
Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

**Expoentes de Lyapunov e de Morse em
Fibrados Flag**

por

Luciana Aparecida Alves

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

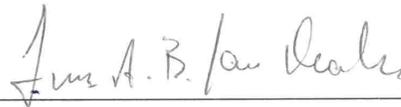
Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP (Processo nº 06/60031-3).

Expoentes de Lyapunov e de Morse em fibrados flag

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Luciana Aparecida Alves** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 03 de novembro de 2010.



Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Prof. Dr. Ali Tahzibi

Prof. Dr. Jairo da Silva Bochi

Prof. Dr. Lucas Conque Seco Ferreira

Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Alves, Luciana Aparecida

AL87e Exponentes de Lyapunov e de Morse em fibrados flag/Luciana
Aparecida Alves-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Luiz Antonio Barrera San Martin

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Sistemas dinâmicos. 2.Teoria ergódica. 3.Lie, Grupos de.
4.Fibrados (Matemática). I. San Martin, Luiz Antonio Barrera.
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Lyapunov and Morse exponents in flag bundles

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Dynamical systems. 2. Ergodic theory. 3. Lie groups. 4. Fiber bundles (Mathematics).

Área de concentração: Teoria de Sistemas Dinâmicos. Teoria de Lie.

Titulação: Doutor em Matemática

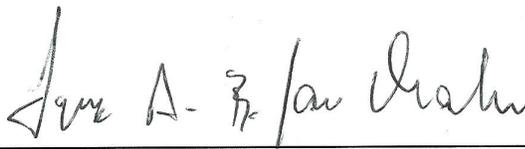
Banca examinadora: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Ali Tahzibi (ICMC – USP)
Prof. Dr. Jairo da Silva Bochi (PUC – RJ)
Prof. Dr. Lucas Conque Seco Ferreira (UnB)
Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino (IMECC - UNICAMP)

Data da defesa: 03/11/2010

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 03 de novembro de 2010 e aprovada

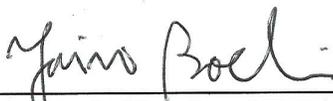
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN



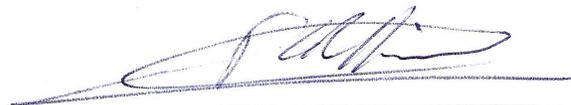
Prof(a). Dr(a). ALI TAHZIBI



Prof(a). Dr(a). JAIRO DA SILVA BOCHI



Prof(a). Dr(a). LUCAS CONQUE SECO FERREIRA



Prof(a). Dr(a). PAULO REGIS CARON RUFFINO

À minha família.

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço à Deus por ter me dado as forças necessárias para que eu pudesse concluir este trabalho.

Em especial, agradeço à pessoa que mais me apoiou durante toda essa caminhada, com a sua amizade, com a sua energia que, positivamente, muitas batalhas ajudou-me a ganhar, com a sua força que conseguiu me emprestar e, principalmente, pelo seu carinho e cuidado. Obrigada, MÃE!

Ao meu pai, Geraldino, agradeço pelo apoio e pelas conversas sobre educação e política.

À minha irmã, Monisse, agradeço pela amizade, pelo incentivo e pelos inúmeros momentos de descontração, principalmente com nossos bichanos.

Ao meu orientador, Luiz San Martin, sou grata pela ajuda, paciência e apoio na elaboração deste trabalho.

Aos membros da banca, os professores Ali Tahzibi, Jairo Bochi, Lucas Seco e Paulo Ruffino, pelas correções, comentários e dicas que foram tão importantes para a conclusão desta tese.

Agradeço também aos vários amigos que fiz nesses quase seis anos em que estive na Unicamp. Em especial, aos amigos Renata, Ademir e Welington, agradeço pela amizade e pelos vários momentos de descontração que passamos. Ao Lonardo, agradeço pelas conversas sobre teoria de Lie e ao Neiton, agradeço pela ajuda incondicional quando me mudei para Uberlândia e pelo apoio nessa reta final do doutorado.

Ao meu bichano Xeide, um gatinho muito fofo e especial, agradeço por todos os

momentos necessários que me tirou dos estudos.

Agradeço a todos os funcionários do Imecc/Unicamp.

Finalmente, agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro no desenvolvimento deste trabalho.

Luciana Aparecida Alves
Campinas, 03 de novembro de 2010.

“Lie theory is in the process of becoming the most important part of modern mathematics. Little by little it became obvious that the most unexpected theories, from arithmetic to quantum physics, came to encircle this Lie field like a gigantic axis.”

Jean Dieudonné ¹

¹Minha tradução: Teoria de Lie está no processo de tornar-se a parte mais importante da matemática moderna. Pouco a pouco, tornou-se óbvio que as teorias mais inesperadas, da aritmética a física quântica, passou a cercar este campo de Lie como um gigantesco eixo.

Resumo

Nesta tese, estuda-se o crescimento exponencial de cociclos contínuos, a valores vetoriais, sobre o fibrado flag maximal. Tais cociclos estão intimamente ligados com os expoentes de Lyapunov clássicos e, assim, o teorema ergódico multiplicativo de Oseledets é provado em um contexto de teoria de Lie semi-simples. Com isto, estabelece-se uma conexão entre a decomposição de Oseledets e a decomposição de Morse em fibrados flag. Além disso, para uma classe de transformações de calibre no fibrado, compara-se a decomposição de Morse obtida em cada fibra com a mais fina, obtida anteriormente por Braga e San Martin.

Abstract

In this thesis, we study the exponential growth of continuous cocycles with vector values on the maximal flag bundle. Such cocycles are intimately connected with the classic Lyapunov exponents, and thus the Oseledec's multiplicative ergodic theorem is proved in the context of semi-simple Lie theory. With this, it is established a connection between the Oseledec decomposition and Morse decomposition in flag bundles. In addition, considering a class of gauge transformations in the bundle, we compare the Morse decomposition obtained in each fiber with the finest Morse decomposition, obtained by Braga and San Martin.

Sumário

Resumo	xi
Abstract	xiii
Introdução	1
1 Decomposições de Morse e de Lyapunov	15
1.1 Transitividade por Cadeias	15
1.1.1 Decomposições de Morse em Fibrados Flag	22
1.2 Expoentes de Lyapunov Clássicos	28
1.2.1 Expoentes de Lyapunov em fibrados vetoriais	29
2 O Teorema Ergódico Multiplicativo em Fibrados Principais	33
2.1 Sequências Regulares em G	33
2.2 α -expoentes de Lyapunov	37
2.2.1 Expoentes de Lyapunov e pontos regulares	38
2.2.2 Cociclo subaditivo	40
2.3 O Teorema Ergódico Multiplicativo	42
2.3.1 α -expoentes de Lyapunov para o fluxo reverso	46
2.3.2 Decomposição de Oseledets para o fluxo reverso	49
2.3.3 Seção de Oseledets	49
2.4 Fibrados Flag Parciais	54
2.5 Expoentes de Lyapunov clássicos e os provenientes do TEM	58

3	Os tipos parabólicos de Morse e Lyapunov	61
3.1	Realização dos expoentes de Lyapunov por medidas ergódicas	62
3.1.1	Medidas atratora e repulsora	64
3.2	Condições necessárias e suficientes	67
3.3	As condições são necessárias	69
3.4	As condições são suficientes	70
3.4.1	ω -limites	72
3.4.2	ω^* -limites	77
3.4.3	Conclusão da demonstração	79
4	Decomposição de Morse para Transformações de Calibre	81
4.1	Decomposição de Jordan	81
4.2	Decomposição de Morse em flags fibra a fibra	83
4.2.1	Caso Regular	91
4.2.2	Caso Não-Regular	94
A	Preliminares	97
A.1	Teoria de Lie Semi-simples Real	97
A.1.1	Decomposições de Cartan e de Iwasawa	98
A.1.2	Subgrupos Parabólicos e Variedades Flag	102
A.1.3	Subálgebras transversais	107
A.2	Representações de Grupos Adjuntos	108
A.2.1	Álgebras compactas	109
A.2.2	Álgebras semi-simples não-compactas	112
A.3	Fibrados Principais e Associados	113
A.3.1	Decomposição de Iwasawa	117
A.3.2	Decomposição de Cartan	118
A.3.3	Decomposição Polar	119
A.3.4	\mathfrak{a} -cociclo sobre fibrados flag	119
A.4	Linearização de fibrados flag	120
A.4.1	Métrica em $T^v(\mathbb{F}_e Q)$	120

A.4.2	Fluxo induzido em $T^v(\mathbb{F}_\Theta Q)$	121
B	Medidas Invariantes	123
B.1	Medidas de ocupação	123
B.1.1	Expoentes de Lyapunov e de Morse realizados por integrais . .	130
B.2	Desintegração de Medidas	132
	Referências Bibliográficas	135

Introdução

Nesta tese, estuda-se a relação entre os expoentes de Lyapunov e os expoentes de Morse associados a fluxos invariantes em um fibrado principal cujo grupo estrutural é um grupo de Lie semi-simples. Os primeiros descrevem o comportamento assintótico de um cociclo vetorial sobre um fluxo neste fibrado. Já, os expoentes de Morse, analisam o crescimento exponencial do fluxo ao longo de cadeias.

Os expoentes de Lyapunov clássicos foram introduzidos por Lyapunov em seu trabalho [21]. Tais expoentes, caso existam, permitem que se obtenha informações acerca do comportamento exponencial de um cociclo linear sobre uma dada transformação. A princípio, os mesmos foram usados para descrever soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias com coeficientes variáveis. Entretanto, as aplicações desses expoentes tornaram-se mais expressivas com a prova do *teorema ergódico multiplicativo de Oseledets* (veja [22]), principalmente na teoria de sistemas dinâmicos.

Sejam (X, μ) um espaço de probabilidade e $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável que preserva medida. Considere $A : X \rightarrow \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ uma aplicação mensurável e defina o seguinte cociclo multiplicativo

$$A(n, x) := A(T^{n-1}(x)) \dots A(x).$$

Suponha que as funções $x \in X \mapsto \log^+ \|A(x)\|$ e $x \in X \mapsto \log^+ \|A^{-1}(x)\|$ são μ -integráveis. Assim, o teorema de Oseledets afirma que, para μ -quase todo $x \in X$, existe uma filtração de subespaços

$$\{0\} = V_0^x \subsetneq V_1^x \subsetneq \dots \subsetneq V_{k(x)}^x = \mathbb{R}^n$$

e números $\lambda_1(x) < \dots < \lambda_{k(x)}(x)$, ditos *expoentes de Lyapunov*, tais que, para $v \in V_i^x \setminus V_{i-1}^x$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|A(n, x)v\| = \lambda_i(x),$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log |\det A(n, x)| = \sum_{i=1}^{k(x)} \lambda_i(x) (\dim V_i^x - \dim V_{i-1}^x).$$

Neste caso, a sequência de matrizes $A(n, x)$ é dita *regular*.

Defina a matriz positiva definida $\Psi(x)$ de forma que $\Psi(x)w = e^{\lambda_i(x)}w$, $1 \leq i \leq s(x)$, onde $w \in E_i^x$, o complemento ortogonal de V_{i-1}^x em V_i^x . Pelo teorema de Oseledets, $A(n, x)$ comporta-se assintoticamente como $\Psi(x)^n$, ou melhor dizendo, a regularidade de $A(n, x)$ é equivalente a afirmar que

$$\frac{1}{n} \log \|A(n, x)\Psi(x)^{-n}\| \rightarrow 0 \text{ e } \frac{1}{n} \log \|\Psi(x)^n A(n, x)^{-1}\| \rightarrow 0. \quad (1)$$

Seguindo Kaimanovich (veja [17]), considere, agora, o espaço simétrico $S = \text{Gl}(n, \mathbb{R})/O_n(\mathbb{R})$ e $x_0 := O_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes ortogonais de $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$. Sejam $g \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ e λ_i os autovalores de $(gg^t)^{1/2}$. Defina a seguinte métrica em S :

$$d(x_0, g \cdot x_0) = \left(\sum_{i=1}^n (\log \lambda_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Com isto, em [17], é provado que as condições (1) são equivalentes à

$$\frac{1}{n} d(\Psi(x)^{-n} \cdot x_0, A(n, x)^{-1} \cdot x_0) \rightarrow 0.$$

Esse trabalho de Kaimanovich generalizou essa noção de regularidade para espaços simétricos quaisquer. Com isto, a teoria clássica dos expoentes de Lyapunov foi introduzida em grupos de Lie G não-compactos redutíveis com centro finito. Dado um espaço simétrico $S = G/K$, onde K é o subgrupo compacto maximal de G , e d uma métrica canônica invariante, Kaimanovich definiu a regularidade de uma sequência $g_n \in G$ como aquelas nas quais existe um raio geodésico tal que a distância de g_n a este raio cresce sublinearmente. Além disso, tomando a decomposição polar de $G = K(\text{cl } A^+)K$, considere h_n a projeção sobre $\text{cl } A^+$ de $g_n = u_n h_n v_n \in K(\text{cl } A^+)K$.

Kaimanovich provou que a regularidade de uma sequência (g_n) é equivalente à existência do limite $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^{1/n}$, denominado de *expoente polar*, e ao crescimento sublinear de (g_n) .

Nesta tese, os resultados de Kaimanovich serão explorados a fim de que se possa estendê-los a certos tipos de fibrados. Os expoentes de Lyapunov de uma sequência $g_n \in G$ em $b \in \mathbb{F}$, variedade flag maximal de G , são dados pelo comportamento assintótico de $\mathbf{a}(g_n u)$, onde $b = ub_0$, no qual b_0 é a origem de \mathbb{F} e $u \in G$, e \mathbf{a} é o logaritmo da projeção sobre a A -componente na decomposição de Iwasawa de $g_n u$. A regularidade de uma sequência, no sentido de Kaimanovich, está intimamente ligada com a existência desses expoentes de Lyapunov.

Seja ϕ um fluxo invariante em um fibrado principal $\pi : Q \rightarrow X$, com grupo estrutural G semi-simples e ν uma medida de probabilidade ϕ -invariante na base. Dada a decomposição de Iwasawa de $G = KAN$, a projeção sobre a A -componente fornece um cociclo vetorial no fibrado flag maximal $\mathbb{F}Q$. Com isto, é possível a partir da regularidade de sequências no grupo G , definir a regularidade de sequências no fibrado e, assim, mostrar a existência dos expoentes de Lyapunov vetoriais no fibrado flag maximal. Mostra-se então que, tais expoentes são dados em cada fibra sobre x pelas translações pelo grupo de Weyl do expoente polar, onde x pertence a um conjunto de medida total Ω . Além disso, cada fibra sobre $x \in \Omega$ decompõe-se como uma união disjunta dos conjuntos estáveis $\text{st}(x, w)$, denominados de *componentes de Oseledets*. Em cada componente $\text{st}(x, w)$, os expoentes de Lyapunov são dados por $w^{-1}H^+(x)$, onde $H^+(x)$ é o expoente polar sobre x . Para o fluxo reverso, o expoente polar é dado por $-w_0 H^+(x)$.

Supondo que ν é uma medida ergódica em X , segue que o expoente polar, dado por uma aplicação mensurável, é constante e dado por H_ν^+ . Com isto, define-se o seguinte subconjunto de raízes simples $\Theta_{L_y} := \Theta(H_\nu^+)$, dito *tipo parabólico de Lyapunov*. Para o fluxo reverso, o tipo parabólico do fluxo reverso é dado pelo dual do tipo parabólico de Lyapunov. Tomando $\pi_{\Theta_{L_y}^*} : \mathbb{F}Q \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{L_y}^*} Q$ a fibração canônica, tem-se que, para $x \in \Omega$, a imagem por $\pi_{\Theta_{L_y}^*}$ da componente repulsora de Oseledets para o fluxo direto $\text{st}(x, w_0)$ é dada por um único ponto em

$\xi^*(x) \in \mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}^*} Q$. Tomando o fluxo reverso, obtém-se, para cada $x \in \Omega$, um ponto $\xi(x) \in \mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}} Q$. Assim, a partir da transversalidade de $\xi(x)$ e $\xi^*(x)$, obtém-se uma seção mensurável sobre Ω do fibrado associado $Q \times_G \text{Ad}(G)H_\nu^+$, denominada *seção de Oseledets*. Tomando a aplicação correspondente $h_{L_Y} : \pi^{-1}(\Omega) \longrightarrow \text{Ad}(G)H_\nu^+$, as componentes de Oseledets são dadas fibra a fibra como pontos fixos de $h_{L_Y}(q)$, ou seja, $\text{st}(\pi(q), w) = q \cdot \text{fix}(h_{L_Y}(q), w)$.

Por outro lado, os expoentes de Morse fornecem a taxa de crescimento exponencial ao longo de cadeias (veja [7]). Nesse trabalho, o espectro de Morse é definido sobre as componentes transitivas por cadeias do fluxo induzido no fibrado flag associado $\mathbb{F}_\Theta Q$ com fibra típica \mathbb{F}_Θ , variedade flag de tipo Θ . Supondo que a base é compacta, em [3] e [23], mostrou-se que as componentes de Morse, ou ainda, as componentes transitivas por cadeia do fluxo induzido são indexadas pelo grupo de Weyl W e existe apenas uma componente atratora, correspondente ao elemento de Weyl na identidade, e uma componente repulsora, dada pela involução principal $w_0 \in W$. As componentes atratora e repulsora são denotadas, respectivamente, por \mathcal{M}_Θ^+ e \mathcal{M}_Θ^- .

O principal resultado de [3] e [23] e de muita utilidade nesta tese é aquele que fornece uma descrição algébrica em cada fibra das componentes de Morse. Mais especificamente, existe um subconjunto de raízes simples, dito *tipo parabólico do fluxo* e denotado por $\Theta(\phi)$, tal que a componente atratora $\mathcal{M}_{\Theta(\phi)}^+$ no respectivo fibrado flag $\mathbb{F}_{\Theta(\phi)} Q$ intercepta cada fibra em único ponto. Tomando $\Theta^*(\phi)$, o tipo parabólico dual de $\Theta(\phi)$, tem-se ainda que a componente repulsora $\mathcal{M}_{\Theta^*(\phi)}^-$ no respectivo fibrado flag $\mathbb{F}_{\Theta^*(\phi)} Q$ intercepta cada fibra em único ponto. Desse modo, é possível definir uma seção contínua do fibrado associado $Q \times_G \text{Ad}(G)H_\phi$, onde $H_\phi \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$ é tal que $\Theta(\phi) = \Theta(H_\phi)$. As componentes de Morse são descritas fibra a fibra como pontos fixos da aplicação contínua correspondente à essa seção, ou seja, $(\mathcal{M}_\Theta(w))_{\pi(q)} = q \cdot \text{fix}(h_{M_0}(q), w)$, onde $h_{M_0} : Q \longrightarrow \text{Ad}(G)H_\phi$ é a aplicação correspondente à seção de $Q \times_G \text{Ad}(G)H_\phi$. No caso, por exemplo, do fluxo induzido no fibrado projetivo $\mathbb{P}\mathcal{V}$ pelo fluxo linear no fibrado vetorial $\mathcal{V} \longrightarrow X$, as componentes de Morse em cada fibra são dadas pelas componentes conexas dos pontos fixos

de uma aplicação linear diagonalizável $H_x : \mathcal{V}_x \longrightarrow \mathcal{V}_x$. Por outro lado, essas componentes conexas são os espaços projetivos dos autoespaços de H_x , o que mostra que o resultado provado por [3] e [23] generaliza o teorema de Selgrade (veja [28]).

Um dos objetivos principais desta tese é analisar quando a decomposição de Morse coincide com a decomposição de Oseledets. Isto é equivalente a mostrar que o tipo parabólico de Lyapunov coincida com o tipo parabólico do fluxo (ou de Morse). A princípio a ideia foi tentar mostrar que a seção de Oseledets estendia-se continuamente ao suporte da medida ergódica na base X que, por hipótese, coincidia com a toda a base. Posteriormente, foram obtidas três condições (*a priori*, mais fracas do que a extensão contínua) para que os tipos parabólicos coincidam. Para isso, foi introduzido os conceitos de medidas *atratora* e *repulsora* nos fibrados flag $\mathbb{F}_{\Theta}Q$, que são medidas que se projetam sobre a medida ergódica na base e realizam os expoentes de Lyapunov. Em geral, tais medidas não são únicas, entretanto, foi provado que nos fibrados flag associados aos tipos parabólicos Θ_{Ly} e Θ_{Ly}^* , as medidas atratora e repulsora são únicas, ou ainda, suas desintegrações são dadas em cada fibra pelas medidas de Dirac em $\xi(x)$ e $\xi^*(x)$, respectivamente. Assim, pode-se afirmar, a grosso modo, que as três condições que fornecem a igualdade entre os tipos parabólicos de Lyapunov e de Morse são as seguintes:

- A função correspondente à seção de Oseledets é limitada;
- O tipo parabólico de Lyapunov associado a outra medida ergódica na base está contido em Θ_{Ly} ;
- Existência de medidas atratoras associadas a outras medidas invariantes na base.

Quanto à questão da extensão contínua, Viana e Bochi em [4] usam o conceito de *decomposição de Oseledets dominada* que, no sentido do teorema de Oseledets clássico, significa que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo y na órbita de $x \in M$,

$$\|A(n, y)v_i\| \geq 2\|A(n, y)v_j\|,$$

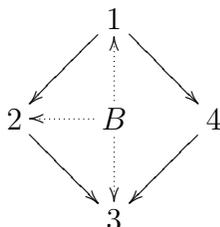
onde v_i e v_j são vetores unitários em E_i^y e E_j^y , respectivamente, e $1 \leq i < j \leq k(x)$, para todo $x \in M$. Nesse artigo, esse conceito de decomposição dominada implica na existência de uma extensão contínua. Em um trabalho futuro, pretende-se traduzir esse conceito no caso de grupos semi-simples e investigar a sua relação com as três condições obtidas nesta tese e, portanto, com a igualdade dos tipos parabólicos de Lyapunov e de Morse. De [7], já se sabe que em fibrados projetivos a decomposição de Morse mais fina coincide com a decomposição dominada mais fina. A decomposição dominada também parece estar estritamente ligada à continuidade dos expoentes de Lyapunov.

Finalmente, no último capítulo, analisa-se as decomposições de Morse em fibrados flag para um fluxo de transformações de calibre. As *Teorias de Gauge*, também chamadas de *Teorias de Calibre*, fornecem um formalismo matemático para a teoria dos campos através das chamadas transformações de calibre. Dado um fibrado principal $Q \rightarrow X$, uma *transformação de calibre* é um automorfismo de Q que preserva fibras e é invariante à direita pela ação de G . De maneira geral, uma transformação de calibre move os pontos de um fibrado principal em relação a uma trivialização fixa. A relevância em obter decomposições de Morse associadas a essas transformações reside no fato de que as mesmas descrevem importantes sistemas dinâmicos, principalmente na Física.

Tendo em vista que uma transformação de calibre preserva fibras, o fluxo ϕ em Q será dado por $\phi(q) = qf(q)$, onde $f : Q \rightarrow G$ é uma função contínua e G -equivariante, isto é, $f(qg) = g^{-1}f(q)g$, para $q \in Q$ e $g \in G$. Dessa forma, tem-se uma decomposição de Morse em cada fibra, dada pelas componentes conexas dos pontos fixos da parte hiperbólica de $f(q)$. Por fim, analisa-se quando a união das componentes de Morse fibra a fibra fornece uma decomposição em todo o fibrado e a sua relação com a decomposição de Morse mais fina obtida no fibrado flag $\mathbb{F}_\Theta Q$ (veja teoremas 1.1.14 e 1.1.15).

Estrutura da tese

Esta tese está dividida em 4 capítulos e dois apêndices (A e B). O seguinte diagrama mostra a ordem de precedência lógica entre os capítulos e o apêndice B. O apêndice A contém toda a terminologia básica usada ao longo de toda a tese.



Na sequência, será feita uma análise detalhada de cada capítulo e enunciando as principais contribuições desta tese.

Capítulo 1: Preliminares

Neste capítulo, serão apresentados os principais objetos de estudo desta tese. Na seção 1.1, serão vistas as definições e resultados de recorrência por cadeias relacionados às decomposições de Morse e introduzidos em [7]. Além disso, define-se um cociclo vetorial sobre fluxos e, a partir disto, é introduzido os conceitos de expoentes de Morse associados a esse cociclo vetorial.

A teoria desenvolvida em [3] e [23] sobre as decomposições de Morse em fibrados flag é resumida na seção 1.1.1. O principal resultado desta seção está contido no 1.1.15, o qual fornece uma descrição algébrica fibra a fibra das componentes da decomposição de Morse minimal no fibrado flag $\mathbb{F}_\Theta Q$. Entretanto, para chegar a este resultado, é imprescindível que seja definido o *tipo parabólico do fluxo*, que, a grosso modo, é dado pelo tipo parabólico de um semigrupo de sombreamento.

Finalmente, na seção 1.2, enuncia-se o teorema ergódico multiplicativo de Oseledets clássico e analisa-se os expoentes de Lyapunov em fibrados vetoriais. Isto será importante, visto que no final do capítulo 2, compara-se os expoentes de

Lyapunov em tais fibrados com os obtidos pelo teorema ergódico multiplicativo para grupos de Lie semi-simples.

Capítulo 2: O Teorema Ergódico Multiplicativo em Fibrados Principais

O teorema ergódico multiplicativo de Oseledets é reformulado em um contexto de grupos de Lie semi-simples G , ou ainda, em seus fibrados flag. Neste sentido, analisa-se o crescimento exponencial de cociclos contínuos, a valores na subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$, onde \mathfrak{s} é a componente simétrica da decomposição de Cartan de \mathfrak{g} , álgebra de Lie de G .

