo onde ocorre a singularidade da solução crítica. Considerando uma solução pertencente a vizinhança da

solução crítica, a amplitude do único modo crescente perturbativo é proporcional a

$$(p - p_*) (-t)^\lambda.$$

A perturbação causa um desvio na solução crítica para

$$t - t_* \cong - (p - p_*)^\lambda,$$

onde o futuro do cone de luz, de $(r, t) = (r, t)$, é dado por $r = t - t_*$. Esse futuro é uma fronteira para a região, onde a solução é uma boa aproximação para a solução crítica.

A outra fronteira para essa região, depende dos dados iniciais e fracamente de $p - p_*$. Podemos aproximá-la por um cone tipo luz, definido por $r = r_0 - t$, onde $r_0 > 0$. Assim, x atinge o máximo em

$$r = \frac{(r_0 + t_*)}{2} \quad \text{e} \quad t = \frac{(r_0 - t_*)}{2}.$$

Para

$$t_* \cong |x - 1|$$

e

$$t_* \cong (p - p_*)^\lambda,$$

podemos ver que o espaço-tempo crítico é fechado para o horizonte de Cauchy, definido por $x = 1$ [19].

Em resumo, o espaço-tempo crítico, que é aproximado pelo refinamento dos dados iniciais suaves, tem um ponto de singularidade de curvatura, que é visível no infinito pelo desvio para o vermelho. O horizonte de Cauchy é suavemente singular, no sentido de que a curvatura é finita, mas não é diferenciável e a continuação do espaço-tempo não é obtida de maneira única. Dessa continuação, a curvatura pode ser um ponto isolado na base do horizonte de Cauchy, que resulta numa singularidade do tipo luz ou do tipo tempo.

A não unicidade, não é problema para o horizonte de Cauchy, pois sempre é possível fazer a extensão do espaço-tempo crítico. Nesse sentido, sempre existe uma singularidade nua da solução crítica, que serve de contra-exemplo quando tentamos fazer uma formulação de *censura cósmica*, com a hipótese de que os dados iniciais suaves não formam singularidades nuas.

Ao longo desse texto, discutimos sobre a singularidade da solução crítica, suas características e fenômenos que são observados, devido a solução crítica. A priori, soluções auto-similares e regulares podem existir, com a mesma característica da solução crítica. Vimos também que dados iniciais podem formar singularidades nuas. Isso acontece, por exemplo, no colapso gravitacional de fluido perfeito, com uma equação de estado $p = k\rho$ para $k < 0.0105$, Ori e Piran (1987) [36], Neilsen e Choptuik (2000) [34].

4.7 Fenômenos Críticos são gerais ?

Uma questão fundamental sobre fenômenos críticos é se eles são gerais, ou então saber até que ponto esses fenômenos são gerais. Também podemos elaborar essa questão da seguinte maneira: fenômenos críticos sempre ocorrem quando obtemos um buraco negro limite, através de um refinamento dos dados iniciais ? A resposta ainda está em aberto.

Nos capítulos anteriores, apresentamos os resultados obtidos para campo escalar sem massa e para fluido perfeito, com simetria esférica, limitando o estudo de fenômenos críticos, em colapso gravitacional, a esses tipos de matéria e a simetria esférica.

Um caminho para a generalização é considerar esse mesmo tipo de matéria, discutida até agora, com um tipo de simetria diferente. Abrahams e Evans (1993) [1] consideraram o colapso de um campo escalar, com simetria em torno de um dos eixos do sistema de coordenadas (simetria axisymetry), minimamente acoplado ao campo gravitacional. Com algumas restrições, os autores obtiveram a relação de massa para buracos negros, com expoente crítico $\gamma \cong 0,36$ e também, com algumas restrições eles obtiveram o fenômeno de Eco.

Um outro caminho para a generalização é investigar a família de dados iniciais com momentum angular, carga e massa, pois sabemos da existência de buracos negros com essas propriedades. Martín-García e Gundlach (2003) [21] consideraram uma eletrodinâmica escalar sem massa, com simetria esférica, onde o estudo de Choptuik para o campo escalar sem massa é um caso particular desse estudo.

Eles obtiveram uma lei de potência para o buraco negro carregado,

$$Q \cong (p - p_*)^\delta,$$

onde Q é a carga do buraco negro e $\delta \cong 0,88$. Hod e Piran (1997) [26] verificaram que, ao considerar a família de dados iniciais, sem carga, e fazer a simulação numérica de Martín e Gundlach, os resultados de Choptuik são recuperados.

Vimos na seção 4.4 que Garfinkle (2001) [13] estudou o colapso de um campo escalar sem massa, minimamente acoplado ao campo gravitacional, com simetria esférica e constante cosmológica $\Lambda = 0$, em um espaço-tempo de $(2 + 1)$ dimensões. Garfinkle também verificou fenômenos críticos, Clément e Fabbri (2001) [10] e (2002) [11] generalizaram o trabalho de Garfinkle para $\Lambda < 0$.

D. Garfinkle, Cutler e Duncan [14] (1999), também estudaram o mesmo tipo de matéria em um espaço-tempo de $5 + 1$ dimensões e obtiveram fenômenos críticos.

Peleg e Steif (1995) [37] investigaram o colapso de um anél de poeira, em (2+1) dimensões, com constante cosmológica negativa, onde os dados iniciais são bidimensionais. Nesse caso, o expoente crítico também foi encontrado, sendo $\gamma = 0,5$.

Birmingham e Sen (2000) [4] estudaram a formação de buracos negros na colisão de duas partículas pontuais, de mesma massa, em (2+1) dimensões, com constante cosmológica negativa. Nesse caso, o buraco negro é calculado de uma maneira fechada, próximo do buraco negro limite. A massa do buraco negro é $M \cong \sqrt{P}$, onde P é uma função de duas variáveis e o expoente crítico é 0,5.

Fenômenos críticos não são particularidades do colapso gravitacional, inclusive, conhecia-se fenômenos semelhantes em Mecânica Estatística. Transições de fase em Termodinâmica são pontos limites, em um espaço de forças externas em que um observável macroscópico, ou seus derivados, passam por algum tipo de descontinuidade.

Consideremos, por exemplo, a transição de fase líquido-gás de um fluido, onde a mudança de fase ocorre na curva $p = p_b(T)$, ou seja, a ebulição ocorre nesta curva. Quando a densidade do fluido atravessa essa curva, a mudança de densidade é descontínua; com o acréscimo da temperatura, a diferença entre a densidade do fluido em estado líquido e a densidade do fluido em estado gasoso diminui. Se continuarmos aumentando a temperatura, chegaremos em um ponto crítico (p_*, T_*) , onde a curva de ebulição desaparece e os fluidos, de estados físicos diferentes, passam a ter mesma densidade. E assim, podemos mudar o estado físico do fluido, sem precisar passar por uma ebulição.

Para esse caso, uma relação de potência é determinada, em função da temperatura. Ao longo da curva de ebulição, a densidade desaparece descontinuamente, através da seguinte relação:

$$\rho_l - \rho_g \cong (T_* - T)^\gamma,$$

onde ρ_l é a densidade do fluido em estado líquido e ρ_g é a densidade do fluido em estado gasoso.

A variável $\rho_l - \rho_g$ é conhecida como parâmetro de ordem. Quando esses tipos de variáveis mudam descontinuamente, dizemos que a transição de fase é do tipo 1, ou de primeira ordem, já se essas variáveis tenderem a zero, continuamente, a transição de fase é dita do tipo 2, ou de segunda ordem.

Em analogia aos tipos de transições de fase, que ocorrem na mecânica estatística, temos os termos para os fenômenos críticos de colapso gravitacional. Assim, os fenômenos críticos do tipo 1, são os fenômenos que aparecem quando a transição de fase, entre campos que dispersam e campos que for-

um buraco negro, é descontínua. Já os fenômenos críticos do tipo 2 ocorrem quando a transição é contínua.

Recomenda-se o trabalho de Gundlach (2003) [19], para mais exemplos de fenômenos críticos em colapso gravitacional. Exemplos em mecânica estatística encontram-se nos livros do Landau e Lifschitz (1980), [30] e [31].

Cada vez mais, os trabalhos numéricos continuam tentando estabelecer a generalidade dos fenômenos críticos em colapso gravitacional. As técnicas computacionais cada vez mais tem auxiliado nessa investigação. Certamente, a Relatividade Numérica ganhou muito espaço nas discussões acadêmicas, pois devido as grandes dificuldades na obtenção de soluções analíticas, das equações de Einstein, alguns fenômenos foram observados, apenas em soluções numéricas.

Os próximos capítulos destinamos à elaboração de um algoritmo, para efetuar a evolução temporal do campo escalar especificado no capítulo 3.

Capítulo 5

Métodos Numéricos

Nesse capítulo e no próximo investigaremos o estágio final do colapso gravitacional de um campo escalar sem massa, minimamente acoplado ao campo gravitacional e com simetria esférica, através de simulações numéricas.

No capítulo 3, apresentamos as equações do campo para esse tipo de matéria e ao longo desse texto, estudamos as características e os fenômenos que surgem em colapso gravitacional.

Para a simulação numérica utilizamos o MatLab com o intuito de desenvolver um algoritmo simples e confiável, que descreva o colapso de um campo escalar sem massa. As vantagens de implementar no MatLab são: rapidez na escrita do código fonte; funções otimizadas; facilidade de lidar com vetores e matrizes; saídas de dados por gráficos pré-formatados e as manipulações de gráficos e tipos de saída do algoritmo e funções voltadas para análise de performance.

Com essas vantagens, antes de desenvolver um algoritmo em uma linguagem de programação de auto desempenho, como por exemplo Fortran, o MatLab pode servir para testar a estrutura do algoritmo, se necessário fazer as devidas correções e assim tornar o algoritmo confiável para o desenvolvimento.

Nesse capítulo encontram-se os métodos utilizados e os procedimentos realizados, para a elaboração do algoritmo. No final do capítulo, um protótipo do algoritmo é apresentado e sua otimização será feita no capítulo 6.

5.1 Técnicas para a Implementação Numérica

Nessa seção, apresentaremos as técnicas utilizadas para a implementação do código fonte, que efetua a simulação numérica da evolução temporal de um campo escalar sem massa, com simetria esférica.

5.1.1 O Método de Linhas

Considerando a seguinte equação diferencial parcial:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{x}_i < \mathbf{x} < \mathbf{x}_f, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

onde

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

é um vetor de variáveis dependentes, $\mathbf{x}$ é um vetor que depende das coordenadas espaciais, f é um operador diferencial,

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}, \dots)$$

e t é a variável temporal.

O *método de linhas* é uma técnica numérica de resolver equações diferenciais parciais, que são representadas pela equação (5.1). O método de linhas, aplicado a uma equação diferencial análoga a equação (5.1), têm dois passos:

- o primeiro passo é estabelecer as aproximações para as derivadas espaciais, por exemplo, através de *diferenças finitas*, ou *elementos finitos*.
- o segundo passo consiste em resolver um sistema semi-discreto de equações diferenciais ordinárias em relação a variável temporal t .

A escolha adequada de um algoritmo para resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias é fundamental para o método de linhas, pois o método de linhas carregará as características do algoritmo escolhido para a resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias.

Quando resolvemos esse sistema de equações diferenciais ordinárias, estamos fazendo uma evolução temporal, ou seja, estamos dando um passo temporal e encontrando a solução da equação diferencial parcial, em um intervalo $[t_i, t_f]$. Esse Δt não pode ser qualquer, ele deve estar restrito a uma condição de estabilidade para não termos problemas com instabilidade na implementação numérica.

Consideremos um problema representado pela equação (5.1), cujas variáveis independentes são x e t . A *estabilidade* de um método de integração temporal explícito é proporcional ao inverso de alguma potência do espaçamento Δx da malha espacial,

$$E \propto \left(\frac{1}{\Delta x} \right)^n.$$

Frequentemente, a potência é igual a ordem da derivada espacial de maior grau [43].

Para fazer a evolução temporal podemos, por exemplo, utilizar o método Runge-Kutta de quarta ordem. Em particular, utilizamos esse método para a implementação numérica das equações do campo escalar obtidas na seção 2.1.

Na implementação numérica utilizamos o método de linhas adaptativo, com refinamento, pois as simulações numéricas de colapso gravitacional exigem alto grau de precisão.

5.1.2 O Método de linhas adaptativo, com refinamento

Os *algoritmos adaptativos* são métodos computacionais que alteram as posições dos pontos de uma malha espacial, inicialmente dada, a medida que a evolução temporal é realizada. Esse método tem a intenção de concentrar os pontos da malha em pontos críticos, para aumentar a precisão da solução numérica nessas regiões.

As principais vantagens de utilizar uma malha adaptativa são:

- os pontos da malha ficam mais concentrados em regiões que necessitam de mais pontos, para manter a precisão do resultado. Essas regiões são as vizinhanças de pontos críticos (de pontos onde a derivada espacial se anula).
- os algoritmos adaptativos e o algoritmo da equação diferencial são independentes, sendo assim, sua implementação é compatível com diversas outras técnicas, como por exemplo, o método de refinamento de malha.

As principais desvantagens são:

- a quantidade de pontos da malha espacial é fornecida pela malha espacial inicial e mantida fixa por toda a evolução temporal. Dependendo do problema, essa quantidade de pontos pode não ser suficiente para se ter uma precisão exigida ou, por outro lado, a quantidade de pontos é desnecessária de maneira que, pode-se retirar pontos e ainda ter a precisão exigida.
- a necessidade de uma interpolação para transferir os dados de uma malha do passo temporal anterior, para a malha espacial do atual passo temporal.

Os *algoritmos de refinamentos* são métodos que mudam a quantidade de pontos da malha inicial, a medida que a evolução temporal é realizada (conferir figura 5.1).

Esse método acrescenta pontos em regiões próximas de pontos críticos e removem os pontos de regiões suaves, mantendo a solução numérica dentro de uma precisão exigida.

A principal desvantagem do método de refinamento é o ajuste da malha quando se retiram pontos de maneira abrupta, a ponto de diminuir a eficiência do método.

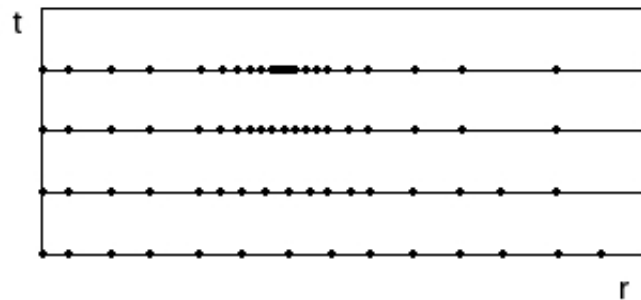


Figura 5.1 - Esboço de uma malha que contém um método de refinamento. A medida que o tempo passa, alguns pontos são acrescentados e outros retirados, mantendo a precisão exigida pelo algoritmo.

Uma maneira de minimizar as desvantagens do método adaptativo e do método de refinamento é combiná-los na implementação numérica. Mesmo com esses dois métodos unidos, a eficiência da implementação pode ser afetada se o algoritmo obtiver um espaçamento largo para o novo passo temporal, em relação ao espaçamento entre os pontos da malha espacial [43].

A precisão das derivadas espaciais dependem dos espaços entre os pontos da malha espacial, assim temos a necessidade de que a malha seja regular. Os métodos *regularizadores* limitam a distribuição dos pontos na malha e a principal desvantagem é que esses algoritmos são complexos e complicados.

Incorporando algum método adaptativo e um método de refinamento, no método de linhas, temos o método de linhas adaptativo com refinamento e podemos resumi-lo nos seguintes quatro passos:

- determinar as aproximações para as derivadas espaciais em uma malha fixa e não uniforme.
- resolver as equações diferenciais ordinárias semi discretas, através de uma integração em relação a variável temporal.
- fazer a adaptação e o refinamento dos pontos da malha espacial.

- interpolar a solução para obter as novas condições iniciais.

No primeiro passo, focalizamos nossa atenção no *método de diferenças finita* para as aproximações das derivadas espaciais. Note que ainda não especificamos sobre as *condições de contorno*, mas é fundamental ressaltar que daremos um tratamento especial quando apresentarmos o método de linhas aplicado nas equações do campo.

O segundo passo é a evolução temporal, que é feita através da integração temporal, limitada a um intervalo de integração que mantém o método estável. Utilizamos o *método Runge-Kutta* para efetuar isso.

O terceiro passo refere-se ao refinamento e a adaptação da malha espacial. Saucez, Wouwer Schiesser (2001) [43] apresentam alguns algoritmos desenvolvidos para fazer esses procedimentos, como por exemplo a subrotina AGEREG, que é um algoritmo que tem o cuidado de deixar a malha regular.

E no quarto passo, a solução encontrada após o terceiro passo é interpolada, para determinar as condições iniciais para a nova malha espacial. Em particular, fazemos a interpolação usando *spline cúbica*.

Esses quatro procedimentos encontram-se na referência Saucez, Wouwer Schiesser (2001) [43], onde estão expostos diversas subrotinas necessárias para realizar os procedimentos do método de linhas.

Utilizamos a estrutura do método de linhas adaptativo com refinamento, para desenvolver um algoritmo para as equações de campo em estudo.

5.2 Implementação numérica do campo escalar

Nessa seção, aplicaremos o método de linhas adaptativo, com refinamento, para a elaboração de um algoritmo para as equações de campo. Descreveremos os procedimentos efetuados para se ter um algoritmo confiável e estável.

