
Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Aplicações Harmônicas, Holomorfas e Métricas (1,2)-simpléticas em Variedades Bandeira

por

João Paulo Bressan

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

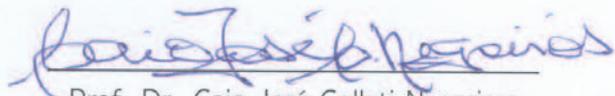
Orientador: Prof. Dr. Caio José Colleti Negreiros

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

**Aplicações Harmônicas, Holomorfas e
Métricas (1,2)-simpléticas em Variedades Bandeira**

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **João Paulo Bressan** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 06 de Março de 2007.



Prof. Dr. Caio José Colleti Negreiros
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Caio José Colleti Negreiros
Prof. Dr. Luiz Antônio Barrera San Martín
Prof. Dr. Osvaldo Germano do Roccio

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Bressan, João Paulo

B736a Aplicações harmônicas, holomorfas e métricas (1,2)-simpléticas em variedades bandeira / João Paulo Bressan -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Caio José Colleti Negreiros

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria riemanniana. 2. Aplicações holomorfas. 3. Torneios. 4. Variedades complexas. I. Negreiros, Caio José Colleti. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Harmonic maps, holomorphic maps and (1,2)-symplectic metrics on flag manifolds

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Riemannian geometry. 2. Holomorphic maps. 3. Tournaments. 4. Complex manifolds.

Área de concentração: Geometria Riemanniana

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Caio José Colleti Negreiros (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Luiz Antônio Barrera San Martín (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Osvaldo Germano do Roccio (DM-UEM)

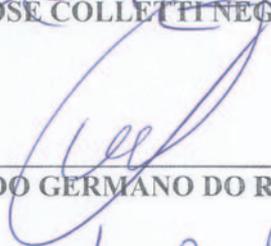
Data da defesa: 06/03/2007

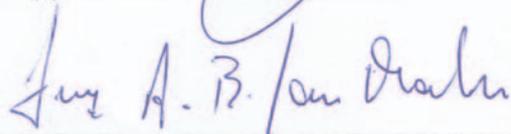
Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 06 de março de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.


Prof. (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLLET PINHEIROS


Prof. (a). Dr (a). OSVALDO GERMANO DO ROCIO


Prof. (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

*Aos meus avós paternos João e Rosa,
Em memória.*

Agradecimentos

Muitas pessoas me ajudaram para que a conclusão deste trabalho se desse da melhor forma possível, e certamente, esta página seria pequena para citar o nome de todas elas. Sendo assim tentarei ser breve, porém sincero.

Primeiramente, agradeço à Capes pelo suporte financeiro. Também, aos professores e funcionários do IMECC-Unicamp com quem tive o privilégio de conviver nestes dois anos. Gostaria de agradecer também à Prof. Suzinei Marconato, da UNESP-Rio Claro, pelo grande apoio e incentivo desde a graduação. Também, ao Prof. Boldrini por ter me dado a primeira oportunidade no mestrado, e ao meu orientador Prof. Caio Negreiros, pelo respeito, atenção, paciência e acima de tudo, pela honestidade com que trabalhamos neste tempo.

À todos os amigos e colegas de batalha da pós-graduação do IMECC-Unicamp e aos membros da Rep. Hostel. Gostaria de citar o grande camarada Wellington Assunção, ou melhor o Chorão, pelo incentivo e ajuda para ingressar no mestrado, quando ainda éramos colegas de graduação na UNESP. Também, ao meu tio Wilson e sua família, à quem não tenho nem palavras pra descrever o quanto sou grato pela ajuda de todos esses anos em que estou longe de casa.

Gostaria também de agradecer à minha namorada Caroline, não somente por ser minha namorada, mas por sempre ter sido acima de tudo grande amiga e companheira para todas as horas. Agradeço sinceramente aos meus pais, João Adevair e Marina, pelo dom da vida, por tudo o que me ensinaram e pela ajuda incondicional durante todos esses anos de estudo. Ao meu único irmão, Juliano, pela confiança, amizade e por me ensinar o que significam as palavras "amor fraterno". Ainda, gostaria de agradecer aos meus avós paternos João Bressan e Rosa A. Bressan, à quem dedico este trabalho em memória.

Enfim, à todos aqueles que sentiram a minha falta durante estes dois anos, meu muito obrigado... espero que as próximas páginas justifiquem a minha ausência.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a relação existente entre holomorfia e harmonicidade de aplicações $\phi : \mathcal{M}^2 \rightarrow (IF, J, ds_\lambda^2)$, onde \mathcal{M}^2 é uma superfície de Riemann compacta, orientável e IF é a variedade bandeira maximal. Para isto, apresentamos parte da teoria geral de aplicações harmônicas e holomorfas, necessária para demonstrar o teorema de Lichnerowicz. Uma de suas conseqüências é uma ferramenta importante neste estudo, pois fornece o seguinte critério: se ϕ é J -holomorfa e ds_λ^2 é (1,2)-simplética, então ϕ é harmônica.

Portanto, também estamos interessados em descrever as métricas (1,2)-simpléticas nas variedades bandeira. Primeiramente, no caso geométrico, estudamos a variedade bandeira complexa maximal de subespaços encaixados $IF(n)$. Posteriormente, este estudo é generalizado para outras variedades bandeiras maximais IF , definidas através de álgebras de Lie semi-simples complexas. Ainda, demonstramos o teorema de Burstall-Salamon, que fornece propriedades da estrutura quase complexa invariante J através de um torneio τ_J associado.

Finalmente, exibimos as equações de Cauchy-Riemann e de Euler-Lagrange para estas aplicações, e apresentamos exemplos de famílias de funções equi-harmônicas.

Abstract

The goal of this work is to study the relationship between holomorphicity and harmonicity of maps $\phi : \mathcal{M}^2 \rightarrow (IF, J, ds_\lambda^2)$, where \mathcal{M}^2 is a compact, orientable Riemann surface and IF is the full-flag manifold. With this purpose, we present part of the general holomorphic/harmonic maps theory, which is necessary to prove the Lichnerowicz theorem. It states like consequence a criterion, which is an important tool in this study: if ϕ is J -holomorphic and $ds_\lambda^2 \in (1,2)$ -symplectic, then ϕ is harmonic.

Therefore, we are interested in to describe $(1,2)$ -symplectic metrics on the flag manifold. Firstly, in the geometrical case, we study the complex full-flag manifold $IF(n)$. Later, we generalize this study to other full-flag manifolds IF , which is defined through complex semi-simple Lie algebras. Also, we prove the Burstall-Salamon theorem, which gives some properties of the almost complex structure J through an associated tournament τ_J .

Finally, we show-up the Cauchy-Riemann equations and the Euler-Lagrange equations to this maps, and present examples of families of equi-harmonic maps.

Sumário

| | |
|---|------------|
| Dedicatória | i |
| Agradecimentos | ii |
| Resumo | iii |
| Abstract | iv |
| Introdução | 1 |
| 1 Noções Preliminares | 5 |
| 1.1 Estruturas Complexas | 5 |
| 1.2 Preliminares Geométricas | 8 |
| 1.2.1 Introdução à Geometria Riemanniana | 8 |
| 1.2.2 Operadores em Fibrados Vetoriais | 12 |
| 1.3 Introdução à Teoria de Lie | 17 |
| 1.3.1 Grupos de Lie | 17 |
| 1.3.2 Álgebras de Lie | 19 |
| 1.3.3 Aplicação Exponencial | 21 |
| 1.3.4 Subálgebras de Cartan, Raízes | 24 |
| 2 Aplicações Harmônicas, Holomorfas e o Teorema de Lichnerowicz | 29 |
| 2.1 Harmonicidade | 29 |
| 2.1.1 Aplicações Harmônicas | 29 |
| 2.2 Holomorficidade e o Teorema de Lichnerowicz | 35 |
| 2.2.1 Aplicações Holomorfas | 35 |
| 2.2.2 O Teorema de Lichnerowicz | 40 |
| 3 O Teorema de Burstall-Salamon e Métricas (1,2)-simpléticas na Variedade Bandeira | 44 |
| 3.1 O Teorema de Burstall-Salamon | 44 |
| 3.1.1 Torneios | 44 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.1.2 | Variedade Bandeira Geométrica e o Teorema de Bustall-Salamon . . . | 50 |
| 3.2 | Métricas (1,2)-simpléticas | 59 |
| 3.2.1 | Caso Geométrico | 59 |
| 3.2.2 | Caso Geral | 67 |
| 4 | Aplicações Harmônicas e Holomorfas na Variedade Bandeira | 79 |
| 4.1 | Holomorfia e f-holomorfia em IF | 79 |
| 4.2 | Harmonicidade em IF | 83 |
| 4.3 | Aplicações Equi-harmônicas: caso \mathcal{A}_I | 93 |
| | Referências Bibliográficas | 97 |

Introdução

No estudo de funções de uma variável complexa, dada uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ podemos considerar $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $u(x, y) = \operatorname{Re}[f(x + \sqrt{-1}y)]$ e $v(x, y) = \operatorname{Im}[f(x + \sqrt{-1}y)]$. Um resultado clássico desta teoria nos diz que se f é holomorfa, então as funções u, v possuem derivadas parciais contínuas, satisfazendo o seguinte sistema de EDP's de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, \quad (1)$$

chamadas equações de Cauchy-Riemann. Derivando-as parcialmente em relação a x e y obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (2)$$

e neste caso, dizemos que as funções u e v são harmônicas. Reciprocamente, dada uma aplicação harmônica $u : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , existe $v : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x + \sqrt{-1}y) = u(x, y) + \sqrt{-1}v(x, y)$$

é holomorfa. Logo, no caso em que f assume valores complexos, holomorfia e harmonicidade são propriedades diretamente relacionadas. De fato, os resultados acima garantem que encontrar funções harmônicas implica encontrar funções holomorfas, e vice-versa.

Mais geralmente, dizemos que uma aplicação entre variedades Riemannianas $\phi : (\mathcal{M}, g) \rightarrow (\mathcal{N}, h)$ é harmônica, se é um ponto crítico do funcional energia

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |d\phi_x|^2 \nu_g, \quad (3)$$

onde $|d\phi_x|$ é a norma de Hilbert-Schmidt de sua diferencial em $x \in \mathcal{M}$. No segundo capítulo,

mostraremos que ϕ é harmônica se, e somente se, satisfaz as equações de Euler-Lagrange

$$\text{tr}(\nabla d\phi) = 0. \quad (4)$$

A expressão em (4) é um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem, que generaliza (2). Portanto, quando procuramos aplicações harmônicas estamos buscando soluções de equações diferenciais de segunda ordem. Contudo, para ϕ ser holomorfa é suficiente que ela satisfaça as equações de Cauchy-Riemann

$$J' \circ d\phi = d\phi \circ J, \quad (5)$$

um sistema de EDP's de primeira ordem. O quadro abaixo resume esta relação.

| | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Holomorficidade | Harmonicidade |
| EDP's 1.^a ordem | EDP's 2.^a ordem |

A abordagem feita no segundo capítulo, para a teoria geral de aplicações harmônicas e holomorfas, é baseada em [9].

O seguinte teorema, provado independentemente por Lichnerowicz e Gray, aponta a importância de entendermos as métricas ditas (1,2)-simpléticas, quando estamos interessados em encontrar exemplos de aplicações harmônicas entre variedades Riemannianas. Trata-se de um resultado fundamental, pois torna possível uma redução de ordem em equações diferenciais parciais.

Teorema: Sejam (\mathcal{M}, g, J_1) e (\mathcal{N}, h, J_2) variedades quase-hermitianas, com \mathcal{M} co-simplética e \mathcal{N} (1,2)-simplética. Então toda aplicação holomorfa $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é harmônica.

Primeiramente, estaremos interessados em estudar o caso em que a variedade $\mathcal{M} = \mathcal{M}^2$ é uma superfície de Riemann compacta, orientável e \mathcal{N} a variedade bandeira (complexa geométrica maximal)

$$IF(n) = \frac{U(n)}{U(1) \times \dots \times U(1)}. \quad (6)$$

Posteriormente, consideraremos variedades bandeira maximais mais gerais, dadas pelo quociente

$$IF = \frac{U}{T}, \quad (7)$$

onde $U = \exp(\mathfrak{u})$, \mathfrak{u} é a forma real compacta de uma álgebra de Lie semi-simples complexa \mathfrak{g} , e T um toro maximal de U . Em ambos os casos, a condição de \mathcal{M} ser co-simplética é imediatamente verificada, pois toda superfície de Riemann é uma variedade Kähler. Ainda, nestas condições, o funcional energia é invariante por mudanças conformes da métrica sobre \mathcal{M} , o que permite simplificar a expressão da energia da aplicação ϕ . Ou seja, estamos interessados em estudar as métricas (1,2)-simpléticas nas variedades bandeira maximais.

Nossa abordagem para o caso geométrico é baseada no método derivado de Burstall-Salamon [4], que relaciona propriedades geométricas de $IF(n)$ com a teoria de torneios. Ou seja, o problema inicial de ordem geométrica é transportado ao ambiente numérico combinatório dos torneios. Apresentamos no segundo capítulo alguns fatos básicos sobre a teoria de torneios, com o objetivo de caracterizar os torneios estrelados; importantes no entendimento das métricas (1,2)-simpléticas de $IF(n)$; e também demonstrar o teorema de Burstall-Salamon [4]. Cada estrutura quase complexa invariante J na variedade bandeira $IF(n)$ determina uma matriz anti-simétrica, sem diagonal e cujas entradas são $\{\pm 1\}$. Esta matriz pode ser considerada como a matriz de incidência de um torneio de n jogadores $\mathcal{T}_{(J)}$, e assim estabelecemos uma bijeção entre as estruturas quase complexas invariantes em $IF(n)$ e os n -torneios. Também, a cada métrica invariante ds_λ^2 em $IF(n)$, fazemos corresponder uma matriz real simétrica, sem diagonal e com entradas todas positivas. Mo e Negreiros em [16] e [17], exibiram a classe de torneios livre de cones com o objetivo de entender o problema das métricas (1,2)-simpléticas, e mostraram que uma condição suficiente para que $(IF(n), J)$ admita uma métrica (1,2)-simplética invariante ds_λ^2 é que o torneio associado $\mathcal{T}_{(J)}$ seja livre de cones. No terceiro capítulo, mostraremos que esta condição também é suficiente, obtendo assim o seguinte critério [8]:

Teorema: A variedade bandeira $(IF(n), J)$ admite uma métrica (1,2)-simplética invariante ds_λ^2 se, e somente se, o torneio associado $\mathcal{T}_{(J)}$ é livre de cones.

Para a variedade bandeira generalizada IF , nossa abordagem é baseada no método adotado por Negreiros-San Martin em [25] e [26]. Ele consiste em tomar um sistema de raízes $\alpha \in \Pi$ e uma base de Weyl $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$ do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, onde \mathfrak{h} é subálgebra de Cartan da álgebra de Lie semi-simples complexa \mathfrak{g} . Através das propriedades destes elementos, podemos associar univocamente a cada estrutura quase complexa invariante J em IF , um conjunto de números inteiros $\{\epsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$ tais que $\epsilon_\alpha = \pm 1$ e $\epsilon_{-\alpha} = -\epsilon_\alpha$. Ainda, as métricas invariantes ds_λ^2 em IF são completamente descritas por um conjunto de números reais positivos $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$ satisfazendo a condição de simetria $\lambda_\alpha = \lambda_{-\alpha}$. As relações com torneios e matrizes simétricas positivas, estudadas anteriormente no caso geométrico, são casos particulares das relações descritas acima. O seguinte teorema é apresentado no final do terceiro capítulo,

generalizando assim o teorema anterior na caracterização das métricas (1,2)-simpléticas.

Teorema: Um par U-invariante $(J = \{\epsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}, ds_\lambda^2 = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \Pi})$ na variedade bandeira maximal $IF = U/T$ é (1,2)-simplético se, e somente se,

$$\epsilon_\alpha \lambda_\alpha + \epsilon_\beta \lambda_\beta + \epsilon_\gamma \lambda_\gamma = 0. \quad (8)$$

No último capítulo, estudamos aplicações harmônicas e holomorfas entre a superfície de Riemann fechada \mathcal{M} e a variedade bandeira maximal IF . Sendo assim, neste caso particular, apresentaremos as caracterizações para holomorfia e harmonicidade dadas pelas equações de Cauchy-Riemann e de Euler-Lagrange, respectivamente. Finalmente, para variedades bandeira dadas por álgebras de Lie complexas semi-simples do tipo \mathcal{A}_I , apresentamos exemplos de aplicações equi-harmônicas. Para isto, definimos as f-estruturas invariantes \mathcal{F} em IF e usamos o seguinte teorema provado por Black [3].

Teorema: Se a aplicação diferenciável $\phi : (\mathcal{M}, J, g) \rightarrow (IF, \mathcal{F}, ds_\lambda^2)$ é subordinada à f-estrutura horizontal \mathcal{F} , então ϕ é equi-harmônica.

É importante salientar aqui, que o primeiro capítulo de trabalho é formado pelas noções preliminares para o entendimento da teoria desenvolvida nos capítulos posteriores. Desse modo, não se trata do objeto principal deste estudo, e por isto, as definições são apresentadas de modo rápido e as demonstrações dos resultados são omitidas, porém, indicadas em uma bibliografia mais completa e específica para o leitor interessado.

Capítulo 1

Noções Preliminares

1.1 Estruturas Complexas

Nesta seção descrevemos brevemente alguns conceitos e resultados básicos sobre estruturas complexas em espaços vetoriais reais. De fato, ao menos as definições e notações apresentadas aqui são necessárias para um bom entendimento da teoria dos capítulos posteriores. Mais detalhes podem ser encontrados em [12].

Definição 1.1.1 (Estrutura Complexa) *Uma estrutura complexa num espaço vetorial real V é um operador linear $J : V \rightarrow V$ tal que $J^2 = -1$, onde 1 é o operador identidade de V .*

Neste caso, se escrevemos $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ segue

$$\det(J^2) = \det^2(J) = \det(-1) = (-1)^n \Rightarrow 0 < \det(J)^2 = (-1)^n$$

e concluímos que n é um número par. Ainda, um espaço vetorial real V com uma estrutura complexa J admite estrutura de espaço vetorial complexo definindo-se a multiplicação por escalar $(a + \sqrt{-1}b)X = aX + bJX$, onde $X \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Claramente a dimensão complexa de V é metade de sua dimensão real. Reciprocamente, dado um espaço vetorial complexo V de dimensão n , podemos considerar o operador linear $J : V \rightarrow V$ dado por $JX = \sqrt{-1}X$, $\forall X \in V$. Assim $J^2X = \sqrt{-1}^2X = -X$ e considerando V como espaço vetorial real de dimensão $2n$ podemos tomar J como uma estrutura complexa de V .

Proposição 1.1.2 *Seja J uma estrutura complexa num espaço vetorial real V . Então existem elementos $E_1, \dots, E_n \in V$ tais que $\beta = \{E_1, \dots, E_n, JE_1, \dots, JE_n\}$ é base de V .*

Exemplo 1 Seja $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) : z_i \in \mathbb{C}\}$ espaço vetorial complexo de dimensão n . Se escrevermos $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ então \mathbb{C}^n pode ser identificado com o espaço vetorial real \mathbb{R}^{2n} pela correspondência $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. A estrutura complexa de \mathbb{R}^{2n} é dada por $J_0(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = (-y_1, \dots, -y_n, x_1, \dots, x_n)$. Claramente $(J_0)^2 = -1$, e neste caso, J_0 é chamada estrutura complexa canônica do \mathbb{R}^{2n} , dada pela matriz

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix},$$

onde 1_n denota a matriz identidade de ordem n . \square

As duas proposições seguintes seguem diretamente do fato de que J é justamente a multiplicação por $\sqrt{-1}$ quando consideramos V como espaço vetorial complexo.

Proposição 1.1.3 Sejam J e J' duas estruturas complexas nos espaços vetoriais reais V e V' , respectivamente. Se considerarmos V e V' como espaços vetoriais complexos, então uma transformação linear real $T : V \rightarrow V'$ é linear complexa se, e somente se, $J' \circ T = T \circ J$.

Particularmente, o grupo linear complexo $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ pode ser identificado com o subgrupo de $\mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R})$ consistindo de todas as matrizes que comutam com J_0 .

Proposição 1.1.4 Seja J uma estrutura complexa num espaço vetorial V . Então um subespaço vetorial $W \leq V$ é invariante por J se, e somente se, W é um subespaço vetorial complexo de V quando considerado como espaço vetorial complexo.

O complexificado do espaço vetorial real V é por definição

$$V^c = V \oplus \sqrt{-1}V \simeq V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

V é naturalmente subespaço real de V^c . A conjugação complexa em V^c é o operador linear real $Z = X + \sqrt{-1}Y \mapsto \bar{Z} = X - \sqrt{-1}Y$, $\forall X, Y \in V$. Uma estrutura complexa J de V pode ser naturalmente estendida a um operador linear complexo J^c de V^c , requerendo-se $J^c(X + \sqrt{-1}Y) = JX + \sqrt{-1}JY$, $\forall X, Y \in V$. Imediatamente, verifica-se que também vale $(J^c)^2 = -1$ e conseqüentemente, os únicos autovalores de J^c são $\pm\sqrt{-1}$. Escrevendo os

auto-espços associados

$$V^{(1,0)} = \{Z \in V^c : J^c(Z) = \sqrt{-1}Z\} \quad \text{e} \quad V^{(0,1)} = \{Z \in V^c : J^c(Z) = -\sqrt{-1}Z\}$$

vale a seguinte proposição.

Proposição 1.1.5 *A conjugação complexa em V^c define um isomorfismo real entre $V^{(1,0)}$ e $V^{(0,1)}$. Também vale $V^c = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)}$, e ainda*

$$V^{(1,0)} = \{X - \sqrt{-1}J^c(X) : X \in V\} \quad \text{e} \quad V^{(0,1)} = \{X + \sqrt{-1}J^c(X) : X \in V\}.$$

Se V é um espaço vetorial complexo, denotamos V^R o espaço vetorial obtido restringindo o corpo de escalares e considerando V como espaço vetorial real. Neste caso V^R é chamado de *realificaço* de V , e temos $(V^R)^c = V \times V$.

Definição 1.1.6 (Produto Hermitiano) *Um produto interno Hermitiano num espaço vetorial V com estrutura complexa J , é um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\langle JX, JY \rangle_H = \langle X, Y \rangle_H, \quad \forall X, Y \in V.$$

Daqui em diante, sempre que considerarmos um produto interno Hermitiano em V , subentende-se que V é um espaço vetorial real com estrutura complexa J . Conseqüente-mente, para todo $X \in V$ vale

$$\langle JX, X \rangle_H = \langle J^2X, JX \rangle_H = \langle -X, JX \rangle_H = -\langle JX, X \rangle_H \Rightarrow \langle JX, X \rangle_H = 0.$$

Proposição 1.1.7 *Considere $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ um produto interno Hermitiano em V . Então existem elementos E_1, \dots, E_n de V tais que $\{E_1, \dots, E_n, JE_1, \dots, JE_n\}$ é uma base ortonormal de V com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$.*

Proposição 1.1.8 *Um produto interno Hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ em V pode ser estendido de modo único a uma forma bilinear simétrica complexa H de V^c , satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) $H(\bar{Z}, \bar{W}) = \overline{H(Z, W)}$ para quaisquer $Z, W \in V^c$;
- (ii) $H(Z, \bar{Z}) > 0$, para todo $Z \in V^c \setminus \{0\}$;
- (iii) $H(Z, \bar{W}) = 0$, para todo $Z \in V^{(1,0)}$ e $W \in V^{(0,1)}$.

Reciprocamente, toda forma bilinear simétrica complexa H de V^c satisfazendo as condições acima é uma extensão natural de um produto interno Hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ de V .

1.2 Preliminares Geométricas

Os objetivo desta seção são apresentar uma breve introdução à geometria Riemanniana, construir certas estruturas em fibrados vetoriais e demonstrar dois lemas que serão úteis no próximo capítulo. Devido ao caráter secundário, as definições são postas de maneira simples e direta, e as demonstrações são omitidas. Mais detalhes do conteúdo apresentado podem ser encontrados em [5], [9], [11] e [12].

1.2.1 Introdução à Geometria Riemanniana

Definição 1.2.1 (Métrica Riemanniana) Uma **métrica Riemanniana** em uma variedade diferenciável \mathcal{M}^m é uma relação que associa a cada ponto $p \in \mathcal{M}$ um produto interno $g(\cdot, \cdot)_p$ no espaço tangente $T_p\mathcal{M}$. Tal relação varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se X e Y são campos de vetores diferenciáveis em um aberto $V \subseteq \mathcal{M}$, a função

$$g(X, Y) : V \subseteq \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p \longmapsto g(X, Y)_p$$

é diferenciável em V . Neste caso, o par (\mathcal{M}, g) é chamado **variedade Riemanniana**.

Fixada uma parametrização $\{x = (x_1, \dots, x_m), U\}$ de \mathcal{M} em p , sabemos que o conjunto

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p) \right\}$$

é uma base de $T_p\mathcal{M}$. Cada função diferenciável

$$g_{ij}(q) = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q)\right), \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (1.1)$$

definida no aberto $q \in U \subseteq \mathcal{M}$ é chamada *expressão local* da métrica g .

Exemplo 2 (Espaço Euclidiano) Considere $\mathcal{M} = \mathbb{R}^m$ com $\frac{\partial}{\partial x_i}$ identificado com o vetor da base canônica $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, para todo $i = 1, \dots, n$. Desse modo, a métrica Riemanniana usual é dada por

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

e a geometria deste espaço é denominada *geometria métrica Euclidiana*. \square

Definição 1.2.2 (Fibrado Vetorial) Um **fibrado vetorial** sobre uma variedade diferenciável \mathcal{M} é uma coleção $(\mathcal{E}, \pi, \oplus, \odot)$ onde:

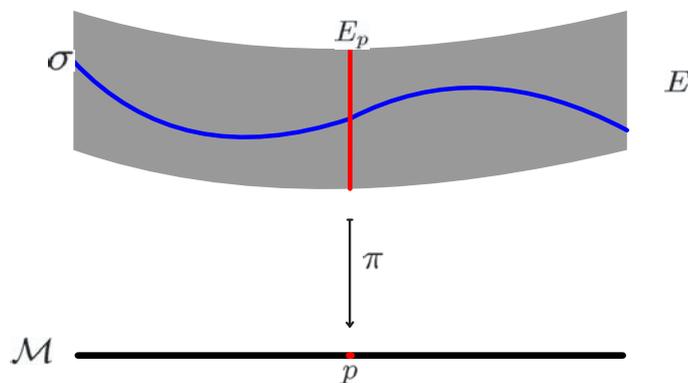
- \mathcal{E} é espaço topológico, chamado espaço total;
- $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ é uma aplicação contínua sobrejetiva;
- \oplus e \odot são aplicações

$$\oplus : \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \pi^{-1}(p) \times \pi^{-1}(p) \rightarrow \mathcal{E}$$

$$\odot : \mathbb{R} \times \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \pi^{-1}(p) \rightarrow \mathcal{E}$$

com $\oplus(\pi^{-1}(p) \times \pi^{-1}(p)) \subset \pi^{-1}(p)$ e $\odot(\mathbb{R} \times \pi^{-1}(p)) \subset \pi^{-1}(p)$, e tais que $(\pi^{-1}(p), \oplus, \odot)$ tem estrutura de espaço vetorial, para todo $p \in \mathcal{M}$. Ainda, a seguinte condição é satisfeita: para cada $p \in \mathcal{M}$ existe uma vizinhança U de p e um homeomorfismo $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ que é um isomorfismo de espaços vetoriais de $\pi^{-1}(q)$ em $q \times \mathbb{R}^n$, para todo $q \in U$.

Intuitivamente, um fibrado vetorial sobre uma variedade \mathcal{M} é dado por uma relação que a cada ponto $p \in \mathcal{M}$ associa um espaço vetorial real n -dimensional $E_p = \pi^{-1}(p)$. A aplicação π é chamada *projeção* de \mathcal{E} em \mathcal{M} , e os conjuntos $E_p = \pi^{-1}(p)$ onde $p \in \mathcal{M}$ chamados *fibras*. Por conveniência de notação, escreveremos apenas $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ quando se tratar de um fibrado vetorial. Uma *seção* do fibrado $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ é uma aplicação σ que a cada ponto $p \in \mathcal{M}$ associa um vetor $V_p \in \pi^{-1}(p)$. Ou equivalentemente, uma aplicação $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$ tal que $\pi \circ \sigma = \text{Id}_{\mathcal{M}}$, a aplicação identidade em \mathcal{M} .



Ainda, $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ denotará o espaço vetorial (de dimensão infinita) das seções diferenciáveis de $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$. Escrevemos $T\mathcal{M}$ para denotar o *fibrado tangente* a uma variedade diferenciável \mathcal{M} , onde a fibra em $p \in \mathcal{M}$ é o espaço tangente $T_p\mathcal{M}$ e o conjunto de seções $\mathcal{C}(T\mathcal{M})$ é justamente o conjunto dos campos de vetores de \mathcal{M} .

Definição 1.2.3 (Pull-Back) Se $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é uma aplicação diferenciável e $\eta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{N}$ um fibrado vetorial, definimos o **fibrado pull-back** $\phi^{-1}\mathcal{F}$, cuja fibra em $p \in \mathcal{M}$ é

$$\eta^{-1}(\phi(p)) = F_{\phi(p)},$$

a fibra de \mathcal{F} em $\phi(p)$.

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ uma curva parametrizada em S e $X : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vetores tangentes a S ao longo de α . O vetor $\frac{dX}{dt}(t_0)$, $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ não pertence em geral ao plano tangente $T_{\alpha(t_0)}(S)$, ou seja, a derivada de um campo vetorial não é uma noção da geometria intrínseca de S . Consideraremos então, ao invés da derivada usual $\frac{dX}{dt}(t_0)$ a chamada derivada covariante $\frac{DX}{dt}(t_0)$, a projeção ortogonal de $\frac{dX}{dt}(t_0)$ sobre $T_{\alpha(t_0)}(S)$. Portanto a derivada covariante, diferentemente da derivada usual, passa a depender apenas da primeira forma quadrática de S em $\alpha(t_0)$ e não do espaço suporte \mathbb{R}^3 . Este fato nos motiva a generalizar o conceito de derivada covariante às variedades diferenciáveis como se segue.

Definição 1.2.4 (Conexão Linear) Uma **conexão linear** em uma variedade Riemanniana (\mathcal{M}, g) é uma aplicação definida em campos vetoriais:

$$\nabla : \mathcal{C}(T\mathcal{M}) \times \mathcal{C}(T\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{C}(T\mathcal{M})$$

dada por

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

e tal que, para cada função diferenciável $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ e campos $X, Y, Z \in \mathcal{C}(T\mathcal{M})$, temos:

- $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
- $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
- $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$;

onde $X(f) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ denota a derivada de f na direção de X (exemplo 7, pg. 26).

Proposição 1.2.5 *Suponha que (\mathcal{M}, g, ∇) é uma variedade Riemanniana com métrica g e conexão ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a cada campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ outro campo vetorial ao longo de α , denotado $\frac{DV}{dt}$, tal que:*

- $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$, onde V e W são campos ao longo de α ;
- $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde W é um campo ao longo de α e f uma função diferenciável $f : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$;
- Se V é induzido por um campo de vetores $X \in \mathcal{C}(T\mathcal{M})$ (i.e., $V(t) = X(\alpha(t))$, $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$) então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\alpha}{dt}}X$.

O campo $\frac{DV}{dt}$ é chamado derivada covariante de V ao longo de α .

Dizemos que uma conexão ∇ em (\mathcal{M}, g) é *compatível* com a métrica g , se para quaisquer campos de vetores diferenciáveis V e W ao longo de uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$, tem-se

$$\frac{d}{dt}[g(V, W)] = g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon). \quad (1.2)$$

Esta condição é equivalente a

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad (1.3)$$

para quaisquer campos de vetores $X, Y, Z \in \mathcal{C}(T\mathcal{M})$. Por fim, dizemos que uma conexão ∇ em (\mathcal{M}, g) é *livre de torção* quando

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \quad \forall X, Y \in \mathcal{C}(T\mathcal{M}). \quad (1.4)$$

Aqui, $[\cdot, \cdot]$ denota o colchete de Lie de campos de vetores em \mathcal{M} , dado por $[X, Y] = XY - YX$. Agora estamos prontos para enunciar um teorema fundamental na geometria Riemanniana, cuja demonstração pode ser encontrada em [5].

Teorema 1.2.6 (Levi-Civita) *Dada uma variedade Riemanniana (\mathcal{M}, g) , existe uma única conexão ∇ em \mathcal{M} satisfazendo as seguintes condições:*

- ∇ é livre de torção;
- ∇ é compatível com a métrica.