Seja um fluxo ϕ , invariante à direita, em um fibrado principal $\pi : Q \rightarrow X$ com grupo estrutural G semi-simples. Suponha que X seja dotado de uma medida de probabilidade ν , invariante pelo fluxo na base. Pela decomposição de Iwasawa de Q (conceito introduzido em [30]), os cociclos vetoriais em \mathfrak{a} são obtidos pela projeção de Q sobre a A -componente. Assim, o objetivo é mostrar a existência dos expoentes de Lyapunov associados a esse cociclo vetorial.

Inicialmente, na seção 2.1, apresenta-se a teoria introduzida por Kaimanovich (veja [17]). Ou seja, dada uma sequência $(g_k) \subset G$, define-se o expoente de Lyapunov de (g_k) , advindo da decomposição de Iwasawa de (g_k) , e o expoente polar, associado à decomposição de Cartan. Como já foi comentado anteriormente, a regularidade de (g_k) (definição 2.1.1) é equivalente à existência dos expoentes de Lyapunov.

Na seção 2.2, foi reproduzido um resultado de [30] que afirma que cada \mathfrak{a} -expoente de Lyapunov do fluxo é dado por um expoente de Lyapunov de uma sequência em G (proposição 2.2.1). Portanto, a existência dos \mathfrak{a} -expoentes de Lyapunov é reduzida a sequências regulares em G associadas ao fluxo ϕ . Tomando a decomposição de Cartan do fibrado $Q = R \cdot S$, onde R é uma K -redução de Q , um ponto $x \in X$ é dito regular se $s_k := \mathbf{S}(\phi_k(q))$, $\pi(q) = x$, é regular em S , onde \mathbf{S} é projeção sobre a S -componente. No teorema 2.3.1, prova-se a existência de um conjunto $\Omega \subset X$ de medida total tal que todo $x \in \Omega$ é regular. Isto corresponde à primeira parte do teorema ergódico multiplicativo de Oseledets. Além disso, mostra-se que para

elementos regulares cuja fibra está contida nas variedades estáveis das componentes conexas dos pontos fixos de $\exp(tD)$, onde $D \in \mathfrak{s}$ é o raio assintótico de s_k , os expoentes de Lyapunov são dados pela translação do expoente polar pelo grupo de Weyl (veja [30]). Tais variedades estáveis são denotadas por $\text{st}(x, w) := r \cdot \text{st}(D, w)$. Assim, para $\xi \in \text{st}(x, w)$, o \mathfrak{a} -expoente de Lyapunov em ξ é dado por $w^{-1}H^+(x)$, $\pi(\xi) = \pi(r) = x \in \Omega$. Com isto, $\pi^{-1}(\Omega)$ decompõe-se como união disjunta de $\text{st}(x, w)$, para $x \in \Omega$ e $w \in W$.

Para cada $x \in X$ regular, é definido o seguinte subconjunto de raízes simples, dito *tipo parabólico de Lyapunov* em x : $\Theta_{\text{Ly}} := \Theta(H^+(x))$. Os expoentes de Lyapunov para o fluxo reverso são dados por $-\lambda(\xi)$ (proposição 2.3.10). Desta forma, é possível mostrar que o expoente polar para o fluxo reverso é dado por $-w_0H^+(x)$ (corolário 2.3.11), implicando que o tipo parabólico do fluxo reverso é dado pelo dual do tipo parabólico de Lyapunov (corolário 2.3.12). Tomando a fibração canônica $\pi_{\Theta_{\text{Ly}}^*} : \mathbb{F}Q \longrightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}^*(x)}Q$, tem-se que, para $x \in \Omega$, a imagem pela fibração $\pi_{\Theta_{\text{Ly}}^*(x)}$ da componente repulsora de Oseledets para o fluxo direto $\text{st}(x, w_0)$ é dada por um único ponto em $\xi^*(x) \in \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}^*(x)}Q$ (proposição 2.3.13). Tomando o fluxo reverso, tem-se um resultado análogo, ou seja, para cada $x \in \Omega$, obtém-se um único elemento $\xi(x) \in \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}(x)}Q$ (corolário 2.3.14). Além disso, pela proposição 2.3.17, para cada $x \in \Omega$, $\xi(x)$ e $\xi^*(x)$ são elementos opostos.

Supondo que ν é uma medida ergódica, obtém-se então uma seção *mensurável* (dita *seção de Oseledets*) sobre Ω do fibrado associado $Q \times_G \text{Ad}(G)H_\nu^+$ (proposição 2.3.18). Tomando a aplicação correspondente $h_{\text{Ly}} : \pi^{-1}(\Omega) \longrightarrow \text{Ad}(G)H_\nu^+$, tem-se que as componentes de Oseledets são dadas fibra a fibra como pontos fixos de $h_{\text{Ly}}(q)$, ou seja, $\text{st}(\pi(q), w) = q \cdot \text{fix}(h_{\text{Ly}}(q), w)$ (proposição 2.3.19).

Seja um fibrado vetorial \mathcal{V} , dado por um fibrado associado obtido a partir de um fibrado principal Q com grupo estrutural G e uma representação linear ρ de G em um espaço vetorial V . Na seção 2.5, encontra-se a relação existente entre os expoentes de Lyapunov em \mathcal{V} com os \mathfrak{a} -expoentes de Lyapunov no fibrado flag $\mathbb{F}Q$. Para isso, foi obtida na proposição 2.5.1 o nexo entre os cociclos que definem tais expoentes. A partir disso, conclui-se rapidamente que os expoentes de Lyapunov

no fibrado vetorial \mathcal{V} são dados por $\mu \circ \theta(\lambda(\xi))$, onde μ é o peso máximo da representação canônica de $\mathfrak{gl}(V)$, θ é a representação infinitesimal de ρ e $\lambda(\xi)$ são os \mathfrak{a} -expoentes de Lyapunov no fibrado flag $\mathbb{F}Q$ (corolário 2.5.2).

Capítulo 3: Os tipos parabólicos de Morse e Lyapunov

Seja ϕ um fluxo contínuo, invariante à direita, em um fibrado $Q \rightarrow X$, com grupo estrutural G semi-simples e base X , espaço métrico compacto munido de uma medida ergódica ν tal que $\text{supp } \nu = X$. Neste capítulo, o objetivo é fornecer condições para que o *tipo parabólico do fluxo* (definido em [3] e [23]) coincida com o *tipo parabólico de Lyapunov* (definido no capítulo 2).

Inicialmente, na seção 3.1, os \mathfrak{a} -expoentes de Lyapunov no fibrado flag são escritos como médias espaciais de $q(\xi) = \mathfrak{a}(1, \xi)$ sobre uma medida ergódica que se projeta sobre ν , onde $\mathfrak{a} : \mathbb{T} \times \mathbb{F}Q \rightarrow \mathfrak{a}$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} , é o cociclo vetorial sobre o fibrado flag (proposições 3.1.1e 3.1.2). Assim, define-se as medidas *atratora* e *repulsora* em $\mathbb{F}Q$ (não-únicas) que se projetam sobre ν , denotadas, respectivamente, por μ^1 e μ^{w_0} , e da forma que os \mathfrak{a} -expoentes de Lyapunov realizados por elas são tais que

$$\int q d\mu^1 \in \text{cl } \mathfrak{a}^+ \text{ e } \int q d\mu^{w_0} \in -\text{cl } \mathfrak{a}^+$$

Uma medida atratora (respectivamente, repulsora) em um fibrado flag de tipo Θ , $\mathbb{F}_\Theta Q$ é dada pela projeção de μ^1 (respectivamente, μ^{w_0}) pela fibração canônica $\pi_\Theta : \mathbb{F}Q \rightarrow \mathbb{F}_\Theta Q$. Tais medidas são denotadas por μ_Θ^1 (respectivamente, $\mu_\Theta^{w_0}$). Desde que uma medida repulsora em $\mathbb{F}_\Theta Q$ é uma medida atratora para o fluxo reverso (proposição 3.1.5), segue que as medidas atratora e repulsora em $\mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}} Q$ e $\mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}^*}$, respectivamente, são únicas (ou ainda, os elementos da desintegração em cada fibra são medidas de Dirac).

Na seção 3.2, enuncia-se as condições necessárias e suficientes para que o tipo parabólico de Morse (dado pelo tipo parabólico do fluxo) coincida com o tipo parabólico de Lyapunov. Tais condições são dadas por:

1. **Seção limitada:** A aplicação mensurável h_{L_Y} correspondente à seção de Oseledets é limitada;
2. **Expoentes de Lyapunov associados a outras medidas ergódicas:** Para cada medida ergódica ρ , o tipo parabólico associado a ρ está contido no tipo parabólico de Lyapunov (associado à medida pré-fixada ν);
3. **Medidas atratoras associadas a outras medidas ergódicas na base:** Dada uma medida ergódica ρ em X , as medidas ergódicas em $\mathbb{F}Q$ que se projetam sobre ρ com suporte contido em $\pi^{-1}(Y) \cap \text{supp } \mu_{\Theta_{L_Y}}^1$, onde Y é o suporte de ρ e $\pi : \mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}}Q \rightarrow X$, são atratoras.

O restante do capítulo é dedicado à demonstração deste resultado (teorema 3.2.1).

Capítulo 4: Decomposição de Morse para Transformações de Calibre

Neste capítulo, estuda-se as decomposições de Morse para *transformações de calibre*. Ou seja, considere, como antes, um fluxo em um fibrado principal $Q \rightarrow X$ com grupo estrutural semi-simples G e de tal forma que o fluxo induzido na base X seja a identidade. Com isto é possível obter decomposições de Morse em cada fibra do fibrado flag $\mathbb{F}_{\Theta}Q$ e analisar sob quais condições a união destas decomposições forma uma decomposição de Morse no espaço todo e qual a sua relação com a decomposição de Morse mais fina neste espaço obtida em [3] e [23] (veja os teoremas 1.1.14 e 1.1.15).

Na seção 4.1, é feita uma breve discussão sobre as *decomposições multiplicativa e aditiva de Jordan* de um grupo de Lie G e sua álgebra de Lie \mathfrak{g} , respectivamente. O principal resultado desta seção (lema 4.1.1, provado em [11], lema 3.1, item (ii)) diz que para cada elemento $X \in \mathfrak{g}$, existe uma decomposição de Iwasawa da álgebra de Lie semi-simples $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, tal que X é decomposto da seguinte forma

$$X = E + H + N,$$

onde $H \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$ e $E \in \mathfrak{k}_H$, centralizador de H em \mathfrak{k} .

Desde que o fluxo ϕ induzido na base é a identidade, existe uma função contínua $f : Q \rightarrow G$, G -equivariante, isto é, $f(qg) = g^{-1}f(q)g$, $g \in G$. Assim, para cada $q \in Q$, $f(q)$ induz um fluxo no flag \mathbb{F}_Θ . Prova-se então que a decomposição de Morse minimal em \mathbb{F}_Θ é dada pelo conjunto recorrente por cadeia de $f(q)^t$, o qual é formado pelas componentes conexas do conjunto dos pontos fixos de $h(q)^t = \exp(tH(q))$, onde $h(q) \in \text{cl } A^+$ é a projeção sobre a A -componente da decomposição multiplicativa de Jordan de $f(q) \in G$ (proposições 4.2.3 e 4.2.4). Mais precisamente,

$$\{\text{fix}_\Theta(H(q), w) : w \in W_{H(q)} \setminus W/W_\Theta\}$$

é a decomposição de Morse mais fina para $f(q)^t : \mathbb{F}_\Theta \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ (veja [11]).

A partir disso, obtém-se na proposição 4.2.5 uma decomposição de Morse sobre cada fibra $x \in X$ do fibrado flag $\mathbb{F}_\Theta Q$, com relação ao fluxo $\phi_t(q \cdot v) = q \cdot f(q)^t v$, $\pi(q) = x$, dada por

$$\mathcal{M}_\Theta(w)_x := \{q \cdot v : v \in \text{fix}_\Theta(H(q), w)\}.$$

Com isto, prova-se que, sob determinadas condições, a união das componentes de Morse em cada fibra de $\mathbb{F}_\Theta Q$ é a decomposição de Morse mais fina obtida nos teoremas 1.1.14 e 1.1.15. Este procedimento foi dividido em dois casos distintos:

1. **Caso Regular:** Dada a aplicação $H : Q \rightarrow \mathfrak{g}$, $H(q) = \exp(h(q))$, é considerado o caso no qual $H(q)$ pertence à órbita adjunta de um elemento regular, e o caso em que $H(q)$ pertence à órbita adjunta de uma câmara de Weyl fixada, para todo $q \in Q$;
2. **Caso Não Regular:** Neste caso, desde que, para cada elemento $q \in Q$ existe uma câmara de Weyl tal que $H(q) \in \text{cl } \mathfrak{a}^+(q)$, fixa-se uma câmara de Weyl \mathfrak{a}^+ e um elemento q_0^x em cada fibra de modo que $H(q_0^x) \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$. Com isto, os outros elementos sobre cada fibra são conjugados a $H(q_0^x)$. Supondo que os tipos parabólicos de $H(q_0^x)$ são iguais a $\Theta(H_\Delta)$, $H_\Delta \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$, mostra-se que a união das decomposições de Morse em cada fibra coincidem com a decomposição de Morse mais fina obtida anteriormente (proposição 4.2.10).

Em todos os casos anteriores, a aplicação H coincide com a aplicação $h_{M_0} : Q \rightarrow \text{Ad}(G)H_\phi$, onde $\Theta(H_\phi)$ é o tipo parabólico do fluxo.

Apêndices

O apêndice A contém um breve resumo da teoria de Lie semi-simples real e alguns resultados necessários para a compreensão de alguns resultados da tese. No apêndice B, define-se alguns conceitos como medidas de ocupação e desintegração de medidas usados nos capítulos 1 e 3.

Capítulo 1

Decomposições de Morse e de Lyapunov

Neste capítulo, será apresentada a teoria dinâmica de Conley (veja [8]), principalmente a noção de transitividade por cadeias relacionada às decomposições de Morse. Além disso, será visto os resultados provados em [3] e [23], os quais fornecem uma descrição algébrica das componentes de Morse em um fibrado flag. Tais resultados serão usados exaustivamente ao longo da tese.

Finalmente, enuncia-se o teorema de Oseledecs clássico, o qual será generalizado no capítulo 2 para expoentes de Lyapunov vetoriais em fibrados flag.

1.1 Transitividade por Cadeias

Seja $\phi : \mathbb{T} \times X \longrightarrow X$ um fluxo em um espaço métrico compacto (X, d) , onde $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. Denota-se $\phi_t(\cdot) = \phi(t, \cdot)$ ou $\phi(t, x) = t \cdot x$.

Para um conjunto $N \subset X$, define-se o conjunto ω -limite de N como

$$\omega(N) = \{y \in X : \exists t_k \rightarrow \infty \text{ e } x_k \in N \text{ tais que } t_k \cdot x_k \rightarrow y\}.$$

Analogamente, para o fluxo reverso, tem-se o conjunto ω^* -limite de N dado por

$$\omega^*(N) = \{y \in X : \exists t_k \rightarrow -\infty \text{ e } x_k \in N \text{ tais que } t_k \cdot x_k \rightarrow y\}.$$

Denota-se por $\mathcal{R}(\phi_t)$ o conjunto de todos os *pontos recorrentes*, ou seja,

$$\mathcal{R}(\phi_t) = \{x \in X : x \in \omega(x)\},$$

e por $\text{fix}(\phi_t)$ o conjunto de todos os pontos fixos de ϕ_t , isto é,

$$\text{fix}(\phi_t) = \{x \in X : \phi_t(x) = x\}.$$

Para um conjunto ϕ_t -invariante $\mathcal{M} \subset X$, defina o *conjunto estável* e *instável* de \mathcal{M} , respectivamente, por

$$\text{st}(\mathcal{M}) = \{x \in X : \omega(x) \subset \mathcal{M}\} \text{ e } \text{un}(\mathcal{M}) = \{x \in X : \omega^*(x) \subset \mathcal{M}\}$$

Definição 1.1.1 *Para um fluxo em um espaço métrico compacto X , um conjunto compacto invariante A é um atrator se admite uma vizinhança N tal que $\omega(N) = A$. De forma análoga, um repulsor é um conjunto compacto invariante R que possui uma vizinhança N^* tal que $\omega^*(N^*) = R$.*

Observe que todo atrator é compacto e invariante, e um repulsor é um atrator para o fluxo de tempo reverso. Além disso, se A é um atrator em X e $Y \subset X$ é um conjunto compacto invariante, então $A \cap Y$ é um atrator para o fluxo restrito a Y .

Lema 1.1.2 *Dado um atrator $A \subset X$, defina o seguinte conjunto*

$$A^* = \{x \in X : \omega(x) \cap A = \emptyset\}.$$

Tem-se que A^ é um repulsor.*

Demonstração: Veja lema B.2.11, pág. 543 de [7]. □

Note que A e A^* são disjuntos. Na literatura, (A, A^*) é dito um *par atrator-repulsor*. Neste caso, existe uma função a valores reais $L_A : X \rightarrow \mathbb{R}$, chamada de *função de Lyapunov associada ao par atrator-repulsor* (A, A^*) , tal que $L_A^{-1}(0) = A$ e $L_A^{-1}(1) = A^*$ e L_A é estritamente decrescente nas órbitas em $X \setminus A \cup A^*$ (veja seção 5.1.B de [8]).

Sejam $x, y \in X$ e $\varepsilon, T > 0$. Uma (ε, T) -cadeia de x a y é dada por pontos $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y \in X$ e tempos $t_0, \dots, t_{n-1} \geq T$, para algum $n \in \mathbb{N}$, tais que

$$d(t_i \cdot x_i, x_{i+1}) < \varepsilon.$$

Denote por $\mathcal{C}_{\varepsilon, T}(x)$ o conjunto dos pontos $y \in X$ tais que existe uma (ε, T) -cadeia de x a y . Além disso,

$$\mathcal{C}(x) = \bigcap_{\varepsilon, T > 0} \mathcal{C}_{\varepsilon, T}(x).$$

Também pode-se definir $\mathcal{C}_{\varepsilon, T}^*(x)$ o conjunto dos pontos $y \in X$ tais que existe uma (ε, T) -cadeia de y a x e $\mathcal{C}^*(x) = \bigcap_{\varepsilon, T > 0} \mathcal{C}_{\varepsilon, T}^*(x)$. Equivalentemente, $\mathcal{C}^*(x)$ é formado pelos pontos $y \in X$ tais que, para todo $\varepsilon, T > 0$, existe uma (ε, T) -cadeia de x a y para o fluxo reverso.

Um subconjunto $A \subset X$ é dito *transitivo por cadeia* se, para todo $x \in A$, $A \subset \mathcal{C}(x)$. Ainda tem-se que um conjunto A transitivo por cadeia é *transitivo maximal*, com relação à inclusão de conjuntos, se, e só se, $A = \mathcal{C}(x)$ ou, equivalentemente, $A = \mathcal{C}^*(x)$.

Um ponto $x \in Y$ é *recorrente por cadeia* se $x \in \mathcal{C}(x)$. Denota-se por $\mathcal{R}_C(\phi_t)$ o conjunto recorrente por cadeia, ou seja, o conjunto de todos os pontos recorrentes por cadeia. Segue do teorema B.2.22, pág. 548, de [7], que as componentes conexas de $\mathcal{R}_C(\phi_t)$ coincidem com os subconjuntos maximais transitivos por cadeia de $\mathcal{R}_C(\phi_t)$, para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e considere a aplicação contínua $a : \mathbb{T} \times X \longrightarrow V$ que satisfaz a seguinte propriedade

$$a(t_2 + t_1, x) = a(t_2, t_1 \cdot x) + a(t_1, x). \quad (1.1)$$

Tal aplicação é dita *cociclo vetorial* sobre o fluxo ϕ_t . Se $T = \sum_{j=0}^N T_j$, para $T, T_j \in \mathbb{T}$, e denotando

$$x_0 := x \text{ e } x_{j+1} := T_j \cdot x_j,$$

tem-se pela propriedade de cociclo (1.1) que

$$a(T, x) = \sum_{j=0}^{N-1} a(T_j, x_j).$$

Se $T = N \in \mathbb{Z}^+$, a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$a(N, x) = \sum_{j=0}^{N-1} a(1, j \cdot x).$$

Dados $x \in X$, $T \in \mathbb{T}$, define-se o *expoente de Lyapunov em tempo finito de a em (x, T)* por

$$\lambda_T(x) := \frac{1}{T} a(T, x),$$

e o *expoente de Lyapunov de a em x* pelo seguinte limite

$$\lambda(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} a(T, x), \quad (1.2)$$

caso exista. Dado $\mathcal{M} \subset X$, defina o *espectro de Lyapunov de \mathcal{M}* por

$$\Lambda_{\text{Ly}}(\mathcal{M}) = \{\lambda(y) : y \in \mathcal{M} \text{ e } \lambda(y) \text{ existe}\}.$$

A proposição seguinte (veja proposição 1.8, capítulo 1, pág. 19 de [31]) estabelece algumas propriedades dos expoentes de Lyapunov de um cociclo vetorial a .

Proposição 1.1.3 *i) O conjunto $\{\lambda_T(x) : T > 0, x \in X\}$ é limitado.*

ii) Os expoentes de Lyapunov são invariantes pelo fluxo.

iii) O expoente de Lyapunov $\lambda(x)$ existe se, e somente se, o limite dado por (1.2) existe para $T \in \mathbb{Z}^+$.

Demonstração: *i)* Considere a restrição do cociclo a ao conjunto compacto $[0, 1] \times X$. Dessa forma, a norma de a é uniformemente limitada por um $M > 0$. Para $T > 0$, escreva $T = N + \varepsilon$, com $N \in \mathbb{Z}^+$ e $\varepsilon \in [0, 1)$. Pela propriedade de cociclo (1.1),

$$\begin{aligned} a(T, x) &= a(N, \varepsilon \cdot x) + a(\varepsilon, x) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} a(1, (j + \varepsilon) \cdot x) + a(\varepsilon, x). \end{aligned}$$

Assim, desde que $N \leq T$, $|\lambda_T(x)| = \left| \frac{1}{T}a(T, x) \right| \leq \frac{MN}{N} + \frac{M}{N} \leq 2M$.

ii) Basta usar a propriedade de cociclo (1.1): $a(T + t, x) = a(T, t \cdot x) + a(t, x)$.

iii) Suponha que $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ e que o limite dado por (1.2) existe para $T \in \mathbb{Z}^+$. Considere uma sequência $(S_n) \subset \mathbb{R}^+$ tal que $S_n \rightarrow +\infty$. Escreva $S_n = T_n + \varepsilon_n$, com $T_n \in \mathbb{Z}^+$ e $\varepsilon_n \in [0, 1)$. Usando novamente a propriedade de cociclo (1.1), tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_n}a(T_n, x) &= \frac{1}{T_n}a(S_n, x) - \frac{1}{T_n}a(\varepsilon_n, T_n \cdot x) \\ &= \frac{S_n}{T_n} \frac{1}{S_n}a(S_n, x) - \frac{1}{T_n}a(\varepsilon_n, T_n \cdot x). \end{aligned}$$

Desde que $\frac{S_n}{T_n} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, e a é uniformemente contínua no compacto $[0, 1] \times X$ (portanto, uniformemente limitada), segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T_n}a(T_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n}a(S_n, x).$$

□

Note que foi considerado apenas os expoentes de Lyapunov para tempos positivos. Para tempos negativos, procede-se de forma análoga e, neste caso, tem-se *os expoentes de Lyapunov para o fluxo reverso*.

A existência de tais expoentes de Lyapunov será investigada no capítulo 2 quando o espaço vetorial é dado pela subálgebra abeliana maximal \mathfrak{a} contida na componente simétrica da decomposição de Cartan de uma álgebra de Lie semi-simples.

Pode-se fazer uma analogia aos expoentes de Lyapunov, introduzindo expoentes de crescimento do cociclo ao longo de cadeias do fluxo. Defina

$$\lambda(\zeta) = \frac{1}{T(\zeta)} \sum_{j=0}^{N-1} a(T_j, x_j), \quad (1.3)$$

onde ζ é uma (ε, T) - cadeia, composta pelos pontos $x_0 = x, x_1, \dots, x_N = y \in X$ e $T_0, \dots, T_{N-1} \geq T$, e $T(\zeta) := \sum_{j=0}^{N-1} T_j$ é o tempo total da cadeia. Tais expoentes são

chamados de *expoentes de Morse em tempo finito* da (ε, T) -cadeia ζ . Dado $\mathcal{M} \subset X$, o *espectro de Morse* de todas as (ε, T) -cadeias de \mathcal{M} (ou seja, quando os pontos inicial e final da cadeia pertencem à \mathcal{M}) é definido por

$$\Lambda_{\text{Mo}}(\mathcal{M}; (\varepsilon, T)) = \{\lambda(\zeta) : \zeta \text{ é uma } (\varepsilon, T)\text{-cadeia de } \mathcal{M}\}.$$

Para $\varepsilon' \leq \varepsilon$, $T' \geq T$, é claro que

$$\Lambda_{\text{Mo}}(\mathcal{M}; (\varepsilon', T')) \subset \Lambda_{\text{Mo}}(\mathcal{M}; (\varepsilon, T)).$$

Desse modo, o *espectro de Morse* de \mathcal{M} é dado pela interseção encaixante

$$\Lambda_{\text{Mo}}(\mathcal{M}) := \bigcap_{\varepsilon, T > 0} \text{cl}(\Lambda_{\text{Mo}}(\mathcal{M}; (\varepsilon, T))).$$

Um elemento $\lambda \in \Lambda_{\text{Mo}}(\mathcal{M})$ é dito *expoente de Morse* de \mathcal{M} .

