

EQUAÇÕES DE HILL EM COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA: ALGUMAS APLICAÇÕES

MARCELO CRISTINO GAMA

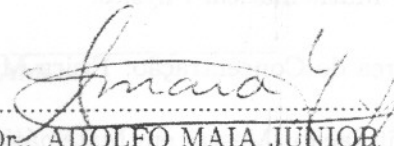
IMECC-UNICAMP

2006

Equações de Hill em Cosmologia Inflacionária: Algumas Aplicações

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Marcelo Cristino Gama e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 02 de maio de 2006


Prof. Dr. ADOLFO MAIA JÚNIOR
Orientador

Banca Examinadora
Prof. Dr. Adolfo Maia Júnior
Prof. Dr. Luís Raul Weber Abramo
Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Júnior

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada.

410124002

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Gama, Marcelo Cristino

G14e Equações de Hill em cosmologia inflacionária: algumas aplicações
/ Marcelo Cristino Gama -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador: Adolfo Maia Júnior

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais. 2. Cosmologia. 3. Física matemática. I.
Maia Júnior, Adolfo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Hill's equation in inflationary cosmology: some applications

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Differential equations. 2. Cosmology. 3.
Mathematical physics

Área de concentração: Física Matemática

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Adolfo Maia Júnior (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Luís Raul Weber Abramo (IF-USP)
Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Júnior (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 02/05/2006

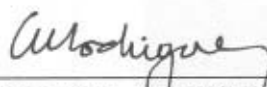
Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 02 de maio de 2006 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). ADOLFO MAIA JÚNIOR



Prof. (a). Dr (a). WALDIR ALVES RODRIGUES JÚNIOR



Prof. (a). Dr (a). LUIS RAUL WEBER ABRAMO

Agradecimentos

Agradeço a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho, em especial ao Prof. Adolfo Maia, que se mostrou muito mais do que um orientador, um verdadeiro amigo.

Ao Prof. Waldyr Rodrigues que além de merecer todo meu respeito e admiração pelo grande mestre e pesquisador que é, me mostrou que Física Teórica é muito mais que um conjunto de cálculos e demonstrações, apresentando a “filosofia da coisa” .

Ao Prof. Jayme Vaz, que além de ter me “suportado” por quatro semestres seguidos durante a graduação (foi o melhor professor que tive nessa época), ainda encontrou tempo para ser meu co-orientador.

À Profa. Carola Dobrigkeit Chinellato, pela rigorosa correção e por ser a professora que é, sempre preocupada com o bem-estar acadêmico e pessoal dos alunos.

Ao Prof. Raul Abramo, cujas críticas foram decisivas para o andamento deste trabalho.

Ao pessoal da Secretaria, em especial à Dna. Fátima, que me deu os devidos “puxões de orelha” não me deixando esquecer de nada.

Aos meus amigos, que tanto insistiram para que eu tomasse um cafezinho para espantar o sono (que me acompanha 24h por dia), e que ainda não tiveram a sorte de me convencer. Em especial agradeço ao amigo Gustavo do Amaral Valdivieso, companheiro de discussões acaloradas sobre Física e Matemática, ao Sérgio Dias Campos que muito contribuiu com a leitura, dicas e revisões, e ao Márcio Lanfredi, que me convenceu a continuar quando eu já havia desistido de tudo. Sem sua insistência este trabalho não teria sequer começado.

À minha atual fonte de inspiração, Camila Sayuri, que sempre encontra a palavra certa nos momentos de aflição.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a aplicação das Equações de Hill na Cosmologia Inflacionária, buscando informações a respeito das bandas de ressonância dessas equações e sobre a produção de partículas no Universo pós-inflacionário. Para isto estudamos as Equações de Hill e dois de seus casos particulares, as Equações de Mathieu e Lamé, suas bandas de estabilidade e ressonância. Analisamos o coeficiente de Floquet, que regula a determinação dessas bandas e apresentamos alguns métodos de cálculo desse coeficiente. Estudamos alguns modelos cosmológicos: o Modelo Cosmológico Padrão, o Modelo Inflacionário e o Modelo Caótico. Apresentamos alguns métodos de reconstrução do potencial do Inflaton a partir de informações sobre a configuração atual do Universo. Por fim, apresentamos nossa contribuição original com alguns teoremas sobre as Equações de Hill e mostramos como eles podem ser usados para a reconstrução do Potencial Inflacionário.

Abstract

The objective of this work is to study Hill's Equation in the Inflationary Cosmology context, searching for information about their resonance bands and about the particle production in the Universe after inflation. For this, we study the Hill's Equation and two of their particular cases, namely the Mathieu's and Lamé's Equations, their stability and resonance bands. We analyse the Floquet's coefficient, which controls the determination of these bands and we show some methods to calculate this coefficient. We also study some cosmological models: the Standard Cosmological Model, the Inflationary Model and the Chaotic Model. We show some methods of Inflaton Potential Reconstruction from information about the actual configuration for the the Universe. Finally we present our original contribution with some theorems about Hill's Equation and show how they can be used in order to reconstruct the Inflationary Potential.

Índice

1 - INTRODUÇÃO,	1
2 - EQUAÇÕES DE HILL,	3
2.1 - Apresentação e o Modelo do Pêndulo Oscilante,	3
2.2 - Teorema de Floquet e Considerações Gerais,	5
2.3 - O Cálculo do Expoente de Floquet,	12
2.3.1 - Método de Landau,	12
2.3.2 - Método de Bogolyubov,	14
2.3.3 - Método de Hill,	19
3 - UM POUCO DE COSMOLOGIA,	21
3.1 - O Modelo Padrão,	21
3.2 - Universo Inflacionário,	31
3.2.1 - O Modelo de Guth,	31
3.2.2 - Como o Modelo Inflacionário Resolve os Problemas do Modelo Cosmológico Padrão,	34
3.3 - O Modelo Caótico,	36
4 - RECONSTRUÇÃO DO POTENCIAL DO INFLATON $V(\phi)$,	39
4.1 - Reconstrução a partir da Equação de Estado,	39
4.2 - Reconstrução no Regime Pós-Inflacionário,	42
5 - AS EQUAÇÕES DE MATHIEU E LAMÉ NA COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA,	47
6 - TEOREMAS INVERSOS DA TEORIA DE HILL E APLICAÇÕES EM COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA,	51
6.1 - Equação de Hill e o Potencial $V(\phi)$,	52
6.2 - Produção de Partículas num Universo em Expansão,	56
CONSIDERAÇÕES FINAIS,	59

APÊNDICE 1 - INVARIÂNCIA DA EQUAÇÃO DE HILL POR MUDANÇA DE PERÍODO
E POR UMA TRANSLAÇÃO ARBITRÁRIA, 61

APÊNDICE 2 - DEMONSTRAÇÕES, 63

BIBLIOGRAFIA, 71

1 - Introdução

Em Cosmologia, a Teoria do Universo Inflacionário é, atualmente, a mais aceita para descrever, exceto na escala de Planck, o universo primitivo, uma vez que esse modelo resolve alguns problemas do Modelo Cosmológico Padrão, tais como os problemas do horizonte, da planicidade e da abundância de monopólos magnéticos. Nessa teoria, é prevista uma fase de expansão exponencial devida a um campo escalar ϕ denominado Inflaton^[1]. No entanto, para que possa ocorrer a formação de bárions (na fase da evolução do Universo denominada bariogênese) é necessária uma temperatura bastante elevada, uma vez que os processos físicos envolvidos na Teoria de Grande Unificação (GUT), que é a teoria padrão para se estudar esta fase do Universo, ocorrem a temperaturas da ordem de $10^{28}K$, ou dito de outra forma, cujas energias associadas são da ordem de 10^{15} GeV ^[2]. Uma vez que a expansão inflacionária leva a uma queda brusca na densidade de matéria, bem como na temperatura do Universo, um novo mecanismo deve agir levando à criação de matéria em regimes relativísticos e, conseqüentemente, reaquecendo o Universo. As primeiras tentativas de se conseguir um mecanismo que explicasse essa produção de matéria, e por conseqüência o reaquecimento, foram feitas por Dolgov e Linde^[3] e por Abbot *et al*^[4]. Entretanto, estes modelos não levam a temperaturas suficientemente altas para que tenha início a fase de bariogênese no universo pós-inflacionário.

Nos últimos anos, modelos baseados na idéia de que o fenômeno de Ressonância Paramétrica (com diferentes variações)^{[5],[6],[7]} é responsável pela criação de matéria no Universo têm-se mostrado interessantes pela sua simplicidade (enfoque semi-clássico) e compatibilidade com o modelo inflacionário. Nos modelos mais antigos, o campo clássico ϕ , chamado Inflaton (postulado no modelo de Universo Inflacionário), oscila ao redor do mínimo de seu potencial $V(\phi)$, denominado Potencial do Inflaton. Os campos de matéria, denotados coletivamente por χ e, em geral tomados como campos escalares, são acoplados ao Inflaton ϕ via uma Lagrangiana de Interação do tipo $\mathcal{L}_{int} = g\phi\chi^2$ ou ainda $\mathcal{L}_{int} = g\phi^2\chi^2$, onde g é a constante de acoplamento dos campos. Estas lagrangianas são as mais simples possíveis e, claramente, o fator χ^2 implica um termo linear na equação de movimento de χ o qual ainda é mantido para lagrangianas mais gerais do tipo $\mathcal{L}_{int} = gf(\phi)\chi^2$, onde f é uma função contínua. Na solução das Equações de Euler-Lagrange, este acoplamento pode levar, dependendo do comportamento da função $f(\phi)$ (periódica, por exemplo), a um crescimento exponencial da amplitude dos campos de matéria χ e, neste caso, devido ao fato de o número de partículas ser proporcional ao quadrado da amplitude, o crescimento do número de partículas dos campos escalares χ também é exponencial.

Matematicamente o que ocorre é que as equações de movimento dos campos de matéria χ , quando a Lagrangiana de Interação é do tipo $\mathcal{L}_{int} = gf(\phi)\chi^2$ e $f(\phi)$ é periódica na variável

ϕ , reduzem-se às chamadas Equações de Hill, que têm como casos particulares as Equações de Mathieu e as de Lamé. O importante neste contexto é que o espaço dos parâmetros (geralmente presentes na função $f(\phi)$) destas equações apresenta bandas de estabilidade (soluções limitadas) e bandas de instabilidade ou ressonância (soluções com comportamento exponencial). Quando tais parâmetros estão dentro de uma banda de ressonância, a solução tem uma amplitude que cresce exponencialmente, o que nos leva, então, a uma produção exponencial de partículas dos campos de matéria, mencionada acima.

O mecanismo de Ressonância Paramétrica tem ainda importância na produção de partículas na presença de campos eletromagnéticos fortes^[8] ou ainda condições de fronteira adequadas. Neste contexto a Teoria de Ressonância Paramétrica pode ser aplicada em domínios finitos onde condições de fronteira precisam ser necessariamente impostas, as quais têm grande influência na produção de partículas.

No Capítulo 2 descrevemos o fenômeno de Ressonância Paramétrica para um sistema físico simples, a saber, um pêndulo simples, cujo ponto de apoio oscila na direção vertical. Fazemos um breve estudo das Equações de Hill, apresentamos os conceitos de bandas de estabilidade e instabilidade (ou ressonância), enunciamos e demonstramos o teorema de Floquet, o qual fornece a forma da solução geral desse tipo de equação, e indicamos alguns métodos para o cálculo do “Expoente de Floquet”.

No Capítulo 3 fazemos uma revisão dos modelos mais conhecidos da Cosmologia: o Modelo Cosmológico Padrão (MCP), o qual é baseado exclusivamente na Teoria da Relatividade Geral, o Modelo Inflacionário, que resolve alguns problemas inerentes ao MCP, em particular os problemas do horizonte e da planicidade, e o Modelo Caótico, que, por sua vez, pretende dar uma solução completa aos problemas do MCP.

No Capítulo 4 apresentamos o problema da Reconstrução do Potencial $V(\phi)$. Este consiste em, a partir de alguma informação sobre a configuração atual do Universo, como por exemplo, a distribuição de matéria, ou o espectro das perturbações na Radiação Cósmica de Fundo, deduzir uma forma para $V(\phi)$. Esse tipo de problema, conhecido na literatura como Problema Inverso, possui uma série de formulações, relacionadas aos diferentes métodos de resolução. Alguns desses métodos serão apresentados nesse capítulo.

No Capítulo 5 apresentamos as Equações de Hill no contexto da Cosmologia Inflacionária, abordando dois de seus casos particulares: as Equações de Mathieu e de Lamé, bem como os regimes de validade de cada uma.

No capítulo 6, por fim, apresentamos alguns teoremas referentes às bandas de ressonância e extraímos algumas conclusões a respeito da criação de partículas a partir de adaptações necessárias para que possam ser aplicados ao domínio da Cosmologia Inflacionária.

2 - Equações de Hill

2.1 - Apresentação e o Modelo do Pêndulo Oscilante

As equações de Hill são equações diferenciais reais ordinárias, homogêneas, de segunda ordem com coeficientes periódicos. Esse tipo de Equação foi proposto inicialmente por Hill em 1877, no estudo do movimento planetário do sistema Terra-Sol-Lua. Sua importância, no entanto, vai além da Mecânica Celeste, havendo aplicações no estudo de circuitos elétricos, condutividade elétrica de metais e na teoria do cíclotron^[9].

A forma geral de uma Equação de Hill é:

$$\ddot{z} + a(t)\dot{z} + b(t)z = 0, \quad (1)$$

com $a(t)$ e $b(t)$ periódicas. Essa equação pode ser escrita da forma:

$$\ddot{y} + Q(t)y = 0, \quad (2)$$

que é a forma usual na literatura matemática, e que pode ser obtida a partir da mudança de variável dependente:

$$y = \exp\left(\frac{1}{2}A(t)\right) z, \quad (3)$$

onde $a(t) = \dot{A}(t)$. A função $Q(t)$ é dada por:

$$Q(t) = -\frac{1}{2}\dot{a}(t) - \frac{1}{4}a^2(t) + b(t). \quad (4)$$

Em muitos textos de Física-Matemática a Equação de Hill é apresentada como:

$$\ddot{y} + [\omega_0^2 + hp(\omega t)]y = 0, \quad (5)$$

onde ω, ω_0 e h são parâmetros e a função $p(\omega t)$ é periódica. Nosso interesse nas Equações de Hill se deve ao fato dessas equações apresentarem o fenômeno de Ressonância Paramétrica, que é o tipo de ressonância no qual a influência de fontes externas é controlada somente através da variação temporal dos parâmetros do sistema físico considerado.

Um exemplo de sistema físico no qual ocorre o fenômeno de ressonância paramétrica é o

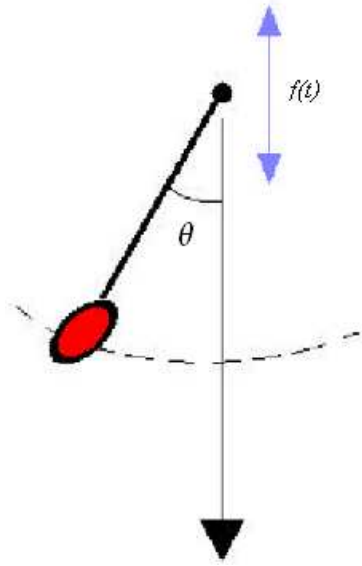


Figura 1: Pêndulo simples oscilando verticalmente.

do pêndulo simples que oscila também na direção vertical^[10].

A Lagrangiana desse sistema é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$$

Para $x = l\sin\theta$ e $y = l\cos\theta + f(t)$, onde $f(t)$ é uma função periódica, a Lagrangiana toma a forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + \dot{f}^2 - 2l\dot{f}\dot{\theta}\sin\theta) + mgf + mgl\cos\theta$$

Aplicando a Equação de Euler-Lagrange para a variável θ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

obtemos:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} - \frac{\ddot{f}}{l} \right) \sin\theta = 0$$

Para pequenas oscilações, vale a aproximação $\sin\theta \approx \theta$ e a equação reduz-se a:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} - \frac{\ddot{f}}{l} \right) \theta = 0$$

Tomando $\omega_0^2 = g/l$ e definindo o parâmetro h e a função periódica $p(\omega t)$ de modo que

$-\frac{\ddot{t}}{t} = hp(t)$, temos:

$$\ddot{\theta} + [\omega_0^2 + hp(\omega t)] \theta = 0, \quad (6)$$

que é idêntica à equação 5 acima. Na próxima seção veremos que para ω fixo, o espaço bidimensional dos parâmetros (ω_0, h) é dividido em regiões de estabilidade e instabilidade das soluções $\theta(t)$.

2.2 - Teorema de Floquet e Considerações Gerais

Seja a Equação de Hill^[9]:

$$\ddot{y} + [\omega_0^2 + hp(\omega t)]y = 0 \quad (7)$$

onde ω_0 e h são parâmetros reais e $p(\omega t)$ é uma função real, limitada, contínua num intervalo e periódica de período ωT , ou seja, $p(\omega(t + T)) = p(\omega t)$. A existência de soluções para esse tipo de equação é garantida pelo:

Teorema 2.1(Floquet): Seja p uma função real contínua por partes e definida para todos os valores de t com período T . Então a equação (7) possui duas soluções continuamente diferenciáveis $y_1(t)$ e $y_2(t)$, com equação característica dada por:

$$\rho^2 + [y_1(T) + \dot{y}_2(T)]\rho + 1 = 0, \quad (8)$$

com soluções $\rho_1 = e^{\mu T}$ e $\rho_2 = e^{-\mu T}$ (μ é denominado *Coeficiente Característico*, ou *Expoente de Floquet*). Se $\rho_1 \neq \rho_2$ então a equação diferencial possui duas soluções linearmente independentes

$$y_1(t) = e^{\mu t} p_1(t) \quad (9)$$

$$y_2(t) = e^{-\mu t} p_2(t) \quad (10)$$

onde $p_1(t)$ e $p_2(t)$ são funções periódicas de período T .

Demonstração: Seja $y(t)$ uma solução da Equação de Hill. A equação é invariante por uma translação de período T , pois se $z = t + T$ temos:

$$y(z) = y(t + T)$$

e

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} = \frac{d^2 y(z)}{dz^2}.$$

E a equação transladada fica então:

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} + [\omega_0^2 + hp(\omega z)]y = 0 \quad (11)$$

Como p é periódica, a invariância da equação nos permite supor que y seja uma função quase-periódica, isto, é:

$$y(z) = y(t + T) = \rho y(t) \quad (12)$$

onde ρ é uma constante. De fato, a condição de invariância da equação e a periodicidade da função p implicam em:

$$\frac{1}{y(z)} \frac{d^2 y(z)}{dz^2} = \frac{1}{y(t)} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -[\omega_0^2 + hp(\omega z)].$$

Se $y(z) = y(t + T) = \rho y(t)$, então:

$$\frac{1}{y(z)} \frac{d^2 y(z)}{dz^2} = \frac{1}{y(z)} \frac{d^2 y(z)}{dt^2} = \frac{1}{\rho y(t)} \frac{\rho d^2 y(t)}{dt^2} = -[\omega_0^2 + hp(\omega z)].$$

Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ duas soluções linearmente independentes de (7) satisfazendo às condições normalizadas:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1; \dot{y}_1(0) = 0 \\ y_2(0) &= 0; \dot{y}_2(0) = 1, \end{aligned}$$

O Wronskiano de uma equação diferencial de segunda ordem da forma:

$$\ddot{y} + P(t)\dot{y} + Q(t)y = 0, \quad (13)$$

é dado por :

$$W[y_1, y_2](t) = W(0) \exp \left[- \int_0^t P(\tau) d\tau \right] = y_1(t)\dot{y}_2(t) - y_2(t)\dot{y}_1(t). \quad (14)$$

Como, para a Equação de Hill, $P(t) \equiv 0$, $W[y_1, y_2](t)$ é constante e igual a $W(0)$, que é dado por:

$$W[y_1, y_2](0) = y_1(0)\dot{y}_2(0) - y_2(0)\dot{y}_1(0) = 1.$$

Uma solução qualquer da Equação de Hill satisfaz:

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2, \\ \dot{y} &= c_1 \dot{y}_1 + c_2 \dot{y}_2. \end{aligned}$$

Logo temos:

$$\begin{aligned} y(T) &= c_1 y_1(T) + c_2 y_2(T) = c_1 \rho y_1(0) + c_2 \rho y_2(0) = c_1 \rho \\ \dot{y}(T) &= c_1 \dot{y}_1(T) + c_2 \dot{y}_2(T) = c_1 \rho \dot{y}_1(0) + c_2 \rho \dot{y}_2(0) = c_2 \rho. \end{aligned}$$

Podemos, então, escrever o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} c_1[y_1(T) - \rho] + c_2 y_2(T) &= 0 \\ c_1 \dot{y}_1(T) + c_2[\dot{y}_2(T) - \rho] &= 0. \end{aligned}$$

O sistema tem solução não-trivial se :

$$\begin{vmatrix} y_1(T) - \rho & y_2(T) \\ \dot{y}_1(T) & \dot{y}_2(T) - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Definindo o fator $\Lambda = y_1(T) + \dot{y}_2(T)$ temos:

$$\rho^2 - \Lambda\rho + 1 = 0, \quad (15)$$

que é a equação característica. Sejam ρ_1 e ρ_2 as raízes desta equação.