1.2.2 Operadores em Fibrados Vetoriais

Seja \mathcal{M} uma variedade Riemanniana conexa, compacta, orientável e sem fronteira. Considere $\xi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ um fibrado vetorial diferenciável sobre \mathcal{M} , onde cada fibra $\xi^{-1}(x) = V_x$ é um espaço vetorial real de dimensão finita. Como é usual, denotaremos $\mathcal{C}(\xi)$ ou $\mathcal{C}(\mathcal{V})$ o espaço vetorial (de dimensão infinita) das seções diferenciáveis de \mathcal{V} , isto é, o conjunto das aplicações diferenciáveis $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{V}$ tais que $\xi \circ \sigma = \text{Id}_{\mathcal{M}}$, ou equivalentemente, funções $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{V}$ tais que $\sigma(x) \in V_x$, para todo $x \in \mathcal{M}$. Por exemplo, já vimos que se $T\mathcal{M}$ é o fibrado tangente da variedade diferenciável \mathcal{M} , então $\mathcal{C}(T\mathcal{M})$ é o espaço vetorial dos campos de vetores diferenciáveis sobre \mathcal{M} . Ainda, se $\odot^2 T\mathcal{M}$ denota o fibrado vetorial das formas bilineares simétricas positivas definidas em $T\mathcal{M}$, então $\mathcal{C}(\odot^2 T\mathcal{M})$ é o conjunto das métricas Riemannianas de \mathcal{M} .

Dados dois fibrados $\xi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ e $\eta : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{M}$, definimos:

- \mathcal{V}^* o fibrado dual de \mathcal{V} , cuja fibra em $x \in \mathcal{M}$ é o espaço vetorial V_x^* , dual de V_x ;
- $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ o fibrado soma de \mathcal{V} e \mathcal{W} , cuja fibra em $x \in \mathcal{M}$ é o espaço vetorial $V_x \oplus W_x$, soma direta de V_x e W_x ;
- $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ o fibrado produto tensorial de \mathcal{V} e \mathcal{W} , cuja fibra em $x \in \mathcal{M}$ é o espaço vetorial $V_x \otimes W_x$, o produto tensorial de V_x e W_x ;
- $\otimes^p \mathcal{V}$ o fibrado potência tensorial de \mathcal{V} , cuja fibra em $x \in \mathcal{M}$ é o espaço vetorial $\otimes^p V_x$, o produto tensorial de V_x por V_x p-vezes;
- $\wedge^p \mathcal{V}$ o fibrado potência exterior de \mathcal{V} , cuja fibra em $x \in \mathcal{M}$ é o espaço vetorial $\wedge^p V_x$, o produto exterior de V_x por V_x p-vezes;
- $\odot^p \mathcal{V}$ o fibrado potência simétrica de \mathcal{V} , cuja fibra em $x \in \mathcal{M}$ é o espaço vetorial $\odot^p V_x$, o produto simétrico de V_x por V_x p-vezes;

onde os dois últimos podem ser vistos como imagens de $\otimes^p \mathcal{V}$ por projeções adequadas.

Definição 1.2.7 (Métrica em Fibrado) *Uma métrica Riemanniana em um fibrado vetorial $\xi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ é uma seção $a \in \mathcal{C}(\odot^2 \mathcal{V}^*)$, que induz em cada fibra um produto interno positivo definido.*

Freqüentemente usaremos a convenção $a(\sigma, \rho) = \langle \sigma, \rho \rangle$, até mesmo usando o símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para diferentes métricas em um mesmo cálculo.

Definição 1.2.8 (Conexão em Fibrado) *Uma conexão linear em um fibrado vetorial $\xi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ é uma aplicação bilinear ∇ nos espaços de seções:*

$$\nabla : \mathcal{C}(T\mathcal{M}) \times \mathcal{C}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{V})$$

$$\nabla(X, \sigma) = \nabla_X \sigma,$$

onde $X \in \mathcal{C}(T\mathcal{M})$, $\sigma \in \mathcal{C}(\mathcal{V})$ e tal que para toda função diferenciável $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ valem as propriedades:

1. $\nabla_{fX} \sigma = f \nabla_X \sigma$;
2. $\nabla_X (f \cdot \sigma) = Xf \cdot \sigma + f \nabla_X \sigma$;

e neste caso, $\nabla_X \sigma$ é chamada a **derivada covariante** de σ na direção de X .

Se $\nabla^{\mathcal{V}}$ e $\nabla^{\mathcal{W}}$ são conexões em \mathcal{V} e \mathcal{W} , definimos:

- A conexão dual ∇^* em \mathcal{V}^* por

$$(\nabla_X^* \theta) \cdot \sigma = X \cdot (\theta \cdot \sigma) - \theta \cdot \nabla_X \sigma,$$

onde $\theta \in \mathcal{C}(\mathcal{V}^*)$ e $\sigma \in \mathcal{C}(\mathcal{V})$;

- A conexão soma direta ∇^\oplus em $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ por

$$\nabla_X^\oplus(\sigma \oplus \rho) = \nabla_X^{\mathcal{V}} \sigma \oplus \nabla_X^{\mathcal{W}} \rho;$$

- A conexão produto tensorial ∇^\otimes em $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ por

$$\nabla_X^\otimes(\sigma \otimes \rho) = (\nabla_X^{\mathcal{V}} \sigma) \otimes \rho + \sigma \otimes (\nabla_X^{\mathcal{W}} \rho);$$

cujas expressões são escolhidas de modo à validar a regra de Leibnitz para a derivada de produtos.

Dada uma aplicação diferenciável $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ e um fibrado vetorial $\eta : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{N}$ com conexão $\nabla^{\mathcal{W}}$, definimos a *conexão pull-back* em $\phi^{-1}\mathcal{W}$ como a única conexão ∇ tal que para

cada $x \in \mathcal{M}$, com $y = \phi(x) \in \mathcal{N}$, $X \in T_x\mathcal{M}$ e $\lambda \in \mathcal{C}(\mathcal{W})$, temos

$$\nabla_X(\phi^*\lambda) = \phi^*\nabla_{d\phi(X)}^{\mathcal{W}}(\lambda) \quad (1.5)$$

onde $d\phi : T_x\mathcal{M} \rightarrow T_y\mathcal{N}$ é a diferencial de ϕ e $\phi^*\lambda = \lambda \circ \phi \in \mathcal{C}(\phi^{-1}\mathcal{W})$. Para provar a existência e a unicidade de ∇ , considere uma vizinhança coordenada U_y de y em \mathcal{N} e um referencial $(\lambda_\alpha)_{\alpha=1}^n$, isto é, um sistema de seções de \mathcal{W} fornecendo uma base de cada fibra. Se U_x é uma vizinhança de x em \mathcal{M} tal que $\phi(U_x) \subseteq U_y$ e se ρ é uma seção de $\phi^{-1}\mathcal{W}$ sobre U_x , existem funções $(f^\alpha)_{\alpha=1}^n$ em U_x tais que $\rho = f^\alpha \cdot \phi^*\lambda_\alpha$, onde omitimos o símbolo de soma nos índices repetidos. Impondo que ∇ é a conexão satisfazendo a condição acima, temos em U_x que

$$\begin{aligned} \nabla_X\rho &= \nabla_X(f^\alpha \cdot \phi^*\lambda_\alpha) = (X.f^\alpha)\phi^*\lambda_\alpha + f^\alpha \cdot \nabla_X\phi^*\lambda_\alpha = \\ &= (X.f^\alpha)\phi^*\lambda_\alpha + f^\alpha \cdot \phi^*(\nabla_{d\phi(X)}^{\mathcal{W}}\lambda_\alpha), \end{aligned}$$

portanto, ∇ deve ser única e a fórmula independe da escolha do referencial, definindo assim a conexão requerida.

Definição 1.2.9 (Estrutura Riemanniana) *Uma estrutura Riemanniana no fibrado vetorial $\xi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ é um par (∇, a) , onde a é uma métrica Riemanniana e ∇ uma conexão, tais que $\nabla a = 0$.*

A condição $\nabla a = 0$ significa que para quaisquer $X \in \mathcal{C}(T\mathcal{M})$ e $\sigma, \rho \in \mathcal{C}(\mathcal{V})$ temos

$$Xa(\sigma, \rho) = a(\nabla_X\sigma, \rho) + a(\sigma, \nabla_X\rho). \quad (1.6)$$

Exemplo 3 (Torção) *No fibrado tangente $T\mathcal{M}$, a torção de uma conexão ∇ é definida por*

$$\tau(X, Y) = -\nabla_X Y + \nabla_Y X + [X, Y],$$

onde $X, Y \in \mathcal{C}(T\mathcal{M})$. Se g é uma métrica Riemanniana em $T\mathcal{M}$, o teorema (1.2.6) de Levi-Civita assegura a existência de uma única conexão, compatível com a métrica e livre de torção. Isto é, tal que

$$\nabla g = 0 \quad \text{e} \quad \tau = 0.$$

De fato, ∇ é definida e caracterizada pela fórmula

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X.g(Y, Z) + Y.g(Z, X) - Z.g(X, Y) - \\ &\quad -g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]), \end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z \in C(TM)$. \square

Lema 1.2.10 *Suponha que $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é uma aplicação diferenciável entre variedades Riemannianas e considere em $\phi^{-1}T\mathcal{N}$ a conexão pull-back $\nabla^{\phi^{-1}T\mathcal{N}}$. Então vale a fórmula*

$$\nabla_X^{\phi^{-1}T\mathcal{N}} d\phi.Y - \nabla_Y^{\phi^{-1}T\mathcal{N}} d\phi.X = d\phi.[X, Y], \quad (1.7)$$

para quaisquer campos de vetores $X, Y \in C(TM)$.

Dem: [9]. ■

Considere agora o conjunto $\mathcal{A}^p(\xi) = \mathcal{C}(\wedge^p T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{V})$ o conjunto das p-formas diferenciáveis em \mathcal{M} com valores no fibrado vetorial $\xi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$. O operador diferencial exterior $d : \mathcal{A}^p(\xi) \rightarrow \mathcal{A}^{p+1}(\xi)$ relativo à conexão $\nabla^{\mathcal{V}}$ é dado pela expressão

$$\begin{aligned} d\sigma(X_1, \dots, X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \nabla_{X_i}^{\mathcal{V}} (\sigma(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{p+1})) + \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \sigma([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_j, \dots, X_{p+1}), \end{aligned} \quad (1.8)$$

onde os elementos cobertos com \wedge são omitidos.

Relativo às estruturas Riemannianas de \mathcal{V} e $T\mathcal{M}$, o operador codiferencial $d^* : \mathcal{A}^p(\xi) \rightarrow \mathcal{A}^{p+1}(\xi)$ é caracterizado como adjunto de d através da fórmula

$$\int_{\mathcal{M}} \langle d\sigma, \rho \rangle \nu_g = \int_{\mathcal{M}} \langle \sigma, d^*\rho \rangle \nu_g \quad (1.9)$$

onde $\sigma \in \mathcal{A}^{p-1}(\xi)$, $\rho \in \mathcal{A}^p(\xi)$ e ν_g é o elemento de volume em \mathcal{M} associado à métrica g em $T\mathcal{M}$.

Uma maneira alternativa de descrever d^* é definir o operador estrela de Hodge

$$* : \mathcal{A}^p(\xi) \rightarrow \mathcal{A}^{m-p}(\xi^*)$$

como o único operador linear satisfazendo pontualmente a relação

$$\sigma \wedge * \rho = \langle \sigma, \rho \rangle_{\wedge^p T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{V}} \nu_g,$$

para todo $\sigma, \rho \in \mathcal{A}^p(\xi)$. Aqui, $\sigma \wedge * \rho$ é a m -forma real definida usando o produto exterior em formas e a dualidade entre ξ e ξ^* .

Lema 1.2.11 *Se $\{E_i\}$ é uma base de $T_x \mathcal{M}$, $\{X_j\}$ são vetores em $x \in \mathcal{M}$ e g^{st} é a inversa da matriz $(g_{st}) = g(E_s, E_t)$, então para qualquer $\rho \in \mathcal{A}^p(\xi)$ temos*

$$(d^* \rho)(X_1, \dots, X_{p-1}) = - \sum_{s,t} g^{st} (\nabla_{E_t} \rho)(E_s, X_1, \dots, X_{p-1}). \quad (1.10)$$

Particularmente, se $\rho \in \mathcal{A}(\xi)$ então $d^ \rho = -\text{tr}(\nabla \rho)$*

Dem: [9]. ■

1.3 Introdução à Teoria de Lie

Nesta seção fazemos uma breve introdução dos conceitos básicos da teoria de Lie, tanto para grupos como álgebras. De fato, apresenta-se aqui o mínimo dos conceitos necessários para um bom entendimento da geometria Hermitiana das variedades bandeira. As demonstrações e o conteúdo completo desta seção podem ser encontrados em [15], [23] e [24].

1.3.1 Grupos de Lie

Definição 1.3.1 (Ação de Grupo) Uma **ação** (à esquerda) do grupo G numa variedade diferenciável \mathcal{M} é uma função que associa a cada $g \in G$ uma aplicação $a_g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ tal que:

- i) $a_1 = Id_{\mathcal{M}}$, isto é, $a_1(x) = x, \forall x \in \mathcal{M}$;
- ii) $a_{g.h} = a_g \circ a_h, \forall g, h \in G$.

Visto que $Id_{\mathcal{M}} = a_1 = a_{g.g^{-1}} = a_g \circ a_{g^{-1}}$ e $Id_{\mathcal{M}} = a_{g^{-1}} \circ a_g$, cada a_g é uma bijeção de \mathcal{M} . Desse modo cada ação a esquerda é um homomorfismo $a : G \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{M})$, onde $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ denota o grupo das bijeções de \mathcal{M} . Substituindo a segunda propriedade da definição acima por $a_{g.h} = a_h \circ a_g$ podemos definir **ação à direita** de um grupo G sobre uma variedade \mathcal{M} . Aqui trataremos apenas de ações de grupo a esquerda, desse modo diremos apenas se tratar de uma ação de G sobre \mathcal{M} . Ainda, por conveniência de notação escreveremos apenas gx ao invés de $a_g(x)$.

Exemplo 4 (Ação de $O(n)$ sobre S^n) Considere o grupo das matrizes ortogonais $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A.A^t = A^t.A = 1\}$. Então a ação de $O(n)$ sobre a esfera unitária $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ é dada por: $A \in O(n) \mapsto a_A$ onde $a_A : S^n \rightarrow S^n$ é definida por $a_A(x) = Ax$, para todo $x \in S^n$. \square

Definição 1.3.2 (Órbita, Subgrupo de Isotropia) Se G age sobre \mathcal{M} e $x \in \mathcal{M}$, definimos sua **órbita** como o conjunto

$$Gx = \{gx \in \mathcal{M} : g \in G\}$$

e seu **subgrupo de isotropia** como o conjunto

$$H_x = \{g \in G : gx = x\}.$$

O subgrupo de isotropia é de fato um subgrupo de G , visto que dados $g, h \in H_x$ temos $(gh)x = g(hx) = g(x) = x$, pois g e h fixam x . Além disso, $g^{-1}x = a_{g^{-1}}(x) = a_g^{-1}(x) = x$ pois g leva x em x . Note que, o subgrupo de isotropia H_x da ação é o conjunto de todas as aplicações $a_g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ que têm ponto fixo em $x \in \mathcal{M}$.

Definição 1.3.3 (Ação Transitiva) A ação de G sobre \mathcal{M} é dita **transitiva** quando para quaisquer $x, y \in \mathcal{M}$ existe $g \in G$ tal que $g(x) = y$.

Dizemos que uma ação é contínua se $\Phi : G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ com $\Phi(g, x) = gx$ é contínua. Neste caso, todo subgrupo de isotropia é fechado em G .

Definição 1.3.4 (Grupo de Lie) Um **grupo de Lie** real (complexo) é uma variedade diferenciável (complexa) G com uma estrutura de grupo tal que as operações

$$\begin{aligned} p : G \times G &\longrightarrow G & i : G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto g.h & g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

são diferenciáveis (holomorfas).

Exemplo 5 (O Grupo Linear) Seja $GL(n, \mathbb{R})$ o grupo das transformações lineares inversíveis do \mathbb{R}^n com a operação composição. Fixada uma base, $GL(n, \mathbb{R})$ torna-se o grupo das matrizes reais inversíveis de ordem n com a operação produto de matrizes, subgrupo de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Assim, $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ é um subconjunto aberto, pois a função determinante é contínua. Como $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ é variedade diferenciável, temos que $GL(n, \mathbb{R})$ é uma subvariedade, e portanto um grupo de Lie. \square

Se G é um grupo de Lie, a *translação à esquerda* associada ao elemento $g \in G$ é a aplicação $E_g : G \rightarrow G$ dada por $E_g(h) = gh$, $\forall h \in G$. Analogamente, podemos definir *translações à direita*. Em ambos os casos, a definição de grupo de Lie implica que as translações são difeomorfismos de G . Um *subgrupo de Lie* de um grupo de Lie G é um subgrupo H tal que a inclusão $H \hookrightarrow G$ é um homomorfismo diferenciável. Nesse caso podemos induzir uma topologia em G/H (conjunto das classes de equivalência mod H) do seguinte modo: $A \subseteq G/H$ é aberto $\Leftrightarrow \pi^{-1}(A)$ é aberto em G , onde π é a projeção canônica.

Teorema 1.3.5 (Cartan) Um subgrupo H de um grupo de Lie real G é subgrupo de Lie se, e somente se, H for fechado. Nesse caso, pode-se introduzir uma estrutura de variedade

diferenciável em G/H compatível com a topologia definida acima.

Corolário 1.3.6 *Suponha que um grupo de Lie G age transitivamente sobre a variedade diferenciável M . Então, para todo $x \in M$, G/H_x é difeomorfo a M . Neste caso, dizemos que M é uma variedade homogênea.*

1.3.2 Álgebras de Lie

Definição 1.3.7 (Álgebra de Lie) *Um espaço vetorial \mathfrak{g} munido de um produto (colchete ou comutador) $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ bilinear, anti-simétrico e satisfazendo a Identidade de Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]], \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

é chamado uma **álgebra de Lie**.

Exemplo 6 (Transformações Lineares) *Sabemos que o espaço $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, com as operações usuais soma e multiplicação por escalar de matrizes, é um espaço vetorial real de dimensão n^2 . É de verificação imediata que, com o colchete dado pelo comutador $[X, Y] = XY - YX$, $\forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, este espaço é uma álgebra de Lie real. \square*

Exemplo 7 (Campos de Vetores) *Considere $\chi(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis da variedade diferenciável M . Assim $X \in \chi(M)$ é uma aplicação diferenciável de M no fibrado TM , tal que $\pi \circ X = Id_M$. Fixada uma parametrização $x = (x_1, \dots, x_n)$ de M em $p \in M$ podemos escrever*

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

onde cada a_i é uma função real diferenciável e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ é a base do espaço tangente associada à parametrização x . Podemos pensar em um campo $X \in \chi(M)$ como uma aplicação do conjunto das funções diferenciáveis em M , definida do seguinte modo

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

onde f indica, por abuso de notação, a expressão de f na parametrização x . Ou seja, cada campo de vetores é interpretado como uma derivada direcional. Vale que, dados dois campos X e Y em $\chi(M)$, existe um único campo $Z \in \chi(M)$ tal que, para toda função diferenciável f de M , temos $Zf = (XY - YX)f$. Denotamos $Z = [X, Y]$, e de fato vale a

anti-comutatividade, a bilinearidade e a identidade de Jacobi. Desse modo, $\chi(\mathcal{M})$ munido do colchete $[X, Y] = XY - YX$ é uma álgebra de Lie. \square

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Um subespaço vetorial \mathfrak{h} é uma *subálgebra* de \mathfrak{g} se é fechado pelo colchete, ou seja, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{h}$. Uma transformação linear entre álgebras de Lie $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um *homomorfismo* se $\psi[X, Y] = [\psi X, \psi Y]$, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$. Se ela também for inversível então dizemos que é um *isomorfismo*, e neste caso \mathfrak{g} e \mathfrak{h} são ditos isomorfos. Se além disso, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ dizemos que ψ é um *automorfismo* de \mathfrak{g} . Um subespaço $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é um *ideal* se para quaisquer $Y \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{g}$ vale $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, isto é, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}\} \subseteq \mathfrak{h}$. Segue imediatamente que se $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um homeomorfismo então seu núcleo $\mathfrak{Ker}(\psi)$ é um ideal, e sua imagem $\mathfrak{Im}(\psi)$ uma subálgebra.

Se $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é um ideal, munimos o espaço vetorial quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ com uma estrutura de álgebra de Lie definindo o colchete $[\bar{X}, \bar{Y}] = \overline{[X, Y]}$. De fato esta definição não depende dos representantes escolhidos e a projeção canônica

$$\begin{aligned} \pi : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \\ X &\longmapsto \bar{X} \end{aligned}$$

é um homomorfismo sobrejetor. Também vale o *Teorema de Isomorfismo*, que afirma que $\mathfrak{g}/\mathfrak{Ker}(\psi) \approx \mathfrak{Im}(\psi)$, onde $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo.

Definição 1.3.8 (Representação) *Seja V um espaço vetorial e denote $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de Lie das transformações lineares de V . Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie sobre o mesmo corpo de escalares, dizemos que um homomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma **representação** de \mathfrak{g} em V . Uma representação ρ é dita **fiel** se $\mathfrak{Ker}(\rho) = \{0\}$.*

A *representação adjunta* $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é a aplicação que associa a cada $X \in \mathfrak{g}$ a transformação linear $\text{ad}(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, com $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y]$. Segue imediatamente da bilinearidade do colchete que ad é linear, e pela identidade de Jacobi concluímos ad é um homeomorfismo. O núcleo $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ da representação adjunta é chamado *centro* de \mathfrak{g} . Isto é,

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Uma *derivação* de \mathfrak{g} é um operador linear $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que satisfaz a regra de Leibniz da derivada do produto, ou seja,

$$D([X, Y]) = [D(X), Y] + [X, D(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Pela identidade de Jacobi, as $\text{ad}(X)$ adjuntas de elementos de \mathfrak{g} são derivações, denominadas *derivações internas* de \mathfrak{g} .

Dados dois subconjuntos $A, B \subseteq \mathfrak{g}$ definimos seu *subespaço gerado* por

$$[A, B] = \{[X, Y] : X \in A, Y \in B\}.$$

Define-se indutivamente a *série derivada* como a seqüência decrescente de subespaços $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, \dots , $\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$, \dots todos ideais de \mathfrak{g} . Analogamente, a *série central descendente* é definida pela seqüência $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^{(1)}$, \dots , $\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$, \dots também decrescente e formada por ideais de \mathfrak{g} . Dizemos que uma álgebra é *solúvel* se alguma de suas álgebras derivadas se anula, isto é, $\mathfrak{g}^{(k_0)} = \{0\}$ para algum $k_0 \geq 1$. Uma álgebra é dita nilpotente se sua série central descendente se anula em algum momento. Vale que toda subálgebra de uma álgebra solúvel (nilpotente) é também solúvel (nilpotente).

1.3.3 Aplicação Exponencial

Suponha que \mathcal{M} e \mathcal{N} são variedades diferenciáveis e que X é um campo de vetores em \mathcal{M} . Se $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é um difeomorfismo, podemos transladar X a um campo ϕ_*X em \mathcal{N} definido por

$$(\phi_*X)(y) = d\phi_{\phi^{-1}(y)}(X(\phi^{-1}(y)))$$

para todo $y \in \mathcal{N}$. Vale que $\phi_*[X, Y] = [\phi_*X, \phi_*Y]$ para quaisquer campos X, Y de \mathcal{M} , onde $[\cdot, \cdot]$ denota o colchete de Lie de campos de vetores, definido na seção anterior. Um campo de vetores X em um grupo de Lie G é dito *invariante à esquerda* se para todo $g \in G$ vale $(E_g)_*X = X$, ou seja, $d(E_g)_h(X(h)) = X(gh)$ para todo $g, h \in G$. Analogamente, poderíamos definir campos invariantes a direita. Contudo aqui só trataremos de campos invariantes à esquerda, e neste caso, diremos apenas se tratar de um *campo invariante*.

Os campos invariantes são completamente determinados por seu valor no elemento identidade $1 \in G$, pois de fato, para todo $g \in G$ temos $X(g) = d(E_g)_1(X(1))$. Desse modo, todo elemento do espaço tangente T_1G determina um campo de vetores invariante de G . Mais ainda, existe um isomorfismo entre T_1G e o conjunto dos campos de vetores invariantes (à direita ou à esquerda) de G .

Definição 1.3.9 (Álgebra de Lie de um grupo de Lie) Definimos a **álgebra de Lie do grupo de Lie G** , denotada $\mathfrak{Lie}(G)$, como o espaço tangente na origem T_1G munido do colchete de campos de vetores.

Um comentário pertinente a definição acima é que dados dois elementos $x, y \in T_1G$ o colchete $[x, y]$ é por definição $[X, Y](1)$, onde X e Y são os campos trasladados invariantes de G obtidos de x e y , respectivamente.

A função exponencial real usual e^x é um homomorfismo diferenciável de $\mathbb{R} = \mathfrak{gl}(0, \mathbb{R})$ em $GL^+(1, \mathbb{R})$, o grupo multiplicativo dos números reais positivos. Mais geralmente, se X é qualquer matriz em $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, a série exponencial

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

converge em $GL^+(n, \mathbb{R})$. Valem as propriedades

- $\det(\exp(X)) = e^{\text{tr}(X)} > 0$
- $\exp(X + Y) = \exp(X)\exp(Y)$,

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Estes exemplos são casos particulares da aplicação exponencial de grupos de Lie, que é definida para qualquer grupo G .

Exemplo 8 (O Subgrupo Especial Unitário $SU(n)$) Considere o grupo de Lie $SU(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : AA^* = A^*A = 1_n \text{ e } \det(A) = 1\}$. Este é subgrupo de Lie de $U(n)$, o grupo das matrizes unitárias. Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow SU(n)$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = 1_n$. Então vale $\det(\alpha(t)) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$ e derivando no instante $t = 0$ obtemos

$$\det'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow \det'(1_n) \cdot \alpha'(0) = 0.$$

Lembrando que $\det : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n \times \dots \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é uma aplicação n -linear, temos $\det'(1_n)(X) = \det'(e_1, \dots, e_n)(X_1, \dots, X_n)$ onde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ são os vetores da base canônica do \mathbb{C}^n e X_i os vetores coluna da matriz X . Então

$$\det'(1_n)(X) = \sum_{i=1}^n \det(B_i),$$

onde B_i é a matriz obtida substituindo a i -ésima coluna da matriz identidade pela i -ésima coluna da matriz X . Segue-se, por uma mudança de linhas e colunas, $\det'(1_n) \cdot \alpha'(0) = \text{tr}(\alpha'(0)) = 0 \Rightarrow T_{1_n}SU(n) \subseteq \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : \text{tr}(A) = 0\}$.

Por outro lado, se $\text{tr}(A) = 0$ definimos a curva $\alpha(t) = \exp(tA)$, para $t \in \mathbb{R}$. Então α é diferenciável, e é imediato verificar que $\alpha(t) \in SU(n), \forall t \in \mathbb{R}$. Ainda, derivando no instante

de tempo $t = 0$, obtemos

$$\alpha'(t)\Big|_{t=0} = \exp(0).A = A \Rightarrow T_{1_n}SU(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : \text{tr}(A) = 0\}.$$

Portanto $\mathfrak{Lie}(SU(n)) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : \text{tr}(A) = 0\}$, que será denotada $\mathfrak{su}(n)$. Está é subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, com o colchete dado pelo comutador $[X, Y] = XY - YX$. Neste caso, a aplicação exponencial é a exponencial usual de matrizes complexas. \square

A definição geral é dada como se segue. Um subgrupo a um parâmetro de G é um homomorfismo diferenciável $u : \mathbb{R} \rightarrow G$. Seu diferencial $d_0(u)$ é uma aplicação linear de \mathbb{R} num subespaço de $T_1(G) = \mathfrak{Lie}(G)$. É consequência do Teorema de Existência e Unicidade de soluções de EDO's que a aplicação $u \mapsto d_0(u)(1)$ é uma bijeção do conjunto dos subgrupos a um parâmetro de G em sua álgebra de Lie $\mathfrak{Lie}(G)$. De fato, para cada $X \in T_1G$ existe um único subgrupo a um parâmetro u_x de G tal que $d_0(u_x)(1) = X$.

Definição 1.3.10 (Aplicação Exponencial) Se G é um grupo de Lie, definimos sua **aplicação exponencial** $\exp_G : \mathfrak{g} = \mathfrak{Lie}(G) \rightarrow G$ por

$$\exp_G(X) = u_x(1).$$

Ou seja, $\exp_G(x)$ é o valor em $1 \in G$ da solução da EDO gerada por X que passa pelo elemento neutro no instante $t = 0$.

Proposição 1.3.11 Valem as seguintes afirmações:

1. Se X é um campo invariante à direita então seu fluxo $X_t = E_{\exp_G(tX)}$, isto é, $X_t(g) = \exp_G(tX)g$;
2. Se X é um campo invariante à esquerda então seu fluxo $X_t = D_{\exp_G(tX)}$, isto é, $X_t(g) = g\exp_G(tX)$;
3. $\exp_G 0 = 1$;
4. Para todo $X \in \mathfrak{g}$ e $t, s \in \mathbb{R}$ vale

$$\exp_G(t+s)X = \exp_G(tX)\exp_G(sX) = \exp_G(sX)\exp_G(tX),$$

isto é, os elementos do subgrupo $\{\exp_G(tX) : t \in \mathbb{R}\}$ comutam entre si;

5. Para $X, Y \in \mathfrak{g}$, vale

$$[X, Y] = 0 \Leftrightarrow \exp_G(tX)\exp_G(sY) = \exp_G(sY)\exp_G(tX).$$

Proposição 1.3.12 *Seja G é grupo de Lie, com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Então temos*

$$d(\exp_G)_0 = Id_{\mathfrak{g}}. \quad (1.11)$$

1.3.4 Subálgebras de Cartan, Raízes

A forma Cartan-Killing, em uma álgebra de Lie real ou complexa \mathfrak{g} de dimensão finita, é a forma bilinear simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{C}) definida por

$$\langle X, Y \rangle_{\mathfrak{g}} = \text{tr}(adX, adY).$$

Sabemos que \mathfrak{g} possui um único ideal maximal solúvel, chamado *radical* de \mathfrak{g} e denotado \mathfrak{r} .

Definição 1.3.13 (Álgebra Semi-simples) *Se $\mathfrak{r} = 0$, ou seja, \mathfrak{g} não possui ideais solúveis a não ser o ideal nulo, dizemos que \mathfrak{g} é uma álgebra **semi-simples**. Uma condição equivalente é que \mathfrak{g} é uma soma direta de álgebras de Lie simples (uma álgebra de Lie é dita **simples** quando não possui ideais não triviais e não é abeliana). Ainda, uma outra equivalência é que a forma Cartan-Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ é não degenerada.*

Exemplo 9 *Pode-se mostrar (por ex. calculando a forma Cartan-Killing explicitamente) que as álgebras $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ e $\mathfrak{u}(n)$ são redutíveis mas não semi-simples. Já as álgebras $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{su}(n)$ e $\mathfrak{so}(n)$ são semi-simples. \square*

Vale que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie semi-simples real se, e somente se, sua complexificação $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ também é semi-simples. De fato a matriz da forma Cartan-Killing, relativa a uma base de \mathfrak{g} , é a mesma tanto para $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ como para \mathfrak{g} . Ainda, se \mathfrak{g} é simples então $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ é também simples ou o produto de duas álgebras simples isomorfas. Se \mathfrak{g} é semi-simples (resp. simples) então $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ também o é. Uma subálgebra \mathfrak{g}_0 de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ é a *forma real* da álgebra de Lie complexa \mathfrak{g} se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \sqrt{-1}\mathfrak{g}_0$. As álgebras de Lie reais são formas reais ou realificações de álgebras de Lie complexas.

Definição 1.3.14 (Subálgebra de Cartan) *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples (real ou complexa). Dizemos que um elemento $X \in \mathfrak{g}$ é semi-simples se a transformação linear $ad(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é diagonalizável sobre \mathbb{C} . Uma **subálgebra de Cartan** $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é qualquer subálgebra maximal abeliana de \mathfrak{g} consistindo de elementos semi-simples.*

A importância das subálgebras de Cartan no estudo da estrutura das álgebras de Lie complexas, está no fato fundamental que elas são conjugadas sob a ação adjunta do grupo $\text{Int}(\mathfrak{g})$, dos automorfismos internos de \mathfrak{g} . Isto não é verdade em geral para álgebras de Lie semi-simples reais, e esta é uma das razões que torna a estrutura de sua teoria mais complicada.

Daqui em diante, \mathfrak{g} denotará uma álgebra de Lie semi-simples complexa. Como todas as subálgebras de Cartan de \mathfrak{g} são conjugadas, não há perda de generalidade em escolhermos apenas uma, digamos \mathfrak{h} . Como \mathfrak{h} é abeliana e o corpo de escalares \mathbb{C} é algebricamente fechado, a representação adjunta ad de \mathfrak{g} , restrita a \mathfrak{h} , pode ser escrita como uma soma direta de representações unidimensionais. Em outras palavras, se \mathfrak{h}^* denota o dual de \mathfrak{h} , e também se para cada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, \mathfrak{g}_α denota o subespaço de todos os elementos $X \in \mathfrak{g}$ tais que $\text{ad}(H)(X) = \alpha(H)X$, $\forall H \in \mathfrak{h}$, então \mathfrak{g} é a soma direta dos \mathfrak{g}_α . Dois destes subespaços \mathfrak{g}_α e \mathfrak{g}_β são ortogonais com respeito a forma Cartan-Killing a menos que $\alpha + \beta = 0$. Além disso $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, pois \mathfrak{h} é seu próprio *centralizador* em \mathfrak{g} . Segue que \mathfrak{h} é ortogonal a todos os \mathfrak{g}_α , $\alpha \neq 0$, e portanto, a restrição da forma Cartan-Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ a \mathfrak{h} permanece não degenerada.