5.2.1 A estrutura do algoritmo

Baseado nos quatro passos do método de linhas adaptativo com refinamento, apresentado na seção anterior, construímos os seguintes passos que representam a implementação numérica para as equações do campo em estudo:

1. Determinar as condições iniciais para a evolução temporal
2. Evolução temporal
 - (a) Obter o tamanho do passo temporal
 - (b) Efetuar a evolução temporal dos campos auxiliares

3. Preparar as novas condições iniciais

No primeiro passo, precisamos resolver as equações diferenciais ordinárias (2.8) e (2.9),

$$\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{a'}{a} + \frac{1-a^2}{r} = 0,$$

onde $\Phi(r, t_i) = \Phi_0(r)$ e $\Pi(r, t_i) = \Pi_0(r)$, e

$$\frac{a'}{a} + \frac{a^2 - 1}{2r} - 2\pi r (\Pi^2 + \Phi^2) = 0,$$

que aparece nas equações do campo, para encontrarmos os coeficientes α e a , da métrica definida pela equação (2.3). Para isso, utilizamos o *método Runge-Kutta de quarta ordem* adaptativo, com refinamento, para resolver as equações.

Para o código fonte elaborado no MatLab, existe a subrotina *ode45* para resolver equações diferenciais ordinárias pelo método de Runge-Kutta explícito de quarta ordem. Essa subrotina é um algoritmo adaptativo de refinamento e mantém a malha regular, Hanselman e Littlefield (2003) [23].

Nesse passo é necessário fazer uma interpolação para conhecer os valores dos campos auxiliares Φ e Π , nos pontos exigidos pela malha adaptativa, com refinamento e regularidade, do método Runge-Kutta. Utilizamos a subrotina *spline* do MatLab, para fazer a interpolação por *spline cúbica*.

Após o primeiro passo, conhecemos os coeficientes da métrica nos pontos da malha espacial, determinados pela solução encontrada através do método Runge-Kutta. Consequentemente, sabemos os espaçamentos Δr_i , entre os pontos da malha espacial.

Agora temos condições de iniciar o segundo passo, pois podemos encontrar um tamanho para o passo temporal que mantém o algoritmo estável. Na parte (a) do segundo passo, optamos por estabelecer o passo temporal da seguinte maneira:

$$\Delta t = 0,8 \min_i \left\{ \frac{\Delta r_i}{X_i} \right\} \quad (5.2)$$

onde X_i é a área abaixo da função a^2 , delimitada pelas retas $y = x_i$, $y = x_{i+1}$ e $y = 0$.

A parte (b) do segundo passo, consiste em resolver as duas equações diferenciais parciais, equações (2.6) e (2.7),

$$\dot{\Phi} = \left(\frac{\alpha}{a} \Pi \right)'$$

e

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\alpha}{a} \Phi \right)',$$

onde $\Phi(r, t_i) = \Phi_0(r)$, $\Pi(r, t_i) = \Pi_0(r)$, $a(r, t_i) = a_0(r)$ e $\alpha(r, t_i) = \alpha_0(r)$, que aparece nas equações do campo. Utilizamos o método Runge-Kutta de quarta ordem para fazer a evolução temporal dos campos auxiliares Φ e Π , no intervalo $[t_i, t_f]$, onde $t_f = t_i + \Delta t$.

Nesse passo, a mesma subrotina do MatLab é utilizada, a subrotina *ode45*, para fazer a evolução temporal dos campos auxiliares até o tempo t_f e encontrar $\Phi(r, t_f)$ e $\Pi(r, t_f)$.

Se estamos interessados em continuar a evolução temporal, temos que considerar Φ , Π e t_f , os novos dados a serem utilizados.

O terceiro passo refere-se a atualização nos dados, das equações diferenciais ordinárias do primeiro passo e das equações diferenciais parciais, da parte (b) do segundo passo. Para isso, basta fazer

$$t_i = t_f, \quad \Phi_0(r) = \Phi(r, t_f) \quad \text{e} \quad \Pi_0(r) = \Pi(r, t_f).$$

Após as atualizações, para prosseguirmos com a evolução temporal, basta considerar um laço de repetição dos passos apresentados, até um tempo t conveniente.

Após essa apresentação da estrutura do algoritmo, para a evolução temporal das equações de campo, precisamos determinar uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, onde estamos interessados em resolver as equações diferenciais.

A região que estamos interessados é $\Omega = [0, r_f] \times [0, \infty)$, onde o intervalo $[0, r_f]$ define o tamanho da malha espacial, r_f é uma constante estabelecida conforme interesses.

5.2.2 A condição inicial

O nosso interesse é estudar a evolução temporal de uma família de campos iniciais, igualmente caracterizada por Choptuik (1992) [7] e (1993) [8], apresentada na seção 2.1. Essa família de dados iniciais possui funções com um mesmo perfil e é caracterizada por um parâmetro p .

Dado uma família de dados iniciais, a evolução temporal desses campos iniciais é determinada pelas equações (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9). Se desejamos, em particular, estudar a evolução temporal de um campo inicial que pertence à família dada, devemos impor a seguinte condição inicial,

$$\phi(r, 0) = \phi(r),$$

nas equações do campo, onde $\phi(r)$ é o campo inicial dado que desejamos estudar e $t_i = 0$.

As equações do campo estão expressas pelos campos auxiliares Φ e Π , onde $\Phi \equiv \phi'$ e $\Pi \equiv \frac{a}{\alpha}\dot{\phi}$. Assim, dado o valor de $\phi(r, 0)$, temos as condições iniciais necessárias para a evolução temporal dos campos auxiliares.

5.2.3 As condições de contorno

Em simulações numéricas, devemos tomar muito cuidado com as condições de contorno, pois condições de contorno imprecisas, de pouca exatidão, ou erradas, propagam-se das extremidades do domínio, onde o problema está definido, para o interior deste. Essa propagação prejudica a simulação numérica e deixa o algoritmo não confiável. Analisaremos as condições de contorno para $r = 0$ e para $r = r_f$.

A primeira *condição de contorno* que veremos é para $r = r_f$. O ideal seria r tender ao infinito, mas isso é inviável para a simulação numérica, então restringir o domínio espacial, em um intervalo finito, é o que devemos fazer.

Uma boa escolha para r_f é fundamental, pois ao estipular um valor para r_f , considera-se que toda a dinâmica dos campos auxiliares está no intervalo espacial, $[0, r_f]$, e que, a partir de r_f , temos apenas radiação, ou seja, temos apenas ondas saindo em r_f .

Essa imposição sobre o domínio espacial cria a necessidade de uma *condição de radiação* em $r = r_f$,

$$\Pi(r_f, t) = -\Phi(r_f, t).$$

Isso é necessário para evitar que a solução seja afetada por $r = r_f$, pois nesse ponto, não temos ondas se propagando para o interior do intervalo.

A outra *condição de contorno* refere-se a origem $r = 0$. Aqui devemos ter um cuidado redobrado, pois não só temos imposições sobre Φ e Π , mas também temos que garantir a regularidade da métrica, para cada passo temporal, ou seja,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \alpha(r, t) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0} a(r, t) = 1.$$

A condição de regularidade da métrica é acrescentada no algoritmo, através das seguintes igualdades

$$a(0, t) = 1 \quad \text{e} \quad \alpha(0, t) = 1.$$

Agora analisemos as condições sobre os campos auxiliares.

Em $r = 0$, o campo escalar ϕ deve satisfazer

$$\phi'(0, t) = 0,$$

isso faz com que,

$$\Phi(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad \Pi'(0, t) = 0.$$

A condição para Φ , basta tomar $\Phi(0, t) = 0$, mas para Π devemos analisar o que acontece com Π , na vizinhança da origem, pois desejamos que o valor de $\Pi(0, t)$ seja uma extensão dos valores de Π , dado pelos pontos de $[0, r_f]$ que estão na vizinhança de $r = 0$.

Para encontrarmos o valor de $\Pi(0, t)$, fizemos uma extensão de cinco pontos, com os espaçamentos variados entre os pontos. Esses cinco pontos incluem o ponto onde queremos encontrar o valor de sua imagem e mais quatro pontos conhecidos, de sua vizinhança, ver figura 5.2.

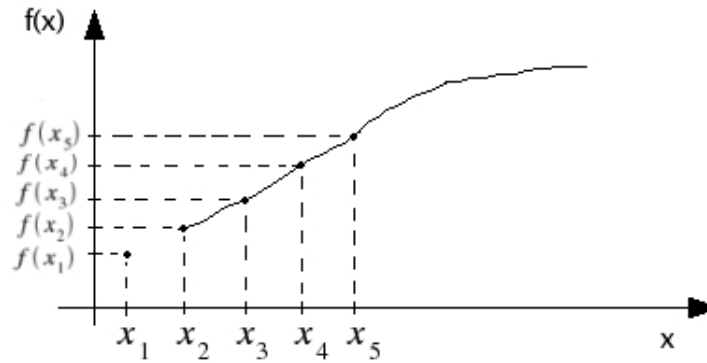


Figura 5.2 - Esboço da extensão de cinco pontos, onde o ponto $(x_1, f(x_1))$ é determinado através dos demais pontos.

Os cinco pontos são utilizados para fazer as aproximações das derivadas, via diferenças finitas. Por exemplo, podemos utilizar séries de Taylor para fazer as aproximações, para os valores de Π , em cada um dos cinco pontos escolhidos, montar um sistema de equações e encontrar o valor de $\Pi(0, t)$, através do sistema de equações.

A cada passo temporal, o algoritmo deve calcular o valor de Π na origem e para isso, acrescentamos uma subrotina desenvolvida por Greg von Winkel (2005), que acompanha o Maple, para calcular a extensão de cinco pontos via diferenças finitas.

Após especificarmos as condições iniciais e de contorno, temos uma outra preocupação em relação a região Ω , precisamos estabelecer ao algoritmo critérios de parada, para que a evolução temporal seja finita.

5.2.4 Os critérios de parada

Para tornar a evolução temporal finita, devemos estabelecer um tempo final conveniente, de maneira que, a partir desse tempo final, a dinâmica das equações de campo já atingiu um dos seus possíveis estágios finais.

A evolução temporal do campo escalar que estamos estudando, tem apenas dois estágios finais possíveis: formação de buraco negro e dispersão do campo. Cada um dos estágios finais possui propriedades que os caracterizam e que podemos utilizar como critério de parada, para a evolução temporal.

Se a igualdade $2m(r, t) = r$ for satisfeita, para algum (r, t) , temos a formação de um buraco negro, ou seja, quando temos a igualdade entre as duas funções $f(r, t) = 2m(r, t)$ e $g(r, t) = r$, para algum $r \in [0, r_f]$ e t fixo, temos a formação de um buraco negro. Essa igualdade representa uma singularidade na métrica radial-polar, equação (2.3).

No algoritmo, basta apresentar o cálculo da massa de Hawking, função perfil da massa, em cada evolução temporal, através da equação

$$\frac{2m(r, t)}{r} = 1 - \frac{1}{a^2}$$

e verificar se estamos suficientemente próximos da igualdade $2m = r$, a ponto de garantir que o estágio final da evolução temporal de um campo escalar inicial é a formação de um buraco negro.

Devido a escolha da métrica e a sua regularidade na origem, não é possível atingir a igualdade $2m = r$, porém sempre saberemos que estamos suficientemente próximos à formação de um buraco negro, a ponto de garantir que o estágio final será um buraco negro.

Uma outra quantidade interessante de acompanhar, ao longo de uma evolução temporal, é a massa total conservada, na região do espaço-tempo que estamos considerando. A equação é dada por

$$M = \int_0^{r_f} \frac{dm}{dr} dr = \int_0^{r_f} 2\pi \left[\frac{r^2}{a^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{r^2}{\alpha^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right],$$

[8].

Para o caso de dispersão do campo, temos $\alpha(r, t) \cong \alpha_0$ e $a(r, t) \cong a_0$, para os coeficientes da métrica, onde α_0 e a_0 são constantes. Nesse caso, temos como solução um espaço-tempo plano. Assim, podemos utilizá-los como critério de parada,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(r, t) = \alpha_0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a(r, t) = a_0.$$

Acrescentando essas condições de contorno e os critérios de parada no código fonte, o algoritmo está pronto para fazer simulações numéricas de um

campo escalar dado, para estudar a evolução temporal deste e para verificar qual será seu estágio final.

5.3 Sensibilidade do algoritmo

Com o intuito de ter um controle sobre a evolução temporal, incorporamos diversas informações para o algoritmo fornecer-nos, enquanto os dados são processados.

O algoritmo desenvolvido nos mostra: a quantidade de pontos espaciais utilizados a cada passo temporal; o tamanho do passo temporal; a quantidade de pontos utilizados em cada passo temporal; tempo gasto pela CPU, para realizar a evolução temporal; massa total do espaço-tempo e o erro relativo.

Essas informações mostram a diferença entre a evolução temporal de campos escalares suficientemente fracos, de campos fracos ou fortes, que estejam na vizinhança do campo escalar inicial crítico e dos campos suficientemente fortes. Assim, antes mesmo de terminar a evolução temporal, temos alguma idéia de qual será o estágio final e se precisaremos esperar muito tempo de CPU, para obtermos o estágio final.

Na seção de exemplos de simulações numéricas, veremos as diferenças entre a evolução temporal dos campos iniciais. Por exemplo, perceberemos que a quantidade de pontos espaciais utilizados, em cada passo temporal de um campo suficientemente fraco, é muito inferior a quantidade de pontos espaciais, utilizados por um campo suficientemente forte.

A quantidade de pontos espaciais a cada passo temporal, o tamanho do passo temporal, a quantidade de pontos de cada passo temporal e o tempo gasto pela CPU, nos transcrevem o caráter adaptativo, refinador e regularizador, do algoritmo.

5.4 Simulação

Para alguns exemplos de simulações, consideremos uma família de campos escalares iniciais, com o perfil Gaussiano:

$$\phi(r, 0) = \phi_0 \cdot \exp \left(- \left(\frac{(r - 20)}{4} \right)^2 \right),$$

onde ϕ_0 é a amplitude da Gaussiana e também o parâmetro que caracteriza a família de campos iniciais.

Fixamos $r_f = 48$, fizemos uma simulação e apresentamos o resultado na seção 5.4.2.

5.4.1 Informações sobre os Hardwares e Softwares utilizados

Para as simulações, utilizamos um Pentium IV, com 2,8 GHz e 496 MB de memória RAM. O sistema operacional é um LINUX/GNU 2.4.12.

O Software foi o MatLab7, executado via terminal através do seguinte comando:

```
matlab -nojvm -nosplash
```

A opção *-nojvm* executa o MatLab sem a parte Java, tornando-o mais leve e rápido quando executamos o algoritmo desenvolvido. A opção *-nosplash* elimina o logotipo inicial do MatLab.

5.4.2 Protótipo

Nessa subseção será apresentado um exemplo para nos certificarmos de que a solução fornecida pelo algoritmo não apresenta erros, devido a uma má escolha de condição de radiação.

Para $\phi_0 = 0,001$ o tempo gasto, para o campo escalar inicial atingir o estágio final, foi de 7,58 minutos. A figura 5.3 nos mostra que no campo escalar inicial, uma parte colapsa e a outra dispersa; a parte que colapsa, implode e depois também dispersa. Então, nesse exemplo, não temos formação de buraco negro.

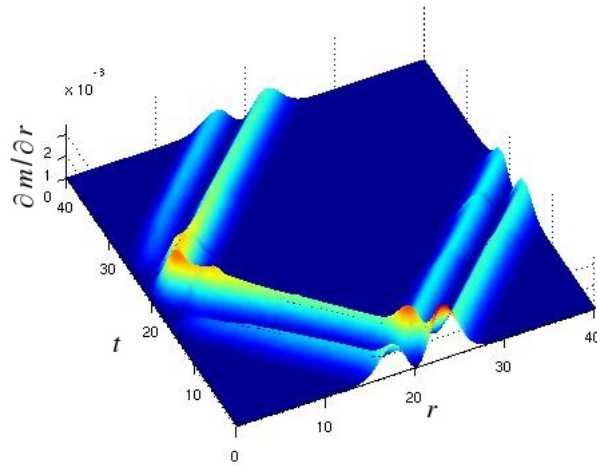


Figura 5.3 - Gráfico da evolução temporal da distribuição da massa no espaço-tempo.

A figura 5.4 nos mostra que o coeficiente radial da métrica não forma uma

singularidade, isso é característica de campo que dispersa e, pela figura 5.5, a massa total nessa região do espaço-tempo, em t_f , está próxima de zero.

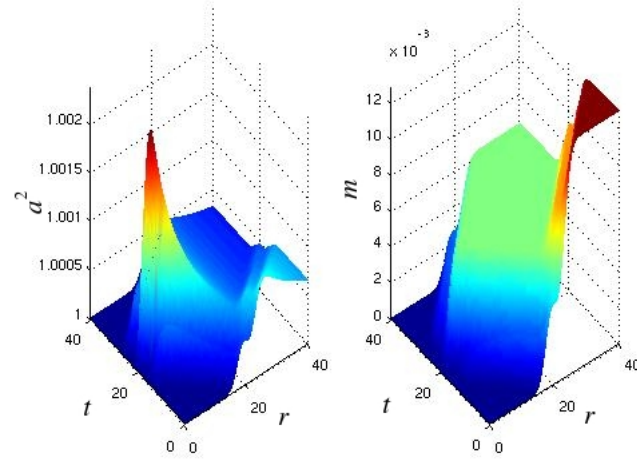


Figura 5.4 - A esquerda temos o gráfico do coeficiente radial da métrica e a direita, temos a evolução temporal da função perfil da massa.

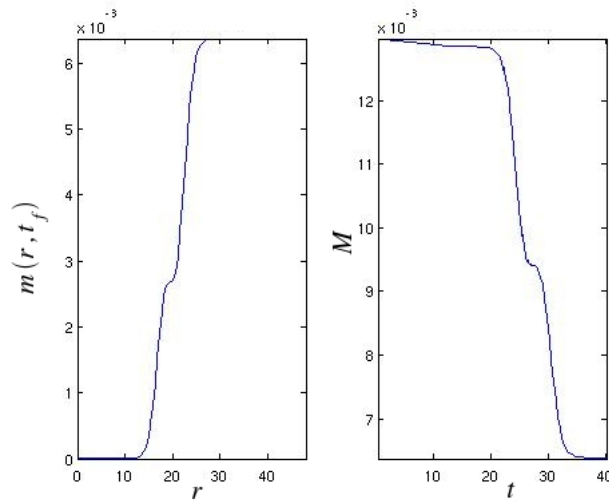


Figura 5.5 - A esquerda temos o gráfico da função perfil da massa, no atual passo temporal da evolução e a direita, temos a evolução temporal massa total.