- Se $|\Lambda| \neq 2$, ou seja, se $\rho_1 \neq \rho_2$, temos que

$$y_1(t+T) = \rho_1 y_1(t), \quad (16)$$

$$y_2(t+T) = \rho_2 y_2(t). \quad (17)$$

Como $\rho_1 \rho_2 = 1$, então podemos escrever:

$$\rho_1 = e^{\mu T}, \quad (18)$$

$$\rho_2 = e^{-\mu T}. \quad (19)$$

onde μ é real se $|\Lambda| > 2$ e imaginário se $|\Lambda| < 2$.

Agora, a função $p_1(t) = e^{-\mu t} y_1(t)$ é periódica pois:

$$p_1(t+T) = e^{-\mu(t+T)} y_1(t+T) = e^{-\mu t} e^{-\mu T} \rho_1 y_1(t) = e^{-\mu t} e^{-\mu T} e^{\mu T} y_1(t) = p_1(t).$$

Analogamente para $y_2(t)$.

- Se $|\Lambda| = 2$, ou seja, $\rho_1 = \rho_2 = \pm 1$; para o caso em que $\rho_1 = 1$ temos:
 $y_1(t+T) = \rho_1 y_1(t) = y_1(t) \Rightarrow$ período T
 Se $\rho_1 = -1$, $y_1(t+2T) = \rho_1 y_1(t+T) = -y_1(t+T) = y_1(t) \Rightarrow$ período $2T$

Para a segunda solução, procedemos do seguinte modo:

Como $y_2(t+T)$ também é uma solução, segue que $y_2(t+T) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$. Para determinar c_1 e c_2 temos:

$$y_2(T) = c_1 y_1(0) + c_2 y_2(0) = c_1,$$

$$\dot{y}_2(T) = c_1 \dot{y}_1(0) + c_2 \dot{y}_2(0) = c_2.$$

Então,

$$y_2(t+T) = y_2(T)y_1(t) + \dot{y}_1(T)y_2(t),$$

e y_2 será periódica somente se $y_2(T)=0$, terá período T se $\rho_1 = 1$ e período $2T$ se $\rho_1 = -1$. Se $y_2(T) \neq 0$ a solução não é limitada.

Do que foi exposto, podemos tirar as seguintes conclusões:

Para $|\Lambda|>2$, temos $\rho_1>1$ e $y_1(t+T)=\rho_1 y_1(t)$, ou de forma mais geral, $y_1(t+kT)=\rho_1^k y_1(t)$. Nesse caso, $y_1(t)$ é ilimitada para t crescente. Este é o caso instável.

Para $|\Lambda|<2$, temos $|\rho_1|=|\rho_2|=1$ e todas as soluções são limitadas. Este é o caso estável.

Para $|\Lambda|=2$, temos $|\rho_1|=|\rho_2|=1$ e pelo menos uma solução é periódica. A segunda solução pode ser periódica ou ilimitada.

O coeficiente μ regula o comportamento assintótico das soluções das equações de Hill da seguinte forma:

1. se μ é real então as soluções são ditas *instáveis* e são: exponencialmente crescentes para $\mu > 0$ (y_1) e exponencialmente decrescentes para $\mu < 0$ (y_2).
2. Se μ é imaginário, as soluções são limitadas e periódicas, e são ditas *estáveis*.

Podemos agora, calcular o Expoente de Floquet. Consideramos as expressões para $y_1(t+T)$ e $y_2(t+T)$,

$$\begin{aligned} y_1(t+T) &= y_1(T)y_1(t) + \dot{y}_1(T)y_2(t), \\ y_2(t+T) &= y_2(T)y_1(t) + \dot{y}_2(T)y_2(t). \end{aligned}$$

Supondo que exista uma terceira solução $g \neq 0$ tal que $g(t+T)=\rho g(t)$ para algum $\rho \neq 0$, então $g(t)$ pode ser escrita na base $\{y_1(t), y_2(t)\}$ da forma:

$$g(t) = m y_1(t) + n y_2(t),$$

com m e n não-nulos simultaneamente.

A partir das condições normalizadas obtemos o sistema:

$$\begin{cases} [y_1(T) - \rho]m + y_2(T)n = 0 \\ \dot{y}_1(T)m + [\dot{y}_2(T) - \rho]n = 0, \end{cases}$$

Para que o sistema tenha solução, com m e n não-nulos simultaneamente, é necessário que :

$$\rho^2 - [y_1(T) + \dot{y}_2(T)]\rho + 1 = 0,$$

que é a Equação Característica da Equação de Hill. Pelo Teorema de Floquet, uma solução $y_n(t)$ da Equação de Hill é da forma

$$y_n(t) = e^{\pm \mu t} p_n(t)$$

onde $p_n(t)$ é contínua por partes e periódica de período T . Como $g(t+T) = \rho g(t)$, temos que $\rho = e^{\pm \mu T}$.

A Equação Característica tem as soluções:

$$\rho = \frac{y_1(T) + \dot{y}_2(T) \pm \sqrt{(y_1(T) + \dot{y}_2(T))^2 - 4}}{2},$$

e daí encontramos os valores de μ :

$$\mu = \pm \frac{1}{T} \ln \left[\frac{y_1(T) + \dot{y}_2(T) \pm \sqrt{(y_1(T) + \dot{y}_2(T))^2 - 4}}{2} \right]. \quad (20)$$

Para que μ seja real é necessário que $(y_1(T) + \dot{y}_2(T))^2 > 4$, ou seja, $y_1(T) + \dot{y}_2(T) < -2$ ou $y_1(T) + \dot{y}_2(T) > 2$. Uma vez satisfeitas essas condições, a expressão (20) fornece todos os valores de μ para o cálculo das regiões de ressonância.

Esse método apresenta duas dificuldades:

1. Devemos ter duas soluções linearmente independentes, o que nem sempre é possível (a equação de Lamé é um bom exemplo disso).
2. Devemos conhecer o período de $y(t)$, o que não é um cálculo fácil.

As regiões em que as soluções são estáveis são chamadas bandas de estabilidade, e as regiões onde as soluções são instáveis são chamadas de bandas de instabilidade ou de ressonância. Os termos estável e instável referem-se ao espaço dos parâmetros (ω_0, h) , uma vez que μ está relacionado aos parâmetros ω_0 e h , ou de maneira equivalente, atribuindo valores a ω_0 e h , obtemos soluções instáveis ou estáveis da equação de Hill.

Uma definição mais rigorosa de estabilidade é: Uma solução $y(t)$ da equação diferencial $\ddot{y} = f(y, t)$ definida para $t > t_0$ é dita estável se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que qualquer solução $w(t)$ da equação satisfazendo $|w(t_0) - y(t_0)| < \delta$ implica em $|w(t) - y(t)| < \epsilon$. Caso contrário, a solução é dita instável.

Essa definição de estabilidade nos possibilita fazer uma análise mais profunda do espaço (ω_0, h) . De fato, para toda Equação de Hill [9] existem duas seqüências monotonicamente crescentes de números reais:

$$\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots \quad (21)$$

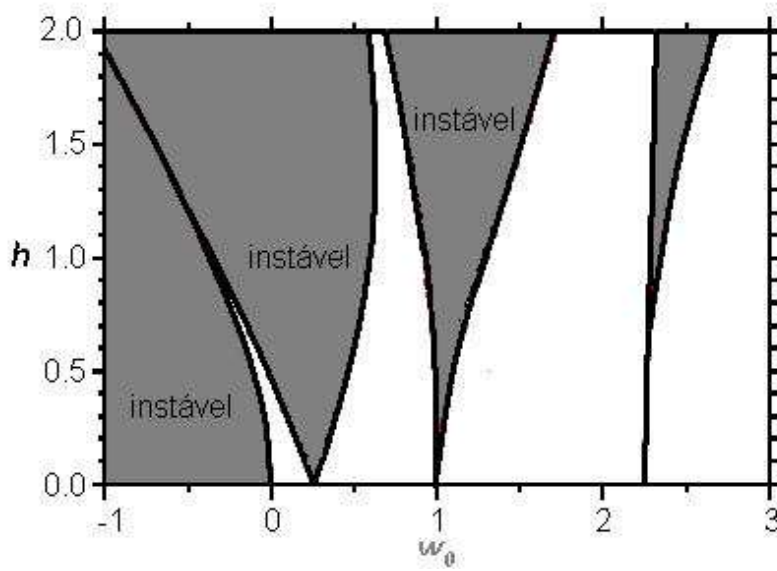


Figura 2: Espaço de fase (ω_0, h) de uma Equação de Mathieu

e

$$\lambda' = \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots \quad (22)$$

tais que a equação (7) (para h fixado) tem solução de período π^1 se, e somente se, $\omega_0^2 = \lambda_n$ para $n = 0, 1, 2, \dots$ e tem solução de período 2π se, e somente se, $\omega_0^2 = \lambda'_n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$. Os termos λ_n e λ'_n estão ordenados segundo a seqüência:

$$\lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda'_3 \leq \lambda'_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots \quad (23)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda'_n} = 0.$$

As soluções são estáveis nos intervalos $(\lambda_0, \lambda'_1), (\lambda'_2, \lambda_1), (\lambda_2, \lambda'_3), (\lambda'_4, \lambda_3), \dots$ chamados de *bandas de estabilidade* e são instáveis nos intervalos $(-\infty, \lambda_0], (\lambda'_1, \lambda'_2), (\lambda_1, \lambda_2), (\lambda'_3, \lambda_4), \dots$ chamados *bandas de instabilidade* ou *ressonância*. Nos extremos desses intervalos as soluções são, em geral, instáveis, porém o único extremo no qual a instabilidade está garantida é λ_0 . É possível ajustar os parâmetros ω_0 e h de forma a fazer com que as bandas de instabilidade desapareçam. O único intervalo para qual esse ajuste não é possível é o intervalo $(-\infty, \lambda_0]$, chamado de banda de instabilidade trivial.

Na figura 2 temos um caso típico de regiões de estabilidade e instabilidade para uma equação de Mathieu.

¹Desse ponto em diante, tomaremos, sem perda de generalidade, $T = \pi$. Uma justificativa para esse procedimento pode ser vista no Apêndice 1.

Os números λ_n e λ'_n são, respectivamente, as raízes das equações $\Delta(\omega_0^2) = 2$ e $\Delta(\omega_0^2) = -2$, onde $\Delta(\omega_0^2)$ é dado por:

$$\Delta(\omega_0^2) = y_1(\pi, \omega_0^2) + y_2(\pi, \omega_0^2), \quad (24)$$

onde $y_1(t, \omega_0^2)$ e $y_2(t, \omega_0^2)$ são duas soluções linearmente independentes de $\ddot{y} + [\omega_0^2 + hp(\omega t)] = 0$ para h fixado. Os números λ_n são chamados “valores característicos do primeiro tipo”, enquanto que os λ'_n são chamados “valores característicos do segundo tipo”.

Uma solução da Equação de Hill é estável para λ_{2n+1} se, e somente se, λ_{2n+1} é uma raiz dupla da equação $\Delta(\omega_0^2) = 2$, analogamente, uma solução é estável para λ'_{2n+1} se, e somente se, λ'_{2n+1} é uma raiz dupla da equação $\Delta(\omega_0^2) = -2$. Esse resultado é equivalente a dizer que uma solução é estável para λ_{2n+1} ou λ'_{2n+1} , se e somente se, $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$ ou $\lambda'_{2n+1} = \lambda'_{2n+2}$.

Existem duas subclasses de Equações de Hill bastante conhecidas e estudadas e que possuem ligação com o fenômeno de ressonância paramétrica: as equações de Mathieu e as de Lamé. As equações de Mathieu são aquelas em que $p(\omega t)$ é uma função trigonométrica do tipo *seno* ou *coseno*. Essas equações apresentam infinitas bandas de ressonância no espaço de fase (ω_0, h) , e possuem uma expressão fechada para o expoente de Floquet (ou seja, obtida a partir de métodos analíticos).

As Equações de Lamé são aquelas em que $p(\omega t)$ é uma Função Elíptica de Jacobi do tipo: $sn = sn(\omega t, \kappa)$ ou $cn = cn(\omega t, \kappa)$. As funções sn e cn são chamadas respectivamente de *seno* e *coseno* elípticos. O número κ é denominado módulo da função elíptica e $0 \leq \kappa \leq 1$. É possível definir sn e cn por meio das séries:^[11]

$$sn(u, \kappa) = \frac{2\pi}{\kappa K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{n-\frac{1}{2}}}{1 - g^{2n-1}} sen \left[(2n-1) \frac{u\pi}{2K} \right],$$

e

$$cn(u, \kappa) = \frac{2\pi}{\kappa K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{n-\frac{1}{2}}}{1 + g^{2n-1}} cos \left[(2n-1) \frac{u\pi}{2K} \right],$$

onde $g = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$, $K = K(u, \kappa) = \int_0^u \frac{du'}{\sqrt{1 - \kappa^2 sen^2 u'}}$ é uma integral elíptica do primeiro tipo, $K' = K(u, \kappa')$ e $\kappa^2 = 1 - \kappa'^2$.

As funções elípticas sn e cn são duplamente periódicas tendo cada uma dois períodos, um real e outro imaginário. A Equação de Lamé possui soluções analíticas somente nos casos em que pode ser escrita como:

$$\ddot{y} + [\omega_0 + n(n+1)\kappa^2 sn(t, \kappa)]y = 0, \quad (25)$$

ou

$$\ddot{y} + [\omega_0 + n(n+1)\kappa^2 cn(t, \kappa)]y = 0, \quad (26)$$

com n inteiro.² O número de bandas de ressonância no espaço de fase é sempre finito e igual a $n+1$, se $n>0$, ou a $-n-1$ se $n<0$.

2.3 - O Cálculo do Expoente de Floquet

Vimos na seção 2.2 como calcular, pelo menos teoricamente, o expoente de Floquet. Nesta seção apresentamos outros métodos para o cálculo coeficiente de Floquet de alguns casos da Equação de Hill.

2.3.1 - Método de Landau

Nesse método consideramos a Equação de Mathieu:

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2[1 + h \cos(2\omega_0 + \delta)t]y = 0 \quad (27)$$

onde δ é uma constante [10],[13].

O objetivo do método é determinar o coeficiente de Floquet na primeira banda de ressonância. Para tanto, consideramos que h é uma constante positiva e $h \ll 1$.

O método consiste em buscar soluções da forma:

$$y(t) = a(t) \cos\left(\omega_0 + \frac{\delta}{2}\right)t + b(t) \sin\left(\omega_0 + \frac{\delta}{2}\right)t \quad (28)$$

em que $a(t)$ e $b(t)$ são funções que variam muito lentamente em relação a $\sin\left(\omega_0 + \frac{\delta}{2}\right)t$ e $\cos\left(\omega_0 + \frac{\delta}{2}\right)t$. Essa solução não é exata, uma vez que $y(t)$ também possui termos com frequências que são múltiplos inteiros de $\omega_0 + \delta/2$ ³. Esses termos são de ordem mais alta com respeito a h , isto é, são de ordem $\mathcal{O}(h^2)$ e podem ser desprezados. Substituindo y na equação (27) obtemos:

$$\begin{aligned} & \left[\ddot{a} + (2\omega_0 + \delta) \dot{b} - \left(\omega_0 + \frac{\delta}{2}\right)^2 a \right] \cos\left(\omega_0 + \frac{\delta}{2}\right)t + \\ & + \left[\ddot{b} - (2\omega_0 + \delta) \dot{a} - \left(\omega_0 + \frac{\delta}{2}\right)^2 b \right] \sin\left(\omega_0 + \frac{\delta}{2}\right)t + \end{aligned}$$

²Para soluções com $n = 1, 2, 3$ ver referência [12]

³Esse é, de fato, o primeiro termo da expansão:
 $y = \sum_{n=0}^{\infty} \{ a_n \cos[(n+1)(\omega_0 + \frac{\delta}{2})t] + b_n \sin[(n+1)(\omega_0 + \frac{\delta}{2})t] \}$

$$+\omega_0^2 [1 + h \cos (2\omega_0 + \delta) t] \left[a \cos \left(\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right) t + b \sin \left(\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right) t \right] = 0 \quad (29)$$

O método de Landau faz ainda a suposição de que a fase δ é pequena, de maneira que as funções $a(t)$ e $b(t)$ são fracamente dependentes de δ , ou seja:

$$\begin{aligned} \dot{a} &\approx \delta a, \\ \dot{b} &\approx \delta b, \end{aligned}$$

para δ suficientemente pequeno. Essa aproximação implica em:

$$\begin{aligned} \ddot{a} &\approx \delta^2 a, \\ \ddot{b} &\approx \delta^2 b. \end{aligned}$$

Daí, desprezando os termos em $\ddot{a}$ e $\ddot{b}$ (por serem de ordem $\mathcal{O}(\delta^2)$), obtemos de (29):

$$\begin{aligned} &\left[(2\omega_0 + \delta) \dot{b} - \left(\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right)^2 a \right] \cos \left(\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right) t + \\ &+ \left[- (2\omega_0 + \delta) \dot{a} - \left(\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right)^2 b \right] \sin \left(\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right) t + \\ &+ \omega_0^2 [1 + h \cos (2\omega_0 + \delta) t] \left[a \cos \left(\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right) t + b \sin \left(\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right) t \right] = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Podemos trabalhar o último termo da seguinte maneira, aplicando as relações trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\theta + \phi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta - \phi}{2} \right) &= \frac{\cos \theta}{2} + \frac{\cos \phi}{2} \\ \cos \left(\frac{\theta + \phi}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta - \phi}{2} \right) &= \frac{\sin \theta}{2} - \frac{\sin \phi}{2} \end{aligned}$$

e tomando $\theta = \omega_0 + \frac{\delta}{2}$ e $\phi = 2\omega_0 + \frac{\delta}{2}$ temos:

$$\cos \left[\left(\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right) t \right] \cdot [\cos (2\omega_0 + \delta) t] = \frac{1}{2} \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{1}{2} \delta \right) 3t \right] + \frac{1}{2} \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{1}{2} \delta \right) t \right], \quad (31)$$

$$\sin \left[\left(\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right) t \right] \cdot \cos [(2\omega_0 + \delta) t] = \frac{1}{2} \sin \left[\left(\omega_0 + \frac{1}{2} \delta \right) 3t \right] - \frac{1}{2} \sin \left[\left(\omega_0 + \frac{1}{2} \delta \right) t \right]. \quad (32)$$

Substituindo as equações (31) e (32) no último termo de (30) e desprezando os termos de

frequências mais altas, podemos escrevê-la como:

$$\begin{aligned} & \left[(2\omega_0 + \delta) \dot{b} - \left(\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right)^2 a \right] \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right) t \right] + \\ & + \left[- (2\omega_0 + \delta) \dot{a} - \left(\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right)^2 b \right] \sin \left[\left(\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right) t \right] + \\ & + \omega_0^2 \left\{ \left(1 + \frac{h}{2} \right) a \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right) t \right] + \left(1 - \frac{h}{2} \right) b \sin \left[\left(\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right) t \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

Agrupando os termos em *sen* e *cos* e desprezando os termos de ordem $\mathcal{O}(h^2)$, obtemos:

$$\left[2\dot{b} + \left(\frac{h\omega_0}{2} - \delta \right) a \right] \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right) t \right] + \left[-2\dot{a} - \left(\frac{h\omega_0}{2} + \delta \right) b \right] \sin \left[\left(\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right) t \right] = 0. \quad (33)$$

Aqui usamos o fato de que $\delta\dot{a}$ e $\delta\dot{b}$ são de segunda ordem em δ .

Para que a equação tenha solução em a e b , podemos impor as condições:

$$\begin{cases} 2\dot{b} + \left(\frac{h\omega_0}{2} - \delta \right) a = 0 \\ 2\dot{a} + \left(\frac{h\omega_0}{2} + \delta \right) b = 0 \end{cases}$$

Para que a solução seja coerente com o teorema de Floquet, a e b devem ser da forma $e^{\pm\mu t}$. Podemos então, sem perda de generalidade, impor $a(t) = e^{\mu t}$ e $b(t) = e^{-\mu t}$. Com isso, o sistema fica:

$$\begin{cases} \mu a(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{h\omega_0}{2} + \delta \right) b(t) = 0 \\ \mu b(t) - \frac{1}{2} \left(\frac{h\omega_0}{2} - \delta \right) a(t) = 0 \end{cases}$$

O sistema terá solução não-trivial se:

$$\begin{vmatrix} \mu & \frac{1}{2} \left(\frac{h\omega_0}{2} + \delta \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{h\omega_0}{2} - \delta \right) & \mu \end{vmatrix} = 0$$

A partir desse determinante encontramos o valor de μ :

$$\mu = \pm \frac{1}{2} \left[\left(\frac{h\omega_0}{2} \right)^2 - \delta^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (34)$$

2.3.2 - Método de Bogolyubov

O objetivo é encontrar uma solução da Equação de Hill:

$$\ddot{y} + [\omega_0^2 + hp(\omega t)]y = 0 \quad (35)$$

na primeira banda de ressonância de frequência ω_0 considerando ω_0^2 e ω como constantes e h como um parâmetro suficientemente pequeno, e $p(\omega t)$ uma função periódica de período 2π . O método^[6] baseia-se em considerar uma pequena perturbação no parâmetro h , desconsiderando contribuições de segunda ordem $\mathcal{O}(h^2)$.

