Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Reflexividade de Espaços de Operadores Lineares e Espaços de Polinômios Homogêneos

por

Mauricio Yudi Miyamura†

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui

---

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

REFLEXIVIDADE DE ESPAÇOS DE OPERADORES LINEARES E ESPAÇOS DE POLINÔMIOS HOMOGÊNEOS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Mauricio Yudi Miyamura e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 05 de Março de 2007.

....

Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui
Orientador

Banca Examinadora

Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui
Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço
Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Miyamura, Mauricio Yudi

M699r Reflexividade de espaços de operadores lineares e espaços de polinômios homogêneos / Mauricio Yudi Miyamura -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Jorge Tulio Mujica Ascui

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Banach, Espaços de. 2. Operadores lineares. 3. Produto tensorial. I. Mujica Ascui, Jorge Tulio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

mjmr/imecc

Título em inglês: Reflexivity of spaces of linear operators and spaces of homogeneous polynomials.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Banach space. 2. Linear operators. 3. Tensor products.

Área de concentração: Matemática - Análise

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio (IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Mary Lílian Lourenço (IME-USP)

Data da defesa: 05/03/2007

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 05 de março de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). JORGE TULIO MUJICA ASCUI

Prof. (a). Dr (a). MARY LILIAN LOURENÇO

Ary O. Chiacchio

Prof. (a). Dr (a). ARY OROZIMBO CHIACCHIO

Agradecimentos

Agradeço a todos os professores e funcionários do IMECC que trabalham para que tudo funcione e possamos realizar nossos estudos. Em especial, agradeço ao meu orientador Jorge Mujica por toda sua disponibilidade e pela atenção com que sempre nos atende.

Resumo

Sejam E e F espaços de Banach. Os principais resultados que iremos expor serão teoremas sobre a reflexividade de $\mathcal{L}(E;F)$ e $\mathcal{P}(^mE;F)$. No capítulo 2, estudamos alguns conceitos básicos da teoria de produtos tensoriais de espaços de Banach. A importância do capítulo 2 para o trabalho será, essencialmente, a identificação do espaço de operadores lineares contínuos $\mathcal{L}(E;F)$ com o dual do produto tensorial projetivo $E\tilde{\otimes}_\pi F'$. No capítulo 3, que trata de espaços de polinômios homogêneos, incluímos definições e resultados básicos e estudamos um teorema de linearização que permitirá transferir resultados em espaços de operadores lineares para espaços de polinômios homogêneos.

Abstract

Let E and F be Banach spaces. The main results in this work are theorems concerning the reflexivity of $\mathcal{L}(E;F)$ and $\mathcal{P}(^mE;F)$. In Chapter 2, we study basic concepts of the theory of tensor products of Banach spaces. The importance of Chapter 2 will be, essentially, the identification of the space of continuous linear operators $\mathcal{L}(E;F)$ with the dual of the projective tensor product $E\tilde{\otimes}_\pi F'$. In Chapter 3, that deals with homogeneous polynomials, we include basic definitions and results and we study a linearization theorem that will allow to transfer results from spaces of linear operators to spaces of homogeneous polynomials.

Sumário

Introdução

Esta dissertação está dedicada ao estudo da reflexividade do espaço de operadores lineares $\mathcal{L}(E;F)$ e do espaço de polinômios homogêneos $\mathcal{P}(^mE;F)$ entre espaços de Banach.

O trabalho começa com um capítulo preliminar onde relembramos alguns fatos básicos a respeito de espaços reflexivos e operadores compactos. Enunciamos sem demonstração duas caracterizações de espaços reflexivos; uma delas, que diz que um espaço E é reflexivo se, e só se, a bola $\overline{B}_E$ é fracamente compacta teve a demonstração omitida para não estender demasiadamente o trabalho e ter o risco de perder de foco o objetivo principal. A outra caracterização, que diz que um espaço de Banach E é reflexivo se, e só se, cada funcional linear contínuo em E atinge sua norma tem um nível que ultrapassa este texto. Também enunciamos sem demonstração alguns teoremas importantes como o Teorema de Ascoli e o Teorema Bipolar.

No segundo capítulo, estudamos o produto tensorial $E \otimes F$ de dois espaços vetoriais E e F. Se E e F são normados, definimos a norma projetiva π em $E \otimes F$. O completamento de $E \otimes F$ munido da norma projetiva é denotado por $E\tilde{\otimes}_\pi F$. A utilidade do produto tensorial deve-se, em parte, às identificações que podem ser feitas entre diferentes espaços. Temos que

$$(E\tilde{\otimes}_\pi F)' = \mathcal{B}(E \times F) = \mathcal{L}(E; F')$$

onde $\mathcal{B}(E \times F)$ denota o espaço das formas bilineares contínuas em $E \times F$. Em particular, se F é reflexivo, então $(E\tilde{\otimes}_\pi F')' = \mathcal{L}(E;F)$. Nesse caso, diz-se que $E\tilde{\otimes}_\pi F'$ é um pré-dual de $\mathcal{L}(E;F)$. Uma das vantagens que se tira dessa identificação é que no lugar de se trabalhar com operadores lineares, trabalhamos com *funcionais* lineares, que de certa forma são mais simples.

No capítulo 3, estudamos o espaço de polinômios m-homogêneos $\mathcal{P}(^mE;F)$. Um polinômio m-homogêneo é uma aplicação $P : E \to F$ da forma $P = A \circ \Delta$, sendo $\Delta : E \to E^m$ a aplicação diagonal $x \to (x, \ldots, x)$ e $A : E^m \to F$ uma aplicação multilinear simétrica. Uma relação fundamental entre P e A é dada pela Fórmula de Polarização

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m).$$

Para expressar a relação $P = A \circ \Delta$, escreve-se $A = \check{P}$ ou então $P = \hat{A}$. O resultado mais importante do capítulo 3 é um teorema de linearização de polinômios obtido por R. Ryan [14] e demonstrado com outra técnica por J. Mujica [9]. No teorema de linearização, constrói-se um espaço de Banach $Q(^mE)$ e um polinômio m-homogêneo $q_m \in \mathcal{P}(^mE; Q(^mE))$ de maneira que, para cada espaço de Banach F e cada polinômio m-homogêneo $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "P"] \arrow[d, "q_m"'] & F \\ Q(^mE) \arrow[ur, dashed, "T_P"'] & \end{tikzcd}$$

pode ser completado de maneira única com uma aplicação linear $T_P \in \mathcal{L}(Q(^mE);F)$. Isso fornece uma isometria entre $\mathcal{P}(^mE;F)$ e $\mathcal{L}(Q(^mE);F)$.

No capítulo 4, estudamos dois resultados de Mujica [10]. O primeiro mostra que, se E e F são espaços de Banach reflexivos, sendo que um deles tem a propriedade de aproximação compacta, então $\mathcal{L}(E;F)$ é reflexivo se, e só se, cada $T \in \mathcal{L}(E;F)$ é compacto se, e só se, cada $T \in \mathcal{L}(E;F)$ atinge sua norma. Essas equivalências já eram conhecidas quando E e F são espaços de Banach reflexivos, sendo que um deles tem a propriedade de aproximação (ver Holub [5]). Em [10], mostra-se que de fato pode-se obter algo mais forte com a hipótese de propriedade de aproximação. Sob essas condições, $\mathcal{L}(E;F)$ é reflexivo se, e só se, cada $T \in \mathcal{L}(E;F)$ é o limite de uma seqüência de operadores de posto finito. Em [7], Jaramillo e Moraes usam o resultado de [5] e o teorema de linearização de Ryan para obter um resultado análogo para espaços de polinômios homogêneos. Isso também é feito em [10] mas no lugar de usar [5], usa-se o resultado melhorado mencionado anteriormente. Em conseqüencia, melhora-se também o resultado de [7].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Notações e terminologia

Nesta dissertação, usaremos as letras $E, F, G \ldots$ para denotar $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, onde $\mathbb{K}$ poderá ser o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Se E e F são espaços normados, usaremos as seguintes notações:

- B_E : Bola unitária aberta de E.
- $\overline{B}_E$: Bola unitária fechada de E.
- E^* : Dual algébrico de E.
- E' : Dual topológico de E com relação à norma $\|\cdot\|$. Às vezes também usaremos a notação $(E, \|\cdot\|)'$.
- $L(E; F)$: Espaço das aplicações lineares de E em F.
- $\mathcal{L}(E; F)$: Espaço das aplicações lineares contínuas de E em F.

Um *isomorfismo linear* entre dois espaços vetoriais E e F é uma aplicação linear bijetiva $T : E \to F$. Se E e F são espaços vetoriais topológicos, diremos que um isomorfismo linear $T : E \to F$ é um *isomorfismo topológico* se T e T^{-1} são contínuas. Se E e F

são normados, um isomorfismo linear $T : E \to F$ é um *isomorfismo isométrico* ou uma *isometria* se $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in E$.

Seja E um espaço vetorial topológico com topologia τ. Dizemos que τ é uma topologia localmente convexa se cada vizinhança de 0 contém uma vizinhança convexa de 0. Nesse caso, dizemos que (E, τ) é um espaço localmente convexo. Seja $P = \{p_\alpha : \alpha \in A\}$ uma família arbitrária de seminormas em E. Essa família determina uma única topologia localmente convexa τ em E tal que, para $x_0 \in E$, os conjuntos da forma

$$\bigcap_{\alpha \in F} U(x_0, \alpha, \varepsilon)$$

formam uma base de vizinhanças de x_0, sendo $F \subset A$ finito, $\varepsilon > 0$ e

$$U(x_0, \alpha, \varepsilon) = \{x \in E : p_\alpha(x - x_0) < \varepsilon\}$$

Dizemos que τ é a topologia localmente convexa em E definida pela família de seminormas P. Reciprocamente, cada topologia localmente convexa em E é determinada pela família de seminormas $P = \{p_U : U \in \mathcal{B}_0\}$, sendo $\mathcal{B}_0$ uma base vizinhanças convexas e equilibradas de 0 e p_U o funcional de Minkowski de U. Para mais detalhes a respeito de espaços localmente convexos, sugerimos [16].

1.2 Espaços reflexivos

Seja E um espaço normado. Para cada $x \in E$, associamos um elemento $\hat{x} \in E''$ definido por

$$\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$$

para $\varphi \in E'$. A aplicação $J : E \to E''$ dada por $J(x) = \hat{x}$ é uma isometria entre E e um subespaço de E''. Quando essa aplicação canônica é sobrejetiva, dizemos que E é um espaço reflexivo. Assim, se E é reflexivo, $E = E''$ com uma identificação natural.

Sejam E, F espaços normados e seja $T \in \mathcal{L}(E; F)$. O *operador adjunto* $T' : F' \to E'$ é definido por

$$T'(\psi)(x) = \psi(Tx) \qquad (\psi \in F',\ x \in E)$$

ou seja, $T'(\psi) = \psi \circ T$. Não é difícil mostrar que T' é um operador linear contínuo e $\|T'\| = \|T\|$.

Lema 1.2-1 *Sejam E, F espaços normados e seja $T : E \to F$ linear. Então são equivalentes:*

(a) T é um isomorfismo isométrico.

(b) T é injetiva e $T(\overline{B}_E) = \overline{B}_F$.

(c) T é invertível e $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ É fácil ver.
$(b) \Rightarrow (c)$ A condição $T(\overline{B}_E) = \overline{B}_F$ implica que T é sobrejetiva, pois $\overline{B}_F$ gera F. Assim, T é invertível. Além disso,

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in \overline{B}_E\} = \sup\{\|y\| : y \in \overline{B}_F\} = 1$$

Como $T^{-1}(\overline{B}_F) = \overline{B}_E$, esse mesmo argumento mostra que $\|T^{-1}\| = 1$.
$(c) \Rightarrow (a)$ Para cada $x \in E$, temos que

$$\|Tx\| \leq \|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq \|Tx\|$$

Logo, $\|Tx\| = \|x\|$. □

Proposição 1.2-2 *Seja $T : E \to F$ um isomorfismo isométrico. Então $T' : F' \to E'$ também é um isomorfismo isométrico.*

Demonstração. Para cada $\varphi \in E'$, temos que

$$T' \circ (T^{-1})'(\varphi) = T'(\varphi \circ T^{-1}) = \varphi \circ T^{-1} \circ T = \varphi$$

De maneira análoga, $(T^{-1})' \circ T'(\psi) = \psi$ para todo $\psi \in F'$. Assim, T' é invertível e $(T')^{-1} = (T^{-1})'$. Além disso,

$$\|T'\| = \|T\| = 1$$

e

$$\|(T')^{-1}\| = \|T^{-1}\| = 1$$

Portanto, T' é um isomorfismo isométrico. $\square$

Proposição 1.2-3 *Sejam E, F espaços normados. Se E e F são isometricamente isomorfos, então E é reflexivo se e só se, F é reflexivo.*

Demonstração. Suponha que $T : E \to F$ é uma isometria e considere as inclusões canônicas $J_E : E \to E''$ e $J_F : F \to F''$. Pela proposição anterior, $T'' := (T')'$ é um isomorfismo isométrico entre E'' e F''. Não é difícil verificar que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J_E"'] & F \arrow[d, "J_F"] \\ E'' \arrow[r, "T''"'] & F'' \end{tikzcd}$$

isto é, $J_F \circ T = T'' \circ J_E$. Então é claro que J_E é sobrejetiva se, e só se, J_F é sobrejetiva, isto é, E é reflexivo se, e só se, F é reflexivo. $\square$

Proposição 1.2-4 *Cada subespaço fechado de um espaço reflexivo é reflexivo.*

Demonstração. Suponha que E é reflexivo e M é um subespaço fechado de E. Sejam $J_M : M \to M''$ e $J_E : E \to E''$ as inclusões canônicas. Dado $z'' \in M''$, defina $x'' : E' \to \mathbb{K}$ por

$$x''(x') = z''(x'|_M)$$

É fácil ver que x'' é linear. Além disso,

$$|x''(x')| \leq \|z''\|\|x'|_M\| \leq \|z''\|\|x'\|$$

Assim, $x'' \in E''$. Como E é reflexivo, existe $x \in E$ tal que $J_E x = x''$. Vamos mostrar que $x \in M$. Se x não estivesse em M, existiria $x' \in E'$ tal que $x'(M) = \{0\}$ e

$$x'(x) = d(x, M) \neq 0$$

Temos que $x''(x') = z''(x'|_M) = 0$. Por outro lado, $J_E x(x') = x'(x) \neq 0$, o que é absurdo. Dado $z' \in M'$, seja $x' \in E'$ uma extensão de z'. Então

$$z''(z') = x''(x') = x'(x) = z'(x)$$

Isso mostra que $J_M x = z''$. Portanto, M é reflexivo. $\square$

Proposição 1.2-5 *Um espaço de Banach E é reflexivo se, e só se, E' é reflexivo.*

Demonstração. Sejam $J_E : E \to E''$ e $J_{E'} : E' \to E'''$ as inclusões canônicas.
($\Rightarrow$) Seja $x''' \in E'''$. Usando a sobrejetividade de J_E, não é difícil verificar que $x''' = J_{E'} x'$, sendo $x' = J_E' x'''$.
($\Leftarrow$) Pela implicação oposta, E'' é reflexivo. Como E é completo, J_E é uma isometria entre E e um subespaço fechado de E''. Por 1.2-4 e 1.2-3, segue que E é reflexivo. $\square$

A seguinte caracterização dos espaços reflexivos é obtida do teorema de Alaoglu e do teorema de Goldstine (ver [4] pág. 18).