Note que, na figura 5.3, não temos erros se propagando para o interior do

intervalo espacial e isso significa que a condição de radiação

$$\Pi(r_f, t) = -\Phi(r_f, t),$$

nos fornece uma boa condição de contorno para as equações do campo.

A construção do algoritmo com o método Runge-Kutta, de quarta ordem, apresentou alguns erros na execução de simulações, para campos escalares fracos. Essa dificuldade foi superada substituindo a subrotina *ode45* pela *ode113*, com a opção *MaxStep*.

A subrotina *ode113* é um algoritmo do método de Adams-Bashforth-Moulton. Basicamente, esse método é um Runge-Kutta melhorado com as seguintes principais propriedades: conforme exigências, a ordem é variada, da primeira até a décima terceira ordem; o algoritmo é de múltiplo passo e mais preciso que o *ode45*.

A opção *MaxStep* foi definida, para que o menor intervalo espacial não seja menor do que $r_f/100$.

A avaliação do desempenho da interpolação, por spline cúbica, e o estudo da evolução temporal de um campo escalar específico, além da busca de uma evolução temporal, que esteja próxima da transição entre campos que dispersam e que formam buraco negro, serão tratados no próximo capítulo.

Capítulo 6

Implementação Numérica

Para conhecermos mais o desempenho do MatLab em nossas simulações, investigaremos o tempo gasto pelas funções do MatLab, quando executa o algoritmo desenvolvido. Posteriormente, apresentaremos modificações que podem ser feitas, para melhorar o desempenho e a performance do algoritmo. As principais modificações serão no método de interpolação.

6.1 Performance do algoritmo

No MatLab, podemos analisar o tempo gasto de cada função executada por um algoritmo. Basta executá-lo na janela *profiler* - da barra de ferramentas - *Desktop*, para obtermos várias tabelas que nos fornecem, o tempo de CPU gasto de cada função, em porcentagem, após a simulação.

Ao obter as tabelas informativas, após a simulação efetuada na seção 5.4.2, percebemos que a subrotina *spline* gasta mais de 60% do tempo total gasto pela CPU. Se desejarmos otimizar o algoritmo, um bom caminho é investigar a subrotina *spline* (algumas informações da tabela informativa encontra-se no anexo II).

As interpolações realizadas pelo algoritmo estão concentradas no passo (1), da estrutura apresentada na seção 5.2.1, onde as interpolações são necessárias para o método Runge-Kutta obter os valores de Φ e Π , nos pontos exigidos pela malha adaptativa.

Para o colapso de um campo escalar suficientemente fraco, não precisamos nos preocupar com a performance da subrotina *spline*, pois o tempo gasto para a simulação é de poucos minutos.

A situação para campos que estejam na vizinhança do campo escalar crítico e para os campos suficientemente fortes é diferente, pois o tempo de simulação pode ser de algumas horas, ou até de muitas horas.

Uma alternativa seria questionar a utilização da *spline cúbica*, assim as seguintes perguntas são relevantes: qual será o desempenho do algoritmo se utilizarmos uma *interpolação linear*? Ou algum outro tipo de interpolação?

Na seção seguinte, discutiremos sobre diferentes métodos de interpolação.

6.2 Métodos de interpolação

Nessa seção, apresentaremos os métodos de interpolações que consideramos para tentar otimizar o algoritmo. Discutiremos e faremos comparações entre os métodos, para que na seção seguinte, seja avaliado o desempenho numérico de cada um.

A necessidade de se efetuar interpolações surgiu do fato de que o método Runge-Kutta precisa de alguns valores das funções Φ e Π , em pontos que desconhecemos.

A interpolação de uma função $f(x)$, consiste em aproximar essa função por uma outra função $g(x)$, que satisfaz algumas propriedades. Dessa maneira, a função $g(x)$ passa a ser utilizada, no lugar da $f(x)$.

Em resumo, podemos encontrar a função $g(x)$ da seguinte maneira: sejam $x_0, x_1, \dots, x_n$, $(n+1)$ pontos distintos chamados de nós da interpolação e sejam $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, os valores de $f(x)$ desses pontos. Uma forma de interpolação, consiste em obter uma função $g(x)$ tal que

$$g(x_0) = f(x_0), g(x_1) = f(x_1), \dots, g(x_n) = f(x_n). \quad (6.1)$$

Uma interpolação é dita *polinômial* se dados os pontos

$$(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n)),$$

a função interpolante $g(x)$ é um polinômio $p_k(x)$, de grau menor ou igual a n , que satisfaz as condições (6.1).

Representaremos $p_k(x)$ por $p_k(x) = a_0 + a_1x^1 + \dots + a_kx^k$, onde $k \leq n$. Assim, obter $p_k(x)$ significa determinar os coeficientes $a_0, a_1x^1, \dots, a_kx^k$.

Existem várias maneiras de obter os coeficientes do polinômio. Por exemplo, basta resolver o sistema linear montado através das condições, $p_k(x_i) = f(x_i)$, onde $i = 0, 1, \dots, n$ e $k \leq n$. Nesse sistema, se $k = n$ a matriz dos coeficientes, definida pelo sistema linear, é uma matriz de Vandermonde. Teremos solução única se $x_0, \dots, x_n$ são pontos distintos, pois nesse caso a matriz de Vandermonde tem determinante diferente de zero, Ruggiero e Lopes (1996) [42].

Uma vez determinado os coeficientes $a_0, a_1x^1, \dots, a_kx^k$, sabemos qual é o polinômio $p_k(x)$ que interpola $f(x)$, ou o conjunto de pontos $p_k(x_i) = f(x_i)$. Posteriormente, podemos encontrar a imagem de um ponto $\bar{x} \in [x_0, x_n]$.

A pergunta natural que surge é: a sequência de polinômios $\{p_n(x)\}$ converge para $f(x)$, em $[x_0, x_1]$, se $\{(x_0, \dots, x_n)\}$ cobre o intervalo $[a, b]$, quando $n \rightarrow \infty$?

No caso em que $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, onde h é uma constante, podemos estar sujeitos ao fenômeno de Runge e termos divergência, Ruggiero e Lopes (1996) [42].

Se a função está tabelada em $(n+1)$ pontos e utilizamos a interpolação polinomial, o resultado pode ser desastroso.

Uma alternativa é utilizar pontos com distâncias diferentes entre si, porém a principal alternativa é usar funções *spline's*, cuja convergência é garantida, Powell (1991) [38].

Uma função S_p , $S_p : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ é dita *spline de grau p*, com nós nos pontos x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, se satisfaz as seguintes condições:

- em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, (n-1)$, S_p é um polinômio de grau p , denominado $s_p(x)$;
- S_p é contínua e tem derivada contínua até $(p-1)$, em $[a, b]$;
- se além disso, S_p também satisfizer $S_p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, então denominamos *spline interpolante*.

Os métodos de *spline interpolante* mais utilizados são: *spline linear* e *spline cúbica interpolante*.

A função *spline linear interpolante* de $f(x)$, $S_1(x)$, entre os nós $x_0, \dots, x_n$, é definida em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, como

$$s_i(x) = f(x_{i-1}) \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \forall x \in [x_{i-1}, x_i].$$

As principais vantagens desse método são: as funções $s_i(x)$'s são facilmente adaptadas a forma de $f(x)$, com $x \in [a, b]$ e o erro $\|f - s_i\|_\infty$ é controlado, diretamente pelos intervalos entre os nós. Porém, para obtermos uma boa precisão, são necessários muitos nós, ou seja, muito ponto na malha espacial.

Além de exigir muitos pontos, a *spline linear* apresenta a desvantagem de ter derivadas, de primeira ordem, descontínuas nos nós. Essa interpolação é idêntica a interpolação polinomial de grau um (interpolação linear).

Uma *spline cúbica interpolante*, ou simplesmente *spline cúbica*, $S_3(x)$, é uma função por partes, contínua, onde cada função $s_i(x)$ é uma cúbica, nos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

A curva $S_3(x)$ tem a primeira e a segunda derivada contínua, assim ela não tem picos e nem troca abrupta de curvatura nos nós.

Considerando que $f(x)$ esteja tabelada nos pontos x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, a função $S_3(x)$ é uma *spline cúbica* interpolante de $f(x)$, se existem n polinômios de grau três, $s_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, tais que

- $S_3(x) = s_k(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$;
- $S_3(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$;
- $s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k)$, $k = 1, \dots, n-1$;
- $s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k)$, $k = 1, \dots, n-1$;
- $s''_k(x_k) = s''_{k+1}(x_k)$, $k = 1, \dots, n-1$.

Como $s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k$, o cálculo de $S_3(x)$ resume-se em encontrar os coeficientes a_k , b_k , c_k e d_k , para cada valor de k , onde $k = 1, \dots, n$, satisfazendo as cinco condições acima. Para detalhes de como obter esses coeficientes, consultar as referências Ruggiero e Lopes (1996) [42], ou Powell (1991) [38].

Outro método de interpolação muito utilizado é a *interpolação cúbica de Hermite*.

Nesse método, as derivadas $s'(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, são dadas ou calculadas no início de todo procedimento de interpolação. Por exemplo, podemos definir $s'(x_j)$, $j = 1, \dots, n$, como sendo a derivada de um polinômio de quarta ordem, em relação a x_j , que interpola os seguintes cinco pontos, $f(x_k)$, $k = j-2, j-1, j, j+1, j+2$. Essa definição faz com que os polinômios $s_j(x)$ mantenham a forma da função $f(x)$.

As derivadas $s'(x_j)$ e $s'(x_{j+1})$ fixam os dois graus de liberdade de s_j , para cada j . Logo, $s_j(x)$ é o polinômio de ordem três,

$$s_j(x) = f(x_j) + s'(x_j)(x - x_j) + c_2(x - x_j)^2 + c_3(x - x_j)^3, \quad (6.2)$$

onde os coeficientes são definidos por

$$c_2 = \frac{3[f(x_{j+1}) - f(x_j)]}{(x_{j+1} - x_j)^2} - \frac{s'(x_{j+1}) + 2s'(x_j)}{x_{j+1} - x_j}$$

e

$$c_3 = \frac{2[f(x_j) - f(x_{j+1})]}{(x_{j+1} - x_j)^3} - \frac{s'(x_{j+1}) + s'(x_j)}{(x_{j+1} - x_j)^2}.$$

Assim, a *função interpolante de Hermite*, $H_3(x)$, é uma função por partes, contínua, onde em cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, n$, temos a função $s_j(x)$, definida pela equação (6.2).

A função $H_3(x)$ interpola $f(x)$, tabelada nos pontos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$ e temos $H_3(x_j) = f(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$. A derivada $H'_3(x)$ é contínua no intervalo $[x_0, x_n]$, Powell (1991) [38].

O método de *interpolação cúbica de Hermite* tem a principal propriedade de manter a forma da função $f(x)$, que define os pontos a serem interpolados. A sua precisão é menor do que a precisão do método *spline cúbica*, pois $H_3(x)$ tem apenas a primeira derivada contínua, ao passo que $S_3(x)$ tem a segunda derivada contínua.

As funções s_k , que definem a *spline cúbica* $S_3(x)$, garantem a continuidade de $S''_3(x)$, porém não têm o compromisso de manter a forma da função $f(x)$. Isso faz com que o método de *spline cúbica* fique mais sujeito a oscilação, do que o método de *Hermite*.

Na próxima seção, faremos comparações entre as subrotinas que fazem as interpolações citadas nessa seção e optaremos por uma delas, para ser utilizada para otimizar o algoritmo do campo escalar.

6.3 Comparação entre as subrotinas de interpolação

Antes da escolha de uma forma de interpolação, para o algoritmo do campo escalar, avaliaremos o desempenho de três subrotinas, que se encontram no MatLab e uma subrotina desenvolvida em Fortran, que interage com o MatLab (ver tabela 6.1)

Tabela 6.1 - Formas de interpolação utilizadas

Subrotina	Descrição
<i>spline</i>	Interpolação por spline cúbica.
<i>interp1</i>	A opção 'linear' fornece interpolação por retas.
<i>pchip</i>	Interpolação utilizando polinômios cúbicos de Hermite.
<i>splinefor</i>	spline cúbica via Fortran.

O código fonte em Fortran, que utilizamos para interagir com o algoritmo do colapso gravitacional, está disponível na referência Press, Flannery, Teukolsky e Vetterling (1986) [39]. Essa subrotina efetua a interpolação por spline cúbica e está escrita em fortran-77.

Para fazer a interação entre esses algoritmos, precisamos saber como passar dados de um código fonte escrito em MatLab, para um escrito em Fortran e vice-versa. O sistema de ajuda do MatLab é suficiente para adquirirmos essas informações e também, essas informações encontram-se no livro do Hanselman e Littlefield (2003) [23].

Basicamente, no algoritmo de spline cúbica em Fortran, acrescentamos comandos referente a identificação e transferência de variáveis. Após isso, o algoritmo é salvo e compilado no próprio MatLab, para se tornar um algoritmo incorporado ao MatLab. Consequentemente, esse algoritmo funciona de modo semelhante às funções que estão na biblioteca do MatLab.

O arquivo *splinefor.f* é o arquivo MEX que fizemos e encontra-se no anexo III. O comando para torná-lo uma função integrada ao MatLab é dado por

$$mex -v -g splinefor.f FC = f95$$

Considerando essas quatro subrotinas, dado um conjunto de pontos do $\mathcal{R}^2$, queremos saber a imagem de um conjunto de pontos dos Reais, definida pela função que interpola o conjunto de pontos dados. Cada subrotina gastará um tempo para fazer a interpolação e esses tempos são obtidos através do comando *cputime* do MatLab. Montamos tabelas comparativas entre o tempo gasto de cada subrotina, ao interpolar uma quantidade de pontos.

O conjunto de pontos conhecidos são

$$\Omega = \{(x, y) \in [0, 100] \times [0, 100] \subset \mathcal{R}^2 \mid y = x\}.$$

Note que esse conjunto possui infinitos pontos, no entanto queremos apenas um número finito de pontos dados, para definir a função que interpola esses pontos. Assim, precisamos fazer uma restrição ao conjunto Ω , que nos resulte numa quantidade finita de pontos.

A restrição $\Omega|\alpha$ é o conjunto de pontos

$$\Omega|\alpha = \{(x, y) \in \Omega \mid x = k.h, k = 100/\alpha \text{ e } k = 0, 1, \dots, \alpha\}, \quad (6.3)$$

onde $\alpha + 1$ é a quantidade de pontos do conjunto.

Essa restrição é o conjunto de pontos que define a interpolação. Agora desejamos saber quanto tempo de CPU, as subrotinas gastam para encontrar a imagem de um conjunto de pontos dos Reais, através dos pontos que definem a interpolação.

Os pontos para os quais queremos saber a imagem, pertencem ao intervalo $[0, 5, 99, 5] \subset \mathcal{R}$ e são definidos por

$$\Gamma = \{\bar{x} \in [0, 5, 99, 5] \mid \bar{x} = 0, 5 + k.h\},$$

onde $h = 90/\beta$, $k = 0, 1, 2, \dots, \beta$ e $\beta + 1$ define a quantidade de pontos do conjunto.

Apresentamos tabelas para $\beta = 10$, $\beta = 100$, $\beta = 1000$, $\beta = 10000$ e $\beta = 100000$. Em cada Tabela, α assumirá os seguintes valores: $\alpha = 10$, $\alpha = 100$, $\alpha = 1000$, $\alpha = 10000$, $\alpha = 100000$ e $\alpha = 1000000$. O tempo gasto de cada subrotina, para encontrar a imagem dos pontos, definido pelo conjunto Γ , é computado em segundos (s), pelo comando *cputime* do MatLab.

Tabela 6.2 - Tempo gasto para as subrotinas interpolarem 10 pontos ($\beta = 10$)

α	Tempo gasto pela subrotina (s)			
	fortran	spline	linear	Hermite
10	0	0,01	0	0
100	0	0,01	0	0,005
1000	0	0,01	0	0,01
10000	0,01	0,1	0,005	0,05
100000	0,15	1,13	0,03	0,52
1000000	-	11,81	0,29	5,08
10000000	-	-	2,88	-

Tabela 6.3 - Tempo gasto para as subrotinas interpolarem 100 pontos ($\beta=100$)

α	Tempo gasto pela subrotina (s)			
	fortran	spline	linear	Hermite
10	0	0,01	0	0,005
100	0	0,01	0	0,005
1000	0,015	0,01	0	0,01
10000	0,14	0,1	0,005	0,05
100000	1,46	1,13	0,03	0,52
1000000	-	11,79	0,29	5,1
10000000	-	-	2,89	-

Analisando as cinco tabelas comparativas, tabela 6.2, tabela 6.3, tabela 6.4, tabela 6.5 e tabela 6.6, é indiscutível que a subrotina da interpolação linear gasta menos tempo para efetuar as suas operações. No entanto, devemos ter uma preocupação com sua precisão e com a suavidade da função interpolante, se pretendemos substituir a *spline cúbica* pela *interpolação linear*, no algoritmo do campo escalar.

Seja $x \in [x_k, x_{k+1}] \subset [0, 100]$, o ponto em que desejamos encontrar sua imagem, seja $\Omega|\alpha$ o conjunto de pontos que define a função interpolante. O

erro da interpolação linear é proporcional ao quadrado da distância entre os extremos do intervalo $[x_k, x_{k+1}]$. Assim, o erro no ponto x é proporcional à

$$erro_x \propto (x_{k+1} - x_k)^2 = \left(\frac{100}{\alpha}\right)^2.$$

A principal desvantagem da interpolação linear é que a função interpolante não é diferenciável, nos pontos que conhecemos, ao passo que a interpolação por spline cúbica nos fornece uma função interpolante suave, contínua na primeira e segunda derivadas. Dependendo do problema, esse fato pode inserir erros que afetam a qualidade da resposta do problema, ou a solução do problema.