Assim como provou-se na proposição 1.1.3, item *iii*), que basta considerar o expoente de Lyapunov para tempos inteiros, sendo \mathcal{M} uma componente transitiva por cadeias do fluxo ϕ_t em X , também tem-se que no espectro de Morse $\Lambda_{\text{Mo}}(\mathcal{M})$ é suficiente tomar cadeias em \mathcal{M} com tempos inteiros (veja teorema 1.10, capítulo 1, pág. 21 de [31]).

Da equação (1.3), note que

$$\lambda(\zeta) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{T_j}{T(\zeta)} \lambda_{T_j}(x_j), \quad (1.4)$$

onde ζ é uma (ε, T) -cadeia. Ou seja, qualquer expoente de Morse em tempo finito é uma combinação convexa de expoentes de Lyapunov em tempo finito. Na verdade, foi mostrado em [31], teorema 1.22, capítulo 1, pág. 34, que tal resultado é válido também para os expoentes limite.

O resultado seguinte, cuja prova pode ser encontrada na seção 2 de [6], estabelece a relação entre os expoentes de Lyapunov e de Morse.

Proposição 1.1.4 *Sendo \mathcal{M} uma componente transitiva por cadeias do fluxo ϕ_t em X , tem-se que $\Lambda_{\text{Ly}}(\mathcal{M}) \subset \Lambda_{\text{Mo}}(\mathcal{M})$.*

A seguir, define-se as decomposições de Morse para o fluxo ϕ e relaciona-se tais decomposições com a transitividade por cadeia do fluxo vista anteriormente.

Definição 1.1.5 *Uma coleção finita de subconjuntos disjuntos $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$ define uma decomposição de Morse se satisfaz as seguintes condições:*

- i) cada \mathcal{M}_i é compacto e ϕ_t -invariante;*
- ii) para todo $x \in X$, tem-se que $\omega(x), \omega^*(x) \subset \bigcup_i \mathcal{M}_i$;*
- iii) se $\omega(x), \omega^*(x) \subset \mathcal{M}_j$, então $x \in \mathcal{M}_j$.*

Cada conjunto \mathcal{M}_i de uma decomposição de Morse é chamada de uma *componente de Morse*.

Uma decomposição de Morse $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$ é mais fina que uma decomposição de Morse $\{\mathcal{M}'_1, \dots, \mathcal{M}'_{n'}\}$ se, para todo $j \in \{1, \dots, n'\}$, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}'_j$.

O resultado seguinte, encontrado em [7], teorema B.2.26, pág. 550, relaciona a decomposição de Morse mais fina com o conjunto recorrente por cadeia de um fluxo em um espaço compacto.

Teorema 1.1.6 *Existe a mais fina decomposição de Morse $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$ se, e somente se, o conjunto recorrente por cadeia $\mathcal{R}_C(\phi_t)$ possui apenas um número finito de componentes conexas. Neste caso, as componentes de Morse coincidem com as componentes conexas do conjunto recorrente por cadeia $\mathcal{R}_C(\phi_t)$.*

O teorema seguinte, demonstrado em [7], teorema B.2.15, pág. 544, fornece uma caracterização da decomposição de Morse através de sequências de pares atratores-repulsos.

Teorema 1.1.7 *Para um fluxo em um espaço métrico compacto X , uma coleção finita de subconjuntos $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$ define uma decomposição de Morse se, e somente se, existe uma sequência estritamente crescente de atratores*

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n = X,$$

tais que

$$\mathcal{M}_{n-i} = A_{i+1} \cap A_i^*, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Uma função de Lyapunov completa para o fluxo ϕ_t associada a uma decomposição de Morse

$$\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$$

é dada por uma função a valores reais $L_{\mathcal{M}} : X \rightarrow \mathbb{R}$ estritamente decrescente nas órbitas fora de $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{M}_i$ e tal que $L_{\mathcal{M}}^{-1}(c)$ é uma componente de Morse, para cada valor crítico c , onde

$$L_{\mathcal{M}} \left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{M}_i \right)$$

é o conjunto dos valores críticos de $L_{\mathcal{M}}$. Observe que a função

$$L_{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^n 3^{-i} L_{A_i},$$

define uma função de Lyapunov completa para a decomposição de Morse $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$, onde os conjuntos A_i são dados pelos atratores do teorema anterior e L_{A_i} é a função de Lyapunov associada ao par atrator repulsor (A_i, A_i^*) .

1.1.1 Decomposições de Morse em Fibrados Flag

Os principais resultados desta seção encontram-se em [3] e [23], onde foi obtida uma descrição algébrica das componentes de Morse para fluxos em fibrados flag.

Tipo Parabólico de Semigrupos

Seja $S \subset G$ um semigrupo com interior não vazio. Um subconjunto $D \subset \mathbb{F}_{\Theta}$ é dito um *conjunto de controle* para a ação de S em \mathbb{F}_{Θ} se tem as seguintes propriedades (int e cl denotam, respectivamente, o interior e o fecho):

1. $\text{int}D \neq \emptyset$;
2. $D \subset \text{cl}(S \cdot x)$, para todo $x \in D$;

3. D é maximal com as propriedades acima.

Há uma ordem parcial natural entre os conjuntos de controle definida da seguinte maneira

$$D_1 \prec D_2 \text{ se } D_2 \subset \text{cl}(Sx), \text{ para todo } x \in D_1.$$

Um subconjunto $D \subset \mathbb{F}_\Theta$ é um *conjunto controlável invariante* se é maximal com relação a essa ordem, ou seja, D é um conjunto de controle S -invariante, isto é, $S \cdot x \subset D$ para todo $x \in D$.

Se D é um conjunto de controle, então o *conjunto de transitividade* de D , denotado por D_0 , é dado pelo seguinte subconjunto

$$D_0 = \{x \in D : \text{existe } g \in \text{int}S \text{ com } g \cdot x = x\}.$$

Quando $D_0 \neq \emptyset$, D é chamado de *conjunto de controle efetivo*.

Denote por $\mathcal{R}(S)$ o conjunto dos elementos regulares de G que estão em $\text{int}S$. Como será visto nos resultados seguintes, os conjuntos de controle para a ação de S em \mathbb{F}_Θ são caracterizados por pontos fixos tipo w de elementos em $\mathcal{R}(S)$, que por sua vez, fornecem a noção do tipo parabólico do semigrupo S .

Para a demonstração dos resultados seguintes, veja [29].

Proposição 1.1.8 *Para cada $w \in \mathcal{W}$, existe um conjunto de controle $D_\Theta(w) \subset \mathbb{F}_\Theta$ cujo conjunto de transitividade é dado por*

$$D_\Theta(w)_0 = \{\text{fix}_\Theta(h, w) : h \in \mathcal{R}(S)\}.$$

Além disso, $D_\Theta(1)$ é o único conjunto de controle invariante em \mathbb{F}_Θ e $D_\Theta(w_0)$ é o conjunto de controle minimal. Reciprocamente, para qualquer conjunto de controle efetivo $D \subset \mathbb{F}_\Theta$, existe $w \in \mathcal{W}$ tal que $D = D_\Theta(w)$.

Teorema 1.1.9 *Seja G um grupo de Lie conexo e com centro finito. Se $S \subset G$ é um semigrupo próprio e $\text{int}S \neq \emptyset$, então existe um único subconjunto próprio $\Theta(S) \subset \Sigma$ tal que:*

- i) $D_{\Theta(S)}(1)$ está contido em alguma célula aberta de Bruhat;
- ii) Sendo $\pi_{\Theta(S)} : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_{\Theta(S)}$, tem-se que $\pi_{\Theta(S)}^{-1}(D_{\Theta(S)}(1))$ é o conjunto de controle invariante de S no flag maximal \mathbb{F} .

O subconjunto $\Theta(S)$ cuja existência e unicidade é garantida no teorema anterior é chamado *tipo parabólico do semigrupo* $S \subset G$.

Denote por \mathcal{D} o conjunto formado por todos os conjuntos de controle de S no flag maximal \mathbb{F} . Defina a seguinte aplicação:

$$w \in W \longmapsto D(w) \in \mathcal{D}.$$

Pela proposição anterior, tal aplicação está bem definida e é sobrejetiva, mas, em geral, não é injetiva. Desse modo, defina:

$$W(S) = \{w \in W : D(w) = D(1)\}.$$

Teorema 1.1.10 $W(S)$ é subgrupo parabólico de tipo $\Theta(S)$. Além disso, $D_{\Theta}(w_1) = D_{\Theta}(w_2)$ se, e somente se, $W(S)w_1W(\Theta) = W(S)w_2W(\Theta)$ e, a ordem dinâmica dos conjuntos de controle $D_{\Theta}(w)$ é a ordem reversa da ordem de Bruhat-Chevalley nas classes laterais $W(S) \backslash W/W(\Theta)$.

Tipo Parabólico de Fluxos

Considere ϕ_t , $t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} , um fluxo em um fibrado principal $Q \longrightarrow X$ com grupo estrutural G semi-simples e base paracompacta. Suponha que ϕ_t é transitivo por cadeias em X . Por abuso de notação, denota-se também por ϕ_t o fluxo induzido no fibrado flag $\mathbb{F}_{\Theta}Q$.

Denote por S_Q o semigrupo local de automorfismos de Q que comuta com a ação à direita de G em Q . Dado $\varepsilon > 0$, defina a seguinte vizinhança da identidade em S_Q

$$V_{\varepsilon}(S_Q) = \{\varphi \in S_Q : d(\varphi(x), x) < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{F}Q\},$$

onde d é métrica em $\mathbb{F}Q$ dada pela proposição 2.2 de [3].

Fixados $\varepsilon > 0$, $T > 0$, considere o *semigrupo de sobreamento* $S_{\varepsilon,T}(\phi, S_Q)$ (ou denotado simplesmente por $S_{\varepsilon,T}$) como o subsemigrupo local gerado por $V_\varepsilon(S_Q)$, isto é,

$$S_{\varepsilon,T} = \{\varphi_s \circ \phi_{k_s} \circ \dots \circ \varphi_0 \circ \phi_{k_0} : k_i \geq T, \varphi_i \in V_\varepsilon(S_Q)\}.$$

Para $\Theta \subset \Sigma$, observe que $S_{\varepsilon,T}$ induz em $\mathbb{F}_\Theta Q$ um semigrupo de automorfismos locais. Foi mostrado em [3] que tal semigrupo induzido é acessível em $\mathbb{F}_\Theta Q$, ou seja, $\text{int}(S_{\varepsilon,T}\xi) \neq \emptyset$, para todo $\xi \in \mathbb{F}_\Theta Q$. Além disso, desde que ϕ_t é transitivo por cadeias em X , segue que a ação induzida de $S_{\varepsilon,T}$ na base X é transitiva. Dessa forma, considerando os conjuntos de controle para esse semigrupo induzido, a transitividade de $S_{\varepsilon,T}$ na base reduz o estudo de tais conjuntos apenas à fibra típica \mathbb{F}_Θ , onde os conjuntos de controle foram completamente descritos na seção anterior.

Fixado $q \in Q$, defina o seguinte semigrupo

$$S_{\varepsilon,T}^q = \{a \in G : \psi(q) = qa, \psi \in S_{\varepsilon,T}\}.$$

Da acessibilidade de $S_{\varepsilon,T}^q$, segue que $S_{\varepsilon,T}^q$ é um semigrupo com interior não-vazio. Denote por $D_{\varepsilon,T}^q(w)$ o conjunto de controle efetivo para a ação de $S_{\varepsilon,T}^q$ no flag maximal \mathbb{F} .

Teorema 1.1.11 *Os conjuntos de controle do semigrupo local induzido $S_{\varepsilon,T}$ no fibrado flag maximal $\mathbb{F}Q$ são dados pelos conjuntos $F_{\varepsilon,T}(w)$, $w \in W$, que se projetam sobre X e cujos conjuntos de transitividade são descritos fibra-a-fibra por*

$$(F_{\varepsilon,T}(w)_0)_{\pi(q)} = q \cdot D_{\varepsilon,T}^q(w)_0, \quad q \in Q.$$

Além disso, tem-se as seguintes afirmações:

- i) O único conjunto de controle maximal é $F_{\varepsilon,T}(1)$ e o único minimal $F_{\varepsilon,T}(w_0)$;
- ii) Para todo $p, q \in Q$, $\Theta(S_{\varepsilon,T}^p) = \Theta(S_{\varepsilon,T}^q)$. Portanto, definindo

$$W(S_{\varepsilon,T}) := \{w \in W : F_{\varepsilon,T}(w) = F_{\varepsilon,T}(1)\},$$

segue que $W(S_{\varepsilon,T})$ é subgrupo parabólico de tipo $\Theta_{\varepsilon,T} := \Theta(S_{\varepsilon,T}^q)$;

- iii) $F_{\varepsilon,T}(w_1) = F_{\varepsilon,T}(w_2)$ se, e somente se, $W(S_{\varepsilon,T})w_1 = W(S_{\varepsilon,T})w_2$ e, a ordem

dinâmica dos conjuntos de controle $F_{\varepsilon,T}(w)$ é a ordem reversa da ordem de Bruhat-Chevalley nas classes laterais $W(S_{\varepsilon,T}) \setminus W$;

iv) No fibrado flag parcial $\mathbb{F}_{\Theta}Q$, os conjuntos de controle são dados pelos conjuntos $F_{\varepsilon,T}^{\Theta}(w)$ tais que $\pi_{\Theta}(F_{\varepsilon,T}(w)_0) = F_{\varepsilon,T}^{\Theta}(w)_0$, o único maximal é $F_{\varepsilon,T}^{\Theta}(1)$ e o único minimal $F_{\varepsilon,T}^{\Theta}(w_0)$. Ainda tem-se que $F_{\varepsilon,T}^{\Theta}(w_1) = F_{\varepsilon,T}^{\Theta}(w_2)$ se, e somente se, $W(S_{\varepsilon,T})w_1W(\Theta) = W(S_{\varepsilon,T})w_2W(\Theta)$.

Definição 1.1.12 O tipo parabólico do semigrupo de sombreamento $S_{\varepsilon,T}$ é definido pelo conjunto de raízes $\Theta_{\varepsilon,T}$ dado no item ii) do teorema anterior.

Note que, para $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ e $T_1 > T_2$, $S_{\varepsilon_1,T_1} \subset S_{\varepsilon_2,T_2}$. Dessa forma, $\Theta_{\varepsilon_1,T_1} \subset \Theta_{\varepsilon_2,T_2}$ (veja proposição 3.33 de [23]).

Definição 1.1.13 O tipo parabólico do fluxo em Q é definido como

$$\Theta(\phi) = \bigcap_{\varepsilon,T} \Theta_{\varepsilon,T},$$

onde $\Theta_{\varepsilon,T}$ é o tipo parabólico do semigrupo de sombreamento $S_{\varepsilon,T}$.

O tipo parabólico do fluxo, imprescindível para a descrição das componentes de Morse para fluxos em fibrados flag, resume-se a um tipo parabólico de um semigrupo particular.

Teorema 1.1.14 As componentes maximais transitivas por cadeia do fluxo induzido no fibrado flag $\mathbb{F}_{\Theta}Q$ são dadas por

$$\mathcal{M}_{\Theta}(w) = \bigcap_{\varepsilon,T} F_{\varepsilon,T}^{\Theta}(w)_0, \quad w \in W.$$

Além disso, segue as seguintes afirmações:

- i) $\mathcal{M}_{\Theta}(1)$ é o único atrator e $\mathcal{M}_{\Theta}(w_0)$ é o único repulsor;
- ii) Tem-se que $\mathcal{M}_{\Theta}(w_1) = \mathcal{M}_{\Theta}(w_2)$ se, e somente se, $W(\phi)w_1W(\Theta) = W(\phi)w_2W(\Theta)$, onde $W(\phi) := \{w \in W : \mathcal{M}(w) = \mathcal{M}(1)\}$ é subgrupo parabólico de tipo $\Theta(\phi)$.

Note que, pela compacidade do espaço base X , $\{\mathcal{M}_\Theta(w); w \in W\}$ fornece a decomposição de Morse mais fina do fluxo ϕ_t em $\mathbb{F}_\Theta Q$ (veja proposição 1.1.6).

O tipo parabólico do fluxo $\Theta(\phi)$ e o seu dual, denotado por $\Theta^*(\phi) := (-w_0)\Theta(\phi)$, possuem propriedades dinâmicas que fornecem a descrição algébrica das componentes de Morse obtidas no teorema anterior (para a demonstração de tais propriedades, veja seção 9 de [3]).

Teorema 1.1.15 *Seja o tipo parabólico do fluxo $\Theta(\phi)$ e o seu dual $\Theta^*(\phi)$. Então:*
i) A componente atratora $\mathcal{M}_{\Theta(\phi)}(1)$ intercepta cada fibra de $\mathbb{F}_{\Theta(\phi)}Q$ em um único ponto. Assim, existe uma seção global contínua $\chi : X \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta(\phi)}Q$ tal que

$$(\mathcal{M}_{\Theta(\phi)}(1))_x = \{\chi(x)\}.$$

Da mesma forma, o resultado segue para a componente repulsora no fibrado flag dual $\mathbb{F}_{\Theta^(\phi)}Q$. Denote por $\chi^* : X \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta^*(\phi)}Q$ a seção global contínua tal que $(\mathcal{M}_{\Theta(\phi)}(w_0))_x = \{\chi^*(x)\}$;*

ii) Sejam $g : Q \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta(\phi)}$ e $g^ : Q \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta^*(\phi)}$ as funções equivariantes correspondentes às seções globais contínuas χ e χ^* , respectivamente. Então, denotando por \mathcal{O} a órbita G -adjunta aberta e densa em $\mathbb{F}_{\Theta(\phi)} \times \mathbb{F}_{\Theta^*(\phi)}$, segue que*

$$(g(q), g^*(q)) \in \mathcal{O}.$$

Assim, identificando \mathcal{O} ao espaço homogêneo $G/Z_G(H_\phi) \simeq \text{Ad}(G)H_\phi$, onde $H_\phi \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$ satisfaz $\alpha(H_\phi) = 0$ se, e só se, $\alpha \in \langle \Theta(\phi) \rangle$, obtém-se uma aplicação contínua $h : Q \rightarrow \text{Ad}(G)H_\phi$ equivariante, ou seja, $h(q \cdot g) = g^{-1} \cdot h(q)$;

iii) Para $\Theta \subset \Sigma$, as componentes de Morse $\mathcal{M}_\Theta(w)$ são descritas fibra a fibra da seguinte forma

$$(\mathcal{M}_\Theta(w))_{\pi(q)} := q \cdot \text{fix}_\Theta(h(q), w).$$

Observe que a aplicação contínua $h : Q \rightarrow \text{Ad}(G)H_\phi$, obtida no item *ii)* do teorema anterior, fornece a trivialização do fibrado associado a Q com fibra típica $\text{Ad}(G)H_\phi$.

1.2 Expoentes de Lyapunov Clássicos

Sejam M uma variedade, f um difeomorfismo de M que preserva uma medida de probabilidade de Borel μ . O comportamento assintótico de Df_x^n é determinado para quase todo ponto $x \in M$ pelo teorema ergódico multiplicativo de Oseledets enunciado a seguir e cuja prova pode ser encontrada em [22].

Para $x \in M$ e $v \in T_x M$, o *expoente de Lyapunov* é definido como o seguinte limite superior

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_x^n v\|,$$

onde $\|\cdot\|$ é métrica Riemanniana induzida no espaço tangente a M . O teorema de Oseledets afirma a existência dos expoentes de Lyapunov como limites, em quase todo ponto de M . Ou seja, o limite

$$\lambda(x, v) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_x^n v\|,$$

existe quase sempre.

Teorema 1.2.1 (Oseledets) *Sejam M uma variedade, f um difeomorfismo de M e μ uma medida de probabilidade que preserva f . Então, existe um boreliano f -invariante Γ de medida total tal que os expoentes de Lyapunov existem para todo ponto $x \in \Gamma$. Além disso, as seguintes afirmações são válidas:*

i) Para todo $x \in \Gamma$, o espaço tangente em x pode ser escrito como uma sequência decrescente de subespaços encaixantes

$$\{0\} = V_{s(x)+1}(x) \subset V_{s(x)}(x) \subset \dots \subset V_1(x) = T_x M$$

tal que o expoente de Lyapunov $\lambda_j(x) := \lambda(x, v)$ existe, para todo $v \in V_j(x) \setminus V_{j+1}(x)$.

Tais subespaços são invariantes, ou seja, $Df_x V_j(x) = V_j(f(x))$, $1 \leq j \leq s(x)$;

ii) A função $s : \Gamma \rightarrow \mathbb{N}$ é uma função mensurável e invariante, ou seja, $s \circ f = s$;

iii) Para $x \in \Gamma$, os expoentes de Lyapunov satisfazem

$$-\infty \leq \lambda_{s(x)}(x) < \lambda_2(x) < \dots < \lambda_1(x).$$

Para $1 \leq j \leq s(x)$, a função $\lambda_j(\cdot)$ é mensurável no conjunto $\{x \in \Gamma : s(x) \geq j\}$ e, além disso, é invariante, $\lambda_j \circ f = \lambda_j$.

Tomando o fluxo reverso no teorema de Oseledets, denote por $V_j^-(x)$ a filtração associada. Neste caso, tomando $E_i(x) := V_i(x) \cap V_{s(x)+1-i}^-(x)$, obtém-se uma decomposição do espaço tangente a $x \in \Gamma$, $T_x M = E_1(x) \oplus \dots \oplus E_{s(x)}(x)$, tal que

$$\lambda_j(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_x^n v\|,$$

para todo $v \in E_j(x) \setminus \{0\}$.

Para uma medida ν ergódica preservada pelo difeomorfismo f , segue que a aplicação s é constante em quase todo ponto, ou seja, $s(x) = m$, em quase todo ponto $x \in M$. Da mesma forma, pela invariância de $\lambda_j(\cdot)$, $1 \leq j \leq m$, segue que tal aplicação é constante, $\lambda_j(\cdot) = \lambda_j$, em quase todo ponto. Desse modo, denote por $\Lambda_{\text{Ly}}(\nu)$ o espectro de Lyapunov, dado por

$$\Lambda_{\text{Ly}}(\nu) := \{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m : \lambda_i \text{ é expoente de Lyapunov}\}.$$

1.2.1 Expoentes de Lyapunov em fibrados vetoriais

Sejam $\pi : \mathcal{V} \rightarrow X$ fibrado vetorial real de dimensão finita n e ϕ_t um fluxo em \mathcal{V} linear nas fibras. Considere ν medida ergódica em X com relação ao fluxo induzido na base. Para cada $x \in X$, considere \mathcal{V}_x a fibra sobre x ; como $\mathcal{V} \rightarrow X$ é um fibrado vetorial de dimensão n , temos que \mathcal{V}_x é um espaço vetorial de dimensão n . Dessa forma, seja $p_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V}_x$ aplicação linear invertível e, logo,

$$B\mathcal{V} := \{p_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V}_x; x \in X\} \rightarrow X$$

é um fibrado principal sobre X com grupo estrutural $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$.

Considere a decomposição de Iwasawa usual de $\text{Gl}(n, \mathbb{R}) = KAN^+$, onde $K = O(n)$ são isometrias lineares de \mathbb{R}^n com a métrica euclidiana $|\cdot|$, A são matrizes diagonais com entradas positivas e N^+ são matrizes triangulares superiores com 1 na diagonal.

Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica Riemanniana em \mathcal{V} . Defina

$$O\mathcal{V} = \{p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V}_x : p \text{ é isometria}\}.$$

Tem-se que $O\mathcal{V}$, dito *fibrado das bases ortonormais*, é uma $O(n)$ -redução de $B\mathcal{V}$. Este subfibrado juntamente com a decomposição de Iwasawa de $Gl(n, \mathbb{R})$ fornece a decomposição de Iwasawa do fibrado das bases $B\mathcal{V} = O\mathcal{V} \cdot AN^+$ (veja seção A.3.1).