Teorema 1.2-6 *Seja E um espaço normado. Então E é reflexivo se, e só se, a bola unitária fechada $\overline{B}_E$ de E é fracamente compacta.*

Se E é reflexivo, segue do teorema de Hahn-Banach que cada funcional linear contínuo em E atinge sua norma. A recíproca dessa afirmação foi provada por R. C. James em [6] (ver Theorem 5). Assim, temos outra caracterização

Teorema 1.2-7 *Um espaço de Banach E é reflexivo se, e só se, para cada $\varphi \in E'$, existe $x \in E$, com $\|x\| = 1$, tal que $|\varphi(x)| = \|\varphi\|$.*

1.3 Operadores compactos

Sejam E, F espaços normados. Um operador linear $T \in L(E; F)$ é *compacto* se, para cada subconjunto limitado $B \subset E$, $T(B)$ é relativamente compacto em F (equivalentemente, $T(B_E)$ é relativamente compacto em F). Denotamos o conjunto de todos os operadores compactos de E em F por $\mathcal{L}_K(E;F)$. Vejamos a seguir as propriedades básicas dos operadores compactos.

Proposição 1.3-1 *Sejam E, F espaços normados. Então $\mathcal{L}_K(E;F)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(E;F)$. Se F é completo, $\mathcal{L}_K(E;F)$ é fechado em $\mathcal{L}(E;F)$.*

Demonstração. Se $T \in \mathcal{L}_K(E;F)$, então $T(B_E)$ é relativamente compacto em F. Em particular, $T(B_E)$ é um conjunto limitado, logo, $T \in \mathcal{L}(E;F)$. Não é difícil verificar que $\mathcal{L}_K(E;F)$ é subespaço. Para provar a outra afirmação, tome uma seqüência de operadores compactos (T_n) que converge para algum $T \in \mathcal{L}(E;F)$ e tome uma seqüência $(x_n) \subset B_E$. Precisamos mostrar que (Tx_n) admite uma subseqüência convergente. Usando que cada T_k é compacto, podemos construir subseqüências $(x_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$ de (x_n), $k = 1, 2, \ldots$, de maneira que $(T_k x_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$ seja convergente e $(x_n^{(k+1)})$ seja subseqüência de $(x_n^{(k)})$. Tome a seqüência diagonal $(y_n) := (x_n^{(n)})$. Então (y_n) é subseqüência de (x_n) e $(T_k y_n)$ converge para cada k. Não é difícil provar que (Ty_n) é uma seqüência de Cauchy em F, e portanto convergente, pois assumimos F completo. □

A proposição seguinte mostra que operadores lineares compactos são fracamente contínuos em conjuntos limitados, isto é, se $T \in \mathcal{L}_K(E;F)$, então $T : (B, \sigma(E, E')) \to (F, \|\cdot\|)$ é contínua para cada conjunto limitado $B \subset E$.

Proposição 1.3-2 *Seja $T \in \mathcal{L}_K(E;F)$ e seja (x_λ) uma rede limitada em E que converge fracamente para algum $x \in E$. Então (Tx_λ) converge em norma para Tx em F.*

Demonstração. Para provar que (Tx_λ) converge para Tx, basta mostrar que cada subrede de (Tx_λ) admite uma subrede que converge para Tx. Então seja (z_λ) uma subrede qualquer de (x_λ). Como (z_λ) é limitada e T é compacto, (Tz_λ) admite uma subrede $(Tz_{\phi(\mu)})$ que converge em norma para algum $y \in F$. Como $T \in \mathcal{L}(E;F)$, T é contínua com relação às topologias fracas de E e F. Assim, $(Tz_{\phi(\mu)})$ converge fracamente para Tx. Pela unicidade do limite fraco, devemos ter $y = Tx$. Isso completa a demonstração. □

Dizemos que um operador linear $T : E \to F$ *tem posto finito* se $T(E)$ tem dimensão finita. O subespaço de $\mathcal{L}(E;F)$ formado por todos os operadores de posto finito é denotado por

$\mathcal{L}_f(E;F)$. Temos a inclusão

$$\mathcal{L}_f(E;F) \subset \mathcal{L}_K(E;F).$$

Para ver isso, tome $T \in \mathcal{L}_f(E;F)$. Então $T(B_E)$ é um subconjunto limitado de $T(E)$. Como $T(E)$ tem dimensão finita, $T(B_E)$ é relativamente compacto em $T(E)$. Além disso, como $T(E)$ é fechado em F, segue que $T(B_E)$ é relativamente compacto em F, ou seja, $T \in \mathcal{L}_K(E;F)$.

Lema 1.3-3 *Sejam $T \in \mathcal{L}(E;F)$ e $U \in \mathcal{L}(F;G)$. Então,*

(a) Se T ou U é compacto, então $U \circ T$ é compacto.

(b) Se T ou U tem posto finito, então $U \circ T$ tem posto finito.

Demonstração. (a) Se T é compacto, então $T(B_E)$ é relativamente compacto em F. Como U é contínuo, $U(T(B_E))$ é relativamente compacto em G. Portanto, $U \circ T$ é compacto. Agora suponha que U é compacto. Sendo T contínuo, $T(B_E)$ é limitado. Sendo U compacto, $U(T(B_E))$ é relativamente compacto em G. Portanto, $U \circ T$ é compacto.
(b) Se T tem posto finito, então $U(T(E))$ tem dimensão finita porque $T(E)$ tem dimensão finita. Agora, se U tem posto finito, então $U(T(E))$ tem dimensão finita porque $U(T(E)) \subset U(F)$ e $U(F)$ tem dimensão finita. □

1.4 Espaços de funções contínuas

Dados X um espaço topológico e F um espaço de Banach, denotamos por $\mathcal{C}(X;F)$ o espaço vetorial de todas as funções contínuas de X em F. Quando $F = \mathbb{K}$, escrevemos $\mathcal{C}(X)$ no lugar de $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$. A *topologia compacto-aberta* ou *topologia da convergência compacta* em $\mathcal{C}(X;F)$, denotada por τ_c, é a topologia localmente convexa em $\mathcal{C}(X;F)$ definida pelas seminormas

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} \|f(x)\|$$

com $K \subset X$ compacto. Em geral, um espaço vetorial localmente convexo com a topologia definida por uma família de seminormas P é Hausdorff se, e só se, $p(x) = 0$ para todo

$p \in P$ implica $x = 0$. É claro que a família de seminormas $\{p_K : K \subset X \text{ compacto}\}$ que define a topologia compacto-aberta satisfaz essa condição, portanto, $(\mathcal{C}(X;F), \tau_c)$ é Hausdorff. É fácil ver que $\{p_K : K \subset X \text{ compacto}\}$ é uma família dirigida de seminormas. Assim, para $f \in \mathcal{C}(X;F)$, os conjuntos da forma

$$U(f, K, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{C}(X;F) : p_K(g - f) < \varepsilon\}$$

com $K \subset X$ compacto e $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças de f em $(\mathcal{C}(X;F), \tau_c)$. A proposição seguinte justifica o nome "topologia da convergência compacta".

Proposição 1.4-1 *Seja $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede em $\mathcal{C}(X;F)$ e seja $f \in \mathcal{C}(X;F)$. Então $f_\lambda \xrightarrow{\tau_c} f$ se, e só se, (f_λ) converge para f uniformemente sobre cada compacto de X, isto é, dados $K \subset X$ compacto e $\varepsilon > 0$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que*

$$\|f_\lambda(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$ e todo $x \in K$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Sejam $K \subset X$ compacto e $\varepsilon > 0$. Então o conjunto

$$U = \{g \in \mathcal{C}(X;F) : \sup_{w \in K} \|g(w) - f(w)\| < \varepsilon\}$$

é uma vizinhança de f em $(\mathcal{C}(X;F), \tau_c)$. Como $f_\lambda \xrightarrow{\tau_c} f$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $f_\lambda \in U$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Assim,

$$\|f_\lambda(x) - f(x)\| \leq \sup_{w \in K} \|f_\lambda(w) - f(w)\| < \varepsilon$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$ e todo $x \in K$.

$(\Leftarrow)$ Seja $U(f, K, \varepsilon)$ uma vizinhança básica de f. Por hipótese, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$\|f_\lambda(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$ e todo $x \in K$. Segue que $f_\lambda \in U(f, K, \varepsilon)$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Portanto, $f_\lambda \xrightarrow{\tau_c} f$. $\square$

Uma família $\mathcal{F}$ de aplicações de X em F é dita *equicontínua no ponto* $a \in X$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V de a tal que $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$ e todo $x \in V$. A família $\mathcal{F}$ é dita *equicontínua* se for equicontínua em cada ponto $a \in X$. É claro que, se $\mathcal{F}$ é equicontínua, então $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X; F)$.

Teorema 1.4-2 (Ascoli) *Seja X um espaço topológico. Suponha que $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X)$ seja uma família equicontínua e pontualmente limitada. Então $\mathcal{F}$ é relativamente compacta em $(\mathcal{C}(X), \tau_c)$.*

Demonstração. Ver [8] Theorem 9.12. $\square$

Para uso posterior, vamos provar o seguinte lema:

Lema 1.4-3 *Seja (f_n) uma seqüência em $\mathcal{C}(X; F)$ que converge uniformemente para uma função $f : X \to F$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$ e todo $x \in X$. Então $f \in \mathcal{C}(X; F)$.

Demonstração. Seja $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede em X que converge para algum $x \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_N(x) - f(x)\| < \varepsilon/3$ para todo $x \in X$. Como f_N é contínua, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$\|f_N(x_\lambda) - f_N(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Segue que

$$\|f(x_\lambda) - f(x)\| \leq \|f(x_\lambda) - f_N(x_\lambda)\| + \|f_N(x_\lambda) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Portanto, $f(x_\lambda) \to f(x)$. Isso mostra que f é contínua. $\square$

1.5 Sistemas duais e Teorema Bipolar

Definição 1.5-1 Um *sistema dual* é uma tripla $(E, F, \langle\ ,\ \rangle)$, onde E e F são espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $\langle\ ,\ \rangle$ é uma forma bilinear em $E \times F$ tal que

$$\langle x, y_0\rangle = 0 \text{ para todo } x \in E \text{ implica } y_0 = 0 \quad ,$$
$$\langle x_0, y\rangle = 0 \text{ para todo } y \in F \text{ implica } x_0 = 0$$

O sistema dual é denotado por $\langle E, F\rangle$.

Exemplo 1.5-2 Seja E um espaço normado. Então $\langle E, E'\rangle$ é um sistema dual com a forma bilinear

$$\langle x, \varphi\rangle = \varphi(x)$$

Essa é a forma bilinear mais natural para $\langle E, E'\rangle$. Assim, sempre que dissermos "o sistema dual $\langle E, E'\rangle$", ficará subentendido que essa é a forma bilinear do sistema dual.

Proposição 1.5-3 *Sejam E, F espaços normados. Suponha que exista um isomorfismo isométrico $T : F \to E'$. Então:*

(a) $\langle E, F\rangle_1$ é um sistema dual com a forma bilinear definida por

$$\langle x, y\rangle_1 = \langle x, Ty\rangle \qquad\qquad (x, y) \in E \times F$$

(b) A aplicação $y \in F \to \langle\,\cdot\,, y\rangle_1 \in E'$ é um isomorfismo isométrico.

(c) A aplicação $\Psi : x \in E \to \langle x, \,\cdot\,\rangle_1 \in F'$ é um isomorfismo isométrico entre E e um subespaço de F'. E é reflexivo se, e só se, Ψ é sobrejetiva.

Demonstração. (a) é fácil verificar. (b) é trivial, pois a aplicação $y \to \langle\,\cdot\,, y\rangle_1$ é a própria T. Para obter (c), basta notar que Ψ é a inclusão canônica de E em seu bidual $E'' = F'$. Mais precisamente, o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "J"'] & F' \\ E'' \arrow[ur, "T'"'] & \end{tikzcd}$$

sendo J a inclusão canônica de E em E'' e T' o adjunto de T. $\square$

A *topologia fraca* $\sigma(E,F)$ de E é a topologia localmente convexa em E definida pela família de seminormas

$$p_A(x) = \sup_{y\in A} |\langle x,y\rangle|$$

com $A \subset F$ finito. A topologia fraca $\sigma(F,E)$ em F é definida de maneira análoga. Se $A \subset E$ e $B \subset F$, os *polares* $A^\circ \subset F$ e $B^\circ \subset E$ com respeito ao sistema dual $\langle E,F\rangle$ são definidos por

$$A^\circ = \{y \in F : |\langle x,y\rangle| \leq 1 \text{ para todo } x \in A\}$$

e

$$B^\circ = \{x \in E : |\langle x,y\rangle| \leq 1 \text{ para todo } y \in B\}$$

O *bipolar* de um subconjunto $A \subset E$ é o polar de A° e é denotado por $A^{\circ\circ}$. O seguinte teorema, chamado de *teorema bipolar*, será muito útil. Para a demonstração, ver [16] pág. 126.

Teorema 1.5-4 *Seja $\langle E,F\rangle$ um sistema dual e seja $A \subset E$. Então*

$$A^{\circ\circ} = \overline{\Gamma(A)}^{\sigma(E,F)}$$

onde $\Gamma(A)$ denota a envoltória convexa e equilibrada de A.

Lembremos que, se E é um espaço normado, então $\overline{A}^{\|\cdot\|} = \overline{A}^{\sigma(E,E')}$ para cada subconjunto convexo $A \subset E$. Assim, obtemos imediatamente do teorema acima o seguinte:

Teorema 1.5-5 *Seja E um espaço normado e considere o sistema dual $\langle E,E'\rangle$. Para cada $A \subset E$, temos que*

$$A^{\circ\circ} = \overline{\Gamma(A)}^{\|\cdot\|}$$

Lema 1.5-6 *Seja E um espaço normado. Então $\overline{B}_E^\circ = \overline{B}_{E'}$ e $\overline{B}_{E'}^\circ = \overline{B}_E$, onde $^\circ$ denota polares com respeito ao sistema dual $\langle E,E'\rangle$.*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} x' \in \overline{B}_E^\circ &\Leftrightarrow |x'(x)| \leq 1 \text{ para todo } x \in \overline{B}_E \\ &\Leftrightarrow \|x'\| = \sup_{x \in \overline{B}_E} |x'(x)| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x' \in \overline{B}_{E'} \end{aligned}$$

Assim, $\overline{B}_E^\circ = \overline{B}_{E'}$. Como $\overline{B}_E$ é convexo, equilibrado e fechado, segue do teorema bipolar que

$$\overline{B}_{E'}^\circ = \overline{B}_E^{\circ\circ} = \overline{B}_E$$

completando a demonstração. □

Capítulo 2

Produto Tensorial de Espaços de Banach

2.1 Produto tensorial

As letras E, F, G,..., sempre denotarão espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Denotaremos o espaço das aplicações bilineares de $E \times F$ em G por $B(E \times F; G)$.