Tabela 6.4 - Tempo gasto para as subrotinas interpolarem 1000 pontos ($\beta=1000$)

α	Tempo gasto pela subrotina (s)			
	fortran	spline	linear	Hermite
10	0	0,01	0	0,005
100	0,015	0,01	0	0,005
1000	0,14	0,015	0	0,01
10000	1,4	0,11	0,03	0,05
100000	14,85	1,18	0,03	0,54
1000000	-	-	0,31	5,21
10000000	-	-	3,01	-

Tabela 6.5 - Tempo gasto para as subrotinas interpolarem 10000 pontos ($\beta=10000$)

α	Tempo gasto pela subrotina (s)			
	fortran	spline	linear	Hermite
10	0,015	0,02	0,015	0,02
100	0,14	0,02	0,015	0,02
1000	1,36	0,03	0,015	0,025
10000	13,96	0,13	0,02	0,07
100000	149,37	1,21	0,05	0,54
1000000	-	12,19	0,32	5,27
10000000	-	-	2,98	-

Antes de substituir a interpolação linear no algoritmo do campo escalar, devemos ter em mente que esses erros de precisão, causados pela interpolação, e as descontinuidades, se propagarão ao longo da evolução temporal, pois as

equações de Einstein, para o problema que consideramos, são basicamente equações de ondas.

Tabela 6.6 - Tempo gasto para as subrotinas interpolarem 100000 pontos ($\beta=100000$)

α	Tempo gasto pela subrotina (s)			
	fortran	spline	linear	Hermite
10	0,16	0,18	0,14	0,19
100	1,36	0,19	0,14	0,19
1000	13,58	0,20	0,14	0,19
10000	146,98	0,30	0,14	0,24
100000	$1,6 \times 10^3$	1,39	0,17	0,775
1000000	-	11,81	0,29	5,54
10000000	-	-	3,19	-

Uma interpolação que se destaca é a *interpolação cúbica de Hermite*. As tabelas comparativas mostram que essa interpolação gasta menos tempo para efetuar as operações, quando se compara com a interpolação *spline cúbica*.

Note que, nas cinco tabelas, só foi vantajoso utilizar a interpolação do fortran interagido com o MatLab, quando tínhamos poucos pontos à interpolar. Logo, se desejamos explorar as vantagens do algoritmo do campo escalar, com a spline cúbica do Numerical Recipes [39] em fortran, devemos dividir o problema em vários problemas em intervalos menores, com condições de contorno que garantam a recuperação do problema original.

Executando o algoritmo com a interpolação *spline cúbica* e também, executando o algoritmo com a *interpolação cúbica de Hermite*, na opção *Profiler* do MatLab, obtemos informações que reforçam a vantagem da interpolação de Hermite, em relação ao tempo gasto de CPU. Algumas dessas informações encontram-se no anexo II.

Optamos por utilizar a *interpolação cúbica de Hermite* para as simulações que faremos na seção 6.5, devido às suas características apresentadas nessa seção e pelo bom desempenho da subrotina *pchip*.

6.4 Outras Modificações

Uma outra alternativa é mudar completamente a estrutura do algoritmo, principalmente no que diz respeito a parte espacial. O trabalho de Henrique e Soares (2002) [35] propõe o estudo do colapso gravitacional de um campo escalar sem massa, com simetria esférica, sem impor qualquer simetria adicional.

O Método utilizado pelos autores é o *Método de Galerkin*, que permite transformar um conjunto finito de equações diferenciais parciais, em um conjunto infinito de equações diferenciais ordinárias.

Basicamente, o *Método de Galerkin* consiste em expandir as variáveis do problema em uma série de polinômios ortogonais. Essas variáveis são inseridas nas equações originais. Eles utilizaram os polinômios de Hermite como a base de funções que gera o espaço das variáveis do problema.

Para ser viável computacionalmente, as séries devem ser truncadas, ou seja, devemos considerar apenas somas parciais. Um resultado muito interessante desse trabalho é que os autores conseguiram reproduzir os fenômenos descobertos por Choptuik, com apenas os três primeiros termos da série.

Henrique e Soares determinaram, analiticamente, os coeficientes da métrica. A nossa proposta de modificação é fazer computacionalmente, todas as operações necessárias; para isso, sugerimos a utilização do *Método Pseudo Espectral* (baseado no *Método de Galerkin*) e os polinômios de Hermite. Nesse método, matrizes de diferenciação espectral são necessárias e um algoritmo para isso, encontra-se disponível em MatLab na referência Weideman(2006)[45].

6.5 Simulações Numéricas

Consideramos uma família de campos escalares iniciais, com o perfil Gaussiano

$$\phi(r, 0) = \phi_0 \cdot \exp\left(-\left(\frac{(r-20)}{4}\right)^2\right), \quad (6.4)$$

onde ϕ_0 é a amplitude da Gaussiana e também, o parâmetro que caracteriza a família de campos iniciais.

Fixamos $r_f = 48$, fizemos várias simulações com diferentes valores para ϕ_0 e construímos a tabela 6.7, que mostra o tempo gasto pela evolução temporal desses campos iniciais, para atingir um dos estágios finais possíveis.

Note que na tabela 6.7, o tempo gasto pelo algoritmo que utilizou interpolação cúbica de Hermite, para fazer a evolução temporal do campo escalar - com amplitude 0,001, foi de 5,76 minutos. O algoritmo desenvolvido com a spline cúbica, ver seção 6.1, demorou 7,56 minutos para fazer a mesma simulação.

A seguir, apresentamos alguns gráficos obtidos das simulações da tabela 6.7. Da figura 6.1 até a figura 6.4, temos os gráficos obtidos da evolução temporal, do campo escalar que tem a amplitude de, $\phi_0 = 0,001$.

Tabela 6.7 - Tempo de evolução temporal de alguns campos escalares iniciais

ϕ_0	tempo gasto de simulação (em minutos)
0,001	05,76
0,002	11,59
0,003	18,14
0,004	25,88
0,005	36,53
0,006	48,99
0,007	66,64
0,008	110,51
0,009	130,43
0,010	170,22
0,0125	788,06
0,020	967,48

A figura 6.1 nos mostra a distribuição de massa, na região do espaço-tempo, onde consideramos que toda a dinâmica encontra-se nessa região. Com isso, consegue-se analisar a evolução do campo escalar.

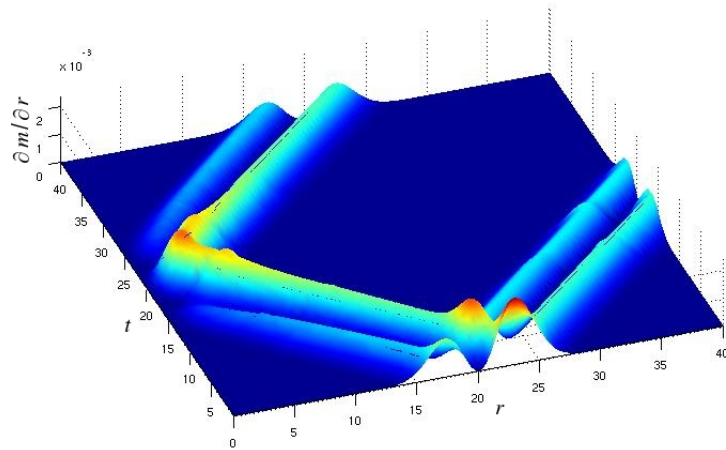


Figura 6.1 - Gráfico da evolução temporal da distribuição da massa no espaço-tempo, para $\phi_0 = 0,001$.

Se observarmos a figura 6.1, no tempo $t = 0$, temos a derivada do campo escalar inicial, em relação a r . Ou seja, a derivada do perfil Gaussiano que consideramos. Da derivada temos duas ondas, cada uma delas se divide: uma parte vai para $r = 0$ e a outra, vai em direção de $r_f = 48$.

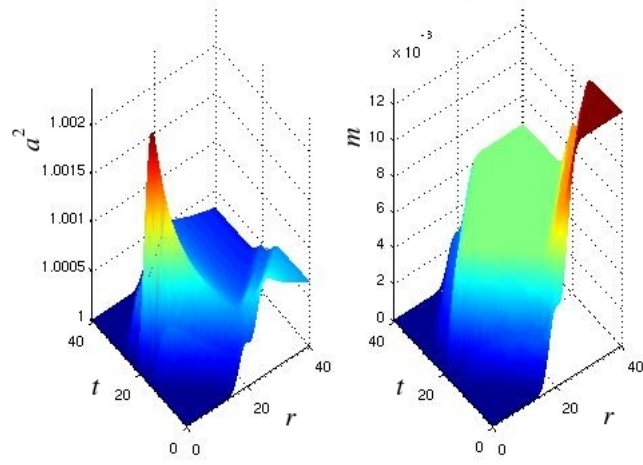


Figura 6.2 - A esquerda temos o gráfico do coeficiente radial da métrica e a direita, temos a evolução temporal da função perfil da massa.

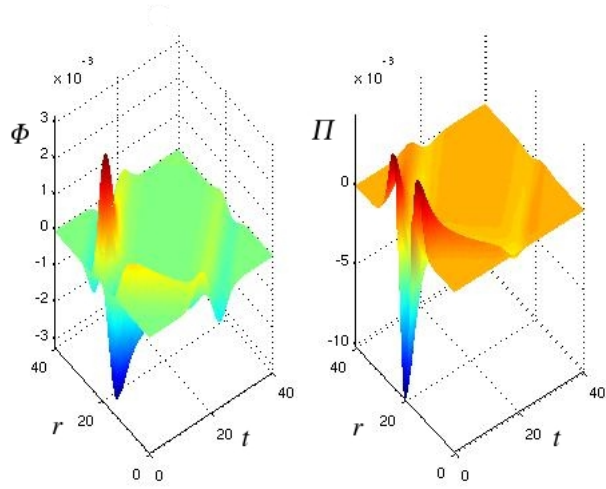


Figura 6.3 - Evolução temporal dos campos auxiliares Φ e Π .

Note que, na figura 6.1, não temos ondas partindo de $r_f = 48$ e indo em direção de $r = 0$. Isso justifica a escolha da condição de radiação

$$\Pi(r_f, t) = -\Phi(r_f, t),$$

pois não queremos que essas ondas interfiram no algoritmo.

No caso de $\phi_0 = 0,001$, não temos a formação de buraco negro, temos um exemplo de dispersão do campo. Pela figura 6.1, uma parte do campo

escalar inicial começa a colapsar, enquanto que uma outra parte dispersa, a partir daí, a parte que colapsa implode em $r = 0$ e depois dispersa, a medida que o tempo passa.

Os gráficos da figura 6.2, nos mostram as mudanças no coeficiente radial da métrica e na função perfil da massa, a medida que temos a evolução temporal do campo escalar em estudo. Já os gráficos da figura 6.3, apresenta a evolução dos campos auxiliares Φ e Π . E, os gráficos da figura 6.4 nos diz sobre a evolução da massa total, que se encontra na região do espaço-tempo em estudo, o último gráfico da função perfil da massa e o último estágio do coeficiente radial da métrica.

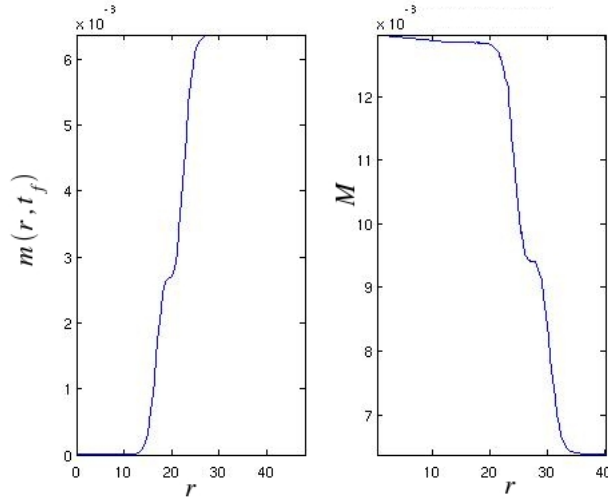


Figura 6.4 - A esquerda temos a função perfil da massa em t_f e a direita temos, a evolução temporal da massa total contida, na região do espaço-tempo.

Agora mostraremos os gráficos obtidos para o campo escalar inicial de amplitude $\phi_0 = 0,01$, figura 6.5, figura 6.6, figura 6.7 e figura 6.8.

Esse campo inicial está próximo da solução crítica, mas ainda, o campo escalar dispersa. Para essa simulação, acrescentamos um gráfico que representa o critério de parada, para o buraco negro (figura 6.8).

Nesse estágio, temos um bom domínio sobre o algoritmo. Apenas analisando as informações que o algoritmo nos fornece, durante uma simulação, temos a capacidade de saber se tal simulação é: de um campo que formará buraco negro ou de um campo que dispersará.

No laço de repetição do algoritmo, que representa a evolução temporal, acrescentamos informações para evitar que as simulações não caíssem em um laço de repetição infinito. A evolução será interrompida, se o tamanho do

intervalo temporal for da ordem de 10^{-6} . Outros critérios de interrupção foram acrescentados, ver anexo I - arquivo chopExp.m .

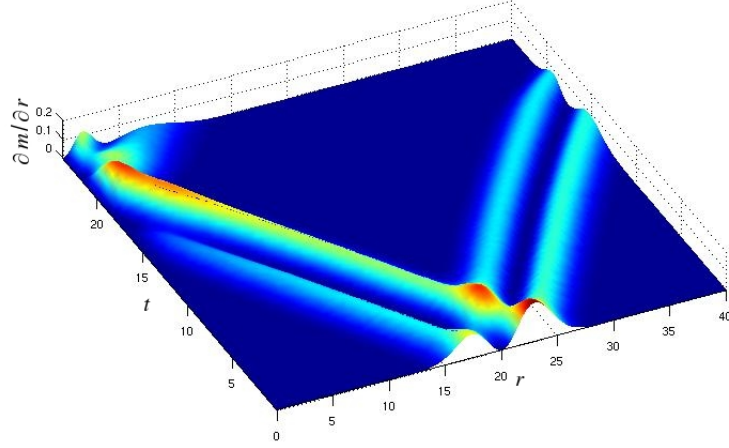


Figura 6.5 - Gráfico da evolução temporal da distribuição da massa no espaço-tempo, para $\phi_0 = 0,01$.

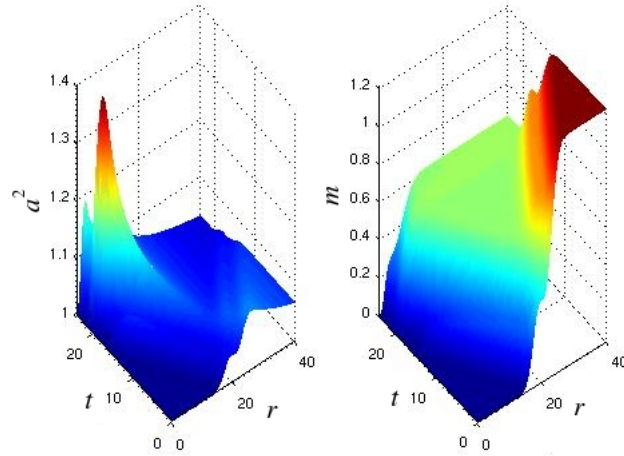


Figura 6.6 - A esquerda temos o gráfico do coeficiente radial da métrica e a direita, temos a evolução temporal da função perfil da massa.

Na figura 6.5, o eixo t nos mostra que a simulação foi até, aproximadamente, o tempo 25. Esse tempo é suficiente para verificarmos que o campo

dispersa, pois o algoritmo não atingiu o critério de parada do buraco negro. Um jeito de observar isso é olhar para as figuras 6.7 e 6.8.

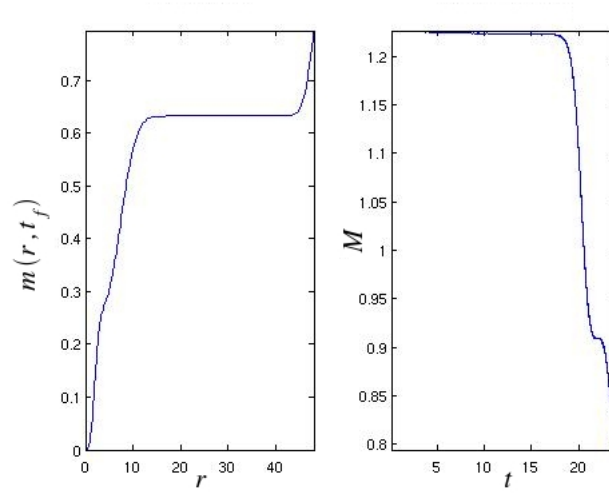


Figura 6.7 - A esquerda temos a função perfil da massa em t_f e a direita temos, a evolução temporal da massa total contida, na região do espaço-tempo.

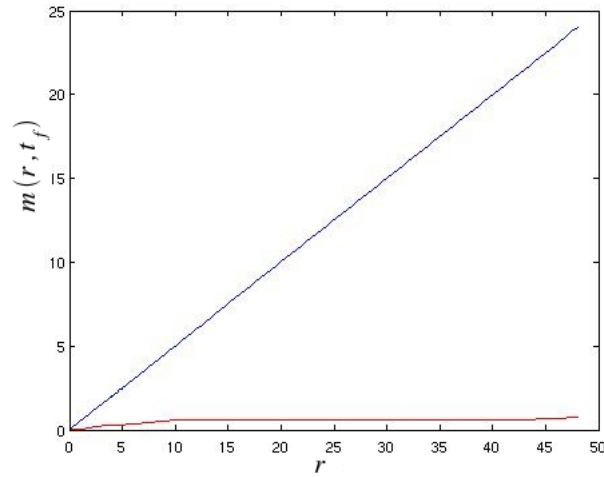


Figura 6.8 - Nesse gráfico estão representados a função perfil da massa, no último tempo atingido pela simulação, e o gráfico da reta $y = r$, o que representa o critério de parada.