Como \mathfrak{g} é de dimensão finita, apenas um número finito dos \mathfrak{g}_α é diferente do espaço nulo. Se $\alpha \neq 0$ e $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$, dizemos que α é uma *raíz* do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ e \mathfrak{g}_α o *espaço de raiz* relacionado a α . Se α é uma raiz então $-\alpha$ também o é, pois caso contrário, \mathfrak{g}_α seria ortogonal a todo \mathfrak{g} , contrariando o fato de que a forma Cartan-Killing é não degenerada. Claramente, para cada raiz α vale $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 1$. A justificativa para a terminologia vem da observação de que, se H é um elemento qualquer de \mathfrak{h} , os números complexos $\alpha(H)$ são os autovalores não nulos da transformação linear $\text{ad}(H)$. Isto é, são as raízes não nulas do polinômio característico $\det(\lambda - \text{ad}(H)) = 0$.

Denotamos por Π ou $\Pi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ o conjunto de todas as raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$; trata-se de um subconjunto finito de \mathfrak{h}^* . Obtemos então uma decomposição em soma direta

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha. \quad (1.12)$$

As raízes geram um subespaço real V de dimensão k de \mathfrak{h}^* , de modo que $V^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^*$. Tendo observado que a forma Cartan-Killing de \mathfrak{g} permanece não degenerada quando restrita a \mathfrak{h} , definimos um isomorfismo $\lambda \mapsto H_\lambda$ de \mathfrak{h}^* em \mathfrak{h} , e uma forma bilinear $\langle \lambda, \mu \rangle = B_{\mathfrak{g}}(H_\lambda, H_\mu)$ em \mathfrak{h}^* . Como a restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ a V toma valores reais e é positiva-definida, V adquire uma estrutura de espaço Euclidiano. Se \mathfrak{h}_Π denota o espaço vetorial real gerado pelos H_α , $\alpha \in \Pi$, vale que \mathfrak{h} é a complexificação de \mathfrak{h}_Π e V é o dual \mathfrak{h}_Π^* . Desse modo construiremos a partir de \mathfrak{g} um conjunto finito Π de vetores não nulos no espaço Euclidiano V . Este conjunto é chamado *sistema de raízes* de \mathfrak{g} , pois de fato, a menos de isomorfismo, é independente da

escolha da subálgebra de Cartan \mathfrak{h} . Podemos dizer que, em um certo senso intuitivo, o conjunto acima representa o "esqueleto" de \mathfrak{g} , e é de fundamental importância, pois determina completamente a álgebra \mathfrak{g} a menos de isomorfismo.

Teorema 1.3.15 *Nas condições acima, sejam \mathfrak{g}' uma álgebra de Lie semi-simples, \mathfrak{h}' uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g}' e Π' o sistema de raízes do par $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$. Se existe um isomorfismo $\phi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}'$ que induz uma bijeção de Π em Π' , então ϕ pode ser estendido a um isomorfismo $\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$.*

Exemplo 10 (A Subálgebra Especial Linear Complexa $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$) *Considere a álgebra de Lie semi-simples $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : \text{tr}(A) = 0\}$ e a subálgebra de Cartan \mathfrak{h} , formada por todas as matrizes diagonais com traço nulo. Tome E_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, a base canônica de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ e $\epsilon_i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$, o funcional linear que associa a cada matriz seu i -ésimo elemento diagonal. Um cálculo direto mostra que, para cada $H \in \mathfrak{h}$, vale a igualdade*

$$[H, E_{ij}] = (\epsilon_i - \epsilon_j)(H) \cdot E_{ij}$$

e assim os funcionais da forma $\epsilon_i - \epsilon_j$ são raízes do par $(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}), \mathfrak{h})$, quando $i \neq j$. Como claramente

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus \sum_{i \neq j} \text{span}_{\mathbb{C}}\{E_{ij}\}$$

essas são todas as raízes. O espaço real V gerado pelas raízes tem dimensão $n - 1$. De fato, note que as raízes da forma $\epsilon_i - \epsilon_{i+1}$, $1 \leq i \leq n - 1$, formam uma base de V . \square

Para cada raiz $\alpha \in \Pi$ tome $w_\alpha : V \rightarrow V$ a reflexão no hiperplano V_α ortogonal a α . O sistema de raízes Π tem as seguintes propriedades:

- $w_\alpha(\Pi) = \Pi$, $\forall \alpha \in \Pi$;
- $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$, $\forall \alpha, \beta \in \Pi$; (onde $\alpha^\vee = 2\alpha / \langle \alpha, \alpha \rangle$)
- se $\alpha, \beta \in \Pi$ são proporcionais, então $\beta = \pm \alpha$.

Como não há espaço aqui para demonstrarmos todas as afirmações acima, vamos justificar brevemente o segundo item. Para cada par de raízes $\pm \alpha$ podemos escolher vetores $X_{\pm \alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm \alpha}$ tais que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_{\alpha^\vee}$, a imagem de α^\vee pelo isomorfismo $\mathfrak{h}^* \simeq \mathfrak{h}$ induzido pela forma Cartan-Killing. O espaço vetorial \mathfrak{s}_α gerado por X_α , $X_{-\alpha}$ e H_{α^\vee} é uma subálgebra de Lie de \mathfrak{g} . A aplicação que leva estes três vetores respectivamente às matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é um isomorfismo de \mathfrak{s}_α em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Como em qualquer representação ρ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ os autovalores de

$$\rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

são números inteiros, segue que $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$, pois de fato $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle = \beta(H_{\alpha^\vee})$ é um autovalor de $ad(H_{\alpha^\vee})$. De fato, o estudo das representações de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ obtidas restringindo ad as álgebras tridimensionais \mathfrak{s}_α é o método para a prova dos resultados acima.

Definição 1.3.16 (Grupo de Weyl) *O grupo W gerado pelas reflexões w_α é chamado **grupo de Weyl** (de Π ou de \mathfrak{g}). Os hiperplanos V_α dividem V em um número finito de componentes abertas conexas congruentes, chamadas **câmaras de Weyl**.*

O grupo de Weyl se comporta como um grupo de permutações das raízes $\alpha \in \Pi$, portanto trata-se de um grupo finito. Uma propriedade fundamental de Π é que o grupo de Weyl permuta as câmaras livre e transitivamente: isto é, se escolhermos uma câmara C , então qualquer outra câmara é da forma wC para um único elemento $w \in W$. Cada câmara C é limitada por $k = \dim(V)$ hiperplanos $V_{\alpha_i} = V_{-\alpha_i}$, $1 \leq i \leq k$. Uma das raízes do par $\pm\alpha_i$, digamos α_i , é tal que $\langle \alpha_i, x \rangle > 0$, $\forall x \in C$; o conjunto destas raízes é chamado uma *base* de Π , ou um *sistema simples de raízes*. De fato, toda raiz é uma combinação linear de um número finito de raízes simples, com coeficientes inteiros, todos positivos ou todos negativos. A partir destes coeficientes podemos introduzir uma ordem (a ordem lexicográfica) no conjunto de raízes, dividindo-o em duas componentes $\Pi = \Pi^+ \cup \Pi^-$, as raízes *positivas* e *negativas*, respectivamente.

Exemplo 11 (A Subálgebra Especial Linear Complexa) *Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ podemos considerar o sistema simples de raízes formado pelos elementos*

$$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

como na notação do exemplo anterior. A reflexão w_α correspondente a raiz $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_j$ leva ϵ_i em ϵ_j e mantém todos os outros ϵ_k fixos. Disso, segue que W é isomorfo ao grupo de permutações S_n . \square

Definição 1.3.17 (Álgebra Compacta) *Uma álgebra de Lie real é dita **compacta** se sua forma de Cartan-Killing é negativa definida.*

Claramente, as álgebras compactas são semi-simples, pois sendo negativas definidas, suas formas de Cartan-Killing são não degeneradas. O termo compacta tem um significado topológico, pois neste caso, uma álgebra de Lie real é a álgebra de Lie de um grupo de Lie compacto se, e somente se, ela é compacta no sentido da definição acima. Um fato bastante importante, inclusive para mostrar o teorema posterior, é que dado um par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ formado por uma álgebra de Lie complexa e uma subálgebra de Cartan, então ele admite uma *base de Weyl*. Se Π denota o conjunto de raízes de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ e $\Sigma \subseteq \Pi$ é um sistema simples de raízes, então uma base de Weyl de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ é uma base de \mathfrak{g} formada pelos vetores H_α , $\alpha \in \Sigma$; $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Pi$ e satisfazendo

- $\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle_{\mathfrak{g}} = 1$;
- $[X_\alpha, X_{-\beta}] = m_{\alpha\beta} X_{\alpha+\beta}$ com $m_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ e tal que

$$m_{\alpha\beta} = -m_{-\alpha-\beta} \quad \text{e} \quad m_{\alpha\beta} = 0, \text{ quando } \alpha + \beta \notin \Pi.$$

Teorema 1.3.18 *Toda álgebra de Lie complexa \mathfrak{g} admite formas reais compactas, isto é, subálgebras reais compactas. Se u_1 e u_2 são formas reais compactas de \mathfrak{g} , então existe um automorfismo ψ de \mathfrak{g} tal que $\psi(u_1) = u_2$. Assim, todas as formas reais compactas são isomorfas entre si.*

Capítulo 2

Aplicações Harmônicas, Holomorfas e o Teorema de Lichnerowicz

Neste capítulo apresentamos parte da teoria geral de aplicações harmônicas e holomorfas entre variedades Riemannianas. Alguns dos objetivos deste estudo são: a introdução sistemática dos conceitos básicos, tais como: aplicações harmônicas, holomorfas, estruturas quase complexas, variedades quase Kähler, dentre outros; o estudo da estabilidade de aplicações harmônicas; a demonstração do Teorema de Lichnerowicz e alguns de seus corolários. Para mais detalhes do conteúdo apresentado recomendamos [9].

2.1 Harmonicidade

2.1.1 Aplicações Harmônicas

Sejam (\mathcal{M}^m, g) e (\mathcal{N}^n, h) duas variedades Riemannianas conexas, compactas, orientáveis e sem fronteira. Considere ainda $\phi : (\mathcal{M}^m, g) \rightarrow (\mathcal{N}^n, h)$ uma aplicação diferenciável (daqui em diante denotada apenas $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$). A *norma de Hilbert-Schmidt* da diferencial $d\phi_x : T_x\mathcal{M} \rightarrow T_{\phi(x)}\mathcal{N}$, induzida pelas métricas g e h em um ponto $x \in \mathcal{M}$, será denotada $|d\phi_x|$. Fixados dois sistemas de coordenadas locais (x_i) e (u^α) sobre x e $\phi(x)$ respectivamente, temos

$$|d\phi_x|^2 = g_{ij}h^{\alpha\beta}(\phi)\phi_i^\alpha\phi_j^\beta, \quad (2.1)$$

onde, $(\phi_i^\alpha) = \left(\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x_i}\right)$ denota a representação local de $d\phi_x$ e também usamos a convenção de Einstein para somas. Em (2.1) usamos uma notação simplificada para suprimir a expressão

$$\begin{aligned}
|d\phi_x|^2 &= \sum_{i,j=1}^m g_{ij} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^n h^{\alpha\beta}(\phi) \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial\phi^\beta}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^m g_{ij} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^n h \left(d\phi_x \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, d\phi_x \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right).
\end{aligned}$$

Note que, considerando $\{e_1, \dots, e_m\}$ uma base ortonormal de $T_x\mathcal{M}$ com respeito ao produto interno g_x , teremos $g_{ij} = \delta_{ij}$. Conseqüentemente, a expressão acima se reduz a

$$|d\phi_x|^2 = \sum_{i=1}^m h(d\phi_x \cdot e_i, d\phi_x \cdot e_i). \quad (2.2)$$

É importante observar que esta mudança de base não traz problemas no estudo específico das aplicações harmônicas que faremos no último capítulo, pois o funcional energia, que será definido adiante, é invariante por mudanças conformes da métrica.

Definição 2.1.1 (Densidade de Energia, Energia) A densidade de energia de uma aplicação diferenciável $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é a função $e(\phi) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$e(\phi)(x) = \frac{1}{2} |d\phi_x|^2. \quad (2.3)$$

A energia de ϕ é o número real

$$E(\phi) = \int_{\mathcal{M}} e(\phi) \nu_g. \quad (2.4)$$

Como \mathcal{M} é compacta, a função contínua $e(\phi)$ atinge máximo e mínimo. Isto é, para todo $x \in \mathcal{M}$ temos $0 \leq e(\phi)(x) < \alpha$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Integrando em \mathcal{M} , obtemos $0 \leq E(\phi) < \alpha \nu(\mathcal{M}) < \infty$, e concluímos que a energia de ϕ está bem definida. Note ainda que podemos definir o funcional energia $\mathcal{E} : C(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada função diferenciável $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ calcula sua energia $E(\phi) \in \mathbb{R}$.

Definição 2.1.2 (Aplicação Harmônica) Uma aplicação diferenciável $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é dita harmônica se, e somente se, é um ponto crítico do funcional energia.

Entendemos por ser um ponto crítico do funcional energia que, para toda seção $\sigma \in \mathcal{C}(\phi^{-1}T\mathcal{N})$ (campo de vetores induzido na imagem $\phi(\mathcal{M})$), vale $D_\sigma \mathcal{E}(\phi) = 0$. Aqui $D_\sigma \mathcal{E}(\phi)$ é definido como se segue: considere uma perturbação a um parâmetro $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ tal que

$$\phi_0 = \phi \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \right|_{t=0} = \sigma$$

(de fato, é imediato verificar que $\phi_t(x) = \exp_{\phi(x)}(t\sigma)$ sempre satisfaz as condições acima). Então,

$$D_\sigma \mathcal{E}(\phi) := \left. \frac{dE(\phi_t)}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.5)$$

Denotaremos $\Phi : \mathcal{M} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{N}$ a aplicação $\Phi(x, t) = \phi_t(x)$.

Exemplo 12 (O Problema de Plateau no Disco) *O problema de Plateau consiste em, dada uma curva fechada em \mathbb{R}^3 , encontrar uma superfície de área mínima cuja fronteira seja a curva dada. Uma contribuição definitiva para a questão de existência deste problema foi dada independentemente por J. Douglas e T. Radó, em torno de 1930. O resultado é o seguinte:*

Entre todas as aplicações diferenciáveis $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ do disco aberto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

em \mathbb{R}^3 , que se estendem a fronteira

$$\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

levando ∂D contínua e biunivocamente em uma curva fechada simples $\gamma \in \mathbb{R}^3$, existe uma que tem área menor ou igual a todas as outras.

A idéia fundamental é substituir a minimização da área pela minimização da energia de f . Neste caso, a energia de f é dada por

$$E(f) = \int_D \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy.$$

Por outro lado, sabemos que a área de f é dada por

$$A(f) = \int_D \sqrt{\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2 - \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle^2} dx dy.$$

Convém mencionar aqui que a área $A(f)$ não depende da parametrização f , apenas do conjunto $f(D) \subset \mathbb{R}^3$. Entretanto, a energia $E(f)$ varia com a aplicação, mesmo que o conjunto $f(D)$ permaneça o mesmo. Um fato importante é que $A(f) \leq 1/2E(f)$, e a igualdade se verifica se, e somente se,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = 0.$$

Decorre que quando minimizamos a energia, conseqüentemente minimizamos também a área. Além disso, obtemos uma parametrização especial para a qual as condições anteriores se verificam, chamadas parametrizações isotérmicas. \square

Proposição 2.1.3 Uma aplicação $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é harmônica se, e somente se, satisfaz a equação de Euler-Lagrange $\tau(\phi) = 0$, onde $\tau(\phi) = -d^*d\phi = \text{tr}(\nabla d\phi)$.

Dem: Seja $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ uma perturbação de ϕ . Isto é, uma família de aplicações $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ tais que

$$\phi_0 = \phi \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \right|_{t=0} = \cdot.$$

Então podemos calcular

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} E(\phi_t) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{M}} e(\phi_t) \nu_g \right|_{t=0} = \\ &= \left. \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \frac{\partial}{\partial t} \langle d\phi_t, d\phi_t \rangle \nu_g \right|_{t=0} = \left. \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla_{\partial/\partial t} d\phi_t, d\phi_t \rangle \nu_g \right|_{t=0} \end{aligned}$$

onde $d\phi_t$ é a diferencial de Φ ao longo de \mathcal{M} em um valor de t fixo e $\nabla_{\partial/\partial t}$ denota a derivada covariante em $T^*(\mathcal{M} \times \mathbb{R}) \otimes \Phi^{-1}T\mathcal{N}$.

Tomando um campo $X \in T\mathcal{M}$ e usando o lema (1.2.10), temos

$$\begin{aligned} (\nabla_{\partial/\partial t} d\phi_t)X &= \nabla_{\partial/\partial t}^{\Phi^{-1}T\mathcal{N}}(d\phi_t \cdot X) - d\phi_t \cdot \nabla_{\partial/\partial t}^{T(\mathcal{M} \times \mathbb{R})} X = \\ &= \nabla_{\partial/\partial t}^{\Phi^{-1}T\mathcal{N}}(d\Phi \cdot X) - 0 = \nabla_X^{\Phi^{-1}T\mathcal{N}} \left(d\Phi \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) + d\Phi \left[\frac{\partial}{\partial t}, X \right] = \\ &= \nabla_X^{\Phi^{-1}T\mathcal{N}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + 0. \end{aligned}$$

Agora, notando que ∇ e d coincidem em $\mathcal{A}^0(\phi^{-1}T\mathcal{N})$, temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{dE(\phi_t)}{dt} \right|_{t=0} &= \int_{\mathcal{M}} \left\langle \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}, d\phi t \right\rangle \nu_g \Big|_{t=0} = \int_{\mathcal{M}} \langle d\nu, d\phi \rangle \nu_g = \\ &= \int_{\mathcal{M}} \langle \nu, d^*d\phi \rangle \nu_g = \int_{\mathcal{M}} \langle \nu, \tau(\phi) \rangle \nu_g. \end{aligned}$$

Se ϕ é harmônica, a igualdade acima é zero para todo X e necessariamente $\tau(\phi) = 0$. Temos, pelo lema (1.2.11) que $-d^*d\phi = \text{tr}(\nabla d\phi)$. ■

Exemplo 13 A aplicação identidade $\text{Id} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é trivialmente harmônica. De fato, pelo teorema anterior temos $-d^*d(\text{Id}) = \text{tr}(0) = 0$. □

Exemplo 14 Se $\mathcal{N} = \mathbb{R}$, a aplicação harmônica $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função harmônica no sentido usual. □

Exemplo 15 Se \mathcal{M} é o círculo S^1 , a aplicação $\phi : S^1 \rightarrow \mathcal{N}$ é harmônica se, e somente se, é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco. De fato, a equação $\tau(\phi) = 0$ se reduz a $\nabla_{\phi'}\phi' = 0$. □

Definição 2.1.4 (Segunda Forma Fundamental) Para uma aplicação diferenciável $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ a forma quadrática $\nabla d\phi$ é chamada **segunda forma fundamental**.

Proposição 2.1.5 Para $X, Y \in \mathcal{C}(T\mathcal{M})$, vale a igualdade

$$\nabla d\phi(X, Y) = \nabla_X^{\phi^{-1}T\mathcal{N}}(d\phi.Y) - d\phi(\nabla_X^{\mathcal{M}}Y).$$

Dem: De fato, $\nabla d\phi(X, Y) = (\nabla_X d\phi)Y = \nabla_X^{\phi^{-1}T\mathcal{N}}(d\phi.Y) - d\phi(\nabla_X^{\mathcal{M}}Y)$. ■

Corolário 2.1.6 A forma quadrática $\nabla d\phi$ é simétrica, isto é, pra quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}(T\mathcal{M})$ temos $\nabla d\phi(X, Y) = \nabla d\phi(Y, X)$.

Dem: Como $\nabla^{\mathcal{M}}$ e $\nabla^{\mathcal{N}}$ são livres de torção, podemos escrever

$$\begin{aligned} \nabla d\phi(X, Y) - \nabla d\phi(Y, X) &= \nabla_X^{\phi^{-1}T\mathcal{N}}(d\phi.Y) - \nabla_Y^{\phi^{-1}T\mathcal{N}}(d\phi.X) - \\ &- d\phi(\nabla_X^{\mathcal{M}}Y - \nabla_Y^{\mathcal{M}}X) = d\phi[X, Y] - d\phi[X, Y] = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Isto mostra em particular que $\nabla d\phi$ é de fato uma forma quadrática em cada ponto $x \in \mathcal{M}$, pois para $X, Y \in \mathcal{C}(T\mathcal{M})$ e $f \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$ temos $\nabla d\phi(fX, Y) = (\nabla_{fX} d\phi)Y = f\nabla d\phi(X, Y)$ e $\nabla d\phi(X, fY) = \nabla d\phi(fY, X) = f\nabla d\phi(X, Y)$.

Corolário 2.1.7 *Para qualquer $\phi \in \mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ a 1-forma $d\phi \in \mathcal{A}^1(\phi^{-1}T\mathcal{N})$ é fechada. Ou seja, $dd\phi = 0$.*

Corolário 2.1.8 *Uma aplicação $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é harmônica se, e somente se, é uma 1-forma harmônica com valores em $\phi^{-1}T\mathcal{N}$.*

Suponha que $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é uma imersão Riemanniana. Identificando $X \in \mathcal{C}(T\mathcal{M})$ com $d\phi X \in \mathcal{C}(\phi^{-1}T\mathcal{N})$, vemos que $\nabla_X^{\mathcal{N}} Y = \nabla_X^{\mathcal{M}} Y + \nabla d\phi(X, Y)$. Ou seja, a conexão em \mathcal{N} é decomposta em sua componente tangencial (a conexão em \mathcal{M}) e sua componente normal (a segunda forma fundamental no senso clássico). A *curvatura média da imersão* é o traço da segunda forma fundamental dividido por $m = \dim(\mathcal{M})$. Como uma imersão é minimal se, e somente se, a curvatura média se anula, segue:

Proposição 2.1.9 *Uma imersão Riemanniana é harmônica se, e somente se, é minimal.*

2.2 Holomorficidade e o Teorema de Lichnerowicz

2.2.1 Aplicações Holomorfas

Definição 2.2.1 (Varietade Quase Complexa) Uma **estrutura quase complexa** em uma variedade diferenciável \mathcal{M} é um campo de endomorfismos $J : T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ tal que, para cada $x \in \mathcal{M}$, a aplicação $J_x : T_x\mathcal{M} \rightarrow T_x\mathcal{M}$ é uma estrutura complexa no espaço tangente $T_x\mathcal{M}$. Uma **variedade quase complexa** é um par da forma (\mathcal{M}, J) , formado por uma variedade diferenciável \mathcal{M} e uma estrutura quase complexa J em \mathcal{M} .

A dimensão real de uma variedade quase complexa (\mathcal{M}, J) é necessariamente par (ver seção 1.1). Escrevemos $m = \dim_{\mathbb{R}}\mathcal{M}/2 = \dim_{\mathbb{C}}\mathcal{M}$. Denotamos por $T^c\mathcal{M}$ o fibrado tangente complexificado de \mathcal{M} , cuja fibra em $x \in \mathcal{M}$ é

$$T_x\mathcal{M} \otimes \mathbb{C} = T_x\mathcal{M} \oplus \sqrt{-1}T_x\mathcal{M}, \quad (2.6)$$

a complexificação usual do espaço vetorial $T_x\mathcal{M}$. É fato que J pode ser estendida a uma estrutura complexa em $T^c\mathcal{M}$, ainda denotada J . Como $J^2 = -1$, seus únicos autovalores são $\pm\sqrt{-1}$. Denotaremos $T^{(1,0)}\mathcal{M}$ e $T^{(0,1)}\mathcal{M}$ os auto-espaços associados a $\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$, respectivamente. Vale que

$$T^c\mathcal{M} = T^{(1,0)}\mathcal{M} \oplus T^{(0,1)}\mathcal{M}, \quad (2.7)$$

e estes são chamados de *fibrado tangente holomorfo* e *fibrado tangente anti-holomorfo*, respectivamente. Esta decomposição induz uma decomposição dual

$$T^{*c}\mathcal{M} = T^{*(1,0)}\mathcal{M} \oplus T^{*(0,1)}\mathcal{M}, \quad (2.8)$$

onde $T^{*(1,0)}\mathcal{M} = (T^{(1,0)}\mathcal{M})^*$ e $T^{*(0,1)}\mathcal{M} = (T^{(0,1)}\mathcal{M})^*$.

Por definição,

$$T^{(1,0)}\mathcal{M} = \{U + \sqrt{-1}V : J(U + \sqrt{-1}V) = \sqrt{-1}(U + \sqrt{-1}V)\} = \text{Aut}_J(\sqrt{-1}) \quad \text{e}$$

$$T^{(0,1)}\mathcal{M} = \{U + \sqrt{-1}V : J(U + \sqrt{-1}V) = -\sqrt{-1}(U + \sqrt{-1}V)\} = \text{Aut}_J(-\sqrt{-1})$$

$$\Rightarrow J(U) + \sqrt{-1}J(V) = -V + \sqrt{-1}U \quad \text{e} \quad J(U) + \sqrt{-1}J(V) = V - \sqrt{-1}U$$

$$\Rightarrow \begin{cases} J(U) = -V \\ J(V) = U \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} J(U) = V \\ J(V) = -U \end{cases}.$$

Aplicando J na segunda equação de ambos os sistemas acima, obtemos duas equações $V = -J(U)$ e $V = J(U)$, para $T^{(1,0)}\mathcal{M}$ e para $T^{(0,1)}\mathcal{M}$, respectivamente. Vem assim as caracterizações

$$T^{(1,0)}\mathcal{M} = \{U - \sqrt{-1}J(U) : U \in T\mathcal{M}\} \quad (2.9)$$

$$T^{(0,1)}\mathcal{M} = \{U + \sqrt{-1}J(U) : U \in T\mathcal{M}\}. \quad (2.10)$$

Desse modo, é imediato que $T^{(0,1)}\mathcal{M} = \overline{T^{(1,0)}\mathcal{M}}$, onde a barra indica conjugação complexa. Além disso, podemos construir um isomorfismo real do fibrado holomorfo $T^{(1,0)}\mathcal{M}$ (resp. anti-holomorfo $T^{(0,1)}\mathcal{M}$) no fibrado tangente $T\mathcal{M}$, fazendo corresponder

$$U \longleftrightarrow U - \sqrt{-1}J(U) \text{ (resp. } U + \sqrt{-1}J(U)), \quad \forall U \in T\mathcal{M}.$$

Agora, vamos supor que g é uma *métrica quase Hermitiana* em \mathcal{M} , isto é, uma métrica Riemanniana tal que

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{C}(T\mathcal{M}). \quad (2.11)$$

Neste caso, dizemos que (\mathcal{M}, J, g) é uma *variedade quase Hermitiana*. Em $T^c\mathcal{M}$, a métrica g se estende a uma forma bilinear complexa; e induz uma forma Hermitiana em $T^{(1,0)}\mathcal{M}$, associando a $X, Y \in T^{(1,0)}\mathcal{M}$ o número $g(X, \bar{Y})$. A *forma Kähler* Ω é a 2-forma em $T\mathcal{M}$ definida por

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY). \quad (2.12)$$

Definição 2.2.2 (Variedade Quase Kähler) *Uma variedade quase complexa (\mathcal{M}, J) , com uma métrica quase hermitiana g , é chamada **variedade quase Kähler** se $d\Omega = 0$.*

Tome $\phi : (\mathcal{M}, J, g) \rightarrow (\mathcal{N}, J', g')$ uma função diferenciável entre variedades quase Hermitianas. A diferencial complexificada $d^c\phi : T^c\mathcal{M} \rightarrow T^c\mathcal{N}$ é dada pela relação

$$U + \sqrt{-1}V \mapsto d\phi.U + \sqrt{-1}d\phi.V, \quad \forall U, V \in T\mathcal{M} \quad (2.13)$$

e determina diferenciais parciais, do seguinte modo. Denote $i_{(1,0)}, i_{(0,1)}$ as inclusões de $T^{(1,0)}\mathcal{M}, T^{(0,1)}\mathcal{M}$ em $T^c\mathcal{M}$ e $\pi_{(1,0)}, \pi_{(0,1)}$ as projeções de $T^c\mathcal{N}$ em $T^{(1,0)}\mathcal{N}, T^{(0,1)}\mathcal{N}$,

respectivamente. Definimos então

$$\partial \phi = \pi_{(1,0)} \circ d^c \phi \circ i_{(1,0)} : T^{(1,0)}\mathcal{M} \longrightarrow T^{(1,0)}\mathcal{N} \quad (2.14)$$

$$\bar{\partial} \phi = \pi_{(1,0)} \circ d^c \phi \circ i_{(0,1)} : T^{(0,1)}\mathcal{M} \longrightarrow T^{(1,0)}\mathcal{N} \quad (2.15)$$

$$\partial \bar{\phi} = \pi_{(0,1)} \circ d^c \phi \circ i_{(1,0)} : T^{(1,0)}\mathcal{M} \longrightarrow T^{(0,1)}\mathcal{N} \quad (2.16)$$

$$\bar{\partial} \bar{\phi} = \pi_{(0,1)} \circ d^c \phi \circ i_{(0,1)} : T^{(0,1)}\mathcal{M} \longrightarrow T^{(0,1)}\mathcal{N}. \quad (2.17)$$

De (2.9) e (2.10), e também notando que a conjugação complexa é um isomorfismo entre o fibrado tangente holomorfo e o anti-holomorfo, segue que

$$\bar{\partial} \bar{\phi} = \overline{\partial \phi} \quad \text{e} \quad \partial \bar{\phi} = \overline{\bar{\partial} \phi}. \quad (2.18)$$

Ainda, por construção

$$d^c \phi \Big|_{T^{(1,0)}\mathcal{M}} = \partial \phi + \bar{\partial} \bar{\phi} \quad \text{e} \quad d^c \phi \Big|_{T^{(0,1)}\mathcal{M}} = \bar{\partial} \phi + \partial \bar{\phi}. \quad (2.19)$$

De fato, sabemos que $T^c \mathcal{N} = T^{(1,0)}\mathcal{N} \oplus T^{(0,1)}\mathcal{N} = \pi_{(1,0)}(T^c \mathcal{N}) \oplus \pi_{(0,1)}(T^c \mathcal{N})$. Portanto, dado $X \in T^{(1,0)}\mathcal{M}$ temos

$$\begin{aligned} d^c \phi(X) &= d^c \phi \circ i_{(1,0)}(X) \in T^c \mathcal{N} \Rightarrow \\ \Rightarrow d^c \phi(X) &= \pi_{(1,0)}(d^c \phi \circ i_{(1,0)}(X)) + \pi_{(0,1)}(d^c \phi \circ i_{(1,0)}(X)) \Rightarrow \\ \Rightarrow d^c \phi(X) &= \partial \phi(X) + \bar{\partial} \bar{\phi}(X). \end{aligned}$$

Definição 2.2.3 (Aplicação Holomorfa) *Uma aplicação diferenciável $\phi : (\mathcal{M}, J) \longrightarrow (\mathcal{N}, J')$ entre variedades quase complexas é **holomorfa em** $x \in \mathcal{M}$, se comuta com as estruturas quase complexas. Isto é,*

$$J'_{\phi(x)} \circ d\phi_x = d\phi_x \circ J_x. \quad (2.20)$$

*Dizemos que ϕ é **holomorfa**, se a definição acima vale para todo $x \in \mathcal{M}$. Analogamente, ϕ é dita **anti-holomorfa** se $J' \circ d\phi = -d\phi \circ J$. (Not. \pm holomorfa)*

Se lembrarmos da definição de aplicação harmônica dada na seção anterior, veremos que ela depende apenas das métricas Riemannianas g e h de \mathcal{M} e \mathcal{N} , respectivamente. Mais precisamente, como o funcional energia é invariante por mudanças conformes da métrica g , a harmonicidade depende quase exclusivamente da métrica h do contradomínio. Já, a definição de aplicação holomorfa sequer menciona as métricas de \mathcal{M} e \mathcal{N} , apenas se fazem necessárias

as estruturas quase complexas J e J' no domínio e contradomínio. Com efeito, como vimos na proposição (2.1.3), determinar uma aplicação harmônica é equivalente a resolver um sistema de EDP's de segunda ordem. Na seqüência, mostraremos que para encontrarmos aplicações holomorfas precisamos resolver um sistema de EDP's de primeira ordem.