Definição 2.1-1 Sejam E, F espaços vetoriais. Diremos que um par (G, Φ) é um *produto tensorial do par* (E, F), onde G é um espaço vetorial e $\Phi \in B(E \times F; G)$ é uma aplicação bilinear, se para cada espaço vetorial H e cada $B \in B(E \times F; H)$, existe um único $T_B \in L(G; H)$ tal que $B = T_B \circ \Phi$.

Se (G, Φ) tem essa propriedade universal, escrevemos $G = E \otimes F$. Assim, para cada H, a aplicação

$$B \in B(E \times F; H) \to T_B \in L(E \otimes F; H)$$

é um isomorfismo linear. Em particular, $(E \otimes F)^* = B(E \times F)$.

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\Phi"'] & H \\ G \arrow[ur, "T_B"'] & \end{tikzcd}$$

Os elementos de $E \otimes F$ são chamados de *tensores*. Os tensores da forma $\Phi(x, y)$ são chamados de *tensores elementares* e são denotados por $x \otimes y$. Por definição, cada aplicação bilinear $B \in B(E \times F; H)$ tem a forma

$$B(x, y) = T_B(x \otimes y)$$

para um único $T_B \in L(E \otimes F; H)$. Dizemos que a aplicação linear T_B é a *linearização* da aplicação bilinear B.

O conjunto $\operatorname{Im}\Phi$ gera todo o espaço $E \otimes F$. Para ver isso, considere $H \neq \{0\}$. Se tivéssemos $[\operatorname{Im}\Phi] \neq E \otimes F$, poderíamos construir, com o auxílio de bases, uma aplicação linear $T \in L(E \otimes F; H)$ tal que $Tx = 0$ para todo $x \in [\operatorname{Im}\Phi]$ mas $T \neq 0$. Assim, teríamos $T \circ \Phi = 0$ mas $T \neq 0$, o que contraria a unicidade de T. Dessa forma, cada tensor $u \in E \otimes F$ tem a forma

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$$

Teorema 2.1-2 (Unicidade do produto tensorial) *Sejam E, F espaços vetoriais. Se (G_1, Φ_1) e (G_2, Φ_2) são produtos tensoriais de (E, F), então existe um (único) isomorfismo linear $S : G_1 \to G_2$ com $\Phi_2 = S \circ \Phi_1$.*

Demonstração. Como (G_1, Φ_1) é produto tensorial de (E, F), existe $S_1 \in L(G_1; G_2)$ tal que $\Phi_2 = S_1 \circ \Phi_1$. Da mesma forma, como (G_2, Φ_2) é produto tensorial de (E, F), existe $S_2 \in L(G_2; G_1)$ tal que $\Phi_1 = S_2 \circ \Phi_2$. Logo,

$$\Phi_1 = S_2 \circ S_1 \circ \Phi_1$$

Assim, $S_2 \circ S_1(x) = x$ para todo $x \in \operatorname{Im}\Phi_1$. Como $\operatorname{Im}\Phi_1$ gera G_1, temos $S_2 \circ S_1 = Id_{G_1}$. De maneira análoga, temos $S_1 \circ S_2 = Id_{G_2}$. Então $S = S_1$ é o isomorfismo com as propriedades requeridas. $\square$

Ainda não sabemos se cada par de espaços vetoriais admite um produto tensorial. Existem diversas maneiras naturais de se fazer a construção. Faremos uma delas a seguir.

Proposição 2.1-3 *Sejam E, F espaços vetoriais. Dados $x \in E$ e $y \in F$, definimos $x \underline{\otimes} y : B(E \times F) \to \mathbb{K}$ por*

$$x \underline{\otimes} y(B) = B(x, y)$$

O funcional $x \underline{\otimes} y$ é um elemento de $B(E \times F)^*$, o dual algébrico de $B(E \times F)$. Seja $\Phi : E \times F \to B(E \times F)^*$ definida por $\Phi(x, y) = x \underline{\otimes} y$ e seja $G = [\mathrm{Im}\, \Phi]$. Então:

(i) *Φ é uma aplicação bilinear.*

(ii) *(G, Φ) é um produto tensorial de (E, F).*

Demonstração. (i) é de fácil verificação, então só provaremos (ii).
Cada $u \in G$ tem a forma

$$u = \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{\otimes} y_i$$

Dados H um espaço vetorial e $B \in B(E \times F; H)$, seja $T : G \to H$ dada por

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \underline{\otimes} y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} B(x_i, y_i)$$

Para provar que T está bem definida, basta mostrar que, se $\sum_{i=1}^{n} x_i \underline{\otimes} y_i = 0$, então $\sum_{i=1}^{n} B(x_i, y_i) = 0$. Então suponha $\sum_{i=1}^{n} x_i \underline{\otimes} y_i = 0$. Dado $\varphi \in H^*$, temos que

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} B(x_i, y_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi \circ B(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{\otimes} y_i(\varphi \circ B) = 0$$

Portanto, $\sum_{i=1}^{n} B(x_i, y_i) = 0$. É fácil ver que T é linear e $B = T \circ \Phi$. Note que qualquer $U \in L(G; H)$ que satisfaz $B = U \circ \Phi$ também deve satisfazer

$$U\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \underline{\otimes} y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} B(x_i, y_i)$$

o que mostra a unicidade de T. □

Corolário 2.1-4 *Cada par de espaços vetoriais admite um único produto tensorial (a menos de um isomorfismo linear).*

Definição 2.1-5 Dizemos que um subconjunto $S \subset E^*$ *separa os pontos de* E se, para $x \in E$,

$$\varphi(x) = 0 \text{ para todo } \varphi \in S \text{ implica } x = 0.$$

Proposição 2.1-6 *Seja* $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in E \otimes F$. *Se os conjuntos* $S_E \subset E^*$ *e* $S_F \subset F^*$ *separam os pontos de* E *e* F, *respectivamente, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $u = 0$.

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)\psi(y_i) = 0$ *para todo* $\varphi \in S_E$ *e todo* $\psi \in S_F$.

(iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)y_i = 0$ *para todo* $\varphi \in S_E$.

(iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^n \psi(y_i)x_i = 0$ *para todo* $\psi \in S_F$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sejam $\varphi \in S_E$, $\psi \in S_F$. Seja $B \in B(E \times F)$ a forma bilinear dada por $B(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ e seja $T \in (E \otimes F)^*$ sua linearização. Temos que

$$0 = T(u) = \sum_{i=1}^n B(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)\psi(y_i)$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Seja $\varphi \in S_E$. Para cada $\psi \in S_F$, temos

$$\psi\left(\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)y_i\right) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)\psi(y_i) = 0$$

Como S_F separa os pontos de F, segue que $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)y_i = 0$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Seja $\psi \in S_F$. Para cada $\varphi \in S_E$, temos

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \psi(y_i)x_i\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)y_i\right) = 0$$

Como S_E separa os pontos de E, segue que $\sum_{i=1}^n \psi(y_i)x_i = 0$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Seja $(e_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ uma base de E. Então existem $\mathcal{F} \subset \Lambda$ finito e $\lambda_\alpha^{(i)} \in \mathbb{K}$ tais que

$$x_i = \sum_{\alpha\in\mathcal{F}} \lambda_\alpha^{(i)} e_\alpha \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Temos que

$$
\begin{aligned}
u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{F}} \lambda_\alpha^{(i)} e_\alpha \right) \otimes y_i \\
&= \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} e_\alpha \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_\alpha^{(i)} y_i \right)
\end{aligned}
$$

Assim, $\sum_{\alpha \in \mathcal{F}} e_\alpha \otimes z_\alpha$ também é uma representação de u, onde $z_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_\alpha^{(i)} y_i$. Dado $\psi \in S_F$, seja $B \in B(E \times F; E)$ a aplicação bilinear dada por $B(x, y) = \psi(y)x$ e seja $T \in L(E \otimes F; E)$ sua linearização. Segue de (iv) que

$$
\sum_{\alpha \in \mathcal{F}} \psi(z_\alpha) e_\alpha = T(u) = \sum_{i=1}^{n} \psi(y_i) x_i = 0
$$

Assim, $\psi(z_\alpha) = 0$ para cada $\alpha \in \mathcal{F}$. Como $\psi \in S_F$ é arbitrário e S_F separa os pontos de F, segue que cada z_α é zero e portanto $u = 0$. $\square$

No início da seção, vimos que $L(E \otimes F; H) = B(E \times F; H)$. Às vezes é mais conveniente trabalhar com operadores lineares em vez de aplicações bilineares. Assim, identificamos cada aplicação bilinear $B \in B(E \times F; H)$ com a aplicação linear $L_B \in L(E; L(F; H))$ dada por

$$
L_B(x)(y) = B(x, y) \tag{2.1}
$$

É simples verificar que a correspondência $B \to L_B$ é um isomorfismo linear. Além disso, se E, F e H são normados, esse isomorfismo induz uma isometria entre $\mathcal{B}(E \times F; H)$ e $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; H))$, como se pode concluir pela proposição seguinte.

Proposição 2.1-7 *Sejam E, F, H espaços normados. Seja $B \in B(E \times F; H)$ e seja $L_B \in L(E; L(F; H))$ definido como em (2.1). Então B é contínua se, e só se, $L_B(x)$ é contínua para cada $x \in E$ e $L_B : E \to \mathcal{L}(F; H)$ é contínua. Nesse caso, $\|B\| = \|L_B\|$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Se B é contínua, então para cada $x \in E$ e cada $y \in F$ tem-se que

$$
\|L_B(x)(y)\| \leq \|B\| \|x\| \|y\|
$$

Logo, $L_B(x)$ é contínua para cada $x \in E$ e vale

$$
\|L_B(x)\| \leq \|B\| \|x\|
$$

Segue que L_B é contínua e vale $\|L_B\| \leq \|B\|$.
($\Leftarrow$) Supondo $L_B(x)$ contínua para cada x e L_B contínua, temos que

$$\|B(x,y)\| \leq \|L_B(x)\|\|y\| \leq \|L_B\|\|x\|\|y\|$$

para cada $x \in E$ e cada $y \in F$. Segue que B é contínua e vale $\|B\| \leq \|L_B\|$. $\square$

Na próxima seção, definiremos uma norma no espaço $E \otimes F$ que permitirá obter um isomorfismo isométrico entre $\mathcal{L}(E \otimes F; H)$ e $\mathcal{B}(E \times F; H)$. Assim, teremos

$$\mathcal{L}(E \otimes F; H) = \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; H)).$$

Em particular,

$$(E \otimes F)' = \mathcal{L}(E; F').$$

2.2 Norma projetiva

Sejam E, F espaços normados. Sabemos que cada $u \in E \otimes F$ tem uma representação da forma

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$$

com $(x_i, y_i) \in E \times F$, e essa representação claramente não é única. Definimos

$$\pi(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\} \tag{2.2}$$

Mostraremos em seguida que a aplicação $\pi : E \otimes F \to \mathbb{R}$ define uma norma em $E \otimes F$.

Proposição 2.2-1 *A aplicação $\pi : E \otimes F \to \mathbb{R}$ definida por* (2.2) *é uma norma em $E \otimes F$.*

Demonstração. Claro que $\pi(u) \geq 0$ para todo $u \in E \otimes F$. Se $\pi(u) = 0$ e $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ é uma representação de u, para cada $\varphi \in E'$ e cada $\psi \in F'$, temos

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i) \right| \leq \|\varphi\|\|\psi\| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\|$$

Como o lado esquerdo da desigualdade não depende da representação de u, segue que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i)\right| \leq \|\varphi\|\|\psi\|\pi(u) = 0$$

Logo, $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i) = 0$ para todo $\varphi \in E'$ e $\psi \in F'$. Como E' e F' separam os pontos de E e F, respectivamente, segue da proposição 2.1-6 que $u = 0$.

Agora vamos mostrar que $\pi(\lambda u) = |\lambda|\pi(u)$ para cada $u \in E \otimes F$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Seja $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ uma representação de u. Então $\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i) \otimes y_i$ é uma representação de λu. Logo,

$$\pi(\lambda u) \leq \sum_{i=1}^{n} \|\lambda x_i\|\|y_i\| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\|$$

Segue que

$$\pi(\lambda u) \leq |\lambda|\pi(u) \tag{2.3}$$

Claro que a igualdade vale para $\lambda = 0$. Se $\lambda \neq 0$, temos por (2.3) que

$$\pi(u) = \pi(\lambda^{-1}\lambda u) \leq |\lambda|^{-1}\pi(\lambda u)$$

Logo, $|\lambda|\pi(u) \leq \pi(\lambda u)$ e temos a igualdade requerida.

Sejam $u, v \in E \otimes F$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar representações de u e v, digamos, $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ e $v = \sum_{i=n+1}^{m} x_i \otimes y_i$, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\| \leq \pi(u) + \varepsilon$$

e

$$\sum_{i=n+1}^{m} \|x_i\|\|y_i\| \leq \pi(v) + \varepsilon$$

Como $u + v = \sum_{i=1}^{m} x_i \otimes y_i$, temos

$$\pi(u+v) \leq \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|\|y_i\| \leq \pi(u) + \pi(v) + 2\varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, vale a desigualdade triangular $\pi(u+v) \leq \pi(u) + \pi(v)$. $\square$

A norma π é chamada de *norma projetiva*. O *produto tensorial projetivo* é o espaço $E \otimes F$ munido da norma projetiva π. Usa-se a notação $E \otimes_\pi F := (E \otimes F, \pi)$.

Proposição 2.2-2 *Sejam E, F, H espaços normados e seja $B \in B(E \times F; H)$. Então B é contínua se, e só se, sua linearização $T_B \in L(E \otimes_\pi F; H)$ é contínua. Nesse caso, $\|B\| = \|T_B\|$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se B é contínua e $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ é uma representação de $u \in E \otimes_\pi F$, temos que

$$\|T_B(u)\| \leq \sum_{i=1}^n \|B(x_i, y_i)\| \leq \|B\| \sum_{i=1}^n \|x_i\|\|y_i\|$$

Logo, $\|T_B(u)\| \leq \|B\|\pi(u)$. Assim, T_B é contínua e vale $\|T_B\| \leq \|B\|$.
($\Leftarrow$) Se T_B é contínua e $(x, y) \in E \times F$, temos que

$$\|B(x, y)\| = \|T_B(x \otimes y)\| \leq \|T_B\|\pi(x \otimes y) \leq \|T_B\|\|x\|\|y\|$$

Isso mostra que B é contínua e $\|B\| \leq \|T_B\|$. $\square$

Corolário 2.2-3 *Sejam E, F espaços normados. Então a aplicação que leva cada forma bilinear $B \in B(E \times F)$ em sua linearização $T_B \in (E \otimes_\pi F)^*$ induz uma isometria entre $\mathcal{B}(E \times F)$ e $(E \otimes_\pi F)'$.*

Proposição 2.2-4 *Para cada $(x, y) \in E \times F$, tem-se $\pi(x \otimes y) = \|x\|\|y\|$.*

Demonstração. A desigualdade $\pi(x \otimes y) \leq \|x\|\|y\|$ é clara. Por Hahn-Banach, existem $\varphi \in E'$ e $\psi \in F'$, com $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$, tais que $\varphi(x) = \|x\|$ e $\psi(y) = \|y\|$. Seja $B = \varphi(\cdot)\psi(\cdot\cdot)$. É fácil ver que $B \in \mathcal{B}(E \times F)$ e $\|B\| \leq 1$. Seja $T_B \in (E \otimes_\pi F)'$ a linearização de B. Temos $\|T_B\| = \|B\| \leq 1$, assim

$$\|x\|\|y\| = \varphi(x)\psi(y) = B(x, y) = T_B(x \otimes y) \leq \pi(x \otimes y).$$

Portanto, $\pi(x \otimes y) = \|x\|\|y\|$. $\square$

O completamento de $E \otimes_\pi F$ é denotado por $E\tilde{\otimes}_\pi F$. A extensão de π para o completamento $E\tilde{\otimes}_\pi F$ também será denotada por π. A proposição seguinte caracteriza os elementos de $E\tilde{\otimes}_\pi F$ e permite obter uma fórmula para $\pi(u)$ com u nesse espaço completado.