Na figura 6.7, temos o gráfico da massa total contida na região do espaço-tempo considerado na simulação. Observa-se que o gráfico da massa total

é não crescente e que, a partir de $t = 20$ o gráfico é decrescente. Isso é característico em campos que dispersam.

A figura 6.8 nos revela que a simulação não atingiu o critério de parada do buraco negro, a curva em vermelho não ficou suficientemente próxima da reta em azul, para que o algoritmo interrompesse a evolução temporal. Assim, as figuras 6.5, 6.7 e 6.8 garantem que o campo escalar inicial, com $\phi_0 = 0,01$, dispersa.

A seguir, apresentamos os gráficos obtidos, após a evolução do campo escalar inicial de amplitude $\phi_0 = 0,02$, figuras 6.9-6.13. Esse é um exemplo de campo que forma um buraco negro.

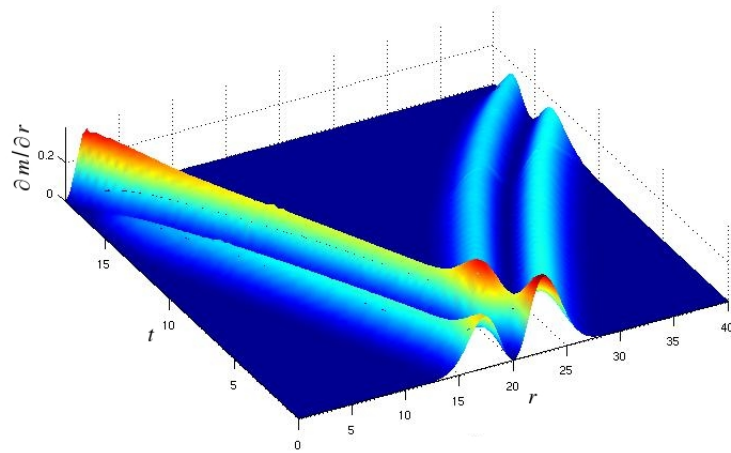


Figura 6.9 - Gráfico da evolução temporal da distribuição da massa no espaço-tempo, para $\phi_0 = 0,02$.

Nesse caso, a figura 6.13 mostra que estamos suficientemente próximos à formação de um buraco negro, a ponto de termos certeza de que o estágio final desse campo escalar é a formação de um buraco negro. A função perfil da massa fica suficientemente próxima da reta em azul, atingindo o critério de parada do algoritmo, quando se chega muito próximo a formação de buraco negro.

Podemos concluir que o valor da amplitude crítica está entre 0,01 e 0,02. Notamos que é muito difícil atingir o valor da amplitude crítica, tendendo por valores maiores, e é mais fácil chegar a amplitude crítica por valores menores, pois a simulação numérica para campos que dispersam, é mais rápida.

Essa verificação confirma a seguinte frase apresentada no capítulo 4 - seção 4.6: para se aproximar do espaço-tempo crítico, uma boa estratégia é

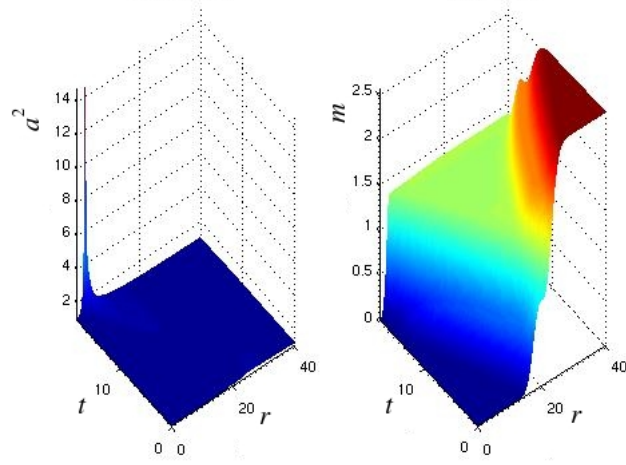


figura 6.10 - A esquerda temos o gráfico do coeficiente radial da métrica e a direita, temos a evolução temporal da função perfil da massa.

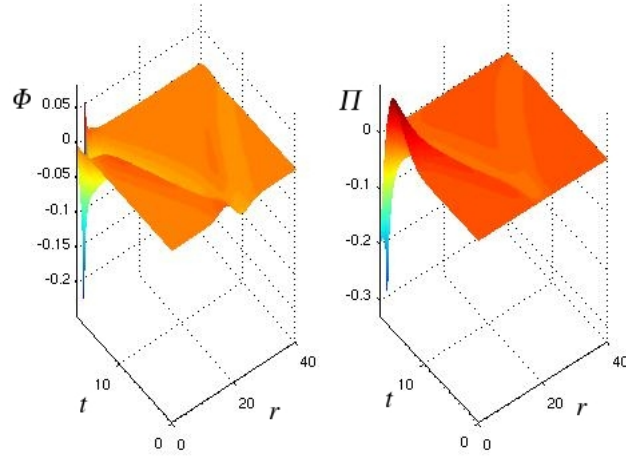


figura 6.11 - Evolução temporal dos campos auxiliares Φ e Π .

fazer o refinamento dos dados iniciais, a partir dos dados iniciais suaves.

O critério de parada do número de repetição, evita que a simulação continue uma evolução temporal desnecessária. No caso de campos fracos, esse critério não influencia em nada. Ver anexo I, arquivo *chopExp.m*, para observar o laço de repetição e o critério de parada. Porém, no caso de $\phi_0 = 0,02$, o critério de parada atingido foi o do buraco negro.

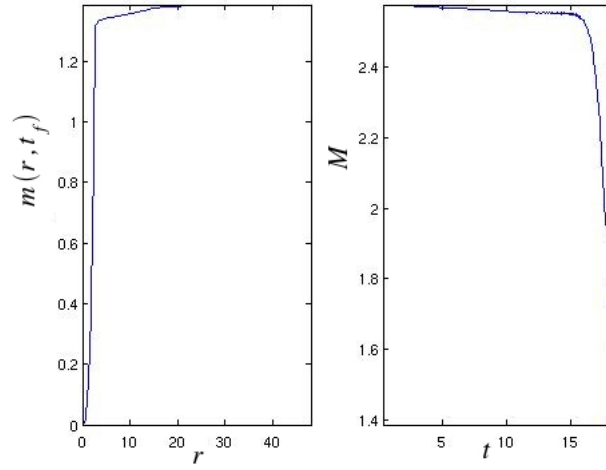


Figura 6.12 - Evolução temporal da função perfil da massa.

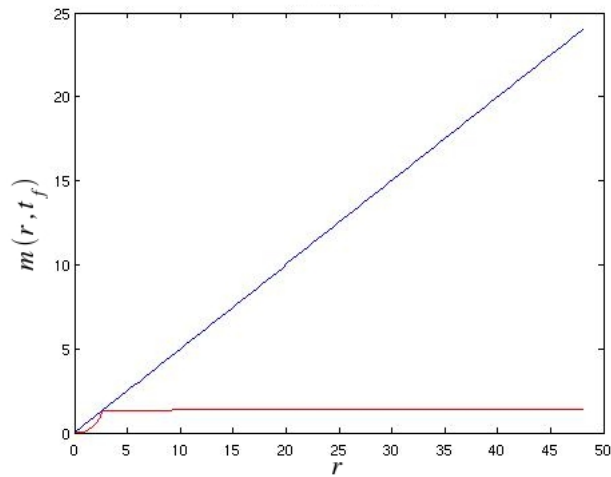


figura 6.13 - Nesse gráfico estão representados a função perfil da massa, no último tempo atingido pela simulação e o gráfico da reta $y = r$.

Com a finalidade de chegar mais próximo da amplitude crítica, a evolução temporal do campo escalar inicial, de amplitude $\phi_0 = 0,0125$, foi realizada. A seguir estão expostos alguns gráficos obtidos, figuras 6.14-6.17.

Observe que, pela figura 6.16, parece que formou um buraco negro, mas se aumentarmos a escala, figura 6.17, percebemos que a função perfil da massa não toca a reta. A rigor, apenas as funções estarem bem próximas,

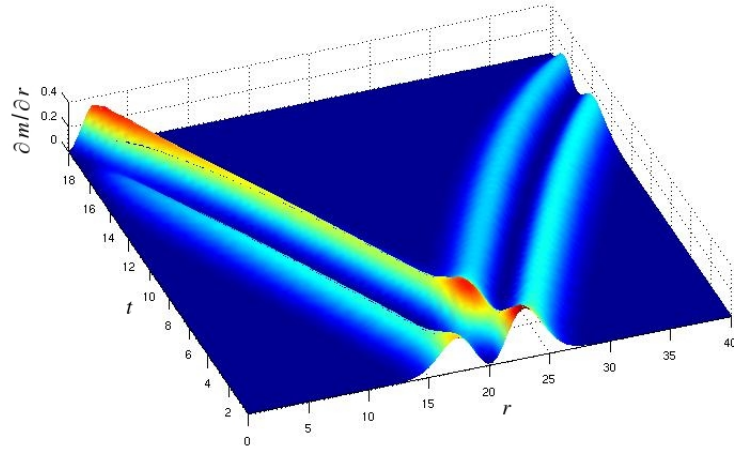


Figura 6.14 - Gráfico da evolução temporal da distribuição da massa no espaço-tempo, para $\phi_0 = 0,0125$.

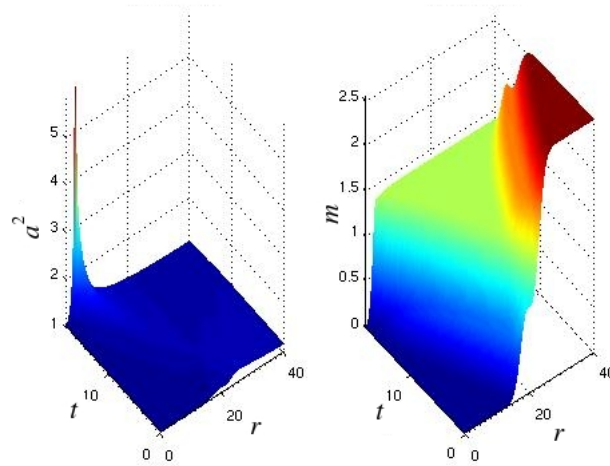


Figura 6.15 - A esquerda temos o gráfico do coeficiente radial da métrica e a direita, temos a evolução temporal da função perfil da massa.

não é suficiente para se dizer que formou um buraco negro, mas estamos suficientemente próximos. Essa simulação nos informa que estamos bem próximos da amplitude crítica. Assim, estamos próximos da transição entre campos que formam buraco negro e campos que dispersam.

Certamente, fundamentados pelas simulações numéricas dos campos escalares iniciais que consideramos na tabela 6.7, podemos dizer que a amplitude

crítica tem o valor de, aproximadamente, $(\phi_0)_* \cong 0,013$.

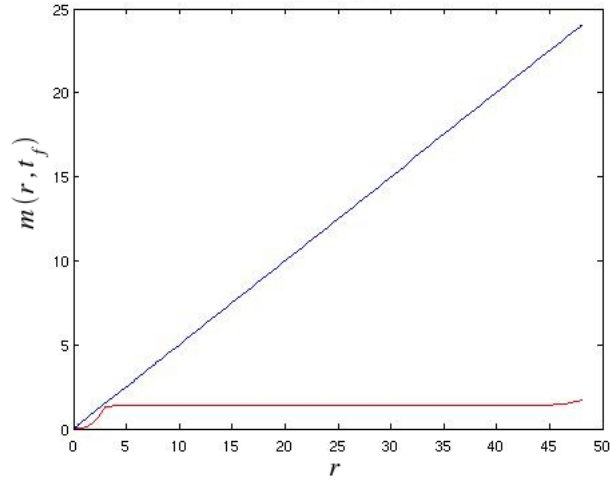


Figura 6.16 - Nesse gráfico estão representados a função perfil da massa, no último tempo atingido pela simulação e o gráfico da reta $y = r$.

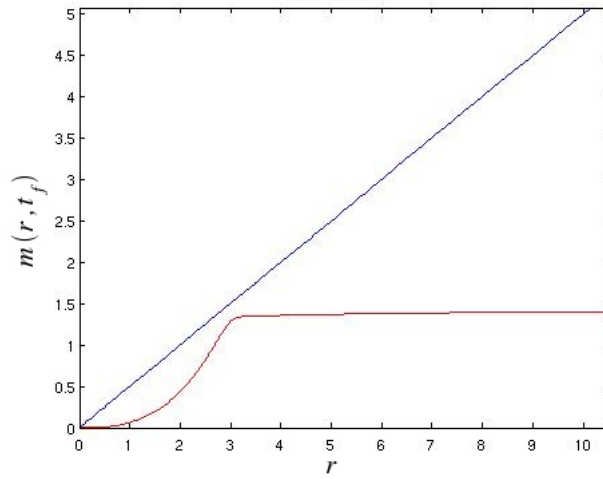


Figura 6.17 - Aumento na escala da figura 6.16.

Finalmente, acabamos de determinar um valor aproximado para o campo escalar crítico que define a solução crítica e a superfície que delimita a transição entre as soluções.

Na seção 6.2, apresentamos características de alguns tipos de interpolações e na seção 6.3, fizemos comparações entre suas subrotinas, explorando seus desempenhos e suas performances.

Comparando as tabelas de 6.2 a 6.6, da seção 6.3, havíamos observado que a interpolação linear gasta menos tempo de CPU. Porém, não tínhamos garantia de que a interpolação linear manteria a precisão necessária, para se ter um bom resultado, após a evolução temporal de um certo campo escalar.

Agora que obtivemos algumas simulações numéricas, podemos substituir a interpolação cúbica de Hermite, pela interpolação linear e compararmos os resultados.

Na tabela 6.8, estão expostas algumas simulações realizadas com o algoritmo, que utiliza a interpolação linear nos pontos exigidos pelo método Runge-Kutta.

Tabela 6.8 - Tempo de evolução temporal de alguns campos escalares iniciais

ϕ_0	tempo gasto de simulação (em minutos)
0,001	01,12
0,002	01,49
0,003	01,64
0,007	03,40
0,010	06,20
0,015	08,34
0,020	08,60

Apresentamos alguns gráficos obtidos das simulações da tabela 8. As figuras 6.18 e 6.19 são os gráficos obtidos da evolução temporal, do campo escalar que tem a amplitude de $\phi_0 = 0,02$.

Note que, na tabela 6.7, o tempo gasto pelo algoritmo que utilizou interpolação cúbica de Hermite, para fazer a evolução temporal do campo escalar, de amplitude 0,02, foi de 967,48 minutos. Já o algoritmo desenvolvido com a interpolação linear, ver tabela 6.8, demorou 8,60 minutos para fazer a mesma simulação.

Se compararmos as figuras 6.9 e 6.18, percebemos que o algoritmo com a interpolação linear tem a quase formação do buraco negro, antes do algoritmo com interpolação cúbica de Hermite. Outra diferença está nos valores do eixo $\partial m / \partial r$, onde no caso linear, é duas vezes maior. Isso nos mostra o risco de se utilizar a interpolação linear.

A comparação entre as simulações numéricas com interpolação linear e as simulações com interpolação cúbica de Hermite, ressalta a importância de se preocupar com a escolha da técnica de interpolação.

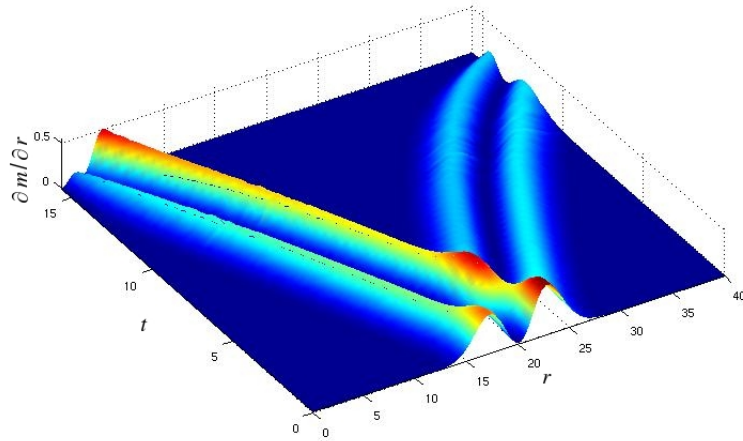


Figura 6.18 - Gráfico da evolução temporal da distribuição da massa no espaço-tempo, para $\phi_0 = 0,02$.

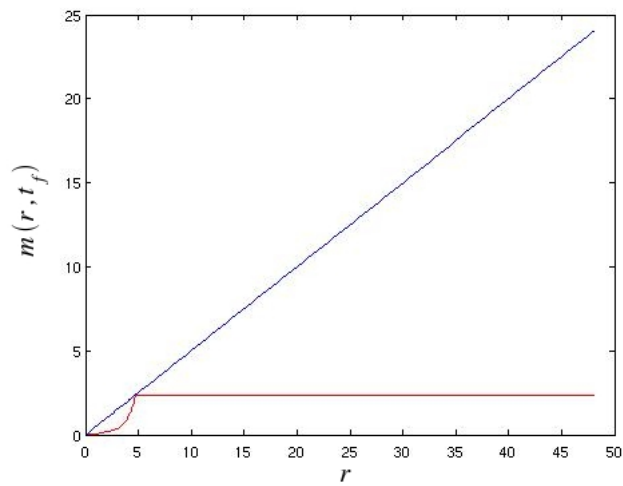


figura 6.19 - Nesse gráfico estão representados a função perfil da massa, no último tempo atingido pela simulação e o gráfico da reta $y = r$.

No decorrer desse capítulo, verificamos a importância da interpolação na estrutura do algoritmo, desenvolvido no capítulo 5. Na seção seguinte, estudaremos um outro perfil Gaussiano.