Exemplo 16 Considere $f = (u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ , onde $J(x, y) = (-y, x)$ é a estrutura quase complexa canônica do \mathbb{R}^2 . Neste caso, temos

$$\begin{aligned} J \circ df = df \circ J &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\partial v}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}. \end{aligned}$$

Ou seja, a definição acima estende a noção de função complexa holomorfa usual. \square

Proposição 2.2.4 A aplicação ϕ é holomorfa (resp. anti-holomorfa) se, e somente se, $\bar{\partial}\phi = 0$ (resp. $\partial\phi = 0$).

Dem: Primeiramente, suponha que ϕ é holomorfa, ou seja, $J' \circ d\phi = d\phi \circ J$. Dado $W \in T^{(1,0)}\mathcal{M}$ podemos escrever $W = X - \sqrt{-1}J(X)$, com $X \in T\mathcal{M}$. Portanto,

$$\begin{aligned} d^c\phi(W) &= d^c\phi(X - \sqrt{-1}J(X)) = d\phi(X) - \sqrt{-1}(d\phi \circ J)(X) = \\ &= d\phi(X) - \sqrt{-1}(J' \circ d\phi)(X) \in T^{(1,0)}\mathcal{N}, \end{aligned}$$

pois $d\phi(X) \in T\mathcal{N}$. Como $d^c\phi|_{T^{(1,0)}\mathcal{M}} = \partial\phi + \bar{\partial}\phi$ e $\bar{\partial}\phi \in T^{(0,1)}\mathcal{N}$, necessariamente temos $\bar{\partial}\phi = 0$. Finalmente, lembrando que $\partial\bar{\phi} = \overline{\bar{\partial}\phi}$, concluímos $\bar{\partial}\phi = 0$.

Reciprocamente, se $\bar{\partial}\phi = 0$ tome $W \in T^{(1,0)}\mathcal{M}$ e temos por (2.19) que

$$d^c\phi(W) = d^c\phi(X - \sqrt{-1}J(X)) = d\phi(X) - \sqrt{-1}d\phi(J(X)) \in T^{(1,0)}\mathcal{N}.$$

Assim, $d\phi(X) - \sqrt{-1}d\phi(J(X)) = \alpha - \sqrt{-1}J'(\alpha)$, para algum $\alpha \in T\mathcal{N}$, donde segue $d\phi(X) = \alpha$ e $d\phi(J(X)) = J'(\alpha)$. Concluímos assim

$$J'(\alpha) = J' \circ d\phi(X) = d\phi \circ J(X),$$

para todo $X \in T\mathcal{M}$, e por definição ϕ é holomorfa. O caso em que ϕ é anti-holomorfa é análogo. ■

Suponha agora que $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ definida em um subconjunto aberto. Sabemos que sua diferencial, calculada em um ponto qualquer do seu domínio, pode ser expressa em relação a base dual canônica $\{dx, dy\}$ como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Identificando $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, e agora considerando a operação de conjugação complexa e a estrutura complexa dada pela multiplicação por $\sqrt{-1}$, escreva

$$dz = dx + \sqrt{-1}dy \quad \text{e} \quad d\bar{z} = dx - \sqrt{-1}dy.$$

Considerando ainda os operadores

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

é imediato verificar que a fórmula para a diferencial pode ser escrita como

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}. \quad (2.21)$$

Note que, a partir destas convenções, dizer que f é holomorfa é equivalente à exigir que o segundo termo da soma acima se anule. Isto é, f é holomorfa se, e somente se, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. De fato, se $z \in \mathbb{C}$ e $f(z) = u(z) + \sqrt{-1}v(z)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -\sqrt{-1} \frac{\partial f}{\partial y} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{-1} \frac{\partial v}{\partial x} = -\sqrt{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{-1} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}. \end{aligned}$$

Mais geralmente, tome agora (\mathcal{M}, J, g) e (\mathcal{N}, J', g') variedades quase Hermitianas, cujas dimensões são $2m$ e $2n$, respectivamente. Pela proposição (1.1.1), sabemos que existem campos vectoriais $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}$ em \mathcal{M} tais que $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}, J \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, J \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}$ é uma base ortonormal dos campos em $\mathcal{C}(T\mathcal{M})$. Denotando $\frac{\partial}{\partial y_i} = J \frac{\partial}{\partial x_i}$, podemos definir para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, os operadores

$$dz_i = dx_i + \sqrt{-1}dy_i \quad \text{e} \quad d\bar{z}_i = dx_i - \sqrt{-1}dy_i, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad (2.23)$$

formando assim uma base para $T^c \mathcal{M}$. Analogamente, temos $\left\{ \frac{\partial}{\partial w_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}_\alpha} \right\}_{\alpha=1}^n$ base de $T^c \mathcal{N}$. Desse modo, dada uma aplicação diferenciável $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, a diferencial complexificada é expressa por

$$d^c \phi \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \right) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial w_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \bar{w}_\alpha} \quad (2.24)$$

e

$$d^c \phi \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \right) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial}{\partial w_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial}{\partial \bar{w}_\alpha}, \quad (2.25)$$

e então,

$$\partial \phi_i = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial w_\alpha} \quad \text{e} \quad \bar{\partial} \phi_i = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial}{\partial w_\alpha}.$$

Portanto, exigir que $\bar{\partial} \phi = 0$ é equivalente à

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \bar{z}_i} \cdot d\bar{z}_i = 0, \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, n\},$$

e conseqüentemente,

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \bar{z}_i} \right) = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial y_i} = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} \left(\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \bar{z}_i} \right) = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial y_i} - \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_i} = 0. \quad (2.26)$$

As equações de (2.26) são chamadas *Equações de Cauchy-Riemann generalizadas*.

2.2.2 O Teorema de Lichnerowicz

Usando as estruturas quase Hermitianas de \mathcal{M} e \mathcal{N} definiremos agora as *densidades parciais de energia* de ϕ como

$$e'(\phi) = |\partial \phi|^2 = g_{\bar{i}j} h^{\alpha\bar{\beta}} \phi_i^\alpha \bar{\phi}_j^\beta \quad (2.27)$$

e

$$e''(\phi) = |\bar{\partial} \phi|^2 = g_{i\bar{j}} h^{\alpha\bar{\beta}} \phi_j^\alpha \bar{\phi}_i^\beta, \quad (2.28)$$

onde ϕ_i^α (resp. $\bar{\phi}_i^\alpha$) é a representação matricial de $\partial \phi$ (resp. $\bar{\partial} \phi$) na representação local escolhida. Temos $e(\phi) = e'(\phi) + e''(\phi)$. Note que $|\partial \phi|_x$ não é a norma de Hilbert-Schmidt de $\partial \phi(x)$ vista como transformação linear de real de $T_x^{(1,0)} \mathcal{M}$ com valores em $T_{\phi(x)}^{(1,0)} \mathcal{N}$, o

que justifica a falta do fator $1/2$ na definição de $e'(\phi)$. Se \mathcal{M} é compacta, definimos

$$E'(\phi) = \int_{\mathcal{M}} e'(\phi) \nu_g \quad (2.29)$$

e

$$E''(\phi) = \int_{\mathcal{M}} e''(\phi) \nu_g. \quad (2.30)$$

Das propriedades de integração, segue $E(\phi) = E'(\phi) + E''(\phi)$. Ainda, ϕ é holomorfa se, e somente se, $E''(\phi) = 0$ e ϕ anti-holomorfa se, e somente se, $E'(\phi) = 0$. Feitas estas considerações, estamos prontos para enunciar o teorema principal deste capítulo.

Teorema 2.2.5 (Teorema de Lichnerowicz) *Sejam \mathcal{M} e \mathcal{N} variedades Kähler, uma função $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ diferenciável e defina $K(\phi) = E'(\phi) - E''(\phi)$. Então $K(\phi)$ é um invariante homotópico diferenciável, isto é, é constante nas componentes conexas do conjunto de funções diferenciáveis $C(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.*

Para demonstrar o teorema anterior vamos usar os seguintes lemas.

Lema 2.2.6 *Se $\Omega^{\mathcal{M}}$ e $\Omega^{\mathcal{N}}$ representam as formas Kähler em \mathcal{M} e \mathcal{N} então*

$$k(\phi) := e'(\phi) - e''(\phi) = \langle \Omega^{\mathcal{M}}, \phi^* \Omega^{\mathcal{N}} \rangle. \quad (2.31)$$

Dem: *Com os referenciais locais como acima, temos:*

$$\langle \Omega^{\mathcal{M}}, \phi^* \Omega^{\mathcal{N}} \rangle = (\Omega^{\mathcal{M}})^{j\bar{k}} \phi_j^\alpha \phi_{\bar{k}}^{\bar{\beta}} (\Omega^{\mathcal{N}})_{\alpha\bar{\beta}} - (\Omega^{\mathcal{M}})^{j\bar{k}} \phi_k^\alpha \phi_j^{\bar{\beta}} (\Omega^{\mathcal{N}})_{\alpha\bar{\beta}}.$$

Como $(\Omega^{\mathcal{M}})^{j\bar{k}} = \sqrt{-1} g^{j\bar{k}}$ e $(\Omega^{\mathcal{N}})_{\alpha\bar{\beta}} = -\sqrt{-1} h_{\alpha\bar{\beta}}$ obtemos

$$\langle \Omega^{\mathcal{M}}, \phi^* \Omega^{\mathcal{N}} \rangle = g^{j\bar{k}} \phi_j^\alpha \phi_{\bar{k}}^{\bar{\beta}} h_{\alpha\bar{\beta}} - g^{j\bar{k}} \phi_k^\alpha \phi_j^{\bar{\beta}} h_{\alpha\bar{\beta}} = e'(\phi) - e''(\phi). \blacksquare$$

Lema 2.2.7 (Lema da Homotopia) *Tome $\phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ uma família de aplicações diferenciáveis entre as variedades \mathcal{M} e \mathcal{N} , indexadas por $t \in \mathbb{R}$. Se ω é uma 2-forma fechada em \mathcal{N} então*

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_t^* \omega) = d \left(\phi_t^* i \left(\frac{\partial \phi_t}{\partial t} \right) \omega \right), \quad (2.32)$$

onde $i(X)\omega$ denota o produto interno do vetor X com a 2-forma ω .

Dem: Como $dw = 0$ temos $d(\phi_t^*)\omega = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Considere a aplicação diferenciável $\Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ definida por $\Phi(t, x) = \phi_t(x)$. Denotando \underline{d} a diferencial exterior em $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$, obtemos $\underline{d}(\phi^*\omega) = 0$. Afirmamos que $\Phi^*\omega = \phi_t^*\omega + \underline{d}t \wedge \phi_t^*(i(\partial\phi_t/\partial t)\omega)$. De fato, para $X, Y \in \mathcal{C}(T\mathcal{M})$, obtemos

$$\Phi^*\omega(X, Y) = \omega(d\Phi X, d\Phi Y) = \omega(d\phi_t X, d\phi_t Y) = \phi_t^*\omega(X, Y)$$

e $\underline{d}t(X) = 0$. Ao passo que, para $X \in \mathcal{C}(T\mathcal{M})$ temos

$$\begin{aligned} \Phi^*\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, X\right) &= \omega\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}, d\Phi X\right) = \left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\omega\right)(d\phi_t X) = \\ &= \phi_t^*\left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\omega\right)X = \underline{d}t \wedge \phi_t^*\left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}, X\right) \text{ e } \phi_t^*\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, X\right) = 0. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} 0 &= \underline{d}(\Phi^*\omega) = \underline{d}(\phi_t^*\omega) + \underline{d}\left(\underline{d}t \wedge \phi_t^*\left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\omega\right)\right) = \\ &= \underline{d}t \wedge \frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*\omega) + d(\phi_t^*) - \underline{d}t \wedge \underline{d}\left(\phi_t^*\left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\omega\right)\right) = \\ &= \underline{d}t \wedge \left(\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*\omega) - d\left(\phi_t^*\left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\omega\right)\right)\right), \end{aligned}$$

e segue $\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*\omega) - d\left(\phi_t^*\left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\omega\right)\right) = 0$, como queríamos. ■

Dem: (Teorema de Lichnerowicz) Se $*$ denota o operador de Hodge em formas, temos $k(\phi)\nu_g = \langle \Omega^{\mathcal{M}}, \phi^*\Omega^{\mathcal{N}} \rangle \nu_g = \Omega^{\mathcal{M}} \wedge *(\phi^*\Omega^{\mathcal{N}}) = \phi^*\Omega^{\mathcal{N}} \wedge *(\Omega^{\mathcal{M}})$, por (2.31). Tome ϕ_0 e ϕ_1 duas aplicações de \mathcal{M} em \mathcal{N} , homotópicas pela família ϕ_t , $t \in [0, 1]$. Como Ω é fechada, usamos (2.32) e obtemos

$$\phi_1^*\Omega^{\mathcal{N}} - \phi_0^*\Omega^{\mathcal{N}} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*\Omega^{\mathcal{N}}) dt = d \int_0^1 \phi_t^* i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right) \Omega dt := d\alpha,$$

onde α é uma 1-forma em \mathcal{M} . Portanto, vale a igualdade

$$(k(\phi_1) - k(\phi_0))\nu_g = (\phi_1^*\Omega^{\mathcal{N}} - \phi_0^*\Omega^{\mathcal{N}}) \wedge *(\Omega^{\mathcal{M}}) = d\alpha \wedge *(\Omega^{\mathcal{M}}) = d(\alpha \wedge *(\Omega^{\mathcal{M}})),$$

pois $d*(\Omega^{\mathcal{M}}) = d(\Omega^{m-1}/(m-1)!) = 0$, onde m denota a dimensão complexa de \mathcal{M} .

Finalmente, integrando ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$K(\phi_1) - K(\phi_0) = \int_{\mathcal{M}} d(\alpha \wedge *(\Omega^{\mathcal{M}})) = 0. \quad \blacksquare$$

Vamos enunciar agora algumas conseqüências do teorema anterior no estudo de funções harmônicas. Para uma variação $\{\phi_t\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$, temos $E'(\phi_t) - E''(\phi_t) = K(\phi_t)$ constante, donde segue

$$\frac{\partial E'(\phi_t)}{\partial t} = \frac{\partial E''(\phi_t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial E(\phi_t)}{\partial t}.$$

Corolário 2.2.8 *Os pontos críticos de E , E' e E'' coincidem. Portanto, numa dada classe de homotopia, os mínimos de E , E' e E'' coincidem.*

Dem: *Suponha que ϕ_0 e ϕ estejam na mesma classe, e assim*

$$E'(\phi) - E'(\phi_0) = E''(\phi) - E''(\phi_0).$$

Portanto, se $E'(\phi_0) \leq E'(\phi)$, $\forall \phi$ então $E''(\phi_0) \leq E''(\phi)$, $\forall \phi$. De modo similar, como $E(\phi) = K(\phi) + 2E''(\phi)$, obtemos $E(\phi) - 2E''(\phi) = E(\phi_0) - 2E''(\phi_0)$, ou $E(\phi) - E(\phi_0) = 2(E''(\phi) - E''(\phi_0))$, assim o mínimo coincide. ■

Corolário 2.2.9 *Se ϕ é uma aplicação \pm holomorfa entre variedades Kähler, então ela é uma aplicação harmônica e um mínimo de E em sua classe de homotopia.*

Dem: *De fato, uma aplicação holomorfa satisfaz $E''(\phi) = 0$, e portanto é um mínimo absoluto de E em sua classe. ■*

Corolário 2.2.10 *Suponha que ϕ_0 é harmônica e um mínimo de E em sua classe, e ainda que é homotópica a uma função \pm holomorfa ϕ_1 . Então ϕ_0 é \pm holomorfa.*

Dem: *Se ϕ_1 é holomorfa, então o mínimo de E'' em sua classe é 0. Pelo corolário (1.3.1) ϕ_0 deve realizar este mínimo. ■*

Corolário 2.2.11 *Se $\phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é uma deformação diferenciável de uma aplicação \pm holomorfa ϕ_0 através de funções harmônicas, então cada ϕ_t é \pm holomorfa.*

Dem: *De fato, ao longo da deformação temos*

$$\frac{\partial E'(\phi_t)}{\partial t} = \frac{\partial E''(\phi_t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial E(\phi_t)}{\partial t}. \quad \blacksquare$$

Capítulo 3

O Teorema de Burstall-Salamon e Métricas (1,2)-simpléticas na Variedade Bandeira

Neste capítulo faremos uma breve introdução à teoria de torneios [18], dando atenção especial aos torneios estrelados. Daremos a definição geométrica da variedade bandeira maximal complexa $IF(n)$ e a definição de variedades bandeira mais gerais através da teoria de Lie. Portanto, alguns tópicos básicos sobre grupos e álgebras de Lie semi-simples, que julgamos imprescindíveis para tal, são discutidos de modo sucinto na seção 1.3. Veremos algumas particularidades da geometria Hermitiana das variedades bandeira e também demonstraremos o teorema de Burstall-Salamon, donde podemos concluir propriedades das estruturas quase complexas invariantes J sobre $IF(n)$ a partir de torneios de n jogadores $\mathcal{T}_{(J)}$ associados. Demonstramos também um resultado que estabelece um critério para que $IF(n)$ admita uma métrica (1,2)-simplética invariante. Primeiramente, ele é feito no caso particular da variedade bandeira geométrica, através da abordagem combinatória de torneios. Mais adiante, é demonstrado em um ambiente mais geral, usando raízes e bases de Weyl. Mais detalhes deste capítulo são encontrados em [4], [13], [16], [17], [18], [25], [20], [21].

3.1 O Teorema de Burstall-Salamon

3.1.1 Torneios

Um *torneio* \mathcal{T} consiste de um conjunto finito T , cujos elementos são chamados *jogadores*, com uma relação \longrightarrow que associa a cada dois pontos um vencedor. Mais formalmente, um torneio é um par da forma $\mathcal{T} = (T, E)$ onde por consistência $T = \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$

e $E \subset T \times T$ é tal que:

1. $(k, k) \notin E, \forall k \in T$;
2. $\forall k \neq l \in T$ temos $(k, l) \in E$ ou $(l, k) \in E$;
3. $(k, l) \in E \Rightarrow (l, k) \notin E, \forall k \neq l \in T$.

Quando T tem n elementos dizemos que \mathcal{T} é um n -torneio. A primeira condição acima nos diz que em um torneio, jogadores não competem consigo mesmos. Já a segunda condição implica que todos os jogadores competem uns com os outros, e finalmente a terceira que em cada partida só existe um vencedor. Claramente \mathcal{T} pode ser representado por um *grafo* direcionado completo, cujos vértices são os elementos de T . Em tal representação, quaisquer dois pontos $k, l \in T$ são unidos por um segmento orientado $k \rightarrow l$, e neste caso dizemos que k venceu l . Como T é completo o conjunto E tem $n(n-1)/2$ elementos, além disso E se escreve como a união disjunta $E = E_1 \cup E_2$, onde

$$E_1 = \{(a, b) \in E : a < b\} \text{ e } E_2 = \{(a, b) \in E : a > b\}. \quad (3.1)$$

Um *isomorfismo* entre dois torneios \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 é uma bijeção $\phi : T_1 \rightarrow T_2$ tal que:

$$k \rightarrow l \Rightarrow \phi(k) \rightarrow \phi(l), \quad \forall k, l \in T_1. \quad (3.2)$$

Ou seja, um isomorfismo entre torneios é uma aplicação que rearranja os vértices mas preserva a estrutura das partidas. Claramente, vê-se que torneios isomorfos tem o mesmo número de elementos. De modo mais geral, dados \mathcal{T}_1 um n -torneio e \mathcal{T}_2 um m -torneio, respectivamente, definimos um *homomorfismo* entre \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 como uma aplicação

$$\phi : T_1 = \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow T_2 = \{1, 2, \dots, m\}$$

tal que

$$k \rightarrow l \Rightarrow \phi(k) \rightarrow \phi(l) \text{ ou } \phi(k) = \phi(l), \quad \forall k, l \in T_1. \quad (3.3)$$

A cada n -torneio podemos associar um vetor placar

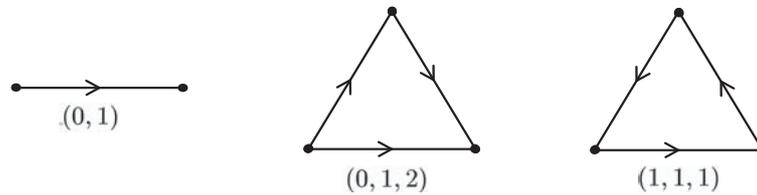
$$(v_1, \dots, v_n) : 0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq n-1;$$

onde cada uma de suas entradas é o número de vitórias de cada jogador. Um cálculo direto mostra que:

$$\sum_{i=1}^n v_i = \binom{n}{2}.$$

Claramente torneios isomorfos tem o mesmo vetor placar, mas a recíproca não é verdadeira (ver [18]). Ainda, cada n -torneio esta em correspondência com uma matriz $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$ de

ordem n , anti-simétrica, sem diagonal e cujas entradas são $\{\pm 1\}$. Se $k \rightarrow l$ então $\varepsilon_{kl} = 1$ e $\varepsilon_{lk} = -1$. Abaixo temos as classes de isomorfismo de n -torneios ($n \leq 3$), e seus respectivos vetores placar:



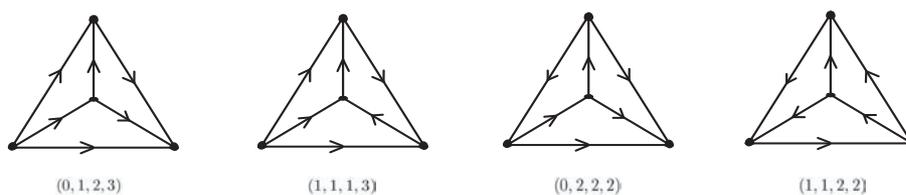
Definimos o *torneio transitivo canônico* \mathcal{T}_c , cuja matriz de incidência é triangular, estabelecendo: $k \rightarrow l$ se, e somente se, $k < l$. A menos de isomorfismo, \mathcal{T}_c é o único torneio satisfazendo as seguintes condições equivalentes [18]:

- a relação entre os jogadores é transitiva, isto é, ($j \rightarrow k$ e $k \rightarrow l$ implica $j \rightarrow l$);
- não existem ciclos;
- o vetor placar é $(0, 1, \dots, n - 1)$.

Um m -ciclo em \mathcal{T} é um caminho fechado $k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow \dots \rightarrow k_m \rightarrow k_1$, $k_i \in \mathcal{T}$. Acima, os torneios de vetores placar $(1, 1, 1)$ e $(0, 1, 2)$ são um 3-ciclo e o 3-torneio transitivo canônico, respectivamente. Também dizemos que um torneio é *transitivo* se não contém 3-ciclos. Segue imediatamente que o torneio transitivo canônico é um caso particular de torneio transitivo. Reciprocamente, todo torneio transitivo é isomorfo ao torneio transitivo canônico, para o qual $E = E_1$ [18].

Definimos um *vencedor* em \mathcal{T} como o (único) vértice com $n - 1$ vitórias, e um *perdedor* como o (único) vértice com nenhuma vitória. Nem todo torneio tem um vencedor ou perdedor, mas quando ele existe não faz parte de nenhum ciclo. No torneio transitivo canônico, 1 é vencedor e n perdedor.

A menos de isomorfismo, existem quatro 4-torneios distintos:



Aqueles com vetor placar $(0, 2, 2, 2)$ e $(1, 1, 1, 3)$, que contém um único 3-ciclo, são chamados *cone 3-ciclo*. Cada um deles contém um ciclo e um vencedor ou perdedor.

Definição 3.1.1 (Torneio Forte, Irredutível e Livre de Cones) Um torneio \mathcal{T} é dito **forte** se quaisquer vértices $k, l \in T$ podem ser unidos por um caminho $k = k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow \dots \rightarrow k_r = l$. Um torneio \mathcal{T} é dito **irredutível** se não existe um homomorfismo sobrejetor de \mathcal{T} no 2-torneio transitivo canônico \mathcal{T}_2 . Finalmente, dizemos que um torneio \mathcal{T} é **livre de cones** se sua restrição a qualquer um de seus subtorneios de quatro jogadores nunca é um cone 3-ciclo.

Proposição 3.1.2 Um torneio é forte se, e somente se, é irredutível.

Dem: (\Rightarrow) Dado um torneio qualquer \mathcal{T} , suponha por absurdo que ele não é irredutível. Isto é, existe um homomorfismo sobrejetor $\phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_2$. Desse modo, existem dois vértices $i, j \in \mathcal{T}$ com $i \rightarrow j$ e $\phi(i) = 1 \rightarrow 2 = \phi(j)$, pois ϕ é homomorfismo e preserva a estrutura das partidas. Como \mathcal{T} é forte, existe um caminho $j \rightarrow j_1 \rightarrow \dots \rightarrow j_r = i$ unindo estes dois vértices. Como $1 \rightarrow 2$ em \mathcal{T}_2 e ϕ é homomorfismo, temos

$$2 = \phi(j) = \phi(j_1) = \dots = \phi(j_r) = \phi(i) \Rightarrow \phi(i) = 2,$$

um absurdo. Concluímos então que \mathcal{T} é irredutível.

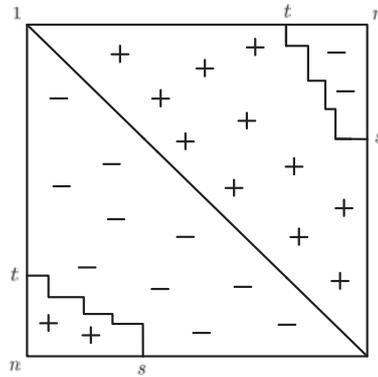
(\Leftarrow) Reciprocamente, assuma que \mathcal{T} não é forte. Então existem vértices $i, j \in \mathcal{T}$ que não podem ser unidos por um caminho $i \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_r = j$. Particularmente, i não vence j , só restando a possibilidade $j \rightarrow i$. Assim, definimos uma aplicação $\phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_2$ por $\phi(k) = 2, \forall k \neq j$ e $\phi(j) = 1$. Então ϕ é claramente sobrejetora, e também é um homomorfismo, implicando assim que \mathcal{T} não é irredutível, como queríamos. ■

Nesta seção mostraremos que um torneio livre de cones tem matriz de incidência similar por permutação a uma matriz estrelada, que será definida adiante. Por simplicidade de notação, no que segue escreveremos T/U como a restrição do torneio \mathcal{T} ao subconjunto $U \subset T$.

Definição 3.1.3 (Torneio Estrelado) Um torneio \mathcal{T} é dito **estrelado** se existem números inteiros s, t (com $1 \leq s \leq t \leq n$) tais que:

- i. $T/\{1, \dots, t\}$ é um sub-torneio transitivo canônico maximal de \mathcal{T} ;
- ii. $T/\{s, \dots, n\}$ é um sub-torneio transitivo canônico maximal de \mathcal{T} ;
- iii. Se $(k, l) \in E_2$ então $l < s$ e $t < k$;
- iv. Se $l' \leq l$ e $k' \leq k$, então $(k, l) \in E_2$ implica que $(k', l') \in E_2$.

A condição (i) da definição acima significa que não existe um sub-torneio transitivo canônico de \mathcal{T} que contenha $T/\{1, \dots, t\}$. O n -torneio transitivo canônico é um caso especial de torneio estrelado, para $s = 1$ e $t = n$. Uma verificação cuidadosa das condições acima mostra que matriz de incidência de um torneio estrelado é da seguinte forma:



Lema 3.1.4 *Torneios estrelados são livres de cone.*

Dem: *Seja \mathcal{T} um torneio estrelado, com (s, t) seus números associados. Já foi observado que se $(s, t) = (1, n)$ então trata-se do torneio transitivo canônico, que é livre de cones. Assumimos então que $1 < s \leq t < n$, e conseqüentemente E_2 é não vazio. De fato, $E_2 = \emptyset \Rightarrow E = E_1 = \{(k, l) \in E : k < l\}$, contradizendo a maximalidade das condições (i) e (ii) da definição, pois o próprio \mathcal{T} seria o torneio transitivo canônico. Os 3-ciclos em \mathcal{T} são as triplas $j, k, l \in T$, tais que*

$$j < s \leq t < l, \quad j < k < l, \quad (l, j) \in E_2.$$

De fato, devido ao axioma (iii), já que $x < y < z$, a disposição das setas é $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$. Além disso, $j < s \leq t < l$. Tome $U = \{x, y, z, w\} \subset T$ com $|U| = 4$. Para mostrar que T/U não é um cone 3-ciclo, começamos mostrando que w não é um vencedor em U . De fato, se $z < w$ então w perde de z pelo axioma (ii). Se $y < w < z$ então o axioma (iv) implica que w perde de y , se $x < w < y$ então novamente o axioma (iv) garante que w perde de x . Finalmente, se $w < x$ então o axioma (iv) implica que w perde de z . Por um argumento similar, w também não é um vencedor em U . Logo T/U não contém vencedor ou perdedor, e não pode ser um cone 3-ciclo, implicando que \mathcal{T} é livre de cones. ■

Um sub-torneio T/U é dito *1-transitivo* se $T/(U \cup \{p\})$ é transitivo para todo $p \in T$. Com esta definição estamos prontos para apresentar o resultado principal desta seção: uma caracterização dos torneios livre de cones através de torneios estrelados.

Teorema 3.1.5 *Um torneio \mathcal{T} é livre de cones se, e somente se, é isomorfo a um torneio estrelado \mathcal{T}' .*

Dem: *Uma das implicações já foi feita no lema anterior. Tome agora \mathcal{T} um n -torneio livre de cones. Se ele é transitivo, então é isomorfo ao torneio transitivo canônico, portanto é estrelado. Assim, assumiremos que \mathcal{T} não é transitivo, ou seja, contém 3-ciclos. Tome T/U um sub-torneio 1-transitivo maximal de \mathcal{T} . Como todo torneio de dois jogadores é transitivo, vale $m := |U| > 0$, e pelo fato de \mathcal{T} não ser transitivo, $m < n$. Reordenando T , podemos assumir que $T/(U \cup \{p\})$ é o torneio transitivo canônico de $m + 1$ jogadores, para todo $p \in T$. Em particular, T/U é transitivo canônico. Tome $s, t \in T$, $s \leq t$, seu vencedor e seu perdedor, respectivamente. Defina os subconjuntos $U_1 = \{1, 2, \dots, t\}$ e $U_2 = \{s, s + 1, \dots, n\}$, e assim segue que s é um vencedor em U_2 e t um perdedor em U_1 .*

Afirmamos que o sub-torneio T/U_1 é transitivo. De fato, se ele contivesse um 3-ciclo $j \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j$ com $1 \leq j < k < l \leq t$, então necessariamente $l < t$, pois como t é um perdedor em U_1 ele não pode fazer parte de nenhum ciclo. Mas então, $T/\{j, k, l, t\}$ é um cone 3-ciclo, o que contradiz a hipótese de que \mathcal{T} é livre de cones. Analogamente, T/U_2 também é transitivo. Ainda, por uma reordenação conveniente em T , podemos assumir que T/U_1 e T/U_2 são transitivos canônicos. Note que esta reordenação mantém fixo o subconjunto U .

Mostraremos agora que (\mathcal{T}, s, t) construídos como acima satisfazem os quatro axiomas da definição de torneio estrelado. Tome $U' = U_1 \cap U_2$, e vale que o sub-torneio T/U' é transitivo. De fato ele é 1-transitivo, pois para todo $p \in T$, temos $U' \cup \{p\}$ é subconjunto de U_1 ou U_2 . Além disso, como por construção $U \subset U_1 \cap U_2$, e T/U é 1-transitivo maximal, donde concluímos que

$$U = U' = \{s, s + 1, \dots, t\}.$$

De fato, T/U_1 é um sub-torneio transitivo maximal de \mathcal{T} . Assumimos que $U_1 \subset U'_1$ e que T/U'_1 é transitivo. Não é difícil ver que $T/(U'_1 \cap U_2)$ é 1-transitivo. Como $U \subset U'_1 \cap U_2$ e T/U é um sub-torneio 1-transitivo maximal, concluímos que $U'_1 = U_1$, provando a maximalidade de T/U_1 . Analogamente, T/U_2 é um sub-torneio transitivo maximal de \mathcal{T} , e sendo assim, \mathcal{T} satisfaz (i) e (ii).

Antes de verificarmos o axioma (iii), observamos que, sem perda de generalidade, toda partida de E_2 pertence a um 3-ciclo. De fato, todos os vértices de E_2 sem ciclo podem ser indutivamente invertidos deixando fixos os conjuntos U , U_1 e U_2 , e reduzindo-se E_2 . Portanto, tome $\{x, y, z\}$ um 3-ciclo em \mathcal{T} , com $x < y < z$. Como U_2 é transitivo vale $x < s$, e como U_1 é transitivo vale $t < z$. Independentemente de y , uma das afirmações " $x, y \in U_1$ " ou " $y, z \in U_2$ " é verdadeira. Como T/U_1 e T/U_2 são canonicamente transitivos, concluímos que

as setas no 3-ciclo são $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$. Note que apenas a última seta da direita representa uma partida em E_2 . Portanto, \mathcal{T} satisfaz o axioma (iii). Finalmente, se $(z, x) \in E_2$ e $z < z'$, considere qualquer $y \in U$. Como x, y, z, z' não pode ser um cone 3-ciclo, z' não pode perder para todos os outros jogadores. Como z' perde de y e z , necessariamente $z' \rightarrow x$ como desejado. Similarmente, se $x' > x$ um argumento similar mostra que $z \rightarrow x'$.