Proposição 2.2-5 *Sejam E, F espaços normados e seja $u \in E\tilde{\otimes}_\pi F$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existem seqüências $(x_n) \subset E$ e $(y_n) \subset F$, tais que*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|\|y_n\| < \pi(u) + \varepsilon$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ e seja (u_n) uma seqüência em $E \otimes_\pi F$ com $\pi(u_n - u) < \varepsilon/2^{n+2}$. Temos que

$$\pi(u_1) \leq \pi(u_1 - u) + \pi(u) < \pi(u) + \frac{\varepsilon}{8}$$

Logo, u_1 admite uma representação

$$u_1 = \sum_{i=1}^{i_1} x_i \otimes y_i$$

com $\displaystyle\sum_{i=1}^{i_1} \|x_i\|\|y_i\| < \pi(u) + \varepsilon/8$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $v_n = u_{n+1} - u_n$. Temos que

$$\begin{aligned} \pi(v_n) &\leq \pi(u_{n+1} - u) + \pi(u - u_n) \\ &< \frac{\varepsilon}{2^{n+3}} + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Assim, v_n admite uma representação

$$v_n = \sum_{i=i_n+1}^{i_{n+1}} x_i \otimes y_i$$

com $\displaystyle\sum_{i=i_n+1}^{i_{n+1}} \|x_i\|\|y_i\| < \varepsilon/2^{n+1}$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ é absolutamente convergente, temos que

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n = u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|\|y_n\| &= \sum_{i=1}^{i_1} \|x_i\|\|y_i\| + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=i_n+1}^{i_{n+1}} \|x_i\|\|y_i\| \\ &< \pi(u) + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{2} < \pi(u) + \varepsilon \end{aligned}$$

□

Corolário 2.2-6 *Sejam E, F espaços normados. Então*

$$E\tilde{\otimes}_\pi F = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n : (x_n, y_n) \in E \times F,\ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|y_n\| < \infty \right\}$$

e para cada $u \in E\tilde{\otimes}_\pi F$, tem-se

$$\pi(u) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|y_n\| : u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|y_n\| < \infty \right\}$$

2.3 O dual de $E\tilde{\otimes}_\pi F'$

Sejam E, F espaços normados. A aplicação que associa cada $u' \in (E\tilde{\otimes}_\pi F)'$ à restrição de u' ao espaço não completado $E \otimes_\pi F$ é uma isometria entre $(E\tilde{\otimes}_\pi F)'$ e $(E \otimes_\pi F)'$. Isso decorre do seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em livros introdutórios de análise funcional.

Teorema 2.3-1 *Sejam E, F espaços normados, com F completo. Cada aplicação linear contínua $T : E \to F$ admite uma única extensão contínua $\tilde{T} : \tilde{E} \to F$, onde $\tilde{E}$ denota o completamento de E. A aplicação $\tilde{T}$ é linear e $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Combinando diversas isometrias obtemos o seguinte:

Teorema 2.3-2 *Sejam E, F espaços normados, com F reflexivo. Então existe um isomorfismo isométrico entre $\mathcal{L}(E; F)$ e $(E\tilde{\otimes}_\pi F')'$.*

Demonstração. Temos

$$(E\tilde{\otimes}_\pi F')' \overset{1}{=} (E \otimes_\pi F')' \overset{2}{=} \mathcal{B}(E \times F') \overset{3}{=} \mathcal{L}(E; F'') \overset{4}{=} \mathcal{L}(E; F)$$

A isometria (1) foi comentada ainda há pouco. (2) é obtida pela correspondência que leva cada $B \in \mathcal{B}(E \times F')$ em sua linearização $T_B \in (E \otimes_\pi F')'$ (ver corol. 2.2-3). Para obter (3) associamos cada $B \in \mathcal{B}(E \times F')$ à aplicação linear $L_B \in \mathcal{L}(E; F'')$ dada por

$$\langle y', L_B(x) \rangle = B(x, y') \qquad (x \in E,\ y' \in F')$$

(ver prop. 2.1-7). Finalmente, (4) é obtida pela correspondência

$$T \in \mathcal{L}(E;F) \to J \circ T \in \mathcal{L}(E;F'')$$

sendo $J : F \to F''$ a identificação canônica entre F e F''. $\square$

Para ver como um operador linear $T \in \mathcal{L}(E;F)$ atua como um funcional linear em $E\tilde{\otimes}_\pi F'$, suponha que as correspondências

$$u' \in (E\tilde{\otimes}_\pi F')' \to v' \in (E \otimes_\pi F')' \to B \in \mathcal{B}(E \times F') \to L \in \mathcal{L}(E;F'') \to T \in \mathcal{L}(E;F)$$

sejam as correspondências usadas no teorema acima. Se $u = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n' \in E\tilde{\otimes}_\pi F'$, temos que

$$\langle u, u' \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n \otimes y_n', v' \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} B(x_n, y_n') = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y_n', L(x_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y_n'(Tx_n)$$

Assim, usando a proposição 1.5-3, podemos enunciar o teorema 2.3-2 de uma maneira mais precisa.

Teorema 2.3-3 *Sejam E, F espaços de Banach, com F reflexivo. Então:*

(a) $\langle E\tilde{\otimes}_\pi F', \mathcal{L}(E;F) \rangle$ é um sistema dual com a forma bilinear

$$\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n', T \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y_n'(Tx_n)$$

(b) A correspondência $T \to \langle \cdot, T \rangle$ é uma isometria entre $\mathcal{L}(E;F)$ e $(E\tilde{\otimes}_\pi F')'$.

(c) A correspondência $\Psi : u \to \langle u, \cdot \rangle$ é uma isometria entre $E\tilde{\otimes}_\pi F'$ e $(\mathcal{L}(E;F), \tau_c)'$.

Os itens (a) e (b) decorrem imediatamente do teorema anterior e da proposição 1.5-3. Para obter (c), precisamos provar que $\operatorname{Im}\Psi = (\mathcal{L}(E;F), \tau_c)'$. Para isso, precisaremos de alguns resultados auxiliares.

Lema 2.3-4 *Seja (a_n) uma seqüência em $\mathbb{R}$ com $a_n \geq 0$, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Então existe uma seqüência (λ_n) em $\mathbb{R}$, com $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \to \infty$, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n < \infty$.*

Demonstração. Seja (ε_j) uma seqüência em $\mathbb{R}$ com $\varepsilon_j > 0$ e $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j < \infty$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, existe uma seqüência de índices (n_j), estritamente crescente, tal que

$$\sum_{n=n_j+1}^{\infty} a_n < \varepsilon_j^2 \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

Defina

$$\lambda_n = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 1 \leq n \leq n_1 \\ \dfrac{1}{\varepsilon_j} & \text{se} \quad n_j < n \leq n_{j+1} \end{cases}$$

Então $\lambda_n > 0$ para todo n e $\lambda_n \to \infty$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_1+1}^{n_k} \lambda_n a_n &= \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{n=n_j+1}^{n_{j+1}} \lambda_n a_n \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\varepsilon_j} \sum_{n=n_j+1}^{n_{j+1}} a_n < \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n < \infty$. □

Lema 2.3-5 *Seja E um espaço de Banach e seja (x_n) uma seqüência em E tal que $x_n \to 0$. Então*

$$\overline{\Gamma(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1 \right\}$$

Demonstração. Seja $L := \{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1\}$. A inclusão $L \subset \overline{\Gamma(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})}$ é clara. Não é difícil verificar que L é convexo, equilibrado e contém $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Então basta mostrar que L é fechado. Mostraremos que L é compacto. Se (y_k) é uma seqüência em L, podemos escrever

$$y_k = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(k)} x_n \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

com $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n^{(k)}| \leq 1$. Seja D o disco unitário fechado em $\mathbb{K}$ e considere a seqüência $(\alpha_k) \subset D^{\mathbb{N}}$, onde $\alpha_k = (\lambda_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$. Pelo teorema de Tychonoff, $D^{\mathbb{N}}$ é compacto para a topologia produto em $D^{\mathbb{N}}$. Assim, (α_k) admite uma subseqüência (α_{k_j}) que converge para algum $\alpha = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in D^{\mathbb{N}}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$\sum_{n=1}^{m} |\lambda_n| = \sum_{n=1}^{m} \lim_{j\to\infty} |\lambda_n^{k_j}| = \lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n^{k_j}| \leq 1$$

Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1$. Assim, se definimos

$$y := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$$

então $y \in L$. Vamos mostrar que (y_{k_j}) converge para y. Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n\| < \varepsilon/3$ para todo $n > n_0$. É claro que

$$\sum_{n=1}^{n_0} |\lambda_n^{(k_j)} - \lambda_n| \|x_n\| \to 0$$

com $j \to \infty$. Então existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{n_0} |\lambda_n^{(k_j)} - \lambda_n| \|x_n\| < \varepsilon/3$ para todo $j \geq j_0$. Segue que

$$\begin{aligned} \|y_{k_j} - y\| &\leq \sum_{n=1}^{n_0} |\lambda_n^{(k_j)} - \lambda_n| \|x_n\| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |\lambda_n^{(k_j)} - \lambda_n| \|x_n\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $j \geq j_0$. Isso termina a demonstração. $\square$

Seja E um espaço de Banach. Então:

- Se $1 \leq p < \infty$, $\ell_p(E)$ denota o espaço vetorial de todas as seqüências $(x_n) \subset E$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$. $\ell_p(E)$ é um espaço de Banach com a norma dada por

$$\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

- $\ell_\infty(E)$ denota o espaço vetorial de todas as seqüências $(x_n) \subset E$ que são limitadas. $\ell_\infty(E)$ é um espaço de Banach com a norma dada por

$$\|(x_n)\| = \sup_n \|x_n\|$$

- $c_0(E)$ denota o subespaço de $\ell_\infty(E)$ formado por todas as seqüências $(x_n) \subset E$ tais que $x_n \to 0$. $c_0(E)$ é um subespaço fechado de $\ell_\infty(E)$.

Proposição 2.3-6 *Seja E um espaço de Banach. A aplicação*

$$\Phi : (x'_n) \in \ell_1(E') \to \varphi \in c_0(E)'$$

onde φ é dada por

$$\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x_n)$$

é um isomorfismo isométrico entre $\ell_1(E')$ e $c_0(E)'$.

Demonstração. Seja $(x'_n) \in \ell_1(E')$. É fácil verificar que $\varphi \in c_0(E)'$ e $\|\varphi\| \leq \|(x'_n)\|$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\| < \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|x'_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Para cada $n = 1, \ldots, n_0$, seja $x_n \in E$, com $\|x_n\| \leq 1$, tal que

$$\|x'_n\| < |x'_n(x_n)| + \frac{\varepsilon}{2n_0}$$

Podemos supor que $x'_n(x_n)$ é um número real não-negativo (se não for, multiplicamos x_n por um escalar de módulo 1 conveniente). Se $x = (x_1, \ldots, x_{n_0}, 0, 0, \ldots)$, então $x \in c_0(E)$, $\|x\| \leq 1$ e

$$\|(x'_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\| < \sum_{n=1}^{n_0} (x'_n(x_n) + \frac{\varepsilon}{2n_0}) + \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x) + \varepsilon$$

Assim, vale a igualdade $\|\varphi\| = \|(x'_n)\|$. É fácil ver que Φ é linear. Então Φ é uma isometria entre $\ell_1(E')$ e $\operatorname{Im}\Phi$. Como $\ell_1(E')$ é completo, $\operatorname{Im}\Phi$ é fechado em $c_0(E)'$. Se $^\circ$ denota polares com relação ao sistema dual $\langle c_0(E), c_0(E)' \rangle$, temos que

$$(\operatorname{Im}\Phi)^\circ = \{(x_n) \in c_0(E) : |\langle (x_n), \Phi((x'_n)) \rangle| \leq 1, \text{ para todo } (x'_n) \in \ell_1(E')\}$$

Então, se $(x_n) \in c_0(E)$, temos que

$$(x_n) \in (\operatorname{Im}\Phi)^\circ \Leftrightarrow \left| \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x_n) \right| \leq 1 \text{ para todo } (x'_n) \in \ell_1(E')$$

Se (x_n) satisfaz essa condição, então, em particular, $|x'(x_n)| \leq 1$ para todo $x' \in E'$ e todo n. Por Hahn-Banach, devemos ter $x_n = 0$ para todo n. Assim, $(\mathrm{Im}\,\Phi)^\circ = \{0\}$. Como $\mathrm{Im}\,\Phi$ é convexo, equilibrado e fechado, segue do teorema bipolar que

$$\mathrm{Im}\,\Phi = (\mathrm{Im}\,\Phi)^{\circ\circ} = \{0\}^\circ = c_0(E)'$$

Isso completa a demonstração. $\square$

Também precisaremos do resultado seguinte. Para a demonstração, sugerimos [4] (ver pág. 3).