Uma vez que $p(\omega t)$ é uma função periódica, é possível expandi-la em uma série de Fourier complexa:

$$p(\omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}. \quad (36)$$

Como $p(\omega t)$ é real, $c_n^* = c_{-n}$, onde $*$ denota a conjugação complexa. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $c_0 = 0$ bastando para isso redefinir o parâmetro ω_0 :

$$\omega_0 \mapsto \sqrt{\omega_0^2 + hc_0}$$

Escrevendo c_n na forma exponencial podemos definir as fases α_n de forma que:

$$c_n = |c_n| e^{i\alpha_n}, \quad (37)$$

Introduzimos agora o valor Δ definido através da relação:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{r}{q}\omega\right)^2 + h\Delta, \quad (38)$$

na qual r e q são inteiros e $\frac{r}{q}$ é uma fração irredutível. Substituindo (38) em (35), obtemos:

$$\ddot{y} + \left(\frac{r}{q}\omega\right)^2 y = -h(\Delta + p(\omega t))y. \quad (39)$$

O método de Bogoliubov consiste em procurar soluções para a equação (39) na forma de expansão em série de potências de h :

$$y = \sum_{s=0}^{\infty} u^{(s)} h^s, \quad (40)$$

em que os termos $u^{(s)}$ são funções do tipo $u^{(s)} = u^{(s)}(a, \theta, \frac{\omega}{q}t)$. Essas funções são periódicas no segundo e terceiro argumentos e os termos a e θ são, respectivamente, a amplitude e a fase da solução y . Essas grandezas não são necessariamente constantes e sim funções da variável t . O método de Bogolyubov toma ainda como aproximação de ordem zero em h , $u^{(0)} = a \cos \psi$ onde $\psi = \frac{r}{q}\omega t + \theta$, com a e θ constantes e, neste caso $\dot{a} = 0$, $\dot{\theta} = 0$.

Agora, para h suficientemente pequeno, podemos tomar a aproximação de y até a primeira

ordem em h , ou seja:

$$y(t) = a \cos \psi + u^{(1)} h + \mathcal{O}(h^2). \quad (41)$$

O método consiste em expressar $\dot{a}$ e $\dot{\theta}$ como funções de a e θ , ou seja, expandimos $\dot{a}$ e $\dot{\theta}$ em primeira ordem em h como:

$$\dot{a} = hA(a, \theta) + \mathcal{O}(h^2), \quad (42)$$

$$\dot{\theta} = hB(a, \theta) + \mathcal{O}(h^2). \quad (43)$$

Substituindo (41) em (39) temos:

$$\begin{aligned} (\ddot{a} - a\dot{\psi}^2)\cos\psi - (a\ddot{\psi} + 2\dot{a}\dot{\psi})\sin\psi + \ddot{u}^{(1)}h + \left(\frac{r\omega}{q}\right)^2 (a\cos\psi + u^{(1)}h) = \\ = -h[p(\omega t) + \Delta](a\cos\psi + u^{(1)}h) \end{aligned} \quad (44)$$

Das expressões (42) e (43) para $\dot{a}$ e $\dot{\theta}$ temos que:

$$\ddot{a} = h\dot{A} = h \left(\frac{\partial A}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial A}{\partial \theta} \dot{\theta} \right) = h^2 \left(A \frac{\partial A}{\partial a} + B \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) = \mathcal{O}(h^2).$$

Analogamente para θ :

$$\ddot{\theta} = h\dot{B} = h \left(\frac{\partial B}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial B}{\partial \theta} \dot{\theta} \right) = h^2 \left(A \frac{\partial B}{\partial a} + B \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) = \mathcal{O}(h^2),$$

e como $\ddot{\psi} = \ddot{\theta}$, podemos desprezar os termos em $\ddot{a}$ e $\ddot{\psi}$ e a equação (43) reduz-se a:

$$-a\dot{\psi}^2\cos\psi - 2\dot{a}\dot{\psi}\sin\psi + \ddot{u}^{(1)}h + \left(\frac{r\omega}{q}\right)^2 (a\cos\psi + u^{(1)}h) = -h[p(\omega t) + \Delta]a\cos\psi.$$

Substituindo as aproximações (42) e (43) na equação acima, obtemos:

$$\ddot{u}^{(1)} + \left(\frac{r\omega}{q}\right)^2 u^{(1)} = -(p + \Delta)a\cos\psi + 2\left(\frac{r\omega}{q}\right) A\sin\psi + 2\left(\frac{r\omega}{q}\right) aB\cos\psi. \quad (45)$$

Redefinindo a função $p(\omega t)$ da forma $p(\omega t) \mapsto p(\frac{\omega t}{q})$ podemos expressar a equação num desenvolvimento em série de Fourier complexa com termos do tipo $e^{\frac{in\omega t}{q}}$, isto é

$$p\left(\frac{\omega t}{q}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\omega t}{q}}.$$

Do mesmo modo, expandindo $u^{(1)}$ em uma série de Fourier complexa na variável $\frac{\omega}{q}t$ obtemos:

$$u^{(1)}\left(a, \theta, \frac{r}{q}t\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(a, \theta) e^{\frac{in\omega t}{q}}, \quad (46)$$

em que as funções $u_n(a, \theta)$ são periódicas na variável θ . Substituindo as expansões acima para as funções p e $u^{(1)}$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\ddot{u}_n + \frac{2in\omega}{q} \dot{u}_n - \left(\frac{n\omega}{q}\right)^2 u_n + \left(\frac{r\omega}{q}\right)^2 u_n \right] e^{\frac{in\omega t}{q}} = - \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\omega t}{q}} + \Delta \right) a \cos \psi + \\ + 2 \left(\frac{r\omega}{q} \right) A \sin \psi + 2 \left(\frac{r\omega}{q} \right) a B \cos \psi. \end{aligned} \quad (47)$$

Novas aproximações em primeira ordem em h se fazem necessárias.

Como $\dot{u}_n = \frac{\partial u_n}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial u_n}{\partial \theta} \dot{\theta} = h \left(A \frac{\partial u_n}{\partial a} + B \frac{\partial u_n}{\partial \theta} \right) = \mathcal{O}(h)$, temos que $\ddot{u}_n = \mathcal{O}(h^2)$, e com isso temos que o termo de ordem zero em h é dado por:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[- \left(\frac{n\omega}{q}\right)^2 + \left(\frac{r\omega}{q}\right)^2 \right] u_n e^{\frac{in\omega t}{q}}. \quad (48)$$

Claramente, os termos com $n = \pm r$ são nulos nessa expansão e daí os termos correspondentes no segundo membro também devem ser nulos. Esses termos são os coeficientes de $e^{\frac{ir\omega t}{q}}$ e $e^{\frac{-ir\omega t}{q}}$, cujas expressões envolvem as funções A e B . Considerando o número $\eta = \frac{2r}{q}$ temos que $A(a, \theta)$ e $B(a, \theta)$ podem ser escritos como^[6]:

$$A(a, \theta) = \frac{a|c_\eta|}{\eta\omega} \sin(2\theta - \alpha_\eta) \quad (49)$$

$$B(a, \theta) = \frac{1}{\eta\omega} [\Delta + |c_\eta| \cos(2\theta - \alpha_\eta)], \quad (50)$$

onde $|c_\eta|$ é o módulo de c_η definido em (37) para η inteiro. Essas expressões são válidas para η arbitrário, porém, no caso em que η não é um inteiro, tomamos $c_\eta = 0$. Isto leva a que o primeiro termo da solução da equação (41) tenha o coeficiente a constante e ganhe um fase adicional na função $\cos$. Isto não altera sensivelmente a forma da solução.

Agora, considerando a mudança de variáveis:

$$x = a \cos \left(\theta - \frac{\alpha_\eta}{2} \right), \quad (51)$$

$$y = a \sin \left(\theta - \frac{\alpha_\eta}{2} \right), \quad (52)$$

usando as relações trigonométricas:

$$\begin{cases} \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \end{cases}$$

e usando as equações (42), (43), (49) e (50) obtemos:

$$\dot{x} = \frac{h}{\eta\omega}(|c_\eta| - \Delta)y + \mathcal{O}(h^2) \quad (53)$$

$$\dot{y} = \frac{h}{\eta\omega}(|c_\eta| + \Delta)x + \mathcal{O}(h^2). \quad (54)$$

Este é um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem e pode ser escrito na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{h}{\eta\omega}(|c_\eta| - \Delta) \\ \frac{h}{\eta\omega}(|c_\eta| + \Delta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz dos coeficientes são:

$$\lambda_{\pm} = \pm \frac{h}{\eta\omega} \sqrt{|c_\eta|^2 - \Delta^2}$$

Para que $\lambda_{\pm}$ seja real, é necessário que $|c_\eta|^2 > \Delta^2$. Se assumimos que $\Delta > 0$, então é suficiente que $\Delta < |c_\eta|$. Como a solução geral da Equação de Hill é da forma :

$$y = f_1(t)e^{t\lambda_+} + f_2(t)e^{t\lambda_-}, \quad (55)$$

com $f_1(t)$ e $f_2(t)$ periódicas, podemos identificar o autovalor λ como o coeficiente de Floquet. Portanto

$$\mu_{\pm} = \pm \frac{h}{\eta\omega} \sqrt{|c_\eta|^2 - \Delta^2} \quad (56)$$

Uma dificuldade desse método é determinar, dentre todos os valores possíveis do índice η , qual satisfaz as condições mencionadas acima, uma vez que se trata de um valor em uma infinidade de valores inteiros, e consequentemente, o termo $|c_\eta|$ também deve ser escolhido entre uma infinidade de valores.

2.3.3 - Método de Hill [14],[15]

O método de Hill é usado para a Equação de Mathieu:

$$\ddot{y} + [\omega_0^2 - 2h\cos(2\omega t)]y = 0, \quad (57)$$

e consiste em buscar soluções do tipo:

$$y = e^{\mu t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} e^{2in\omega t}. \quad (58)$$

A segunda derivada de y é:

$$\ddot{y} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} (2n\omega - i\mu)^2 e^{(2in\omega - i\mu)t}. \quad (59)$$

Usando a representação complexa $\cos(2\omega t) = \frac{e^{2i\omega t} + e^{-2i\omega t}}{2}$ temos que :

$$2\cos(\omega t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} e^{2in\omega t} = \frac{e^{2i\omega t} + e^{-2i\omega t}}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} e^{2in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_{2n-2} + c_{2n+2}) e^{2in\omega t}. \quad (60)$$

Substituindo (58) , (59) e (60) em (57) obtemos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} (2n\omega - i\mu)^2 e^{i(2n\omega - i\mu)t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\omega_0^2 c_{2n} + h(c_{2n-2} + c_{2n+2})) e^{2in\omega t} = 0, \quad (61)$$

a partir da qual obtemos a relação de recorrência para os c_{2n} :

$$[\omega_0^2 + (2n\omega - i\mu)^2] c_{2n} = -h(c_{2n-2} + c_{2n+2}) \quad (62)$$

ou seja

$$c_{2n} = \frac{-h}{[\omega_0^2 + (2n\omega - i\mu)^2]} (c_{2n-2} + c_{2n+2}). \quad (63)$$

Definindo o número $\gamma_{2n} = \frac{h}{[\omega_0^2 + (2n\omega - i\mu)^2]}$ podemos escrever a relação de recorrência na forma:

$$\gamma_n c_{2n-2} + c_{2n} + \gamma_n c_{2n+2} = 0. \quad (64)$$

Essa relação de recorrência pode ser escrita na forma de uma matriz infinita, e o valor

de μ pode ser calculado a partir da equação envolvendo o determinante dessa matriz:

$$D(i\mu) = \det \begin{bmatrix} \dots & & & & \\ \gamma_{-2} & 1 & \gamma_{-2} & & \\ & \gamma_0 & 1 & \gamma_0 & \\ & & \gamma_2 & 1 & \gamma_2 \\ & & & & \dots \end{bmatrix} = 0,$$

onde $D(i\mu)$ é chamado determinante de Hill.

Um determinante infinito, representado por^[9] $|a_{mn}|_{-\infty}^{\infty}$, onde os índices m e n variam de $-\infty$ a mais ∞ , pode ser calculado a partir da fórmula:

$$|a_{mn}|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{l \rightarrow \infty} |a_{mn}|_{-l}^l$$

E $|a_{mn}|_{-\infty}^{\infty}$ existe se o limite existe e converge se o limite é finito. Um resultado conhecido^[10] da teoria das equações de Hill diz que um determinante de Hill é sempre convergente, e em especial, que a solução da equação $D(i\mu) = 0$ é tal que:

$$\text{sen}^2 \left(\frac{1}{2} i\mu\pi \right) = D(0) \text{sen}^2 \left(\frac{\pi\omega_0}{2} \right) \quad (65)$$

que se reduz a

$$\cosh(\mu\pi) = 1 - D(0) \text{sen}^2 \left(\frac{\pi\omega_0}{2} \right). \quad (66)$$

Daí, a expressão para o expoente de Floquet resulta em:

$$\mu = \frac{1}{\pi} \text{arccosh} \left\{ 1 - D(0) \text{sen}^2 \left(\frac{\pi\omega_0}{2} \right) \right\}, \quad (67)$$

onde $D(0)$ é dado por:

$$D(0) = \det \begin{bmatrix} \dots & & & & \\ \frac{h}{\omega_0^2 + 16\omega^2} & 1 & \frac{h}{\omega_0^2 + 16\omega^2} & & \\ & \frac{h}{\omega_0^2} & 1 & \frac{h}{\omega_0^2} & \\ & & \frac{h}{\omega_0^2 + 16\omega^2} & 1 & \frac{h}{\omega_0^2 + 16\omega^2} \\ & & & & \dots \end{bmatrix} = 0,$$

A dificuldade do método está no cálculo de $D(0)$, que está relacionado aos parâmetros h e ω_0^2 .

3 - Um Pouco de Cosmologia

3.1 - O Modelo Padrão

O Modelo Cosmológico Padrão (MCP) é o que apresenta o cenário mais natural para as características observáveis do Universo em conformidade com a Teoria da Relatividade Geral, baseando-se na idéia de que o Universo evoluiu a partir de um estado inicial de grande densidade e temperatura muito elevada. Esse modelo supõe isotropia e homogeneidade em larga escala. Sua popularidade e sobrevivência deve-se à descoberta de Penzias e Wilson em 1965 da Radiação Cósmica de Fundo (RCF), que se mostrou inicialmente isotrópica. Medidas mais precisas da anisotropia da RCF estão levando a novos modelos de formação de estruturas no Universo Primitivo.

No MCP a matéria e a energia podem ser descritos como um fluido uniformemente distribuído, eletricamente neutro. O ponto central do modelo cosmológico padrão são as Equações de Campo de Einstein (aqui adotamos o sistema de unidades naturais, de modo que $c = 1$ e $\hbar = 1$):

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu} \quad (68)$$

O tensor $G^{\mu\nu}$, chamado “Tensor de Einstein” é dado por $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}$, onde $R^{\mu\nu}$ é o “Tensor de Ricci”, R é o “Escalar de Ricci” ou “Curvatura Escalar” e $g^{\mu\nu}$ é o “Tensor Métrico”. O tensor $T^{\mu\nu}$ é o “Tensor Energia-Momento” e Λ é a chamada “Constante Cosmológica”.

Na década de 20, Friedmann resolveu as Equações de Einstein sem constante cosmológica para um Universo que era, em larga escala, homogêneo (densidade constante) e isotrópico (mesmas propriedades válidas em todas as direções). Acredita-se que esta seja a melhor descrição para o Universo em larga escala.

Com as condições de isotropia e homogeneidade, a solução mais geral das equações de Einstein é dada pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (69)$$

onde (t, r, θ, ϕ) são as coordenadas do sistema e $a(t)$ é o chamado fator de escala.

O parâmetro k assume os valores $-1, 0, 1$. Estes parâmetros definem a curvatura da parte espacial da métrica. Se $k = 1$, o espaço é finito e de curvatura positiva (Universo fechado), se $k = 0$, o espaço é infinito e de curvatura nula (Universo plano) e por fim, se $k = -1$ o espaço tem curvatura negativa (Universo aberto)⁴.

O termo “plano” se refere ao fato de que se $k = 0$, então a métrica pode ser escrita da forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (70)$$

e que num dado momento a parte espacial da métrica descreve um espaço tridimensional euclidiano. Quando o fator de escala $a(t)$ é uma constante ou varia muito lentamente, ou seja, $\dot{a}(t) \approx 0$, a métrica descreve um espaço de Minkowski.

Para $k = \pm 1$ é possível estabelecer as seguintes analogias geométricas^[1]: Para $k = 1$ o caso análogo é uma esfera S^3 que num tempo t dado está imersa num espaço quadridimensional (τ, x, y, z) . As coordenadas de um ponto nessa esfera estão relacionadas pela equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \tau^2 = a^2(t) \quad (71)$$

e nesse caso a métrica dl sobre a superfície pode ser escrita como:

$$dl^2 = a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (72)$$

onde r, θ e ϕ são as coordenadas sobre S^3 . O parâmetro de curvatura k , é dado por:

$$k = \frac{1}{a^2(t)}. \quad (73)$$

Podemos dizer, com base nessa analogia geométrica, que $a(t)$ é o raio de curvatura do espaço. Um Universo com estas características possui volume finito, uma vez que a hipersfera possui volume finito ($V_{hipersfera} = 4\pi r^2$, onde r é o raio da hipersfera).

Para $k = -1$, a analogia é com a superfície de uma pseudoesfera que num tempo t dado está imersa em (τ, x, y, z) :

$$x^2 + y^2 + z^2 + \tau^2 = -a^2(t) \quad (74)$$

e a métrica sobre a pseudoesfera é dada por:

$$dl^2 = a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (75)$$

e a curvatura k é dada por:

$$k = -\frac{1}{a^2(t)}, \quad (76)$$

⁴Essa afirmação é verdadeira somente para espaços simplesmente conexos. Os espaços tridimensionais, localmente homogêneos, com curvatura negativa constante e que não são simplesmente conexos são chamados de Espaços de Thurston.[16]

e nesse caso, a pseudoesfera possui um raio de curvatura imaginário. Como a área da pseudoesfera é dada por $4\pi r^2 \sinh \varphi$ com $\cos \varphi = \frac{t}{a(t)}$, então à medida que φ aumenta, a área também aumenta. Quando $\varphi \rightarrow \infty$, $\sinh \varphi \rightarrow \infty$ e portanto o volume da hiperesfera será infinito. Ou seja, para $k = -1$, o Universo possui volume infinito.

As equações de Einstein para a métrica FRW reduzem-se às Equações de Friedmann:

$$\ddot{a}(t) = -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3p)a(t) \quad (77)$$

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 + \left(\frac{k}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho, \quad (78)$$

onde ρ e p são a densidade de energia e a pressão da matéria (ou radiação) presentes no Universo, respectivamente. $G = \frac{1}{M_p^2}$, onde $M_p = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}$ é a massa de Planck. A partir dessas equações, é possível deduzir a lei da conservação da energia:

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p \frac{da^3}{dt} \quad (79)$$

ou ainda

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \quad (80)$$

Para que a equação acima seja totalmente integrável, é necessária uma equação auxiliar, aqui dada na forma de uma equação de estado $p = p(\rho)$. Assume-se, em geral, que tal equação é linear, isto é,

$$p = \alpha \rho \quad (81)$$

onde α é uma constante com $-1 \leq \alpha \leq 1$. A lei de conservação fornece então:

$$\dot{\rho}a(t) + 3\rho(1 + \alpha)\dot{a}(t) = 0, \quad (82)$$

cuja solução é

$$\rho = \rho_0[a(t)^{-3(1+\alpha)}]. \quad (83)$$

Os casos de maior interesse são aqueles em que α toma os valores $\frac{1}{3}, 0, -1$ que correspondem aos estados de gás não-interagente (gás de fótons), matéria não-relativística (fria) e vácuo respectivamente, e dizemos que o Universo é dominado pela radiação, pela matéria e pelo vácuo. Segundo Linde^[1] o Universo passou por várias fases desses três tipos. Para o caso em que a curvatura é pequena se comparada ao termo $\frac{8\pi}{3}G\rho$, a equação (78) se reduz a:

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 \approx \frac{8\pi}{3}G\rho = \frac{8\pi}{3}Ga(t)^{-3(1+\alpha)}\rho_0. \quad (84)$$

Na década de 20, Lemaitre observou que as soluções de Friedmann para as Equações de Einstein levam a um início do Universo marcado por uma singularidade, na qual a temperatura e densidade da matéria seriam infinitos. À rápida expansão dessa singularidade dá-se o nome de Big Bang. Esse modelo de Friedmann-Lemaitre é o que hoje se denomina “Modelo Cosmológico Padrão” (MCP). O MCP é muito bem sucedido, fornecendo uma descrição razoavelmente bem testada da história do Universo desde a síntese de elementos leves (nucleossíntese) até a atualidade. O modelo prevê a Radiação Cósmica de Fundo, cujo espectro corresponde ao de um corpo negro com temperatura de aproximadamente $3K$. Porém, o MCP possui alguns problemas que o tornam incompleto^{[17],[18]}, dentre os quais destacamos:

1.O Problema do Horizonte ^[19]

Assumindo-se que a expansão do Universo se deu de modo uniforme, podemos fazer a seguinte pergunta: qual seria a distância percorrida pela luz, a partir do instante $t = 0$, correspondente à singularidade inicial até o instante t_0 correspondente à era atual numa região homogênea?