Concluimos que \mathcal{T} é um torneio estrelado. ■

3.1.2 Variedade Bandeira Geométrica e o Teorema de Bustall-Salamon

Consideremos o espaço vetorial n -dimensional complexo \mathbb{C}^n e $p = (p_1, \dots, p_r)$ uma r -upla de números naturais tais que $0 \leq p_1 < \dots < p_r \leq n$. Uma *bandeira (flag)* do tipo p , ou simplesmente um p -flag, é uma r -upla $x = (V_{p_1}, \dots, V_{p_r})$ de subespaços do \mathbb{C}^n tais que

$$V_{p_i} \subseteq V_{p_{i+1}} \text{ e } \dim_{\mathbb{C}} V_{p_i} = p_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}.$$

Assim, um $(1,2)$ -flag é um par da forma (V_1, V_2) formado por uma reta e um plano complexos passando pela origem, de modo que o plano contenha a reta. Quando $p = (0, 1, \dots, n)$ dizemos se tratar de uma *bandeira maximal (full-flag)*. Portanto, um *full-flag* é um *flag* da forma $(V_0 = \{0\}, V_1, \dots, V_{n-1}, V_n = \mathbb{C}^n)$.

Definição 3.1.6 (Variedade Bandeira Geométrica) Chamamos de **variedade bandeira geométrica** complexa maximal (*complex full-flag manifold*) o conjunto

$$IF(n) = \{(V_0, \dots, V_n) : V_i \subseteq V_{i+1} \text{ e } \dim_{\mathbb{C}} V_i = i\}, \quad (3.4)$$

formado por todas as bandeiras maximais complexas.

Note que o espaço projetivo e as *Grassmanianas* complexas são exemplos de variedades bandeira não maximais. De fato é preciso justificar a definição acima e mostrar que $IF(n)$ é realmente uma variedade diferenciável. Para isto, considere o grupo $GL(n, \mathbb{C})$ dos operadores inversíveis do \mathbb{C}^n . Sabemos que $GL(n, \mathbb{C})$ é um grupo de Lie complexo, e age naturalmente sobre $IF(n)$ pela aplicação

$$\Phi : GL(n, \mathbb{C}) \times IF(n) \longrightarrow IF(n)$$

$$(A, (V_0, \dots, V_n)) \mapsto (AV_0, \dots, AV_n)$$

onde AV_i denota a imagem do subespaço V_i pela transformação A , $i = 1, \dots, n$.

Da álgebra linear recordamos que uma transformação linear injetiva leva conjuntos L.I. em conjuntos L.I., e assim $i = \dim_{\mathbb{C}} V_i = \dim AV_i$. Ainda, se $V_i \subseteq V_j$ são subespaços, toda base $\{e_1, \dots, e_{n_i}\}$ de V_i pode ser completada a uma base $\{e_1, \dots, e_{n_i}, f_1, \dots, f_{n_j}\}$ de V_j . Isto assegura que $(AV_0, \dots, AV_n) \in IF(n)$, pois cada A é um isomorfismo e $AV_0 \subseteq AV_2 \subseteq \dots \subseteq AV_n$. Então cada ϕ_A é uma bijeção de $IF(n)$, e de fato trata-se de uma ação de grupo. Esta é uma ação transitiva, pois dados dois pontos quaisquer $(V_0, \dots, V_n), (W_0, \dots, W_n) \in IF(n)$ consideramos $\{e_1\}$ e $\{f_1\}$ bases de V_1 e W_1 , respectivamente. Podemos completá-las a bases $\{e_1, e_2\}$ e $\{f_1, f_2\}$ de V_2 e W_2 e assim, sucessivamente, a bases encaixadas $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{f_1, \dots, f_n\}$ de V_n e W_n . Defina a transformação linear $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ por $A(e_i) = f_i \forall i = 1, \dots, n$. Por construção, A leva base em base, e é portanto um isomorfismo tal que $(AV_0, \dots, AV_n) = (W_0, \dots, W_n)$.

O subgrupo de isotropia em um ponto $(V_0, V_1, \dots, V_n) \in IF(n)$ é por definição

$$H_{(V_0, V_1, \dots, V_n)} = \{A \in \text{Gl}(n, \mathbb{C}) : (AV_0, AV_1, \dots, AV_n) = (V_0, V_1, \dots, V_n)\}.$$

Desse modo, precisamos que $AV_i = V_i$, $\forall i = 1, \dots, n$, para que A seja um de seus elementos. Portanto, se olharmos a matriz do elemento A em bases adequadas como feito acima, ela tem a forma triangular superior

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdot & 0 & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Então $IF(n)$ é a variedade homogênea dada pelo quociente dos grupos de Lie complexos $\text{Gl}(n, \mathbb{C})/B$, onde B é o subgrupo das matrizes triangulares superiores. Analogamente, podemos verificar que a ação natural do subgrupo unitário $U(n) = \{A \in \text{Gl}(n, \mathbb{C}) : A.A^* = A^*.A = 1\}$ também é transitiva, e assim

$$IF(n) = \frac{U(n)}{T},$$

onde $T = \overbrace{U(1) \times \dots \times U(1)}^{n\text{-vezes}}$ é chamado *toro maximal* de $U(n)$. Note que, como T não é subgrupo normal de $U(n)$, $IF(n)$ não é um grupo de Lie.

Fixando o produto interno hermitiano usual $\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^n u_k \overline{v_k}$ em \mathcal{C}^n , escreva

$$L_i = V_{i-1}^\perp \cap V_i, \quad \forall i.$$

Então,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{C}}(V_{i-1}^\perp + V_i) &= \dim_{\mathcal{C}}(V_{i-1}^\perp) + \dim_{\mathcal{C}}(V_i) - \dim_{\mathcal{C}}(V_{i-1}^\perp \cap V_i) = \\ &= n - (i - 1) + i + \dim_{\mathcal{C}}(V_{i-1}^\perp \cap V_i) = n + 1 + \dim_{\mathcal{C}}(V_{i-1}^\perp \cap V_i). \end{aligned}$$

Lembrando que $V_i + V_i^\perp = \mathcal{C}^n$ e $V_{i-1} \subset V_i \Rightarrow V_i^\perp \subset V_{i-1}^\perp$, obtemos

$$V_{i-1}^\perp + V_i = \mathcal{C}^n \Rightarrow \dim_{\mathcal{C}}(V_{i-1}^\perp \cap V_i) = \dim_{\mathcal{C}}(L_i) = 1.$$

Ainda, se $u \in V_{i-1}^\perp \cap V_i$ e $v \in V_{j-1}^\perp \cap V_j$ (com $i < j \Rightarrow j-1 \geq i$), então $v \in V_{j-1}^\perp \Rightarrow v \in V_i^\perp$. Como $u \in V_i$ segue $\langle u, v \rangle = 0$, mostrando que $L_i \perp L_j$ quando $i \neq j$. Então, podemos expressar \mathcal{C}^n como a soma direta ortogonal

$$\mathcal{C}^n = \bigoplus_{i=1}^n L_i, \quad (3.5)$$

e a variedade bandeira geométrica se identifica com o conjunto

$$IF(n) = \{(L_1, L_2, \dots, L_n) : \dim_{\mathcal{C}}(L_i) = 1 \text{ e } i \neq j \Rightarrow L_i \perp L_j\}. \quad (3.6)$$

A álgebra de Lie das matrizes unitárias $U(n)$ é o conjunto das matrizes anti-hermitianas $\mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathcal{C}) : A + A^* = 0\}$. Sua complexificação é dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}(n)^{\mathcal{C}} &= \mathfrak{gl}(n, \mathcal{C}) \approx \text{Hom}(\mathcal{C}^n, \mathcal{C}^n) \approx \text{Hom}\left(\bigoplus_{i=1}^n L_i, \bigoplus_{j=1}^n L_j\right) \approx \\ &\approx \left(\bigoplus_{i=1}^n L_i\right)^* \otimes \left(\bigoplus_{j=1}^n L_j\right) \approx \bigoplus_{i=1}^n (\overline{L_i} \otimes L_i) \oplus \bigoplus_{i < j} [(\overline{L_i} \otimes L_j) \oplus (\overline{L_j} \otimes L_i)] \approx \\ &\approx (\mathfrak{u}(1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{u}(1))^{\mathcal{C}} \oplus \left(\bigoplus_{i < j} \overline{L_i} L_j \oplus \overline{L_j} L_i\right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

e, daqui adiante, justaposição significará produto tensorial.

Denotando $\mathfrak{p}_{ij}^{\mathbb{C}} = \overline{L}_i L_j \oplus \overline{L}_j L_i$, o espaço tangente a $IF(n)$ na identidade é dado por

$$\mathfrak{p} = \bigoplus_{i < j} \mathfrak{p}_{ij} \quad (3.8)$$

onde $\mathfrak{p}_{ij} = \mathfrak{p}_{ij}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{u}(n)$, isto é, a descomplexificação dos espaços $\mathfrak{p}_{ij}^{\mathbb{C}}$. Na representação matricial, temos $\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{u}(1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{u}(1)$, onde

$$\mathfrak{p} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -\overline{a_{12}} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\overline{a_{1n}} & -\overline{a_{2n}} & \dots & 0 \end{array} \right)_{n \times n} : a_{ij} \in \mathbb{C} \right\} \quad (3.9)$$

e cada \mathfrak{p}_{ij} é subespaço formado pelas matrizes $A = (a_{mn}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ tais que $a_{nm} = -\overline{a_{mn}}$ se $k = i$ e $l = j$; e $a_{kl} = 0$ caso contrário.

Do ponto de vista de $IF(n)$ ser um espaço quociente, isto é, dado por classes laterais da forma AT , com $A \in U(n)$, existe a ação natural

$$\Phi : U(n) \times IF(n) \longrightarrow IF(n)$$

$$(A, BT) \longmapsto (AB)T$$

Para cada matriz $A \in U(n)$, a aplicação $\phi_A = \Phi(A, \cdot)$ é um difeomorfismo de $IF(n)$, denotado simplesmente $A : IF(n) \longrightarrow IF(n)$. Para cada elemento $x \in IF(n)$, sua diferencial é denotada $d(A)_x : T_x IF(n) \longrightarrow T_{Ax} IF(n)$.

Seja J uma estrutura quase complexa em $IF(n)$, ou seja, um campo tensorial no fibrado $J : TIF(n) \longrightarrow TIF(n)$ tal que, para cada $x \in IF(n)$,

$$J_x : T_x IF(n) \longrightarrow T_x IF(n)$$

é uma estrutura complexa no espaço tangente. Diremos que J é $U(n)$ -invariante se $J_{Ax} \circ d(A)_x = d(A)_x \circ J_x$, ou equivalentemente

$$J_{Ax} = d(A)_x \circ J_x \circ d(A^{-1})_{Ax} \tag{3.10}$$

para quaisquer $x \in IF(n)$ e $A \in U(n)$. Veremos mais adiante que sua invariância e a transitividade de Φ tornam possível analisarmos apenas seu comportamento no espaço tangente ao elemento neutro \mathbb{T} , onde por simplicidade, será denotada J .

Proposição 3.1.7 *Existe uma correspondência biunívoca entre as estruturas quase complexas $U(n)$ -invariantes J em $IF(n)$, e as estruturas complexas J_0 em $T_{\mathbb{T}}IF(n)$ que comutam com a representação adjunta do estabilizador da ação Φ em \mathfrak{p} .*

Dem: Ver proposição (3.2.12). ■

Cada espaço vetorial \mathfrak{p}_{ij} tem duas estruturas complexas distintas, com auto-espacos determinados por $\overline{L}iL_j$ e $\overline{L}jL_i$, respectivamente. De fato,

$$J(A_{ij}) = J \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & -\overline{a_{ij}} & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \epsilon_{ij}\sqrt{-1}a_{ij} & \dots & 0 \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & -\epsilon_{ij}\sqrt{-1}\overline{a_{ij}} & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\epsilon_{ij} = \{\pm 1\}$.

Borel e Hirzebruch em [2] mostraram que qualquer estrutura quase complexa $U(n)$ -invariante J sobre $IF(n)$ é determinada pela escolha de uma destas estruturas complexas em cada \mathfrak{p}_{ij} . No total, $IF(n)$ possui $2^{\binom{n}{2}}$ estruturas quase complexas invariantes. Portanto, a partir da expressão acima, tais escolhas definem um n-torneio estabelecendo-se:

$$i \rightarrow j \ (i < j) \iff \epsilon_{ij} = 1$$

$$i \leftarrow j \ (i < j) \iff \epsilon_{ij} = -1$$

Claramente, a matriz $\epsilon = (\epsilon_{ij})$ não tem diagonal, tem entradas ± 1 e é anti-simétrica. Reciprocamente, todo torneio de n jogadores define uma estrutura quase complexa invariante J em $IF(n)$ a partir das entradas de sua matriz de incidência. Esta relação fundamental serve de motivação para mostrarmos o teorema principal desta seção.

Como $J^2 = -1$, seus únicos autovalores possíveis são $\pm\sqrt{-1}$. Definimos o *espaço tangente holomorfo* $\mathfrak{p}^{(1,0)}$ e o *espaço tangente anti-holomorfo* $\mathfrak{p}^{(0,1)}$ em $IF(n)$, como os autoespaços de J associados à $+\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$, respectivamente. Equivalentemente

$$\mathfrak{p}^{(1,0)} = \bigoplus_{i \rightarrow j} \bar{L}_i L_j \quad \text{e} \quad \mathfrak{p}^{(0,1)} = \bigoplus_{i \rightarrow j} \bar{L}_j L_i \quad (3.11)$$

Exemplo 17 (O Caso $IF(3)$) Seja \mathcal{T} o 3-torneio transitivo canônico, cuja matriz de incidência e dada por

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O espaço tangente a $IF(3)$ na origem é

$$\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -\bar{a}_{12} & 0 & a_{23} \\ -\bar{a}_{13} & -\bar{a}_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

e, neste caso, a eqci $J_{\mathcal{T}}$ é dada pela expressão

$$J_{\mathcal{T}} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -\bar{a}_{12} & 0 & a_{23} \\ -\bar{a}_{13} & -\bar{a}_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1}a_{12} & \sqrt{-1}a_{13} \\ -\sqrt{-1}\bar{a}_{12} & 0 & \sqrt{-1}a_{23} \\ -\sqrt{-1}\bar{a}_{13} & -\sqrt{-1}\bar{a}_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Desse modo, os espaços tangentes holomorfo e anti-holomorfo são

$$\mathfrak{p}^{(1,0)} = \bar{L}_1 L_2 \oplus \bar{L}_1 L_3 \oplus \bar{L}_2 L_3 \quad \text{e} \quad \mathfrak{p}^{(0,1)} = \bar{L}_2 L_1 \oplus \bar{L}_3 L_1 \oplus \bar{L}_3 L_2. \quad \square$$

Dizemos que uma estrutura quase complexa invariante J em $IF(n)$ é *integrável*, se a variedade $(IF(n), J)$ é uma variedade complexa. Ou seja, admite sistemas de coordenadas locais complexas com mudanças de coordenadas holomorfas. Equivalentemente, cada ponto $x \in IF(n)$ deve possuir uma vizinhança aberta V_x difeomorfa a um aberto $U_x \subseteq \mathbb{C}^r$ ($r \in \mathbb{N}$)

cujo difeomorfismo h tem derivada complexa linear:

$$dh \circ J = J_0 \circ dh, \quad (3.12)$$

onde J_0 é a eqci canônica de $U_x \times \mathbb{C}^r$.

Teorema 3.1.8 (Newlander-Nirenberg) *Uma estrutura quase complexa J em uma variedade diferenciável \mathcal{M} é uma estrutura complexa se, e somente se, satisfaz*

$$[JV, JW] = J[V, JW] + J[JV, W] + [V, W] \quad (3.13)$$

onde V, W são campos de vetores arbitrários em \mathcal{M} e $[\cdot, \cdot]$ seu colchete de Lie.

A Grassmanniana complexa $G_r(\mathbb{C}^n)$ é um exemplo especial de variedade bandeira não maximal. Ela tem estrutura quase-complexa canônica dada pelo 2-torneio transitivo canônico $\mathcal{T}_2: 1 \rightarrow 2$. Uma projeção homogênea

$$\pi : IF(n) = \frac{U(n)}{U(1) \times \dots \times U(1)} \rightarrow \frac{U(n)}{U(r) \times U(n-r)} = G_r(\mathbb{C}^n) \quad (3.14)$$

é obtida colapsando-se o flag maximal $(V_0, \dots, V_r, \dots, V_n) \in IF(n)$ em seu único subespaço r -dimensional $V_r \in G_r(\mathbb{C}^n)$.

Agora estamos prontos para enunciar e provar o teorema principal desta seção.

Teorema 3.1.9 (Burstall-Salamon) *Existe uma correspondência 1-1 entre estruturas quase complexas invariantes J em $IF(n)$ e n -torneios $\mathcal{T}_{(J)}$ satisfazendo:*

- (i) $\mathcal{T}_{(J)}$ é isomorfo ao torneio transitivo canônico se, e somente se, J é integrável;
(ii) São equivalentes:

- $\mathcal{T}_{(J)}$ é forte;
- J não é integrável;
- Não existe uma projeção holomorfa homogênea de $IF(n)$ em uma Grassmanniana complexa.

Dem: Usando a representação matricial dada em (3.9), o cálculo do colchete de Lie em \mathfrak{p} se reduz a calcular o comutador de duas matrizes, obtendo o seguinte resultado:

$$[\bar{L}_i, L_j, \bar{L}_k, L_l] = \begin{cases} 0 & \text{se } i, j, k, l \text{ distintos, ou } j = l \text{ ou } i = k; \\ \bar{L}_i L_l & \text{se } j = k, i \neq l; \\ \bar{L}_i L_i - \bar{L}_j L_j & \text{se } j = k \text{ e } i = l. \end{cases}$$

Agora, supondo primeiramente que J é integrável e a existência do caminho $i \rightarrow j \rightarrow l$, pode-se provar que $J(A_{il}) = \sqrt{-1}A_{il}$. Isto implica que $i \rightarrow l$ em $\mathcal{T}_{(J)}$, e por definição, $\mathcal{T}_{(J)}$ é transitivo.

Reciprocamente, assumindo que $\mathcal{T}_{(J)}$ é transitivo, precisamos mostrar que J satisfaz as equações acima, para todo $i, j, k, l \in \mathcal{T}_{(J)}$. Note que o único caso não trivial surge quando temos o caminho $i \rightarrow j \rightarrow l$. Pela hipótese, resulta que $i \rightarrow l$, ou equivalentemente, $J(A_{ij}) = \sqrt{-1}A_{ij}$ e $J(A_{jl}) = \sqrt{-1}A_{jl}$ implicam $J(A_{il}) = \sqrt{-1}A_{il}$. Este fato fornece a equação (3.13), e conseqüentemente, J é integrável. Logo concluímos que J é integrável se, e somente se, $\mathcal{T}_{(J)}$ é transitivo. Como $\mathcal{T}_{(J)}$ possui n vértices, ele deve ser isomorfo ao torneio transitivo canônico \mathcal{T}_n , o que mostra (i).

Suponhamos agora que $\mathcal{T}_{(J)}$ é integrável, e segue $\mathcal{T}_{(J)}$ é isomorfo a \mathcal{T}_n ; assim temos que $i \rightarrow j$ se, e somente se, $i < j$. Disso, segue-se que se $i \rightarrow j$, então não pode existir caminho da forma $j \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i$. Logo, $\mathcal{T}_{(J)}$ não é forte. Reciprocamente, consideremos, sem perda de generalidade, $i, j \in \mathcal{T}_{(J)}$ com $i \rightarrow j$. Assumindo que $\mathcal{T}_{(J)}$ é não integrável, existirá $l \in \mathcal{T}_{(J)}$ tal que $i \rightarrow j \rightarrow l$ não implica $i \rightarrow l$, conseqüentemente $l \rightarrow i$. Desse modo, obtemos o caminho $j \rightarrow l \rightarrow i$. Pela arbitrariedade de j e i , podemos unir por um caminho qualquer um par de vértices $i, j \in \mathcal{T}_{(J)}$. Portanto, $\mathcal{T}_{(J)}$ é forte. Assim, se estabelece a equivalência dos dois primeiros itens em (ii).

Vamos agora mostrar a equivalência dos dois últimos itens de (ii). Para que a projeção π seja holomorfa com respeito a uma estrutura quase complexa J de $IF(n)$, devemos provar que

$$\partial' \pi(\mathfrak{p}^{(1,0)}) \subseteq T^{(1,0)} G_r(\mathbb{C}^n) \subseteq \bar{V}_r V_r^\perp,$$

isto é,

$$\partial' \pi \left(\bigoplus_{i \rightarrow j} \bar{L}_i L_j \right) \subseteq \bar{V}_r V_r^\perp \approx \bigoplus_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=r+1, \dots, n}} \bar{L}_i L_j.$$

Logo a diferencial $d\pi$ na classe da identidade imersa $\bar{L}_i L_j$ sobre $\bar{V}_r V_r^\perp \subseteq T_0^C G_r(\mathbb{C}^n)$ se, e só se, $i = 1, \dots, r$ e $j = r+1, \dots, n$. (No caso em que $i, j \in \{1, \dots, r\}$ e $i, j \in \{r+1, \dots, n\}$, o espaço $\bar{L}_i L_j$ é imerso em V_r . Então, uma estrutura quase complexa invariante J sobre $IF(n)$ faz π holomorfa se, e somente se, $\mathcal{T}_{(J)}$ é tal que $i \rightarrow j$ quando $i \in \{1, \dots, r\}$ e

$j \in \{r + 1, \dots, n\}$. Logo, existe um epimorfismo de $\mathcal{T}_{(j)}$ em \mathcal{T}_2 dado por $\phi(i) = 1, \forall i \in \{1, \dots, r\}$ e $\phi(j) = 2, \forall j \in \{r + 1, \dots, n\}$. Portanto, $\mathcal{T}_{(j)}$ é não irredutível, e usando a proposição (2.1.1) conclui-se que $\mathcal{T}_{(j)}$ não é forte, como queríamos. ■

3.2 Métricas (1,2)-simpléticas

3.2.1 Caso Geométrico

Para fixar as idéias, vamos fazer uma breve síntese do conteúdo discutido anteriormente. Novamente, considere a variedade bandeira geométrica

$$IF(n) = \frac{U(n)}{U(1) \times \dots \times U(1)} = \frac{U(n)}{\mathbb{T}},$$

e seja $\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{Lie}(U(n))$ a álgebra de Lie das matrizes anti-hermitianas, com a decomposição

$$\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{u}(1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{u}(1). \quad (3.15)$$

Vimos na seção 3.1, que o espaço tangente a $IF(n)$ na origem é o subespaço \mathfrak{p} de $\mathfrak{u}(n)$, formado pelas matrizes com diagonal zero.

Seja $\mathcal{B} = \{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$ a base canônica de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, formada pelas matrizes com 1 na ij -posição e 0 nas demais entradas. Denote

$$\mathfrak{p}_{ij} = (\mathbb{C}E_{ij} + \mathbb{C}E_{ji}) \cap \mathfrak{u}(n), \quad (3.16)$$

onde $\mathbb{C}E_{ij} = \text{span}_{\mathbb{C}} E_{ij}$ é o subespaço unidimensional gerado por cada matriz da base \mathcal{B} . Segue claramente que $\mathfrak{p} = \bigoplus_{i \neq j} \mathfrak{p}_{ij}$. Já vimos que, para introduzir uma estrutura quase complexa invariante J em $IF(n)$, é suficiente exibirmos uma transformação linear $J : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$, com $J^2 = -1$, e que também comute com a representação adjunta do toro maximal \mathbb{T} em \mathfrak{p} . Esta condição implica que $J(\mathfrak{p}_{ij}) = \mathfrak{p}_{ij}$, para todo $i \neq j$, e conseqüentemente, se $J(X_{ij}) = X'_{ij}$ então $X'_{ij} = \epsilon_{ij} \sqrt{-1} X_{ij}$, onde $\epsilon_{ij} = \{\pm 1\}$ e satisfazendo $\epsilon_{ji} = -\epsilon_{ij}$. Esta relação entre a estrutura quase complexa J e a matriz $\epsilon = (\epsilon_{ij})$, que sabidamente determina univocamente um n -torneio $\mathcal{T}_{(J)}$, também será importante para demonstrarmos o teorema principal desta seção.

A complexificação $V = \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ é o subespaço de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ formado pelas matrizes com entradas zero na diagonal, que se decompõe como $V = \bigoplus_{i \neq j} V_{ij}$, onde $V_{ij} = \text{span}_{\mathbb{C}} E_{ij}$. A relação

$$X + \sqrt{-1}Y \mapsto J(X) + \sqrt{-1}J(Y) \quad (3.17)$$

estende naturalmente J a um operador \mathbb{C} -linear na complexificação V , ainda denotado J . Sabemos que seus únicos autovalores são $\{\pm \sqrt{-1}\}$, o que fornece a decomposição usual de V nos autoespaços

$$V^{(1,0)} = \bigoplus \{V_{ij} : \epsilon_{ij} = 1\} \quad \text{e} \quad V^{(0,1)} = \bigoplus \{V_{ij} : \epsilon_{ij} = -1\}, \quad (3.18)$$

para $\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$, respectivamente.

Seja ds^2 uma métrica Riemanniana sobre $IF(n)$, ou seja, uma relação que associa a cada $x \in IF(n)$ um produto interno $ds^2(\cdot, \cdot)_x$ em $T_x IF(n)$. Analogamente às estruturas quase complexas, ds^2 é dita $U(n)$ -invariante se para quaisquer $x \in IF(n)$ e $A \in U(n)$ vale

$$ds^2(X, Y)_x = (d(A)_x X, d(A)_x Y)_{A_x}, \quad \forall X, Y \in T_x IF(n). \quad (3.19)$$

A proposição seguinte nos diz que sua invariância permite que ds^2 seja completamente determinada pelo seu valor na origem, isto é, um produto interno $(\cdot, \cdot)_\Lambda$ no espaço tangente \mathfrak{p} .

Proposição 3.2.1 *Existe uma correspondência biunívoca entre produtos internos invariantes sob a representação adjunta de T em \mathfrak{p} e métricas $U(n)$ -invariantes em $IF(n)$.*

Dem: Ver proposição (3.2.16). ■

Para entendermos tais produtos internos, fixe a *forma de Cartan-Killing* em \mathfrak{p}

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(XY^*) = -\text{tr}(XY), \quad (3.20)$$

neste caso, o produto interno usual de matrizes complexas restrito a \mathfrak{p} . Da álgebra linear, sabemos que qualquer outro produto interno em \mathfrak{p} é da forma $\langle X, Y \rangle_\Lambda = \langle \Lambda X, Y \rangle$, com Λ uma matriz simétrica e positiva definida com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Usando a proposição anterior, o produto interno $(\cdot, \cdot)_\Lambda$ é invariante se, e somente se, os elementos da base $\{\sqrt{-1}(E_{ij} - E_{ji}), E_{ij} + E_{ji}\}$ são autovetores de Λ . Conseqüentemente, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$, vale que $\Lambda(E_{ij}) = \lambda_{ij}E_{ij}$, com $\lambda_{ij} > 0$, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ e $\lambda_{ii} = 0$. Usaremos a notação ds_Λ^2 para indicar a métrica invariante dada pela matriz Λ . A relação

$$(X + \sqrt{-1}Y, Z + \sqrt{-1}W) \mapsto (X, Z)_\Lambda - (Y, W)_\Lambda + \sqrt{-1}\{(X, W)_\Lambda + (Y, Z)_\Lambda\} \quad (3.21)$$

estende naturalmente o produto interno $(\cdot, \cdot)_\Lambda$ a uma forma bilinear simétrica na complexificação V de \mathfrak{p} . Aqui o autoespaço real de dimensão dois \mathfrak{p}_{ij} de Λ , cuja base é $\{\sqrt{-1}(E_{ij} + E_{ji}), E_{ij} - E_{ji}\}$, se estende a um espaço complexo com base $\{E_{ij}, E_{ji}\}$.

Uma classe especial de produtos internos invariantes é dada pelas matrizes Λ satisfazendo

$$\lambda_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} \lambda_{k, k+1}. \quad (3.22)$$

Por exemplo, no caso particular $n = 4$ temos explicitamente

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & (\lambda_{12} + \lambda_{23}) & (\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34}) \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & (\lambda_{23} + \lambda_{34}) \\ (\lambda_{12} + \lambda_{23}) & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} \\ (\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34}) & (\lambda_{23} + \lambda_{34}) & \lambda_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, Λ é definida por uma operação adjunta como se segue. Considere a matriz diagonal com entradas reais

$$H_\Lambda = \text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_n\},$$

com autovalores que são definidos (a menos de constante aditiva) pelas condições

$$\mu_i - \mu_{i+1} = \lambda_{i,i+1}, \quad \forall i = 1, \dots, n-1. \quad (3.23)$$

Então, se Λ satisfaz as condições (3.22), sua ação no conjunto das matrizes triangulares superiores é dada por $\Lambda(E_{ij}) = \text{ad}(H_\Lambda)(E_{ij})$, para $i < j$. Suponha por exemplo que $n = 4$, $i = 1$ e $j = 4$, teremos

$$\begin{aligned} \text{ad}(H_\Lambda)(E_{14}) &= [H_\Lambda, E_{14}] = H_\Lambda E_{14} - E_{14} H_\Lambda = \\ &= \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (\mu_1 - \mu_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Lambda(E_{14}). \end{aligned}$$

Analogamente, $\lambda = -\text{ad}(H_\Lambda)$ nas matrizes triangulares inferiores. As métricas satisfazendo as equações em (3.22) são chamadas *métricas de Borel*.

Lema 3.2.2 *Sejam J e ds_λ^2 , respectivamente, uma estrutura quase complexa e uma métrica em $IF(n)$, ambas $U(n)$ -invariantes. Então ds_λ^2 é hermitiana, isto é*

$$ds_\lambda^2(JX, JY) = ds_\lambda^2(X, Y). \quad (3.24)$$

Dem: *De fato, temos*

$$\begin{aligned} ds_\lambda^2(JE_{ij}, JE_{ij}) &= ds_\lambda^2(\epsilon_{ij}\sqrt{-1}E_{ij}, \epsilon_{ij}\sqrt{-1}E_{ij}) = \\ &= -(\epsilon_{ij})^2(\sqrt{-1})^2 ds_\lambda^2(E_{ij}, E_{ij}) = ds_\lambda^2(E_{ij}, E_{ij}), \end{aligned}$$

pois $\epsilon_{ij} = \{\pm 1\}$. Segue que $ds_\lambda^2(JX, JX) = ds_\lambda^2(X, X)$, e usando a simetria, podemos concluir que ds_λ^2 é Hermitiana por polarização. ■

Considere $\Omega = \Omega_{J,\Lambda}$ a forma Kähler correspondente a $(IF(n), J, ds_\lambda^2)$ dada por

$$\Omega(X, Y) = ds_\lambda^2(X, JY) = -\text{tr}(\Lambda X, JY). \quad (3.25)$$

A invariância de J e ds_λ^2 implicam que Ω também é $U(n)$ -invariante.

Proposição 3.2.3 ([12]) *Seja \mathcal{M} uma variedade quase Hermitiana com estrutura quase complexa J e métrica g . Denote $\Omega(X, Y) = g(X, JY)$ a forma Kähler associada. Então, para quaisquer campos de vetores $X, Y, Z \in \mathcal{M}$ temos*

$$\begin{aligned} 3d\Omega(X, Y, Z) &= X(\Omega(Y, Z)) + Y(\Omega(Z, X)) + Z(\Omega(X, Y)) - \\ &\quad - \Omega([X, Y], Z) - \Omega([Z, X], Y) - \Omega([Y, Z], X). \end{aligned}$$

Quando $\mathcal{M} = IF(n)$, a invariância da forma Kähler unida ao fato de que podemos tomar $X, Y, Z \in \mathfrak{p}$ como campos transladados pela ação de $U(n)$, implicam que os três primeiros termos da igualdade acima se anulam. De fato, trata-se de derivadas direcionais de funções constantes. Portanto,

$$3d\Omega(X, Y, Z) = -\Omega([X, Y], Z) + \Omega([X, Z], Y) - \Omega([Y, Z], X),$$

para a variedade bandeira. Lembre-se que $V = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)}$, e para quaisquer $X, Y, Z \in V^{(1,0)} \cup V^{(0,1)}$ e todo $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, defina o operador $d\Omega^{i,3-i}$ impondo $d\Omega^{i,3-i}(X, Y, Z) = d\Omega(X, Y, Z)$ se ao menos i das três matrizes X, Y, Z estão em $V^{(1,0)}$ e $d\Omega^{i,3-i}(X, Y, Z) = 0$ caso contrário. Por exemplo, se $X \in V^{(1,0)}$ mas $Y, Z \in V^{(0,1)}$ então $d\Omega^{2,1}(X, Y, Z) = 0$. Como $V^{(1,0)}$ e $V^{(0,1)}$ são complementares ortogonais em V , os

operadores $d\Omega^{i,3-i}$ bem definidos, e além disso,

$$d\Omega = d\Omega^{3,0} + d\Omega^{2,1} + d\Omega^{1,2} + d\Omega^{0,3}. \quad (3.26)$$

Ainda, substituindo X, Y, Z por X^T, Y^T, Z^T podemos ver que $d\Omega^{3,0} = -[d\Omega^{0,3}]^*$ e $d\Omega^{1,2} = -[d\Omega^{2,1}]^*$.