Os expoentes de Lyapunov são dados por

$$\lambda(v) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\phi_t v\|,$$

para $v \in \mathcal{V}$. Defina $\rho(t, v) := \frac{\|\phi_t v\|}{\|v\|}$ cociclo multiplicativo. Logo, $a(t, v) = \log \rho(t, v)$ é um cociclo aditivo. Observe que se existe $\lambda(v)$, para $v \in \mathcal{V}$,

$$\lambda(v) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} a(t, v).$$

Note que ρ é definida para $v \in \mathcal{V}$; entretanto, ρ depende apenas dos pontos no fibrado projetivo $\mathbb{P}\mathcal{V} \rightarrow X$. De fato, para $v \in \mathcal{V}$ e $0 \neq c \in \mathbb{R}$, tem-se pela linearidade de ϕ_t sobre a fibra que

$$\rho(t, cv) = \rho(t, v).$$

Proposição 1.2.2 *Suponha que $\lambda_1 < 0$ em $\Lambda_{Ly}(\nu)$ (ou seja, todos os expoentes de Lyapunov são estritamente negativos). Então, existe um conjunto Ω de medida total tal que, para todo $x \in \Omega$,*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\phi_t(v)\| < 0, \quad \pi(v) = x.$$

Demonstração: O cociclo multiplicativo em \mathcal{V} ,

$$\rho(t, v) = \frac{\|\phi_t(v)\|}{\|v\|}, \quad v \in \mathcal{V}_x,$$

induz o cociclo aditivo $a(t, \xi) = \log \rho(t, \xi)$ no fibrado projetivo $\mathbb{P}\mathcal{V} \rightarrow X$, onde $\xi = [v] \in (\mathbb{P}\mathcal{V})_x \subset \mathbb{P}\mathcal{V}$. Além disso, também tem-se que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\phi_t v\| = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} a(t, \xi).$$

Para $n \in \mathbb{N}$ e $\xi \in \mathbb{P}\mathcal{V}$, defina o seguinte funcional linear em $C(\mathbb{P}\mathcal{V})$:

$$\begin{aligned} L_{n,\xi} : C(\mathbb{P}\mathcal{V}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto L_{n,\xi}(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\phi_k(\xi)). \end{aligned}$$

Segue do teorema de representação de Riesz (veja teorema B.1.2) que existe $\mu_{n,\xi}$ medida de probabilidade em $\mathbb{P}\mathcal{V}$ tal que

$$L_{n,\xi}(f) = \int f d\mu_{n,\xi}.$$

Segue da demonstração do teorema B.1.3 que, $\mu_{n,\xi} \rightarrow \mu_\xi$ em $\mathbb{M}(\mathbb{P}\mathcal{V})$, conjunto das medidas finitas com sinal nos borelianos de $\mathbb{P}\mathcal{V}$. Pelo lema B.1.7, $\pi_*\mu_\xi$ é uma medida de ocupação μ_x em $x = \pi(\xi)$. Além disso, pelo corolário B.1.9, existe um conjunto mensurável Ω com $\nu(\Omega) = 1$ tal que $\mu_x = \nu$, para algum $x \in \Omega$. Dessa forma, seja $\xi \in \mathbb{P}\mathcal{V}$ tal que $x = \pi(\xi) \in \Omega$, isto é, $\pi_*\mu_\xi = \mu_x = \nu$. Assim, para $q(\xi) = a(1, \xi)$, $\xi \in \mathbb{P}\mathcal{V}$, segue que

$$\frac{1}{n} a(n, \xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a(1, \phi_k(\xi)) \rightarrow \int q d\nu_\xi.$$

Como $\pi_*\mu_\xi = \nu$, $\int q d\nu_\xi \in \Lambda_{Ly}(\nu)$. Logo, por hipótese, $\int q d\nu_\xi < 0$. Dessa forma, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|\phi_n(v)\| = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} a(n, \xi) < 0$. \square

Corolário 1.2.3 *Nas condições da proposição anterior, tem-se que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\phi_t(v)\| = 0,$$

para ν -quase todo $x \in X$, $\pi(v) = x$.

Demonstração: Pela proposição anterior,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|\phi_n(v)\| < 0.$$

Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|\phi_n(v)\| < c < 0.$$

Dessa forma, existe n_0 tal que

$$\sup_{m \geq n_0} \left(\frac{1}{m} \log \|\phi_m(v)\| \right) < c.$$

Assim, para todo $m \geq n_0$, $\frac{1}{m} \log \|\phi_m(v)\| < c$, ou seja, $0 \leq \|\phi_m(v)\| < e^{cm}$. Fazendo $m \rightarrow +\infty$, temos o resultado desejado. \square

Considerando \mathcal{V}^0 a seção nula do fibrado vetorial $\mathcal{V} \rightarrow X$, pode-se observar pelo corolário anterior que, para $v \in \mathcal{V}_x$, $x \in \Omega$,

$$\omega(v) = \{u \in \mathcal{V}; \exists t_k \rightarrow +\infty \text{ tal que } \phi_{t_k}(v) \rightarrow u\} \subset \mathcal{V}^0.$$

Corolário 1.2.4 *Ainda nas mesmas condições da proposição 1.2.2, tem-se revertendo o tempo que*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\phi_t(v)\| = \infty,$$

para $v \neq 0$ e $\pi(v) = x \in \Omega$.

Demonstração: Os expoentes de Lyapunov para o tempo reverso são todos positivos e, neste caso,

$$\limsup_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} \log \|\phi_n(v)\| > 0.$$

Analogamente ao que foi feito anteriormente, considere $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} \log \|\phi_n(v)\| > c > 0,$$

isto é, existe n_0 tal que

$$c < \inf_{m \geq n_0} \frac{1}{m} \log \|\phi_m(v)\| \leq \frac{1}{m} \log \|\phi_m(v)\|,$$

para todo $m \geq n_0$. Logo,

$$e^{cm} < \|\phi_m(v)\|, \quad m \geq n_0,$$

para $v \neq 0$. Fazendo $m \rightarrow +\infty$, segue o resultado. \square

Capítulo 2

O Teorema Ergódico Multiplicativo em Fibrados Principais

Seja um fluxo ϕ_t , invariante à direita, em um fibrado principal $\pi : Q \rightarrow X$ com grupo estrutural G redutível. Considere ainda uma medida de probabilidade ν , invariante pelo fluxo induzido na base. O objetivo deste capítulo é provar o correspondente ao teorema ergódico multiplicativo de Oseledets, garantindo a existência de expoentes de Lyapunov vetoriais em quase todo ponto regular sobre a fibra. Com isso, obtém-se também a decomposição de Oseledets, determinada por uma aplicação mensurável, chamada seção de Oseledets.

2.1 Sequências Regulares em G

Nesta seção, serão vistas condições necessárias e suficientes para que expoentes de Lyapunov dados por sequências em G existam. Essas condições estão baseadas nos resultados de [17] e [30].

Considere a decomposição de Iwasawa de um elemento $g = kan \in KAN = G$.

Denota-se a projeção de g sobre a \mathfrak{a} -componente por \mathfrak{a} , isto é,

$$g = kan \in G \longmapsto \mathfrak{a}(g) := \log a \in \mathfrak{a}.$$

De forma análoga, escrevendo a decomposição polar de $g = uhv \in K(\text{cl } A^+)K = G$, seja $\mathfrak{a}^+ : g \in G \longmapsto \log h \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$ a projeção de g sobre o fecho da câmara de Weyl \mathfrak{a}^+ . Note que o elemento g também pode ser escrito como $g = ks \in KS$ (decomposição de Cartan), onde $k = uv$ e $s = v^{-1}hv$.

Para uma sequência $g_k \in G$, $k \in \mathbb{Z}^+$, existem dois limites relacionados em \mathfrak{a} que provêm das decomposições de Iwasawa e Cartan de g_k :

1. O expoente de Lyapunov de g_k em $b = ub_0 \in \mathbb{F}$ é dado pelo seguinte limite

$$\lambda(g_k, b) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \mathfrak{a}(g_k u),$$

onde $u \in G$ e b_0 é a origem do flag maximal \mathbb{F} . Observe que, caso este limite exista, o mesmo estará bem definido, visto que se $b = u'b_0$, $u' \in G$, temos que $u' = up$, $p \in P$, e dessa forma, por (A.3),

$$\mathfrak{a}(g_k u') = \mathfrak{a}(g_k u) + \mathfrak{a}(p),$$

e o limite do segundo termo desaparece.

2. O expoente polar de g_k :

$$\lambda^+(g_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \mathfrak{a}^+(g_k).$$

Considere o espaço simétrico $K \backslash G$ (vamos denotar por $K \backslash G$ ao invés de G/K devido à ação à direita de G no fibrado principal $Q \longrightarrow X$). Como K é compacto, existe uma métrica G -invariante d em $K \backslash G$, unicamente determinada por

$$d(x_0 \cdot \exp(X), x_0) = |X|_\theta,$$

onde $X \in \mathfrak{s}$, x_0 é a origem de $K \backslash G$.

Definição 2.1.1 Uma sequência $g_k \in G$ é dita regular se existe $D \in \mathfrak{s}$ tal que, para $k \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{k}d(x_0 \cdot g_k, x_0 \cdot \exp(kD)) \rightarrow 0.$$

Neste caso, dizemos que D é o raio assintótico de g_k .

Observe que se (g_k) é regular, então a sequência $(g_k u)$, com $u \in K$, também é regular com raio assintótico $\text{Ad}(u^{-1})D$. Escrevendo a decomposição polar de $g_k = u_k h_k v_k \in K(\text{cl } A^+)K$, temos o seguinte resultado de [17], teorema 2.1:

Teorema 2.1.2 (Kaimanovich) *Tem-se que (g_k) é uma sequência regular se, e somente se, o expoente polar $\lambda^+(g_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k^{1/k}$ existe e*

$$\frac{1}{k}d(x_0 \cdot g_k, x_0 \cdot g_{k+1}) \rightarrow 0.$$

Além disso, neste caso $D = \text{Ad}(u)H^+$, onde $u \in K$ e $H^+ = \lambda^+(g_k) \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$, é o raio assintótico de (g_k) .

O resultado seguinte, provado em [30], proposição 6.1, afirma, de certa forma, a existência de expoentes de Lyapunov de sequências regulares em G .

Proposição 2.1.3 *Suponha que (g_k) é uma sequência regular em G com raio assintótico $D \in \mathfrak{s}$. Então as seguintes afirmações são válidas:*

i) Suponha que $D \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$ e tome $y \in P_D^-$, onde $P_D^- = P_{\Theta(D)}^-$. Então, a sequência $(g_k y)$ é regular com raio assintótico D .

ii) Considere $D \in \mathfrak{a}$. Então, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathfrak{a}(g_k) = D$.

iii) Seja $H^+ \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$ o expoente polar de (g_k) . Então, o expoente de Lyapunov em $b \in \text{st}(D, w)$ é dado por

$$\lambda(g_k, b) = w^{-1}H^+.$$

Demonstração: *i)* Observe que os autovalores de $\text{ad}(D)$ em P_D^- são todos não-positivos. Logo, $\exp(kD)y \exp(-kD)$ é limitada em P_D^- e assim, por [12], proposição 3.9, segue que

$$d(x_0 \cdot (\exp kD)y, x_0 \cdot \exp(kD)) = d(x_0 \cdot \exp(kD)y \exp(-kD), x_0)$$

é uma função limitada de k .

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}d(x_0 \cdot g_k y, x_0 \cdot \exp(kD)) &= \frac{1}{k}d(x_0 \cdot g_k, x_0 \cdot \exp(kD)y^{-1}) \\ &\leq \frac{1}{k}d(x_0 \cdot g_k, x_0 \cdot \exp(kD)) + \frac{1}{k}d(x_0 \cdot \exp(kD), x_0 \cdot \exp(kD)y^{-1}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $k \rightarrow \infty$, visto que o segundo termo na última expressão é limitado e a sequência (g_k) é regular.

ii) Seja $g_k = u_k a_k n_k \in KAN$ decomposição de Iwasawa de (g_k) . Observe que

$$\begin{aligned} |\log a_k - kD|_\theta &= d(x_0 \cdot \exp(\log a_k - kD), x_0) \\ &= d(x_0 \cdot a_k, x_0 \cdot \exp(kD)) \\ &\leq d(x_0 \cdot a_k n_k, x_0 \cdot \exp(kD)) = d(x_0 \cdot g_k, x_0 \cdot \exp(kD)), \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de [16], corolário 1.11 e, portanto, segue o resultado.

iii) Como (g_k) é uma sequência regular, segue do teorema 2.1.2 que $D = \text{Ad}(u)H^+$, onde $u \in K$ e $H^+ = \lambda^+(g_k) \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$ é o raio assintótico de (g_k) . Dessa forma, segue que $\text{st}(D, w) = uP_{H^+}^- \cdot w b_0$ e desde que $b \in \text{st}(D, w)$, existe $y \in P_{H^+}^-$ tal que $b = u y w b_0$.

Escreva a decomposição de Iwasawa de $g_k u y w = u'_k a_k n_k \in KAN$. Como $u \in K$, $(g_k u)$ é regular com raio assintótico $\text{Ad}(u^{-1})D = H^+ \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$. Mas, pelo item *i)*, $(g_k u y)$ é regular com raio assintótico H^+ . E, finalmente, como $w \in K$, tem-se que $(g_k u y w)$ é regular com raio assintótico $\text{Ad}(w^{-1})H^+$. Assim, pelo item *ii)*,

$$\lambda(g_k, b) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log a_k = \text{Ad}(w^{-1})H^+.$$

□

Proposição 2.1.4 *Tem-se que (g_k) é uma sequência regular se, e somente se,*

$$\frac{1}{k}d(x_0 \cdot g_k, x_0 \cdot g_{k+1}) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

e o expoente de Lyapunov $\lambda(g_k, b)$ existe para algum (e, portanto, para todo) $b \in \mathbb{F}$.

Demonstração: Supondo que g_k é regular, segue do teorema 2.1.2 que $\frac{1}{k}d(x_0 \cdot g_k, x_0 \cdot g_{k+1}) \rightarrow 0$, $k \rightarrow +\infty$, e existe $\lambda^+(g_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log h_k$. Assim, pelo item *iii*) da proposição anterior, segue que $\lambda(g_k, b') = w^{-1}H^+$, para $b' \in \text{st}(D, w)$, D raio assintótico de (g_k) .

Seja $b \in \mathbb{F}$. Então, existe $v \in K$ tal que $b = vb'$. Logo, (g_kv) é regular com raio assintótico, $\text{Ad}(v^{-1})\text{Ad}(w^{-1})H^+ = \text{Ad}((wv)^{-1})H^+$.

Agora, se $\frac{1}{k}d(x_0 \cdot g_k, x_0 \cdot g_{k+1}) \rightarrow 0$ e existe $\lambda(g_k, b_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \mathbf{a}(g_k)$, o resultado segue do corolário do teorema 2.5 de [17]. \square

2.2 \mathfrak{a} -expoentes de Lyapunov

Dado o fluxo ϕ_t no fibrado principal $Q \rightarrow X$, seja a decomposição de Iwasawa de $Q = R \cdot AN$, onde R é uma K -redução de Q . Assim, obtém-se um \mathfrak{a} -cociclo vetorial $\mathbf{a}(t, \xi)$ (veja subseção A.3.4) sobre o fluxo induzido no fibrado flag $\mathbb{F}Q$. O \mathfrak{a} -expoente de Lyapunov na direção de $\xi \in \mathbb{F}Q$ é dado por

$$\lambda(\xi) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \mathbf{a}(t, \xi). \quad (2.1)$$

Note que existem várias situações nas quais existem a redução do fibrado Q ao grupo compacto K . Por exemplo, se o fibrado em questão é trivial, é claro que existe uma redução a qualquer subgrupo de G . Além disso, supondo que o espaço base X é paracompacto e juntando o fato de que o grupo $G/K \simeq AN$ é difeomorfo a um espaço euclidiano, tem-se pelo teorema 5.7 juntamente com a proposição 5.6 do capítulo I, págs. 57 e 58 de [20], que existe uma K -redução R de Q .

Com isso, a partir do que foi feito na seção anterior, os expoentes de Lyapunov no fibrado podem ser relacionados com os expoentes de Lyapunov no grupo.

2.2.1 Expoentes de Lyapunov e pontos regulares

O próximo resultado diz exatamente que qualquer expoente de Lyapunov do fluxo é um expoente de Lyapunov de uma sequência em G .

Proposição 2.2.1 *Seja $r \in R$ e escreva $\phi_t(r) = r_t \cdot g_t$, com $r_t \in R$, $g_t \in G$, $t \in \mathbb{T}$. Para $b = u \cdot b_0$, $u \in K$, tem-se que*

$$\lambda(r \cdot b) = \lambda(r \cdot ub_0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log a_t,$$

onde $g_t u = u'_t a_t n_t \in KAN$ é a decomposição de Iwasawa.

Agora, considere $Q = R \cdot S \simeq R \times S$ decomposição de Cartan do fibrado principal $Q \rightarrow X$. Seja

$$\begin{aligned} S : Q &\longrightarrow S \\ q = r \cdot s &\longmapsto s. \end{aligned}$$

a projeção sobre $S \simeq K \backslash G$.

Definição 2.2.2 *Um ponto $q \in Q$ é regular para o fluxo no caso em que a sequência $(S(\phi_k(q))) \subset S$, $k \in \mathbb{Z}^+$, é regular em $S \subset G$.*

Lema 2.2.3 *Tem-se que $q \in Q$ é um ponto regular para o fluxo se, e somente se, $q \cdot g$ é regular, para todo $g \in G$. Neste caso, dizemos que $x = \pi(q) \in X$ é regular para o fluxo.*

Demonstração: Supondo que $q \in Q$ é um ponto regular para o fluxo, tem-se que a sequência $s_k := S(\phi_k(q))$ é regular em S . Para $g \in G$, segue da G -invariância do fluxo e da proposição A.3.4, item *iii*), que

$$S(\phi_k(qg)) = S(\phi_k(q) \cdot g) = S(S(\phi_k(q))g).$$

Escrevendo $g = sk$ decomposição de Cartan de g , tem-se que $S(\phi_k(qg)) = s_k s$. Dessa forma, o resultado segue facilmente da proposição 2.1.4. \square

Os dois próximos resultados podem ser encontrados em [30] e mostram que todo \mathfrak{a} -expoente de Lyapunov do fluxo ϕ_t é um expoente de Lyapunov de alguma sequência regular $S(\phi_k(q))$.

Proposição 2.2.4 *Para todo $q \in Q$, temos $\frac{1}{k}d(x_0 \cdot s_k, x_0 \cdot s_{k+1}) \rightarrow 0$, $k \rightarrow +\infty$, onde $s_k = S(\phi_k(q))$.*

Demonstração: Seja $q \in Q$. Denote por $q_k := \phi_k(q) \in Q$ e $q_k = r_k \cdot s_k \in R \cdot S$ sua decomposição de Cartan. Note que

$$q_{k+1} = \phi_{k+1}(q) = \phi_1(q_k).$$

Por outro lado, $q_{k+1} = r_{k+1} \cdot s_{k+1}$ e, assim, $q_{k+1} = \phi_1(q_k) = \phi_1(r_k) \cdot s_k$. Logo,

$$s_{k+1} = S(q_{k+1}) = S(\phi_1(r_k) \cdot s_k) = S(S(\phi_1(r_k))s_k) = S(\phi_1(r_k))s_k,$$

onde foi usado o item *iii*) da proposição A.3.4. Dessa forma,

$$\begin{aligned} d(x_0 \cdot s_k, x_0 \cdot s_{k+1}) &= d(x_0 \cdot s_k, x_0 \cdot S(\phi_1(r_k))s_k) \\ &= d(x_0, x_0 \cdot S(\phi_1(r_k))) = |\log S(\phi_1(r_k))|_\theta. \end{aligned}$$

Pela compacidade do espaço base, segue que R é compacto. Logo, pela continuidade de ϕ_t e da decomposição de Cartan, temos que $d(x_0 \cdot s_k, x_0 \cdot s_{k+1})$ é limitado e portanto, segue o resultado. \square

Note que o crescimento sublinear da sequência $(s_k) = (S(\phi_k(q)))$ independe do ponto q considerado sobre o fibrado Q .

Proposição 2.2.5 *Seja $r \in R$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) $r \in R$ é ponto regular para o fluxo. Denote por $D \in \mathfrak{s}$ o raio assintótico e por $H^+ \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$ o expoente polar de $(S(\phi_k(r)))$;*
- ii) O expoente de Lyapunov existe em qualquer direção $r \cdot b$, $b \in \mathbb{F}$, ao longo da fibra de r . Neste caso, para todo $b \in \text{st}(D, w)$, $\lambda(r \cdot b) = w^{-1}H^+$.*

Demonstração: Seja $\phi_k(r) = r_k \cdot s_k \in R \cdot S$ decomposição de Cartan do fibrado. De $\phi_k(r) = r_k \cdot s_k$, segue que $\lambda(r \cdot b) = \lambda(s_k, b)$. Pelas proposições 2.1.4 e 2.2.4, $r \in R$ é regular para o fluxo se, e só se, existe $\lambda(s_k, b)$, para todo $b \in \mathbb{F}$. E, neste caso, para todo $b \in \text{st}(D, w)$, $\lambda(r \cdot b) = w^{-1}H^+$. \square

2.2.2 Cociclo subaditivo

Considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{Z} \times X &\longrightarrow \text{cl}(A^+), \\ (k, x) &\longmapsto h_k \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde $x = \pi(r)$, $r \in R$, e $\phi_k(r) = r_k \cdot s_k = r_k \cdot v_k h_k v_k^{-1}$. Note que ρ está bem definida. De fato:

$$\phi_k(r \cdot u) = r_k \cdot s_k u = r_k \cdot v_k h_k v_k^{-1} u = r_k u \cdot (u^{-1} v_k) h_k (u^{-1} v_k)^{-1}.$$

A aplicação definida por $\mathfrak{a}^+(k, x) := \log \rho(k, x) \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$, diferentemente de $\mathfrak{a}(t, \xi)$, definida pela decomposição de Iwasawa (veja seção A.3.4), não é um cociclo. Defina, para $\mu \in \mathfrak{a}^*$,

$$\mathfrak{a}_\mu^+(k, x) = \mu(\mathfrak{a}^+(k, x)) \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Quando μ é um peso fundamental de uma representação complexa de dimensão finita de G , prova-se adiante que $\mathfrak{a}_\mu^+(k, x)$ é um cociclo subaditivo.

Seja $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ a complexificação da álgebra de Lie de \mathfrak{g} . Se \mathfrak{h} é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ e Σ é um sistema simples de raízes, $\mu \in \mathfrak{h}^*$ é um *peso fundamental* se

$$\frac{2\langle \mu, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}^+,$$

para todo $\alpha \in \Sigma$. Cada peso fundamental μ define uma única (a menos de conjugação) representação irredutível ρ_μ de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ no espaço vetorial V_μ (veja seção A.2) de pesos associado a μ .

Seja Φ_G o conjunto dos pesos fundamentais de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ tais que a representação ρ_{μ} restrita a \mathfrak{g} estende-se a uma representação de G . Pela proposição A.2.6, Φ_G gera $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, onde \mathfrak{h} é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, ou seja, $\mu \in \Phi_G$ assume valores reais em $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$.

Para $\mu \in \Phi_G$, considere $\mathcal{V}_{\mu} := Q \times_G V_{\mu}$, fibrado associado a Q , onde a ação à esquerda de G em V_{μ} é dada pela representação estendida de ρ_{μ} . Note que \mathcal{V}_{μ} é um fibrado vetorial de dim V_{μ} . O fluxo ϕ_t em Q induz um fluxo linear em \mathcal{V}_{μ} , denotado também por ϕ_t . O próximo lema caracteriza a norma do operador ϕ_t em termos de $\mathfrak{a}_{\mu}^+(k, x)$ (veja também [12], lema 4.22).

Lema 2.2.6 *Seja $\mu \in \Phi_G$. Então \mathcal{V}_{μ} é dotado de uma norma $\|\cdot\|$ tal que*

$$\mathfrak{a}_{\mu}^+(t, x) = \log \|(\phi_t)_x\|,$$

onde $\|(\phi_t)_x\|$ é a norma do operador $(\phi_t)_x : (\mathcal{V}_{\mu})_x \rightarrow (\mathcal{V}_{\mu})_{t \cdot x}$.

Demonstração: Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno em V_{μ} tal que $\rho_{\mu}(k)$ é uma isometria para $k \in K$. Este produto interno pode ser induzido fibra a fibra em \mathcal{V}_{μ} como

$$\langle r \cdot v, r \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle, \quad r \in R, \quad v, w \in V_{\mu}.$$

Usando a decomposição polar do fibrado de Q , escreve-se $\phi_t(r) = r_t \cdot h_t u_t$, $r_t \in R$, $h_t \in \text{cl } A^+$ e $u_t \in K$. Então,

$$\phi_t(r \cdot v) = r_t \cdot \rho_{\mu}(h_t u_t) v, \quad v \in V_{\mu}, \quad \pi(r) = x.$$

Entretanto, $\|r_t \cdot \rho_{\mu}(h_t u_t) v\| = \|\rho_{\mu}(h_t u_t) v\|$, desde que r_t é uma isometria entre V_{μ} e a fibra de \mathcal{V}_{μ} sobre $x = \pi(r)$. Logo, segue a igualdade

$$\|(\phi_t)_x\| = \|\rho_{\mu}(h_t u_t)\|$$

entre normas de operadores. Já que $\rho_{\mu}(u_t)$ é uma isometria, tem-se que $\|\rho_{\mu}(h_t u_t)\| = \|\rho_{\mu}(h_t) \rho_{\mu}(u_t)\| = \|\rho_{\mu}(h_t)\|$, ou seja, $\|(\phi_t)_x\| = \|\rho_{\mu}(h_t)\|$. Por outro lado, $\rho_{\mu}(h_t)$ é simétrica com relação ao produto interno K -invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em V_{μ} .

Dessa forma, $\|\rho_\mu(h_t)\|$ é o maior autovalor de $\rho_\mu(h_t)$, o qual é dado por $\exp \mu(\log h_t)$. Portanto,

$$\|(\phi_t)_x\| = \exp \mu(\log h_t) = \exp \mathbf{a}_\mu^+(t, x).$$

□

Este lema implica facilmente a subaditividade de $\mathbf{a}_\mu^+(t, x)$.