Supondo que a luz não sofreu espalhamento nem absorção, podemos tomar a aproximação, devido à homogeneidade e isotropia, de que o Universo é esférico e possui um raio R . A superfície dessa esfera é chamada de “Horizonte de Partículas”, e R é chamado “Raio do Horizonte de Partículas”.

Considerando o caso do Universo plano, ou seja, $k = 0$, a métrica do espaço-tempo se reduz a

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]. \quad (85)$$

Um raio de luz que caminha ao longo do raio da esfera satisfaz $d\theta = d\varphi = 0$. Neste caso a equação acima reduz-se a:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dr^2 \quad (86)$$

Mas ao longo de sua linha de universo, a luz possui $ds = 0$ (geodésica nula) e então

$$dt^2 = a^2(t)dr^2 \quad (87)$$

Considerando que a luz se propaga em direção a um observador localizado na origem do sistema de coordenadas, podemos escrever $dt = a(t)dr$, de forma que

$$r_H - r_0 = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (88)$$

onde r_H é o raio da região homogênea. Admitindo que $r_0 = 0$, ou seja, o raio do Universo é zero na singularidade, podemos escrever simplesmente que o raio atual do Universo é dado

por

$$r_H = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (89)$$

Supondo que as condições iniciais para o Universo são impostas num instante t na fase de domínio da radiação, para $a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$, o raio da região homogênea é :

$$r_H = \int_0^t \frac{dt'}{t'^{\frac{1}{2}}} = 2t^{\frac{1}{2}}. \quad (90)$$

O raio do horizonte de partícula de um universo com curvatura k num instante t é a distância que um raio de luz percorre num intervalo de tempo de 0 até t . Então, na fase de domínio da radiação, o raio do horizonte era

$$R = a(t) \int_0^r \frac{dr'}{(1 - kr'^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (91)$$

Para $k = 0$, $a(t) = t^{\frac{1}{2}}$ e $dr' = t^{-\frac{1}{2}}dt$ temos:

$$R = a(t) \int_0^r dr' = t^{\frac{1}{2}} \int_0^t t'^{-\frac{1}{2}} dt' = t^{\frac{1}{2}} 2t^{\frac{1}{2}} = 2t = a(t)r_H. \quad (92)$$

Todos os processos físicos ocorridos nessa época estavam limitados pela distância R . Assim, não podemos esperar homogeneidade das grandezas físicas para além do diâmetro $2R$, a menos que assumamos que o Universo foi criado homogêneo. Em outras palavras, as limitações causais nos dizem que nenhuma região com diâmetro superior a $2R$ deve ser, a princípio, homogênea.

Quando as condições iniciais foram determinadas, esta região cresceu muito até a presente época. O fator η pelo qual a região pode crescer é a razão entre fatores de escala

$$\eta = \frac{a(t_0)}{a(t)} \quad (93)$$

Para estimar η o método mais simples é comparar as temperaturas em t e t_0 . A partir da expressão para a densidade de energia num instante t

$$u(t) = u(t_0) \frac{a(t_0)}{a(t)},$$

e da lei de radiação de corpo negro

$$u = \alpha T^4,$$

e igualando as duas expressões obtemos

$$a^4(t) = \frac{u(t_0)a^4(t_0)}{\alpha T^4} = \frac{\Gamma}{T^4}$$

em que $\Gamma = \frac{u(t_0)a^4(t_0)}{\alpha}$). Com isso chegamos a $a \propto T^{-1}$ e portanto podemos escrever:

$$a(t) = \beta[T(t)]^{-1}, \quad (94)$$

e então

$$\eta = \frac{a(t_0)}{a(t)} = \frac{\beta[T(t_0)]^{-1}}{\beta[T(t)]^{-1}} = \frac{T(t)}{T(t_0)}. \quad (95)$$

A a relação entre tempo e temperatura também é dada pela expressão^[19]

$$t = t_{sec} = 2,4 \times 10^{-6} g^{-\frac{1}{2}} T^{-2} GeV, \quad (96)$$

onde t_{sec} é o tempo expresso em segundos, g é um fator que depende das espécies de partículas presentes no instante t e

$$g = \frac{7}{8}(4 + 2l) + 2, \quad (97)$$

onde l é o número de famílias de léptons.

Por conveniência expressamos $T_0 = T(t_0)$ em GeV . Temos então:

$$T_0(GeV) = 2,585 \times 10^{-13} \left(\frac{T_0}{3K} \right). \quad (98)$$

Podemos então, calcular o raio da região homogênea $r_H = a^{-1}R \propto \eta R$ a partir de:

$$R = 2ct_{sec} = 2c(2,4 \times 10^{-6})g^{-\frac{1}{2}}T^{-2}. \quad (99)$$

E usando $T = \eta T_0$ obtemos:

$$R = 5,57 \times 10^{17} g^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \left(\frac{3K}{T_0} \right) \eta^{-1} cm. \quad (100)$$

Então:

$$r_H = 5,57 \times 10^{17} g^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \left(\frac{3K}{T_0} \right) cm. \quad (101)$$

O raio atual da região homogênea é dado por r_H para $T(GeV) = 10^{15}$, correspondente à temperatura na fase de domínio da radiação e $T_0 = 3K$, correspondente à temperatura atual e $g \approx 100$. Então:

$$r_H = \frac{5,57 \times 10^{17}}{10^{15}} 100^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3K}{3K} \right) = 55,7 cm.$$

Ou seja, não há razão para esperar homogeneidade em escala cosmológica ($\approx 10^{28} cm$), mas somente numa região de raio $55,7 cm$. Como, então, regiões causalmente desconexas apre-

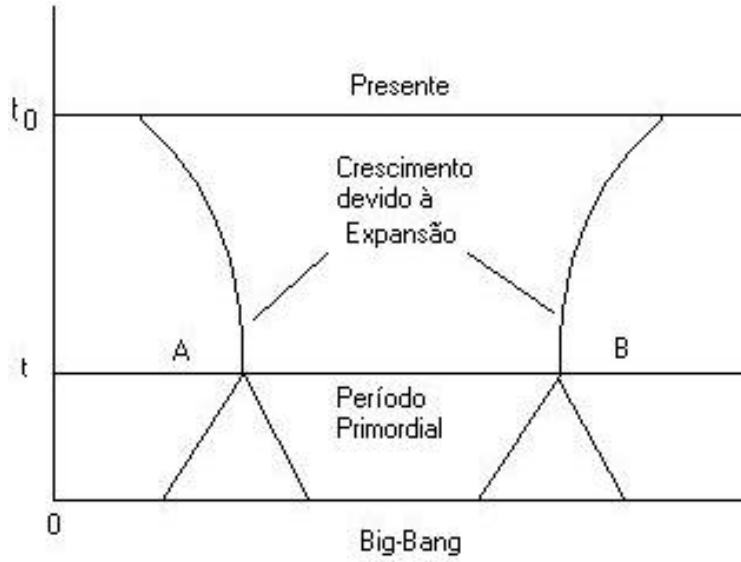


Figura 3: O Problema do Horizonte: num instante remoto t , os observadores A e B num Universo homogêneo possuem regiões causais desconexas

sentam, para um observador, isotropia e homogeneidade (Fig.3)?

2. O Problema da Planicidade [18],[19]:

A razão entre a densidade de energia atual do Universo e sua densidade de energia crítica é:

$$\Omega = \frac{\rho(t)}{\rho_c}, \quad (102)$$

onde a densidade crítica é definida como

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (103)$$

Se o parâmetro $\Omega > 1$, o Universo é fechado e sofre então um colapso gravitacional. Caso $\Omega < 1$, o Universo é aberto e sofre expansão eterna. O valor atual dessa densidade crítica é de aproximadamente $2 \times 10^{-29} h^2 \text{gcm}^{-3}$, onde h é o “parâmetro de ajuste” da constante de Hubble ($0,4 \leq h \leq 1$). Nesse intervalo, a relação entre o parâmetro Ω e o fator de escala é obtida a partir da Equação de Friedmann (78)^[1]:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}, \quad (104)$$

que pode ser escrita da forma:

$$\frac{8\pi G\rho_c}{3} + \left(\frac{k}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}, \quad (105)$$

e com isso temos:

$$\left(\frac{k}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho - \rho_c). \quad (106)$$

Como $a^{-2} = H^2[\dot{a}]^{-2}$, podemos reescrever a equação acima da forma:

$$[\dot{a}]^{-2} = \frac{8\pi G}{3H^2k}(\rho - \rho_c) = \frac{8\pi G\rho_c}{3H^2k}\left(\frac{\rho}{\rho_c} - 1\right), \quad (107)$$

ou seja,

$$[\dot{a}]^{-2} \propto \left|\left(\frac{\rho}{\rho_c} - 1\right)\right| = |\Omega - 1|. \quad (108)$$

Para um gás ultra-relativístico, vale a aproximação:

$$[\dot{a}(t)]^{-2} \propto t, \quad (109)$$

o que implica em

$$|\Omega - 1| \propto t. \quad (110)$$

As equações (108) e (109) mostram que $|\Omega - 1| \rightarrow \infty$, ou seja, $|\Omega| \rightarrow \infty$ se $t \rightarrow \infty$. O parâmetro $|\Omega - 1|$, para a faixa de valores atuais de Ω , está limitado superiormente por^[1]:

$$|\Omega - 1| \leq 10^{-59} \quad (111)$$

Esse resultado mostra que, se a densidade no tempo de Planck fosse menor que ρ_c , então a densidade de energia atual seria muito baixa, e portanto não haveria a formação de estruturas como estrelas, galáxias, etc, e nenhuma forma de vida se desenvolveria.

Por outro lado, se a densidade no tempo de Planck fosse maior que ρ_c , o Universo teria colapsado há muito tempo atrás. Esse problema de ajuste fino em Ω é chamado Problema da Planicidade.

3. O Problema da Constante Cosmológica ^[20]

Considerando a Equação de Einstein:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu}. \quad (112)$$

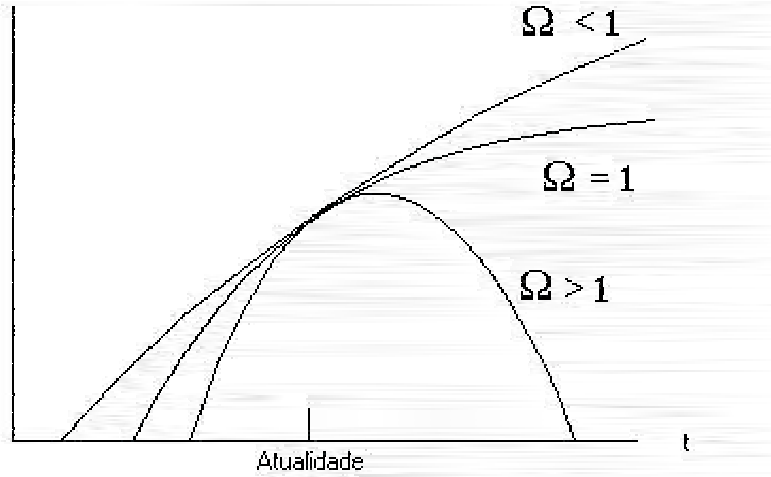


Figura 4: A Evolução do Universo e o Problema da Planicidade : Expansão Indefinida ($\Omega < 1$); Universo Plano ($\Omega = 1$) e Colapso ($\Omega > 1$)

As equações de Friedmann podem ser escritas da forma:

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (113)$$

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G\rho}{3}, \quad (114)$$

onde H é a constante de Hubble, ρ é densidade de energia e p é a densidade de pressão do Universo. O termo da constante cosmológica corresponde à densidade de energia do vácuo $\rho_v = \frac{\Lambda}{8\pi G}$.

Para as equações acima temos os seguintes resultados^[20]:

i) Não há soluções estáticas se $\Lambda = 0$ e $\rho, p > 0$.

ii) Se $\Lambda > 0$ e a contribuição da matéria pode ser desprezada, então $a(t)$ cresce exponencialmente com t . Temos dois casos:

- $H^2 = \frac{\Lambda}{3}$ e $k = 0$

$$a(t) = a(0)e^{Ht}. \quad (115)$$

- $H^2 = \frac{\Lambda}{3}$ e $k = 1$, então

$$a(t) = a(0)\cosh Ht. \quad (116)$$

Ambos os casos representam eras inflacionárias do Universo.

No tempo atual, temos as seguintes relações (equivalentes) para a constante cosmológica:

$$\Lambda_{atual} \leq H_{atual}^2 \approx 10^{-85} GeV^2 \quad (117)$$

$$\rho_v \leq 10^{-47} GeV^4 \quad (118)$$

$$G\Lambda \leq 10^{-122} \quad (119)$$

Na equação (112), o tensor energia-momento é dado por:

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = -p_\Lambda g_{\mu\nu} + (p_\Lambda + \rho_\Lambda)u_\mu u_\nu, \quad (120)$$

onde u_μ é a quadri-velocidade do fluido cosmológico, dado, em coordenadas comóveis, por $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$, e

$$\rho_\mu = -p_\mu \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (121)$$

As equações de Friedmann assumem a forma:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho + \rho_\Lambda) a^2 - k, \quad (122)$$

e

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p - 2\rho_\Lambda) a. \quad (123)$$

Dessas equações, em $t = t_0$, para $p_0 = 0$ obtemos:

$$\frac{k}{a_0^2} = H_0^2 (\Omega_0 + \Omega_\Lambda - 1), \quad (124)$$

onde $\Omega_\Lambda \equiv \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{0c}}$.

Os limites observacionais de Ω_0 levam a:

$$|\rho_\Lambda| < 2\rho_{0c} \approx (10^{-12} GeV)^4 \quad (125)$$

o que, em unidades naturais, corresponde a :

$$|\Lambda| < 10^{-55} cm^{-2}. \quad (126)$$

Esse valor corresponde a uma massa m_Λ que é dada por:

$$m_\Lambda = \left[|\rho_\Lambda| \left(\frac{\hbar}{c} \right)^3 \right]^{1/4} = \left(\frac{\hbar^3}{8\pi G c} |\Lambda| \right)^{1/4} < 10^{-32} eV. \quad (127)$$

$$(128)$$

Os valores ρ_Λ e p_Λ representam a densidade e a pressão do vácuo, que é entendido como sendo o “ground state” de um sistema quântico, isto é, $\rho_\Lambda \equiv \rho_v$ e $p_\Lambda = p_v = -\rho_v$.

Segundo a Teoria Quântica de Campos, nas teorias com quebra espontânea de simetria a densidade do vácuo é tal que $\rho_v \approx V(\Phi, T)$, onde $V(\Phi, T)$ é o potencial efetivo da teoria, T é a temperatura e Φ é o campo de Higgs. Nesse caso:

$$\rho_v \approx \frac{m^4}{(\hbar/c)^3} \quad (129)$$

onde m é a energia na qual a transição ocorre. O valor máximo de m ocorre nas transições das GUTs e vale $10^{15} GeV$, enquanto seu valor mínimo ocorre nas transições da QCD e vale $10^{-1} GeV$. Dessa forma, ρ_v assume valores compreendidos entre $10^{-4} GeV$ e $10^{60} GeV$.

Comparando os valores da densidade do vácuo prevista pelo Modelo Cosmológico Padrão ρ_{MCP} e pela Teoria Quântica de Campos ρ_{TQC} temos:

$$\frac{\rho_{TQC}}{\rho_{MCP}} = \frac{\Lambda_{TQC}}{\Lambda_{MCP}} = \frac{\rho_{TQC}}{10^{-48}} \quad (130)$$

Dessa forma temos $\Lambda_{TQC} = 10^{44} \Lambda_{MCP}$, para o menor valor de ρ_{TQC} e $\Lambda_{TQC} = 10^{108} \Lambda_{MCP}$, para o maior valor.

O problema da constante cosmológica pode ser posto da seguinte forma:
As observações indicam um valor muito baixo (ou nulo) para a constante cosmológica, enquanto a Teoria Quântica de Campos prevê um valor da ordem, no mínimo, de 10^{44} vezes o maior limite observado.^[20]

3.2 - Universo Inflacionário

3.2.1 - O Modelo de Guth

Para resolver os problemas do horizonte e da planicidade, Guth propôs, em 1981^[21], um modelo no qual o Universo passou por uma curta fase de expansão extremamente rápida, denominada *Inflação*. Durante essa fase o fator de escala sofreu um aumento de aproximadamente 10^{50} vezes. Para que esse modelo possa ser efetivo, é necessário um campo de Higgs ϕ ,

o qual foi denominado *Inflaton*, com potencial efetivo $V(\phi)$. Em temperatura zero, o mínimo global de V é chamado de “vácuo verdadeiro”, com $\phi = \phi_v$. O valor de $V(\phi)$ representa a densidade de energia deste estado de vácuo, e está relacionado à constante cosmológica Λ por

$$\Lambda = 8\pi G V(\phi_v). \quad (131)$$

Segundo Guth, o fato de Λ não ter sido detectado indicaria que seu valor no Universo atual seria desprezível. Em alguma fase do Universo primordial, no entanto, o valor de Λ poderia ter sido muito grande. Isso faria com que a densidade do estado de vácuo verdadeiro fosse muito menor que as outras densidades de energia eventualmente presentes naquele cenário. Por isso, assume que

$$V(\phi_v) = 0. \quad (132)$$

Há ainda falsos vácuos, pontos de mínimo local de $V(\phi)$ que possuem uma diferença de energia em relação ao vácuo verdadeiro da ordem de $10^{14} GeV$. É essa energia que permitirá o estado de inflação. Em geral é proposto que durante a inflação, o fator de escala assumiu a forma $a(t) \propto e^{(\alpha t)}$. Essa forma do fator de escala, embora seja a mais comum, não é totalmente necessária. Genericamente, pode-se dizer que a inflação corresponde a um período de expansão acelerada do Universo, o seja:

$$\ddot{a} > 0. \quad (133)$$

Analisando a equação (77):

$$\ddot{a}(t) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a(t) \approx -\frac{4\pi G}{3}(1 + 3\gamma)a(t), \quad (134)$$

onde $\gamma \equiv \frac{p}{\rho}$, é a equação de estado, vemos que expansão acelerada implica em $\gamma < -\frac{1}{3}$.

Se o Universo é dominado pelo campo Inflaton, então (veja equações (141) e (142) abaixo)

$$\gamma = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \rightarrow -1, \quad (135)$$

se a energia cinética do campo ϕ é muito menor que a energia potencial, ou seja, se $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$.

A inflação está ligada à evolução de um campo escalar fracamente acoplado tanto à curvatura quanto aos campos de matéria, que em algum momento está no mínimo de seu potencial. Se o espaço-tempo é do tipo FRW, as equações de movimento são:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_\phi - \frac{k}{a^2}, \quad (136)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_\phi + 3p_\phi)a, \quad (137)$$

onde ρ_ϕ é a densidade de energia associada ao campo Inflaton. Admitimos que ϕ é espacialmente homogêneo, que V tem um mínimo em $\phi = \phi_v$ e que o seu valor inicial ϕ_i é tal que $\phi_i \neq \phi_v$, e que $V(\phi_v) = V'(\phi_v) = 0$. Consideramos ainda que ϕ não acopla com a curvatura e que a Lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi). \quad (138)$$

Vamos considerar aqui somente o caso homogêneo, para o qual a Lagrangiana acima reduz-se a:

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (139)$$

O tensor energia-momento correspondente a $\mathcal{L}$ é dado por:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \mathcal{L}g^{\mu\nu}. \quad (140)$$

Uma vez que ϕ é homogêneo, $T^{\mu\nu}$ pode ser considerado como um tensor de um fluido perfeito, ou seja, $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$. A partir dessas considerações, obtemos as expressões para a pressão e densidade:

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \quad (141)$$

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad (142)$$

As equações clássicas do movimento para ϕ podem ser obtidas através da variação da ação ($\mathcal{L} a^3$) (princípio variacional) ou através da conservação da energia-momento. O resultado será:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (143)$$

onde $V'(\phi) = \frac{dV}{d\phi}$. Esta equação é semelhante à equação do movimento de uma partícula sob ação de uma força $F = -\frac{\partial V}{\partial \phi}$, contra uma força de fricção descrita por um termo de viscosidade, proporcional a $3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$. No modelo inflacionário este termo de fricção é devido à expansão do Universo.