6.6 Exemplo de Choptuik

Nessa seção consideraremos um dos perfis que Choptuik (1993) [8] estudou. Em particular, optaremos pelo perfil Gaussiano escolhido por Choptuik, para fazer comparações com os resultados obtidos na seção 6.5 - onde consideramos um perfil de Gaussiana diferente da que Choptuik estudou.

Na seção 2, vimos o perfil Gaussiano que Choptuik escolheu, equação (2.11),

$$\phi(r, 0) = \phi_0 r^3 \exp\left(-\left(\frac{r - r_0}{\delta}\right)^q\right).$$

Considerando $q = 2$ e $\delta = 4$, temos

$$\phi(r, 0) = \overline{\phi}_0 r^3 \exp\left(-\left(\frac{r - r_0}{4}\right)^2\right). \quad (6.5)$$

A diferença entre o perfil (6.5) e o perfil Gaussiano utilizado na seção 5.4, equação (6.4), refere-se ao fato que, a Gaussiana da equação (6.5) está mais concentrada em r_0 , do que a Gaussiana da equação (6.4). Em outras palavras, a Gaussiana (6.5) tende a zero, mais rápido do que a Gaussiana (6.4).

Para fazer a evolução temporal dos campos escalares iniciais, com perfil Gaussiano (6.5), substituímos a condição inicial - que considera o perfil (6.4) - pela condição inicial que leva em consideração o perfil (6.5).

Fixando $r_f = 48$ e considerando o perfil Gaussiano, equação (6.5), como perfil de campos escalares iniciais de uma dada família, fizemos dois exemplos de simulações numéricas, tabela 6.9, para comparar com os resultados obtidos com o perfil Gaussiano (6.4) - da seção 5.4.

Tabela 6.9 - Tempo de evolução temporal de alguns campos escalares iniciais

$\overline{\phi}_0$	tempo gasto de simulação (em minutos)
0,001/8000	6,84
0,020/8000	2588,19

Para comparar as simulações, consideramos

$$\overline{\phi}_0 = \frac{\phi_0}{8000}$$

nas simulações apresentadas na tabela 6.7. Note que os dois perfis são semelhantes, a evolução temporal é muito parecida quando comparamos as figuras obtidas, das simulações expostas na tabela 6.7 e na tabela 6.9.

Ao comparar as simulações para $\phi_0 = 0,02$, notamos que a diferença entre tempo gasto na simulação é grande. Para o perfil (6.4), o tempo para a simulação foi de 952,56 minutos, porém para o perfil (6.5), o tempo foi 2588,19 minutos. Isso se deveu ao aumento da precisão para 10^{-8} , na subrotina *ode45*. Caso contrário, não conseguiríamos atingir o critério de parada do buraco negro. No perfil (6.4), utilizamos a precisão de 10^{-6} .

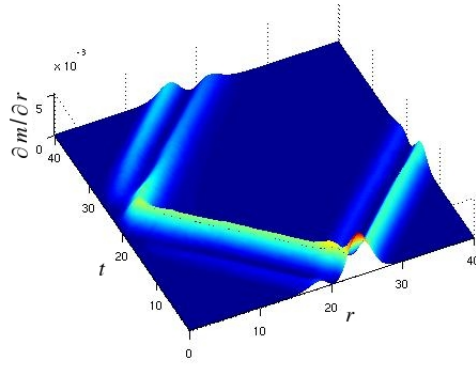


Figura 6.20 - Gráfico da evolução temporal da distribuição da massa no espaço-tempo, para $\overline{\phi_0} = 0,001/8000$.

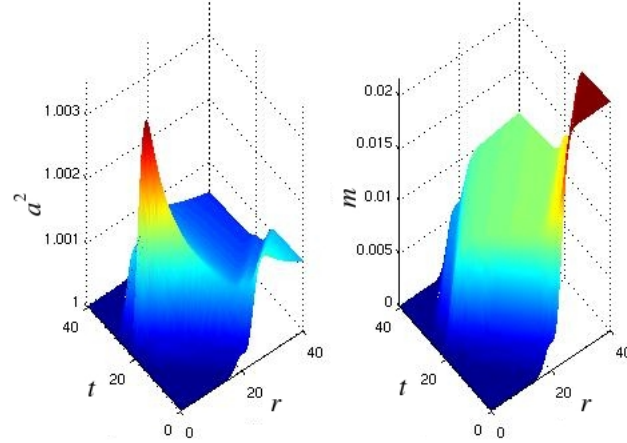


Figura 6.21 - A esquerda temos o gráfico do coeficiente radial da métrica e a direita, temos a evolução temporal da função perfil da massa.

As figuras 6.20 e 6.21, foram obtidas da simulação do campo escalar

inicial, com $\overline{\phi}_0 = 0,001/8000$. O estágio final dessa evolução temporal é a dispersão do campo escalar.

O gráfico da figura 6.20 nos revela que, mesmo para o perfil Gaussiano (6.5) que Choptuik estudou, a simulação continua sem interferência da condição de contorno de r_f . Ou seja, para esse outro perfil, a condição de radiação considerada é suficiente.

Os gráficos da figura 6.21 mostram o comportamento da função radial a e o comportamento da função perfil da massa, durante a evolução temporal.

As figuras 6.22, 6.23 e 6.24, referem-se ao campo com $\overline{\phi}_0 = 0,02/8000$, cujo estágio final é a formação de um buraco negro.

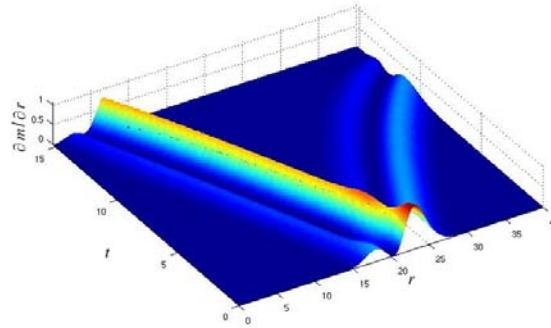


Figura 6.22 - Gráfico da evolução temporal da distribuição da massa no espaço-tempo, para $\overline{\phi}_0 = 0,02/8000$.

Na figura 6.23, o gráfico da esquerda nos mostra a singularidade atingida pela métrica, obtida através da função radial a . No gráfico a direita, a função m não muda de perfil, a partir de um certo t . Essas duas características são evidentes em campos escalares cujo estágio final é um buraco negro.

Comparando as figuras (6.21) e (6.23), percebemos que as duas características observadas - nos gráficos da figura (6.23) - não aparecem nos gráficos da figura (6.21). Ou seja, as duas características juntas não aparecem em evoluções temporais de campos escalares fracos.

A figura 6.24 apresenta o critério de parada do buraco negro sendo atingido, o que nos garante a formação de um buraco negro.

Note que as figuras obtidas, entre as simulações dos campos escalares de perfis (6.4) e (6.5), são parecidas. De fato, o que muda de uma para a outra é a concentração em r_0 . Por exemplo, se compararmos as duas evoluções temporais, figuras 6.1 e 6.20, percebemos apenas diferença entre as concentrações.

Nesse caso, temos $(0,01/8000, 0,02/8000)$, como sendo o intervalo onde se encontra a amplitude crítica. Assim, também podemos comparar com o

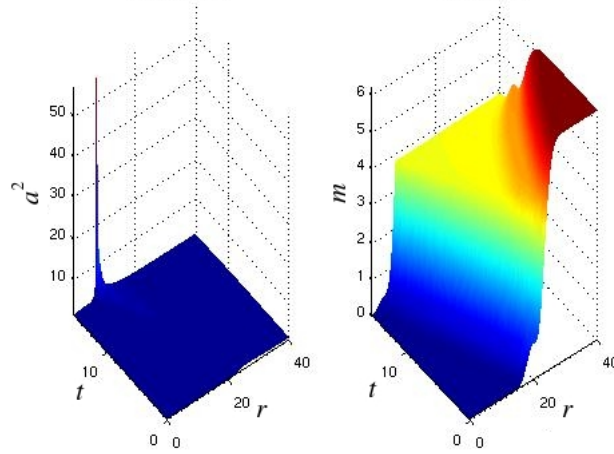


Figura 6.23 - A esquerda temos o gráfico do coeficiente radial da métrica e a direita, temos a evolução temporal da função perfil da massa.

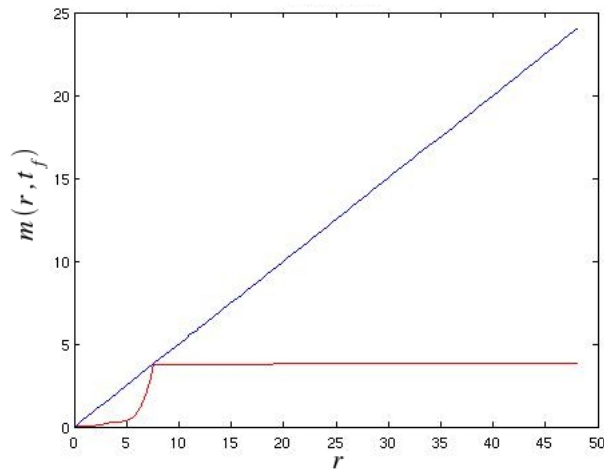


Figura 6.24 - Nesse gráfico estão representados a função perfil da massa, no último tempo atingido pela simulação e o gráfico da reta $y = r$.

resultado do perfil Gaussiano (6.4), onde obtemos (0,01 , 0,02) - ver seção 6.5.

Portanto, comparando os resultados obtidos das evoluções temporais dos campos escalares, percebemos que o acréscimo do fator r^3 , na Gaussiana (6.4), altera o intervalo da amplitude crítica, pelo fator $1/8000$. Esse fator é

exatamente o número que aparece na comparação entre ϕ_0 e $\overline{\phi_0}$.

Nas simulações apresentadas, as Gaussianas estão centradas em $r = r_0 = 20$. No perfil (6.5), a expressão r^3 torna a altura da Gaussiana 8000 vezes maior, do que a altura da Gaussiana (6.4). Por isso, consideramos

$$\overline{\phi_0} = \frac{\phi_0}{8000}$$

para as simulações expostas na tabela 6.9.

Por fim, existem poucas diferenças ao considerar os perfis Gaussianos (6.4) e (6.5), para estudar o colapso gravitacional destes campos. Porém, há uma grande diferença se a questão for o tempo gasto de CPU.

Nesse ponto, chegamos ao término desse trabalho. O capítulo seguinte será destinado às conclusões elaboradas ao longo dessa dissertação.

Capítulo 7

Conclusões

Ao longo dessa dissertação, discutimos os principais resultados em colapso gravitacional de um campo escalar sem massa e chamamos a atenção para os fenômenos descobertos por Choptuik, através de simulações numéricas.

No desenvolvimento do algoritmo, o Método de Linhas adaptativo, com refinamento e regularizador, foi fundamental para o desempenho das simulações. O ponto crucial do algoritmo é quando o Método Runge-Kutta necessita fazer interpolações, para conseguir resolver as equações do campo, que estão relacionadas com a obtenção dos coeficientes da métrica.

A estrutura apresentada na seção 5.2.1 foi capaz de elaborar um algoritmo, que simula a evolução temporal do campo escalar sem massa em estudo. A *condição de radiação* escolhida, na seção 5.2.3, garantiu que as simulações não tivessem influência da fronteira $r = r_f$ e também, que o algoritmo nos fornecesse resultados plausíveis e desejáveis.

A extensão de cinco pontos, realizada para $\Pi(0, t)$, seção 5.2.3, assegurou a *condição de contorno* $\Pi'(0, t) = 0$ e que não tivéssemos interferências de erros se propagando da origem. Ao longo das simulações numéricas nos certificamos que a regularidade da métrica foi mantida.

A escolha de um método de interpolação é fundamental para o desempenho do algoritmo, então fizemos comparações entre três métodos de interpolação, para determinar qual se adequaria melhor, ao algoritmo desenvolvido.

Optamos pela interpolação cúbica de Hermite e simulamos a evolução temporal de vários campos escalares, com perfil Gaussiano. Delimitamos o intervalo $(0, 01, 0, 02)$, onde se encontra a amplitude crítica, do campo escalar que evolui para o ponto crítico.

Para a amplitude crítica, obtivemos um valor aproximado de $(\phi_0)_* \cong 0,013$, mediante a evolução temporal do campo escalar, de amplitude $\phi_0 = 0,0125$.

Analisando as simulações numéricas apresentadas na seção 6.5 - tabela

6.7, verificamos a seguinte afirmação: Uma boa estratégia para se aproximar do campo escalar crítico é fazer o refinamento dos dados iniciais, a partir dos dados iniciais suaves. Em particular, para encontrar um valor para a amplitude crítica é conveniente fazer o refinamento a partir de campos fracos.

Uma outra constatação que se fez é que é possível obter soluções tão próximas quanto se queria à solução de buraco negro e da solução crítica, com os algoritmos desenvolvidos e simples computadores de mesa.

Na seção 6.6, escolhemos o perfil Gaussiano (6.5) utilizado por Choptiuk e o comparamos com os estudos que realizamos na seção 6.5, com o perfil Gaussiano (6.4). Obtivemos grandes semelhanças entre as evoluções desses campos e encontramos o intervalo $(0,01/8000, 0,02/8000)$.

No decorrer desse trabalho, conseguimos desenvolver um algoritmo confiável em MatLab, capaz de fazer as simulações numéricas do colapso gravitacional, sem precisar de técnicas complicadas e códigos fontes extensos e rebuscados.

Referências Bibliográficas

- [1] A. M. Abrahams, C. R. Evans, *Critical behavior and scaling in vacuum axissymmetric gravitational collapse*. Phys. Rev. Lett., v. 70, p. 2980-2983, 1993.
- [2] R. Arnowitt, S. Deser e C. Misner, *The Dynamics of General Relativity*. In: *Gravitation: an introduction to current research*, Louis Witten ed. (Wiley 1962), chapter 7, pp 227-265, New York, 1962.
- [3] P. Bergmann, *Introduction to the Teory of Relativity*. Dover Publication, New York, 1976.
- [4] D. Birmingham, S. Sen, *Gott time machines, BTZ black hole formation and Choptuik scaling*. Phys Rev. Lett., v. 84, p. 1074-1077, Feb. 2000.
- [5] P. Brady, *Self-similar scalar field collapse: naked singularities and critical behavior*. Phys. Rev. D, v. 51, n. 8, p. 4168-4176, April 1995.
- [6] B. J. Carr, C. Gundlach, *Spacetime structure of self-similar spherically symmetric perfect fluid solutions*. Phys. Rev D, v. 67, 024035(13), Jan. 2003.
- [7] M. W. Choptuik, *Critical Behavior in massless scalar field collapse*. In: d'Inverno R. *Approaches to Numerical Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992, p. 202-210.
- [8] M. W. Choptuik, *Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field*. Phys. Rev. Lett. , v. 70, n. 1, p. 9–12, Jan. 1993.
- [9] D. Christodoulou, *The problem of a self-gravitating scalar field*. Comm. Math. Phys. , 105, p. 337-361, 1986.
- [10] G. Clement, A. Fabbri, *Analytical Treatment of critical collapse in 2+1 dimensional AdS spacetime: a toy model*. Class. Quant. Grav., v. 18, p. 3665-3680, March 2001.

- [11] G. Clement, A Fabbri, *Critical collapse in $2 + 1$ dimensional AdS spacetime: quasi-CSS solutions and linear perturbations*. Nucl. Phys. B, v. 630, 269-292, 2002.
- [12] C. R. Evans, J. S. Coleman, *Critical phenomena and self-similarity in the gravitational collapse of radiation fluid*. Phys. Rev. Lett., v. 72, n. 12, p. 1782-1785, March 1994.
- [13] D. Garfinkle, *An exact solution for $2 + 1$ dimensional critical collapse*. Phys Rev. D, v. 63, 044007(5), Jan. 2001.
- [14] D. Garfinkle, C. Cutler, G. C. Duncan, *Choptuik scaling in six dimensions*. Phys. Rev. D, v. 58, 104007, Oct. 1999.
- [15] D. Garfinkle, G. C. Duncan, *Scaling of curvature in sub-critical gravitational collapse*. Phys. Rev. D, v. 58, 064024, Oct. 1998.
- [16] D. Garfinkle, C. Gundlach, *Symmetry-seeking spacetime coordinates*. Class. Quant. Grav., v. 16, p. 4111-4123, 1999.
- [17] D. Garfinkle, C. Gundlach, *Perturbations of an exact solution $2 + 1$ dimensional critical collapse*. Phys. Rev. D, v. 66, 044015(4), Aug. 2002.
- [18] C. Gundlach, *Critical gravitational collapse of a perfect fluid with $p=k\rho$: nonspherical perturbation*. Phys. Rev. D, v. 65, 084021(22), March 2002.
- [19] C. Gundlach, *Critical phenomena in gravitational collapse*. Physics Reports, 376, p. 339-405, 2003.
- [20] C. Gundlach, *Understanding critical collapse of a scalar field*. Phys. Rev. D, v. 55, n. 2, p. 695-713, Jan. 1997.
- [21] C. Gundlach, J. M. Martín-García, *Charge scaling and universality in critical collapse*. Phys Rev. D, v. 54, p. 7353-7360, June 1996.
- [22] R. S. Hamadé, J. H. Stewart, *The spherical symmetric collapse of a massless scalar field*. Class. Quant. Grav., v. 13, p. 497-512, 1996
- [23] D. Hanselman, B. Littlefield *MatLab 6 - Curso completo*. Prentice Hall, São Paulo, 2003.
- [24] E. W. Hirschmann, D. M. Eardley, *Universal scaling and echoing in gravitational collapse of a complex scalar field*. Phys. Rev. D, v. 51, 4198(10) , April 1995.