Proposição 2.3-7 *Seja E um espaço normado e $K \subset E$ compacto. Então existe uma seqüência $(x_n) \subset E$, com $x_n \to 0$, tal que $K \subset \overline{\Gamma(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})}$.*

Demonstração do Teorema 2.3-3. Conforme observado anteriormente, só precisamos provar que $\mathrm{Im}\,\Psi = (\mathcal{L}(E;F), \tau_c)'$. Seja $u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n' \in E\tilde{\otimes}_\pi F'$ com $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|\|y_n'\| < \infty$. Pelo lema 2.3-4, existe uma seqüência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ com $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \to \infty$ e

$$c_0 := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|x_n\|\|y_n'\| < \infty$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $x_n \neq 0$ para todo n. Assim, o conjunto

$$K := \left\{\lambda_n^{-1} \frac{x_n}{\|x_n\|} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$$

é compacto e, para todo $T \in \mathcal{L}(E;F)$, temos que

$$|\langle u, T\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n'\|\|Tx_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|x_n\|\|y_n'\| \left\| T\left(\lambda_n^{-1}\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\| \leq c_0 \sup_{x\in K} \|Tx\|$$

Portanto, $\langle u, \cdot\rangle$ é τ_c-contínua. Obtemos assim a inclusão $\mathrm{Im}\,\Psi \subset (\mathcal{L}(E;F), \tau_c)'$. Agora tome $\varphi \in (\mathcal{L}(E;F), \tau_c)'$. Então existem $c > 0$ e $K \subset E$ compacto tais que

$$|\varphi(T)| \leq c \sup_{x\in K} \|Tx\| = \sup_{x\in K} \|Tx\|$$

para todo $T \in \mathcal{L}(E;F)$. Por 2.3-7, existe uma seqüência (x_n) em E, $x_n \to 0$, tal que $cK \subset X$, sendo X a envoltória convexa, equilibrada e fechada do conjunto $\{x_n : x \in \mathbb{N}\}$. Vamos mostrar que

$$\sup_{x\in X} \|Tx\| = \sup_n \|Tx_n\|$$

Pelo lema 2.3-5, cada $x \in X$ tem a forma $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$, com $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1$. Assim,

$$\|Tx\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|Tx_n\| \leq \sup_n \|Tx_n\|$$

e portanto,

$$\sup_{x \in X} \|Tx\| \leq \sup_n \|Tx_n\|$$

A desigualdade oposta é clara. Segue que, para todo $T \in \mathcal{L}(E; F)$, tem-se

$$|\varphi(T)| \leq \sup_n \|Tx_n\| \tag{2.4}$$

Seja $A : \mathcal{L}(E; F) \to c_0(F)$ a aplicação linear definida por $A(T) = (Tx_n)$. Pela desigualdade (2.4),

$$A(T) = 0 \;\Rightarrow\; \varphi(T) = 0$$

o que é o mesmo que

$$A(T) = A(U) \;\Rightarrow\; \varphi(T) = \varphi(U)$$

isto é, a aplicação $\Phi : \operatorname{Im} A \to \mathbb{K}$ dada por $\Phi(A(T)) = \varphi(T)$ está bem definida. É fácil ver que Φ é linear. Além disso, Φ é contínua, pois

$$|\Phi(A(T))| = |\varphi(T)| \leq \sup_n \|Tx_n\| = \|A(T)\|$$

Por Hahn-Banach, Φ admite uma extensão $\tilde{\Phi} \in c_0(F)'$. Pela proposição 2.3-6, $\tilde{\Phi}$ é da forma

$$\tilde{\Phi}((y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} y'_n(y_n)$$

onde $(y'_n) \in \ell_1(F')$. Assim, $u := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y'_n \in E \tilde{\otimes}_\pi F'$ e, para todo $T \in \mathcal{L}(E; F)$, tem-se

$$\varphi(T) = \tilde{\Phi}(A(T)) = \tilde{\Phi}((Tx_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} y'_n(Tx_n) = \langle u, T \rangle$$

logo, $\varphi = \Psi(u) \in \operatorname{Im} \Psi$. Concluímos que vale a igualdade $\operatorname{Im} \Psi = (\mathcal{L}(E; F), \tau_c)'$. $\square$

Capítulo 3

Espaços de Polinômios Homogêneos

3.1 Aplicações multilineares

Sejam E, F espaços de Banach. Uma aplicação $A : E^m \to F$ é dita *multilinear* ou *m-linear* se for linear em cada variável. O espaço vetorial de todas as aplicações m-lineares $A : E^m \to F$ será denotado por $L(^mE; F)$. O subespaço dos membros contínuos de $L(^mE; F)$ será denotado por $\mathcal{L}(^mE; F)$. Quando $F = \mathbb{K}$, omitiremos o espaço F e escreveremos $L(^mE)$ no lugar de $L(^mE; \mathbb{K})$. O mesmo valerá para subespaços de $L(^mE)$.

Seja $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ definimos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

e

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

Se $A \in L(^mE; F)$, $x_1, \ldots, x_n \in E$ e $|\alpha| = m$, escrevemos

$$Ax_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = A(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\alpha_1}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{\alpha_n})$$

Proposição 3.1-1 *Para cada aplicação multilinear $A : E^m \to F$, defina*

$$\|A\| = \sup\{\|A(x_1, \ldots, x_m)\| : x_j \in E,\ \|x_j\| \leq 1 \text{ para } j = 1, \ldots, m\}$$

Então as seguintes condições são equivalentes:

(a) $\|A\| < \infty$.

(b) A *é contínua.*

(c) A *é contínua na origem.*

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ Para $(x_1, \ldots, x_m), (a_1, \ldots, a_m) \in E$, com $\|x_i\| < r$ e $\|a_i\| < r$, temos que

$$\begin{aligned}
\|A(x_1, \ldots, x_m) - A(a_1, \ldots, a_m)\| = \\
= \left\| \sum_{i=1}^{m} (A(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, \ldots, x_m) - A(a_1, \ldots, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)) \right\| \\
\leq \sum_{i=1}^{m} \|A(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)\| \\
\leq \|A\| r^{m-1} m \max_i \|x_i - a_i\|
\end{aligned}$$

Assim, dados $a = (a_1, \ldots, a_m) \in E^m$ e $\varepsilon > 0$, seja $s > \max_i \|a_i\|$ e seja $\delta > 0$ tal que $\delta < s - \max_i \|a_i\|$ e $\delta < \varepsilon / C$, onde $C = \|A\| s^{m-1} m$. Então é claro que $\|A(x) - A(a)\| < \varepsilon$ para todo $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E^m$ com $\|x - a\| = \max_i \|x_i - a_i\| < \delta$.
$(b) \Rightarrow (c)$ Óbvio.
$(c) \Rightarrow (a)$ Seja $\delta > 0$ tal que $\|A(x)\| < 1$ para todo $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E^m$ com $\|x\| = \max_i \|x_i\| \leq \delta$. Segue que

$$\|A(x_1, \ldots, x_m)\| < \delta^{-m}$$

para $(x_1, \ldots, x_m) \in E^m$ com $\|x_j\| \leq 1$. Portanto, $\|A\| \leq \delta^{-m} < \infty$. □

Proposição 3.1-2 *Sejam* E, F *espaços de Banach e* $m \in \mathbb{N}$. *Então* $(\mathcal{L}(^m E; F), \|\cdot\|)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Não é difícil verificar que a aplicação $A \in \mathcal{L}(^m E; F) \rightarrow \|A\| \in \mathbb{R}$ é uma norma em $\mathcal{L}(^m E; F)$. Para mostrar que $(\mathcal{L}(^m E; F), \|\cdot\|)$ é completo, tomemos uma seqüência de Cauchy (A_j) em $\mathcal{L}(^m E; F)$. Para cada $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E^m$, temos que

$$\|A_j(x) - A_i(x)\| \leq \|A_j - A_i\| \|x_1\| \cdots \|x_m\|$$

Assim, $(A_j(x))$ é uma seqüência de Cauchy em F. Como F é completo, $(A_j(x))$ converge para cada $x \in E^m$. Definimos $A : E^m \to F$ por $A(x) = \lim_{j\to\infty} A_j(x)$. Não é difícil provar que A é multilinear, $\|A\| < \infty$ e $\|A_j - A\| \to 0$, isto é, $A \in \mathcal{L}(^mE;F)$ e $A_j \to A$. $\square$

Uma aplicação multilinear $A : E^m \to F$ é dita *simétrica* se

$$A(x_1,\dots,x_m) = A(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(m)})$$

para toda permutação σ do conjunto $\{1,\dots,m\}$. O conjunto de todas as aplicações multilineares simétricas $A : E^m \to F$ é um subespaço vetorial de $L(^mE;F)$ e será denotado por $L^s(^mE;F)$. Definimos também

$$\mathcal{L}^s(^mE;F) := L^s(^mE;F) \cap \mathcal{L}(^mE;F)$$

Para $A \in L(^mE;F)$, a simetrização $A^s \in L(^mE;F)$ de A é definida por

$$A^s(x_1,\dots,x_m) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} A(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(m)})$$

onde S_m denota o conjunto de todas as permutações do conjunto $\{1,\dots,m\}$. Temos as seguintes propriedades:

Proposição 3.1-3 *Seja $A \in L(^mE;F)$. Então:*

(i) $A^s \in L^s(^mE;F)$.

(ii) *Se $A \in L^s(^mE;F)$, então $A^s = A$.*

(iii) $\|A^s\| \le \|A\|$.

A demonstração é simples e não a faremos aqui. A proposição acima implica no seguinte:

Corolário 3.1-4 *A aplicação $A \to A^s$ é uma projeção de $L(^mE;F)$ sobre $L^s(^mE;F)$ e induz uma projeção contínua de $\mathcal{L}(^mE;F)$ sobre $\mathcal{L}^s(^mE;F)$.*

Teorema 3.1-5 *Seja $A \in L^s(^mE;F)$. Então:*

(a) **(Fórmula de Leibniz)** *Para* $x_1, \ldots, x_n \in E$*, tem-se*

$$A(x_1 + \cdots + x_n)^m = \sum \frac{m!}{\alpha!} A x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

onde a soma é tomada sobre todos os multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *com* $|\alpha| = m$*.*

(b) **(Fórmula de polarização)** *Para* $x_0, x_1, \ldots, x_m \in E$*, tem-se*

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m$$

A Fórmula de polarização pode ser obtida a partir da Fórmula de Leibniz e é fundamental para tratar de polinômios homogêneos. Para a demonstração, ver, por exemplo, [8] pág. 5-7.

3.2 Polinômios homogêneos

Dizemos que uma aplicação $P : E \to F$ é um *polinômio m-homogêneo* quando é da forma

$$P(x) = Ax^m$$

com $A \in L(^m E; F)$. O espaço vetorial de todos os polinômios m-homogêneos $P : E \to F$ será denotado por $P(^m E; F)$. O subespaço dos membros contínuos de $P(^m E; F)$ será denotado por $\mathcal{P}(^m E; F)$. Quando $F = \mathbb{K}$, omitiremos F e escreveremos $P(^m E)$ no lugar de $P(^m E; \mathbb{K})$. O mesmo valerá para subespaços de $P(^m E)$.

Para cada polinômio m-homogêneo $P : E \to F$, definimos

$$\|P\| = \sup\{\|P(x)\| : x \in E,\ \|x\| \leq 1\}$$

Proposição 3.2-1 *Para cada* $P \in P(^m E; F)$*, existe um único* $\check{P} \in L^s(^m E; F)$ *tal que* $P(x) = \check{P} x^m$ *para todo* $x \in E$*. Valem as seguintes desigualdades*

$$\|P\| \leq \|\check{P}\| \leq \frac{m^m}{m!} \|P\|$$

Demonstração. Seja $P \in P(^mE; F)$. Por definição, existe $A \in L(^mE; F)$ de maneira que $P(x) = Ax^m$ para todo $x \in E$. É fácil ver que $Ax^m = A^s x^m$ para todo x, sendo A^s a simetrização de A. Então basta tomar $\check{P} = A^s$. A unicidade de $\check{P}$ decorre da Fórmula de polarização. Para $x \in E$ com $\|x\| \leq 1$, tem-se que

$$\|P(x)\| \leq \|\check{P}\| \|x\|^m \leq \|\check{P}\|$$

Logo, $\|P\| \leq \|\check{P}\|$. Sejam $x_1, \ldots, x_m \in E$ com $\|x_j\| \leq 1$. Pela Fórmula de Polarização, temos que

$$\|\check{P}(x_1, \ldots, x_m)\| \leq \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \|\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)\|$$

Para $\varepsilon_j = \pm 1$, temos que

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)\| &\leq \|P\| \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m\|^m \\ &\leq \|P\| (\|x_1\| + \cdots + \|x_m\|)^m \\ &\leq \|P\| m^m \end{aligned}$$

Assim,

$$\|\check{P}(x_1, \ldots, x_m)\| \leq \frac{m^m}{m!} \|P\|$$

E portanto $\|\check{P}\| \leq \dfrac{m^m}{m!} \|P\|$. □

Corolário 3.2-2 *Seja $P \in P(^mE; F)$. Então P é contínuo se, e só se, $\|P\| < \infty$.*

Demonstração. Se P é contínuo, segue da fórmula de polarização que $\check{P}$ é contínua. Assim,

$$\|P\| \leq \|\check{P}\| < \infty.$$

Por outro lado, se $\|P\| < \infty$, então

$$\|\check{P}\| \leq \frac{m^m}{m!} \|P\| < \infty$$

Assim, $\check{P}$ é contínua e portanto P é contínuo, pois P é a composição de $\check{P}$ com a aplicação diagonal $x \in E \to (x, \ldots, x) \in E^m$. □

Corolário 3.2-3 *$(\mathcal{P}(^mE;F), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. É fácil verificar que $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathcal{P}(^mE;F)$. A correspondência $P \in P(^mE;F) \to \check{P} \in L^s(^mE;F)$ é um isomorfismo linear e induz um isomorfismo topológico entre $\mathcal{P}(^mE;F)$ e $\mathcal{L}^s(^mE;F)$. É fácil verificar que $\mathcal{L}^s(^mE;F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(^mE;F)$ e é portanto completo. Logo, $\mathcal{P}(^mE;F)$ também é completo. □

Proposição 3.2-4 *Seja $P \in P(^mE;F)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) P é contínuo.

(b) P é limitado em toda bola $\overline{B}(a;r) \subset E$.

(c) P é limitado em alguma bola $\overline{B}(a;r) \subset E$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ Para $x \in \overline{B}(a;r)$, temos que

$$\|P(x)\| \leq \|P\|\|x\|^m \leq \|P\|(r + \|a\|)^m$$

$(b) \Rightarrow (c)$ Óbvio.

$(c) \Rightarrow (a)$ Seja $c > 0$ tal que $\|P(x)\| \leq c$ para todo $x \in \overline{B}(a;r)$. Usando a fórmula de polarização com $x_0 = a$ e $x_1 = \cdots = x_m = x$, temos que

$$P(x) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P(a + (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_m)x)$$

Se $\|x\| \leq r/m$, temos que $a + (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_m)x \in \overline{B}(a;r)$. Assim,

$$\|P(x)\| \leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon = \pm 1} \|P(a + (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_m)x)\| \leq \frac{c}{m!}$$

Segue que, para $\|x\| \leq 1$,

$$\|P(x)\| \leq \frac{c}{m!} \cdot \frac{m^m}{r^m}$$

Assim, $\|P\| < \infty$ e portanto P é contínuo. □

Corolário 3.2-5 *Seja $P \in P(^mE;F)$. Então P é contínuo se, e só se, P é contínuo na origem.*

Demonstração. Se P é contínuo na origem, então existe $\delta > 0$ tal que

$$P(B_E(0;\delta)) \subset B_F(0;1)$$

Assim, P é limitado na bola $\overline{B}_E(0;\delta/2)$. Portanto, P é contínuo. $\square$

É fácil ver que, se $P : E \to F$ é um polinômio m-homogêneo e $T : F \to G$ é uma aplicação linear, então $T \circ P : E \to G$ é um polinômio m-homogêneo.