3.2.2 - Como o Modelo Inflacionário Resolve os Problemas do Modelo Cosmológico Padrão

O Problema do Horizonte

O Problema do Horizonte pode ser formulado da seguinte maneira: o raio da região comóvel na qual a radiação cósmica de fundo é observada como sendo homogênea, com uma precisão de 1 parte em 10^4 é muito maior que o raio do horizonte $R(t_{rec})$, que é a máxima distância sobre a qual forças microfísicas podem ter causado a homogeneidade observada no Universo (t_{rec} é o tempo de recombinação, em que elétrons e prótons se recombinam formando hidrogênio neutro). Formalmente temos as definições:

1. Raio do Universo Observável

$$r_H = a(t_0) \int_{t_{rec}}^{t_0} [a(t)]^{-1} dt,$$

e

2. Raio do Horizonte de Partículas

$$R = a(t_0) \int_0^{t_{rec}} [a(t)]^{-1} dt.$$

No Modelo Padrão temos o domínio da matéria, com o fator de escala dado por $a(t) = t^{\frac{2}{3}}$. Dessa forma temos:

$$\begin{aligned} r_H &= 3t_0 \left(1 - \left(\frac{t_{rec}}{t_0} \right)^{\frac{1}{3}} \right), \\ R &= 3t_0^{\frac{2}{3}} t_{rec}^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Comparando os dois raios definidos acima temos, para t_0 suficientemente grande, que $\frac{R}{r_H} \approx \left(\frac{t_{rec}}{t_0} \right)^{\frac{1}{3}} \ll 1$ (veja figura 5). Ou seja, o raio físico do Universo observado é muito maior que o raio do horizonte de partículas.

A teoria inflacionária propõe a seguinte solução deste problema: a inflação ocorre num período $\Delta t = t_R - t_i$, onde t_R é o tempo de reaquecimento e t_i , o instante inicial da inflação, isto é, se $a(t) \approx e^{Ht}$ para $t \in [t_i, t_R]$, então o cone de luz cresce exponencialmente se comparado ao modelo padrão, no qual isto não ocorre. Ou seja, se Δt é suficientemente grande, então $R \gg r_H$ (veja figura 6). Portanto, já no início do tempo de recombinação t_{rec} , o Universo já é, pela teoria inflacionária, homogêneo e isotrópico.

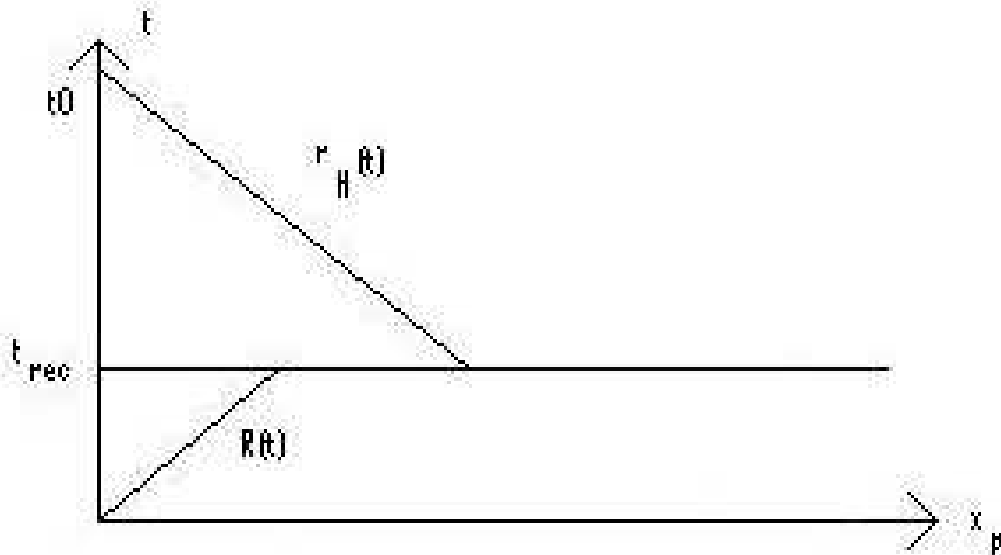


Figura 5: Diagrama ilustrando o problema do horizonte: $r_H \gg R$.

De fato, no período inflacionário $a(t) = e^{Ht}$ e para instantes fora desse período $a(t) = t^{\frac{1}{2}}$, de forma que:

$$r_H = \frac{e^{H(t_0 - t_{rec})} - 1}{H},$$

$$R = 2 \left[t_0^{\frac{1}{2}} (t_i^{\frac{1}{2}} + t_{rec}^{\frac{1}{2}} - t_{rec}^{\frac{1}{2}}) \right] + \frac{t_0^{\frac{1}{2}}}{H} \left(\frac{e^{Ht_R} - e^{Ht_i}}{e^{H(t_i + t_R)}} \right),$$

de forma que, para grandes valores de t_0 , $\frac{R}{r_H} \approx \left(\frac{2}{3} \frac{t_i^{\frac{1}{2}} + t_{rec}^{\frac{1}{2}} - t_{rec}^{\frac{1}{2}}}{t_0} \right)$. Para $t_R - t_i$ suficientemente grande temos, $r_H \ll R$.

O Problema da Planicidade

Vimos que a estimativa para o parâmetro Ω atual é $|\Omega - 1| \leq 10^{-59}$ e que para $t \rightarrow \infty$:

$$|\Omega - 1| \rightarrow \infty, \quad (144)$$

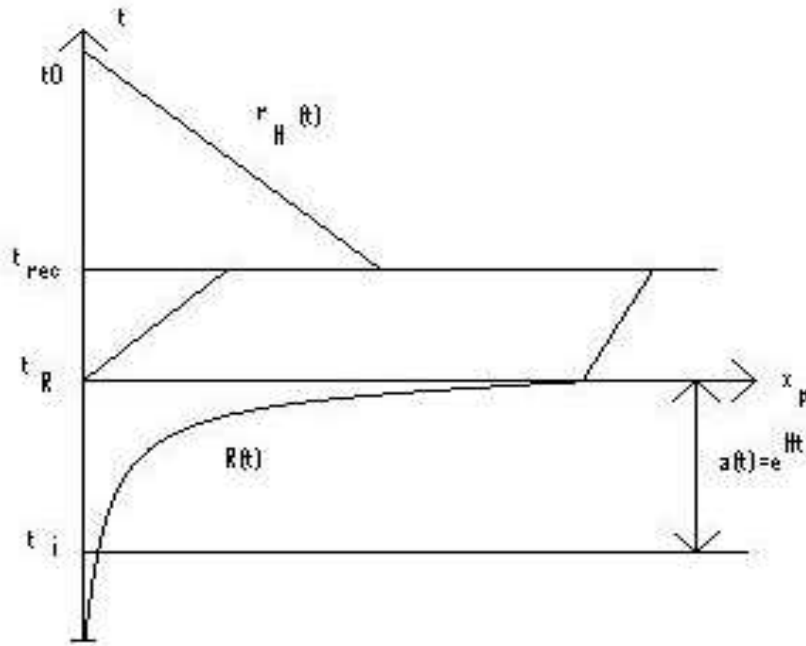


Figura 6: Solução inflacionária para o problema do horizonte: $R \gg r_H$.

isto é, se $t \rightarrow \infty$ então $|\Omega| \rightarrow \infty$. Ou seja, o parâmetro de densidade aumenta muito com o tempo. Dessa forma, o Universo deveria estar num estado de densidade extrema, o que levaria o Universo a um colapso gravitacional.

Durante a inflação, no entanto, considerando que $a(t) \propto e^{Ht}$ e que H não depende do tempo nesse período, temos da equação (108):

$$|\Omega - 1| \propto e^{-2Ht} \quad (145)$$

Se a duração do período inflacionário for suficientemente grande, $|\Omega - 1| \rightarrow 0$, de forma que Ω é muito próximo de 1, após o período inflacionário.

3.3 - O modelo Caótico

O modelo original de Guth já foi substituído por outros mais completos. Vamos aqui apresentar um dos modelos que sucedem o modelo de Guth, chamado Modelo Inflacionário Caótico, proposto originalmente por Linde^[22,23]. Este fundamenta-se na idéia de que a Inflação pode ocorrer com qualquer potencial genérico se o Universo surge a partir de um estado inicial caótico. Nesse caso, o potencial $V(\phi)$ assume diferentes valores em diferentes regiões do Universo, e nas regiões em que $V(\phi)$ é extremamente alto, a Inflação pode ocorrer. Mais ainda, esse modelo sugere que a Inflação pode ser um fenômeno bastante comum num

Universo caótico (isto é, $V(\phi)$ é a energia dominante).

O campo clássico ϕ (Inflaton) é dominante no período inflacionário, e é o responsável pelo crescimento exponencial do fator de escala $a(t)$. Esse modelo tem como hipóteses:

i) A métrica FRW é a métrica que descreve o Universo no qual a taxa de expansão é dada por:

$$H^2 + \frac{k^2}{a^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} \quad (146)$$

Essa aproximação é suficientemente boa se aplicada ao período pós-inflacionário.

ii) $\phi=\phi(t)$ tem valor inicial $\phi_i \neq \sigma$, onde σ é o ponto de mínimo global do potencial $V(\phi)$. Este ponto de mínimo é o ponto zero de energia do potencial $V(\phi)$, isto é, $V'(\sigma) = 0$ e $V''(\sigma) > 0$.

iii) As correções quânticas deste campo escalar podem ser tratadas como pequenas perturbações de um campo clássico.

A equação de movimento do campo ϕ é:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (147)$$

O termo $3H\dot{\phi}$ é chamado *termo de amortecimento* (ou de fricção).

Uma analogia mecânica é o movimento de descida de uma bola por uma rampa inclinada com atrito dado por $3H\dot{\phi}$. Nesse caso, o campo evolui até seu ponto de mínimo. Durante essa descida ocorre o crescimento quase-exponencial de $a(t)$. Torna-se importante, na análise desse problema, saber quão rápido ϕ irá atingir seu ponto de mínimo σ .

Supondo que na fase de inflação ϕ atinge σ num período da ordem de $100H^{-1}$ então $a(100H^{-1}) \approx e^{100}$ e se $M \approx 10^{14}$ GeV então o tempo de expansão é $\sim 10^{-34}$ s, enquanto o tempo para que ϕ atinja σ é $\sim 10^{-32}$ s, ou seja, o tempo de “descida” de ϕ até σ é 100 vezes maior que o período de expansão do fator $a(t)$. Um dos pontos interessantes desse modelo é a ocorrência do fenômeno de ressonância paramétrica que é o fenômeno físico, que no contexto da cosmologia inflacionária, provou ser um mecanismo efetivo para a criação de matéria relativística (reaquecimento) do Universo. Ele acontece quando, após a “descida” o campo ϕ oscila ao redor do mínimo do potencial. O acoplamento de ϕ com campos de matéria permite a transferência de sua energia de oscilação para a produção exponencial de quanta dos campos de matéria.

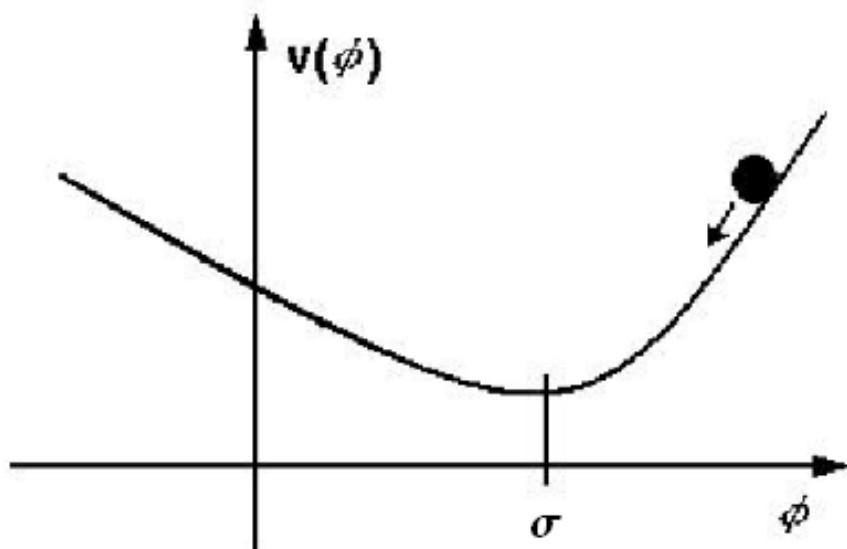


Figura 7: Potencial Caótico

4 - Reconstrução do Potencial do Inflaton $V(\phi)$

A idéia de reconstruir o potencial do inflaton a partir de considerações teóricas ou fenomenológicas vem sendo desenvolvida há algum tempo e muitas idéias a esse respeito estão sendo discutidas atualmente. Na literatura recente há farto material a respeito, dentre o qual destacamos as referências [24–27] e [30–32]. O conceito de reconstrução de potencial refere-se ao processo de determinar o potencial do inflaton, usando dados observacionais^[24], especialmente as anisotropias da radiação cósmica de fundo, ou então abordagens teóricas ou fenomenológicas. Aqui vamos considerar apenas as abordagens teóricas.

Dentre os métodos conhecidos atualmente, destacamos: a reconstrução a partir da equação de estado ^[27] e a reconstrução para o regime de ressonância paramétrica após a inflação [31].

4.1 - Reconstrução a Partir da Equação de Estado

Este método foi proposto por Stornaiolo ^[26,27] e baseia-se na idéia de que é possível encontrar um potencial $V(\phi)$ a partir da equação de estado para o fluido cosmológico $p = p(\rho)$.

Considerando a métrica FRW,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right],$$

partindo das equações de ρ e p para um fluido homogêneo:

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (148)$$

$$p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (149)$$

e usando a lei de conservação:

$$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p), \quad (150)$$

obtemos a seguinte expressão para p :

$$p = \left(-\frac{\dot{\rho}a}{3\rho\dot{a}} - 1 \right) \rho. \quad (151)$$

Mas

$$\frac{\dot{\rho}a}{\dot{a}} = a \frac{d\rho}{da}, \quad (152)$$

então

$$p = \left(-\frac{a}{3\rho} \frac{d\rho}{da} - 1 \right) \rho. \quad (153)$$

Definimos então a grandeza $\gamma(a) = -\frac{1}{3} \frac{a}{\rho} \frac{d\rho}{da}$ e obtemos:

$$p = (\gamma(a) - 1)\rho. \quad (154)$$

Esta equação, idêntica à equação (81), é chamada de Equação de Estado de um γ -fluido. O parâmetro γ varia no intervalo $0 \leq \gamma \leq 2$, chamado intervalo de Zel'dovich^[28]. Substituindo (154) em (150), chegamos à equação diferencial para ρ :

$$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \gamma(a) \rho. \quad (155)$$

Dada a condição inicial $\rho(a_0) = \rho_0$, onde a_0 e ρ_0 são, respectivamente, os valores iniciais do fator de escala e da densidade de energia, a solução da equação diferencial é:

$$\rho(a) = \rho_0 e^{-3 \int_{a_0}^a \frac{\gamma(a')}{a'} da'}. \quad (156)$$

O parâmetro ρ_0 está relacionado ao chamado problema da eficiência, ou seja, quão rápido a inflação ocorre. Substituindo (148) e (149) em (155), obtemos a relação para o potencial $V(\phi)$:

$$\gamma(a)V(\phi) = (2 - \gamma(a)) \frac{1}{2} \dot{\phi}^2.$$

Mas

$$\dot{\phi}^2 = \gamma(a)\rho(a), \quad (157)$$

então:

$$V(\phi) = (2 - \gamma(a)) \frac{\rho(a)}{2}. \quad (158)$$

Substituindo (156) em (158) obtemos:

$$V(\phi) = V(\phi(a)) = (2 - \gamma(a)) \frac{\rho_0}{2} e^{-3 \int_{a_i}^a \frac{\gamma(a')}{a'} da'}. \quad (159)$$

Pela equação (157) vemos que $\gamma(a) \geq 0$ e, que o caso $\gamma(a) = 0$ implica em $p = -\rho$, que corresponde ao estado de vácuo.

Com esse formalismo é possível calcular a evolução do campo ϕ . Como $\dot{\phi}^2 = \gamma(a)\rho(a)$ e $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{da} \frac{da}{dt} = \frac{d\phi}{da} \dot{a}$ e assumindo que o Universo é espacialmente plano ($k = 0$), temos que $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} \Rightarrow \dot{a} = \pm a \sqrt{\frac{8\pi G \rho(a)}{3}}$ então $\dot{\phi} = a \sqrt{\frac{8\pi G \rho(a)}{3}} \frac{d\phi}{da} = \pm \sqrt{\gamma(a)\rho(a)}$. Então

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{da} &= \pm \sqrt{\frac{\gamma(a)\rho(a)}{a}} \sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho(a)}} = \pm \gamma(a) \sqrt{\frac{3}{8\pi G}} \frac{1}{a} = \pm \sqrt{\frac{3}{8\pi G}} \frac{\gamma(a)}{a} \\ \Rightarrow \phi(a) &= \phi(a_i) \pm \sqrt{\frac{3}{8\pi G}} \int_{a_i}^a \frac{\gamma(a')}{a'} da'. \end{aligned} \quad (160)$$

A reconstrução do potencial $V(\phi)$ está ligada aos valores de ρ_0 e $\gamma(a)$, fornecendo uma classificação de V para cada tipo $\gamma(a)$, que contém a informação da taxa de crescimento do Universo durante a inflação. Observamos que fornecendo $\gamma(a)$, estamos dando informação sobre o tipo de matéria no período de interesse. Isso pode vir de considerações teóricas bem como de extrapolação de dados experimentais. Matematicamente, para obtermos uma expressão $V \equiv V(\phi)$, é preciso inverter a equação (160) e obtermos $a \equiv a(\phi)$ e depois substituir na equação (159).

Para determinar o parâmetro $\gamma(a)$, consideramos o parâmetro de rolamento lento⁵ ε , definido como:

$$\varepsilon(\phi) \equiv \frac{m_P^2}{4\pi} \left[\frac{H'(\phi)}{H(\phi)} \right]^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{p}{\rho} + 1 \right) = \frac{3}{2} \gamma(a),$$

e as amplitudes de perturbação A_S e A_G correspondendo às flutuações quânticas do inflaton (perturbações escalares) e métrica (perturbações tensoriais), respectivamente, definidas como:

$$A_S = \sqrt{\frac{2}{\pi}} G H(\phi)^2 |H'(\phi)|^{-1}$$

$$A_G = \sqrt{\frac{G}{2\pi^2}} H(\phi).$$

⁵Rolamento lento é o regime no qual o campo inflaton ϕ é tal que o termo $\frac{\dot{\phi}}{2}$ é aproximadamente 0.

A partir dessas definições temos a relação:

$$\frac{A_G}{A_S} = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\frac{3}{2}\gamma(a)},$$

ou seja,

$$\gamma(a) = \frac{2}{3} \left(\frac{A_G}{A_S} \right)^2.$$

4.2 - Reconstrução no regime pós-inflacionário

É sabido que um potencial da forma $V(\phi) = \lambda\phi^4/4$ leva a uma Equação de Lamé para os campos de matéria via acoplamento do tipo $g^2\phi^2\chi^2/2$ ^[30]. Finkel e seus colaboradores^[31] estudaram o problema inverso: descobrir qual o potencial $V(\phi)$ mais geral que leva a uma Equação de Lamé, para o acoplamento $g^2\phi^2\chi^2/2$. O método é descrito abaixo.