Proposição 2.2.7 *Seja $\mu \in \Phi_G$. Então, $\mathbf{a}_\mu^+(t, x)$ é um cociclo subaditivo com relação ao fluxo induzido na base X , isto é,*

$$\mathbf{a}_\mu^+(t + s, x) \leq \mathbf{a}_\mu^+(t, s \cdot x) + \mathbf{a}_\mu^+(s, x).$$

Demonstração: De fato, pelo lema anterior:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\mu^+(t + s, x) &= \log \|(\phi_{t+s})_x\| \\ &\leq \log \|(\phi_t)_{s \cdot x}\| \|(\phi_s)_x\| = \mathbf{a}_\mu^+(t, s \cdot x) + \mathbf{a}_\mu^+(s, x). \end{aligned}$$

□

2.3 O Teorema Ergódico Multiplicativo

Como já visto no capítulo 1, teorema 1.2.1, o teorema ergódico multiplicativo de Oseledets (TEM) garante que, dados um espaço de probabilidade e um fluxo que preserva a medida desse espaço, os expoentes de Lyapunov existem quase sempre. Além disso, se essa medida é ergódica, existe uma quantidade finita de expoentes de Lyapunov e os mesmos são constantes quase sempre.

Na tentativa de estabelecer um resultado análogo ao TEM para o contexto trabalhado aqui, será mostrado que quase todo ponto $x \in X$ é regular, ou seja, pelo lema 2.2.3 e pela proposição 2.2.5, tem-se que os \mathfrak{a} -expoentes de Lyapunov dados por (2.1) existem ν -quase sempre, onde ν é a medida de probabilidade na base X .

Defina a seguinte sequência de funções reais em X :

$$f_n : x \in X \longmapsto f_n(x) := \mathbf{a}_\mu^+(n, x) \in \mathbb{R},$$

onde $\mathbf{a}_\mu^+(n, x) = \mu(\log \rho(k, x))$, $\mu \in \Phi_G$, e ρ é a aplicação definida por (2.2).

Suponha que, para todo peso dominante $\mu \in \Phi_G$, a função

$$f_1(\cdot) = \mathbf{a}_\mu^+(1, \cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

é integrável com relação a ν . Usando esta hipótese e o fato de que a sequência de funções (f_n) é subaditiva (pela proposição 2.2.7), segue pelo teorema ergódico subaditivo de Kingman (veja teorema B.1.12) que, para quase todo ponto $x \in X$, existe o seguinte limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \mathbf{a}_\mu^+(k, x),$$

para todo $\mu \in \Phi_G$.

Logo, existe o seguinte limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \mathbf{a}^+(k, x),$$

desde que Φ_G gera o dual \mathfrak{a}^* . Ou seja, o limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} h_k^{1/k}$$

existe, para ν -quase todo ponto $x \in X$.

Portanto, da existência do limite acima e do crescimento sublinear (veja proposição 2.2.4), segue pelo teorema de Kaimanovich (veja teorema 2.1.2) uma das partes principais do TEM.

Teorema 2.3.1 *Suponha que $f_\mu(\cdot) = \mathbf{a}_\mu^+(1, \cdot)$ é ν -integrável, para todo $\mu \in \Phi_G$. Então, existe um conjunto mensurável $\Omega \subset X$, com $\nu(\Omega) = 1$ e invariante pelo fluxo, tal que todo $x \in \Omega$ é regular.*

Segue, assim, o seguinte resultado.

Corolário 2.3.2 *Seja Ω como no teorema anterior. Considere $x \in \Omega$ e $r \in R$ tal que $\pi(r) = x$. Então, a sequência $s_k = v_k h_k v_k^{-1}$ definida pela decomposição de Cartan $\phi_k(r) = r_k \cdot s_k$ é regular. Além disso, escrevendo*

$$D(r) := \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \log s_k \text{ e } H^+(r) := \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \log h_k,$$

tem-se que

$$\lambda(r \cdot b) = w^{-1} H^+(r),$$

para todo $b \in \text{st}(D(r), w)$.

Demonstração: Do teorema anterior, tem-se a regularidade de (s_k) . Por [17], o raio assintótico $D(r)$ de (s_k) pode ser escrito como

$$D(r) := \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \log s_k.$$

Já a última parte, segue claramente da proposição 2.2.5. □

Proposição 2.3.3 *Sejam $D : \pi^{-1}(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{s}$ e $H^+ : \pi^{-1}(\Omega) \longrightarrow \text{cl } \mathfrak{a}^+$ como no corolário acima. Para $u \in K$:*

$$D(ru) = \text{Ad}(u^{-1})D(r) \text{ e } H^+(ru) = H^+(r).$$

Demonstração: Observe inicialmente que

$$\phi_k(r \cdot u) = r_k u \cdot u^{-1} s_k u,$$

com $u^{-1} s_k u = (u^{-1} v_k) h_k (u^{-1} v_k)^{-1}$. Dessa forma, é claro que $H^+(ru) = H^+(r)$.

Para a outra igualdade, note inicialmente que

$$u^{-1} s_k u = \exp(\text{Ad}(u^{-1}) \log s_k).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} D(ru) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \log(u^{-1} s_k u) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} (\text{Ad}(u^{-1}) \log s_k) \\ &= \text{Ad}(u^{-1}) \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \log s_k \right) \\ &= \text{Ad}(u^{-1}) D(r). \end{aligned}$$

Dado o fibrado principal $R \longrightarrow X$ com grupo estrutural K , pode-se construir o fibrado associado $R \times_K \mathfrak{s} \longrightarrow X$ a partir da ação (à esquerda) adjunta de K em \mathfrak{s} . O resultado seguinte é uma consequência imediata da proposição anterior.

Corolário 2.3.4 *A aplicação $r \in \pi^{-1}(\Omega) \longmapsto D(r) \in \mathfrak{s}$ define uma seção do fibrado R sobre Ω . Além disso, para $u \in K$,*

$$r \cdot \text{st}(D(r), w) = ru \cdot \text{st}(D(ru), w). \quad (2.4)$$

Ainda pela proposição anterior, H^+ pode ser induzido na base do fibrado R restrito a Ω , tendo em vista que $H^+(r) = H^+(ru)$, para $u \in K$, ou seja, $H^+(x) = H^+(r)$, com $\pi(r) = x$.

Proposição 2.3.5 *A função $H^+ : \Omega \longrightarrow \text{cl } \mathfrak{a}^+$ é mensurável e invariante pelo fluxo.*

Demonstração: Por definição, tem-se que

$$H^+(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \mathfrak{a}^+(k, x).$$

Assim como a existência deste limite, o resultado segue do teorema ergódico subaditivo de Kingman. \square

Definição 2.3.6 *Para cada $x \in \Omega$, o tipo parabólico de Lyapunov em x é definido pelo seguinte subconjunto de raízes simples:*

$$\Theta_{\text{Ly}}(x) =: \{ \alpha \in \Sigma : \alpha(H^+(x)) = 0 \}.$$

Da mesma forma, tal subconjunto define um flag $\mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}(x)}$, chamado de flag de Lyapunov em $x \in \Omega$.

Para $x \in \Omega$ e $w \in W$, denote por $\text{st}(x, w) := r \cdot \text{st}(D(r), w)$, com $\pi(r) = x$. Note que, por (2.4), $\text{st}(x, w)$ está bem definido. Defina, para $w \in W$,

$$\text{st}(w) := \bigcup_{x \in \Omega} \text{st}(x, w) \subset \mathbb{F}Q.$$

Observe que

$$\text{st}(w) = \{\xi \in \pi^{-1}(\Omega) : \lambda(\xi) = w^{-1}H^+(\pi(\xi))\}. \quad (2.5)$$

Logo, $\text{st}(w)$ é mensurável e $\pi^{-1}(\Omega) = \bigcup_{w \in W} \text{st}(w)$.

Proposição 2.3.7 *Tem-se que $\text{st}(w)$ é invariante pelo fluxo em $\mathbb{F}Q$.*

Demonstração: Inicialmente, será mostrado que para $\xi \in \mathbb{F}Q$ tal que $\lambda(\xi)$ existe, então, para $s \in \mathbb{T}$, $\lambda(\phi_s(\xi))$ existe e, além disso, $\lambda(\xi) = \lambda(\phi_s(\xi))$. De fato, como \mathbf{a} é um cociclo aditivo sobre $\mathbb{F}Q$, tem-se que

$$\frac{1}{t}\mathbf{a}(t, \phi_s(\xi)) = \frac{1}{t}\mathbf{a}(t+s, \xi) - \frac{1}{t}\mathbf{a}(s, \xi). \quad (2.6)$$

Além disso, note que

$$\frac{1}{t}\mathbf{a}(t+s, \xi) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+s}{t} \frac{1}{t+s} \mathbf{a}(t+s, \xi) \rightarrow \lambda(\xi),$$

e o segundo termo da equação (2.6) tende a zero, quando $t \rightarrow +\infty$. Dessa forma, $\lambda(\xi) = \lambda(\phi_s(\xi))$.

Por (2.5), os conjuntos $\text{st}(w)$, $w \in W$, decompõem $\pi^{-1}(\Omega)$ nos conjuntos de nível $\lambda^{-1}\{w^{-1}H^+\}$, os quais são invariantes pelo fluxo em $\mathbb{F}Q$. \square

2.3.1 \mathbf{a} -expoentes de Lyapunov para o fluxo reverso

Como na seção anterior, considere o fibrado principal $Q \rightarrow X$ e a K -redução R de Q . Denote por $\lambda^-(\xi)$ o \mathbf{a} -expoente de Lyapunov para o fluxo inverso $\phi_n^{-1} = \phi_{-n}$ na direção de $\xi \in \mathbb{F}Q$, ou seja,

$$\lambda^-(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \mathbf{a}^-(n, \xi),$$

onde $\mathbf{a}^-(n, \xi)$ é \mathbf{a} -cociclo vetorial sobre o fibrado flag $\mathbb{F}Q$ com relação ao fluxo inverso (veja subseção A.3.4).

Seja R a K -redução de Q e considere ϕ_n^R o fluxo induzido por ϕ_n em R , dado por

$$\phi_n^R(r) = R(\phi_n(r)), \quad r \in R.$$

Seu fluxo inverso $(\phi_n^R)^{-1} = (\phi_n^{-1})^R$ é o fluxo induzido pela inversa de ϕ . Tomando a decomposição de Iwasawa $Q = R \cdot AN$, ϕ_n e ϕ_{-n} escrevem-se como

$$\phi_n(r) = \phi_n^R(r) \cdot t_n(r) \text{ e } \phi_{-n}(r) = \phi_{-n}^R(r) \cdot \widehat{t}_n(r), \quad r \in R, n \in \mathbb{N},$$

com $t_n, \widehat{t}_n : R \longrightarrow AN$.

Proposição 2.3.8 *Tem-se que $\widehat{t}_n(r) = (t_n(\phi_{-n}^R(r)))^{-1}$, para $r \in R, n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Observe que, usando a invariância à direita do fluxo ϕ , segue que

$$\begin{aligned} r &= \phi_n \phi_{-n}(r) = \phi_n(\phi_{-n}^R(r) \cdot \widehat{t}_n(r)) \\ &= \phi_n(\phi_{-n}^R(r)) \cdot \widehat{t}_n(r) \\ &= \phi^R(\phi_{-n}^R(r)) \cdot t_n(\phi_{-n}^R(r)) \widehat{t}_n(r) = r \cdot t_n(\phi_{-n}^R(r)) \widehat{t}_n(r). \end{aligned}$$

Portanto, como a ação de G em Q é livre, tem-se que $\widehat{t}_n(r) = t_n(\phi_{-n}^R(r))^{-1}$. \square

Desde que $t_n(r), \widehat{t}_n(r) \in AN, r \in R$, segue que

$$t_n(r) = a_n(r) z_n \text{ e } \widehat{t}_n(r) = \widehat{a}_n(r) \widehat{z}_n,$$

com $a_n(r), \widehat{a}_n(r) \in A$ e $z_n, \widehat{z}_n \in N$. Desse modo, os \mathfrak{a} -cociclos sobre o fibrado flag $\mathbb{F}Q$ com relação aos fluxos ϕ_n e ϕ_{-n} são dados, respectivamente, por

$$\mathfrak{a}(n, \xi) = \log a_n(r) \text{ e } \mathfrak{a}^-(n, \xi) = \log \widehat{a}_n(r).$$

Proposição 2.3.9 *Para $\xi \in \mathbb{F}Q, \mathfrak{a}^-(n, \xi) = -\mathfrak{a}(n, \phi_{-n}(\xi))$.*

Demonstração: Observe inicialmente que

$$\begin{aligned} \widehat{a}_n(r) \widehat{z}_n &= \widehat{t}_n(r) = (t_n(\phi_{-n}^R(r)))^{-1} = z_n^{-1} a_n(\phi_{-n}^R(r))^{-1} \\ &= a_n(\phi_{-n}^R(r))^{-1} \left[a_n(\phi_{-n}^R(r))^{-1} z_n^{-1} a_n(\phi_{-n}^R(r))^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Logo, $\zeta := a_n (\phi_{-n}^R(r))^{-1} z_n^{-1} a_n (\phi_{-n}^R(r))^{-1} \in N$. Assim, $a_n (\phi_{-n}^R(r))^{-1} \zeta$ e, pela unicidade da decomposição de Iwasawa, segue que $\widehat{a}_n(r) = a_n (\phi_{-n}^R(r))^{-1}$. Tomando logaritmos o resultado segue. \square

Proposição 2.3.10 *Tem-se que $\lambda^-(\xi) = -\lambda(\xi)$, para $\xi \in \mathbb{F}Q$.*

Demonstração: Seja $\mu \in \Phi_G$ um peso dominante e escreva $\mathbf{a}_\mu(n, \xi) := \mu(\mathbf{a}(n, \xi))$ e $\mathbf{a}_\mu^-(n, \xi) := \mu(\mathbf{a}^-(n, \xi))$. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina as seguintes funções em $\mathbb{F}Q$:

$$f_n(\xi) := \mathbf{a}_\mu(n, \xi) \text{ e } g_n(\xi) := -\mathbf{a}_\mu^-(n, \xi).$$

Pela proposição 2.3.9, tem-se que $g_n(\xi) = f_n(\phi_{-n}(\xi))$. Assim, desde que $\mathbf{a}^-(n, \xi)$ é um cociclo aditivo, segue claramente que $g_{2n}(\xi) = g_n(\xi) + g_n(\phi_n(\xi)) = g_n(\xi) + f_n(\xi)$. Tomando limites, obtém-se

$$\begin{aligned} -\mu(\lambda^-(\xi)) &= \lim \frac{1}{2n} g_{2n}(\xi) = \lim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} g_n(\xi) + \frac{1}{n} f_n(\xi) \right) \\ &= \frac{1}{2} (-\mu(\lambda^-(\xi)) + \mu(\lambda(\xi))). \end{aligned}$$

Isto implica que $-\mu(\lambda^-(\xi)) = \mu(\lambda(\xi))$, para todo $\mu \in \Phi_G$, o que mostra que $\lambda^-(\xi) = -\lambda(\xi)$. \square

Com este resultado, é possível relacionar os expoentes polares de ϕ_{-n} e ϕ_n .

Corolário 2.3.11 *Para $x \in \Omega$, tem-se que $H^-(x) = -w_0 H^+(x)$, onde w_0 é a involução principal e $H^- : \Omega \rightarrow \text{cl } \mathfrak{a}^+$.*

Demonstração: Para um elemento regular $x \in \Omega$, os expoentes de Lyapunov para o fluxo reverso são dados por $w^{-1} H^-(x)$. Particularmente, $H^-(x)$ é o único expoente de Lyapunov de ϕ_{-n} que pertence à câmara positiva. Por outro lado, $w_0 H^+(x) \in -\text{cl } \mathfrak{a}^+$ é um expoente de Lyapunov do fluxo. Logo, pela proposição

anterior, $-w_0H^+(x) \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$ é expoente de Lyapunov do fluxo inverso. Portanto, $H^-(x) = -w_0H^+(x)$. \square

Corolário 2.3.12 *O tipo parabólico de Lyapunov do fluxo reverso em $x \in \Omega$ é o dual $\Theta_{\text{Ly}}^*(x)$ do tipo parabólico $\Theta_{\text{Ly}}(x)$ do fluxo direto.*

2.3.2 Decomposição de Oseledets para o fluxo reverso

Os expoentes de Lyapunov para o fluxo reverso são dados por $w^{-1}H^-(x)$, $x \in \Omega$. Denote por $\text{st}^-(w)$ as componentes da decomposição de Oseledets sobre o espaço de medida total Ω , invariantes pelo fluxo reverso, e dadas em cada fibra sobre $x \in \Omega$ por

$$\text{st}^-(x, w) := r \cdot \text{st}(D^-(r), w), \quad \pi(r) = x,$$

onde $D^-(r)$ é o raio assintótico da sequência regular $(\mathbf{S}(\phi_{-k}(r)))$. Assim, o expoente de Lyapunov para o fluxo reverso $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$, na direção $\xi \in \text{st}^-(x, w)$, é dado por

$$\lambda^-(\xi) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \mathfrak{a}(t, \xi) = w^{-1}H^-(x).$$

2.3.3 Seção de Oseledets

Para cada $x \in \Omega$, $\pi(r) = x$, considere a projeção canônica $\pi_{\Theta_{\text{Ly}}^*(x)} : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}^*(x)}$. Como $\text{st}(x, w_0) \subset (\mathbb{F}Q)_x$, segue que

$$r^{-1}(\text{st}(x, w_0)) = \text{st}(D(r), w_0),$$

onde r é o difeomorfismo entre o flag \mathbb{F} e a fibra sobre x , $(\mathbb{F}Q)_x$. Entretanto,

$$\text{st}(D(r), w_0) = uN_{H^+(x)}^- \text{fix}(H^+(x), w_0),$$

onde $D(r) = \text{Ad}(u)H^+(x)$, $u \in K$. Pelo lema A.1.1, tem-se que

$$\pi_{\Theta_{\text{Ly}}^*(x)}(\text{st}(D(r), w_0)) = ub_{\Theta_{\text{Ly}}^*(x)}^-,$$

com $b_{\Theta_{L^y}^*}^-(x) = w_0 b_{\Theta_{L^y}^*}(x)$.

Considerando, por abuso de notação, $\pi_{\Theta_{L^y}^*}(x) : \mathbb{F}Q \longrightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{L^y}^*(x)}Q$ a projeção canônica entre os fibrados flag, segue que

$$\pi_{\Theta_{L^y}^*}(x)(\text{st}(x, w_0)) = \left\{ ru \cdot b_{\Theta_{L^y}^*}^-(x) \right\}.$$

Ou seja, segue o seguinte resultado.

Proposição 2.3.13 *Considere a projeção canônica $\pi_{\Theta_{L^y}^*}(x) : \mathbb{F}Q \longrightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{L^y}^*(x)}Q$. Então, para cada $x \in \Omega$, a imagem de $\text{st}(x, w_0)$ por $\pi_{\Theta_{L^y}^*}(x)$ reduz-se a um único ponto em $\mathbb{F}_{\Theta_{L^y}^*(x)}Q$, o qual será denotado por $\xi^*(x)$. Ou seja,*

$$\pi_{\Theta_{L^y}^*}(x)(\text{st}(x, w_0)) = \{\xi^*(x)\}.$$

Revertendo o tempo, pode-se obter um resultado análogo para a componente repulsora para o fluxo reverso em $\mathbb{F}_{\Theta_{L^y}(x)}Q$. De fato, basta considerar o fluxo reverso ϕ_{-t} e aplicar a proposição anterior. Tomando $\Delta(x) = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H^-(x)) = 0\}$, tem-se que $\Delta^*(x) = \Theta_{L^y}(x)$. Assim, $\pi_{\Theta_{L^y}(x)}(\text{st}^-(x, w_0))$ reduz-se a um único ponto em $\mathbb{F}_{\Theta_{L^y}(x)}Q$. Assim, segue o seguinte corolário da proposição anterior.

Corolário 2.3.14 *Considere a projeção canônica $\pi_{\Theta_{L^y}(x)} : \mathbb{F}Q \longrightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{L^y}(x)}Q$. Então, para cada $x \in \Omega$, a imagem de $\text{st}^-(x, w_0)$ por $\pi_{\Theta_{L^y}(x)}$ reduz-se a um único ponto em $\mathbb{F}_{\Theta_{L^y}(x)}Q$, o qual será denotado por $\xi(x)$. Ou seja,*

$$\pi_{\Theta_{L^y}(x)}(\text{st}^-(x, w_0)) = \{\xi(x)\}.$$

Agora, para cada $x = \pi(q) \in \Omega$, defina os seguintes elementos:

$$f(q) := q^{-1}(\xi(\pi(q))) \text{ e } f^*(q) := q^{-1}(\xi^*(\pi(q))),$$

em $\mathbb{F}_{\Theta_{L^y}(x)}$ e $\mathbb{F}_{\Theta_{L^y}^*(x)}$, respectivamente. Observe que tais elementos são G -equivariantes, isto é, $f(qg) = g^{-1}f(q)$ e $f^*(qg) = g^{-1}f^*(q)$.

Proposição 2.3.15 *Os elementos $\xi(x) \in \mathbb{F}_{\Theta_{L^y}(x)}Q$ e $\xi^*(x) \in \mathbb{F}_{\Theta_{L^y}^*(x)}Q$ são ϕ_t -invariantes, para cada $x \in \Omega$.*

Demonstração: Pelo que foi visto,

$$\pi_{\Theta_{\text{Ly}}(x)}(\text{st}^-(x, w_0)) = \{\xi(x)\} \text{ e } \pi_{\Theta_{\text{Ly}}^*(x)}(\text{st}(x, w_0)) = \{\xi^*(x)\}.$$

Usando a ϕ_t -invariância de $\text{st}(w)$ (veja proposição 2.3.7), segue que $\xi(\phi_t(x)) = \xi(x)$. □

Transversalidade

A partir da definição de elementos opostos em $\mathbb{F}_\Theta \times \mathbb{F}_{\Theta^*}$, pode-se obter a mesma noção para elementos em fibrados flag. Neste sentido, é possível mostrar que (ξ, ξ^*) são opostos e, com isso, encontrar uma seção análoga à obtida em [3] e [23] (veja teorema 1.1.15, itens *ii*) e *iii*) para descrever as componentes de Lyapunov.

Definição 2.3.16 *Para $x \in X$, considere $\xi_1 \in (\mathbb{F}_\Theta Q)_x$ e $\xi_2 \in (\mathbb{F}_{\Theta^*} Q)_x$. Os elementos ξ_1 e ξ_2 são ditos opostos se $b_1 = q^{-1}(\xi_1) \in \mathbb{F}_\Theta$ e $b_2 = q^{-1}(\xi_2) \in \mathbb{F}_{\Theta^*}$ são opostos, onde q é o difeomorfismo entre o flag e a fibra sobre $x = \pi(q)$ do fibrado flag.*

Note que essa definição não depende do ponto q escolhido sobre a fibra. De fato, sejam $\xi_1 \in (\mathbb{F}_\Theta Q)_{\pi(q)}$ e $\xi_2 \in (\mathbb{F}_{\Theta^*} Q)_{\pi(q)}$. Pelo que já foi visto na seção A.1.3, se $p = qa$, $a \in G$, então

$$p^{-1}(\xi_1) = a^{-1}q^{-1}(\xi_1) \text{ e } p^{-1}(\xi_2) = a^{-1}q^{-1}(\xi_2)$$

são opostos se, e só se, $q^{-1}(\xi_1)$ e $q^{-1}(\xi_2)$ são opostos.

Proposição 2.3.17 *Dado $x \in \Omega$, os elementos $\xi(x) \in \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}(x)} Q$ e $\xi^*(x) \in \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}^*(x)} Q$ são opostos, isto é, para $x = \pi(q) \in \Omega$, $f(q) \in \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}(x)}$ e $f^*(q) \in \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}^*(x)}$ são elementos opostos.*

Demonstração: Sabe-se, pela proposição 2.3.13, que $\{\xi^*(x)\} = \pi_{\Theta_{\text{Ly}}^*(x)}(\text{st}(x, w_0))$, onde $\text{st}(x, w_0) = r \cdot \text{st}(D(r), w_0)$, $\pi(r) = x$. Assim, $\text{st}_{\Theta_{\text{Ly}}^*(x)}(D(r), w_0)$ coincide com $\text{fix}_{\Theta_{\text{Ly}}^*(x)}(D(r), w_0)$ que, neste caso, é um conjunto pontual. Portanto, pelo corolário

A.1.5, um elemento $\eta \in (\mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}(x)}Q)_x$ é oposto a $\xi^*(x)$ se, e só se, $\eta \in \text{st}_{\Theta_{\text{Ly}}(x)}(x, 1)$. Por outro lado, $\text{st}(x, 1) = \pi_{\Theta_{\text{Ly}}(x)}^{-1}(\text{st}_{\Theta_{\text{Ly}}(x)}(x, 1))$ e, um elemento $\bar{\eta} \in \text{st}(x, 1)$ se, e somente se, seu expoente de Lyapunov $\lambda(\bar{\eta}) \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$. Ainda segue da proposição 2.3.10 que, $\bar{\eta} \in \text{st}(x, 1)$ se, e só se, seu expoente de Lyapunov para o fluxo reverso $\lambda^-(\bar{\eta}) = -\lambda(\bar{\eta}) \in -\text{cl } \mathfrak{a}^+$. Agora, se $\bar{\eta} \in \pi_{\Theta_{\text{Ly}}(x)}^{-1}\{\xi(x)\}$, então $\lambda^-(\bar{\eta}) \in -\text{cl } \mathfrak{a}^+$. Logo, $\pi_{\Theta_{\text{Ly}}(x)}^{-1}(\xi(x)) \subset \text{st}(x, 1)$, ou seja, $\xi(x) \subset \text{st}_{\Theta_{\text{Ly}}(x)}(x, 1)$. \square

Da proposição acima, conclui-se que, para $q \in \pi^{-1}(\Omega)$, $(q^{-1}(\xi(x)), q^{-1}(\xi^*(x)))$ pertence à órbita G -adjunta aberta e densa

$$\mathcal{O}_{\Theta_{\text{Ly}}(x)} = \left\{ \left(gb_{\Theta_{\text{Ly}}(x)}, gb_{\Theta_{\text{Ly}}^*(x)} \right) \right\} \subset \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}(x)} \times \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}^*(x)}, \quad \pi(q) = x,$$

que se identifica à órbita G -adjunta de $H^+(x)$ em \mathfrak{g} .