Definição 3.2.4 Diremos que a tripla $(IF(n), J, ds^2)$ é **(i,3-i)-simplética** se $d\Omega^{i,3-i} = 0$.

Apresentamos agora o teorema principal desta seção, que nos fornece uma caracterização das métricas (1,2)-simpléticas na variedade bandeira geométrica $IF(n)$ a partir de torneios livre de cones.

Teorema 3.2.5 $(IF(n), J)$ admite uma métrica (1,2)-simplética invariante se, e somente se, o torneio \mathcal{T}_J é livre de cones.

Objetivando demonstrar o teorema anterior, vamos calcular primeiramente as condições para que Λ seja (1,2)-simplética. Denotando $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$ a base canônica de matrizes, podemos calcular diretamente

$$[E_{ij}, E_{rs}] = E_{ij}E_{rs} - E_{rs}E_{ij} = A + B,$$

onde

$$a_{mn} = \sum_{k=1}^n e_{mk}e_{kn} \quad \text{e} \quad b_{pq} = \sum_{k=1}^n e_{pk}e_{kq}.$$

Portanto, $a_{mn} = 0$ se $m \neq i$ ou $n \neq s$; $a_{is} = 1$ se $j = r$ e $a_{is} = 0$ se $j \neq r$. Analogamente, $b_{pq} = 0$ se $p \neq r$ ou $q \neq j$; $b_{rj} = 1$ se $s = i$ e $b_{rj} = 0$ se $s \neq i$, donde concluímos

$$[E_{ij}, E_{rs}] = \delta_{jr}E_{is} + \delta_{si}E_{rj}.$$

Ainda,

$$\begin{aligned} \text{tr}(E_{ij}E_{rs}) &= \text{tr}(\delta_{jr}E_{is}) = \delta_{jr}\text{tr}(E_{is}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{tr}(E_{ij}E_{rs}) = \delta_{jr}\delta_{is}. \end{aligned}$$

Usando estas fórmulas, podemos calcular

$$d\Omega(E_{ii'}, E_{jj'}, E_{kk'}) = \frac{-\sqrt{-1}}{3} \alpha\beta, \quad (3.27)$$

onde

$$\alpha = \delta_{ij'}\delta_{j'k'}\delta_{k'i'} - \delta_{ik'}\delta_{k'j'}\delta_{j'i'} \quad \text{e} \quad \beta = \epsilon_{ii'}\lambda_{i'i'} + \epsilon_{jj'}\lambda_{j'j'} + \epsilon_{kk'}\lambda_{k'k'}.$$

A expressão para α mostra que ele não se anula quando $i = j'$, $j = k'$ e $k = i'$ ou $i = k'$, $k = j'$ e $j = i'$. Desse modo, os valores não nulos de $d\Omega$ são completamente determinados por triplas $\{i, j, k\}$ da forma

$$\{E_{ij}, E_{jk}, E_{ki}\} \quad \text{e} \quad \{E_{ik}, E_{kj}, E_{ji}\}. \quad (3.28)$$

Diremos que a tripla $\{i, j, k\}$ é do tipo (0,3) se um dos conjuntos em (3.28) está contido em $V^{(1,0)}$ ou $V^{(0,1)}$, e do tipo (1,2) caso contrário, isto é, se nenhum dos conjuntos em (3.28) está contido em $V^{(1,0)}$ ou $V^{(0,1)}$.

Lema 3.2.6 *De acordo com as definições acima, temos:*

1. $\{i, j, k\}$ é do tipo (0,3) $\Leftrightarrow \tau/\{i, j, k\}$ é um ciclo.
2. $\{i, j, k\}$ é do tipo (1,2) $\Leftrightarrow \tau/\{i, j, k\}$ transitivo.

Dem: 1. Sabemos que, $\{i, j, k\}$ é uma (0,3)-tripla se, e somente se, $\{E_{ij}, E_{jk}, E_{ki}\}$ ou $\{E_{ik}, E_{kj}, E_{ji}\}$ está contido em $V^{(1,0)}$ ou $V^{(0,1)}$. Temos os casos:

• i.

$$\begin{aligned} \{E_{ij}, E_{jk}, E_{ki}\} \subset V^{(1,0)} &\Leftrightarrow \{E_{ij}, E_{jk}, E_{ki}\} \subset \bigoplus \{V_{jk} : \epsilon_{jk} = 1\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{E_{ij}, E_{jk}, E_{ki}\} \subset \bigoplus \{V_{jk} : j \rightarrow k\} \Leftrightarrow i \rightarrow j, j \rightarrow k \text{ e } k \rightarrow i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i \Leftrightarrow \mathcal{T}/\{i, j, k\} \text{ ciclo.} \end{aligned}$$

• ii. $\{E_{ik}, E_{kj}, E_{ji}\} \subset V^{(1,0)}$ análogo à (i).

• iii.

$$\begin{aligned} \{E_{ij}, E_{jk}, E_{ki}\} \subset V^{(0,1)} &\Leftrightarrow \{E_{ij}, E_{jk}, E_{ki}\} \subset \bigoplus \{V_{jk} : \epsilon_{jk} = -1\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{E_{ij}, E_{jk}, E_{ki}\} \subset \bigoplus \{V_{jk} : k \rightarrow j\} \Leftrightarrow j \rightarrow i, k \rightarrow j \text{ e } i \rightarrow k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow i \rightarrow k \rightarrow j \rightarrow i \Leftrightarrow \mathcal{T}/\{i, j, k\} \text{ ciclo.} \end{aligned}$$

• iv. $\{E_{ik}, E_{kj}, E_{ji}\} \subset V^{(0,1)}$ análogo à (iii).

2. Supondo agora que $\{i, j, k\}$ é uma (1,2)-tripla, também podemos dividir a demonstração em casos, todos análogos ao caso abaixo.

• i. Se $\{E_{ij}, E_{jk}, E_{ki}\} \not\subset V^{(1,0)}$ e $\{E_{ij}, E_{jk}, E_{ki}\} \not\subset V^{(0,1)}$, então existem $\epsilon_{rs} = 1$ e $\epsilon_{st} = -1$. Portanto, sem perda de generalidade, podemos escrever

$$i \rightarrow j \rightarrow k \leftarrow i \Leftrightarrow \mathcal{T}/\{i, j, k\} \text{ transitivo. } \blacksquare$$

Portanto, para verificarmos se uma métrica é (1,2)-simplética, isto é $d\Omega^{(1,2)} = 0$, é suficiente calcular $d\Omega$ nos vetores em (3.28) apenas para subtorneios transitivos $\mathcal{T}/\{i, j, k\}$.

Proposição 3.2.7 *A métrica invariante Λ é (1,2)-simplética se, e somente se, para todo subtorneio $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}/\{i, j, k\}$ transitivo, valer*

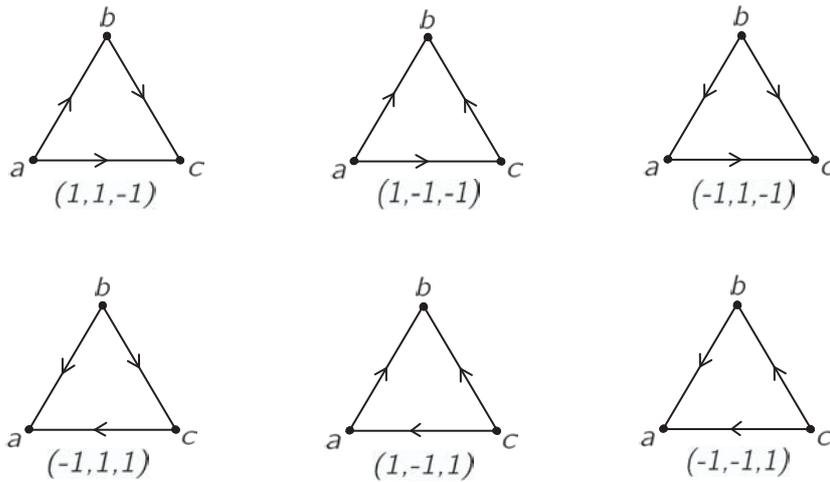
$$\lambda_{ik} = \lambda_{ij} + \lambda_{jk},$$

onde i é vencedor e k perdedor.

Dem: Escreva $\mathcal{T}_3 = \{a, b, c\}$, com $a < b < c$. Sabemos que

$$d\Omega(E_{ab}, E_{bc}, E_{ca}) = \frac{-\sqrt{-1}}{3} \alpha\beta,$$

onde $\beta = \epsilon_{ab}\lambda_{ab} + \epsilon_{bc}\lambda_{bc} + \epsilon_{ca}\lambda_{ca}$. Devemos testar os seis possíveis torneios transitivos com vértices $\{a, b, c\}$, apresentados na figura abaixo, onde a tripla de $\{\pm 1\}$ é $(\epsilon_{ab}, \epsilon_{bc}, \epsilon_{ca})$.



Então no total, temos seis casos análogos aos dois primeiros casos abaixo, apenas mudando os índices a, b e c :

- $a \equiv$ vencedor; $c \equiv$ perdedor: $0 = \lambda_{ab} + \lambda_{bc} - \lambda_{ca} \Rightarrow \lambda_{ca} = \lambda_{ab} + \lambda_{bc} \Rightarrow \lambda_{ac} = \lambda_{ab} + \lambda_{bc}$, pois Λ é simétrica.
- $a \equiv$ vencedor; $b \equiv$ perdedor: $0 = \lambda_{ab} - \lambda_{bc} - \lambda_{ca} \Rightarrow \lambda_{ab} = \lambda_{bc} + \lambda_{ca} \Rightarrow \lambda_{ab} = \lambda_{ac} + \lambda_{cb}$.

Em geral,

$$\lambda_{\text{vencedor,perdedor}} = \lambda_{\text{vencedor,x}} + \lambda_{\text{x,perdedor}} \Leftrightarrow \beta = 0.$$

Pelo lema (3.2.6), $\{i, j, k\}$ é do tipo (1,2) se, e somente se, Λ é (1,2)-simplética. ■

Teorema 3.2.8 *Suponha que $\epsilon = (\epsilon_{ij})$ é a matriz de incidência de uma estrutura quase complexa $U(n)$ -invariante J em $IF(n)$. Assuma que ϵ é estrelada, mas não triangular superior (ou seja, \mathcal{T}_J é um torneio estrelado diferente do torneio transitivo canônico). Então Λ corresponde a uma métrica (1,2)-simplética em $(IF(n), J)$ se, e somente se, existem n valores reais positivos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, tais que para todo $i < j$, temos:*

1.

$$\lambda_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k, \quad \text{se } \epsilon_{ij} = 1;$$

2.

$$\lambda_{ij} = \lambda_n + \sum_{k=1}^i \lambda_k + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k, \quad \text{se } \epsilon_{ij} = -1.$$

Dem: *Partimos da proposição (3.2.7). Assumindo que \mathcal{T}_J é estrelado e não transitivo canônico, seus números associados (s, t) são tais que $1 < s \leq t < n$. Divida N em três subconjuntos $\{1, \dots, s-1\}$, $\{s, \dots, t\}$ e $\{t+1, \dots, n\}$, e podemos ver que a tripla $X = E_{ij}$, $Y = E_{jk}$ e $Z = E_{ki}$ de matrizes na base canônica pode ser colocada em uma das nove regiões retangulares determinadas pelo torneio. A imposição de que $X, Y \in V^{(1,0)}$ e $Z \in V^{(0,1)}$ reduz o problema aos seguintes casos:*

1. $i < j < k < s$;

7. $s \leq i < j < k \leq t$;

2. $i < j < s \leq k \leq t$;

8. $s \leq i < j \leq t < k$;

3. $i < s \leq j < k \leq t$;

9. $s \leq i \leq t < j < k$;

4. $i < j \leq s \leq t < k$;

10. $t < i < j < k$;

5. $i < s \leq j \leq t < k$;

11. $k < s \leq t < i < j$;

6. $i < s \leq t < j < k$;

12. $j < k < s \leq t < i$;

A condição (1) no enunciado do teorema é equivalente a totalidade de condições em Λ que vem dos casos 1-10, enquanto que a condição (2) vem dos casos 11 e 12 acima. ■

É claro que as possíveis métricas (1,2)-simpléticas construídas a partir do teorema (3.2.8) não podem ter todas as entradas $\lambda_{ij} = 1$ se $n \geq 4$. Como consequência, este teorema fornece uma prova independente do seguinte resultado devido a Wolf e Gray:

Corolário 3.2.9 *A métrica de Cartan-Killing em $IF(n)$ não é (1,2)-simplética para qualquer estrutura quase complexa J , se $n \geq 4$.*

Dem: *De fato, basta observar que a métrica de Cartan-Killing é dada por $\Lambda = (\lambda_{ij})$ com $\lambda_{ij} = 1$ se $i \neq j$. ■*

3.2.2 Caso Geral

Agora discutiremos o problema das métricas (1,2)-simpléticas para variedades bandeira mais gerais que a variedade bandeira geométrica $IF(n)$ da subseção anterior. De fato, o caso $IF(n)$ trata apenas da variedade bandeira obtida de álgebras de Lie do tipo \mathcal{A}_I , enquanto que a técnica desta seção trata das demais variedades bandeira de álgebras de Lie do tipo \mathcal{B}_I , \mathcal{C}_I e \mathcal{D}_I . Considere \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples complexa e tome um grupo de Lie G , com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Dada uma subálgebra de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} , denote por Π o conjunto de raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Ela determina a decomposição

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_{\alpha}, \quad (3.29)$$

onde $\mathfrak{g}_{\alpha} = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{h}, [H, X] = \alpha(H)X\}$ é o espaço unidimensional associado à α .

Denote $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a *forma de Cartan-Killing* de \mathfrak{g} e recorde que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não degenerada em \mathfrak{h} . Assim, dado $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, tomamos $H_{\alpha} \in \mathfrak{h}$ definido por $\alpha(\cdot) = \langle H_{\alpha}, \cdot \rangle$, e denotamos por $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ o subespaço real gerado por H_{α} , $\alpha \in \Pi$. Desse modo $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ denota o subespaço real do dual \mathfrak{g}^* gerado pelas raízes. Fixe, daqui em diante, uma base de Weyl de \mathfrak{g} . Esta é uma base $\{H_{\alpha}, X_{\alpha}, X_{-\alpha}\}$ da álgebra \mathfrak{g} , tal que os elementos $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ são tais que $\langle X_{\alpha}, X_{-\alpha} \rangle = 1$ e $[X_{\alpha}, X_{\beta}] = m_{\alpha, \beta} X_{\alpha + \beta}$ com $m_{\alpha, \beta} \in \mathbb{R}$, $m_{-\alpha, -\beta} = -m_{\alpha, \beta}$ e $m_{\alpha, \beta} = 0$ se $\alpha + \beta$ não é uma raiz.

Tome Π^+ uma escolha de raízes positivas e Σ o correspondente conjunto de raízes simples. Se Θ é um subconjunto qualquer de Σ , denotamos $\langle \Theta \rangle$ o conjunto de raízes gerado por Θ e $\langle \Theta \rangle^{\pm} = \langle \Theta \rangle \cap \Pi^{\pm}$. Então temos

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \sum_{\beta \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{\beta} \oplus \sum_{\beta \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\beta}. \quad (3.30)$$

A subálgebra

$$\mathfrak{p}_{\Theta} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^-} \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_{\alpha} \quad (3.31)$$

é chamada *subálgebra parabólica* determinada por Θ . Ela contém a subálgebra

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \quad (3.32)$$

denominada *subálgebra de Borel* do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Escreva

$$\mathfrak{q}_\Theta = \sum_{\beta \in \Pi^+ - (\Theta)} \mathfrak{g}_{-\beta} \quad (3.33)$$

de modo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{q}_\Theta \oplus \mathfrak{p}_\Theta$.

Definição 3.2.10 (Variedade Bandeira Generalizada) *A variedade bandeira (generalizada)*

IF_Θ associada a subálgebra parabólica \mathfrak{p}_Θ é definida como o espaço homogêneo

$$IF_\Theta = G/P_\Theta \quad (3.34)$$

onde $P_\Theta = N_G(\mathfrak{p}_\Theta) = \{g \in G : \text{Ad}(g)\mathfrak{p}_\Theta \subseteq \mathfrak{p}_\Theta\}$ é o normalizador de \mathfrak{p}_Θ em G , um subgrupo fechado.

A condição de G ser semi-simples decorre da necessidade da existência da subálgebra de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} e da decomposição dada em (3.29). Convém notar que, apesar de $GL(n, \mathbb{C})$ e $U(n)$ não serem grupos semi-simples, suas álgebras de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ e $\mathfrak{u}(n)$ admitem subálgebras de Cartan dadas pelas matrizes diagonais [23]. Sabemos que, neste contexto, um subgrupo parabólico [1] é sempre conexo e coincide com seu normalizador $N_G(P_\Theta)$. Isto implica que particularmente que IF_Θ é uma variedade complexa e simplesmente conexa.

Daqui em diante, consideraremos apenas a variedade bandeira maximal IF , obtida fazendo $\Theta = \emptyset$. Neste caso, a subálgebra parabólica coincide com a subálgebra de Borel, e a decomposição dada em (3.30) torna-se

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}. \quad (3.35)$$

Considere \mathfrak{u} a forma real compacta de \mathfrak{g} dada por

$$\mathfrak{u} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}, A_\alpha, \sqrt{-1}S_\alpha : \alpha \in \Pi\},$$

onde $A_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$ e $S_\alpha = X_\alpha + X_{-\alpha}$. Denote por $U = \exp(\mathfrak{u})$ a forma real compacta correspondente de G e escreva $T = U \cap B$, onde T é um *toro maximal* de U . Então a ação canônica de U em IF é transitiva, e conseqüentemente, a variedade bandeira IF se identifica

com a espaço homogêneo U/T . Esta identificação é decorrente do chamado *truque de Weyl* [23], e dela podemos concluir que IF é uma variedade compacta, tendo em vista que é a imagem de U pela projeção canônica $\pi : U \rightarrow U/T$.

Denote $x_0 = 1.T$ a origem de IF , e vamos agora determinar o espaço tangente $T_{x_0}IF$. Se \mathfrak{t} denota a álgebra de Lie do toro T , então

$$\begin{aligned} T = (U \cap B) &\Rightarrow \mathfrak{Lie}(T) = \mathfrak{Lie}(U \cap B) = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{b} = \\ &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{\sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}, A_{\alpha}, \sqrt{-1}S_{\alpha} : \alpha \in \Pi\} \cap \text{span}_{\mathbb{C}}\{H_{\alpha} : \alpha \in \Pi, X_{\alpha} : \alpha \in \Pi^{+}\}. \end{aligned}$$

Analisando esta igualdade, podemos concluir que se algum vetor em \mathfrak{u} , escrito como combinação linear da base acima, tem alguma coordenada não nula num vetor do tipo A_{α} ou $\sqrt{-1}S_{\alpha}$, então ele não pertence a \mathfrak{b} . Isto implica que

$$\mathfrak{t} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\}.$$

Assim sendo, podemos calcular

$$\begin{aligned} T_{x_0}IF &= T_{x_0}(U/T) = \mathfrak{u}/\mathfrak{t} = \\ &= \frac{\text{span}_{\mathbb{R}}\{\sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}, A_{\alpha}, \sqrt{-1}S_{\alpha} : \alpha \in \Pi\}}{\text{span}_{\mathbb{R}}\{\sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\}}, \end{aligned}$$

concluindo que

$$\eta = \text{span}_{\mathbb{R}}\{A_{\alpha}, \sqrt{-1}S_{\alpha} : \alpha \in \Pi\} \quad (3.36)$$

é o espaço tangente a IF na origem. Note que $\eta = \mathfrak{t}^{\perp} = \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{u}_{\alpha}$, onde para cada $\alpha \in \Pi$ fixado, $\mathfrak{u}_{\alpha} = (\mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}) \cap \mathfrak{u} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{A_{\alpha}, \sqrt{-1}S_{\alpha}\}$. A complexificação do espaço vetorial η é dada por

$$\mathfrak{q} = \eta^{\mathbb{C}} = \left(\sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{u}_{\alpha} \right)^{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_{\alpha}, \quad (3.37)$$

e assim obtemos o fibrado tangente complexificado $T^{\mathbb{C}}IF$.

Definiremos agora a representação isotrópica na variedade bandeira IF . Tal representação tem importância similar à representação adjunta nos grupos de Lie.

Definição 3.2.11 (Representação Isotrópica) A **representação isotrópica** da variedade bandeira $IF = U/T$ no espaço tangente $\eta = T_{x_0}IF$ é um homomorfismo

$$\text{Ad}^F : T \longrightarrow \text{Aut}(\eta)$$

definido para cada $t \in T$ por

$$\text{Ad}^F(t)X = dE_t(X), \quad \forall X \in \eta,$$

onde

$$E_t : U/T \longrightarrow U/T$$

$$E_t(x) = tx$$

é a translação à esquerda dada pela ação canônica de U em IF , dE_t denota sua diferencial e $x = vT$, com $v \in U$. O subgrupo $\text{Ad}(T) = \{\text{Ad}^F(t) : t \in T\}$ de $\text{Aut}(\eta)$ é chamado **grupo de isotropia linear**.

Pela redutibilidade de U/T podemos identificar $\text{Ad}^F(t) : T_{x_0}IF \longrightarrow T_{x_0}IF$ com a restrição da representação adjunta $\text{Ad}|_{\eta} : \eta \longrightarrow \eta$. Assim, a representação adjunta de T deixa η e $\eta^c = \mathfrak{q}$ invariantes e, além disso, se decompõe em componentes irredutíveis. Cada componente irredutível é um espaço de raiz \mathfrak{g}_{α} com $\alpha \in \Pi$, e sendo assim, a decomposição em componentes irredutíveis do espaço tangente complexificado é dada por

$$\mathfrak{q} = \bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_{\alpha}. \quad (3.38)$$

Assim como foi feito na anteriormente, diremos agora que uma estrutura quase complexa J em IF é U -invariante, se ela comuta com os diferenciais $d(E_u)$ da ação canônica de U em IF , para todo $u \in U$. Isto é,

$$J_{ux} = dE_u \circ J_x \circ dE_{u^{-1}} \quad (3.39)$$

para todo ponto $x \in IF$.

Proposição 3.2.12 Existe uma correspondência biunívoca entre as estruturas quase complexas U -invariantes J na variedade bandeira maximal IF e as estruturas complexas J_0 em $\eta = T_{x_0}IF$ que comutam com o grupo de isotropia linear, isto é,

$$\text{Ad}^F(t) \circ J_0 = J_0 \circ \text{Ad}^F(t), \quad \forall t \in T.$$

Dem: Considere J uma estrutura quase complexa invariante em IF . Assim, por

definição, sabemos que $dE_u \circ J = J \circ dE_u$, para todo $u \in U$. Particularmente, como $T \subset U$ vale $dE_t \circ J_{x_0} = J_{x_0} \circ dE_t$, para todo $t \in T$ (lembre que $x_0 = 1.T$). Mas pela definição de representação isotrópica, obtemos

$$\text{Ad}^F(t) \circ J_{x_0} = dE_t|_{x_0} \circ J_{x_0} = J_{x_0} \circ dE_t|_{x_0} = J_{x_0} \circ \text{Ad}^F(t)$$

para todo $t \in T$. Então a relação $J \mapsto J_{x_0}$ leva uma estrutura quase complexa U -invariante de IF em uma estrutura complexa de η que comuta com o grupo de isotropia.

Reciprocamente, considere uma estrutura complexa J_0 em η que comuta com o grupo de isotropia. Defina uma estrutura quase complexa J em $IF = U/T$ pondo

$$J_y = dE_u \circ J_0 \circ dE_{u^{-1}},$$

onde $y = u.T$. A fim de mostrar que J está bem definida, considere $y' = u'.T \in IF$ e, pela definição acima, temos $J_{y'} = dE_{u'} \circ J_0 \circ dE_{u'^{-1}}$. Supondo que $y = y'$, existe $t \in T$ tal que $u' = ut$, e portanto

$$\begin{aligned} J_{y'} &= dE_{u'} \circ J_0 \circ dE_{u'^{-1}} = dE_{ut} \circ J_0 \circ dE_{(ut)^{-1}} = \\ &= dE_u \circ \left(dE_t \circ J_0 \circ dE_{t^{-1}} \right) \circ dE_{u^{-1}} = dE_u \circ J_0 \circ dE_{u^{-1}} = J_y. \end{aligned}$$

Além disso, J é invariante pois

$$\begin{aligned} J_{ux} \circ dE_u &= dE_{uv} \circ J_{x_0} \circ dE_{(uv)^{-1}} \circ dE_u = \\ &= dE_u \circ dE_v \circ J_0 \circ dE_{v^{-1}} \circ dE_{u^{-1}} \circ dE_u = \\ &= dE_u \circ dE_x \circ J_0 \circ dE_{x^{-1}} = dE_u \circ J_x. \end{aligned}$$

Além disso, J é uma estrutura quase complexa, pois para todo $y \in IF$ temos

$$\begin{aligned} (J_y)^2 &= \left(dE_u \circ J_0 \circ dE_{u^{-1}} \right) \circ \left(dE_u \circ J_0 \circ dE_{u^{-1}} \right) = \\ &= dE_u \circ (J_0)^2 \circ dE_{u^{-1}} = dE_u \circ (-\text{Id}) \circ dE_{u^{-1}} = -\text{Id}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Desse modo, para determinar todas as possíveis estruturas quase complexas U -invariantes na variedade bandeira IF , é suficiente encontrar todas as possíveis estruturas complexas no espaço tangente η , que comutam com o grupo de isotropia. De fato, a proposição acima assegura que elas estão em correspondência. Esta observação foi fortemente usada na seção anterior.

Lema 3.2.13 J comuta com a representação adjunta de \mathfrak{t} em η .

Dem: Precisamos mostrar que

$$ad(X) \circ J = J \circ ad(X), \quad \forall X \in \mathfrak{t}.$$

Sabemos que $Ad(t) \circ J = J \circ Ad(t)$, para todo $t \in T$. Sendo assim, considere qualquer $X \in \mathfrak{t}$ e defina a curva diferenciável $t(s) = \exp(sX)$ em T passando pela origem com vetor velocidade X . Desse modo, temos

$$ad(X) \circ J = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} Ad(t(s)) \circ J = J \circ \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} Ad(t(s)) = J \circ ad(X),$$

e segue o resultado. ■

Como no caso geométrico, estendemos por linearidade complexa a estrutura quase complexa J ao operador J^C definido no fibrado complexificado $T^C IF$. É imediato verificar que para todo $x \in IF$ vale $(J_x^C)^2 = -\text{Id}$, e conseqüentemente, seus autovalores são $\{+\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}\}$ com autoespaços associados denotados $T^{(1,0)} IF$ e $T^{(0,1)} IF$, respectivamente. Logo,

$$T^C IF = T^{(1,0)} IF \oplus T^{(0,1)} IF. \quad (3.40)$$

Proposição 3.2.14 J deixa invariante os espaços de raízes \mathfrak{g}_α e os espaços \mathfrak{u}_α , com $\alpha \in \Pi$.

Dem: Tome $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, o que permite que para todo $H \in \mathfrak{h}$ tenhamos $[H, X] = \alpha(H)X$. Vamos mostrar que $JX \in \mathfrak{g}_\alpha$. De fato, sabemos que $ad(Y) \circ J = J \circ ad(Y)$, para todo $Y \in \mathfrak{t}$. Em particular, para todo $H \in \mathfrak{h}$ segue

$$[H, JX] = J[H, X] = J \circ \alpha(H)X = \alpha(H) \circ JX.$$

Ainda, considere $X \in \mathfrak{u}_\alpha = \mathfrak{u} \cap (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha})$. Sabendo que $J : \eta \rightarrow \eta$ obtemos que $JX \in \eta \subset \mathfrak{u}$, e usando que $X = X_\alpha + X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ segue $JX = JX_\alpha + JX_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, pela invariância dos \mathfrak{g}_α . Concluimos então $JX \in \mathfrak{u} \cap (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}) = \mathfrak{u}_\alpha$. ■

Consideremos agora a complexificação $\mathfrak{u}_\alpha^C = (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha})$. Como já foi feito anteriormente, podemos estender a estrutura quase complexa $J : \mathfrak{u}_\alpha \rightarrow \mathfrak{u}_\alpha$ à \mathfrak{u}_α^C com autovalores $\{\pm\sqrt{-1}\}$ e autoespaços associados $\mathfrak{u}_\alpha^{(1,0)}$ e $\mathfrak{u}_\alpha^{(0,1)}$, que pela proposição anterior, são invariantes por J . Além disso, temos a decomposição usual $\mathfrak{u}_\alpha^C = \mathfrak{u}_\alpha^{(1,0)} + \mathfrak{u}_\alpha^{(0,1)}$. A proposição anterior, nos diz que \mathfrak{g}_α e $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ são invariantes por J , que desta forma, atua por multiplicação de $\pm\sqrt{-1}$. Já que todos os espaços considerados são unidimensionais, um dos seguintes casos ocorre:

- $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{u}_\alpha^{(1,0)}$ e $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathfrak{u}_\alpha^{(0,1)}$
- $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{u}_\alpha^{(0,1)}$ e $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathfrak{u}_\alpha^{(1,0)}$

Como estas são as duas únicas possibilidades de escrever \mathfrak{u}_α^C , que de certo modo determina as estruturas quase complexas, mostramos que para cada espaço de raízes existem apenas duas estruturas complexas diferentes que comutam com o subgrupo de isotropia. Tendo observado isso, considere agora $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ e temos:

- Se $JX_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{u}_\alpha^{(1,0)}$ então $JX_\alpha = \sqrt{-1}X_\alpha$, visto que $\sqrt{-1}$ é o autovalor associado ao autoespaço $\mathfrak{u}_\alpha^{(1,0)}$. Estes vetores são chamados do tipo (1, 0);
- Se $JX_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{u}_\alpha^{(0,1)}$ então $JX_\alpha = -\sqrt{-1}X_\alpha$, visto que $-\sqrt{-1}$ é o autovalor associado ao autoespaço $\mathfrak{u}_\alpha^{(0,1)}$. Estes vetores são chamados do tipo (0, 1).

A seguinte proposição permite definir completamente uma estrutura quase complexa invariante J na variedade bandeira IF através de um conjunto de sinais $\{\pm 1\}$.

Proposição 3.2.15 *Uma estrutura quase complexa U -invariante J em IF é dada por um conjunto $\{\epsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$ onde $\epsilon_\alpha = \pm 1$, e satisfazendo a propriedade $-\epsilon_\alpha = \epsilon_{-\alpha}$.*

Dem: *Diretamente da observação anterior, temos $JX_\alpha = \epsilon_\alpha \sqrt{-1}X_\alpha$ com $\epsilon_\alpha = \pm 1$, onde $\pm \sqrt{-1}$ são autovalores de J associados aos autovetores X_α e $X_{-\alpha}$, com $\alpha \in \Pi$. Portanto, J é descrita pelo conjunto de sinais $\{\epsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$, dado que estes são geradores do espaço tangente complexificado a IF . Para mostrar que $-\epsilon_\alpha = \epsilon_{-\alpha}$, considere $J(\mathfrak{g}_\alpha) = \epsilon_\alpha \sqrt{-1}\mathfrak{g}_\alpha$ com $\epsilon_\alpha = \pm 1$. Sabendo que $\overline{\mathfrak{g}_\alpha} = -\mathfrak{g}_{-\alpha}$, onde a barra significa conjugação complexa, obtemos*

$$-\epsilon_{-\alpha} \sqrt{-1}\mathfrak{g}_{-\alpha} = J(-\mathfrak{g}_{-\alpha}) = J(\overline{\mathfrak{g}_\alpha}) = \overline{\epsilon_\alpha \sqrt{-1}\mathfrak{g}_\alpha} = \epsilon_\alpha \sqrt{-1}(\mathfrak{g}_{-\alpha}),$$

para todo $\alpha \in \Pi$, donde segue que $-\epsilon_\alpha = \epsilon_{-\alpha}$. ■

Tendo feito a descrição das estruturas quase complexas invariantes, consideraremos agora em IF uma métrica U -invariante. Isto é, uma métrica Riemanniana ds^2 tal que para quaisquer $x \in IF$, $u \in U$ temos

$$ds^2(X, Y)_x = ds^2(dE_u X, dE_u Y)_{uX}, \quad \forall X, Y \in T_x IF. \quad (3.41)$$

Como no caso das estruturas quase complexas, a próxima proposição mostra que uma métrica invariante ds^2 em IF é completamente determinada pelo seu valor na origem, ou seja, por um produto interno $(\cdot, \cdot)_\Lambda$ em η invariante sob a ação adjunta de T .