A Lagrangiana para o sistema dos dois campos acoplados é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\partial^\mu\chi\partial_\mu\chi - V(\phi) - \frac{g^2}{2}\phi^2\chi^2 \quad (161)$$

A partir das equações de Euler-Lagrange para $(\mathcal{L}, a^3)$ obtemos as equações de movimento para os campos ϕ e χ :

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (162)$$

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} - \partial_i\partial^i\chi + 3H\partial^i\partial_i\chi + g^2\phi^2\chi = 0. \quad (163)$$

Vamos tomar algumas aproximações para obter a solução do sistema acima^[29]. Primeiramente vamos desprezar os efeitos de “back-reaction” na equação (162), isto é, na equação para ϕ não aparece contribuição dos campos de matéria χ . Além disto vamos considerar o caso em que o inflaton está no início de suas oscilações, após o período inflacionário, com uma frequência muito maior que H . Além disto vamos considerar o caso em que o valor médio de $V(\phi)$ é também muito maior que seu mínimo $V_0 = V(\phi_0)$. Observamos que outros regimes, em geral, mais complexos, são tratados na literatura^[6,7]. Com as restrições acima, podemos desprezar o termo proporcional a $\dot{\phi}$ e as equações (162) e (163) ficam reduzidas a:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + V'(\phi) = 0, \quad (164)$$

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} - \partial_i\partial^i\chi + g^2\phi^2\chi = 0. \quad (165)$$

Tomando a transformada de Fourier de χ :

$$\chi_k = \mathcal{F}\{\chi(\vec{r}, t)\} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3r e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \chi(\vec{r}, t),$$

em que $k = |\vec{k}|$, obtemos:

$$\frac{d^2\chi_k}{dt^2} + [k^2 + g^2\phi^2]\chi_k = 0, \quad (166)$$

Fazendo uma mudança de variável (transformação de escala) $t = \tau x$, em que τ é uma constante, podemos escrever

$$\phi(t) = \phi_0 \left(\frac{\tilde{\phi}(x)}{\phi_0} \right) = \phi_0 f(x), \quad (167)$$

e $\chi_k(t) = X_k(x)$. Dessa forma a equação (166) fica:

$$\frac{d^2X_k}{dx^2} + [\tau^2 k^2 + g^2\phi_0^2 f^2(x)]X_k = 0. \quad (168)$$

O problema consiste em encontrar o potencial $V(\phi)$ tal que a equação de movimento de χ_k (168) se reduz a uma Equação de Lamé do tipo:

$$\frac{d^2X_k}{dx^2} + [\omega_0^2 - hn(n+1)sn^2(x)]X_k = 0, \quad (169)$$

em que $h = \kappa^2 \in (0, 1)$ é o quadrado do módulo da função seno elíptico $sn(x) = sn(x, \kappa)$. Comparando (169) e (168) temos:

$$\tau^2 k^2 + g^2\phi_0^2 f^2(x) = \omega_0^2 - hn(n+1)sn^2(x).$$

O ponto crucial do método é o seguinte artifício: Podemos somar e subtrair o termo $\tau^2\beta g^2\phi_0^2$ no primeiro membro da equação acima, de maneira que ela continue sendo do tipo Lamé. Ou seja:

$$\tau^2[k^2 + \beta g^2\phi_0^2] - \tau^2 g^2\phi_0^2(\beta - f^2(x)) = \omega_0^2 - hn(n+1)sn^2(x), \quad (170)$$

onde β é um parâmetro real, por enquanto, arbitrário. Podemos, então, identificar:

$$f(x) = \pm(\beta - sn^2(x))^{\frac{1}{2}} \quad (171)$$

$$\omega_0^2 = \tau^2(k^2 + \beta g^2\phi_0^2) \quad (172)$$

$$hn(n+1) = \tau^2 g^2\phi_0^2, \quad (173)$$

com a condição que $\beta \geq 1$ para que f seja real. De fato, a equação assim obtida é tal que:

$$\frac{d^2X_k}{dx^2} + [\tau^2 k^2 + g^2\phi_0^2(\beta - sn^2(x))]X_k = \frac{d^2X_k}{dx^2} + [\alpha^2 - g^2\phi_0^2 sn^2(x)]X_k = 0,$$

onde $\alpha^2 = \tau^2 k^2 + g^2 \phi_0^2 \beta$. Ou seja, a forma da Equação de Lamé é preservada quando tomamos a forma mais geral da função $f(x) = \pm(\beta - sn^2(x))^{\frac{1}{2}}$. Por outro lado, substituindo a identidade:

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2,$$

na equação:

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + V'(\phi) = 0, \quad (174)$$

e integrando em relação a ϕ . Obtemos:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + V(\phi) = E, \quad (175)$$

onde a constante de integração E é identificada como a densidade de energia do campo inflaton. Observe que, por causa das aproximações que assumimos acima, nesta equação de conservação da energia não aparecem contribuições ou termos envolvendo campos de matéria χ , de forma que não há transferência de energia de ϕ para χ . Desse forma E é de fato, constante.

A equação satisfeita por f pode ser obtida a partir da equação (175) somando-se a constante V_0 aos dois membros da equação, usando a mudança de escala (167) e a regra da cadeia $\frac{df}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{df}{dx} = \frac{1}{\tau} \frac{df}{dx}$ obtemos:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\phi_0} \right)^2 V(\phi_0 f) + \left(\frac{\tau}{\phi_0} \right)^2 V_0 = \left(\frac{\tau}{\phi_0} \right)^2 E + \left(\frac{\tau}{\phi_0} \right)^2 V(\phi_0 f) + \left(\frac{\tau}{\phi_0} \right)^2 V_0. \quad (176)$$

Definindo as grandezas U_f e E^* da forma:

$$U_f = \left(\frac{\tau}{\phi_0} \right)^2 V(\phi_0 f) + \left(\frac{\tau}{\phi_0} \right)^2 V_0, \quad (177)$$

e

$$E^* = \left(\frac{\tau}{\phi_0} \right)^2 E + \left(\frac{\tau}{\phi_0} \right)^2 V_0, \quad (178)$$

a equação toma a forma:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 + U_f = E^*. \quad (179)$$

Usando as identidades abaixo para definir a função elíptica $dn(x)$:

$$\frac{d}{dx} sn(x) = cn(x) dn(x),$$

$$sn^2(x) + cn^2(x) = 1,$$

$$dn^2(x) + \kappa^2 sn^2(x) = 1,$$

temos:

$$cn^2(x) = 1 - \beta^2 + f^2(x), \quad (180)$$

e

$$dn^2(x) = 1 - h\beta^2 + hf^2(x), \quad (181)$$

onde $\kappa^2 = h$.

Sabendo que $f(x) = \pm(\beta - sn^2(x))^{\frac{1}{2}[31]}$ é solução da equação (179) podemos usar as relações (180) (181) para encontrar U_f e E^* . De fato, temos:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 = \frac{sn^2 x \cdot cn^2 x \cdot dn^2 x}{\beta - sn^2 x}. \quad (182)$$

Substituindo (172), (180) e (181) em (182) obtemos:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 = \frac{\beta(1-\beta)(1-h\beta)}{2f^2} + \frac{2h\beta - 3h\beta^2 + 2\beta - 1}{2} + \frac{3h\beta - h - 1}{2} f^2 - \frac{h}{2} f^4. \quad (183)$$

Como U_f é uma função de f e E^* é uma constante, podemos identificar:

$$U_f = \frac{hf^4}{2} + \frac{1}{2}(1+h-3h\beta)f^2 + \frac{\beta(\beta-1)(1-h\beta)}{2f^2}, \quad (184)$$

e

$$E^* = -\frac{1}{2}[3h\beta^2 - 2(1+h)\beta + 1]. \quad (185)$$

Então, o potencial $V(\phi)$ é dado por:

$$V(\phi) = \left(\frac{\phi_0}{\tau} \right)^2 U(f) = \left(\frac{2h}{\tau^2 \phi_0^2} \right) \frac{\phi^4}{4} + \left(\frac{1+h-3h\beta}{\tau^2} \right) \frac{\phi^2}{2} + \left(\frac{\beta(\beta-1)(1-h\beta)}{\tau^2} \phi_0^4 \right) \frac{1}{2\phi^2} + V_0.$$

onde usamos a equação (167).

Denotando:

$$\lambda = \frac{2h}{\tau^2 \phi_0^2},$$

$$K = \frac{1}{\tau^2}(1+h-3h\beta),$$

$$\mu = \frac{\beta(\beta - 1)(1 - h\beta)\phi_0^4}{\tau^2},$$

o potencial pode ser escrito como:

$$V(\phi) = \lambda \frac{\phi^4}{4} + K \frac{\phi^2}{2} + \mu \frac{1}{2\phi^2} + V_0. \quad (186)$$

em que redefinimos V da forma $V(\phi) \mapsto V(\phi) + V_0$ e a densidade de energia é dada por:

$$E = -\frac{\phi_0^2}{2\tau^2}[3h\beta^2 - 2(1 + h)\beta + 1] + V_0. \quad (187)$$

Aqui redefinimos a densidade de energia da forma $E \mapsto E + V_0$. Analisando os limites de $V(\phi)$ quando $\phi \rightarrow \pm\infty$ vemos que a positividade de λ restringe μ a valores não-negativos, para que V tenha um mínimo global.

Com isso mostramos o seguinte fato: para que a equação de movimento para o campo χ_k se reduza a uma Equação de Lamé, $V(\phi)$ deve necessariamente ser da forma (186). É possível ainda, mostrar que todo potencial dessa forma leva a uma Equação de Lamé, conforme a referência [31].

5 - As Equações de Mathieu e Lamé na Cosmologia Inflacionária

A idéia de reaquecimento está relacionada ao fato de que o Universo, após um período de inflação é levado a um estado de densidade quase nula e temperatura próxima do zero absoluto (0 K). Como o Universo é, atualmente, dominado pela matéria (visível e escura), é então necessário que logo após a inflação tenha havido produção de matéria em larga escala. Nos modelos inflacionários a energia necessária para que isso ocorra está armazenada no potencial inflacionário $V(\phi)$. Este mecanismo de transferência de energia do campo inflaton para campos de matéria é chamado de *Reaquecimento* do Universo. Inicialmente a transferência é feita num regime muito fora do equilíbrio e uma enorme quantidade de matéria (coletivamente denotada pelo campo de matéria χ) é criada. Esta fase é chamada de *Pré-Reaquecimento*. Posteriormente a produção de partículas é mais moderada e esta segunda fase é denominada *Reaquecimento*. Uma terceira fase seria então a termalização da matéria produzida. A partir desse ponto a teoria segue o *Modelo Cosmológico Padrão*.

Os primeiros modelos para criação de matéria foram estabelecidos por Farhi, Abbot, Linde *et al*^[4]. Esses modelos eram baseados em Teoria Quântica de Campos Perturbativa. O Problema com tais modelos é que a temperatura obtida não é suficiente para que possa ocorrer bariogênese (formação de bárions no Universo com a entropia observada). Em 1990 Kirilova e, independentemente, Brandenberger e Trashen^[5] introduziram um novo mecanismo de produção de matéria (fora do equilíbrio) baseado no fenômeno de Ressonância Paramétrica.

A Equação de Mathieu possui uma aplicação no estudo da fase de reaquecimento do Universo. É postulado que nessa fase, o inflaton decai em partículas escalares, as quais, por sua vez, decaem em bárions (bariogênese).

O campo inflaton possui uma densidade Lagrangiana dada por:

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)$$

onde o potencial $V(\phi)$ inclui auto-interações e o termo de massa. Numa primeira aproximação, as contribuições da curvatura do Universo podem ser desprezadas.

Se o valor inicial do inflaton é muito grande $\phi > M_P$, o termo de fricção $3H\dot{\phi}$ na equação

de movimento é muito maior que $\ddot{\phi}$, ou seja, a equação se reduz a :

$$3H\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0$$

Esse cenário corresponde ao estágio inflacionário^[34]. Com o decréscimo de ϕ , $3H\dot{\phi}$ é cada vez menor, cessando quando $\phi \leq \frac{M_P}{2}$. Após um curto estágio de descida até o mínimo do potencial $V(\phi)$, ϕ oscila muito rapidamente com amplitude $\sim 0,1M_P$ em torno do ponto de mínimo. Devido ao acoplamento de ϕ aos campos de matéria, há uma transferência de energia de ϕ para esses campos, que apresentam um crescimento exponencial em suas amplitudes. Como o número de partículas produzidas é proporcional à amplitude dos campos de matéria (denotados coletivamente por χ) obtém-se uma produção muito grande de partículas do tipo χ . (Este é o mecanismo de Ressonância Paramétrica).

Considerando um único campo de matéria χ e tomando a Lagrangiana de interação de ϕ com χ como

$$\mathcal{L}(\phi, \chi) = \frac{1}{2} g^2 \phi^2 \chi^2$$

onde g é a constante de acoplamento, temos a Lagrangiana de χ

$$\mathcal{L}(\chi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi^\mu \partial^\mu \chi^\mu - m_\chi^2 \chi^2 - g^2 \phi^2 \chi^2)$$

cuja equação de Euler-Lagrange é

$$\ddot{\chi}_k + 3H\dot{\chi}_k + \left(\frac{k^2}{a(t)^2} + m_k^2 + g^2 \phi^2 \right) \chi_k = 0 \quad (188)$$

Na equação acima foi tomada a transformada de Fourier da solução $\chi(\vec{r}) = \chi(\vec{r}, t)$ ou seja, $\chi_k(t) = \mathcal{F}[\chi(\vec{r}, t)]$ de modo que no cenário do reaquecimento do Universo $\chi_k(t)$ é interpretado como a amplitude dos campos de matéria χ para partículas com momento $k = |\vec{k}|$. Por outro lado, a solução aproximada para a equação de movimento do inflaton com potencial dado por $V(\phi) = \frac{1}{2} m_\phi \phi^2$ (potencial do modelo caótico) é dada por

$$\phi(t) \sim \phi_0 \sin(m_\phi t) \quad (189)$$

onde ϕ_0 é o ponto de mínimo do potencial. Substituindo (189) em (188) obtemos

$$\ddot{\chi}_k + 3H\dot{\chi}_k + \left(\frac{k^2}{a(t)^2} + m_\chi^2 + g^2 \phi_0^2 \sin^2(m_\phi t) \right) \chi_k = 0 \quad (190)$$

Numa primeira aproximação, a expansão do Universo pode ser desprezada, e tomando $a(t) = cte = 1$ temos:

$$\ddot{\chi}_k + (k^2 + g^2 \phi_0^2 \sin^2(m_\phi t)) \chi_k = 0 \quad (191)$$

que é uma equação do tipo Mathieu.

O espaço 2-dimensional dos parâmetros (k, g) apresenta regiões onde a solução cresce exponencialmente (bandas de ressonância ou instabilidade) e regiões com soluções limitadas e periódicas (bandas de estabilidade). Pelo Teorema de Floquet, nas bandas de ressonância, a solução é da forma $\chi_k \propto e^{\mu_k t}$ onde μ_k é o expoente de Floquet. Usando a Transformação de Bogolyubov [35], encontra-se o número de partículas produzidas $n_k \propto e^{2\mu_k t}$. Se χ é um campo bosônico temos uma produção exponencial de partículas (se μ_k é um número real). Se, no entanto, χ é fermiônico, então o Princípio de Exclusão de Pauli faz com que a produção de partículas não seja exponencial.

A Equação de Lamé é aplicada no contexto da fase de pré-reaquecimento do Universo.

Considerando ϕ como um campo escalar clássico com potencial efetivo dado por ⁶

$$V(\phi) = \pm \frac{1}{2} m_\phi \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \quad (192)$$

Com Lagrangiana de interação $\mathcal{L}(\phi, \chi) = \frac{1}{2} g^2 \phi^2 \chi^2$, onde g é uma constante pequena, temos a equação de movimento

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} \pm m\phi + \lambda\phi^3 = 0$$

Após o período de inflação, ϕ decresce abaixo de M_p e o termo $3H\dot{\phi}$ torna-se desprezível. Nesse momento, a equação de movimento se reduz a $\ddot{\phi} \pm m\phi + \lambda\phi^3 = 0$, cuja solução é dada pelas funções elípticas de Jacobi^[24]. Se desprezarmos o termo de massa, $\phi(t) \propto sn(t)$ torna-se uma solução possível. A equação de movimento para χ passa a ser então

$$\ddot{\chi}_k(t) + [k^2 + g^2 \phi_0 sn^2(m_\phi t)] \chi_k(t) = 0 \quad (193)$$

que é uma Equação de Lamé.

Analisamos no próximo capítulo algumas propriedades das Equações de Hill, da qual as Equações de Lamé e Mathieu são casos particulares, e suas implicações para o potencial inflacionário.

⁶O termo $-\frac{1}{2} m_\phi \phi^2$ leva a uma quebra espontânea de simetria no modelo inflacionário

6 - Teoremas Inversos da Teoria de Hill e Aplicações em Cosmologia Inflacionária

Atualmente a teoria inflacionária caótica possui uma ramificação de grande interesse, a “Teoria de Reaquecimento” que dá um passo importante na explicação da criação da matéria (incluindo aqui a matéria escura) observada em nosso universo. Os antigos modelos, baseados em métodos perturbativos não foram bem-sucedidos em obter temperaturas altas o suficiente para a bariogênese. Há alguns anos, um mecanismo baseado na teoria matemática de Ressonância Paramétrica foi planejado para obtê-las. Este mecanismo, incorporado à Teoria Inflacionária, apresenta um crescimento exponencial das soluções, o qual é interpretado como uma produção exponencial de partículas no fim do período inflacionário.

A maior parte dessas teorias recai em equações lineares para os campos de matéria, uma vez que elas são as mais simples e em todos os fenômenos básicos sob estudo aparece esse tipo de equação. A Lagrangiana de interação pode ser escrita, em sua forma mais geral, como

$$\mathcal{L}_{int} = gf(\phi)\chi^2, \quad (194)$$

onde g é a constante de acoplamento da interação e $f(\phi)$ é um polinômio.

As equações de movimento obtidas são, em sua forma mais geral, Equações de Hill ^[10] que exibem Ressonância Paramétrica como comportamento para certas classes de suas soluções. Isto é uma consequência do Teorema de Floquet, visto no Capítulo 2.

Por outro lado, a inflação é um paradigma para vários modelos. Isso significa que diferentes potenciais para o campo inflaton foram propostos na literatura. Agora, temos a seguinte questão : Se assumimos a Ressonância Paramétrica como o mecanismo de produção de matéria, o que podemos inferir sobre o Potencial do Inflaton?

Do ponto de vista da Física atual, esta questão está no mesmo espírito (mas, claramente, não tão realista) do programa de nucleossíntese, que procura pelas reações nucleares primordiais que deram origem à atual abundância de distribuição dos elementos. Matematicamente, isto é um tipo de problema inverso, uma vez que temos alguma informação da solução de uma equação diferencial (com potencial), e procuramos deduzir alguma característica do potencial.

6.1 - Equação de Hill e o Potencial $V(\phi)$

Seja $V(\phi)$ o potencial inflacionário. Como mencionamos acima, a questão que queremos analisar pode ser enunciada da seguinte forma: Se conhecemos (ou postulamos) a Lagrangiana de interação $\mathcal{L}_{int}$, o que podemos deduzir sobre $V(\phi)$?

A Lagrangiana de Interação mais geral que podemos ter para aplicar os teoremas abaixo é a descrita pela Equação (194). A Lagrangiana total pode então ser escrita como:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) + \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \mathcal{L}_{int}. \quad (195)$$

A Equação de movimento resultante para os campos de matéria, supondo que χ é espacialmente uniforme, é dada por uma equação do tipo Hill:

$$\ddot{\chi} - gf(\phi(t))\chi = 0, \quad (196)$$

onde a função $Q(t) = -gf(\phi(t))$ é periódica na variável temporal t . Podemos tomar, sem perda de generalidade, seu período como π e $\int_0^\pi Q(t)dt = 0$ ^[9]. Então a Equação de Hill fica:

$$\ddot{\chi} + Q(t)\chi = 0, \quad (197)$$

onde $Q(t + \pi) = Q(t)$.

O seguinte resultado relativo às Equações de Hill é crucial para a obtenção de informação sobre o Potencial Inflacionário:

Teorema 1^[9] : Se a equação (197) possui dois intervalos de instabilidade, então $Q(t)$ satisfaz a equação diferencial:

$$\ddot{Q} = 3Q^2 + AQ + B, \quad (198)$$

ou, equivalentemente,

$$\dot{Q}^2 = 2Q^3 + AQ^2 + 2BQ + C. \quad (199)$$

O teorema acima fornece uma equação para a função periódica $Q(t)$. Para aplicar o teorema devemos supor que a equação (197) tem somente uma banda de ressonância não-trivial. A banda trivial é o intervalo $(-\infty, \lambda_0)$ para todas as equações de Hill. Então $Q(t)$ satisfaz às equações (198) e (199).