Suponha que a medida ν na base X é ergódica. Como $H^+ : \Omega \rightarrow \text{cl } \mathfrak{a}^+$ é mensurável, segue que $H^+(x) = H_\nu^+$ é constante. Dessa forma, seja $\Theta_{\text{Ly}} := \Theta_{\text{Ly}}(H_\nu^+)$. Assim, obtém-se duas aplicações mensuráveis

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}}Q \text{ e } \xi^* : \Omega \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}^*}Q,$$

as quais determinam duas seções mensuráveis dos fibrados flag $\mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}}Q$ e $\mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}^*}Q$ sobre Ω , respectivamente. Além disso, pode-se definir duas aplicações mensuráveis $f : \pi^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}}$ e $f^* : \pi^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}^*}$, dadas por

$$f(q) = q^{-1}(\xi(\pi(q))) \text{ e } f^*(q) = q^{-1}(\xi^*(\pi(q))),$$

e G -equivariantes.

Ainda tem-se que, para $q \in \pi^{-1}(\Omega)$, $(f(q), f^*(q)) \in \mathcal{O}_{\Theta_{\text{Ly}}} \approx \text{Ad}(G) \cdot H_\nu^+$. Assim, obtém-se uma aplicação mensurável $h_{\text{Ly}} : \pi^{-1}(\Omega) \rightarrow \text{Ad}(G) \cdot H_\nu^+$, definida por

$$h_{\text{Ly}}(q) := g(q)H_\nu^+ \sim (f(q), f^*(q)), \quad (2.7)$$

G -equivariante e tal que $f(q)$ é o atrator de $h_{\text{Ly}}(q)$ em $\mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}}$ e $f^*(q)$ é o repulsor de $h_{\text{Ly}}(q)$ em $\mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}^*}$. Pode-se notar ainda que h_{Ly} é ϕ_t -invariante.

Proposição 2.3.18 *Considere o fibrado associado $\mathbb{A}_{\Theta_{L_Y}} := Q \times_G \text{Ad}(G) \cdot H_\nu^+ \longrightarrow X$. Então, existe uma seção χ_{L_Y} mensurável sobre Ω de $\mathbb{A}_{\Theta_{L_Y}}$ com aplicação correspondente G -equivariante $h_{L_Y} : \pi^{-1}(\Omega) \longrightarrow \text{Ad}(G) \cdot H_\nu^+$.*

A seção χ_{L_Y} obtida anteriormente é chamada de *seção de Oseledets* do teorema ergódico multiplicativo.

Assim como as componentes de Morse foram descritas fibra a fibra em [3] e [23], pode-se também aqui obter uma descrição das componentes de Oseledets sobre o espaço de medida total em termos dos pontos fixos da aplicação correspondente da seção de Oseledets.

Proposição 2.3.19 *Seja $h_{L_Y} : \pi^{-1}(\Omega) \longrightarrow \text{Ad}(G)H_\nu^+$ como na proposição 2.3.18. Então, as componentes da decomposição de Oseledets sobre o espaço de medida total Ω são dadas fibra a fibra pelos pontos fixos de h , ou seja,*

$$\text{st}(\pi(q), w) = q \cdot \text{fix}(h_{L_Y}(q), w).$$

Demonstração: Seja $x = \pi(q)$ tal que $h_{L_Y}(q) = H_\nu^+$. Desde que $f(q)$ é o atrator de $h_{L_Y}(q)$ em $\mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}}$ e $f^*(q)$ é o repulsor de $h_{L_Y}(q)$ em $\mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}^*}$, segue que

$$\text{st}(x, 1) = q \cdot \text{fix}(h_{L_Y}(q), 1) \text{ e } \text{st}(x, w_0) = q \cdot \text{fix}(h_{L_Y}(q), w_0).$$

Além disso, para $\xi \in \text{st}(x, 1)$ e $\xi' \in \text{st}(x, w_0)$, tem-se que

$$\lambda(\xi) = H_\nu^+ \in \text{cl } \mathfrak{a}^+ \text{ e } \lambda(\xi') = w_0^{-1}H_\nu^+ \in -\text{cl } \mathfrak{a}^+,$$

respectivamente. Assim, para as outras componentes, basta provar que $\xi \in q \cdot \text{fix}(h_{L_Y}(q), w)$ se, e só se, $\lambda(\xi) = w^{-1}H_\nu^+$. De fato, para $w \in W$, considere a seguinte câmara de Weyl, $\mathfrak{a}^+(w) := w^{-1} \cdot \mathfrak{a}^+$. Sabendo que $h_{L_Y}(qw) = w^{-1}H_\nu^+$, segue do que foi visto para a componente atratora que $\xi \in qw \cdot \text{fix}(h_{L_Y}(qw), 1)$ se, e somente se, $\lambda(\xi) = w^{-1}H_\nu^+$. Entretanto,

$$\text{fix}(h_{L_Y}(qw), 1) = w^{-1}\text{fix}(H_\nu^+, w).$$

Assim, $qw \cdot \text{fix}(h_{L_Y}(qw), 1) = q \cdot \text{fix}(h_{L_Y}(q), w)$ e, então, segue o resultado. \square

Com isto, fixando a medida ergódica na base, tem-se um número finito de expoentes de Lyapunov. Mais precisamente, esse número é dado por $|W|/|W_{\Theta_{L_y}}|$, como consequência do corolário a seguir.

Corolário 2.3.20 *Seja ν medida ergódica na base X . Então, $\text{st}(w_1) = \text{st}(w_2)$ se, e só se, $W_{\Theta_{L_y}} w_1 = W_{\Theta_{L_y}} w_2$. Portanto, $\pi^{-1}(\Omega) = \bigcup_{w \in W_{\Theta_{L_y}} \backslash W} \text{st}(w)$.*

Considere $Q_{\Theta_{L_y}} = h_{L_y}^{-1}(H_\nu^+) \subset Q$. Como $\text{Ad}(G) \cdot H_\nu^+ \simeq G/Z_{\Theta_{L_y}}$, segue da proposição A.3.2 que $Q_{\Theta_{L_y}}$ é uma $Z_{\Theta_{L_y}}$ -redução invariante e mensurável de Q sobre Ω , denominada *redução de Oseledets*.

Considerando a decomposição de Iwasawa do centralizador $Z_{\Theta_{L_y}} = K_{\Theta_{L_y}} AN^+(\Theta_{L_y})$, segue que $Q_{\Theta_{L_y}}$ admite uma redução ao subgrupo compacto $K_{\Theta_{L_y}}$, denotada por $R_{\Theta_{L_y}}$.

Proposição 2.3.21 *Tem-se que*

$$\text{st}(w) = \{q \cdot wb_0 : q \in Q_{\Theta_{L_y}}\} = \{r \cdot wb_0 : r \in R_{\Theta_{L_y}}\},$$

onde b_0 é a origem de \mathbb{F} .

Demonstração: Se $q \in Q_{\Theta_{L_y}}$, segue que

$$\text{st}(\pi(q), w) = q \cdot \text{fix}(H_\nu^+, w) = q \cdot Z_{\Theta_{L_y}} wb_0.$$

Entretanto, $Z_{\Theta_{L_y}}$ age transitivamente à direita na fibra de $q \in Q_{\Theta_{L_y}}$, isto é, $\text{st}(w) = Q_{\Theta_{L_y}} wb_0$. A prova da outra igualdade é análoga. \square

2.4 Fibrados Flag Parciais

O cociclo $\mathbf{a}(n, \xi)$, definido no fibrado flag maximal $\mathbb{F}Q$, não pode ser definido em um fibrado flag parcial $\mathbb{F}_\Theta Q$. De qualquer forma, compondo $\mathbf{a}(n, \xi)$ com determinadas aplicações lineares $\mu : \mathfrak{a} \rightarrow V$, onde V é espaço vetorial, tem-se que

$\mathbf{a}_\mu(n, \xi) = \mu \circ \mathbf{a}(n, \xi)$ pode ser fatorado em um cociclo em $\mathbb{F}_\Theta Q$. Esses cociclos parciais aparecem em diversas situações que medem a taxa de crescimento exponencial de funções específicas. Por exemplo, os expoentes de Lyapunov para um fluxo linear em um fibrado vetorial são dados por um cociclo em um fibrado projetivo, o qual é visto como uma variedade flag parcial de $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$ ou $\mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$.

Lema 2.4.1 *Dado um subconjunto $\Theta \subset \Sigma$, seja $\mu : \mathfrak{a} \longrightarrow V$ uma aplicação linear tal que $\mu(H) = 0$, para todo $H \in \mathfrak{a}(\Theta)$. Defina $\mathbf{a}_\mu(t, r) = \mu \circ \mathbf{a}(t, r)$. Então,*

$$\mathbf{a}_\mu(t, rk) = \mathbf{a}_\mu(t, r),$$

para todo $k \in K_\Theta$.

Demonstração: Seja $\phi_t(r) = r_t \cdot a_t n_t$ a decomposição de Iwasawa de $\phi_t(r)$. Logo, $\mathbf{a}(t, r) = \log a_t$. Escreva $a_t = b_t c_t$, com $b_t \in A(\Theta)$ e $c_t \in A_\Theta$, e defina $\mathbf{b}(t, r) := \log b_t$ e $\mathbf{c}(t, r) := \log c_t$. Dessa forma, $\mathbf{a}(t, r) = \mathbf{b}(t, r) + \mathbf{c}(t, r)$. Assim, $\mu(\mathbf{b}(t, r)) = 0$ e, portanto, $\mathbf{a}_\mu(t, r) = \mu(\mathbf{c}(t, r))$.

Agora, $\phi_t(r \cdot k) = \phi_t(r) \cdot k = r_t \cdot a_t n_t k$. Para obter a A -componente de $\phi_t(r)$, considere $n_t = m \bar{n}$, onde $m \in N(\Theta)$ e $\bar{n} \in N_\Theta$. Então, $n_t k = (k m k^{-1})(k \bar{n} k^{-1})$. Se $k \in K_\Theta$, então $n' = k \bar{n} k^{-1} \in N_\Theta \subset N$, já que K_Θ normaliza N_Θ . Por outro lado, $\bar{m} = k m k^{-1} \in M_\Theta$. Com isto, $a_t n_t k = a_t \bar{m} n' = b_t c_t \bar{m} n'$. Desde que $\bar{m} \in M_\Theta$ e $c_t \in A_\Theta$ comutam, segue que $a_t n_t k = b_t \bar{m} c_t n'$, onde $b_t \bar{m} \in M_\Theta$. Considere então a decomposição de Iwasawa de $b_t \bar{m} = u h n$, com $u \in k_\Theta$, $h \in A(\Theta)$ e $n \in N(\Theta)$. Portanto,

$$a_t n_t k = u h n c_t n' = u(h c_t)(n'' n').$$

Assim, $\phi_t(r \cdot k) = r'_t \cdot (h c_t) \bar{n}$, onde $r'_t = r_t \cdot u \in R$ e $\bar{n} = n'' n' \in N$. Isto implica que

$$\mathbf{a}(t, rk) = \log h + \log c_t.$$

Agora, como $h \in A(\Theta)$, segue que $\mu(\log h) = 0$, e $\mathbf{a}_\mu(t, rk) = \log c_t = \mathbf{a}_\mu(t, r)$. \square

Considere $\mathbb{F}_\Theta Q = Q \times_G \mathbb{F}_\Theta$ o fibrado flag de tipo Θ com fibra \mathbb{F}_Θ . Desde que K age transitivamente em \mathbb{F}_Θ , segue que $\mathbb{F}_\Theta = K/K_\Theta$, onde $K_\Theta = K \cap P_\Theta$; seja b_Θ a

origem de $\mathbb{F}_\Theta = K/K_\Theta$. Os elementos de $\mathbb{F}_\Theta Q$ podem ser escritos como $\xi = r \cdot b_\Theta$, com $r \in R$, a K -redução de Q . Note ainda que se $r' = r \cdot k$, para $k \in K_\Theta$, então $r' \cdot b_\Theta = r \cdot kb_\Theta = r \cdot b_\Theta$.

Assim, se uma aplicação linear $\mu : \mathfrak{a} \longrightarrow V$ anula-se em $\mathfrak{a}(\Theta)$, como no lema acima, então $\mathfrak{a}_\mu(t, \xi)$ está bem definido para $\xi \in \mathbb{F}_\Theta Q$, ou seja,

$$\mathfrak{a}_\mu(t, \xi) = \mathfrak{a}_\mu(t, r), \quad \xi = r \cdot b_\Theta.$$

Lema 2.4.2 *A aplicação $\mathfrak{a}_\mu : \mathbb{T} \times \mathbb{F}_\Theta Q \longrightarrow V$ define um cociclo sobre o fluxo ϕ_t em $\mathbb{F}_\Theta Q$.*

Demonstração: A partir do fluxo ϕ_t em Q , defina o fluxo contínuo $\phi_t^R(r) := R(\phi_t(r))$, $r \in R$. Considere a aplicação $\mathfrak{a} : \mathbb{T} \times R \longrightarrow \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}(t, r) = \mathfrak{a}(\phi_t(r))$, projeção sobre a A -componente na decomposição de Iwasawa de $\phi_t(r)$ (veja seção A.3.1). Esta aplicação define um cociclo sobre ϕ_t^R , ou seja,

$$\mathfrak{a}(t + s, r) = \mathfrak{a}(t, \phi_s^R(r)) + \mathfrak{a}(s, r).$$

Desde que $\phi_s(r \cdot b_\Theta) = \phi_s^R(r \cdot b_\Theta)$, segue o resultado. □

O principal exemplo de cociclos sobre fibrados flags parciais são aqueles que fornecem os expoentes de Lyapunov de fluxos lineares em fibrados vetoriais. Seja $\mathcal{V} \longrightarrow X$ um fibrado vetorial real de dimensão n , e considere por $B\mathcal{V}$ o fibrado das bases de \mathcal{V} , um fibrado principal com grupo estrutural $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$. Como visto anteriormente, os elementos de $B\mathcal{V}$ são isomorfismos lineares $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{V}_x$, onde \mathcal{V}_x é a fibra sobre x .

Considere $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a métrica Riemmaniana em \mathcal{V} invariante por $O\mathcal{V}$, fibrado das bases ortonormais. É conveniente lembrar ainda que, desde que $O\mathcal{V}$ é uma $O(n)$ -redução de $B\mathcal{V}$ e, considerando a decomposição de Iwasawa usual de $\text{Gl}(n, \mathbb{R}) = KAN^+$, onde $K = O(n)$ são isometrias lineares de \mathbb{R}^n com a métrica euclidiana $|\cdot|$, A são matrizes diagonais com entradas positivas e N^+ são matrizes triangulares superiores com 1 na diagonal, tem-se a decomposição de Iwasawa do fibrado das bases $B\mathcal{V} = O\mathcal{V} \cdot AN^+$.

Dado Φ_t um fluxo linear em \mathcal{V} (isto é, linear nas fibras), denote por ϕ_t o fluxo induzido no fibrado das bases $B\mathcal{V}$, dado por $\phi_t(p) = \Phi_t \circ p$. Este fluxo induzido em $B\mathcal{V}$ é, claramente, invariante à direita. Os expoentes de Lyapunov são dados por

$$\lambda(v) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\phi_t v\|, \quad v \in \mathcal{V}.$$

Seja $a(t, v) = \log \rho(t, v)$ cociclo aditivo, onde $\rho(t, v) := \frac{\|\phi_t v\|}{\|v\|}$. Logo,

$$\lambda(v) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} a(t, v).$$

Como visto na seção 1.2.1, ρ é depende apenas dos pontos no fibrado projetivo $\mathbb{P}\mathcal{V} \rightarrow X$.

Sejam \mathbb{F} variedade flag maximal de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ e $\mathbb{F}\mathcal{V} = B\mathcal{V} \times_{\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})} \mathbb{F}$ fibrado flag. O \mathfrak{a} -cociclo vetorial $\mathfrak{a}(t, \xi)$ sobre $\mathbb{F}\mathcal{V}$ assume valores em $\mathfrak{a} = \log A$, subespaço das matrizes diagonais. Neste caso, os \mathfrak{a} -expoentes de Lyapunov são dados por

$$\lambda(\xi) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \mathfrak{a}(t, \xi).$$

O cociclo aditivo ρ em $\mathbb{P}\mathcal{V}$ pode ser obtido do \mathfrak{a} -cociclo vetorial em $\mathbb{F}\mathcal{V}$. De fato, seja $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Considere $v = r(e_1) \in \mathcal{V}_x$, para $r \in O\mathcal{V}_x$. Desde que $\phi_t(r) = \Phi_t \circ r$, segue que $\Phi_t(v) = \Phi_t \circ r(e_1) = \phi_t(r)(e_1)$. Agora, $\phi_t(r) = r_t \cdot a_t n_t \in O\mathcal{V} \cdot AN^+$, logo $\Phi_t(v) = r_t(a_t n_t e_1)$. Entretanto, $n_t e_1 = e_1$. Além disso, $r_t \in O\mathcal{V}$ é uma isometria. Portanto,

$$\|\Phi_t(v)\| = \|a_t e_1\|.$$

Ou seja, $\|\Phi_t(v)\|$ é o primeiro autovalor de a_t . Assim, para $\lambda_1 \in \mathfrak{a}^*$ dado por $\lambda_1(\mathrm{diag}\{a_1, \dots, a_n\}) = a_1$, segue que

$$\log \|\Phi_t(v)\| = \lambda_1(\mathfrak{a}(t, \xi)), \quad \xi \in \mathbb{F}\mathcal{V}_x, \quad (2.8)$$

onde $\xi = r \cdot b_0$ e $b_0 = (\langle e_1 \rangle \subset \dots \subset \langle e_1, \dots, e_n \rangle)$. Assim, os expoentes de Lyapunov de Φ_t são dados pela imagem sobre λ_1 dos expoentes vetoriais de Lyapunov de ϕ_t .

Proposição 2.4.3 *Os expoentes de Lyapunov de Φ_t são dados por*

$$\lim \frac{1}{t} \lambda_1(\mathbf{a}(t, \xi)),$$

para $\xi \in \mathbb{F}\mathcal{V}$, e se $0 \neq v \in \mathcal{V}$, então

$$\lim \frac{1}{t} \log \|\Phi_t(v)\| = \lim \frac{1}{t} \lambda_1(\mathbf{a}(t, \xi)),$$

onde $\xi \in \mathbb{F}\mathcal{V}$ é qualquer flag cujo subespaço de dimensão 1 é gerado por v .

Em outras palavras, os expoentes de Lyapunov de Φ são determinados pelo cociclo $\mathbf{a}_{\lambda_1}(t, \xi)$. Note que λ_1 satisfaz a condição do lema 2.4.1 para o espaço projetivo $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{F}_{\Theta}$. Aqui $\Theta = \{\lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n\}$ e $\mathbf{a}(\Theta)$ é o espaço das matrizes diagonais da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & & \\ 0 & D_{(n-1) \times (n-1)} & \end{pmatrix}, \quad \text{tr } D = 0.$$

2.5 Expoentes de Lyapunov clássicos e os provenientes do TEM

Seja $\pi : Q \rightarrow X$ um fibrado principal com grupo estrutural semi-simples G . Considere $\rho : G \rightarrow \text{Gl}(V)$ uma representação linear em um espaço vetorial de dimensão finita V . Com isto, a partir da ação natural (à esquerda) de G em V , obtém-se o fibrado associado $\mathcal{V} := Q \times_G V$. Note que $\mathcal{V} \rightarrow X$ é um fibrado vetorial de dim V e que, devido à decomposição de Iwasawa de Q , os elementos desse fibrado podem ser escritos como $r \cdot v$, $r \in R$ e $v \in V$.

Seja ϕ_t um fluxo invariante à direita em Q , isto é, $\phi_t(qg) = \phi_t(q)g$, $g \in G$. Denota-se o fluxo induzido em \mathcal{V} também por ϕ_t , ou seja,

$$\phi_t(q \cdot v) := \phi_t(q) \cdot v, \quad q \in Q, v \in V.$$

Pela invariância do fluxo em Q , segue que o fluxo induzido em \mathcal{V} é linear (ou seja, linear nas fibras).

Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno em V tal que $\rho(k)$ é uma isometria, para cada $k \in K$. Este produto interno pode ser induzido fibra a fibra em \mathcal{V} como

$$\langle r \cdot v, r \cdot w \rangle := \langle v, w \rangle, \quad r \in R, \quad v, w \in V.$$

Note que tal produto interno está bem definido em \mathcal{V} . De fato, para $r \in R$, $k \in K$ e $v, w \in V$:

$$\begin{aligned} \langle rk \cdot v, rk \cdot w \rangle &= \langle r \cdot \rho(k)v, r \cdot \rho(k)w \rangle \\ &= \langle \rho(k)v, \rho(k)w \rangle \\ &= \langle r \cdot v, r \cdot w \rangle, \end{aligned}$$

onde usamos na última igualdade o fato de que $\rho(k)$ é uma isometria, para cada $k \in K$.

Os expoentes de Lyapunov em \mathcal{V} são dados por

$$\lambda(r \cdot v) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\phi_t(r \cdot v)\|,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma induzida pela métrica em \mathcal{V} . Defina $\rho(t, r \cdot v) := \frac{\|\phi_t(r \cdot v)\|}{\|r \cdot v\|}$ cociclo multiplicativo. Logo, $a(t, r \cdot v) = \log \rho(t, v)$ é um cociclo aditivo. Assim,

$$\lambda(r \cdot v) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} a(t, r \cdot v).$$

Seja μ um peso máximo da representação canônica $\theta_C : \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Considere $\theta := (d\rho)_1 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ a representação infinitesimal de $\rho : G \longrightarrow \text{Gl}(V)$. Tomando a decomposição de Cartan de $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, segue que

$$\theta(\mathfrak{k}) \subseteq \bar{\mathfrak{k}} \text{ e } \theta(\mathfrak{s}) \subseteq \bar{\mathfrak{s}},$$

onde $\bar{\mathfrak{k}}$ e $\bar{\mathfrak{s}}$ são, respectivamente, as matrizes anti-simétricas e simétricas de $\mathfrak{gl}(V)$, componentes da decomposição de Cartan de $\mathfrak{gl}(V)$. De maneira análoga, $\theta(\mathfrak{a}) \subseteq \bar{\mathfrak{a}}$, onde $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ e $\bar{\mathfrak{a}} \subset \bar{\mathfrak{s}}$ são subálgebras abelianas maximais em \mathfrak{g} e $\mathfrak{gl}(V)$, respectivamente. Desde que $\mu \in \bar{\mathfrak{a}}^*$, segue que $\mu \circ \theta$ é um funcional linear em \mathfrak{a} .

A relação entre os \mathfrak{a} -expoentes de Lyapunov em $\mathbb{F}Q$ e os expoentes de Lyapunov em \mathcal{V} , deve ser obtida a partir dos cociclos que os definem. Para isto, considere \mathbb{F} o flag maximal de $\text{Gl}(V)$.

Proposição 2.5.1 $a(t, r \cdot v) = \mu \circ \theta(\mathbf{a}(t, r \cdot b_0))$, onde $r \in R$ e b_0 é qualquer flag de \mathbb{F} cujo subespaço de dimensão 1 é gerado por v .

Demonstração: Seja a decomposição de Iwasawa de $\phi_t(r) = r_t \cdot a_t n_t \in R \cdot AN = Q$. Observe que

$$\begin{aligned} \|\phi_t(r \cdot v)\| &= \|\phi_t(r) \cdot v\| = \|r_t a_t n_t \cdot v\| \\ &= \|r_t \cdot \rho(a_t) \rho(n_t) v\| \\ &= \|\rho(a_t) v\| = \exp(\mu \circ \theta(\log a_t)) v. \end{aligned}$$

Tomando $\|v\| = 1$, conclui-se que

$$\|\phi_t(r \cdot v)\| = \exp(\mu \circ \theta(\log a_t)).$$

Portanto, $a(t, r \cdot v) = \mu \circ \theta(\log a_t) = \mu \circ \theta(\mathbf{a}(t, r \cdot b_0))$. □

Corolário 2.5.2 *Nas condições da proposição anterior, os expoentes de Lyapunov no fibrado vetorial $\mathcal{V} = Q \times_G V \rightarrow X$ são dados por $\mu \circ \theta(\lambda(\xi))$, onde μ é o peso máximo da representação canônica de $\mathfrak{gl}(V)$.*

Capítulo 3

Os tipos parabólicos de Morse e Lyapunov

Seja ϕ_t *fluxo contínuo*, invariante à direita, em um *fibrado principal contínuo* $\pi : Q \rightarrow X$ com grupo estrutural G redutível e X espaço métrico compacto. Desde que o fluxo em Q projeta-se em um fluxo na base, considere uma *medida ergódica* ν em X tal que seu suporte é toda a base X , ou seja, $\text{supp } \nu = X$.