Teorema 3.2-6 *Sejam E, F espaços de Banach e seja $P : E \to F$ uma aplicação. Então $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ se, e só se, $\psi \circ P \in \mathcal{P}(^mE)$ para todo $\psi \in F'$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) É fácil ver.
($\Leftarrow$) Defina a aplicação $A : E^m \to F$ por

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)$$

Seja $\psi \in F'$. Como $\psi \circ P \in \mathcal{P}(^mE)$, existe $A_\psi \in \mathcal{L}^s(^mE)$ tal que $\psi \circ P(x) = A_\psi x^m$ para todo $x \in E$. Usando a fórmula de polarização, temos que

$$A_\psi(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \psi \circ P(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)$$

Então é claro que $\psi \circ A = A_\psi$. Como isso vale para qualquer $\psi \in F'$ e A_ψ é m-linear, é claro que A é m-linear. Para cada $x \in E$ e cada $\psi \in F'$, temos que

$$\psi \circ P(x) = A_\psi x^m = \psi \circ A x^m$$

Assim, $P(x) = Ax^m$ para todo $x \in E$. Isso mostra que $P \in P(^mE; F)$. Para cada $\psi \in F'$, o conjunto $\psi(P(\overline{B}_E))$ é limitado em $\mathbb{K}$, pois $\psi \circ P \in \mathcal{P}(^mE)$. Pelo princípio da limitação uniforme, $P(\overline{B}_E)$ é limitado em F. Concluímos que $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$. $\square$

Proposição 3.2-7 *Sejam E, F espaços de Banach e $m \in \mathbb{N}$. Seja $\mathcal{F}$ um subconjunto de $\mathcal{P}(^mE; F)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\mathcal{F}$ é limitado.

(b) $\mathcal{F}$ *é equicontínuo.*

(c) $\mathcal{F}$ *é equicontínuo na origem.*

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ Seja $c > 0$ tal que $\|P\| \leq c$ para todo $P \in \mathcal{F}$. Para $P \in \mathcal{F}$ e $x, a \in E$, com $\|x\| < r$ e $\|a\| < r$, temos que

$$\begin{aligned}
\|P(x) - P(a)\| &= \|\check{P}x^m - \check{P}a^m\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{m} (\check{P}a^{i-1}x^{m-i+1} - \check{P}a^i x^{m-i}) \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \|\check{P}a^{i-1}(x-a)x^{m-i}\| \\
&\leq mr^{m-1}\|\check{P}\|\|x-a\| \\
&\leq \frac{m^{m+1}r^{m-1}c}{m!}\|x-a\|
\end{aligned}$$

Assim, dados $a \in E$ e $\varepsilon > 0$, seja $r > \|a\|$ e seja $\delta > 0$ tal que $\delta < r - \|a\|$ e $\delta < \varepsilon/C$, onde $C = (m^{m+1}r^{m-1}c)/m!$. Então é claro que $\|P(x) - P(a)\| < \varepsilon$ para todo $P \in \mathcal{F}$ e todo $x \in E$ com $\|x - a\| < \delta$.

$(b) \Rightarrow (c)$ É óbvio.

$(c) \Rightarrow (a)$ Se $\mathcal{F}$ é equicontínuo na origem, existe $\delta > 0$ tal que $\|P(x)\| < 1$ para todo $P \in \mathcal{F}$ e todo $x \in E$ com $\|x\| \leq \delta$. Segue que $\|P\| \leq \delta^{-m}$ para todo $P \in \mathcal{F}$. □

Corolário 3.2-8 *A bola unitária fechada de* $\mathcal{P}(^mE)$ *é* τ_c*-compacta.*

Demonstração. Seja $B = \overline{B}_{\mathcal{P}(^mE)}$. Pelo teorema de Ascoli, B é relativamente compacta em $\mathcal{C}(E)$ para a topologia compacto-aberta τ_c. Não é difícil provar que $(\mathcal{P}(^mE), \tau_c)$ é um subespaço fechado de $(\mathcal{C}(E), \tau_c)$ e que B é τ_c-fechado em $\mathcal{P}(^mE)$. Assim, segue que B é τ_c-compacta. □

3.3 Linearização de polinômios homogêneos

Sejam E um espaço de Banach e $m \in \mathbb{N}$. Por um teorema de Ng [12], será possível obter um espaço de Banach $Q(^mE)$ tal que $\mathcal{P}(^mE) = Q(^mE)'$. O espaço $Q(^mE)$ tem a notável propriedade de que, para cada espaço de Banach F, $\mathcal{P}(^mE;F) = \mathcal{L}(Q(^mE);F)$ (teorema 3.3-3), isto é, $Q(^mE)$ pode ser usado para "linearizar" polinômios m-homogêneos. Dessa forma, uma vez que se tenha obtido algum resultado a respeito de espaços de operadores lineares, podemos tentar obter um resultado análogo para espaços de polinômios homogêneos. Isso é o que será feito no capítulo 4, onde estudaremos condições para a reflexividade de $\mathcal{L}(E;F)$ e $\mathcal{P}(^mE;F)$.

O teorema 3.3-3 é devido a R. Ryan (ver [14]) mas seguiremos a demonstração proposta em [9], que é uma demonstração análoga a de um teorema de linearização de funções holomorfas limitadas, obtido por J. Mujica em [9] (ver Theorem 2.1).

Teorema 3.3-1 [12] *Seja E um espaço normado. Suponhamos que exista uma topologia localmente convexa de Hausdorff τ em E tal que a bola $\overline{B}_E$ seja τ-compacta. Seja*

$$F = \{\varphi \in E^* : \varphi \text{ é } \tau\text{-contínua em } \overline{B}_E\}$$

Então F é um subespaço fechado de E' e a aplicação avaliação $J : E \to F'$ dada por

$$Jx(\varphi) = \varphi(x)$$

para $x \in E$, $\varphi \in F$ é um isomorfismo isométrico.

Demonstração. Faremos a demonstração seguindo [12]. Se $\varphi \in F$, então $\varphi(\overline{B}_E)$ é compacto em $\mathbb{K}$, pois é a imagem contínua de um compacto. Em particular, $\varphi(\overline{B}_E)$ é limitado, portanto, $\varphi \in E'$. Isso mostra que $F \subset E'$. Para mostrar que F é fechado em E', tome uma seqüência (φ_n) em F que converge para algum $\varphi \in E'$. Então $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ uniformemente sobre $\overline{B}_E$ e, como cada φ_n é τ-contínua em $\overline{B}_E$, segue do lema 1.4-3 que φ também é τ-contínua em $\overline{B}_E$. Pelo teorema de Hahn-Banach para espaços localmente convexos, $(E,\tau)'$ separa os pontos de E. Então F também separa os pontos de E, pois $F \supset (E,\tau)'$. Isso implica que J é injetiva. Afirmamos que a aplicação

$$J : (\overline{B}_E, \tau) \to (F', \sigma(F', F))$$

é contínua. De fato, seja (x_λ) uma rede em $\overline{B}_E$ que converge para algum $x \in \overline{B}_E$ para a topologia τ. Temos

$$Jx_\lambda \overset{\sigma(F',F)}{\to} Jx \Leftrightarrow \varphi(x_\lambda) \to \varphi(x) \text{ para todo } \varphi \in F$$

e essa condição é satisfeita pela própria definição de F. Segue que $J(\overline{B}_E)$ é $\sigma(F',F)$-compacto e, portanto, $\sigma(F',F)$-fechado. Se $^\circ$ denota polares com respeito ao sistema dual $\langle F, F'\rangle$, temos que

$$\begin{aligned} J(\overline{B}_E)^\circ &= \{\varphi \in F : |Jx(\varphi)| \leq 1, \forall x \in \overline{B}_E\} \\ &= \{\varphi \in F : |\varphi(x)| \leq 1, \forall x \in \overline{B}_E\} = \overline{B}_F \end{aligned}$$

Como $J(\overline{B}_E)$ é convexo, equilibrado e $\sigma(F',F)$-fechado, segue do teorema bipolar que

$$J(\overline{B}_E) = J(\overline{B}_E)^{\circ\circ} = \overline{B}_F^\circ = \overline{B}_{F'}$$

Isso completa a demonstração. $\square$

Sejam E um espaço de Banach e $m \in \mathbb{N}$. A topologia compacto-aberta τ_c é uma topologia localmente convexa de Hausdorff em $\mathcal{P}(^mE)$ e a bola unitária fechada $\overline{B}_{\mathcal{P}(^mE)}$ é τ_c-compacta (corol. 3.2-8). Assim, o espaço

$$Q(^mE) := \{u \in \mathcal{P}(^mE)' : u \text{ é } \tau_c\text{-contínua em } \overline{B}_{\mathcal{P}(^mE)}\}$$

com a norma induzida por $\mathcal{P}(^mE)'$ é um espaço de Banach e a aplicação avaliação

$$J : \mathcal{P}(^mE) \to Q(^mE)'$$

que é dada por $J(P)(u) = u(P)$ para $P \in \mathcal{P}(^mE)$, $u \in Q(^mE)$, é um isomorfismo isométrico. Vamos fixar essas notações para todo o restante da seção. Assim, $Q(^mE)$ e J sempre denotarão os objetos definidos acima. Os próximos resultados dessa seção aparecem em [9].

Proposição 3.3-2 *Se $x \in E$, defina $u_x : \mathcal{P}(^mE) \to \mathbb{K}$ por $u_x(P) = P(x)$ para cada $P \in \mathcal{P}(^mE)$. Então:*

(a) Para cada $x \in E$, $u_x \in Q(^m E)$ e $\|u_x\| = \|x\|^m$.

(b) Seja $q_m : E \to Q(^m E)$ definida por $q_m(x) = u_x$. Então $q_m \in \mathcal{P}(^m E; Q(^m E))$ e $\|q_m\| = 1$.

(c) $Q(^m E) = \overline{\Gamma}(q_m(E))$. Em particular, $q_m(E)$ gera um subespaço denso de $Q(^m E)$.

Demonstração. (a) Seja $x \in E$. Se (P_λ) é uma rede em $\mathcal{P}(^m E)$ que converge para algum $P \in \mathcal{P}(^m E)$ para a topologia τ_c, então, em particular, (P_λ) converge pontualmente para P. Assim,

$$u_x(P_\lambda) = P_\lambda(x) \to P(x) = u_x(P)$$

Isso mostra que $u_x \in (\mathcal{P}(^m E), \tau_c)' \subset Q(^m E)$. Para $P \in \mathcal{P}(^m E)$, temos que

$$|u_x(P)| = |P(x)| \leq \|P\| \|x\|^m$$

logo, $\|u_x\| \leq \|x\|^m$. Por Hahn-Banach, existe $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x) = \|x\|$. Seja $P \in \mathcal{P}(^m E)$ dado por $P(y) = (\varphi(y))^m$. Então $\|P\| \leq 1$ e

$$u_x(P) = P(x) = \|x\|^m$$

Portanto $\|u_x\| = \|x\|^m$.

(b) Seja $\psi \in Q(^m E)'$. Como J é sobrejetiva, existe $P \in \mathcal{P}(^m E)$ tal que $J(P) = \psi$. Para cada $x \in E$, temos que

$$\psi \circ q_m(x) = J(P)(u_x) = u_x(P) = P(x)$$

isto é, $\psi \circ q_m = P$. Pelo teorema 3.2-6, $q_m \in \mathcal{P}(^m E; Q(^m E))$. Além disso, pelo item anterior,

$$\|q_m\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|q_m(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\|^m = 1$$

(c) Se $^\circ$ denota polar com respeito ao sistema dual $\langle Q(^m E), Q(^m E)' \rangle$, temos que

$$q_m(E)^\circ = \{J(P) \in Q(^m E)' : P \in \mathcal{P}(^m E),\ |J(P)(q_m(x))| \leq 1,\ \forall x \in E\}$$

Notemos que

$$J(P)(q_m(x)) = J(P)(u_x) = u_x(P) = P(x)$$

Segue que

$$q_m(E)^\circ = \{J(P) : P \in \mathcal{P}(^mE),\, |P(x)| \leq 1,\, \forall x \in E\} = \{0\}$$

Assim, pelo teorema bipolar, temos que

$$Q(^mE) = \{0\}^\circ = q_m(E)^{\circ\circ} = \overline{\Gamma} q_m(E)$$

Como $\Gamma(q_m(E)) \subset [q_m(E)]$, isso imediatamente implica que $Q(^mE) = \overline{[q_m(E)]}$, isto é, $q_m(E)$ gera um subespaço denso de $Q(^mE)$. □

Vamos fixar a notação para o polinômio q_m definido no teorema acima para todo o restante da seção.

Teorema 3.3-3 *Sejam E um espaço de Banach e $m \in \mathbb{N}$. O par $(Q(^mE), q_m)$ tem a seguinte propriedade universal: Para cada espaço de Banach F e cada $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ existe um único $T_P \in \mathcal{L}(Q(^mE); F)$ tal que $P = T_P \circ q_m$. A correspondência*

$$P \in \mathcal{P}(^mE; F) \to T_P \in \mathcal{L}(Q(^mE); F) \tag{3.1}$$

é um isomorfismo isométrico.

Demonstração. Seja F um espaço de Banach e seja $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$. Para cada $u \in Q(^mE)$, defina $T_P(u) : F' \to \mathbb{K}$ por

$$T_P(u)(\psi) = u(\psi \circ P)$$

É fácil verificar que $T_P(u)$ é linear. Além disso,

$$|T_P(u)(\psi)| \leq \|u\|\|\psi\|\|P\|$$

para todo $\psi \in F'$. Logo, $T_P(u) \in F''$ e $\|T_P(u)\| \leq \|P\|\|u\|$. É fácil verificar que a aplicação $T_P : Q(^mE) \to F''$ é linear, logo, $T_P \in \mathcal{L}(Q(^mE); F'')$ e $\|T_P\| \leq \|P\|$. Para cada $x \in E$ e cada $\psi \in F'$, temos que

$$T_P(q_m(x))(\psi) = q_m(x)(\psi \circ P) = \psi(P(x))$$

Logo, $T_P(q_m(x)) = P(x)$ na identificação canônica de F com um subespaço de seu bidual F''. Usando o teorema anterior,

$$T_P(Q(^mE)) = T_P(\overline{[q_m(E)]}) \subset \overline{T_P([q_m(E)])} = \overline{P(E)} \subset \overline{F} = F$$

Assim, $T_P \in \mathcal{L}(Q(^mE); F)$. Para $x \in E$, temos que

$$\|P(x)\| = \|T_P(q_m(x))\| \leq \|T_P\|\|q_m(x)\| = \|T_P\|\|x\|^m$$

Assim, $\|P\| \leq \|T_P\|$ e portanto vale a igualdade $\|P\| = \|T_P\|$. Para provar a unicidade de T_P, seja $U_P \in \mathcal{L}(Q(^mE); F)$ tal que $P = U_P \circ q_m$. Então $T_P(q_m(x)) = U_P(q_m(x))$ para todo $x \in E$, logo, $T_P(u) = U_P(u)$ para todo $u \in q_m(E)$. Como $q_m(E)$ gera um subespaço denso de $Q(^mE)$, segue que $T_P = U_P$. □

A menos de um isomorfismo isométrico, $(Q(^mE), q_m)$ é o único par com a propriedade universal do teorema anterior. A demonstração é análoga à do teorema 2.1-2, que dá a unicidade do produto tensorial.

Teorema 3.3-4 *Seja E um espaço de Banach e $m \in \mathbb{N}$. Suponha que o par $(\hat{Q}(^mE), \hat{q}_m)$, onde $\hat{Q}(^mE)$ é um espaço de Banach e $\hat{q}_m \in \mathcal{P}(^mE; \hat{Q}(^mE))$, tem a propriedade universal do teorema* 3.3-3*, isto é, para cada espaço de Banach F e cada polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ existe um único $T_P \in \mathcal{L}(\hat{Q}(^mE); F)$, com $\|T_P\| = \|P\|$, tal que $P = T_P \circ \hat{q}_m$. Então:*

(a) $\|\hat{q}_m\| = 1$.