Supondo, que $f(\phi) = \phi^n$ temos então que $Q(t) = -g\phi(t)^n$. Daí, substituindo na equação (198), obtemos para ϕ :

$$-g[n(n-1)\phi^{n-2}\dot{\phi}^2 + n\phi^{n-1}\ddot{\phi}] = 3\phi^{2n} + A\phi^n + B. \quad (200)$$

Por outro lado, a Equação do Movimento (aqui estamos desconsiderando contribuição da

expansão do Universo) para o campo ϕ é dada por:

$$\ddot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi}. \quad (201)$$

Substituindo (201) em (200) temos

$$-g[n(n-1)\phi^{n-2}\dot{\phi}^2 - n\phi^{n-1}\frac{dV}{d\phi}] = 3g^2\phi^{2n} - Ag\phi^n + B.$$

Dividindo ambos os membros por $-gn\phi^{n-2}$ e derivando com respeito a t obtemos:

$$-2(n-1)\dot{\phi}\ddot{\phi} + \phi\dot{\phi}\frac{d^2V}{d\phi^2} + \dot{\phi}\frac{dV}{d\phi} = \frac{3g(n+2)}{n}\phi^{n+1}\dot{\phi} - \frac{2A}{n}\phi\dot{\phi} - \frac{B(n-2)}{gn}\phi^{-(n-1)}\dot{\phi}. \quad (202)$$

Usando novamente a equação (201) para o termo $\ddot{\phi}$ obtem-se

$$(2n-1)\frac{dV}{d\phi} + \phi\frac{d^2V}{d\phi^2} = \frac{3g(n+2)}{n}\phi^{n+1} - \frac{2A}{n}\phi - \frac{B(n-2)}{gn}\phi^{-(n-1)}. \quad (203)$$

Resolvendo (203) encontramos a solução:

$$V(\phi) = \frac{g}{n^2}\phi^{n+2} - \frac{A}{2n^2}\phi^2 + \frac{B}{gn^2}\frac{1}{\phi^{n-2}} - \frac{C}{2n-2}\frac{1}{\phi^{2n-2}} + V_0, \quad (204)$$

onde C e V_0 são constantes de integração.

Para $n = 2$ obtemos o potencial:

$$V(\phi) = \frac{g}{4}\phi^4 - \frac{A}{8}\phi^2 + \frac{B}{4g} - \frac{C}{2}\frac{1}{\phi^2} + V_0, \quad (205)$$

onde V_0 é uma constante. Incorporando o termo constante $\frac{B}{4g}$ a V_0 , reduzimos a expressão do potencial para:

$$V(\phi) = \frac{g}{4}\phi^4 - \frac{A}{8}\phi^2 - \frac{C}{2}\frac{1}{\phi^2} + V_0. \quad (206)$$

Esse potencial é o mesmo encontrado na seção 4.2, obtido, no entanto, de uma forma mais simples. Comparando (206) com (186), vemos que:

$$g = \frac{2h}{\tau^2\phi_0^2} \quad (207)$$

$$A = -\frac{4}{\tau^2}(1 + h - 3h\beta) \quad (208)$$

$$C = -\frac{\phi_0^4}{\tau^2}\beta(\beta-1)(1-h\beta) \quad (209)$$

Para o caso mais geral $Q(t) = -gf(\phi)$, o teorema nos fornece a seguinte equação diferencial:

$$g \frac{dV}{d\phi} \frac{df}{d\phi} + g \frac{d^2 f}{d\phi^2} \dot{\phi}^2 = 3g^2 f^2 + Af + B \quad (210)$$

Dividindo a equação por $g \frac{d^2 f}{d\phi^2}$, derivando em relação a t e simplificando, obtemos:

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} + Q_1 \frac{dV}{d\phi} = Q_2, \quad (211)$$

onde $Q_1(t) = \left[3 \left(\frac{df}{d\phi} \right)^{-1} \left(\frac{d^2 f}{d\phi^2} \right) + \left(\frac{d^2 f}{d\phi^2} \right)^{-1} \left(\frac{d^3 f}{d\phi^3} \right) \right]$ e

$$Q_2(t) = (6gf - A) + \left(-3gf^2 + Af - \frac{B}{g} \right) \left(\frac{df}{d\phi} \right)^{-1} \left(\frac{d^2 f}{d\phi^2} \right)^{-1} \frac{d^3 f}{d\phi^3}.$$

Resolvendo a equação (211) encontramos a expressão para o potencial $V(\phi)$:

$$V(\phi) = \int \frac{\int Q_2 e^{(\int Q_1 d\phi)} d\phi}{e^{(\int Q_1 d\phi)}} d\phi. \quad (212)$$

Usando as propriedades:

$$\left(\frac{df}{d\phi} \right)^{-1} \left(\frac{d^2 f}{d\phi^2} \right) = \frac{d}{d\phi} \ln \left(\frac{df}{d\phi} \right)$$

e

$$\left(\frac{d^2 f}{d\phi^2} \right)^{-1} \left(\frac{d^3 f}{d\phi^3} \right) = \frac{d}{d\phi} \ln \left(\frac{d^2 f}{d\phi^2} \right)$$

temos que $Q_1 = \frac{d}{d\phi} \left\{ \ln \left[\left(\frac{df}{d\phi} \right)^3 \left(\frac{d^2 f}{d\phi^2} \right) \right] \right\}$, e desse modo:

$$e^{\int Q_1 d\phi} = \left(\frac{df}{d\phi} \right)^3 \left(\frac{d^2 f}{d\phi^2} \right)$$

Dessa forma, o potencial pode ser escrito como:

$$V(\phi) = \int \left\{ \left(\frac{df}{d\phi} \right)^{-3} \left(\frac{d^2 f}{d\phi^2} \right)^{-1} \int^\phi (6gf - A) \left(\frac{df}{d\theta} \right)^3 \frac{d^2 f}{d\theta^2} + \left(-3gf^2 + Af - \frac{B}{g} \right) \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 \frac{d^3 f}{d\theta^3} d\theta \right\} d\phi$$

Para o caso em que f é uma função polinomial, isto é, $f = \sum_{k=0}^n a_k \phi^k$, o potencial $V(\phi)$ toma a forma:

$$V(\phi) = \int \left(\sum_{k,l,m=1}^n a_k a_l a_m k l m \phi^{k+l+m-3} \right)^{-1} \left(\sum_{k=2}^n a_k k(k-1) \phi^{k-2} \right)^{-1} p_n(\phi) d\phi \quad (213)$$

onde p_n é dado por:

$$\begin{aligned} p_n(\phi) = & 6g \sum_{j=0; k,l,m=1; s=2}^n \frac{a_j a_k a_l a_m a_s k l m s(s-1)}{j+k+l+m+s-4} \phi^{j+k+l+m+s-4} + \\ & -A \sum_{k,l,m=1; s=2}^n \frac{a_k a_l a_m a_s k l m s(s-1)}{k+l+m+s-4} \phi^{k+l+m+s-4} + \\ & -3g \sum_{j,k=0; l,m=1; s=3}^n \frac{a_j a_k a_l a_m a_s l m s(s-1)(s-2)}{j+k+l+m+s-4} \phi^{j+k+l+m+s-4} + \\ & A \sum_{j=0; k,l=1; s=3}^n \frac{a_j a_k a_l a_s k l s(s-1)(s-2)}{j+k+l+s-4} \phi^{j+k+l+s-4} + \\ & -\frac{B}{g} \sum_{k,l=1; s=3}^n \frac{a_k a_l a_s k l s(s-1)(s-2)}{k+l+s-4} \phi^{k+l+s-4} + C, \end{aligned} \quad (214)$$

onde usamos as propriedades:

$$\frac{d}{d\phi} \sum_{k=0}^n a_k \phi^k = \sum_{k=1}^n a_k k \phi^{k-1},$$

e

$$\left(\sum_{k=\alpha}^n a_k \phi^k \right) \left(\sum_{k=\beta}^n b_k \phi^k \right) = \sum_{k=\alpha; j=\beta}^n a_k b_j \phi^{k+j},$$

Para que o potencial $V(\phi)$ em (213) seja fisicamente aceitável, ele deve ser limitado inferiormente. Para que isso ocorra, devemos ter

$$\lim_{\phi \rightarrow -\infty} V(\phi) = \lim_{\phi \rightarrow +\infty} V(\phi) = +\infty. \quad (215)$$

Isto é suficiente pois se (215) vale, então existe um intervalo $[-\gamma, \gamma] \subset \Re$ tal que fora deste

intervalo $V(\phi) \rightarrow +\infty$. Como $V(\phi)$ é contínua em $[-\gamma, \gamma]$, então ele atinge um mínimo em $[-\gamma, \gamma]$ e daí também atinge um mínimo em $\mathfrak{R}$. De fato, quando $\phi \rightarrow \pm\infty$, o potencial é da ordem de $(\pm\phi)^{n+2}$. Para que limite seja satisfeito, devemos ter n par. Isso ainda não garante que o potencial seja limitado inferiormente. Para tanto devemos analisar o coeficiente do termo dominante da expressão. Esse é o termo de maior potência de $V(\phi)$ quando $\phi \rightarrow \pm\infty$ e é dado por:

$$\phi^{n+2} \left[\frac{3ga_n}{(5n-4)(n+2)} (2n^3 - n + 2) \right].$$

Uma vez que, nesse caso, $g > 0$ e

$$\frac{2n^3 - n + 2}{(5n-4)(n+2)} > 0,$$

isso implica que, se $a_n > 0$, o limite em (215) é válido, e o potencial $V(\phi)$ é limitado inferiormente. Portanto o Teorema 1 nos mostra que se a matéria na fase pós-inflacionária foi produzida majoritariamente numa única banda, então o Potencial Inflacionário que deu origem ao mecanismo de Ressonância Paramétrica tem um mínimo ao redor do qual pode-se obter Ressonância Paramétrica dos campos de matéria acoplados a ele. Com isso temos que a expressão (213) pode representar um Potencial do Inflaton. É de interesse, devido à Teoria Quântica de Campos, que (213) tenha forma polinomial. Porém, para que isso ocorra, devemos ter uma dependência dos coeficientes a_j e as constantes A, B, C e g . Isso significa que, pequenas perturbações nas constantes implicam numa expressão não polinomial para $V(\phi)$. Até o momento, não encontramos essa dependência, porém sabemos que se $f(\phi) = g\phi^n$, então $V(\phi)$ é necessariamente polinomial.

6.2 -Produção de Partículas com Expansão do Universo

Para o caso em que se leva em consideração a expansão do Universo, temos a equação de movimento para o campo ϕ :

$$\ddot{\phi} + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi}$$

No período pós-inflacionário, $a(t)$ varia muito lentamente de forma que a equação acima se reduz a (201), e o potencial $V(\phi)$ é então dado, em sua forma mais geral, pela equação (204).

Apresentamos o segundo resultado^[9]:

Teorema 2: Se a Equação de Hill:

$$\ddot{y} + (\lambda + Q(t))y = 0$$

com $Q(t + \pi) = Q(t)$ e $\int_0^\pi Q(t)dt = 0$, é tal que o único intervalo de instabilidade é o trivial: $(-\infty, \lambda_0)$, então $Q(t) \equiv 0$.

Esse é um Teorema Inverso não-trivial e, para nossa interpretação física, como a função periódica $Q(t)$ vem de um potencial (oscilações em torno de seus mínimos), isso implica que

todos os potenciais conduzem a bandas de ressonância não-triviais.

Podemos escrever a Lagrangiana total como:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi) + \mathcal{L}(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m) + \mathcal{L}_{int}(\phi, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m)$$

(aqui temos a hipótese de que todos os campos de matéria são provenientes de um único campo inflaton ϕ). Aqui o acoplamento em $\mathcal{L}_{int}$ (Lagrangiana de Interação) não é necessariamente polinomial. A fim de obter $Q(t)$ periódico, exigimos que $\phi(t)$ possua oscilações em torno de um mínimo. Mais ainda, o conjunto dos mínimos pode ter mais de um elemento. Nesse caminho podemos ter, em princípio, oscilações de ϕ em torno de um *falso vácuo* (no modelo de Guth^[21]). Se as amplitudes das oscilações são maiores que a diferença entre o topo da barreira e o valor do falso vácuo, o sistema relaxará para o vácuo verdadeiro. Novas oscilações então dão lugar à criação de um novo tipo de bóson. Em outras palavras, a forma do potencial é importante para o sistema dinâmico Inflaton+Campo de Matéria. A fim de obtermos uma equação linear para os campos de matéria χ_i , devemos escrever a Lagrangiana de matéria como:

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m) = - \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{2} \chi_i^2 + \sum_{i=1}^m \dot{\chi}_i^2, \quad (216)$$

e a Lagrangiana de interação pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}_{int}(\phi, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m) = - \sum_{i=1}^m f_i(\phi) \chi_i^{m_i}. \quad (217)$$

Claramente, para se obter uma equação linear para χ_i devemos ter $m_i = 2$ para todos os valores de i . A equação de movimento para o campo χ_i fica:

$$\ddot{\chi}_i + [\mu_i + f_i(\phi)] \chi_i = 0. \quad (218)$$

Esse teorema diz que a ressonância paramétrica é um tipo de mecanismo genérico, independente do contexto das teorias inflacionárias, ou seja, todos os potenciais com pelo menos um mínimo levam à ressonância paramétrica (bandas de instabilidade não-triviais) para os campos de matéria, uma vez que sendo $\phi(t)$ periódica, $f(\phi(t))$ também será periódica e a equação (218) pode ser classificada como uma Equação de Hill. Ainda mais, como sabemos que $Q(t) \neq 0$, então teremos pelo menos uma banda de ressonância não-trivial, isto é, toda teoria inflacionária com um potencial limitado inferiormente leva necessariamente a uma produção exponencial de partículas quando temos um acoplamento usual do inflaton com os campos de matéria.

Teorema 3: Se $Q(t)$ é tal que a equação

$$\ddot{y} + (\lambda + Q(t))y = 0$$

tem somente um número finito de intervalos de instabilidade, então $Q(t)$ é infinitamente diferenciável.

Uma aplicação imediata deste teorema é a seguinte:

Podemos supor que no Universo primitivo existiam outros campos que contribuíram para o processo de formação de matéria numa escala menor, ou seja, esses campos podem ser vistos como pequenas perturbações (ou ruído) para a formação de matéria. Assumindo uma visão clássica de ruído, ou seja, uma função que, embora possa ser contínua, não é diferenciável em um grande número de pontos, poderíamos pensar que a função $Q(t)$ recebe uma contribuição $\eta(t)$ que não é infinitamente diferenciável. O teorema então garante que o número de bandas de ressonância é infinito.

Como a estrutura das bandas de ressonância consiste de um conjunto infinito de intervalos finitos que não se interceptam em toda a semireta real $(\lambda_0, +\infty)$, podemos concluir que, em princípio, podemos ter Ressonância Paramétrica em todos estes subintervalos e consequentemente partículas relativísticas poderiam ser criadas com valores de momento mais altos.

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos uma aplicação da Teoria das Equações de Hill em Cosmologia Inflacionária. Para isto fizemos três breves exposições: a primeira sobre as Equações de Hill, a segunda sobre Cosmologia Inflacionária e, por último, sobre dois métodos de reconstrução do Potencial Inflacionário.

O estudo da Reconstrução do Potencial do Inflaton $V(\phi)$ é recente e ainda se encontra em fase de desenvolvimento. Nesse trabalho apresentamos dois métodos encontrados na literatura, a saber: o método que usa a Equação de estado e o método de reconstrução no regime pós-inflacionário. Neste último método partimos de uma Equação de Lamé, que está intimamente ligada à produção de partículas no regime pós-inflacionário. O desejável seria fazer a reconstrução do potencial mais geral possível a partir da Equação de Hill. Mas isto é muito mais complexo e a restrição por assumir tal liberdade, do ponto de vista da forma da equação, é aparente nas hipóteses sobre os intervalos de instabilidade da Equação de Hill nos teoremas do capítulo 6.

Apesar de pouco conhecida, a idéia de “Reconstrução” é bastante interessante, uma vez que nos fornece alguns indícios do comportamento do Potencial do Inflaton. Uma questão que pode ser levantada, frente às recentes observações, é se a matéria produzida pelo mecanismo de Ressonância Paramétrica inclui ou não a chamada “Matéria Escura”^[43].

Finalmente, no capítulo 6 apresentamos nossa contribuição original ao trabalho, analisando três teoremas referentes às Equações de Hill e aplicando-os à Cosmologia Inflacionária. O primeiro desses teoremas nos permitiu reconstruir o potencial do Inflaton a partir da forma mais geral da Lagrangiana de interação entre o Inflaton e os campos de matéria. O segundo nos leva a concluir que todo Potencial com pelo menos um mínimo leva à Ressonância Paramétrica. Isso significa que todo potencial limitado inferiormente leva necessariamente à produção exponencial de partículas sempre que tivermos um acoplamento com os campos de matéria do tipo $f(\phi)\chi^2$. Já o terceiro teorema nos diz que outros campos presentes no Universo primitivo agindo como um ruído contribuem para a formação de matéria em regime relativístico.

Apêndice 1 - Invariância da Equação de Hill por Mudança de Período e por uma Translação arbitrária

Ao longo do texto, adotamos a convenção de que a função $p(\omega t)$ é periódica de período π . Essa convenção é possível pois existe uma mudança de variável independente que leva uma função de período T numa função de período π mantendo a forma da Equação de Hill. Considerando a mudança de variável:

$$z = \frac{\pi}{T}t \quad (219)$$

A função p é tal que, se $p(\omega(t + T)) = p(\omega t)$, então redefinindo o parâmetro ω como $\omega \mapsto \omega' = \frac{\omega T}{\pi}$ temos:

$$p(\omega'(z + \pi)) = p\left(\frac{\omega T}{\pi}(z + \pi)\right) = p\left(\frac{\omega T}{\pi}z + \frac{\omega T}{\pi}\pi\right) = p(\omega'z + \omega T) = p(\omega'z). \quad (220)$$

A derivada da função y é:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{\pi}{T} \frac{dy}{dz} \quad (221)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\pi^2}{T^2} \frac{d^2y}{dz^2}. \quad (222)$$

E a equação fica:

$$\frac{\pi^2}{T^2} \frac{d^2y}{dz^2} + [\omega_0^2 + hp(\omega z)]y = 0. \quad (223)$$

Podemos redefinir os parâmetros ω_0^2 e h da forma $\omega_0^2 \mapsto \omega_0'^2 = \frac{\omega_0^2 T^2}{\pi^2}$ e $h \mapsto h' = \frac{h T^2}{\pi^2}$, de modo que a equação fique:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + [\omega_0'^2 + h'p(\omega z)]y = 0. \quad (224)$$

Com isso mostramos que a Equação de Hill é invariante por uma mudança de período da função p . Esse resultado permanece verdadeiro se quisermos mudar o período da função de T_1 para T_2 , bastando para isso definir a mudança de variável $z = \frac{T_2}{T_1}t$.

Considerando uma translação arbitrária da variável t , dada por $x = t + \tau$, onde τ é uma constante, temos:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2y}{dx^2}.\end{aligned}$$

A Equação de Hill fica então:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [\omega_0^2 + hp(\omega x)]y = 0$$

Ou seja, a equação é invariante por uma translação.

Apêndice 2 - Demonstrações

Neste apêndice, apresentamos as demonstrações dos teoremas enunciados no capítulo 6 e alguns lemas.

Teorema 2: Se a Equação de Hill

$$\ddot{y} + [\omega_0^2 + hp(\omega t)]y = 0$$

tem um único intervalo de instabilidade, então $p \equiv 0$.

Para este teorema, apresentamos duas demonstrações, uma devida a Magnus^[9] e outra devido a Hochstadt^[42].

Para a primeira demonstração enunciamos os seguintes lemas:

Lema 1: As soluções de equação $\ddot{y} + [\omega_0^2 + hp(\omega t)]y = 0$ são estáveis se, e somente se, $\Delta = y_1(\pi) + \dot{y}_2(\pi)$ é real e $|y_1(\pi) + \dot{y}_2(\pi)| < 2$ ou $y_1(\pi) + \dot{y}_2(\pi) = \pm 2$ e $y_2(\pi) = \dot{y}_1(\pi) = 0$.

Prova: Considerando a equação característica $\rho^2 - [y_1(\pi) + \dot{y}_2(\pi)]\rho + 1 = 0$, se $\rho_1 \neq \rho_2$ então $\rho_1 = e^{i\alpha\pi}$ e $\rho_2 = e^{-i\alpha\pi}$ são tais que ρ_1 e ρ_2 são limitadas, se e somente se, $\alpha \neq 0$ é real. Como $\Delta = y_1(\pi) + \dot{y}_2(\pi) = \rho_1 + \rho_2 = 2\Re(e^{i\alpha\pi}) = 2\cos\alpha\pi$, temos que $|y_1(\pi) + \dot{y}_2(\pi)| = 2|\cos\alpha\pi| < 2$.

Se $\rho_1 = \rho_2$, então $\alpha = 0$ e nesse caso, $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ou $\rho_1 = \rho_2 = -1$ e portanto, $y_1(\pi) + \dot{y}_2(\pi) = \pm 2$ e nesse caso, pelo teorema de Floquet, $y_2(\pi) = \dot{y}_1(\pi) = 0$. $\diamond$

Lema 2: A Equação de Hill possui duas soluções linearmente independentes e periódicas de período π ou 2π se, e somente se, a equação $\Delta^2(\omega_0^2) - 4 = 0$ tem uma raiz dupla.

Lema 3: A função $\Delta(\omega_0^2)$ é uma função inteira da variável complexa ω_0 e satisfaz:

$$|\Delta(\omega_0^2)| \leq 2e^{|\omega_0|\pi} \cosh(M\pi), \quad (225)$$

onde M é uma constante real positiva.