O tipo parabólico do fluxo, que será denotado aqui por Θ_{Mo} , descrito em [3] e [23], determina uma aplicação contínua $h_{\text{Mo}} : Q \rightarrow \text{Ad}(G)H_\phi$, onde $\Theta_{\text{Mo}} = \Theta(H_\phi)$, tal que as componentes de Morse do fibrado flag são dadas fibra a fibra como pontos fixos de $h_{\text{Mo}}(q)$. Já no capítulo 2, foi obtido o chamado tipo parabólico de Lyapunov, denotado por Θ_{Ly} , que, neste caso, fornece uma aplicação mensurável de tal forma que as componentes de Oseledets do fibrado flag sobre um espaço de medida total são dadas fibra a fibra como pontos fixos de tal aplicação.

Tendo em vista que o tipo parabólico de Lyapunov está contido no tipo parabólico do fluxo (veja lema 8.1 de [30]), o objetivo deste capítulo é fornecer condições necessárias e suficientes para que tais tipos parabólicos coincidam, ou seja, para que as decomposições de Morse e Oseledets sejam iguais.

3.1 Realização dos expoentes de Lyapunov por medidas ergódicas

Seja μ uma medida ergódica em $\mathbb{F}Q$ que se projeta sobre ν . Assim, pela proposição B.1.13,

$$\int q d\mu, \quad q(\xi) = \mathbf{a}(1, \xi),$$

é um expoente de Lyapunov para o fluxo. O interesse aqui é analisar a relação entre um expoente de Lyapunov dado por uma integral desse tipo com os expoentes de Lyapunov provenientes do teorema ergódico multiplicativo.

Sendo Ω o conjunto de ν -medida total proveniente do teorema ergódico multiplicativo, tem-se que $\mu(\pi^{-1}(\Omega)) = 1$, visto que $\nu = \pi_*\mu$. Além disso,

$$\pi^{-1}(\Omega) = \bigcup_{w \in W_{\Theta_{\text{Ly}}} \setminus W} \text{st}(w).$$

Proposição 3.1.1 *Considere μ uma medida ergódica em $\mathbb{F}Q$ que se projeta sobre ν . Então, existe $w \in W$ tal que $\mu(\text{st}(w)) = 1$ (e, portanto, $\mu(\text{st}(w')) = 0$, para $wW_{\Theta_{\text{Ly}}} \neq w'W_{\Theta_{\text{Ly}}}$). Neste caso,*

$$\int q d\mu = w^{-1}H_\nu^+.$$

Demonstração: Como μ é ergódica, tem-se pelo teorema B.1.8 que existe $\mathcal{I} \subset \mathbb{F}Q$ mensurável tal que $\mu(\mathcal{I}) = 1$ e λ é constante sobre \mathcal{I} , ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \mathbf{a}(k, \xi) = \lambda(\xi) = \int q d\mu,$$

para todo $\xi \in \mathcal{I}$. Logo, segue que $\mu(\pi^{-1}(\Omega) \cap \mathcal{I}) = 1$ e, é claro que λ é constante sobre $\pi^{-1}(\Omega) \cap \mathcal{I}$. Agora, $\pi^{-1}(\Omega)$ decompõe-se na união disjunta dos conjuntos estáveis $\text{st}(w)$, nos quais o \mathbf{a} -expoente de Lyapunov λ é constante igual a $w^{-1}H_\nu^+$. No entanto, λ é constante em \mathcal{I} . Assim, $\pi^{-1}(\Omega) \cap \mathcal{I}$ está contido em um único conjunto estável, isto é, existe $w \in W$ tal que $\pi^{-1}(\Omega) \cap \mathcal{I} \subset \text{st}(w)$. Para este $w \in W$, tem-se que

$$\lambda(\xi) = \int q d\mu = w^{-1}H_\nu^+,$$

onde $\xi \in \mathcal{I}$ é arbitrário. Além disso, $\mu(\text{st}(w)) \geq \mu(\pi^{-1}(\Omega) \cap \mathcal{I}) = 1$, isto é, $\mu(\text{st}(w)) = 1$. \square

O resultado mostrado anteriormente garante que algum \mathbf{a} -exponente de Lyapunov $w^{-1}H_\nu^+$, proveniente do teorema ergódico multiplicativo, é a integral sobre uma medida ergódica projetada sobre ν .

Proposição 3.1.2 *Dado $w \in W$, existe uma medida ergódica μ^w tal que $\pi_*\mu^w = \nu$ e*

$$\int q d\mu^w = w^{-1}H_\nu^+.$$

Além disso, $\mu^w(\text{st}(w)) = 1$.

Demonstração: Para $\xi \in \text{st}(w)$,

$$\lambda(\xi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \mathbf{a}(k, \xi) = w^{-1}H_\nu^+.$$

Ou seja, $w^{-1}H_\nu^+$ é uma média temporal e, portanto, pelo procedimento de Krylov-Bogolyubov, dado no teorema B.1.3, existe uma medida invariante μ_ξ tal que

$$w^{-1}H_\nu^+ = \int q d\mu_\xi.$$

Pelo lema B.1.7, $\pi_*(\mu_\xi)$ é uma medida de ocupação μ_x em $x = \pi(\xi)$. Pelo corolário B.1.9, $\mu_x = \nu$, para todo $x \in \Omega$.

Pelo corolário B.1.10, existe um conjunto A com $\mu_\xi(A) = 1$ tal que

$$\mu_\xi(\cdot) = \int \theta_\eta(\cdot) d\mu_\xi(\eta),$$

onde θ_η são medidas ergódicas que se projetam sobre ν , para todo $\eta \in A$. Note que existe uma medida ergódica θ_η tal que $\int q d\theta_\eta = w^{-1}H_\nu^+$. De fato, pelo teorema B.1.4,

$$w^{-1}H_\nu^+ = \int_{\mathbb{F}Q} \left(\int q d\theta_\eta \right) d\mu_\xi(\eta) = \int_A \left(\int q d\theta_\eta \right) d\mu_\xi(\eta).$$

Isso implica que $w^{-1}H_\nu^+$ pertence ao fecho convexo do conjunto $\left\{ \int qd\theta_\eta \in \mathfrak{a}; \eta \in A \right\}$.

Assim, pela proposição 3.1.1, $\int qd\theta_\eta = u^{-1}H_\nu^+$, para algum $u \in W$.

Por outro lado, considere a órbita $W \cdot H_\nu^+$ de H_ν^+ pelo grupo de Weyl W . Os elementos de $W \cdot H_\nu^+$ pertencem à esfera de raio $\|w^{-1}H_\nu^+\|$. Assim, se $uH_\nu^+ \neq w^{-1}H_\nu^+$, segue que

$$\langle uH_\nu^+, w^{-1}H_\nu^+ \rangle < \|uH_\nu^+\| \|w^{-1}H_\nu^+\| = \|w^{-1}H_\nu^+\|^2 = \langle w^{-1}H_\nu^+, w^{-1}H_\nu^+ \rangle.$$

Desse modo, existe um hiperplano $\{x; \langle w^{-1}H_\nu^+, x \rangle = c\}$ tal que $w^{-1}H_\nu^+$ e os pontos da órbita diferentes de $w^{-1}H_\nu^+$ ficam em lados opostos do hiperplano. Com isso, o fecho convexo dos pontos da órbita diferentes de $w^{-1}H_\nu^+$ não contém $w^{-1}H_\nu^+$. Portanto, se $\int qd\theta_\eta$ fosse diferente de $w^{-1}H_\nu^+$, para todo $\eta \in A$, então $w^{-1}H_\nu^+$ estaria no fecho convexo dos elementos da órbita diferentes de $w^{-1}H_\nu^+$, o que é uma contradição. Isso mostra que, para todo $\eta \in A$, $\int qd\theta_\eta = w^{-1}H_\nu^+$, já que caso contrário, $w^{-1}H_\nu^+$ seria uma combinação convexa dos outros elementos da órbita de $W \cdot H_\nu^+$.

Logo, tem-se uma medida ergódica invariante $\mu^w := \theta_\eta$, $\eta \in \text{st}(w)$, tal que

$$w^{-1}H_\nu^+ = \int qd\mu^w$$

e $\pi_*\mu^w = \nu$, provando a primeira parte da proposição.

A última afirmação é consequência da proposição 3.1.1. □

3.1.1 Medidas atratora e repulsora

Pelo que foi visto anteriormente, dada uma medida ergódica ν na base, para cada $w \in W$, existe uma medida ergódica μ^w (não-única) tal que $\pi_*\mu^w = \nu$ e, além disso, $\mu^w(\text{st}(w)) = 1$ e

$$\int qd\mu^w = w^{-1}H_\nu^+.$$

Definição 3.1.3 (i) Uma medida ergódica μ^w é chamada de medida atratora no fibrado flag maximal $\mathbb{F}Q$ se $\int qd\mu^w \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$. Em um fibrado flag $\mathbb{F}_\Theta Q$, uma medida μ_Θ^w é dita atratora se $\mu_\Theta^w = \pi_{\Theta*}\mu^w$, para alguma medida atratora μ^w em $\mathbb{F}Q$, onde $\pi_\Theta : \mathbb{F}Q \rightarrow \mathbb{F}_\Theta Q$ é a projeção canônica.

(ii) Analogamente, uma medida ergódica μ^w é repulsora em $\mathbb{F}Q$ se $\int qd\mu^w \in -\text{cl } \mathfrak{a}^+$. Uma medida μ_Θ^w é repulsora em $\mathbb{F}_\Theta Q$ se $\mu_\Theta^w = \pi_{\Theta*}\mu^w$, para alguma medida repulsora μ^w em $\mathbb{F}Q$.

Da definição acima segue imediatamente o seguinte resultado.

Lema 3.1.4 Uma medida ergódica μ^w é atratora se, e somente se, $w \in W_{\Theta_{\text{Ly}}}$. De modo análogo, μ^w é repulsora se, e somente se, $w \in w_0 W_{\Theta_{\text{Ly}}}$, involução principal.

Pode-se observar que uma medida atratora μ^1 realiza o único expoente de Lyapunov contido em $\text{cl } \mathfrak{a}^+$, ou seja,

$$\int qd\mu^1 = H_\nu^+ \in \text{cl } \mathfrak{a}^+.$$

Analogamente, uma medida repulsora μ^{w_0} determina o único expoente de Lyapunov contido em $-\text{cl } \mathfrak{a}^+$, isto é, $\int qd\mu^{w_0} = w_0 H_\nu^+ \in -\text{cl } \mathfrak{a}^+$.

A seguir, estabelece-se a relação entre as medidas atratora e repulsora.

Proposição 3.1.5 Uma medida repulsora no fibrado flag $\mathbb{F}_\Theta Q$ é uma medida atratora para o fluxo reverso.

Demonstração: Para o fluxo reverso ϕ_{-t} , sabe-se que H_ν^- é o único expoente de Lyapunov em $\text{cl } \mathfrak{a}^+$. Além disto, segue do corolário 2.3.11, que $H_\nu^- = -w_0 H_\nu^+$. Seja $q^-(\cdot) := \mathfrak{a}(-1, \cdot)$. Pela proposição B.1.13, $\int q^- d\mu^{w_0}$ é um expoente de Lyapunov para o fluxo reverso. Dessa forma,

$$\int q^- d\mu^{w_0} = - \int qd\mu^{w_0} = -w_0 H_\nu^+ = H_\nu^- \in \text{cl } \mathfrak{a}^+,$$

onde a primeira igualdade segue da propriedade de cociclo, isto é, $q^-(\xi) = \mathfrak{a}(-1, \xi) = -\mathfrak{a}(1, \phi_{-1}(\xi)) = -q(\phi_{-1}(\xi))$. \square

Sejam as projeções canônicas $\pi_{\Theta_{L_y}^*} : \mathbb{F}Q \longrightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{L_y}^*} Q$ e $\pi : \mathbb{F}Q \longrightarrow X$. Considere $\mu_{\Theta_{L_y}^*}^{w_0} = \pi_{\Theta_{L_y}^*}^*(\mu^{w_0})$ medida repulsora no fibrado flag $\mathbb{F}_{\Theta_{L_y}^*} Q$. Seja $p : \mathbb{F}_{\Theta_{L_y}^*} Q \longrightarrow X$. Note que $p_*(\mu_{\Theta_{L_y}^*}^{w_0}) = \nu$, já que $p \circ \pi_{\Theta_{L_y}^*} = \pi$ e, $\mu_{\Theta_{L_y}^*}^{w_0} = \pi_{\Theta_{L_y}^*}^* \mu^{w_0}$ e $\pi_* \mu^{w_0} = \nu$. Além disso, p é uma aplicação $\mu_{\Theta_{L_y}^*}^{w_0}$ -própria (veja definição B.2.1). Com isto, pela proposição B.2.3, segue que $\mu_{\Theta_{L_y}^*}^{w_0}$ admite uma desintegração, ou seja, existe uma aplicação mensurável $x \in X \longmapsto \left(\mu_{\Theta_{L_y}^*}^{w_0}\right)_x \in \mathbb{M}^+(\mathbb{F}_{\Theta_{L_y}^*} Q)$ tal que

$$\mu_{\Theta_{L_y}^*}^{w_0}(\cdot) = \int_X \left(\mu_{\Theta_{L_y}^*}^{w_0}\right)_x(\cdot) d\nu(x).$$

Lema 3.1.6 *Para ν -quase todo $x \in X$, a desintegração de $\mu_{\Theta_{L_y}^*}^{w_0}$ possui suporte em $\{\xi^*(x)\}$, isto é, $\left(\mu_{\Theta_{L_y}^*}^{w_0}\right)_x$ possui suporte em $\{\xi^*(x)\}$.*

Demonstração: Considere o seguinte boreliano em $\mathbb{F}_{\Theta_{L_y}^*} Q$:

$$A = \{\text{im } \xi^*\}^c = \mathbb{F}_{\Theta_{L_y}^*} Q \setminus \{\text{im } \xi^*\}.$$

Logo,

$$\mu_{\Theta_{L_y}^*}^{w_0}(A) = \mu^{w_0}(\pi_{\Theta_{L_y}^*}^{-1}(A)) = \mu^{w_0}(\mathbb{F}Q \setminus \text{st}(w_0)) = 0.$$

Entretanto,

$$0 = \mu_{\Theta_{L_y}^*}^{w_0}(A) = \int_X \left(\mu_{\Theta_{L_y}^*}^{w_0}\right)_x(A) d\nu(x).$$

Pela proposição B.2.3, $\left(\mu_{\Theta_{L_y}^*}^{w_0}\right)_x$ possui suporte sobre $\pi^{-1}(x)$. Com isto, conclui-se que $\left(\mu_{\Theta_{L_y}^*}^{w_0}\right)_x(\mathbb{F}^*Q \setminus \xi^*(x)) = 0$, para ν -quase todo $x \in X$. \square

Com isto, conclui-se o seguinte resultado.

Proposição 3.1.7 *Considere a projeção canônica $\pi_{\Theta_{L_y}^*} : \mathbb{F}Q \longrightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{L_y}^*} Q$ e μ^{w_0} uma medida repulsora em $\mathbb{F}Q$. Então, $\mu_{\Theta_{L_y}^*}^{w_0} = \pi_{\Theta_{L_y}^*}^* \mu^{w_0}$ é uma medida pontual, isto é, os elementos da desintegração em cada fibra são medidas de Dirac.*

Pela proposição acima, tem-se que qualquer medida atratora do fluxo ϕ_{-t} no fibrado flag do seu tipo parabólico é pontual. Ou seja, $\left(\mu_{\Theta_{L_y}^*}^{w_0}\right)_x$ é uma medida de

Dirac em $\xi^*(x)$. Denota-se tal medida por $\delta_{\xi^*(x)} := \left(\mu_{\Theta_{\text{Ly}}^*}^{w_0} \right)_x$. Dessa forma, ainda tem-se a unicidade de $\mu_{\Theta_{\text{Ly}}^*}^{w_0}$.

Corolário 3.1.8 *Existe uma única medida atratora e pontual $\mu_{\Theta_{\text{Ly}}^*}^{w_0}$ para o fluxo reverso ϕ_{-t} em $\mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}^*} Q$. Ou seja, tal medida admite a seguinte desintegração*

$$\mu_{\Theta_{\text{Ly}}^*}^{w_0}(\cdot) = \int \delta_{\xi^*(x)}(\cdot) d\nu(x).$$

Ainda tem-se, como consequência imediata, que tomando o fluxo reverso a ϕ_{-t} , existe uma única medida atratora e pontual de ϕ_t em $\mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}} Q$. Dessa forma, segue o resultado.

Corolário 3.1.9 *Existe uma única medida atratora e pontual $\mu_{\Theta_{\text{Ly}}}^1$ de ϕ_t no seu fibrado flag $\mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}} Q$. Portanto,*

$$\mu_{\Theta_{\text{Ly}}}^1(\cdot) = \int \delta_{\xi(x)}(\cdot) d\nu(x),$$

onde $\delta_{\xi(x)}$ é a medida de Dirac em $\xi(x)$.

3.2 Condições necessárias e suficientes

Seja $\pi : Q \rightarrow X$, fibrado principal contínuo com grupo estrutural G semi-simples e base X , espaço métrico compacto munido de uma medida ergódica ν tal que $\text{supp } \nu = X$. Dado ϕ_t um fluxo contínuo em Q , invariante à direita, considere as seguintes afirmações:

1. **Seção limitada:** A função $h_{\text{Ly}} : \pi^{-1}(\Omega) \rightarrow \text{Ad}(G)H_\nu^+$ mensurável e ϕ_t -invariante, correspondente à seção de Oseledets $\chi_{\text{Ly}} : \Omega \rightarrow Q \times_G \text{Ad}(G)H_\nu^+$, é limitada em $\pi_R^{-1}(\Omega)$, onde $\pi_R : R \rightarrow X$ é uma K -redução de Q ;
2. **Expoentes de Lyapunov associados a outras medidas ergódicas:** Para cada medida $\rho \in \mathbb{P}_{\text{inv}}(X)$ ergódica, seja H_ρ^+ o expoente polar associado a ρ . Defina

$$\Theta_{\text{Ly}}(\rho) = \{ \alpha \in \Sigma : \alpha(H_\rho^+) = 0 \}.$$

Então, $\Theta_{L_Y}(\rho) \subset \Theta_{L_Y}(\nu)$, onde denota-se Θ_{L_Y} por $\Theta_{L_Y}(\nu)$ para deixar claro a medida ergódica sobre X que está sendo tomada;

3. Medidas atratoras associadas a outras medidas ergódicas na base: Sejam $\rho \in \mathbb{P}_{\text{inv}}(X)$ medida ergódica e $Y = \text{supp } \rho$. Denote por $\text{att}_{\Theta_{L_Y}}(\nu) = \text{supp } \mu_{\Theta_{L_Y}}^1$, onde $\mu_{\Theta_{L_Y}}^1$ é a medida atratora em $\mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}}Q$. Sendo $\pi : \mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}}Q \rightarrow X$, denote por $\mathcal{E}(\rho)$ o conjunto das medidas ergódicas com suporte em $\pi^{-1}(Y) \cap \text{att}_{\Theta_{L_Y}}(\nu)$ que se projetam em ρ . Então, as medidas em $\mathcal{E}(\rho)$ são atratoras para ϕ , isto é, se $\theta \in \mathcal{E}(\rho)$, então

$$\int qd\theta' \in \text{cl } \mathfrak{a}^+,$$

onde $\pi_{\Theta_{L_Y}*} \theta' = \theta$, $\pi_{\Theta_{L_Y}} : \mathbb{F}Q \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}}Q$.

Note que $\mathcal{E}(\rho) \neq \emptyset$. De fato, como ρ é uma medida ergódica na base, segue do corolário B.1.9 que existe um conjunto de medida total em X tal que $\mu_x = \rho$, onde x é regular. Tomando $\pi_{\Theta_{L_Y}} : \mathbb{F}Q \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}}Q$ a fibração entre os fibrados flag, tem-se pelo lema B.1.7 e pelo teorema B.1.3 que, pode-se escolher $\xi \in \mathbb{F}Q$ tal que

$$\lambda(\xi) = \int qd\mu_\xi \in \text{cl } \mathfrak{a}^+,$$

onde $\pi \circ \pi_{\Theta_{L_Y}}(\xi) = x$ e $\pi_*(\pi_{\Theta_{L_Y}*} \mu_\xi) = \rho$. Além disso, usando o argumento de convexidade da demonstração da proposição 3.1.2, prova-se que as decomposições ergódicas θ_n de μ_ξ , onde $\eta \in A$, $\mu_\xi(A) = 1$, são tais que $\pi_{\Theta_{L_Y}*} \theta_\eta$ é uma medida ergódica com suporte em $\pi^{-1}(Y) \cap \text{att}_{\Theta_{L_Y}}(\nu)$ que se projeta em ρ .

O principal objetivo deste capítulo é mostrar que tais condições são necessárias e suficientes para que a decomposição de Morse coincida com a decomposição de Oseledets. Assim, a partir de agora, o seguinte teorema será mostrado.

Teorema 3.2.1 *Tem-se que $\Theta_{L_Y} = \Theta_{M_0}$ se, e somente se, as condições 1, 2 e 3 enunciadas anteriormente são válidas.*

3.3 As condições são necessárias

Supondo que $\Theta_{L_Y} = \Theta_{M_o}$, prova-se a seguir que as condições 1, 2 e 3 são válidas.

Seção limitada

Inicialmente, observe que como a base X é compacta, a condição 1 não depende da K -redução tomada.

Agora, como $\Theta_{L_Y} = \Theta_{M_o}$, segue que h_{L_Y} possui uma extensão contínua a R , dada por h_{M_o} . Pela continuidade de h_{M_o} e compacidade de $\pi_R^{-1}(\Omega)$ (tome em X a σ -álgebra de Borel dos subconjuntos fechados de X), segue o resultado.

Exponentes de Lyapunov associados a outras medidas ergódicas

Sejam $\rho \in \mathbb{P}_{\text{inv}}(X)$ medida ergódica e $Y = \text{supp } \rho$. Denote por $\Theta_{M_o}(Y)$ o tipo parabólico de Morse associado ao fluxo restrito a Y . Dessa forma, $\Theta_{M_o}(Y) \subset \Theta_{M_o}$, visto que as componentes transitivas por cadeia do fluxo restrito a Y estão contidas nas componentes sobre X . Note ainda que, como $Y = \text{supp } \rho$, tem-se que $\Theta_{L_Y}(\rho) \subset \Theta_{M_o}(Y)$. Logo,

$$\Theta_{L_Y}(\rho) \subset \Theta_{M_o}(Y) \subset \Theta_{M_o} = \Theta_{L_Y}(\nu),$$

como era esperado.

Medidas atratoras associadas a outras medidas ergódicas na base

Inicialmente, note que desde que $\Theta_{L_Y} = \Theta_{M_o}$, tem-se que $\mathcal{M}_{\Theta_{M_o}}^+ = \text{st}_{\Theta_{L_Y}}(1)$. A componente atratora de Morse $\mathcal{M}_{\Theta_{M_o}}^+$ em $\mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}}Q$ é pontual, isto é, é dada pela seção $\xi : X \longrightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}}Q$ (veja corolário 2.3.14). Assim, pelo corolário B.1.6, $\text{att}_{\Theta_{L_Y}}(\nu) \subset \mathcal{M}_{\Theta_{M_o}}^+$. Além disso, como $\mu_{\Theta_{L_Y}}^1(\text{st}_{\Theta_{L_Y}}(1)) = 1$, segue claramente que $\mathcal{M}_{\Theta_{M_o}}^+ \subset \text{att}_{\Theta_{L_Y}}(\nu)$ e, portanto, $\mathcal{M}_{\Theta_{M_o}}^+ = \text{att}_{\Theta_{L_Y}}(\nu)$.

Ainda tem-se pelo corolário 7.6 de [30] que, se $\lambda \in \Lambda_{M_o}(\mathcal{M}^+)$, então existe $w \in W_{\Theta_{M_o}}$ tal que $w^{-1}\lambda \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$.

Agora, seja $\theta \in \mathcal{E}(\rho)$. Então, $\int qd\theta'$ é um expoente de Lyapunov, onde θ' é uma medida ergódica tal que $\pi_{\Theta_{\text{Ly}^*}} \theta' = \theta$ e com suporte contido em \mathcal{M}^+ , já que $\mathcal{M}^+ = \pi_{\Theta_{\text{Ly}}}^{-1}(\mathcal{M}_{\Theta_{\text{Mo}}}^+)$, $\pi_{\Theta} : \mathbb{F}Q \longrightarrow \mathbb{F}_{\Theta}Q$. Pela invariância dos \mathfrak{a} -expoentes de Lyapunov sobre o grupo de Weyl (veja corolário 6.8 de [30]), segue que $w^{-1} \int qd\theta'$ também é um \mathfrak{a} -expoente de Lyapunov para o fluxo.

Como $\Lambda_{\Theta_{\text{Ly}}}(\mathcal{M}^+) \subset \Lambda_{\text{Mo}}(\mathcal{M}^+)$ (veja teorema 3.2, item 6, de [30]); logo $w^{-1} \int qd\theta' \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$, como era desejado.

3.4 As condições são suficientes

Defina $A = \text{att}_{\Theta_{\text{Ly}}}(\nu)$. O objetivo é mostrar que o conjunto A , dado pelo suporte da única medida atratora em $\mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}}Q$, juntamente com um dado conjunto B , definido a seguir, formam um par atrator-repulsor.