(b) $\hat{q}_m(E)$ gera um subespaço denso de $\hat{Q}(^mE)$.

(c) Existe um (único) isomorfismo isométrico $T : Q(^mE) \to \hat{Q}(^mE)$ com $\hat{q}_m = T \circ q_m$.

Demonstração. (a) Desde que $E \neq \{0\}$, devemos ter $\hat{Q}(^mE) \neq \{0\}$. Então, supondo que E é não-trivial, podemos escolher $\psi \in \hat{Q}(^mE)'$ não-nulo. Temos que

$$\|\psi\| = \|\psi \circ \hat{q}_m\| \leq \|\psi\|\|\hat{q}_m\|$$

o que implica $\|\hat{q}_m\| \geq 1$. Por Hahn-Banach, para cada $x \in E$, existe $\psi_x \in \hat{Q}(^mE)'$, $\|\psi_x\| = 1$, tal que

$$\psi_x(\hat{q}_m(x)) = \|\hat{q}_m(x)\|$$

Assim, para $\|x\| \leq 1$,

$$\|\hat{q}_m(x)\| \leq \|\psi_x \circ \hat{q}_m\| = \|\psi_x\| = 1$$

Logo, $\|\hat{q}_m\| \leq 1$. Portanto, temos que $\|\hat{q}_m\| = 1$.

(b) Suponha que $\hat{q}_m(E)$ não gera um subespaço denso de $\hat{Q}(^m E)$, isto é, $\overline{[\hat{q}_m(E)]} \subsetneq \hat{Q}(^m E)$. Por Hahn-Banach, é possível obter $\psi \in \hat{Q}(^m E)'$, $\psi \neq 0$, tal que $\psi(\overline{[\hat{q}_m(E)]}) = \{0\}$. Logo, $\psi \circ \hat{q}_m = 0$ com $\psi \neq 0$, o que contraria a propriedade universal.

(c) Pelo teorema 3.3-3, existe $T_1 \in \mathcal{L}(Q(^m E); \hat{Q}(^m E))$ tal que $\hat{q}_m = T_1 \circ q_m$ e

$$\|T_1\| = \|\hat{q}_m\| = 1$$

Por hipótese, existe $T_2 \in \mathcal{L}(\hat{Q}(^m E); Q(^m E))$ tal que $q_m = T_2 \circ \hat{q}_m$ e

$$\|T_2\| = \|q_m\| = 1$$

Assim, $q_m = T_2 \circ T_1 \circ q_m$. Logo, $T_2 \circ T_1(u) = u$ para todo $u \in q_m(E)$. Como $q_m(E)$ gera um subespaço denso de $Q(^m E)$, segue que $T_2 \circ T_1 = Id_{Q(^m E)}$. De maneira análoga mostra-se que $T_1 \circ T_2 = Id_{\hat{Q}(^m E)}$. Assim, $T = T_1$ é o isomorfismo isométrico que queremos. $\square$

Também temos o seguinte resultado, cuja demonstração será omitida.

Teorema 3.3-5 *Sejam E, F espaços de Banach e $m \in \mathbb{N}$. Então a aplicação*

$$\Psi : \mathcal{P}(^m E; F) \to \mathcal{L}(Q(^m E); F)$$

dada pela correspondência (3.1) *é um isomorfismo topológico quando os espaços $\mathcal{P}(^m E; F)$ e $\mathcal{L}(Q(^m E); F)$ estão munidos da topologia compacto-aberta.*

Para a demonstração, ver [9], pág. 874-875.

Corolário 3.3-6 *Seja Ψ a aplicação dada pela correspondência* (3.1) *e seja*

$$\Psi' : (\mathcal{L}(Q(^m E); F), \|\cdot\|)' \to (\mathcal{P}(^m E; F), \|\cdot\|)'$$

o adjunto de Ψ. Então Ψ' é um isomorfismo isométrico e aplica $(\mathcal{L}(Q(^m E); F), \tau_c)'$ sobre $(\mathcal{P}(^m E; F), \tau_c)'$.

Demonstração. Seja $\varphi \in (\mathcal{L}(Q(^mE);F), \|\cdot\|)'$. Como a aplicação

$$\Psi : (\mathcal{P}(^mE;F), \tau_c) \to (\mathcal{L}(Q(^mE);F), \tau_c)$$

é um isomorfismo topológico e $\Psi'(\varphi) = \varphi \circ \Psi$, é fácil ver que φ é τ_c-contínua se, e só se, $\Psi'(\varphi)$ é τ_c-contínua. □

3.4 Subespaços de $\mathcal{P}(^mE;F)$

Nessa seção, estudaremos algumas propriedades básicas de certos subespaços de $\mathcal{P}(^mE;F)$ que serão úteis nas caracterizações da reflexividade de $\mathcal{P}(^mE;F)$.

Definição 3.4-1 Sejam E, F espaços de Banach e $m \in \mathbb{N}$. Um polinômio m-homogêneo $P \in P(^mE;F)$ é

- *contínuo do tipo finito* se é da forma

  $$P(x) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(x))^m b_i$$

  com $\varphi_i \in E'$ e $b_i \in F$. O subespaço de todos os polinômios contínuos do tipo finito é denotado por $\mathcal{P}_f(^mE;F)$.

- *fracamente contínuo nos limitados* se, para cada subconjunto limitado $B \subset E$, a aplicação

  $$P : (B, \sigma(E,E')) \to (F, \|\cdot\|)$$

  é contínua (equivalentemente, $P : (B_E, \sigma(E,E')) \to (F, \|\cdot\|)$ é contínua). O conjunto de todos os P que são fracamente contínuos nos limitados é denotado por $\mathcal{P}_w(^mE;F)$.

Proposição 3.4-2 *Sejam E, F espaços de Banach e $m \in \mathbb{N}$. Então*

$$\mathcal{P}_f(^mE;F) \subset \mathcal{P}_w(^mE;F) \subset \mathcal{P}(^mE;F)$$

Demonstração. Sejam $\varphi \in E'$ e $b \in F$. Se (x_λ) é uma rede em E e $x \in E$, temos que

$$x_\lambda \overset{\sigma(E,E')}{\to} x \;\Rightarrow\; \varphi(x_\lambda) \to \varphi(x) \;\Rightarrow\; (\varphi(x_\lambda))^m b \to (\varphi(x))^m b$$

Isso mostra que, se P é um polinômio m-homogêneo da forma $P(x) = (\varphi(x))^m b$, então

$$P : (E, \sigma(E, E')) \to (F, \|\cdot\|)$$

é contínua. Em particular, temos $P \in \mathcal{P}_w(^mE; F)$. Como os polinômios da forma $P(x) = (\varphi(x))^m b$ geram $\mathcal{P}_f(^mE; F)$, segue que $\mathcal{P}_f(^mE; F) \subset \mathcal{P}_w(^mE; F)$. Agora tome $P \in \mathcal{P}_w(^mE; F)$. Então

$$P : (B_E, \sigma(E, E')) \to (F, \|\cdot\|)$$

é contínua. Como $\sigma(E, E')$ é mais fraca que a topologia induzida pela norma em E, segue que

$$P : (B_E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|)$$

é contínua. Em particular, P é contínua em 0. Por 3.2-5, $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$. $\square$

Proposição 3.4-3 *Sejam E, F espaços de Banach. Então $\mathcal{P}_w(^mE; F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{P}(^mE; F)$.*

Demonstração. É fácil ver que $\mathcal{P}_w(^mE; F)$ é subespaço de $\mathcal{P}(^mE; F)$. Para ver que é fechado, tome uma seqüência (P_n) em $\mathcal{P}_w(^mE; F)$ que converge para algum $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$. Então $P_n(x) \to P(x)$ uniformemente sobre B_E. Como cada P_n é fracamente contínua em B_E, segue do lema 1.4-3 que P é fracamente contínua em B_E. $\square$

Proposição 3.4-4 *Sejam E, F espaços de Banach e $m \in \mathbb{N}$. Se E tem dimensão finita, então $\mathcal{P}_f(^mE; F) = \mathcal{P}(^mE; F)$.*

Demonstração. Seja $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$. Sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de E e $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ sua base dual. Cada $x \in E$ é escrito como

$$x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$$

Pela Fórmula de Leibniz,

$$P(x) = \sum_{\alpha} \varphi_1(x)^{\alpha_1} \cdots \varphi_n(x)^{\alpha_n} c_\alpha$$

onde $c_\alpha = \dfrac{m!}{\alpha!} \check{P} e_1^{\alpha_1} \cdots e_n^{\alpha_n}$ e a soma é tomada sobre todos os multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ com $|\alpha| = m$. Vamos provar que, se $Q \in \mathcal{P}(^mE; F)$ é da forma

$$Q(x) = \psi_1(x) \cdots \psi_m(x) c$$

com $\psi_i \in E'$ e $c \in F$, então $Q \in \mathcal{P}_f(^mE; F)$. Para isso, basta usar a Fórmula de polarização da seguinte maneira

$$Q(x) = \psi_1(x) \cdots \psi_m(x) c = \left(\frac{1}{m! 2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m (\varepsilon_1 \psi_1(x) + \cdots + \varepsilon_m \psi_m(x))^m \right) c$$

Assim, vemos que Q é do tipo finito. Mostramos então que P é uma soma finita de polinômios m-homogêneos do tipo finito. Portanto, $P \in \mathcal{P}_f(^mE; F)$. $\square$

Lema 3.4-5 *Sejam E, F espaços de Banach e seja $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$. Temos que:*

(a) Se $T \in \mathcal{L}_K(E; E)$, então $P \circ T \in \mathcal{P}_w(^mE; F)$.

(b) Se $T \in \mathcal{L}_f(E; E)$, então $P \circ T \in \mathcal{P}_f(^mE; F)$.

Demonstração. (a) Seja $T \in \mathcal{L}_K(E; F)$. Não é difícil mostrar que $P \circ T$ é um polinômio m-homogêneo. Pela proposição 1.3-2, T é fracamente contínua nos limitados, isto é,

$$T : (B_E, \sigma(E, E')) \to (E, \| \cdot \|)$$

é contínua. Assim, como $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$, é claro que

$$P \circ T : (B_E, \sigma(E, E')) \to (F, \| \cdot \|)$$

é contínua. Portanto, $P \circ T \in \mathcal{P}_w(^mE; F)$.

(b) Seja $T \in \mathcal{L}_f(E; E)$. Então $M := T(E)$ é um subespaço de E de dimensão finita. Seja

$\bar{P}$ a restrição de P ao conjunto M. Então é claro que $\bar{P} \in \mathcal{P}(^m M; F)$. Pela proposição 3.4-4, $\bar{P}$ é do tipo finito, isto é, $\bar{P}$ é da forma

$$\bar{P}(x) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(x))^m b_i$$

com $\varphi_i \in M'$ e $b_i \in F$. Assim, para todo $x \in E$, temos que

$$P \circ T(x) = \bar{P} \circ T(x) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \circ T(x))^m b_i$$

É claro que $\varphi_i \circ T \in E'$. Portanto, $P \circ T \in \mathcal{P}_f(^m E; F)$. $\square$

Capítulo 4

Reflexividade de $\mathcal{L}(E;F)$ e $\mathcal{P}(^mE;F)$

Neste capítulo estudaremos resultados de [10], que dão condições necessárias e suficientes para a reflexividade de espaços de operadores lineares e de espaços de polinômios homogêneos.

4.1 Propriedade de aproximação e propriedade de aproximação compacta

Muito poderia ser dito a respeito da propriedade de aproximação e de outras propriedades relacionadas. Incluímos nessa seção apenas alguns fatos que serão necessários para os resultados principais deste trabalho, que veremos nas próximas seções.

Definição 4.1-1 Dizemos que um espaço de Banach E tem

- a *propriedade de aproximação* se o operador identidade em E pertence ao τ_c-fecho de $\mathcal{L}_f(E;E)$ em $\mathcal{L}(E;E)$.

- a *propriedade de aproximação compacta* se o operador identidade em E pertence ao τ_c-fecho de $\mathcal{L}_K(E;E)$ em $\mathcal{L}(E;E)$.

O operador identidade em E pertencer ao τ_c-fecho de $\mathcal{L}_f(E;E)$ (resp., $\mathcal{L}_K(E;E)$) significa que, dados $K \subset E$ compacto e $\varepsilon > 0$, existe $T \in \mathcal{L}_f(E;E)$ (resp., $T \in \mathcal{L}_K(E;E)$) tal que $\|Tx - x\| < \varepsilon$ para todo $x \in K$. É claro que, se E tem a propriedade de aproximação, então E tem a propriedade de aproximação compacta. O primeiro a construir um espaço de Banach com a propriedade de aproximação compacta que não tem a propriedade de aproximação foi G. Willis em [17].

Proposição 4.1-2 *Sejam E, F espaços de Banach. Temos que*

(a) Se E ou F tem a propriedade de aproximação, então $\mathcal{L}(E;F) = \overline{\mathcal{L}_f(E;F)}^{\tau_c}$.

(b) Se E ou F tem a propriedade de aproximação compacta, então $\mathcal{L}(E;F) = \overline{\mathcal{L}_K(E;F)}^{\tau_c}$.

Demonstração. A prova de (a) é similar à prova de (b), então provaremos apenas (b). Suponha que E tem a propriedade de aproximação compacta. Seja $S \in \mathcal{L}(E;F)$, $S \neq 0$. Dados $K \subset E$ compacto e $\varepsilon > 0$, existe $T \in \mathcal{L}_K(E;E)$ tal que

$$\|Tx - x\| < \frac{\varepsilon}{\|S\|}$$

para todo $x \in K$. Assim,

$$\|S \circ Tx - Sx\| \leq \|S\|\|Tx - x\| < \varepsilon$$

para todo $x \in K$. Pelo lema 1.3-3, $S \circ T \in \mathcal{L}_K(E;F)$. Isso mostra que $S \in \overline{\mathcal{L}_K(E;F)}^{\tau_c}$. Agora suponha que F tem a propriedade de aproximação compacta e seja $S \in \mathcal{L}(E;F)$. Dados $K \subset E$ compacto e $\varepsilon > 0$, existe $T \in \mathcal{L}_K(F;F)$ tal que

$$\|Ty - y\| < \varepsilon$$

para todo $y \in S(K)$. Assim,

$$\|T \circ Sx - Sx\| < \varepsilon$$

para todo $x \in K$. Pelo lema 1.3-3, $T \circ S \in \mathcal{L}_K(E;F)$. Isso mostra que $S \in \overline{\mathcal{L}_K(E;F)}^{\tau_c}$ $\square$

Também há um resultado parecido para espaços de polinômios homogêneos. Para a demonstração, vamos precisar do seguinte lema:

Lema 4.1-3 *Sejam E, F espaços normados e $f : E \to F$ uma aplicação contínua. Seja $K \subset E$ compacto. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$$

sempre que $x \in K$, $y \in E$ e $\|y - x\| < \delta$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in K$, existe $\delta_x > 0$ tal que

$$\|f(y) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $y \in E$ com $\|y - x\| < 2\delta_x$. Como K é compacto, existem $x_1, \ldots, x_n \in K$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i; \delta_i)$$

onde $\delta_i = \delta_{x_i}$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Sejam $x \in K$ e $y \in E$ com $\|y - x\| < \delta$. Temos $x \in B(x_i; \delta_i)$ para algum i. Notemos que

$$\|x - x_i\| < \delta_i < 2\delta_{x_i}$$

e

$$\|y - x_i\| \leq \|y - x\| + \|x - x_i\| < \delta + \delta_i \leq 2\delta_{x_i}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\| &\leq \|f(y) - f(x_i)\| + \|f(x_i) - f(x)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

e o lema está provado. □

A proposição seguinte aparece em [11], Prop. 2.2. A demonstração é reproduzida a seguir.