Proposição 3.2.16 *Existe uma correspondência biunívoca entre produtos internos $Ad(T)$ invariantes em $\eta = T_{x_0}IF$ e métricas Riemannianas U -invariantes em $IF = U/T$.*

Dem: *Considere um produto interno $Ad(T)$ -invariante em η . Então, por definição*

$$(X, Y)_\Lambda = (Ad^F(t)X, Ad^F(t)Y)_\Lambda, \quad \forall X, Y \in \eta \text{ e } t \in T.$$

Defina uma métrica em IF através da relação $ds^2(X, Y)_y = (dE_{u^{-1}}X, dE_{u^{-1}}Y)_\Lambda$ para todo $y \in IF$, com $y = uT$, e todo $X, Y \in T_yIF$. Afirmamos que ds^2 está bem definida e é uma métrica invariante em IF . De fato, considere $y' \in IF$ tal que $y' = y$. Escrevendo $y' = u'T$, existe um elemento $t \in T$ tal que $u' = ut$, e desse modo

$$\begin{aligned} ds^2(X, Y)_{y'} &= (dE_{(u')^{-1}}X, dE_{(u')^{-1}}Y)_\Lambda = \\ &= (dE_{(ut)^{-1}}X, dE_{(ut)^{-1}}Y)_\Lambda = (dE_{t^{-1}}dE_{u^{-1}}X, dE_{t^{-1}}dE_{u^{-1}}Y)_\Lambda = \\ &= (Ad^F(t^{-1})dE_{u^{-1}}X, Ad^F(t^{-1})dE_{u^{-1}}Y)_\Lambda = \\ &= (dE_{u^{-1}}X, dE_{u^{-1}}Y)_\Lambda = ds^2(X, Y)_y. \end{aligned}$$

Para mostrar a invariância, tome $x \in IF$ e escreva $x = vT$, com $v \in U$. Então podemos calcular

$$\begin{aligned} ds^2(dE_uX, dE_uY)_{ux} &= (dE_{(uv)^{-1}}dE_uX, dE_{(uv)^{-1}}dE_uY)_\Lambda = \\ &= (dE_{v^{-1}}(dE_{u^{-1}}dE_u)X, dE_{v^{-1}}(dE_{u^{-1}}dE_u)Y)_\Lambda = \\ &= (dE_{v^{-1}}X, dE_{v^{-1}}Y)_\Lambda = ds^2(X, Y)_x. \end{aligned}$$

Reciprocamente, dada uma métrica U -invariante em IF , defina um produto interno em $\eta = T_{x_0}IF$ por $(X, Y)_\Lambda = ds^2(dE_uX, dE_uY)_u$, para todo $X, Y \in \eta$. Vamos mostrar que este produto interno é $Ad(T)$ invariante. Para isto, basta calcular para todo $t \in T$

$$\begin{aligned} (Ad^F(t)dE_{u^{-1}}X, Ad^F(t)dE_{u^{-1}}Y)_\Lambda &= \\ &= ds^2(dE_uAd^F(t)dE_{u^{-1}}X, dE_uAd^F(t)dE_{u^{-1}}Y)_u = \\ &= ds^2(dE_t(dE_{u^{-1}}X), dE_t(dE_{u^{-1}}Y))_{x_0} = \\ &= (dE_{u^{-1}}X, dE_{u^{-1}}Y)_\Lambda, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Um produto interno satisfazendo as condições da proposição acima tem a forma

$$(X, Y)_\Lambda = -\langle \Lambda X, Y \rangle \quad (3.42)$$

onde $\Lambda : \eta \rightarrow \eta$ positiva definida em relação a forma de Cartan-Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A métrica invariante dada por Λ será denotada ds_Λ^2 . Esta pode ser estendida a uma forma bilinear no fibrado complexificado $T^C IF$, não necessariamente positiva definida, pela seguinte relação:

$$\begin{aligned} ds_\Lambda^2(X + \sqrt{-1}Y, Z + \sqrt{-1}W) &= ds_\Lambda^2(X, Z) - ds_\Lambda^2(Y, W) + \\ &+ \sqrt{-1} [ds_\Lambda^2(X, W) + ds_\Lambda^2(Y, Z)], \end{aligned}$$

onde a extensão de Λ é dada por $\Lambda(X + \sqrt{-1}Y) = \Lambda(X) + \sqrt{-1}\Lambda(Y)$.

Proposição 3.2.17 *Uma métrica U-invariante em IF é totalmente caracterizada por um conjunto de números reais $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$, satisfazendo $\lambda_\alpha > 0$ e $\lambda_\alpha = \lambda_{-\alpha}$, $\forall \alpha \in \Pi$.*

Dem: A invariância do produto interno pelo grupo de isotropia $Ad(T)$ equivale a dizer que os elementos da base canônica $\{A_\alpha, \sqrt{-1}S_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$ são autovetores de Λ , associados ao mesmo autovalor λ_α . Desse modo, podemos calcular no espaço tangente complexificado

$$\begin{aligned} \Lambda(X_\alpha) &= \Lambda\left(\frac{A_\alpha - \sqrt{-1}(\sqrt{-1}S_\alpha)}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\{\Lambda(A_\alpha) - \sqrt{-1}\Lambda(\sqrt{-1}S_\alpha)\} = \frac{1}{2}\{\lambda_\alpha(A_\alpha) - \sqrt{-1}\lambda_\alpha(\sqrt{-1}S_\alpha)\} = \\ &= \frac{\lambda_\alpha}{2}\{A_\alpha - \sqrt{-1}(\sqrt{-1}S_\alpha)\} = \lambda_\alpha X_\alpha, \end{aligned}$$

e desse modo, a métrica é completamente descrita pelo conjunto $\{\lambda_\alpha\}$, com $\alpha \in \Pi$.

Também vale $\lambda_\alpha > 0$, pois

$$\begin{aligned} 0 > \langle \Lambda(A_\alpha), A_\alpha \rangle &= \langle \lambda_\alpha A_\alpha, A_\alpha \rangle = \\ &= \lambda_\alpha \langle X_\alpha - X_{-\alpha}, X_\alpha - X_{-\alpha} \rangle = \\ &= \lambda_\alpha \{ \langle X_\alpha, X_\alpha \rangle + 2\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle + \langle X_{-\alpha}, X_{-\alpha} \rangle \} = \\ &= -2\lambda_\alpha \Rightarrow -\lambda_\alpha < 0. \end{aligned}$$

Finalmente, vamos mostrar que $\lambda_\alpha = \lambda_{-\alpha}$. De fato, calculamos

$$2\lambda_\alpha X_\alpha = \Lambda(2X_\alpha) = \Lambda(A_\alpha - \sqrt{-1}(\sqrt{-1}S_\alpha)) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\Lambda(A_{-\alpha}) - \sqrt{-1}\Lambda(\sqrt{-1}S_{-\alpha}) = -\lambda_{-\alpha}(A_{-\alpha}) - \sqrt{-1}\lambda_{-\alpha}(\sqrt{-1}S_{-\alpha}) = \\
&= \lambda_{-\alpha}(-A_{-\alpha} - \sqrt{-1}(\sqrt{-1}S_{-\alpha})) = 2\lambda_{-\alpha}X_{\alpha},
\end{aligned}$$

e concluímos que $\lambda_{\alpha} = \lambda_{-\alpha}$. ■

Considere agora a tripla $(IF, J = \{\epsilon_{\alpha}\}_{\alpha \in \Pi}, ds_{\Lambda}^2 = \{\lambda_{\alpha}\}_{\alpha \in \Pi})$ e denote $\Omega = \Omega_{J,\Lambda}$ a forma Kähler correspondente, isto é,

$$\Omega(X, Y) = ds_{\Lambda}^2(X, JY) = \langle \Lambda X, JY \rangle,$$

para quaisquer $X, Y \in \eta$. Esta se estende naturalmente a uma forma bilinear simétrica na complexificação \mathfrak{q} de η , que ainda será denotada Ω . Pelas considerações feitas anteriormente, temos

$$\Omega(X_{\alpha}, X_{\beta}) = -\sqrt{-1}\lambda_{\alpha}\epsilon_{\beta}\langle X_{\alpha}, X_{\beta} \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \Pi. \quad (3.43)$$

Lembrando que os X_{α} são vetores em uma base de Weyl, temos $\langle X_{\alpha}, X_{\beta} \rangle = 0$ sempre que $\alpha \neq \beta$. Também $\langle X_{\alpha}, X_{-\alpha} \rangle = 1$, e neste caso

$$\Omega(X_{\alpha}, X_{-\alpha}) = -\sqrt{-1}\lambda_{\alpha}\epsilon_{\alpha}. \quad (3.44)$$

Proposição 3.2.18 *A diferencial $d\Omega(X_{\alpha}, X_{\beta}, X_{\gamma})$ se anula a menos que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Quando isto ocorre,*

$$d\Omega(X_{\alpha}, X_{\beta}, X_{\gamma}) = \frac{\sqrt{-1}}{3}m_{\alpha\beta}(\lambda_{\alpha}\epsilon_{\alpha} + \lambda_{\beta}\epsilon_{\beta} + \lambda_{\gamma}\epsilon_{\gamma}). \quad (3.45)$$

Dem: *Lembre-se da expressão da diferencial dada na proposição (3.2.3)*

$$d\Omega(X, Y, Z) = -\Omega([X, Y], Z) + \Omega([X, Z], Y) - \Omega([Y, Z], X).$$

Substituindo nos vetores da base de Weyl, obtemos

$$\begin{aligned}
&-\Omega([X_{\alpha}, X_{\beta}], X_{\gamma}) + \Omega([X_{\alpha}, X_{\gamma}], X_{\beta}) - \Omega([X_{\beta}, X_{\gamma}], X_{\alpha}) = \\
&= -\Omega(m_{\alpha\beta}X_{\alpha+\beta}, X_{\gamma}) + \Omega(m_{\alpha\gamma}X_{\alpha+\gamma}, X_{\beta}) - \Omega(m_{\beta\gamma}X_{\beta+\gamma}, X_{\alpha}) = \\
&= m_{\alpha\beta}\sqrt{-1}\lambda_{\alpha+\beta}\epsilon_{\gamma}\langle X_{\alpha+\beta}, X_{\gamma} \rangle - m_{\alpha\gamma}\sqrt{-1}\lambda_{\alpha+\gamma}\epsilon_{\beta}\langle X_{\alpha+\gamma}, X_{\beta} \rangle + \\
&\quad + m_{\beta\gamma}\sqrt{-1}\lambda_{\beta+\gamma}\epsilon_{\alpha}\langle X_{\beta+\gamma}, X_{\alpha} \rangle.
\end{aligned}$$

Mas sabemos que $\langle X_{\sigma}, X_{\rho} \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \sigma = -\rho \Leftrightarrow \sigma + \rho = 0$, para todo $\sigma, \rho \in \Pi$. Desse modo, para que os três termos da expressão acima não se anulem, é necessário e suficiente que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Ou seja, a diferencial $d\Omega(X_{\alpha}, X_{\beta}, X_{\gamma}) = 0$ a menos que $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Neste caso, a expressão se reduz a

$$m_{\alpha\beta}\sqrt{-1}\lambda_{\alpha+\beta}\epsilon_\gamma - m_{\alpha\gamma}\sqrt{-1}\lambda_{\alpha+\gamma}\epsilon_\beta + m_{\beta\gamma}\sqrt{-1}\lambda_{\beta+\gamma}\epsilon_\alpha,$$

pois sabemos que $\langle X_\sigma, X_{-\sigma} \rangle = 1$. Usando que $\alpha + \beta = -\gamma$, $\alpha + \gamma = -\beta$ e $\beta + \gamma = -\alpha$, obtemos

$$m_{\alpha\beta}\sqrt{-1}\lambda_{-\gamma}\epsilon_\gamma - m_{\alpha\gamma}\sqrt{-1}\lambda_{-\beta}\epsilon_\beta + m_{\beta\gamma}\sqrt{-1}\lambda_{-\alpha}\epsilon_\alpha.$$

Mas $\alpha + \beta + \gamma = 0$ implica que $m_{\alpha\beta} = m_{\alpha\gamma} = m_{\beta\gamma}$ e $m_{\alpha\gamma} = -m_{\gamma\alpha}$ (veja [10]), e concluímos

$$d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = \frac{\sqrt{-1}}{3}m_{\alpha\beta}(\lambda_\alpha\epsilon_\alpha + \lambda_\beta\epsilon_\beta + \lambda_\gamma\epsilon_\gamma),$$

como queríamos demonstrar. ■

Dizemos que uma tripla de raízes $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ satisfazendo $\alpha + \beta + \gamma = 0$ é uma $(0, 3)$ -tripla da estrutura quase complexa J se $\epsilon_\alpha = \epsilon_\beta = \epsilon_\gamma$. Caso contrário, $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ é dita uma $(1, 2)$ -tripla de J .

Definição 3.2.19 (Variedade (1,2)-simplética) Uma variedade quase Hermitiana (M, J, g) é dita **(1,2)-simplética** (ou quase Kähler) se

$$d\Omega(X, Y, Z) = 0$$

quando um dos campos de vetores X, Y, Z acima é do tipo $(1, 0)$ e os outros são do tipo $(0, 1)$.

Agora, a partir da proposição e das definições anteriores, daremos um critério para decidir quando um par invariante (J, ds_λ^2) torna IF uma variedade $(1, 2)$ -simplética.

Teorema 3.2.20 Um par U -invariante $(J = \{\epsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}, ds_\lambda^2 = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \Pi})$ na variedade bandeira maximal IF é $(1, 2)$ -simplético se, e somente se,

$$\epsilon_\alpha\lambda_\alpha + \epsilon_\beta\lambda_\beta + \epsilon_\gamma\lambda_\gamma = 0 \tag{3.46}$$

para toda $(1, 2)$ -tripla de raízes $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Neste caso, dizemos que a métrica Λ é $(1, 2)$ -simplética com respeito a J .

Dem: Suponha que (J, ds_λ^2) é um par $(1, 2)$ -simplético na variedade bandeira IF , e tome $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ uma $(1, 2)$ -tripla de raízes. Então temos que $\epsilon_\alpha \neq \epsilon_\beta$ e $\epsilon_\alpha \neq \epsilon_\gamma$, e sem perda de

generalidade, vamos assumir $\epsilon_\alpha = 1$ e $\epsilon_\beta = \epsilon_\gamma = -1$. Isto implica que X_α é um vetor do tipo (1,0) e X_β, X_γ são vetores do tipo (0,1). Por hipótese

$$\begin{aligned}d\omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 0 &\Rightarrow \frac{\sqrt{-1}}{3} m_{\alpha\beta} (\epsilon_\alpha \lambda_\alpha + \epsilon_\beta \lambda_\beta + \epsilon_\gamma \lambda_\gamma) = 0 \\ &\Rightarrow \epsilon_\alpha \lambda_\alpha + \epsilon_\beta \lambda_\beta + \epsilon_\gamma \lambda_\gamma = 0,\end{aligned}$$

pois $m_{\alpha\beta} \neq 0$. A recíproca é imediata. ■

Capítulo 4

Aplicações Harmônicas e Holomorfas na Variedade Bandeira

4.1 Holomorfia e f-holomorfia em IF

Tomemos $IF = U/T$ a variedade bandeira maximal associada a $\Theta = \emptyset$ e denote $x_0 = 1.T$ sua origem. Já vimos anteriormente que o espaço tangente complexificado na origem é

$$\mathfrak{q} = (T_{x_0}IF)^c = \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha \leq \mathfrak{g}.$$

Além disso, esta é uma decomposição de \mathfrak{q} em componentes irredutíveis, de modo que

$$\mathfrak{q} = \bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha. \quad (4.1)$$

Dada uma raiz $\alpha \in \Pi$, defina uma distribuição em IF pela relação

$$E_\alpha(k.x_0) := k_*(\mathfrak{g}_\alpha) = d(E_k)_{x_0}(\mathfrak{g}_\alpha), \quad (4.2)$$

que está bem definida, uma vez que $\text{Ad}(k)(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$. Como cada $d(E_k)_{x_0}$ é um difeomorfismo de $T_{x_0}IF$ em $T_{k.x_0}IF$, e a ação de U em IF é transitiva, obtemos

$$(T_xIF)^c = \bigoplus_{\alpha \in \Pi} E_\alpha(x), \quad \forall x \in IF. \quad (4.3)$$

Ainda, este espaço é isomorfo à $\bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$ pela identificação $\mathfrak{g}_\alpha \longleftrightarrow E_\alpha(x)$.

Seja \mathcal{M} uma superfície de Riemann, ou seja, uma variedade complexa 1-dimensional. Particularmente, $\mathcal{M} = \mathcal{M}^2$ é uma variedade diferenciável de dimensão 2, e segue para todo $p \in \mathcal{M}$ que $T_p\mathcal{M} \approx \mathbb{R}^2$. Vamos assumir também que \mathcal{M} é compacta e orientável, e con-

siderar uma aplicação diferenciável $\phi : (\mathcal{M}, J_0) \longrightarrow (\mathbb{F}, J)$. Aqui, $J_0(x, y) = (-y, x)$ é a estrutura complexa canônica do \mathbb{R}^2 (tem o efeito da multiplicação por $\sqrt{-1}$) e $J = \{\epsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$ é uma estrutura quase complexa invariante qualquer em \mathbb{F} , onde $\epsilon_\alpha = \pm 1$ e $\epsilon_{-\alpha} = -\epsilon_\alpha$, para todo $\alpha \in \Pi$. Daqui adiante, (\mathcal{M}, J_0) será denotado simplesmente \mathcal{M} .

Para um dado ponto $p \in \mathcal{M}$, considere a diferencial complexificada

$$(d^c \phi)_p : (T_p \mathcal{M})^c \longrightarrow (T_{\phi(p)} \mathbb{F})^c.$$

Fazendo a decomposição usual $T^c \mathcal{M} = T^{(1,0)} \mathcal{M} \oplus T^{(0,1)} \mathcal{M}$, e lembrando da caracterização dada em (2.9) e (2.10), obtemos por um cálculo direto

$$T_p^{(1,0)} \mathcal{M} \approx \mathcal{C} \quad \text{e} \quad T_p^{(0,1)} \mathcal{M} = 0,$$

donde segue a decomposição de $(d^c \phi)_p$ nas componentes

$$\partial \phi_p := \frac{\partial \phi}{\partial z}(p) : T_p^{(1,0)} \mathcal{M} \longrightarrow T_{\phi(p)}^{(1,0)} \mathbb{F} \quad (4.4)$$

e

$$\partial \bar{\phi}_p := \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) : T_p^{(0,1)} \mathcal{M} \longrightarrow T_{\phi(p)}^{(0,1)} \mathbb{F}. \quad (4.5)$$

Usando a decomposição de $T^c \mathbb{F}$ em componentes irredutíveis, para cada $p \in \mathcal{M}$ temos

$$(d^c \phi)_p \in (T_{\phi(p)} \mathbb{F})^c = \bigoplus_{\alpha \in \Pi} E_\alpha(\phi(p)),$$

onde $E_\alpha(\phi(p)) = \text{span}_{\mathcal{C}}\{X_\alpha(\phi(p))\}$ pode ser interpretado como o subespaço gerado pelo vetor X_α da base de Weyl, mas agora transportado ao ponto $\phi(p) \in \mathbb{F}$, como num referencial. Portanto, para todo $X \in T_p \mathcal{M}$, temos

$$(d^c \phi)_p(X) = \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha(X) \cdot X_\alpha(\phi(p)),$$

onde os $a_\alpha(X)$ são os coeficientes da combinação linear referentes à entrada $\alpha \in \Pi$. Assim podemos definir os operadores

$$\phi_{\epsilon_\alpha \alpha} : \mathcal{M} \times T \mathcal{M} \longrightarrow \bigcup_{\substack{x \in \mathbb{F} \\ \alpha \in \Pi}} E_\alpha(x) \quad (4.6)$$

dados pela relação

$$(p, X) \longmapsto a_\alpha(X) \cdot X_\alpha(\phi(p)) \in E_\alpha(\phi(p)). \quad (4.7)$$

Também podemos pensar tais operadores, para cada $\alpha \in \Pi$, como aplicações $\phi_\alpha : \mathcal{M} \rightarrow E_\alpha$ tomando valores em $E_\alpha(\phi(p))$. Feitas estas considerações, podemos escrever

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(p) = \sum_{\epsilon_\alpha=1} \phi_\alpha(p) \quad (4.8)$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) = \sum_{\epsilon_\alpha=-1} \phi_\alpha(p), \quad (4.9)$$

as componentes da diferencial que pertencem ao fibrado tangente holomorfo e anti-holomorfo de IF , respectivamente.

Vamos agora descrever as aplicações holomorfas no nosso caso particular. De fato, já mostramos anteriormente que uma condição necessária e suficiente para que a aplicação $\phi : (\mathcal{M}, J) \rightarrow (\mathcal{N}, J')$ seja holomorfa é que $\partial \bar{\phi} = 0$. Então, quando $\phi : \mathcal{M} \rightarrow (IF, J)$ e vale a decomposição

$$(d^c \phi)_p = \frac{\partial \phi}{\partial z}(p) + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p),$$

esta condição reescreve-se como $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) = \sum_{\epsilon_\alpha=-1} \phi_\alpha(p) = 0$, para todo $p \in \mathcal{M}$. Mas por construção, isto acontece se, e somente se, todos os coeficientes $\phi_\alpha(p)$ se anulam, quando $\alpha \in \Pi$ com $\epsilon_\alpha = -1$. Equivalentemente, para todo $\alpha \in \Pi$ temos $\phi_\alpha(p) = 0$ ou $\phi_{-\alpha}(p) = 0$, pois $\Pi = \Pi^{(1,0)} \cup \Pi^{(0,1)}$ e $\epsilon_\alpha = 1$ implica $\epsilon_{-\alpha} = -1$. Sendo assim, obtemos a seguinte caracterização.

Teorema 4.1.1 (Eq. de Cauchy-Riemann) *Uma aplicação diferenciável $\phi : \mathcal{M} \rightarrow (IF, J)$ é J -holomorfa em $p \in \mathcal{M}$ se, e somente se, para todo $\alpha \in \Pi$, temos*

$$\phi_\alpha(p) \neq 0 \Rightarrow \phi_{-\alpha}(p) = 0. \quad (4.10)$$

Definição 4.1.2 (f-Estrutura) *Uma f-estrutura em IF é um campo de endomorfismos $\mathcal{F} : TIF \rightarrow TIF$ tal que, para todo ponto $x \in IF$, a aplicação $\mathcal{F}_x : T_x IF \rightarrow T_x IF$ é uma transformação linear tal que $\mathcal{F}_x^3 + \mathcal{F}_x = 0$.*

Observe que toda estrutura quase complexa J em IF é também uma f-estrutura, pois

$$J^2 = -\text{Id} \Rightarrow J^3 = -J \Rightarrow J^3 + J = 0,$$

mas a recíproca não é necessariamente verdadeira. Como no caso das estruturas quase complexas, a invariância de uma f -estrutura \mathcal{F} em IF implica que esta pode ser totalmente descrita por um conjunto de números $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$, onde $f_\alpha \in \{0, \pm 1\}$ e satisfaz $f_{-\alpha} = -f_\alpha$, para todo $\alpha \in \Pi$. De fato, note que agora teremos polinômios característicos da forma $X^3 + X = X(X^2 + 1)$, cujas únicas raízes possíveis são $\{0, \pm\sqrt{-1}\}$.

Definição 4.1.3 (Aplicação Subordinada) Diremos que uma aplicação diferenciável $\phi : (\mathcal{M}, J) \rightarrow (IF, \mathcal{F})$ é **subordinada** à f -estrutura \mathcal{F} se, para todo $\alpha \in \Pi$ tal que $f_\alpha \neq 1$, temos necessariamente $\phi_\alpha \equiv 0$.

Proposição 4.1.4 Uma aplicação diferenciável $\phi : \mathcal{M} \rightarrow (IF, \mathcal{F})$ é \mathcal{F} -holomorfa se, e somente se, é subordinada a \mathcal{F} .

Dem: Por definição, ϕ é \mathcal{F} -holomorfa se, e somente se, $d\phi \circ J = \mathcal{F} \circ d\phi$. Mas, de acordo com Rawnsley [22], isto acontece se, e somente se, $\frac{\partial \phi}{\partial z}(p)$ pertence ao autoespaço de \mathcal{F} associado a $\sqrt{-1}$. Portanto, ϕ é \mathcal{F} -holomorfa se, e somente se,

$$\sum_{f_\alpha=1} \phi_\alpha(p) \in \text{Aut}_{\mathcal{F}}(\sqrt{-1}).$$

Equivalentemente, se $\alpha \in \Pi$ e $f_\alpha \neq 1$ (ou seja, ϕ_α não está no $\sqrt{-1}$ -autoespaço de \mathcal{F}) então $\phi_\alpha(p) = 0$. Ou seja, por definição, ϕ é subordinada à \mathcal{F} . ■

Definição 4.1.5 (f-estrutura Horizontal) Considere uma f -estrutura invariante \mathcal{F} em IF . Defina os subespaços

$$\mathcal{F}_+ = \sum_{\substack{\alpha \in \Pi \\ f_\alpha=1}} \mathfrak{g}_\alpha$$

e

$$\mathcal{F}_- = \sum_{\substack{\alpha \in \Pi \\ f_\alpha=-1}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Dizemos que \mathcal{F} é **horizontal** se $[\mathcal{F}_+, \mathcal{F}_-] \subseteq \mathfrak{p}$.

4.2 Harmonicidade em IF

Seja $\phi : (\mathcal{M}, g) \longrightarrow (IF, ds_\lambda^2)$ uma aplicação diferenciável, onde $\mathcal{M} = \mathcal{M}^2$ é novamente uma superfície de Riemann compacta e orientável. Já sabemos que ds_λ^2 é totalmente descrita pelos escalares $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda_\alpha = \lambda_{-\alpha} > 0$, para todo $\alpha \in \Pi$. Como $\dim \mathcal{M} = 2$, temos a decomposição usual da diferencial

$$d\phi_p = \frac{\partial \phi}{\partial x}(p)dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}(p)dy,$$

onde $\frac{\partial \phi}{\partial x}(p) = d\phi_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial \phi}{\partial y}(p) = d\phi_p\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$ e supomos que $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ é base ortonormal de $T_p\mathcal{M}$ com respeito à métrica g . Lembrando da expressão (2.2) para a norma de Hilbert-Schmidt do diferencial $d\phi_p$, segue

$$\begin{aligned} |d\phi_p|^2 &= \sum_{i=1}^2 ds_\lambda^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(p), \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(p)\right) = \\ &= ds_\lambda^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(p), \frac{\partial \phi}{\partial x}(p)\right) + ds_\lambda^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}(p), \frac{\partial \phi}{\partial y}(p)\right). \end{aligned}$$

Considerando a estrutura quase complexa canônica J_0 em \mathcal{M} , e recordando as seguintes notações do capítulo 2

- $dz = dx + \sqrt{-1}dy$ e $d\bar{z} = dx - \sqrt{-1}dy$,
- $\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)$,

podemos reescrever a expressão acima como

$$|d\phi_p|^2 = ds_\lambda^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}(p), \frac{\partial \phi}{\partial z}(p)\right) + ds_\lambda^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p), \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p)\right). \quad (4.11)$$

Conseqüentemente, a energia de ϕ é dada pela expressão

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \left(\left\| \frac{\partial \phi}{\partial z}(p) \right\|_\lambda^2 + \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) \right\|_\lambda^2 \right) \nu_g. \quad (4.12)$$

Supondo que IF está munida de uma estrutura quase complexa invariante $J = \{\epsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$, e substituindo a decomposição em componentes irredutíveis dada em (4.8) e (4.9), obtemos

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \left[ds_\lambda^2\left(\sum_{\epsilon_\alpha=1} \phi_\alpha(p), \sum_{\epsilon_\alpha=1} \phi_\alpha(p)\right) + ds_\lambda^2\left(\sum_{\epsilon_\alpha=1} \phi_{-\alpha}(p), \sum_{\epsilon_\alpha=1} \phi_{-\alpha}(p)\right) \right] \nu_g.$$

Recordemos que $ds_\lambda^2(\cdot, \cdot) = -\langle \Lambda, \cdot \rangle$ e que os subespaços de raízes \mathfrak{g}_α e \mathfrak{g}_β são ortogonais com respeito a forma de Cartan-Killing, a menos que $\beta = -\alpha$. Também, por construção, para cada $\alpha \in \Pi$ e $x \in IF$, temos $E_\alpha(x)$ isomorfo à \mathfrak{g}_α . Finalmente, usando a simetria de $\Lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$, podemos escrever a expressão acima como

$$\begin{aligned}
E(\phi) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \left[\sum_{\epsilon_\alpha=1} ds_\lambda^2(\phi_\alpha(p), \phi_\alpha(p)) + \sum_{\epsilon_\alpha=1} ds_\lambda^2(\phi_{-\alpha}(p), \phi_{-\alpha}(p)) \right] \nu_g = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\epsilon_\alpha=1} \int_{\mathcal{M}} \left[ds_\lambda^2(\phi_\alpha(p), \phi_\alpha(p)) + ds_\lambda^2(\phi_{-\alpha}(p), \phi_{-\alpha}(p)) \right] \nu_g = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\epsilon_\alpha=1} \left(2 \int_{\mathcal{M}} ds_\lambda^2(\phi_\alpha(p), \phi_\alpha(p)) \nu_g \right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow E(\phi) = \sum_{\substack{\epsilon_\alpha=1 \\ \alpha \in \Pi}} \int_{\mathcal{M}} ds_\lambda^2(\phi_\alpha(p), \phi_\alpha(p)) \nu_g. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Daqui em diante, estaremos interessados em calcular as equações de Euler-Lagrange para aplicações em variedades bandeira. Com esta finalidade, suponha primeiramente que G/H é um espaço homogêneo, dado pelo quociente de um grupo de Lie G por um subgrupo H . Seja a aplicação diferenciável

$$\begin{aligned}
\psi : \mathcal{N} &\longrightarrow G/H \\
p &\longmapsto g(p).H
\end{aligned}$$

onde \mathcal{N} é uma variedade diferenciável, $g(p) \in G$ para todo $p \in \mathcal{N}$ e $x_0 = 1.H$ denota a origem de G/H . Considere perturbações do tipo

$$\psi^t(p) = \exp_G(tq(p)) \cdot \psi(p) = (e^{tq(p)} \cdot g(p)).H,$$

onde $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $q : \mathcal{N} \longrightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{Lie}(G)$ é uma aplicação C^∞ .

Se $X \in \mathfrak{g}$, sabemos que $d(\exp_G)_X : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é dada pela fórmula

$$d(\exp_G)_X = d(E_{e^x})_1 \circ S_X \tag{4.14}$$

onde $S_X : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é a série de potências

$$S_X := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)!} \text{ad}(X)^k = \frac{e^{\text{ad}(X)} - 1}{\text{ad}(X)}.$$

Seja

$$\pi : G \longrightarrow G/H$$

$$g \longmapsto g.H$$

a projeção canônica, e tome $A \in \mathfrak{g}$. Então, $d(\pi)_1 : \mathfrak{g} \longrightarrow T_{x_0}(G/H)$ e temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (e^{tA}.H) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\pi(e^{tA})) = (d(\pi)_1 \circ d(\exp_G)_0).A = \\ &= (d(\pi)_1 \circ \text{Id}_{\mathfrak{g}}).A = d(\pi)_1.A = A. \end{aligned}$$

Denote $x = g.H \in G/H$. Assim, fica bem definido um campo de vetores $\tilde{A} \in \mathcal{C}(T(G/H))$, a saber, o campo de vetores determinado por $A \in \mathfrak{g}$. Mais precisamente

$$\begin{aligned} \tilde{A}(X) = \tilde{A}(g.H) &:= (d(\pi)_g \circ d(D_g)_1).A = d(\pi)_g.A^d(g) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [\pi \circ D_g(h(t))] = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [(h(t)g).H], \end{aligned}$$

onde $h : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow G$ é uma curva diferenciável tal que $h(0) = 1$ e $\frac{dh}{dt} \Big|_{t=0} = A$.

Lema 4.2.1 *Fixe $x = g.H \in G/H$ e considere a aplicação de avaliação $f_x : G \longrightarrow G/H$, que a cada ponto $h \in G$ associa $(hg).H \in G/H$. Considere também o difeomorfismo canônico $g : G/H \longrightarrow G/H$ tal que $g(h.H) = (gh).H$. Nessas condições, para todo $A \in \mathfrak{g}$, vale*

$$d(f_x)_g.A^e(g) = d(g)_x.\tilde{A}(x). \quad (4.15)$$

Dem: *Usando a definição de campo de vetores transladado à esquerda em grupos de Lie, podemos calcular diretamente:*

$$\begin{aligned} (d(f_x)_g \circ d(E_g)_1).A &= d(f_x \circ E_g)_1.A = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [f_x \circ E_g(e^{tA})] = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [f_x(ge^{tA})] = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [(ge^{tA}g).H] = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [(g \circ \pi \circ D_g)(e^{tA})] = \\ &= d(g)_x \circ (d(\pi)_g \circ d(d_g)_1).A = d(g)_x.\tilde{A}(x). \blacksquare \end{aligned}$$

O próximo lema fornece o valor de $d\psi^t$ para cada valor de t fixo.