Lema 4: Se $\omega_0 = \omega_1 + i\omega_2$, então

$$|\Delta(\omega_0^2) - 2\cos\pi\omega_0| \leq 2e^{\pi|\omega_2|} \left(e^{\frac{\pi M}{|\omega_0|}} - 1 \right), \quad (226)$$

onde M é dado por $|p(\omega t)| \leq M$.

Demonstração do Teorema: Pelo lema 1 temos que $|\Delta| > 2$ somente no intervalo de instabilidade trivial. Pelo lema 2, a equação:

$$\Delta^2(\omega_0^2) - 4 = 0, \quad (227)$$

tem raízes duplas $\lambda_{2n-1} = \lambda_{2n}$ e $\lambda'_{2n-1} = \lambda'_{2n}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ e uma raiz simples λ_0 . Considerando a função:

$$F(z) = \frac{1}{2}[\Delta(z + \lambda_0) + (\Delta^2(z + \lambda_0) - 4)^{\frac{1}{2}}], \quad (228)$$

temos:

$$\log F(z) = \ln|F(z)| + i\theta(z), \quad (229)$$

onde $\theta(z)$ é o argumento de $F(z)$.

A parte real do logaritmo de F é:

$$\Re(\log F(z)) = \ln \left| \frac{1}{2}[\Delta + (\Delta^2 - 4)^{\frac{1}{2}}] \right|. \quad (230)$$

Aplicando a desigualdade de triangular, e usando o fato de que para todo número complexo α vale a relação: $|\alpha^r| = |\alpha|^r$ para todo número real r temos:

$$\left| \frac{1}{2}[\Delta + (\Delta^2 - 4)^{\frac{1}{2}}] \right| \leq \frac{1}{2}|\Delta| + \frac{1}{2}|\Delta^2 - 4|^{\frac{1}{2}}. \quad (231)$$

Como $\ln x$ é uma função crescente, temos ainda:

$$\ln \left| \frac{1}{2}[\Delta + (\Delta^2 - 4)^{\frac{1}{2}}] \right| \leq \ln \left(\frac{1}{2}|\Delta| + \frac{1}{2}|\Delta^2 - 4|^{\frac{1}{2}} \right). \quad (232)$$

Pelo lema 3:

$$|\Delta(z + \lambda_0)| \leq 2e^{|z+\lambda_0|\pi} \cosh(M\pi) \leq 2e^{|\lambda_0|\pi} \cosh(M\pi) e^{|z|\pi}, \quad (233)$$

e

$$|\Delta^2 - 4| \leq |\Delta^2| + 4, \quad (234)$$

então

$$|\Delta^2 - 4|^{\frac{1}{2}} \leq (|\Delta^2| + 4)^{\frac{1}{2}}. \quad (235)$$

Da relação $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ para a e b reais positivos, temos:

$$|\Delta^2 - 4|^{\frac{1}{2}} \leq (|\Delta|^2)^{\frac{1}{2}} + 2 \leq 2|\Delta| \leq 4e^{|\lambda_0|\pi} \cosh(M\pi)e^{(|z|\pi)}. \quad (236)$$

Aqui usamos o fato de que $|\Delta| \leq 2$ no intervalo de instabilidade. O logaritmo satisfaz, então:

$$\ln \left(\frac{1}{2}|\Delta| + \frac{1}{2}|\Delta^2 - 4|^{\frac{1}{2}} \right) \leq \ln (3e^{|\lambda_0|\pi} \cosh(M\pi)e^{(|z|\pi)}), \quad (237)$$

E portanto, a parte real de $\log F(z)$ satisfaz:

$$\Re \log F(z) \leq \ln(3e^{|\lambda_0|\pi} \cosh(M\pi)e^{(|z|\pi)}) = \pi|z| + K, \quad (238)$$

onde $K = \ln(3e^{|\lambda_0|\pi} \cosh(M\pi))$.

O logaritmo de $F(z)$ pode ser tomado como sendo da forma: $\log F(z) = az + b$, com a e b constantes. Então:

$$\log F(z) = \log \left\{ \frac{1}{2} \left[\Delta + (\Delta^2 - 4)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} = az + b, \quad (239)$$

que implica em:

$$\frac{1}{2} \left[\Delta + (\Delta^2 - 4)^{\frac{1}{2}} \right] = e^{az+b} \quad (240)$$

O primeiro membro da igualdade é, por definição^[39], igual a $-i \arccos \frac{\Delta}{2}$, então:

$$\arccos \frac{\Delta}{2} = -ie^{az+b}, \quad (241)$$

e

$$\Delta = 2\cos(-ie^{az+b}) = 2\cos(-ie^b e^{az}), \quad (242)$$

que é equivalente a:

$$|\Delta - 2\cos(-ie^b e^{az})| = 0. \quad (243)$$

Pelo lema 4 podemos fazer as identificações: $ia = \pi$, $b = 0$ e $M = 0$. E portanto, $|p(\omega t)| \leq 0$, o que implica em $p(\omega t) = 0$. $\diamond$

Para a segunda demonstração, consideremos uma translação arbitrária da função $p(\omega t)$: $x = t + \tau$. Como mostrado no apêndice 1, a Equação de Hill é invariante por essa translação, ou seja:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\omega_0^2 + hp(\omega x)]y = 0. \quad (244)$$

Temos ainda os seguintes resultados:

Lema5: Se $\mu_n(\tau)$ representa um autovalor da equação (244) sujeita às condições $y(0) = y(\pi) = 0$, então $\lambda'_n \leq \mu_n(\tau) \leq \lambda_n$ com $n = 1, 2, 3, \dots$, por outro lado, se $\nu_n(\tau)$ representa um autovalor da equação sujeita às condições $y'(0) = y'(\pi) = 0$, onde a linha representa a derivação em relação a x , então:

$$\nu_0(\tau) \leq \lambda_0 \quad (245)$$

e

$$\lambda'_{2n-1} \leq \nu_{2n-1}(\tau) \leq \lambda'_{2n} \quad (246)$$

$$\lambda_{2n-1} \leq \nu_{2n}(\tau) \leq \lambda_{2n}, \quad (247)$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$

Lema 6: Se $y_1(x)$ é uma solução de (244), então y_1 pode ser representada por:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad (248)$$

onde $u_0(x) = \cos|\omega_0|x$,

$$u_{n+1}(x) = \frac{1}{|\omega_0|} \int_0^x \operatorname{sen}|\omega_0|(x-z)p(z+\tau)u_n(z)dz, \quad (249)$$

e

$$|u_n(x)| \leq \frac{\left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi |p(z)|dz\right)^n}{|\omega_0|^n}, \quad (250)$$

para $0 \leq x \leq \pi$.

Similarmente, $y_2(x)$ pode ser representada por

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x), \quad (251)$$

com $v_0(x) = \frac{\operatorname{sen}|\omega_0|x}{|\omega_0|}$,

$$v_{n+1}(x) = \frac{1}{|\omega_0|} \int_0^x \operatorname{sen}|\omega_0|(x-z)p(z+\tau)v_n(z)dz, \quad (252)$$

e

$$|v_n(x)| \leq \frac{\left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi |p(z)|dz\right)^n}{|\omega_0|^{n+1}}, \quad (253)$$

Para $x = \pi$ temos:

$$y_1(\pi) = \cos|\omega_0|\pi + \frac{\text{sen}|\omega_0|\pi}{8\omega_0^3} \left[\int_0^\pi p^2(z)dz - 2p'(0) \right] + \dots \quad (254)$$

$$\begin{aligned} y_1'(\pi) = & -|\omega_0|\text{sen}|\omega_0|\pi + \frac{|\text{sen}|\omega_0|\pi}{2|\omega_0|}p(0) + \frac{\cos|\omega_0|\pi}{8|\omega_0|^2} \int_0^\pi p^2(z)dz + \\ & + \frac{\text{sen}|\omega_0|\pi}{8|\omega_0|^3} [p^2(0) - p''(0)] + \dots \end{aligned} \quad (255)$$

$$\begin{aligned} y_2(\pi) = & \frac{\text{sen}|\omega_0|\pi}{\omega_0} + \frac{\text{sen}|\omega_0|\pi}{2\omega_0^3}p(0) - \frac{\cos|\omega_0|\pi}{8\omega_0^4} \int_0^\pi p^2(z)dz + \\ & + \frac{\text{sen}|\omega_0|\pi}{8\omega_0^5} [3p^2(0) - p''(0)] + \dots \end{aligned} \quad (256)$$

$$y_2'(\pi) = \cos|\omega_0|\pi + \frac{\text{sen}|\omega_0|\pi}{8|\omega_0|^3} \left[2p'(0) + \int_0^\pi p^2(z)dz \right] + \dots \quad (257)$$

Uma demonstração do lema 6 é apresentada em [9] e [41].

Lema 7: As funções y_1 , y_2 e Δ , quando consideradas como funções da variável complexa ω_0 , são inteiras, isto é, analíticas em todo o plano.

Prova: Referências [40] e [42].

Prova do Teorema: Uma solução da equação (244) pode ser expressa em termos das soluções de (7) da forma:

$$y_1(x) = y_2'(\tau)y_1(t + \tau) - y_1'(\tau)y_2(t + \tau), \quad (258)$$

$$y_2(x) = y_1(\tau)y_2(t + \tau) - y_2(\tau)y_1(t + \tau). \quad (259)$$

Se o único intervalo de instabilidade é o trivial $(-\infty, \lambda_0)$, então os autovalores correspondentes a $y_2(t = \pi) = 0$ são $\mu_1(0) = \lambda_1' = \lambda_2'$ e $\mu_2(0) = \lambda_1 = \lambda_2$. Pelo lema 5, os autovalores correspondentes a $y_2(x = \pi) = 0$ são os mesmos para todos os valores de τ , o que significa que os autovalores correspondentes a $y_2(x = \pi) = 0$ também são $\mu_1(0) = \lambda_1' = \lambda_2'$ e $\mu_2(0) = \lambda_1 = \lambda_2$.

Pelo lema 7, temos que $y_2(t = \pi)$ e $y_2(x = \pi)$ são funções inteiras de ω_0^2 com os mesmos zeros. Então $y_2(t = \pi)$ e $y_2(x = \pi)$ diferem no máximo por uma função multiplicativa de τ ,

ou seja:

$$y_2(x = \pi) = f(\tau)y_2(t = \pi). \quad (260)$$

Pelo lema 6, $y_2(t = \pi) = \frac{\text{sen}(|\omega_0|\pi)}{|\omega_0|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\omega_0|}\right)$. Similarmente para $y_2(x = \pi)$ temos $y_2(x = \pi) = \frac{\text{sen}(|\omega_0|\pi)}{|\omega_0|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\omega_0|}\right)$. Substituindo na equação (260) e ignorando os termos de ordem $\mathcal{O}\left(\frac{1}{|\omega_0|}\right)$, encontramos $f(\tau) = 1$ e portanto:

$$y(x = \pi) = y(t = \pi). \quad (261)$$

De forma similar, analisamos os autovalores correspondentes às condições $y_1'(t = \pi) = 0$ e $y_1'(x = \pi) = 0$. Como o único intervalo de instabilidade é o trivial, temos pelo lema 5 que $\nu_n(\tau) = \nu_n(0); n \geq 1$ e que no intervalo $(-\infty, \lambda_0)$, $\nu_0(\tau) \leq \lambda_0$. Então:

$$y_1'(x = \pi) = g(\tau)y_1'(t = \pi).$$

A função $g(\tau)$ é dada por:

$$g(\tau) = \frac{\omega_0^2 - \nu_0(\tau)}{\omega_0^2 - \nu_0(0)}, \quad (262)$$

E portanto $y_1'(x = \pi) = \frac{\omega_0^2 - \nu_0(\tau)}{\omega_0^2 - \nu_0(0)}y_1'(t = \pi)$.

Derivando (261) duas vezes em relação a τ temos:

$$\frac{d^2}{d\tau^2}y_2(x = \pi) = \frac{d^2}{d\tau^2}y_2(t = \pi).$$

Mas $\frac{d^2}{d\tau^2}y_2(x = \pi) = -[\omega_0^2 + p(\tau)]y_2(x = \pi) = [\omega_0^2 + p(\tau)]y_2(t = \pi)$. Então:

$$\frac{d^2}{d\tau^2}y_2(x = \pi) - \frac{d}{d\tau}y_1(x = \pi) = -[\omega_0^2 + p(\tau)]y_2(t = \pi) - \frac{d}{dt}y_1(t = \pi)\frac{\omega_0^2 - \nu_0(\tau)}{\omega_0^2 - \nu_0(0)} = 0. \quad (263)$$

Pelo lema 6, temos que, em primeira ordem as funções $y_2(x = \pi)$ e $y_2(t = \pi)$ são dadas por:

$$y_2(t = \pi) = \frac{\text{sen}(|\omega_0|\pi)}{|\omega_0|} + \frac{\text{sen}(|\omega_0|\pi)}{2|\omega_0|^3}p(0) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\omega_0|^4}\right), \quad (264)$$

$$y_2(x = \pi) = \frac{\text{sen}(|\omega_0|\pi)}{|\omega_0|} + \frac{\text{sen}(|\omega_0|\pi)}{2|\omega_0|^3}p(\tau) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\omega_0|^4}\right). \quad (265)$$

Então, em primeira ordem, temos $p(0) = p(\tau)$. Como $\int_0^\pi p(\tau)d\tau = 0$ temos $p(0)\pi = 0$, portanto $p(0) = 0$ e $p(\tau) = 0$. $\diamond$

Teorema 3: Se p é uma função real e integrável, e se a Equação de Hill possui um número finito de intervalos de instabilidade, então p é infinitamente diferenciável. Para a demonstração usamos o :

Lema 8: Os autovalores $\mu_n(\tau)$ são funções de classe C^∞ com respeito a τ .

Demonstração do Teorema: A demonstração se baseia na idéia de que se a equação possui k intervalos de instabilidade, então:

$$y_2(x = \pi) = y_2(t = \pi) \prod_{n=1}^k \frac{\omega_0^2 - \mu_n(\tau)}{\omega_0^2 - \mu_n(0)}, \quad (266)$$

e que

$$\sum_{n=1}^k (\mu_n(\tau) - \mu_n(0)) = -\frac{1}{2} (p(\tau) - p(0)). \quad (267)$$

Então

$$p(\tau) = p(0) - 2 \sum_{n=1}^k (\mu_n(\tau) - \mu_n(0)). \quad (268)$$

Pelo lema 8, como $\mu_n(\tau)$ é infinitamente diferenciável, temos que $p(\tau)$ também é. $\diamond$

Bibliografia

- [1] Linde, A - “Particle Physics and Inflationary Cosmology”; Contemporary Concepts in Physics; Vol.5; Harwood Academic Publishers - 1992.
- [2] Ross, G. G. “Grand Unified Theories” - Frontiers in Physics - Benjamin Cummings Ed., 1984
- [3] Dolgov,A.D. and Linde,A. - Phys. Lett 116B, 329-334, (1982);
- [4] Abbot,L.F., Fahri, E. e Wise,M. Phys. Lett 117B, 29-34, (1982);
- [5] Traschen, J.H. and Brandenberger, R.H. “Particle Production during out-of-equilibrium phase transitions” Physical Review D vol.42(8), 1990.
- [6] Shtanov,Y., Trachen,J. e Brandenberger,R. Phys. Rev. 51D,10, 5438, (1995);
- [7] Kofman,L., Linde,A. e Starobinski,A. Phys. Rev. Lett., 73, 3195, (1994);
- [8] Grib,A. A. Mamaev,S. G., Mostepanenko,V. M. “Vacuum Quantum Effects in Strong Fields”, Friedman Laboratory Publishing (1994);
- [9] Magnus,W. and Winkler,S. - “Hill’s Equation” ; Interscience Publishers, 1966;
- [10] Landau, L. and Lifshitz, E., “Mecanica”, Editora Mir;
- [11] Gradshteyn, I.S. and Ryshik,I.M. “Table of Integrals, Series and Products”, Academic Press, Inc. (1980);
- [12] Chang, Z.X. e Guo,D.R. “Special Functions”; World Scientific Publ.Co.Pt.Ltd.(1989);
- [13] Campos, S.D. “Ressonância Paramétrica em Modelos de Estrelas de Nêutrons” - Tese de Mestrado, IFGW -Unicamp - 2003;
- [14] Arscott,F.M. “Periodic Differential Equations”, The Macmillan Co.(1964);
- [15] Jeffreys,H. and Jeffreys,B. - “Methods of Mathematical Physics”, Cambridge University Press, 1972;
- [16] Thurston,W.P. “The Geometry and Topology of Three Manifolds”, vol. 1, Ed. Levi, Princeton Un. Press,(1997);

- [17] Aldrovandi,R. and Pereira,J.G. “An Introductory Course on Physical Cosmology” - Notas de Aula, IFT-Unesp, 2000;
- [18] Peacock, J.A. “Cosmological Physics” -Cambridge University Press,2001;
- [19] Narlikar,J.V. - “Introduction to Cosmology” - Cambridge University Press, 2^aEd., 1995;
- [20] Schucking, E.L. *The Introduction of the Cosmological Constant*- in “Gravitation and Modern Cosmology - The Cosmological Constant Problem” - Ed. A. Zichichi *et al*-1991;
- [21] Guth,A.H. “Inflationary Universe: a Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems ”; Physical Review D,vol. 23, 2,pag. 347-356(1981);
- [22] Linde,A.D. “Chaotic Inflation” Physics Letters, Vol. 129B,number 3,4 (1983),pag 177-181;
- [23] Linde, A - “Lectures on Inflationary Cosmology”; SU-ITP-94-36;hep-th/9410082;
- [24] Copeland, E.J. *et al* “On the Reliability of Inflaton Potential Reconstruction”- *Phys. Rev. D*58 (1998) 0430023 - astro-ph/9802209
- [25] Lidsey, J.E. *et al* “Reconstructing the Inflaton Potential - an Overview” - *Rev. Mod. Phys.* 69 (1997) 373-410 - astro-ph/9508078,v3 1996
- [26] Mangano,G., *et al* “Inflaton Potential Reconstruction and Generalized Equations of state”, *Mod. Phys. Lett. A*10 (1995) 1977-1988 astro-ph/9507117, 1995;
- [27] Stornaiolo, C. *Phys. Lett. A*, 189,(1994) 351;
- [28] Coles,P. e Lucchin,F. “Cosmology - The Origin and Evolution of Cosmic Structure” - Jonh Wiley and Sons -1995;
- [29] Felder,G., Frolov,A., Kofman,L., Linde,A. “Cosmology with Negative Potential” - *Phys. Rev. D*66 (2002) 023507 - hep-th/0202017;
- [30] Greene,P.B. Kofman,L.A. Linde,A., Starobinsky,A.A., “*Phys. Rev. D*56, 6175 (1997)”;
- [31] Finkel, *et al* “The Lamé equation in parametric resonance after inflation”,*Phys. Rev. D*, vol. 62 (2000), 103515;
- [32] Kolb, E.W. *et al* “Reconstructing the Inflaton Potential” - FERMILAB - Conf. 94/189A - astro-ph/9407021;
- [33] Grivell, I.J. e Liddle, “Inflaton Potential Reconstruction Without Slow-Roll” - *Phys. Rev. D*61 (2000)081301 - astro-ph/9906327;
- [34] Brandenberger, R.H. “Inflationary Cosmology: Progress and Problems” - *Inter. School on Cosmology*, Kish Island, Iran, Jan. 22-Feb.4, 1999 - hep-ph/9910410, 1999;
- [35] Dolgov,A.D. and Kirilova, D.P. - *Sov. J.Nucl. Phys.* 51,172 (1990);

- [36] Hochstadt,H “On the Determinant of a Hill’s Equation from its Spectrum” - Archive for Rational Mechanics and Analysis, 19 (1965), 353-362;
- [37] Zanchin, Maia *et al* - “Reheating in the presence of noise”; Physical Review D, Vol. 57, Number 8,pag. 4651-4662 (1998).
- [38] Zanchin, Maia *et al* - “Reheating in the presence of inhomogeneous noise”; Physical Review D, Vol. 60, Number 8,pag. 023505-1 - 023505-11 (1999).
- [39] Ávila, G. “Variáveis complexas e aplicações” - Livros Técnicos e Científicos Editora, 1990;
- [40] Magnus,W and Shenitzer,A. “Hill’s Equation, Part 1 - General Theory”, New York University, Division of Eletromagnetic Research - “Research Report”’Br-22(1957);
- [41] Ungar,P - “Stable Hill Equations” - Comm. Pure and Applied Math., 14, 707-710 (1961);
- [42] Hochstad, H. - “Results, Old and New, in the Theory of Hill’s Equation” Trans. N.Y. Acad. Sci. Ser. II, 26, 887-901 (1964);
- [43] Arai,M. *et al* - “Superheavy Dark Matter and Parametric Rasonance” - Phys. Lett. B449(1999) 230-236, hep-ph/9808249.