- [25] E. W. Hirschmann, D. M. Eardley, *Critical exponents and stability at the black hole threshold for a complex scalar field*. Phys. Rev. D, v. 52, n. 10, p. 5850-5856, Nov. 1995.
- [26] S. Hod, T. Piran, *Critical behavior and universality in gravitational collapse of a charge scalar field*. Phys. Rev. D, v. 55, p. 3485-3496, March 1997.
- [27] S. Hod, T. Piran, *Fine-structure of Choptuik's mass-scaling relation*. Phys. Rev. D, v. 55, n. 2, p. R440-R442, Jan. 1997.
- [28] V. Husain, M. Olivier, *Scalar field collapse in three-dimensional AdS spacetime*. Class. Quant. Grav., v. 18, p. L1-L10, 2001.
- [29] T. Koike, T. Hara, S. Adachi, *Critical behavior in gravitational collapse of a perfect fluid*. Phys. Rev. D, v. 59, 104008(9), April 1999.
- [30] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Statistical Physics - Part 1*. 3rd ed., Pergamon Press, Oxford, 1980.
- [31] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Statistical Physics - Part 2*. 3rd ed., Pergamon Press, Oxford, 1980.
- [32] D. Maison, *Non-Universality of Critical Behaviour in Spherically Symmetric Gravitational Collapse*. Phys. Lett. B, v. 366, p. 82-84, Jan. 1996.
- [33] J. M. Martín-García, C. Gundlach, *Global structure of Choptuik's critical solution in scalar field collapse*. Phys. Rev. D, v. 68, 024011(25), July 2003.
- [34] D. W. Nielsen, M. W. Choptuik, *Critical phenomena in perfect fluid*. Class. Quant. Grav., v. 17, p. 761-782, 2000.
- [35] H. P. de Oliveira, I. D. Soares, *Galerkin method in the gravitational collapse: A dynamical system approach*. Phys. Rev. D, v. 65, 064029(6), Feb. 2002.
- [36] A. Ori, T. Piran, *Naked singularities in self-similar spherical gravitational collapse*. Phys. Rev. Lett., v. 59, p. 2137-2149, Nov. 1987.
- [37] Y. Peleg, A. Steif, *Phase transition for gravitationally collapsing dust shells in $2 + 1$ dimensional*. Phys. Rev. D, v. 51, n. 8, p. R3992-R3996, April 1995.

- [38] M.J.D. Powell, *Approximation theory and methods*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [39] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes - the Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [40] F. Preorius, M. W. Choptuik, *Gravitational collapse in 2+1 dimensional AdS spacetime*. Phys. Rev. D, v. 62, 124012, Nov. 2000.
- [41] M. D. Roberts, *Scalar field counterexamples to the cosmic censorship hypothesis*. Gen. Rel. Grav., v. 21, p. 907-939, 1989.
- [42] M. A. G. Ruggiero, V. L. R. Lopes, *Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais*. 2 ed .Makron Books, São Paulo, 1996.
- [43] P. Saucez, A. V. Wouwer, W. E. Schiesser. *Adaptive Method of Lines*. Chapman & Hall/CRC, Florida, 2001.
- [44] R. M. Wald, *Gravitational collapse and cosmic censorship*. APS meeting, April 1997.
- [45] J. A. C. Weideman, *Spectral differentiation matrices for the numerical solution of Schrödinger's equation*. J. Phys. A: Math. Gen., v. 39, p. 10229-10237, Feb. 2006.

Anexo I - arquivos do algoritmo do campo escalar

Nesse anexo, mostraremos os arquivos que elaboramos, para termos o algoritmo que faz a evolução temporal de um campo escalar inicial. A seguir, expomos cada arquivo e a sua principal função.

atzero.m - Arquivo que estabelece as condições de contorno na origem.

chopExp.m - Esse é o arquivo central, pois é a partir dele que o algoritmo é executado no terminal do MatLab - pelo comando *chopExp(r_f)*; Sua principal função é fazer o laço de repetição temporal até atingir um dos critérios de parada.

CompData.m - Arquivo onde se define o campo escalar inicial.

fd5pt.m - Arquivo que contém o algoritmo de Greg von Winckel, desenvolvido para calcular uma extensão de cinco pontos.

PlotData.m - Nesse arquivo, definimos os gráficos de saída do algoritmo.

PlotTemp.m - Mais um arquivo destinado a saída do algoritmo.

SpaceData.m - Nesse arquivo, as equações diferenciais ordinárias (2.8) e (2.9), são resolvidas pelo método Runge-Kutta e o tamanho próximo passo temporal é estabelecido. Note que, nesse arquivo encontra-se a interpolação exigida pelo método Runge-Kutta.

timeEvol.m - A evolução temporal, das equações diferenciais parciais (2.6) e (2.7), é efetuada pelo método Runge-Kutta, dentro do passo temporal estabelecido.

A seguir, colocamos todos os arquivos na seqüência exposta acima, um em cada página quando possível.

```

function P1=atzero(dx,F)
if length(dx)==4 || length(F)==4,
    dx1=dx(1);dx2=dx(2);dx3=dx(3);dx4=dx(4);
    F2=F(1);F3=F(2);F4=F(3);F5=F(4);
else
    error('size mismatch');
end
t1 = (dx3 ^ 2);
t2 = (t1 ^ 2);
t3 = (t2 * t1);
t4 = (dx4 * t3);
t6 = (dx2 * F2 * dx1);
t9 = (t1 * dx3);
t10 = (dx4 ^ 2);
t11 = (t10 ^ 2);
t12 = (t11 * t9);
t15 = (dx1 ^ 2);
t16 = (t15 ^ 2);
t17 = (t16 * dx1);
t18 = (dx2 ^ 2);
t20 = dx4 * dx3;
t21 = (F3 * t20);
t24 = (t18 * dx2);
t25 = (t24 * t16);
t26 = (F4 * t20);
t29 = (t1 * t17);
t30 = (dx2 * dx4);
t31 = (F4 * t30);
t34 = (t15 * t24);
t35 = (t10 * dx4);
t36 = (t35 * dx3);
t40 = (F2 * t30);
t43 = (t18 * t15);
t44 = t1 * t35;
t45 = (F2 * t44);
t48 = (t15 * dx1);
t49 = (dx2 * t48);
t50 = (F3 * t44);
t53 = (dx2 * t15);
t54 = (t2 * dx3);
t55 = (dx4 * t54);
t59 = (t10 * t2);
t60 = (F2 * t59);
t63 = (dx3 * t48);
t64 = (t11 * F2);
t65 = (dx2 * t64);
t68 = (dx2 * t16);
t69 = (t10 * t1);

```

```

t70 = (F3 * t69);
t73 = 2 * t6 * t4 + 2 * t6 * t12 - 12 * t21 * t18 * t17 +
24 * t26 * t25 + 6 * t31 * t29 + 4 * F4 * t36 * t34 +
6 * t40 * t29 + 42 * t45 * t43 - 24 * t50 * t49 -
6 * F3 * t55 * t53 + 30 * t60 * t53 + 4 * t65 * t63 - 36 * t70 * t68;
t74 = (dx4 * t9);
t75 = F3 * t74;
t78 = (t35 * t16);
t79 = (dx3 * dx2);
t87 = (dx2 * t35);
t91 = F2 * t55;
t94 = t18 * dx1;
t95 = F2 * t1;
t99 = t18 ^ 2;
t100 = t99 * dx2;
t102 = dx4 * F2;
t105 = t99 * t18;
t109 = F2 * t10;
t111 = F3 * t10;
t114 = F4 * t10;
t117 = t9 * t17;
t118 = dx2 * F5;
t121 = t9 * t16;
t122 = F5 * t18;
t125 = t16 * t15;
t126 = t18 * t125;
t127 = dx3 * F4;
t129 = -24 * t75 * t68 + 10 * F2 * t79 * t78 + 6 * F4 * t69 * t34 +
24 * F2 * t87 * t9 * t15 + 12 * t91 * t53 + 6 * t11 * t95 * t94 +
4 * t102 * t9 * t100 + t102 * t1 * t105 + t109 * dx3 * t105 -
12 * t111 * t25 + 12 * t114 * t25 - 2 * t118 * t117 -
7 * t122 * t121 + t127 * t126;
t131 = t24 * t17;
t134 = dx2 * F4;
t137 = F4 * t18;
t140 = F4 * t1;
t143 = t99 * t16;
t144 = dx3 * F5;
t149 = t35 * t17;
t150 = dx3 * F3;
t153 = dx3 * F2;
t156 = dx2 * F3;
t159 = F3 * t18;
t169 = dx4 * F4;
t172 = 4 * t127 * t131 + 2 * t134 * t117 + 7 * t137 * t121 +
12 * t140 * t25 - 6 * t144 * t143 + 7 * t95 * t78 - 2 * t150 * t149 +
2 * t153 * t149 - 2 * t156 * t149 - 7 * t159 * t78 -
7 * F3 * t1 * t78 + 2 * t134 * t149 + 7 * t137 * t78 +
6 * t169 * t143;

```



```

t175 = dx4 * F3;
t178 = t1 * t125;
t191 = t100 * t15;
t196 = t99 * t15;
t197 = F5 * t9;
t200 = F4 * t9;
t205 = t105 * t15;
t207 = F3 * t35;
t210 = 6 * t127 * t143 - 6 * t175 * t143 - t175 * t178 +
2 * t153 * t35 * t100 + 7 * t95 * t35 * t99 +
6 * t109 * t1 * t100 + t64 * dx3 * t99 - 3 * t111 * t191 +
3 * t114 * t191 - 3 * t197 * t196 + 3 * t200 * t196 +
3 * t140 * t191 - t144 * t205 - 3 * t207 * t196;
t213 = F4 * t35;
t219 = F5 * t1;
t223 = F2 * t35;
t226 = t35 * t2;
t227 = F2 * t15;
t230 = t10 * t54;
t240 = t54 * t48;
t243 = 3 * t213 * t196 + t169 * t205 + t127 * t205 - t175 * t205 -
3 * t219 * t191 + 3 * t223 * t2 * t18 + 3 * t227 * t226 +
3 * t227 * t230 + t227 * t12 + t227 * t4 + t64 * t18 * t9 +
2 * t64 * t24 * t1 + 4 * t102 * t240;
t244 = t9 * t48;
t247 = t35 * t48;
t248 = dx2 * t1;
t252 = t99 * t48;
t255 = t2 * t48;
t260 = dx4 * t1;
t261 = F4 * t260;
t264 = F3 * t260;
t278 = t1 * t16;
t279 = dx4 * t18;
t283 = F3 * t11;
t287 = 8 * t223 * t244 + 28 * F2 * t248 * t247 - 20 * t21 * t252 +
24 * t40 * t255 + 6 * t26 * t191 + 9 * t261 * t196 -
15 * t264 * t196 - 18 * t50 * t43 - 6 * t21 * t191 +
6 * t6 * t230 + 20 * t40 * t121 - 12 * F3 * t30 * t29 +
15 * F2 * t279 * t278 - 4 * dx2 * t283 * t63;
t293 = dx3 * t16;
t297 = F2 * t36;
t300 = t18 * t48;
t305 = F2 * t74;
t310 = dx2 * t10;
t311 = F2 * t310;
t317 = t10 * t9;
t318 = F3 * t317;
t321 = F2 * t317;

```

```

t324 = dx4 * t2;
t325 = F2 * t324;
t328 = t18 * t16;
t329 = t10 * dx3;
t330 = F3 * t329;
t333 = -24 * t21 * t25 + 4 * t31 * t121 + 4 * F4 * t87 * t293 +
20 * t297 * t34 - 60 * t70 * t300 - 40 * t75 * t300 +
40 * t305 * t34 + 6 * t6 * t226 + 30 * t311 * t278 +
6 * t102 * t2 * t99 - 40 * t318 * t49 +
72 * t321 * t43 + 36 * t325 * t43 - 36 * t330 * t328;
t334 = t24 * t48;
t335 = F2 * t329;
t338 = dx1 * t24;
t339 = t11 * t153;
t342 = F4 * t279;
t349 = F4 * t310;
t356 = F2 * t260;
t363 = t99 * dx1;
t370 = t100 * dx1;
t373 = 20 * t335 * t334 + 4 * t339 * t338 + 8 * t342 * t244 +
8 * F4 * t18 * t35 * t63 + 6 * t349 * t278 + 30 * t60 * t94 +
6 * t339 * t43 + 20 * t356 * t334 - 30 * t70 * t34 - 20 * t75 * t34 +
20 * t305 * t363 - 15 * t330 * t196 + 10 * t297 * t363 +
6 * t356 * t370;
t381 = F3 * t324;
t398 = dx3 * t17;
t407 = -30 * t318 * t43 + 48 * t321 * t338 - 15 * t381 * t43 +
4 * F4 * t74 * t34 - 40 * t330 * t334 + 15 * t335 * t196 +
15 * t356 * t196 + 21 * t342 * t278 + 2 * t31 * dx3 * t125 +
12 * t342 * t398 - 36 * t264 * t328 - 8 * t207 * t244 -
10 * t111 * t255;
t412 = t1 * t48;
t432 = F3 * t15;
t445 = -4 * t175 * t240 - 2 * t122 * t255 + 2 * t64 * t412 +
12 * t109 * t9 * t99 + 8 * t223 * t9 * t24 + 3 * t109 * t54 * t18 +
t102 * t3 * t18 + 10 * t109 * t2 * t24 + 4 * t102 * t54 * t24 -
t432 * t12 - t432 * t4 + 12 * t91 * t94 - 3 * F3 * t11 * dx3 * t43 -
3 * F3 * t11 * t1 * t53;
t447 = F4 * t329;
t450 = F2 * t69;
t453 = F3 * t36;
t465 = t35 * t9;
t475 = F4 * t18 * t10;
t484 = 9 * t447 * t196 + 30 * t450 * t363 - 12 * t453 * t34 +
28 * t45 * t338 + 48 * t311 * t244 - 14 * F3 * t79 * t78 +
24 * t325 * t338 - 12 * F3 * t465 * t53 - 15 * F3 * t59 * t53 +
6 * t349 * t398 + 21 * t475 * t293 + 60 * t450 * t300 +
6 * t335 * t370 - 40 * t264 * t334;
t496 = F4 * t11;

```

```

t511 = 24 * t447 * t334 + 60 * t450 * t34 - 24 * t453 * t300 +
40 * t305 * t300 + 24 * F2 * t465 * t94 + t496 * t34 - t283 * t34 -
F5 * t2 * t34 + F4 * t2 * t34 - t283 * t293 - 6 * t111 * t29 -
12 * t219 * t25 + t134 * t178 + 6 * t137 * t29;
t520 = t10 * t125;
t524 = t10 * t17;
t538 = -t175 * t126 - 4 * t175 * t131 + t169 * t126 +
4 * t169 * t131 - t150 * t520 + t153 * t520 - t156 * t520 -
6 * t159 * t524 + t134 * t520 + 6 * t137 * t524 +
6 * t109 * t29 - 4 * t175 * t117 + 4 * t102 * t117 -
12 * t111 * t121;
t541 = t2 * t16;
t562 = t100 * t48;
t567 = 12 * t109 * t121 - 6 * t175 * t541 + 6 * t102 * t541 -
t118 * t178 - 6 * t122 * t29 - t144 * t126 - 4 * t144 * t131 -
10 * t111 * t252 + 10 * t114 * t252 - 8 * t197 * t334 +
8 * t200 * t334 + 10 * t140 * t252 - 4 * t144 * t562 - 8 * t207 * t334;
t593 = 8 * t213 * t334 + 4 * t169 * t562 + 4 * t127 * t562 -
4 * t175 * t562 - 10 * t219 * t252 + t102 * t178 - 2 * t283 * t412 -
2 * t283 * t300 + 2 * t137 * t11 * t48 + 2 * t137 * t255 +
t496 * t68 - t283 * t68 + t64 * t293 - t118 * t541;
t601 = dx3 * t18;
t608 = dx2 * t17;
t626 = t134 * t541 + 10 * t109 * t255 - 3 * t432 * t226 -
3 * t432 * t230 + 20 * F2 * t601 * t247 - 2 * t21 * dx2 * t125 -
12 * t330 * t608 + 15 * t335 * t328 + 6 * t335 * t608 +
20 * t26 * t252 + 24 * t261 * t334 + 12 * t475 * t412 -
20 * t381 * t49 + 6 * t65 * t1 * t15;
t633 = dx4 * t79;
t650 = t24 + 2 * t601 + 6 * t94 + t279 + t248 + t633 +
8 * dx1 * dx2 * dx3 + 4 * dx1 * t30 + 9 * t53 + 2 * t1 * dx1 +
6 * dx3 * t15 + 2 * dx1 * dx3 * dx4 + 4 * t48 + 3 * dx4 * t15;
t664 = 1 / dx2 / dx3 / dx4 / (t310 + t279 + t601 + 3 * t633 +
t329 + 2 * t260 + t9 + 2 * t248) / t650 * (t73 + t129 + t172 +
t210 + t243 + t287 + t333 + t373 + t407 + t445 + t484 + t511 +
t538 + t567 + t593 + t626);
P1=t664;
end

```

```

function [R,T,rd,Td,a2d,Fd,Pd,md,Mass]=chopExp(rmax)
t0=cputime; % INITIAL SETTINGS AND DATA
[tf,Ntimes,r0,Npoints,r,drmin,dt,Aa2,Af_Aa,m,F,P]=CompData(rmax);
M=m(Npoints);sprintf('%s %g %g','Initial Total Massa and time step',M,dt)
sprintf('%s %d %d ','[Ntimes,Npoints] = ',Ntimes,Npoints)
Nplots=100;
Mass=zeros(1,Ntimes); Tt=zeros(Ntimes,1);
a2t=zeros(Nplots,Ntimes); mt=zeros(Nplots,Ntimes);
Ft=zeros(Nplots,Ntimes); Pt=zeros(Nplots,Ntimes);
rdmax=2*r0; rdisplay=linspace(0,rdmax,Nplots); % r FOR PLOTTING
fpirmax=4*pi*rmax;
diffAa2=0;nt=0;t=0;ak=1; % MAIN LOOP
while (t<tf && nt<Ntimes) && ( (dt/tf)>1e-6 && diffAa2<1e-1 && ak<1e3),
    sprintf('%s %g %s %d %s %g %d','Total Mass=',m(end),...
        'Grid Points Number=',Npoints,'[Time nt] = ',t,nt)
% TIME EVOLUTION OF THE FUNCTIONS AT THE GRID POINTS
    [Aa2evol,F,P]=timeEvol(Npoints,r,Aa2,Af_Aa,F,P,dt);
    % plot(r,F); % testes
    % pause;
% SPACE CONSTRAINT FOR THE METRIC FUNCTION Aa2. IT RETURNS A NEW GRID
    [Npoints,rn,drmin,dt,Aa2,Af_Aa,m,F,P]=SpaceData(r,F,P);
    Aa2last=Aa2evol(end);P2F2=P(end)^2+F(end)^2;
    Aa2p=Aa2last*(4*pi*rmax*P2F2+(1-Aa2last)/rmax);
    Aa2evol=spline(r,[0 Aa2evol Aa2p],rn); % INTERPOLATION TO THE NEW GRID
    [diffAa2,indAa2]=max(abs(Aa2-Aa2evol)); % COMPARISON
    diffAa2=diffAa2/Aa2(indAa2);
    sprintf('%s %g %s %g %s %g',...
        'Constraint x Free Evolution Relative Difference =',diffAa2,...
        'at r=',rn(indAa2),'Time Step=',dt)
    t=t+dt; nt=nt+1; Tt(nt)=t; r=rn;
    Aa2p=Aa2(end)*(fpirmax*P2F2+(1-Aa2(end))/rmax);
    a2t(:,nt)=spline(r,[0,Aa2,Aa2p],rdisplay);
    D_Dr=fd5pt(r);Pp=P*(D_Dr)';Fp=F*(D_Dr)';
    Ft(:,nt)=spline(r,[Fp(1) F Fp(end)],rdisplay); %INTERPOLATION DISPLAY
    Pt(:,nt)=spline(r,[0 P Pp(end)],rdisplay);
    mt(:,nt)=0.5*rdisplay'.*(1-1./a2t(:,nt));;
    Mass(nt)=m(end);
    MBH=1-2*m(2:end)./r(2:end);
    [aq,indaq]=min(MBH);
    [ak,indak]=max(Aa2);
    if aq<5e-4 || ak>1e3
        sprintf('%s %g','Black Hole Mass? m =',m(indaq))
        sprintf('%s %g','Black Hole Mass? r/2=',r(indak)/2)
    end
end
end
tempocomp=(cputime-t0)/60;
sprintf('%s %g','CPU Time Estimate in minutes',tempocomp)
[R,T,rd,Td,a2d,Fd,Pd,md]=PlotData(r,rdisplay,Aa2,m,Mass(1:nt),nt,...