Lema 4.2.2 *Sejam $p \in \mathcal{N}$ e $v \in T_p\mathcal{N}$. Fixado $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, vale a fórmula*

$$d(\psi^t)_p \cdot v = d(f_{\psi(p)})_{e^{tq(p)}} \circ d(\exp_G)_{tq(p)} \cdot (td(q)_p \cdot v) + d(e^{tq(p)})_{\psi(p)} \circ d(\psi)_p \cdot v. \quad (4.16)$$

Dem: *A derivada é calculada fazendo $\psi(p)$ e $q(p)$ variarem em valores $p \in \mathcal{M}$. Mais precisamente, sabendo que*

$$\psi^t(p) = e^{tq(p)} \cdot \psi(p) = f_{\psi(p)} \circ e^{tq(p)},$$

podemos calcular, usando a regra da cadeia,

$$\begin{aligned} d(f_{\psi(p)} \circ e^{tq(p)}) \cdot v &= \left[d(f_{\psi(p)})_{e^{tq(p)}} + d(e^{tq(p)} \circ \psi(p)) \right] \cdot v = \\ &= d(f_{\psi(p)})_{e^{tq(p)}} \circ d(\exp_G)_{tq(p)} \cdot (td(q)_p \cdot v) + d(e^{tq(p)})_{\psi(p)} \circ d(\psi)_p \cdot v, \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Faça $A = S_{tq(p)}(td(q)_p \cdot v) \in \mathfrak{g}$, e de (4.14) vem

$$A^e(e^{tq(p)}) = d(E_{e^{tq(p)}})_1 \circ S_{tq(p)}(td(q)_p \cdot v) = d(\exp_G)_{tq(p)}(td(q)_p \cdot v).$$

Assim,

$$d(f_{\psi(p)})_{e^{tq(p)}} \circ d(\exp_G)_{tq(p)} \cdot (td(q)_p \cdot v) = d(f_{\psi(p)})_{e^{tq(p)}} \left(A^e(e^{tq(p)}) \right),$$

e usando o lema (4.2.1) obtemos

$$d(f_{\psi(p)})_{e^{tq(p)}} \left(A^e(e^{tq(p)}) \right) = d(e^{tq(p)})_{\psi(p)} \cdot \tilde{A}(\psi(p)).$$

Juntando todas estas informações e o lema (4.2.2), fica demonstrada a seguinte proposição.

Proposição 4.2.3 *Dados $p \in \mathcal{N}$ e $v \in T_p\mathcal{N}$, denote $A = S_{tq(p)}(td(q)_p \cdot v) \in \mathfrak{g}$. Então, vale a seguinte fórmula para o diferencial da aplicação perturbada*

$$d(\psi^t)_p \cdot v = d(e^{tq(p)})_{\psi(p)} \left(\tilde{A}(\psi(p)) + d(\psi)_p \cdot v \right). \quad (4.17)$$

Note que A é função de t , p e v e escrevemos $A = A(t, p, v)$. Também é bom salientar que por abuso de notação, $e^{tq(p)}$ denota o difeomorfismo da ação canônica de G em G/H gerado pelo elemento $e^{tq(p)}$.

Voltando ao nosso caso particular, temos $\mathcal{N} = \mathcal{M}^2$, com métrica g e estrutura quase complexa canônica J_0 . Também, $G/H = U/T = IF$ é a variedade bandeira maximal, munida de uma estrutura quase complexa $J = \{\epsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$ e uma métrica $ds_\lambda^2 = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$, ambas invariantes. Se $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é diferenciável, para todo $p \in \mathcal{M}$, a diferencial complexificada $(d^c \phi)_p$ admite a decomposição usual

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(p) : T_p^{(1,0)} \mathcal{M} \rightarrow T_{\phi(p)}^{(1,0)} IF$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) : T_p^{(1,0)} \mathcal{M} \rightarrow T_{\phi(p)}^{(0,1)} IF.$$

Tomando uma perturbação do tipo $\phi^t(p) = (e^{tq(p)}g(p)).T$, com $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $\phi(p) = g(p).T$, $\forall p \in \mathcal{M}$, podemos reformular a expressão (4.17) e obter o seguinte resultado.

Proposição 4.2.4 *Nas condições anteriores, se $(d^c \phi^t)_p = \frac{\partial \phi^t}{\partial z}(p) + \frac{\partial \phi^t}{\partial \bar{z}}(p)$, então para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, valem as fórmulas:*

1. $\frac{\partial \phi^t}{\partial z}(p) = d(e^{tq(p)})_{\phi(p)} \left(\tilde{B}(\phi(p)) + \frac{\partial \phi}{\partial z}(p) \right)$, onde $B(t, p, v) = S_{tq(p)} \left(t \frac{\partial q}{\partial z}(p) \right) \in \mathfrak{u}$.
2. $\frac{\partial \phi^t}{\partial \bar{z}}(p) = d(e^{tq(p)})_{\phi(p)} \left(\tilde{C}(\phi(p)) + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) \right)$, onde $C(t, p, v) = S_{tq(p)} \left(t \frac{\partial q}{\partial \bar{z}}(p) \right) \in \mathfrak{u}$.

Vamos agora determinar as equações variacionais para o nosso problema.

Proposição 4.2.5 *A energia da aplicação perturbada ϕ^t , $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ é*

$$E(\phi^t) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \left[\left\| \tilde{B}(\phi(p)) + \frac{\partial \phi}{\partial z}(p) \right\|_\lambda^2 + \left\| \tilde{C}(\phi(p)) + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) \right\|_\lambda^2 \right] \nu_g. \quad (4.18)$$

Dem: Para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ temos

$$\begin{aligned} E(\phi^t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \left(\left\| \frac{\partial \phi^t}{\partial z}(p) \right\|_\lambda^2 + \left\| \frac{\partial \phi^t}{\partial \bar{z}}(p) \right\|_\lambda^2 \right) \nu_g = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \left[\left\| d(e^{tq(p)})_{\phi(p)} \left(\tilde{B}(\phi(p)) + \frac{\partial \phi}{\partial z}(p) \right) \right\|_\lambda^2 \right] \nu_g + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \left[\left\| d(e^{tq(p)})_{\phi(p)} \left(\tilde{C}(\phi(p)) + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) \right) \right\|_\lambda^2 \right] \nu_g = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \left[\left\| \tilde{B}(\phi(p)) + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) \right\|_{\Lambda}^2 + \left\| \tilde{C}(\phi(p)) + \frac{\partial \phi}{\partial z}(p) \right\|_{\Lambda}^2 \right] \nu_g.$$

A última igualdade é válida, pois a métrica ds_{Λ}^2 é U -invariante por hipótese. De fato, a própria definição de invariância garante que o difeomorfismo $e^{tq(p)} : IF \rightarrow IF$ é uma isometria. ■

Lema 4.2.6 Para quaisquer funções diferenciáveis $q_i : \mathcal{M}^2 \rightarrow T^{\mathbb{C}}IF$, $i \in \{1, 2\}$, vale a igualdade

$$\int_{\mathcal{M}} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} [q_1(p)], q_2(p) \right\rangle_{\Lambda} \nu_g + \int_{\mathcal{M}} \left\langle q_1(p), \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} [q_2(p)] \right\rangle_{\Lambda} \nu_g = 0. \quad (4.19)$$

Dem: Como já vimos anteriormente, $T\mathcal{M}^2 \approx T^{(1,0)}\mathcal{M}^2$. De fato, faça a correspondência

$$\frac{\partial}{\partial x} \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} \longleftrightarrow -\sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial z},$$

onde $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right)$. Lembrando que $dz = dx + \sqrt{-1}dy$ e $dz \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = 1$ obtemos $d(\sqrt{-1}z) = -\sqrt{-1}dz$, pois

$$-\sqrt{-1}dz \left(\sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial z} \right) = (-\sqrt{-1})\sqrt{-1}dz \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = 1.$$

Desse modo, toda aplicação diferenciável $f : \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaz em $p \in \mathcal{M}^2$,

$$\begin{aligned} d(f)_p &= \frac{\partial f}{\partial x}(p)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p)dy \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(p)dz + \sqrt{-1} \frac{\partial f}{\partial z}(p)d(\sqrt{-1}z) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z}(p)dz - \frac{\sqrt{-1}}{2} \sqrt{-1} \frac{\partial f}{\partial z}(p) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z}(p)dz + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z}(p)dz = \frac{\partial f}{\partial z}(p)dz. \end{aligned}$$

Consideremos agora a aplicação $f(p) = \langle q_1(p), q_2(p) \rangle_{\Lambda} : \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \langle q_1, q_2 \rangle_{\Lambda} = \frac{\partial}{\partial z} \langle q_1, \overline{q_2} \rangle = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} q_1, \overline{q_2} \right\rangle + \left\langle q_1, \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \overline{q_2} \right\rangle = \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} q_1, q_2 \right\rangle_{\Lambda} + \left\langle q_1, \overline{\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} q_2 \right)} \right\rangle = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} q_1, q_2 \right\rangle_{\Lambda} + \left\langle q_1, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} q_2 \right\rangle_{\Lambda}. \end{aligned}$$

Usando o teorema de Stokes,

$$\int_{\mathcal{M}^2} d(f)_p \nu_g = \int_{\partial \mathcal{M}^2} f(p) = 0,$$

pois supomos que \mathcal{M}^2 não tem fronteira, isto é, $\partial \mathcal{M}^2 = \emptyset$. Segue-se então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}^2} d(f)_p \nu_g &= \int_{\mathcal{M}^2} \left[\frac{\partial f}{\partial z}(p) dz \right] \nu_g = \\ &= \int_{\mathcal{M}^2} \left[\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} q_1, q_2 \right\rangle_{\wedge} + \left\langle q_1, \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} q_2 \right\rangle_{\wedge} \right] \nu_g = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{\mathcal{M}^2} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} q_1, q_2 \right\rangle_{\wedge} \nu_g = - \int_{\mathcal{M}^2} \left\langle q_1, \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} q_2 \right\rangle_{\wedge} \nu_g, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Teorema 4.2.7 (Eq. de Euler-Lagrange) Uma aplicação diferenciável $\phi : \mathcal{M} \rightarrow (IF, J, ds_{\lambda}^2)$ é harmônica se, e somente se, valer a igualdade

$$\operatorname{Re} \left[\sum_{\epsilon_{\alpha}=1} \lambda_{\alpha} \left(\nabla_{\bar{z}} \phi_{\alpha}(p) \right) \right] = 0. \quad (4.20)$$

Dem: Escreva $B_t = B(t, p, v)$, $C_t = C(t, p, v)$ e considere a variação à um parâmetro $\phi^t(p)$, com $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Desse modo, usando a notação $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\wedge} = ds_{\lambda}^2(\cdot, \cdot)$, temos a partir da expressão em (4.18),

$$\begin{aligned} E(\phi^t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \left\langle \tilde{B}_t(\phi(p)), \tilde{B}_t(\phi(p)) \right\rangle_{\wedge} \nu_g + \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \left\langle \tilde{B}_t(\phi(p)), \frac{\partial \phi}{\partial z}(p) \right\rangle_{\wedge} \nu_g + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial z}(p), \frac{\partial \phi}{\partial z}(p) \right\rangle_{\wedge} \nu_g + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \left\langle \tilde{C}_t(\phi(p)), \tilde{C}_t(\phi(p)) \right\rangle_{\wedge} \nu_g + \\ &+ \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \left\langle \tilde{C}_t(\phi(p)), \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) \right\rangle_{\wedge} \nu_g + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p), \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) \right\rangle_{\wedge} \nu_g. \end{aligned}$$

Lembre-se que ϕ é harmônica se, e somente se, $\frac{d}{dt} [E(\phi^t)]|_{t=0} = 0$. Portanto, usando a

regra de Leibnitz para derivar as integrais,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [E(\phi^t)] \Big|_{t=0} &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \frac{d}{dt} \left\langle \tilde{B}_t(\phi(p)), \tilde{B}_t(\phi(p)) \right\rangle_{\Lambda} \Big|_{t=0} \nu_g + \\
&+ \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \frac{d}{dt} \left\langle \tilde{B}_t(\phi(p)), \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) \right\rangle_{\Lambda} \Big|_{t=0} \nu_g + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \frac{d}{dt} \left\langle \tilde{C}_t(\phi(p)), \tilde{C}_t(\phi(p)) \right\rangle_{\Lambda} \Big|_{t=0} \nu_g + \\
&+ \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \frac{d}{dt} \left\langle \tilde{C}_t(\phi(p)), \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) \right\rangle_{\Lambda} \Big|_{t=0} \nu_g = \\
&= \int_{\mathcal{M}} \left\langle \frac{d}{dt} [\tilde{B}_t(\phi(p))] \Big|_{t=0}, \tilde{B}_0(\phi(p)) \right\rangle_{\Lambda} \nu_g + \\
&+ \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \left\langle \frac{d}{dt} [\tilde{B}_t(\phi(p))] \Big|_{t=0}, \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) \right\rangle_{\Lambda} \nu_g + \\
&+ \int_{\mathcal{M}} \left\langle \frac{d}{dt} [\tilde{C}_t(\phi(p))] \Big|_{t=0}, \tilde{C}_0(\phi(p)) \right\rangle_{\Lambda} \nu_g + \\
&+ \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \left\langle \frac{d}{dt} [\tilde{C}_t(\phi(p))] \Big|_{t=0}, \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) \right\rangle_{\Lambda} \nu_g,
\end{aligned}$$

pois as derivadas das duas parcelas que não dependem do parâmetro t se anulam. Contudo, note que

$$B_{t=0} = S_{0,q(p)} \left(0, \frac{\partial q}{\partial \bar{z}}(p) \right) = S_0(0) = 0,$$

e analogamente, $C_{t=0} = 0$. Recorde que definimos o campo induzido por $A \in \mathfrak{u}$ em IF como $\tilde{A}(x) = d(\pi)_g \circ d(E_g)_1.A$, onde $x = g.T \in IF$. Desse modo, segue imediatamente que

$$\tilde{B}_0(x) = \tilde{O}(x) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{C}_0(x) = \tilde{O}(x) = 0, \quad \forall x \in IF.$$

Substituindo os valores acima, chegamos à expressão

$$\frac{d}{dt} [E(\phi^t)] \Big|_{t=0} = \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \left\langle \frac{d}{dt} [\tilde{B}_t(\phi(p))] \Big|_{t=0}, \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) \right\rangle_{\Lambda} \nu_g +$$

$$+ \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \left\langle \frac{d}{dt} [\tilde{C}_t(\phi(p))] \Big|_{t=0}, \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) \right\rangle_{\Lambda} \nu_g.$$

Note agora que, escrevendo $\phi(p) = g(p) \cdot T$, e usando a decomposição em série

$$\begin{aligned} \tilde{B}_t(\phi(p)) &= \frac{e^{ad(tq(p))-1}}{ad(tq(p))} \left(t \frac{\partial q}{\partial z}(p) \right) = \\ &= t \frac{\partial q}{\partial z}(p) + \frac{1}{2} ad(tq(p)) \left(t \frac{\partial q}{\partial z}(p) \right) + \dots \\ &= t \frac{\partial q}{\partial z}(p) + t^2 \left[q(p), \frac{\partial q}{\partial z}(p) \right] + \dots \end{aligned}$$

podemos calcular diretamente

$$\frac{d}{dt} [\tilde{B}_t(\phi(p))] \Big|_{t=0} = \frac{\partial q}{\partial z}(p).$$

Analogamente, $\frac{d}{dt} [\tilde{C}_t(\phi(p))] \Big|_{t=0} = \frac{\partial q}{\partial \bar{z}}(p)$. Obtemos assim,

$$\frac{d}{dt} [E(\phi^t)] \Big|_{t=0} = \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \left\langle \frac{\partial q}{\partial z}(p), \frac{\partial \phi}{\partial z}(p) \right\rangle_{\Lambda} \nu_g + \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \left\langle \frac{\partial q}{\partial \bar{z}}(p), \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) \right\rangle_{\Lambda} \nu_g,$$

e usando a igualdade (4.19) do lema anterior,

$$\frac{d}{dt} [E(\phi^t)] \Big|_{t=0} = -\operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \left\langle q(p), \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial \phi}{\partial z}(p) \right\rangle_{\Lambda} \nu_g - \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \left\langle q(p), \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) \right\rangle_{\Lambda} \nu_g,$$

onde $\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}$ e $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}$ são as componentes holomorfa e anti-holomorfa da conexão de Levi-Civita de u^c , respectivamente. Assim sendo, pela expressão acima concluímos que ϕ é holomorfa se, e somente se,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \left\langle q(p), \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial \phi}{\partial z}(p) \right\rangle_{\Lambda} \nu_g &= -\operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \left\langle q(p), \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(p) \right\rangle_{\Lambda} \nu_g \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \left\langle q(p), \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \right\rangle_{\Lambda} \nu_g &= 0 \\ \Leftrightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} &= 0, \end{aligned}$$

pois o campo de vetores $q(p)$ é qualquer. Considerando a decomposição em componentes irredutíveis de $T^c IF$, usamos (4.8) e (4.9), e assim temos ϕ harmônica se, e somente se,

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re} \left[\sum_{\epsilon_\alpha=1} \lambda_\alpha \nabla_{\bar{z}} (\phi_\alpha(p)) \right] = -\operatorname{Re} \left[\sum_{\epsilon_\alpha=1} \lambda_\alpha \nabla_z (\phi_{-\alpha}(p)) \right],$$

pois $\lambda_\alpha = \lambda_{-\alpha}$, para toda raiz $\alpha \in \Pi$. Aqui ∇_z e $\nabla_{\bar{z}}$ denotam as componentes holomorfa e anti-holomorfa da conexão em $T^c IF$, respectivamente. Portanto, se denotarmos

$$A = \sum_{\epsilon_\alpha=1} \lambda_\alpha \nabla_{\bar{z}} (\phi_\alpha(p)) \quad \Rightarrow \quad A^* = \sum_{\epsilon_\alpha=1} \lambda_\alpha \nabla_z (\phi_{-\alpha}(p)),$$

e como $\operatorname{Re}(A) = \operatorname{Re}(A^*)$, concluímos que ϕ é harmônica se, e somente se,

$$2\operatorname{Re}(A) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(A) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left[\sum_{\epsilon_\alpha=1} \lambda_\alpha \nabla_{\bar{z}} (\phi_\alpha(p)) \right] = 0,$$

como queríamos demonstrar. ■

4.3 Aplicações Equi-harmônicas: caso \mathcal{A}_I

Nesta seção construiremos exemplos de famílias de aplicações equi-harmônicas. Apenas consideraremos o caso das variedades bandeira de álgebras de Lie semi-simples complexas do tipo \mathcal{A}_I . O teorema (4.3.1) provado por Black ([3]) é uma importante ferramenta no estudo das aplicações equi-harmônicas, pois nos fornece uma condição suficiente para que uma aplicação $\phi : \mathcal{M}^2 \rightarrow (IF, \mathcal{F})$ seja equi-harmônica, apenas usando propriedades da f-estrutura \mathcal{F} em IF .

Definição 4.3.1 (Aplicação Equi-harmônica) *Uma aplicação $\phi : \mathcal{M} \rightarrow (IF, J, ds_\lambda^2)$ diferenciável é dita equi-harmônica, se ϕ é harmônica para cada métrica invariante ds_λ^2 em IF .*

Teorema 4.3.2 *Suponha que a aplicação diferenciável $\phi : (\mathcal{M}^2, J_0, g) \rightarrow (IF, \mathcal{F}, ds_\lambda^2)$ é subordinada à f-estrutura horizontal \mathcal{F} . Então ϕ é equi-harmônica.*

Em outras palavras, o teorema acima nos diz que as aplicações f-holomorfas horizontais de \mathcal{M} em IF são equi-harmônicas. Os exemplos de aplicações equi-harmônicas apresentados aqui são obtidos através do teorema acima. Isto é, a partir de uma aplicação ϕ , construiremos uma f-estrutura, denotada \mathcal{H}^ϕ , satisfazendo as propriedades do teorema anterior. De fato, seja $\phi : \mathcal{M}^2 \rightarrow (IF, \mathcal{F})$ uma aplicação diferenciável, tome $p \in \mathcal{M}$ e consideremos a decomposição usual da diferencial complexificada

$$(d^c \phi)_p = \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha(p) X_\alpha(\phi(p)). \quad (4.21)$$

Definimos a f-estrutura \mathcal{H}^ϕ associada a ϕ pela seguinte condição:

$$\mathcal{H}_+^\phi := \sum_{a_\alpha(p) \equiv 0} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \forall p \in \mathcal{M}. \quad (4.22)$$

Recorde que, quando IF está munida de uma f-estrutura invariante \mathcal{F} , podemos decompor o espaço tangente complexificado como

$$\begin{aligned} T^c IF &= \text{Aut}_{\mathcal{F}}(\sqrt{-1}) \oplus \text{Aut}_{\mathcal{F}}(-\sqrt{-1}) \oplus \text{Aut}_{\mathcal{F}}(0) \approx \\ &\approx \sum_{f_\alpha=1} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{f_\alpha=1} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \sum_{f_\alpha=0} \mathfrak{g}_\alpha, \end{aligned}$$

ou seja,

$$T^c IF \approx \mathcal{F}_+ \oplus \mathcal{F}_- \oplus \sum_{f_\alpha=0} \mathfrak{g}_\alpha. \quad (4.23)$$

Desse modo, se escrevermos $H^\phi = \{h_\alpha^\phi\}_{\alpha \in \Pi}$, a expressão (4.22) nos diz que $h_\alpha^\phi = 1$ se, e somente se, $a_\alpha(p) \equiv 0$.

Consideremos agora o espaço projetivo complexo $\mathcal{C}P^{n-1}$, isto é, o conjunto de todos os subespaços 1-dimensionais de \mathcal{C}^n . Seja $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}P^{n-1}$ o fibrado vetorial tautológico sobre $\mathcal{C}P^{n-1}$, que pode ser visto como um sub-fibrado do fibrado vetorial trivial n -dimensional $\mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}P^{n-1}$. De fato, para cada ponto $x \in \mathcal{C}P^{n-1}$, a fibra \mathcal{T}_x^{-1} é um subespaço 1-dimensional de \mathcal{C}^n passando por x . Já vimos que a variedade bandeira maximal $IF = IF(n)$ pode ser vista como o conjunto de n -uplas (L_1, L_2, \dots, L_n) tais que, cada L_i é um subespaço 1-dimensional de \mathcal{C}^n e $L_i \perp L_j$ se $i \neq j$. Portanto, cada aplicação $\phi : \mathcal{M}^2 \rightarrow IF(n)$ pode ser descrita por uma n -upla $(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n)$ de sub-fibrados de $\mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}P^{n-1}$, ortogonais dois a dois e tais que a soma direta é todo \mathcal{C}^n . De agora em diante, faremos a identificação

$$\phi := (\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n),$$

onde cada $\Pi_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}P^{n-1}$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Cada sub-fibrado ϕ de $\mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}P^{n-1}$ possui uma métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$ e uma conexão ∇_ϕ , induzidas pelo produto interno hermidiano usual e a conexão de Levi-Civita em \mathcal{C}^n , respectivamente. Mais explicitamente,

$$\langle X, Y \rangle_\phi := \langle X, Y \rangle, \quad (4.24)$$

e

$$(\nabla_\phi)_Z X := \Pi_\phi \left(\frac{\partial X}{\partial Z} \right), \quad (4.25)$$

onde $\Pi_\phi : \mathcal{C}^n \rightarrow \phi$ denota a projecção ortogonal usual. Ainda, para cada aplicação $\phi = (\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n) : \mathcal{M}^2 \rightarrow IF(n)$, sua segunda forma fundamental é dada por

$$A_Z^{ij} := \Pi_i \frac{\partial \Pi_j}{\partial Z} : \Pi_j \rightarrow \Pi_i. \quad (4.26)$$

Seja agora uma aplicação $h : \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathcal{C}P^{n-1}$ holomorfa e não degenerada. Definimos suas *curvas associadas* $\theta_k : \mathcal{M}^2 \rightarrow G_k(\mathcal{C}^n)$ como

$$\theta_k(p) := h(z) \wedge \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}(p) \wedge \dots \wedge \frac{\partial^{(k-1)} h}{\partial \bar{z}^{k-1}}(p),$$

para cada $k \in \{1, \dots, n\}$. Então, tomando $\Pi_k := \theta_k \cap \theta_{k-1}^\perp$, construímos uma aplicação $\psi = (\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n)$ de \mathcal{M}^2 em IF . Temos

$$\begin{aligned} (d^c\psi)_p &:= \frac{\partial\psi}{\partial z} = \left((\Pi_1 + \dots + \Pi_n) \frac{\partial\Pi_1}{\partial z} (\Pi_1 + \dots + \Pi_n), \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, (\Pi_1 + \dots + \Pi_n) \frac{\partial\Pi_n}{\partial z} (\Pi_1 + \dots + \Pi_n) \right) = \\ & (A_z^{12}, A_z^{23}, \dots, A_z^{(n-1)n}) = \sum_{\alpha \in \Pi} a_{\alpha(p)} X_\alpha. \end{aligned}$$

Portanto, $a_\alpha = 0$ se $\alpha \in \Sigma$, onde $\Sigma = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{(n-1)n}\}$ é um sistema simples de raízes de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Mas ψ é holomorfa, pois se $a_\alpha \neq 0$ então $\alpha \in \Sigma$, o que implica $-\alpha \notin \Sigma$, e portanto, $a_{-\alpha} \equiv 0$. Definindo a f-estrutura associada a ψ como em (4.22), temos que \mathcal{H}^ψ é horizontal devido ao fato de que, se α, γ e $\alpha + \gamma$ estão em Π e $a_\alpha \neq 0$, então $\alpha \in \Sigma$. Portanto, $\alpha + \gamma \notin \Sigma$ e assim $a_{\alpha+\gamma} = 0$. Por outro lado, ψ é subordinada a \mathcal{H}^ψ pois se $\alpha \in \Pi$ é tal que $h_\alpha^\psi \neq 1$, então $\alpha \notin \Sigma$, o que implica $a_\alpha = 0$.

Desse modo, usando o teorema (4.3.1), concluímos que

$$\psi = (\Pi_\alpha)_{\alpha \in \Pi} : \mathcal{M}^2 \longrightarrow IF(n)$$

é uma aplicação equi-harmônica. Cada aplicação construída desta forma é chamada de *referencial holomorfo-horizontal*.

Exemplo 18 (Aplicação de Veroneze) Considerando $\mathcal{S}^2 = \mathbb{C}P^1 \approx \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a esfera de Riemann, definimos a aplicação de Veroneze $h : \mathcal{S}^2 \longrightarrow \mathbb{C}P^2$ pela relação

$$z \longmapsto [(1, z, z^2)], \text{ se } z \neq \infty$$

e $h(\infty) = [(0, 0, 1)]$. Então $\frac{\partial h}{\partial z}(z) = [(0, 1, 2z)]$ e $\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}(z) = [(0, 0, 2)]$, donde obtemos as curvas associadas

- $\theta_1(z) = h(z) = [(1, z, z^2)],$
- $\theta_2(z) = h(z) \wedge \frac{\partial h}{\partial z}(z) = [(1, z, z^2)] \wedge [(0, 1, 2z)],$
- $\theta_3(z) = h(z) \wedge \frac{\partial h}{\partial z}(z) \wedge \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}(z) = [(1, z, z^2)] \wedge [(0, 1, 2z)] \wedge [(0, 0, 2)].$

Neste caso, a aplicação $\psi = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) : \mathcal{S}^2 \longrightarrow (IF(3), \mathcal{F}, ds_\lambda^2)$ dada pelas coordenadas

$$\Pi_1 = \frac{h}{\langle h, h \rangle}, \quad \Pi_2 = \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\langle \frac{\partial h}{\partial z}, h \rangle}{\langle h, h \rangle} \cdot h \quad \text{e} \quad \Pi_3 = \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{\langle \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}, h \rangle}{\langle h, h \rangle} \cdot h - \frac{\langle \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}, \frac{\partial h}{\partial z} \rangle}{\langle \frac{\partial h}{\partial z}, \frac{\partial h}{\partial z} \rangle} \cdot \frac{\partial h}{\partial z},$$

é f -holomorfa e equi-harmônica. Note que neste caso, determinar as Π_k , $k = 1, 2, 3$, tem o mesmo efeito de aplicar o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt no conjunto formado pelos vetores h , $\frac{\partial h}{\partial z}$ e $\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$. \square

Referências Bibliográficas

- [1] ALEKSEEVSKY, D. V., *Flag Manifolds*, <http://www.esi.ac.at> n.º415. *Ou Zb. Rad. Mat. Inst. Beograd*, **14**, (1997), 3-35.
- [2] BOREL, A., HIRZEBRUCH, F., *Characteristic Classes and Homogeneous Spaces*, I. *Am. J. Math.*, **80**, (1958), 458-538.
- [3] BLACK, M., *Harmonic Maps into Homogeneous Spaces*, *Pitman Res. Notes in Math*, **80**, (1991).
- [4] BURSTALL, F. E., SALAMON, S. M., *Tournaments, Flags and Harmonic Maps*, *Math. Ann.*, **277**, (1987), 249-265.
- [5] CARMO, M. P. do, *Geometria Riemanniana*, 3.^a Edição, Projeto Euclides - IMPA, (2005).
- [6] CHEEGER, J., EBIN, D., *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North Holland, Amsterdam, (1975).
- [7] COHEN, N., NEGREIROS, C. J. C., SAN MARTIN, L. A. B., *Description of (1,2)-Symplectic Metrics on Flag Manifolds*, *Contemporary Mathematics*, **288**, (2001), 300-3004.
- [8] COHEN, N., NEGREIROS, C. J. C., SAN MARTIN, L. A. B., *(1,2)-Symplectic Metrics, Flag Manifolds and Tournaments*, *Bull. London Math. Soc.*, **34**, (2002), 641-649.
- [9] ELLS, J., LAMAIRE, L., *Selected Topics in Harmonic Maps*, C.B.M.S. Regional Conference Series 50, American Mathematical Society, (1983).
- [10] HELGASON, S., *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, (1978).
- [11] KOBAYASHI, S., NOMIZU, K., *Foundations of Differential Geometry*, vol. 1, Interscience Publishers, (1996).
- [12] KOBAYASHI, S., NOMIZU, K., *Foundations of Differential Geometry*, vol. 2, Interscience Publishers, (1996).

- [13] J. SILVA, R.C., *Estruturas Quase Hermitianas Invariantes em Espaços Homogêneos de Grupos Semi-simples*, Tese de Doutorado, IMECC-Unicamp, (2003).
- [14] LEDUÍNO, L., *Aplicações Harmônicas e Estabilidade em Variedades Bandeira*, Dissertação de Mestrado, IMECC-Unicamp, (2000).
- [15] MCDONALD, I. G., *Algebraic Structures of Lie Groups*, Proc. of the SRC/LMS Research Symposium on Representation of Lie Groups, Cambridge University Press, (1979), 91-150.
- [16] MO, X., NEGREIROS, C. J. C., *Tournaments and Geometry of Full Flag Manifolds*, Proc. Encontro Brasileiro de Topologia, World Scientific, (2000).
- [17] MO, X., NEGREIROS, C. J. C., *(1,2)-Symplectic Structures on Flag Manifolds*, Tôhoku Math. J., **52**, (2000), 271-282.
- [18] MOON, J. W., *Topics on Tournaments*, Holt, Reinhart and Winston, (1968).
- [19] NEGREIROS, C. J. C., *Some Remarks about Harmonic Maps into Flag Manifolds*, Indiana Univ. Math. Journal **37**, (1988), 617-636.
- [20] PAREDES, M., *Aspectos da Geometria Complexa das Variedades Bandeira*, tese de doutorado, IMECC-Unicamp, (2000).
- [21] PAREDES, M., *Families of (1,2)-Symplectic Metrics on Flag Manifolds*, Int. J. Math. Math. Sci., **29**, (2002), 651-664.
- [22] RAWNSLEY, J., *f-structures, f-twistor spaces and harmonic maps*, in Geometry Seminar "Luigi Bianchi", II, 1984, Lecture Notes in Mathematics, **1164**, (1985).
- [23] SAN MARTIN, L. A. B., *Álgebras de Lie*, Editora Unicamp, (1999).
- [24] SAN MARTIN, L. A. B., *Grupos de Lie*, Versão Preliminar, (2006).
- [25] SAN MARTIN, L. A. B., NEGREIROS, C. J. C., *Invariant Almost Hermitian Structures on Flag Manifolds*, Advances in Mathematics **178**, (2003), 277-310.
- [26] SAN MARTIN, L. A. B., NEGREIROS, C. J. C., *Stability Properties of Holomorphic Maps on Flag Manifolds*, Versão Preliminar, IMECC-Unicamp, (2006).
- [27] SANTOS, E. C. F. dos, *Métricas de Einstein em Variedades Bandeira*, tese de doutorado, IMECC-Unicamp, (2005).