Proposição 4.1-4 *Sejam E, F espaços de Banach. Então*

(a) Se E tem a propriedade de aproximação, então $\mathcal{P}(^mE; F) = \overline{\mathcal{P}_f(^mE; F)}^{\tau_c}$.

(b) Se E tem a propriedade de aproximação compacta, então $\mathcal{P}(^mE; F) = \overline{\mathcal{P}_w(^mE; F)}^{\tau_c}$.

Demonstração. (a) pode ser demonstrado de maneira similar a (b), então só provaremos (b). Seja $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$. Dados $\varepsilon > 0$ e $K \subset E$ compacto, segue do lema 4.1-3 que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|P(y) - P(x)\| < \varepsilon$$

para todo $x \in K$ e todo $y \in E$ com $\|y - x\| < \delta$. Como E tem a propriedade de aproximação compacta, existe $T \in \mathcal{L}_K(E; E)$ tal que

$$\|Tx - x\| < \delta$$

para todo $x \in K$. Segue que $\|P \circ T(x) - P(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in K$. Pelo lema 3.4-5, $P \circ T \in \mathcal{P}_w(^m E; F)$. Isso mostra que $P \in \overline{\mathcal{P}_w(^m E; F)}^{\tau_c}$. $\square$

4.2 Reflexividade de $\mathcal{L}(E; F)$

Em [13], Ruckle prova que, se E e F são espaços de Banach reflexivos com a propriedade de aproximação, então $\mathcal{L}(E; F)$ é reflexivo se, e só se, $\mathcal{L}(E; F) = \mathcal{L}_K(E; F)$. Holub [5] prova o mesmo assumindo que apenas um dos espaços E ou F tenha a propriedade de aproximação e dá outra condição necessária e suficiente para a reflexividade de $\mathcal{L}(E; F)$. O resultado em Mujica [10], Theorem 2.1, que reproduziremos mais a seguir, se baseia, em parte, no resultado em [5]. Em [10], a hipótese de propriedade de aproximação é trocada pela propriedade de aproximação compacta.

Proposição 4.2-1 *Seja (E, τ) um espaço localmente convexo de Hausdorff e seja A um subconjunto convexo de E. Então*

$$\overline{A}^{\tau} = \overline{A}^{\sigma(E,(E,\tau)')}$$

O resultado acima é bem conhecido e implica o seguinte:

Lema 4.2-2 *Seja E um espaço vetorial e sejam τ_1 e τ_2 duas topologias localmente convexas de Hausdorff em E. São equivalentes:*

(a) $(E,\tau_1)' = (E,\tau_2)'$.

(b) $\overline{A}^{\tau_1} = \overline{A}^{\tau_2}$ *para cada subconjunto convexo* $A \subset E$.

(c) $\overline{M}^{\tau_1} = \overline{M}^{\tau_2}$ *para cada subespaço vetorial* $M \subset E$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ Seja $A \subset E$ convexo. Então

$$\overline{A}^{\tau_1} = \overline{A}^{\sigma(E,(E,\tau_1)')} = \overline{A}^{\sigma(E,(E,\tau_2)')} = \overline{A}^{\tau_2}$$

$(b) \Rightarrow (c)$ É claro.

$(c) \Rightarrow (a)$ Em geral, se E é um espaço vetorial topológico, um funcional linear $\varphi : E \to \mathbb{K}$ é contínuo se, e só se, $\varphi^{-1}(0)$ é fechado em E. Assim, se $\varphi \in E^*$, então

$$\varphi \in (E,\tau_1)' \Leftrightarrow \varphi^{-1}(0) \text{ é } \tau_1\text{-fechado} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(0) \text{ é } \tau_2\text{-fechado} \Leftrightarrow \varphi \in (E,\tau_2)'$$

Portanto, $(E,\tau_1)' = (E,\tau_2)'$. □

Teorema 4.2-3 [10] *Sejam* E, F *espaços de Banach reflexivos. Considere as seguintes condições:*

(0) $\mathcal{L}(E;F) = \overline{\mathcal{L}_f(E;F)}^{\|\cdot\|}$.

(1) $\mathcal{L}(E;F) = \mathcal{L}_K(E;F)$.

(2) Para cada $T \in \mathcal{L}(E;F)$, *existe* $x \in E$, *com* $\|x\| = 1$, *tal que* $\|Tx\| = \|T\|$.

(3) $\mathcal{L}(E;F)$ *é reflexivo.*

(4) $(\mathcal{L}(E;F), \|\cdot\|)' = (\mathcal{L}(E;F), \tau_c)'$.

Então as implicações $(0) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$ *sempre valem. Se* E *ou* F *tem a propriedade de aproximação compacta, então* $(4) \Rightarrow (1)$. *Se* E *ou* F *tem a propriedade de aproximação, então* $(4) \Rightarrow (0)$.

Demonstração. (0) $\Rightarrow$ (1). Como $\mathcal{L}_f(E;F) \subset \mathcal{L}_K(E;F)$ e $\mathcal{L}_K(E;F)$ é fechado em $\mathcal{L}(E;F)$, temos que

$$\mathcal{L}(E;F) = \overline{\mathcal{L}_f(E;F)}^{\|\cdot\|} \subset \mathcal{L}_K(E;F) \subset \mathcal{L}(E;F)$$

Logo, $\mathcal{L}(E;F) = \mathcal{L}_K(E;F)$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Seja $T \in \mathcal{L}(E;F) = \mathcal{L}_K(E;F)$. Tome uma seqüência (x_n) em $\overline{B}_E$ tal que $\|T\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\|$. Como E é reflexivo, a bola unitária fechada $\overline{B}_E$ é fracamente compacta. Assim, (x_n) admite uma subrede (z_λ) que converge fracamente para algum $x \in \overline{B}_E$. Pela proposição 1.3-2, (Tz_λ) converge em norma para Tx. Segue que $\|Tx\| = \|T\|$, e é claro que $\|x\| = 1$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Como F é reflexivo, segue do teorema 2.3-3 que $\mathcal{L}(E;F) = (E\tilde{\otimes}_\pi F')'$ com a fórmula dual para $\langle E\tilde{\otimes}_\pi F', \mathcal{L}(E;F)\rangle$ dada por

$$\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n', T \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y_n'(Tx_n)$$

Por hipótese, dado $T \in \mathcal{L}(E;F)$, existe $x \in E$, com $\|x\| = 1$, tal que $\|Tx\| = \|T\|$. Por Hahn-Banach, existe $y' \in F'$, com $\|y'\| = 1$, tal que $y'(Tx) = \|Tx\|$. Assim, $\pi(x \otimes y') = 1$ e

$$\langle x \otimes y', T\rangle = y'(Tx) = \|Tx\| = \|T\|$$

Pelo teorema de reflexividade de James 1.2-7, $E\tilde{\otimes}_\pi F'$ é reflexivo e, portanto, $\mathcal{L}(E;F)$ também é reflexivo.

(3) $\Leftrightarrow$ (4). Como $\mathcal{L}(E;F) = (E\tilde{\otimes}_\pi F')'$, $\mathcal{L}(E;F)$ é reflexivo se, e só se, $E\tilde{\otimes}_\pi F'$ é reflexivo. Assim, a equivalência desejada segue do item (c) do teorema 2.3-3 e do item (c) da proposição 1.5-3.

(4) $\Rightarrow$ (1). Suponha que E ou F tem a propriedade de aproximação compacta. Então, usando a proposição 4.1-2 e o lema 4.2-2,

$$\mathcal{L}(E;F) = \overline{\mathcal{L}_K(E;F)}^{\tau_c} = \overline{\mathcal{L}_K(E;F)}^{\|\cdot\|} = \mathcal{L}_K(E;F)$$

De maneira similar, podemos mostrar que (4) $\Rightarrow$ (0) se E ou F tem a propriedade de aproximação. □

4.3 Reflexividade de $\mathcal{P}(^m E; F)$

As investigações sobre a reflexividade de espaços de polinômios homogêneos iniciaram com R. Ryan em [14]. Jaramillo e Moraes [7] escrevem que o interesse no estudo da reflexividade e de outras propriedades relacionadas em espaços de polinômios em espaços de Banach é motivada, em parte, pela conexão com as propriedades correspondentes de espaços de funções holomorfas e também com o problema de estender funções inteiras para o bidual.

Aqui é necessária a observação de que as implicações (2) $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) do teorema 4.2-3 continuam verdadeiras assumindo que E é um espaço de Banach qualquer e F é um espaço de Banach reflexivo. Uma inspeção na demonstração do teorema 4.2-3 mostra que a hipótese de E ser reflexivo foi usada apenas para provar (1) $\Rightarrow$ (2).

Teorema 4.3-1 [10] *Sejam E, F espaços de Banach reflexivos e seja $m \in \mathbb{N}$. Considere as seguintes condições:*

(0) $\mathcal{P}(^m E; F) = \overline{\mathcal{P}_f(^m E; F)}^{\|\cdot\|}$.

(1) $\mathcal{P}(^m E; F) = \mathcal{P}_w(^m E; F)$.

(2) Para cada $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$, existe $x \in E$, com $\|x\| = 1$, tal que $\|P(x)\| = \|P\|$.

(3) $\mathcal{P}(^m E; F)$ é reflexivo.

(4) $(\mathcal{P}(^m E; F), \|\cdot\|)' = (\mathcal{P}(^m E; F), \tau_c)'$.

Então as implicações (0) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) *sempre valem. Se E tem a propriedade de aproximação compacta, então* (4) $\Rightarrow$ (1). *Se E tem a propriedade de aproximação, então* (4) $\Rightarrow$ (0).

Demonstração. (0) $\Rightarrow$ (1). Como $\mathcal{P}_f(^m E; F) \subset \mathcal{P}_w(^m E; F)$ e $\mathcal{P}_w(^m E; F)$ é fechado em $\mathcal{P}(^m E; F)$, temos que

$$\mathcal{P}(^m E; F) = \overline{\mathcal{P}_f(^m E; F)}^{\|\cdot\|} \subset \mathcal{P}_w(^m E; F) \subset \mathcal{P}(^m E; F)$$

Logo, $\mathcal{P}(^mE;F) = \mathcal{P}_w(^mE;F)$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Seja $P \in \mathcal{P}(^mE;F) = \mathcal{P}_w(^mE;F)$. Tome uma seqüência (x_n) em $\overline{B}_E$ tal que $\|P\| = \lim_{n\to\infty} \|P(x_n)\|$. Como E é reflexivo, a bola unitária fechada $\overline{B}_E$ é fracamente compacta. Assim, (x_n) admite uma subrede (z_λ) que converge fracamente para algum $x \in \overline{B}_E$. Como P é fracamente contínuo nos limitados, $(P(z_\lambda))$ converge em norma para $P(x)$. Segue que $\|P(x)\| = \|P\|$, e é claro que $\|x\| = 1$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Por 3.3-3, a correspondência $T \to T \circ q_m$ é uma isometria entre $\mathcal{L}(Q(^mE);F)$ e $\mathcal{P}(^mE;F)$. Por (2), para cada $T \in \mathcal{L}(Q(^mE);F)$, existe $x \in E$ com $\|x\| = 1$ tal que

$$\|T(q_m(x))\| = \|T \circ q_m\| = \|T\|$$

Temos $\|q_m(x)\| = \|x\|^m = 1$, assim, pelo teorema 4.2-3, $\mathcal{L}(Q(^mE);F)$ é reflexivo. Portanto, $\mathcal{P}(^mE;F)$ é reflexivo.

(3) $\Leftrightarrow$ (4). Pelo teorema 3.3-3, $\mathcal{P}(^mE;F)$ é reflexivo se, e só se, $\mathcal{L}(Q(^mE);F)$ é reflexivo. Pelo teorema 4.2-3, $\mathcal{L}(Q(^mE);F)$ é reflexivo se, e só se,

$$(\mathcal{L}(Q(^mE);F), \|\cdot\|)' = (\mathcal{L}(Q(^mE);F), \tau_c)'$$

Pelo corolário 3.3-6, isso é o mesmo que

$$(\mathcal{P}(^mE;F), \|\cdot\|)' = (\mathcal{P}(^mE;F), \tau_c)'$$

(4) $\Rightarrow$ (1). Suponha que E tem a propriedade de aproximação compacta. Então, usando a proposição 4.1-4 e o lema 4.2-2,

$$\mathcal{P}(^mE;F) = \overline{\mathcal{P}_w(^mE;F)}^{\tau_c} = \overline{\mathcal{P}_w(^mE;F)}^{\|\cdot\|} = \mathcal{P}_w(^mE;F)$$

De maneira similar, podemos mostrar que (4) $\Rightarrow$ (0) se E tem a propriedade de aproximação. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] R. ALENCAR, *An application of Singer's theorem to homogeneous polynomials*, in: *Banach Spaces*, eds.: B. Lin, W. Johnson, Contemp. Math., **144** (1993) 1-8.

[2] R. ARON, J. PROLLA, *Polynomial approximation of differentiable functions on Banach spaces*, J. Reine Angew. Math., **313** (1980) 195-216.

[3] A. DEFANT, K. FLORET, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland Math. Stud., **176** (1993)

[4] J. DIESTEL, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer, New York 1984.

[5] J. HOLUB, *Reflexivity of* $L(E, F)$, Proc. Amer. Math. Soc., **39** (1973) 175-177.

[6] R. JAMES, *Characterizations of reflexivity*, Studia Math., **23** (1964) 205-216.

[7] J. JARAMILLO, L. MORAES, *Duality and reflexivity in spaces of polynomials*, Arch. Math., **74** (2000) 282-293.

[8] J. MUJICA, *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland Math. Stud., **120** (1986).

[9] J. MUJICA, *Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **324** (1991) 867-887.

[10] J. MUJICA, *Reflexive spaces of homogeneous polynomials*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., **49** (2001) 211-222.

[11] J. MUJICA, M. VALDIVIA, *Holomorphic germs on Tsirelson's space*, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995) 1379-1384.

[12] K. F. Ng, *On a theorem of Dixmier*, Math. Scand. **29** (1971) 279-280.

[13] W. RUCKLE, *Reflexivity of $L(E, F)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **34** (1972) 171-174.

[14] R. RYAN, *Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy*, Ph. D. Thesis, Trinity College, Dublin 1980.

[15] R. RYAN, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer, London 2002.

[16] H. H. SCHAEFER, *Topological Vector Spaces*, Springer, Berlin 1971.

[17] G. WILLIS, *The compact approximation property does not imply the approximation property*, Studia Math., **103** (1992) 99-108.