```

```
    Tt(1:nt),a2t(:,1:nt),Ft(:,1:nt),Pt(:,1:nt),mt(:,1:nt));  
beep;  
end
```

```

function [tf,Ntimes,r0,Npoints,r,drmin,dt,Aa2,Af_Aa,m,F,P]=CompData(rmax)
phi0=1e-3; delta=4; r0=rmax/2-delta;
[r,F]=GaussProf(phi0,r0,delta,rmax); P=zeros(size(r)); % GAUSSIAN PROFILE
% SOLVE EQUATION FOR Aa2 AND GET THE ADAPTATIVE GRID
[Npoints,r,drmin,dt,Aa2,Af_Aa,m,F,P]=SpaceData(r,F,P);
tf=2*r0 ; Ntimes=10*floor(tf/drmin);
end

function [r,F]=GaussProf(phi0,r0,delta,rmax)
drmax=0.4*delta^2/r0; ri=0:drmax:rmax; rr0d=(ri-r0)/delta;
phi=phi0*exp(-rr0d.^2); dr=drmax./(1+abs(diff(phi))); % NON UNIFORM GRID
Fi=-phi0*2*rr0d.*exp(-rr0d.^2); Fi(1)=0; % r0>>0 F=Dphi/Dr
rnew=cumsum(dr);
if rnew(end) > rmax
    Np=rnew(rnew>rmax);
    rnew=[rnew(1:Np-1),rmax];
else
    rnew=[rnew,rmax];
end
rf=[0,rnew];
F=spline(ri,Fi,rf);F(1)=0;
r=rf;
end

```

```

function D=fd5pt(x)
% Written by: Greg von Winckel - 07/12/05
% Contact: gregvw(at)chtm(dot)unm(dot)edu
N1=length(x); N=N1-1; D=zeros(N1); %D2=D;
% Interior points
for k=3:N-1
    n=(k-2):(k+2);    A=collocD(x(n));
    %A2=A*A;
    D(k,n)=A(3,:);    %D2(k,n)=A2(3,:);
end
% Boundary points
A=collocD(x(1:5)); %A2=A*A;
D(1,1:5)=A(1,:); D(2,1:5)=A(2,:);
%D2(1,1:5)=A2(1,:); %D2(2,1:5)=A2(2,:);
dex=(N-3):N1; A=collocD(x(dex)); %A2=A*A;
D(N,dex)=A(4,:); D(N1,dex)=A(5,:);
%D2(N,dex)=A2(4,:); %D2(N1,dex)=A2(5,:);
D=sparse(D);
end

function D=collocD(x)
x=x(:); N=length(x); N1=N+1; N2=N*N;
X=repmat(x,1,N); Xdiff=X-X'+eye(N);
W=repmat(1./prod(Xdiff,2),1,N);
D=W./(W'.*Xdiff);
D(1:N1:N2)=1-sum(D); D=- (D');
end

```

```

function [R,T,rd,Td,a2d,Fd,Pd,md]=PlotData(r,rdisplay,Aa2,m,...
Mass,nt,Tt,a2t,Ft,Pt,mt)
rd=rdisplay;
Td=linspace(0,Tt(nt),100);
a2d=pchip(Tt,a2t,Td);
Fd=pchip(Tt,Ft,Td);
Pd=pchip(Tt,Pt,Td);
md=pchip(Tt,mt,Td);
[T,R]=meshgrid(Td,rd);
dmdr=2*pi*(R./a2d).^2.*(Fd.^2+Pd.^2);
%save chopExp;

figure;
plot(r,m,'-r',r,r./2,'-b');title('Buraco Negro?');
xlabel('r');ylabel('m');
figure;
plot(r,Aa2); title('Final Metric a^2');
xlabel('r');ylabel('a^2');
axis tight;
figure;
subplot(1,2,1);
plot(r,m); title('Final Mass Profile');
xlabel('r');ylabel('m');
axis tight;
subplot(1,2,2);
plot(Tt,Mass); title('Total Mass Evolution');
xlabel('t');ylabel('M');
axis tight;
figure;
subplot(1,2,1);
surf(R,T,a2d); title('Metric Function');
shading('interp');axis tight;xlabel('r');ylabel('t');zlabel('a^2');
subplot(1,2,2);
surf(R,T,md); title('Mass Function');xlabel('r');ylabel('t');zlabel('m');
shading('interp');axis tight;
figure;
subplot(1,2,1);
surf(R,T,Fd); title('\Phi');
shading('interp');axis tight;xlabel('r');ylabel('t');zlabel('\Phi');
subplot(1,2,2);
surf(R,T,Pd); title('\Pi');
shading('interp');axis tight;xlabel('r');ylabel('t');zlabel('\Pi');
figure;
contourf(R,T,(Fd.^2+Pd.^2)); title('\Phi^2+\Pi^2');
axis tight;xlabel('r');ylabel('t');zlabel('\Phi^2+\Pi^2');
figure;
surf(R,T,dmdr); title('\partial m/\partial r');
shading('interp');axis tight;xlabel('r');ylabel('t');

```



```
zlabel('\partial m/\partial r');  
end
```

```
F2P2=(Fd.^2+Pd.^2);  
lev=1e-5*(0:0.6:24);  
%figure; surf(R,T,F2P2);  
contourf(R,T,F2P2,lev); title('\Phi^2+\Pi^2');  
axis tight;
```

```

function [Npoints,rg,drmin,dt,Aa2,Af_Aa,m,F,P]=SpaceData(ri,Fi,Pi)
rmax=ri(end);
step=rmax/100;
%opts = odeset('RelTol',1e-6,'Refine',6);
opts = odeset('RelTol',1e-6,'MaxStep',step);
%opts = odeset('RelTol',1e-6);
P2F2i=Fi.^2+Pi.^2;
%Encontrar o ponto de máximo de P2F2i para separar a solução
%em duas partes
%\left[P2F2max,Npico\right]=max(P2F2i);
%rpico=ri(Npico);
rspan=\left[0,rmax\right];
Aa20=1; % Aa2 AT ORIGIN
% RUNGE KUTTA SOLVER
[rcol,W]=ode113(@spaceED0s,rspan,Aa20,opts,ri,P2F2i);
Aa2=W'; rg=rcol';
Npoints=length(rg); dr=diff(rg); drmin=min(abs(dr));
F=pchip(ri,Fi,rg); P=pchip(ri,Pi,rg);
F(1)=0;P(1)=atzero(dr(1:4),P(2:5));P(end)=-F(end); % BOUNDARY CONDITIONS
dlnAf_Aadr=(Aa2(2:end)-1)./rg(2:end); % EQUATION FOR Alpha/Aa
lnAf_Aa=zeros(size(rg));
lnAf_Aa(2:end)=cumtrapz(dr.*dlnAf_Aadr); % INTEGRATION
Af_Aa=exp(lnAf_Aa); Af_Aa(1)=1; Aa2(1)=1;
m=0.5*rg.*(1-1./Aa2);dt=0.8*min(abs(dr)./Af_Aa(1:end-1)); %TIME STEP SET
end

function dAa2dr=spaceED0s(r,W,rg,sig2i)
Aa2=W;r=abs(r);
if r==0
    dAa2dr=0;
elseif r==rg(end)
    dAa2dr=(1-Aa2)/r; % asymptotics enforced
else
    sigp=-2*sig2i(end)/rg(end); %asymptotics enforced
    P2F2=pchip(rg,sig2i,r); % interpola para r
    %P2F2=spline(rg,sig2i,r);
    dAa2dr=Aa2*(4*pi*r*P2F2+(1-Aa2)/r); %EQUATION FOR Aa2
end
end

```

```

function [Aa2,Ff,Pf]=timeEvol(Np,r,Aa2,Af_Aa,F,P,dt)
T=[0 dt]; Y0=[Aa2,F,P]; err=5e-5;
options = odeset('AbsTol',err);
dr=diff(r);r2m=(r').^2+eps;D_dr=fd5pt(r); %FIVE POINT DIFERENTIAL STENCIL
[th,Y]=ode23t(@timeMOL,T,Y0,options,Np,r',r2m,dr,D_dr,Af_Aa');
sprintf('%s %g',' Time Step Subdivision',length(th))
Npd=2*Np; Aa2=Y(end,1:Np); Ff=Y(end,Np+1:Npd); Pf=Y(end,Npd+1:3*Np);
end

function dYdt=timeMOL(t,Y,Np,r,r2m,dr,D_dr,Af_Aa)
Npd=2*Np; Aa2=Y(1:Np); F=Y(Np+1:Npd); P=Y(Npd+1:3*Np);
dPdt=zeros(size(P));

% BOUNDARY CONDITION AT ORIGIN
Aa2(1)=1; F(1)=0; P(1)=atzero(dr(1:4),P(2:5));
P(end)=-F(end); % RADIATION BOUNDARY CONDITION
Af_AaF=Af_Aa.*F;
d_AfAaFr2_dr=D_dr*(Af_AaF.*r2m);
dFdt=D_dr*(Af_Aa.*P); % TIME EVOLUTION EQUATIONS
dPdt(2:end)=d_AfAaFr2_dr(2:end)./(r2m(2:end));
dAa2dt(1)=0; dFdt(1)=0; % BOUNDARY CONDITION AGAIN
dPdt(1)=atzero(dr(1:4),dPdt(2:5));
dAa2dt=4*pi*r.*Aa2.*Af_AaF.*P; %TIME EVOLUTION FOR Aa2 FOR COMPARISON
dYdt=[dAa2dt;dFdt;dPdt];
end

```

Anexo II - Informações obtidas da opção Profiler

Nesse anexo, apresentamos algumas informações obtidas, do comando `profiler`, do algoritmo do campo escalar que utiliza a interpolação *spline cúbica* e do algoritmo que utiliza a *interpolação cúbica de Hermite*. O comando para executar a interpolação exigida pela malha adaptativa do método Runge-Kutta, ao resolver as equações diferenciais ordinárias (2.8) e (2.9), encontra-se no arquivo `SpaceData.m`. Os arquivos estão apresentados no anexo I.

As tabelas abaixo, refere-se a simulação do campo escalar inicial, definida pela equação (6.2), onde $\phi_0 = 0,001$.

Tabela 1 - Algumas informações do algoritmo com interpolação spline cúbica

	Tempo em cada função (s)	Porcentagem
<code>SpaceData.m</code>	443,650	63,3%
<code>P2F2=spline(rg,sig2i,r);</code>	399,370	98,5% de 63,3%
<code>timeEvol.m</code>	232,170	33,1%
outros	025,170	3,6%
Total	700,990	100%

Tabela 2 - Algumas informações do algoritmo com interpolação cúbica de Hermite

	Tempo em cada função (s)	Porcentagem
<code>SpaceData.m</code>	260,920	50,2%
<code>P2F2=pchip(rg,sig2i,r);</code>	215,520	96,5% de 50,2%
<code>timeEvol.m</code>	233,850	45,0%
outros	025,370	4,8%
Total	520,140	100%

Anexo III - Arquivo MEX

```

C=====
C   splinefor.f
C
C   usa Numerical Recipes em fortran para spline interpolat
C
C   This is a MEX-file for MATLAB.
C
C   >> yy = splinefor(x,y,xx)
C
C   onde x e y eh a tabela dada e xx eh o input para obter
C   a interpolacao yy.
C=====
      SUBROUTINE splint(xa,ya,y2a,n,x,y)
      INTEGER n
      real*8 x,y,xa(n),y2a(n),ya(n)
      INTEGER k,khi,klo
      real*8 a,b,h
      klo=1
      khi=n
1      if (khi-klo.gt.1) then
          k=(khi+klo)/2
          if(xa(k).gt.x) then
              khi=k
          else
              klo=k
          endif
          goto 1
      endif
      h=xa(khi)-xa(klo)
      if (h.eq.0.) pause 'bad xa input in splint'
      a=(xa(khi)-x)/h
      b=(x-xa(klo))/h
      y=a*ya(klo)+b*ya(khi)+((a**3-a)*y2a(klo)+(b**3-b)*y2a(khi))*(h**
*2)/6.
      return
      END
C (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software v%1jw#<0(9p#3.
      SUBROUTINE spline(x,y,n,yp1,ypn,y2)
      implicit none
      INTEGER n,NMAX
      real*8 yp1,ypn,x(n),y(n),y2(n)
      PARAMETER (NMAX=100000)
      INTEGER i,k
      real*8 p,qn,sig,un,u(NMAX)
      if (yp1.gt..99e30) then
          y2(1)=0.
          u(1)=0.

```



```

else
    y2(1)=-0.5
    u(1)=(3./(x(2)-x(1)))*((y(2)-y(1))/(x(2)-x(1))-yp1)
endif
do 11 i=2,n-1
    sig=(x(i)-x(i-1))/(x(i+1)-x(i-1))
    p=sig*y2(i-1)+2.
    y2(i)=(sig-1.)/p
    u(i)=(6.*((y(i+1)-y(i))/(x(i+
*1)-x(i))-(y(i)-y(i-1))/(x(i)-x(i-1)))/(x(i+1)-x(i-1))-sig*
*u(i-1))/p
11  continue
    if (ypn.gt..99e30) then
        qn=0.
        un=0.
    else
        qn=0.5
        un=(3./(x(n)-x(n-1)))*(ypn-(y(n)-y(n-1))/(x(n)-x(n-1)))
    endif
    y2(n)=(un-qn*u(n-1))/(qn*y2(n-1)+1.)
    do 12 k=n-1,1,-1
        y2(k)=y2(k)*y2(k+1)+u(k)
12  continue
    return
END
C (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software v%1jw#<0(9p#3.

c    The gateway routine
subroutine mexFunction(nlhs, plhs, nrhs, prhs)
implicit none
integer mxGetM, mxGetN, mxGetPr
integer mxIsNumeric, mxCreateDoubleMatrix
integer plhs(*), prhs(*)
integer x_pr, y_pr, xx_pr, yy_pr
integer nlhs, nrhs
integer m, n, mm, nn, sizein, sizeout,k
real*8 x(100000), y(100000), xx(100000), yy(100000), y2(100000)
real*8 yp1,ypn

c    Get the size of the input array. x e y devem ter mesma dimensao
m = mxGetM(prhs(1))
n = mxGetN(prhs(1))
sizein = m*n
mm = mxGetM(prhs(3))
nn = mxGetN(prhs(3))
sizeout = mm*nn

c    Create matrix for the return argument.
plhs(1) = mxCreateDoubleMatrix(mm, nn, 0)

```

```

x_pr = mxGetPr(prhs(1))
y_pr = mxGetPr(prhs(2))
xx_pr = mxGetPr(prhs(3))
yy_pr = mxGetPr(plhs(1))
call mxCopyPtrToReal8(x_pr, x, sizein)
call mxCopyPtrToReal8(y_pr, y, sizein)
call mxCopyPtrToReal8(xx_pr, xx, sizeout)

c    Call the computational subroutine.
    if(sizein.ge.2) then
        yp1=(y(2)-y(1))/(x(2)-x(1))
        ypn=(y(sizein)-y(sizein-1))/(x(sizein)-x(sizein-1))
    else
        yp1=0
        ypn=0
    endif
    do k=1,sizeout
        call spline(x,y,n,yp1,ypn,y2)
        call splint(x,y,y2,n,xx(k),yy(k))
    enddo

c    Load the data into y_pr, which is the output to MATLAB.
    call mxCopyReal8ToPtr(yy, yy_pr, sizeout)
    return
END

```