Lema 3.4.1 *Tem-se que A é o fecho da imagem da aplicação mensurável $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}}Q$ obtida na corolário 2.3.14, isto é,*

$$A = \text{cl}(\text{im } \xi).$$

Demonstração: Seja $\zeta \in A$. Logo, existe um aberto U contendo ζ tal que $\mu_{\Theta_{\text{Ly}}}^1(U) > 0$. Desde que $\mu_{\Theta_{\text{Ly}}}^1(\text{st}_{\Theta_{\text{Ly}}}(1)) = 1$ e $\text{st}_{\Theta_{\text{Ly}}}(1) = \text{im } \xi$, segue que $U \cap \text{im } \xi \neq \emptyset$ e, assim, $\zeta \in \text{cl}(\text{im } \xi)$.

Agora, seja um aberto U contendo um elemento $\zeta \in \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}}Q$ tal que $U \cap \text{im } \xi \neq \emptyset$. Como $\text{supp } \nu = X$, considere um aberto V contendo $\pi(\zeta) = x$ de tal modo que $\nu(V) > 0$ e $\pi_{\Theta_{\text{Ly}}}^{-1}(V) \subseteq U$. Com isto, $0 < \mu_{\Theta_{\text{Ly}}}^1(U)$, mostrando que $\zeta \in A$. \square

Dada a aplicação $\xi^* : \Omega \longrightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}^*}Q$ (veja proposição 2.3.13), note que A é o fecho dos elementos opostos à imagem de ξ^* ; portanto, o expoente de Lyapunov em tais pontos pertence à câmara positiva.

Agora, defina B como sendo o fecho dos elementos não-opostos à imagem de ξ^* . Neste caso, B é o fecho dos elementos cujos expoentes de Lyapunov não

pertencem à câmara positiva, ou seja,

$$B = \pi_{\Theta_{L_Y}} \left(\text{cl} \bigcup_{w \neq 1, x \in \Omega} \text{st}(x, w) \right).$$

Lema 3.4.2 *Os conjuntos A e B são ϕ_t -invariantes, compactos e disjuntos.*

Demonstração: A invariância de A e B segue claramente da invariância dos conjuntos $\text{st}_{\Theta_{L_Y}}(w)$. Devido à compacidade de $\mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}}Q$, tem-se que A e B são conjuntos compactos.

Pela condição 1, $h_{L_Y} : \pi^{-1}(\Omega) \longrightarrow \text{Ad}(G)H_\nu^+$ é limitada em $\pi_R^{-1}(\Omega)$. Assim, o fecho da imagem de h_{L_Y} , $\text{cl}(\text{im } h_{L_Y})$, é compacto em $\text{Ad}(G)H_\nu^+$. Dessa forma, o conjunto $\text{cl}(\text{im } \chi_{L_Y})$, imagem de $\pi_R^{-1}(\Omega) \times \text{cl}(\text{im } h_{L_Y})$ pela aplicação quociente $Q \times \text{Ad}(G)H_\nu^+ \longrightarrow Q \times_G \text{Ad}(G)H_\nu^+$, é compacto em $\mathbb{A}_{\Theta_{L_Y}} = Q \times_G \text{Ad}(G)H_\nu^+$. Pela identificação (2.7), $\text{cl}(\text{im } \chi_{L_Y})$ é compacto em $Q \times_G \mathcal{O}_{\Theta_{L_Y}}$. Tomando as projeções sobre $\mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}}Q$ e $\mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}^*}Q$, obtém-se os conjuntos compactos $\text{cl}(\text{im } \xi)$ e $\text{cl}(\text{im } \xi^*)$, respectivamente. Como, pelo lema 3.4.1, $A = \text{cl}(\text{im } \xi)$, e $\mathcal{O}_{\Theta_{L_Y}}$ é formada por elementos opostos, segue que os elementos de A são opostos aos elementos de $\text{cl}(\text{im } \xi^*)$. Os elementos de B não são opostos aos elementos de $\text{im } \xi^*$ e, portanto, não são opostos aos elementos de $\text{cl}(\text{im } \xi^*)$. Logo, A e B são disjuntos. \square

Lema 3.4.3 *Defina $A' = \pi_{\Theta_{L_Y}}^{-1}(A)$ e $B' = \pi_{\Theta_{L_Y}}^{-1}(B)$, onde $\pi_{\Theta_{L_Y}} : \mathbb{F}Q \longrightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}}Q$.*

Sendo $q(\xi) = \mathbf{a}(1, \xi)$, as seguintes afirmações são válidas:

- i) $\int q d\mu \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$, onde μ é uma medida ergódica com suporte em A' ;*
- ii) $\int q d\mu \notin \text{cl } \mathfrak{a}^+$, onde μ é uma medida ergódica com suporte em B' .*

Demonstração: Sejam μ é uma medida ergódica em $\mathbb{F}Q$ e $\rho := (\pi \circ \pi_{\Theta_{L_Y}})_* \mu$ medida ergódica na base.

Supondo que μ tenha suporte em A' , segue que $\text{supp } \pi_{\Theta_{L_Y}*} \mu \subseteq \pi^{-1}(Y) \cap A$, onde $Y = \text{supp } \rho$. Assim, pela condição 3, $\int q d\mu \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$.

Agora, suponha que μ é uma medida ergódica em $\mathbb{F}Q$ com suporte em B' . Desde que $\Theta_{\text{Ly}}(\rho) \subset \Theta_{\text{Ly}}(\nu)$, pela condição 2, tem-se que a medida ergódica em $\mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}(\rho)}Q$ que fornece o expoente de Lyapunov em $\text{cl } \mathfrak{a}^+$ é única (veja corolário 3.1.9) e possui suporte em A' . Desde que A e B são disjuntos, segue que $\int q d\mu \notin \text{cl } \mathfrak{a}^+$. \square

3.4.1 ω -limites

Seja $\xi \in \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}}Q \setminus B$ tal que $x = \pi_{\Theta_{\text{Ly}}}(\xi)$, onde $\pi_{\Theta_{\text{Ly}}} : \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}}Q \rightarrow X$. Considere os seguintes casos:

A órbita $\mathcal{O}(x)$ de x é periódica

Supondo que a órbita $\mathcal{O}(x)$ de x é periódica então a teoria de Floquet garante que a decomposição de Oseledets coincide com a decomposição de Morse sobre $\mathcal{O}(x)$.

Proposição 3.4.4 *Para o fluxo ϕ restrito à órbita periódica $\mathcal{O}(x)$, a decomposição de Morse coincide com a decomposição de Oseledets em $\mathbb{F}Q$.*

Demonstração: Suponha que a órbita $\mathcal{O}(x)$ é T -periódica. Com isto, segue que $\phi_t(x) = \phi_{t+T}(x)$, para todo $t \in \mathbb{T}$. Assim, existe $g(t) \in G$ tal que $\phi_{t+T}(q) = \phi_t(q)g(t)$, com $\pi(q) = x$. Note que, desde que a ação de G em Q é livre, $g(t) := g = g(T)$, para $-T < t < T$. Como, para $t \in \mathbb{T}$, $t = t_0 + mT$, para algum $m \in \mathbb{N}$ e $-T < t_0 < T$, segue que

$$\phi_t(q) = \phi_{t_0}(q)g^m.$$

Desta forma, o fibrado Q restrito à órbita $\mathcal{O}(x)$ é identificado ao fibrado trivial $\mathcal{O}(x) \times G \rightarrow \mathcal{O}(x)$. Observe ainda que, para tempo discreto, a órbita $\mathcal{O}(x)$ é um conjunto finito e, para tempo contínuo, a órbita coincide com o círculo S^1 . Assim, o fluxo sobre $\mathcal{O}(x)$ pode ser reescrito como

$$\phi_t(s, a) = (s + t, g^t a), \quad s \in \mathcal{O}(x), \quad a \in G.$$

Com isto, o fibrado flag maximal restrito à $\mathcal{O}(x)$ é identificado a $\mathcal{O}(x) \times \mathbb{F}$ e o fluxo induzido neste espaço é dado por $\phi_t(s, x) = (s + t, g^t x)$, $s \in \mathcal{O}(x)$, $x \in \mathbb{F}$.

Tomando a decomposição multiplicativa de Jordan de $g = ehv \in G$ (veja seção 4.1), onde existe uma decomposição de Iwasawa tal que $h = \exp(H) \in \text{cl } A^+$, segue que os conjuntos

$$\mathcal{M}(H, w) = \{(s, x) : s \in \mathcal{O}(x) \text{ e } x \in \text{fix}_\Theta(H, w)\}$$

formam a decomposição de Morse mais fina para $\phi_t : \mathbb{F}Q \rightarrow \mathbb{F}Q$.

Agora, note que todo ponto em $\mathcal{O}(x)$ é regular, já que o conjunto dos pontos regulares na base é invariante pelo fluxo. De fato, se o tempo é discreto, uma órbita periódica é um conjunto finito com a medida de contagem. Desse modo, o único conjunto de medida total é o conjunto todo. Já, para tempo contínuo, a órbita é um círculo e, da mesma forma, o único conjunto de medida positiva é todo o círculo. Portanto, pelo que foi visto no capítulo 2,

$$\{\mathcal{M}(H, w) : w \in W_H \setminus W\}$$

é a decomposição de Oseledets para ϕ_t em $\mathbb{F}Q$. □

Restringindo o fluxo a $\mathcal{O}(x)$, a componente atratora de Morse está contida em A , enquanto que as demais componentes estão em B . Portanto, $\omega(q \cdot v) \subset A$, se $q \cdot v \notin B$.

A órbita $\mathcal{O}(x)$ de x não é periódica

Agora, se $\mathcal{O}(x)$ não é uma órbita periódica, então a aplicação $t \mapsto \phi_t(x)$ é injetora, isto é, os pontos da sequência $x_t = \phi_t(x)$ são distintos dois a dois.

Pela condição 1, $h_{L_Y} : \pi^{-1}(\Omega) \rightarrow \text{Ad}(G)H_\nu^+$ é limitada em $\pi_R^{-1}(\Omega)$. Assim, o fecho da imagem de h_{L_Y} , $\text{cl}(\text{im } h_{L_Y})$, é compacto em $\text{Ad}(G)H_\nu^+$ e, por conseguinte, a imagem $\text{cl}(\text{im } \chi_{L_Y})$ de $\pi_R^{-1}(\Omega) \times \text{cl}(\text{im } h_{L_Y})$ sobre $\mathbb{A}_{\Theta_{L_Y}} = Q \times_G \text{Ad}(G)H_\nu^+$ é compacta. Note que a fibra sobre x intercepta o fecho da imagem de χ_{L_Y} , visto que χ_{L_Y} está definida no conjunto dos elementos regulares, que é denso em X . Tome $\eta \in (\mathbb{A}_{\Theta_{L_Y}})_x \cap \text{cl}(\text{im } \chi_{L_Y})$.

A órbita de η sobre a órbita-não periódica $\mathcal{O}(x)$ é dada pela seguinte sequência

$$\mathcal{O}(\eta) = \{\eta_t = \phi_t(\eta) : t \in \mathbb{T}\} \subset \mathbb{A}_{\Theta_{L_Y}}.$$

Note que tal órbita define uma seção sobre $\mathcal{O}(x)$, que a cada $x_t \in \mathcal{O}(x)$ associa $\eta_t \in \mathcal{O}(\eta)$, com $g : \pi^{-1}(\mathcal{O}(x)) \longrightarrow \text{Ad}(G)H_\nu^+$ a função equivariante e ϕ_t -invariante correspondente.

Usando a identificação $\text{Ad}(G)H_\nu^+ \simeq G/Z_{\Theta_{L_Y}}$, seja $g^{-1}(H_\nu^+) \subset Q$ a $Z_{\Theta_{L_Y}}$ -redução sobre $\mathcal{O}(x)$, invariante pelo fluxo. Esse fibrado é trivial, pois é sobre \mathbb{T} (neste caso, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z}). Isto é, existe uma seção global $s : \mathcal{O}(x) \longrightarrow g^{-1}(H_\nu^+)$ satisfazendo a seguinte equação

$$\phi_t(s(y)) = s(\phi_t(y)) \cdot g_t, \quad (3.1)$$

com $y \in \mathcal{O}(x)$ e $g_t \in Z_{\Theta_{L_Y}}$.

Pela identificação de $\text{Ad}(G)H_\nu^+$ com a órbita G -adjunta aberta e densa $\mathcal{O}_{\Theta_{L_Y}}$ em $\mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}} \times \mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}^*}$, as projeções em cada componente definem aplicações $\mathcal{O}_{\Theta_{L_Y}} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}}$ e $\mathcal{O}_{\Theta_{L_Y}} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}^*}$, que por sua vez induzem projeções $Q \times_G \mathcal{O}_{\Theta_{L_Y}} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}} Q$ e $Q \times_G \mathcal{O}_{\Theta_{L_Y}} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}^*} Q$, entre os fibrados associados. Dessa forma, as projeções da seção $\mathcal{O}(\eta)$ define seções em $\mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}} Q$ e $\mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}^*} Q$, que são denotadas por $\mathcal{O}(\xi)$ e $\mathcal{O}(\xi^*)$, respectivamente, como mostra o seguinte diagrama (note que $\pi_1(\eta) = \xi$).

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{O}(\xi) \\ & \nearrow^{\pi_1} & \\ \mathcal{O}(x) & \longrightarrow & \mathcal{O}(\eta) \\ & \searrow_{\pi_2} & \\ & & \mathcal{O}(\xi^*) \end{array}$$

Note que ambas as seções são invariantes e mutuamente opostas, fibra a fibra. Além disso, $\mathcal{O}(\xi) \subset A$ e o conjunto dos elementos não-opostos a $\mathcal{O}(\xi^*)$ está contido em B .

Em termos da $Z_{\Theta_{L^y}}$ -redução $g^{-1}(H_\nu^+)$, tais seções são dadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(\eta) &= g^{-1}(H_\nu^+) \cdot H_\nu^+ = \{p \cdot H_\nu^+ : p \in g^{-1}(H_\nu^+)\}, \\ \mathcal{O}(\xi) &= g^{-1}(H_\nu^+) \cdot b_{\Theta_{L^y}} = \{p \cdot b_{\Theta_{L^y}} : p \in g^{-1}(H_\nu^+)\}, \\ \mathcal{O}(\xi^*) &= g^{-1}(H_\nu^+) \cdot b_{\Theta_{L^y}^*} = \left\{p \cdot b_{\Theta_{L^y}^*} : p \in g^{-1}(H_\nu^+)\right\},\end{aligned}$$

onde $b_{\Theta_{L^y}}$ e $b_{\Theta_{L^y}^*}$ são as origens de $\mathbb{F}_{\Theta_{L^y}}$ e $\mathbb{F}_{\Theta_{L^y}^*}$, respectivamente.

Seja $T^v(\mathbb{F}_{\Theta_{L^y}}Q) \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta_{L^y}}Q$ o fibrado vetorial cujas fibras são os espaços tangentes às fibras do fibrado flag $\mathbb{F}_{\Theta_{L^y}}Q \rightarrow X$. Considere a restrição do fibrado $T^v(\mathbb{F}_{\Theta_{L^y}})$ somente às fibras de $\mathcal{O}(\xi)$.

Lema 3.4.5 *O fibrado vetorial $T^v(\mathcal{O}(\xi)) \rightarrow \mathcal{O}(\xi)$ é dado pelo seguinte fibrado associado*

$$T^v(\mathcal{O}(\xi)) = g^{-1}(H_\nu^+) \times_{Z_{\Theta_{L^y}}} \mathfrak{n}_{\Theta_{L^y}}^-,$$

onde a ação de $Z_{\Theta_{L^y}}$ em $\mathfrak{n}_{\Theta_{L^y}}^-$ é dada pela representação adjunta.

Demonstração: A prova segue do fato que $\mathcal{O}(\xi) = \{p \cdot b_{\Theta_{L^y}} : p \in g^{-1}(H_\nu^+)\}$ e de que $T(\mathbb{F}_{\Theta_{L^y}}) = \mathfrak{n}_{\Theta_{L^y}}^-$. \square

Como foi feito no apêndice A, denote por ψ_t^v o fluxo linear induzido no fibrado vetorial $T^v(\mathcal{O}(\xi))$ (está bem definido, visto que g é ϕ_t -invariante). Tomando

$$s : \mathcal{O}(x) \rightarrow g^{-1}(H_\nu^+)$$

a seção global de $g^{-1}(H_\nu^+)$, tem-se para $v = s(y) \cdot Y \in T^v(\mathcal{O}(\xi))$, onde $y \in \mathcal{O}(x)$ e $Y \in \mathfrak{n}_{\Theta_{L^y}}^-$, que

$$\begin{aligned}\psi_t^v(v) &= \phi_t(s(y)) \cdot Y = s(\phi_t(y))g_t \cdot Y \\ &= s(\phi_t(y)) \cdot \text{Ad}(g_t)Y,\end{aligned}$$

onde foi usado a equação (3.1) e a proposição A.4.1.

Escrevendo a decomposição de Iwasawa de $g_t = u_t a_t n_t \in K_{\Theta_{\text{Ly}}} AN^+(\Theta_{\text{Ly}})$, observe que

$$\begin{aligned} \|\psi_t^v(v)\| &= \|\text{Ad}(g_t)Y\|_\theta \\ &= \|\text{Ad}(u_t) \circ \text{Ad}(a_t) \circ \text{Ad}(n_t)Y\|_\theta \\ &= \|\text{Ad}(a_t)Y\|_\theta, \end{aligned}$$

já que $N^+(\Theta_{\text{Ly}})$ centraliza $\mathfrak{n}_{\Theta_{\text{Ly}}}^-$ e $\text{Ad}(u_t)|_{\mathfrak{n}_{\Theta_{\text{Ly}}}^-}$ é B_θ -isometria (veja novamente a proposição A.4.1).

Proposição 3.4.6 *O espectro de Lyapunov para o fluxo ψ_t^v em $T^v(\mathcal{O}(\xi))$ é dado pelo espectro da aplicação adjunta de $\Lambda_{\Theta_{\text{Ly}}}(v)$ em $\mathfrak{n}_{\Theta_{\text{Ly}}}^-$. Portanto, para $v \in T^v(\mathcal{O}(\xi))$,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\psi_t^v(v)\| = 0.$$

Demonstração: Sabe-se que $\mathfrak{n}_{\Theta_{\text{Ly}}}^- = \text{span}\{H_{-\alpha} : \alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle\}$. Dessa forma, para $\xi' = s(y) \cdot b_{\Theta_{\text{Ly}}} \in \mathcal{O}(\xi)$ e $v = s(y) \cdot H_{-\alpha} \in (T^v(\mathcal{O}(\xi)))_{\xi'}$, segue que

$$\|\psi_t^v(v)\| = \|\text{Ad}(a_t)H_{-\alpha}\|_\theta = e^{-\alpha(\log a_t)}.$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\psi_t^v(v)\| = -\alpha \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log a_t \right) = -\alpha \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \mathbf{a}(t, \zeta) \right),$$

onde $\pi \circ \pi_{\Theta_{\text{Ly}}}(\zeta) = y$. Usando o fato de que $\xi' \in \mathcal{O}(\xi) \subset A$, conclui-se que

$$\lambda(\zeta) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \mathbf{a}(t, \zeta) = \int q d\mu,$$

onde μ é uma medida ergódica com suporte em $A' = \pi_{\Theta_{\text{Ly}}}^{-1}(A)$. Entretanto, pelo lema 3.4.3, item *i*), $\lambda(\zeta) = \int q d\mu \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$. Logo, os expoentes de Lyapunov de ψ_t^v em $T^v(\mathcal{O}(\xi))$ são negativos e, assim, o resultado segue pelo corolário 1.2.3. \square

Considere a seguinte célula aberta de Bruhat no fibrado $\mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}}Q$,

$$g^{-1}(H_\nu^+) \cdot N_{\Theta_{\text{Ly}}}^- b_{\Theta_{\text{Ly}}} = \bigcup_{p \in g^{-1}(H_\nu^+)} p \cdot (N_{\Theta_{\text{Ly}}}^- b_{\Theta_{\text{Ly}}}),$$

ou ainda, uma vizinhança de $\xi \in \mathbb{F}_{\Theta_{\text{Ly}}}Q \setminus B$.

Proposição 3.4.7 *Se $\xi' \in g^{-1}(H_\nu^+) \cdot N_{\Theta_{L_Y}}^- b_{\Theta_{L_Y}}$, então $\omega(\xi') \subset A$. Portanto, A é um conjunto atrator.*

Demonstração: Escreva $\xi' \in g^{-1}(H_\nu^+) \cdot N_{\Theta_{L_Y}}^- b_{\Theta_{L_Y}}$ como $\xi' = s(y) \cdot (\exp Y) b_{\Theta_{L_Y}}$, com $y \in \mathcal{O}(x)$ e $Y \in \mathfrak{n}_{\Theta_{L_Y}}^-$. Então, pela equação (3.1),

$$\phi_t(\xi') = \phi_t(s(y)) \cdot (\exp Y) b_{\Theta_{L_Y}} = s(\phi_t(y)) \cdot g_t(\exp Y) b_{\Theta_{L_Y}}, \quad g_t \in Z_{\Theta_{L_Y}}.$$

Entretanto,

$$g_t(\exp Y) b_{\Theta_{L_Y}} = g_t(\exp Y) g_t^{-1} b_{\Theta_{L_Y}} = (\exp \text{Ad}(g_t) Y) b_{\Theta_{L_Y}}.$$

Desde que $\|\psi_t^v(v)\| = \|\text{Ad}(g_t) Y\|_\theta$, tem-se pela proposição anterior que $(\exp \text{Ad}(g_t) Y) \rightarrow 0$, isto é, $g_t(\exp Y) b_{\Theta_{L_Y}} \rightarrow b_{\Theta_{L_Y}}$. Logo, para $t \rightarrow +\infty$,

$$d(\phi_t(s(y)) \cdot b_{\Theta_{L_Y}}, \phi_t(\xi')) \rightarrow 0,$$

onde d é a métrica dada na proposição 2.2 de [3]. Dessa forma, $\omega(\xi') = \omega(s(y) \cdot b_{\Theta_{L_Y}})$. Desde que $s(y) \cdot b_{\Theta_{L_Y}} \in A$ e A é fechado e invariante, segue que $\omega(s(y) \cdot b_{\Theta_{L_Y}}) \subset A$. \square

3.4.2 ω^* -limites

Na mesma situação da subseção anterior, tomando uma órbita não-periódica e revertendo o tempo, obtém-se os ω^* -limites. Para isso, considere o seguinte lema.

Lema 3.4.8 *Existe uma seção limitada $s : \mathcal{O}(x) \rightarrow g^{-1}(H_\nu^+)$ do fibrado trivial $g^{-1}(H_\nu^+) \rightarrow \mathcal{O}(x)$.*

Demonstração: Como, pela condição 1, $h_{L_Y} : \pi_R^{-1}(\Omega) \rightarrow \text{Ad}(G)H_\nu^+$ é limitada, é fácil ver que a aplicação $g : \pi^{-1}(\mathcal{O}(x)) \rightarrow \text{Ad}(G)H_\nu^+$ é limitada em $\pi_R^{-1}(\mathcal{O}(x)) := \pi^{-1}(\mathcal{O}(x)) \cap R$, visto que a imagem está contida no fecho da imagem de h_{L_Y} .

Seja uma seção $u : \mathcal{O}(x) \longrightarrow \pi_R^{-1}(\mathcal{O}(x))$ do fibrado trivial $\pi_R^{-1}(\mathcal{O}(x)) \longrightarrow \mathcal{O}(x)$. Desde que $u(t) \in \pi_R^{-1}(\mathcal{O}(x))$, segue que $g(u(t))$ é uma seqüência limitada no espaço homogêneo $\text{Ad}(G)H_\nu^+$. Logo, existe uma seqüência limitada $g_t \in G$ tal que $g(u(t)) = g_t H_\nu^+$.

Defina $s : \mathcal{O}(x) \longrightarrow g^{-1}(H_\nu^+)$ por $s(t) = u(t) \cdot g_t$. Note que s está bem definida e desde que R e g_t são limitados, segue que s é limitada em Q . \square

Proposição 3.4.9 *Se $\xi' \in g^{-1}(H_\nu^+) \cdot N_{\Theta_{L_Y}}^- b_{\Theta_{L_Y}} \setminus A$, então $\omega^*(\xi') \subset B$, ou seja, B é um conjunto repulsor.*

Demonstração: Seja $t_n \rightarrow -\infty$ uma seqüência tal que $(\phi_{t_n}(\xi'))$ é uma seqüência convergente em $\mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}} Q$. Logo, $(\pi(\phi_{t_n}(\xi'))) = (\phi_{t_n}(y))$, $\pi(\xi') = y$, converge em X e, desde que $s(\phi_{t_n}(y))$ é limitada em Q , passando a subsequência, pode-se supor, por abuso de notação, que $s(\phi_{t_n}(y))$ converge em Q .

Escrevendo $\xi' = s(y) \cdot (\exp Y) b_{\Theta_{L_Y}}$, onde $Y \in \mathfrak{n}_{\Theta_{L_Y}}^-$ e $Y \neq 0$ (pois $\xi' \notin A$). Assim, de (3.1),

$$\phi_{t_n}(\xi') = \phi_{t_n}(s(y)) \cdot (\exp Y) b_{\Theta_{L_Y}} = s(\phi_{t_n}(y)) \cdot g_{t_n}(\exp Y) b_{\Theta_{L_Y}}.$$

Desde que $\mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}}$ é uma variedade compacta, passando novamente a uma subsequência, pode-se supor que $g_{t_n}(\exp Y) b_{\Theta_{L_Y}}$ converge a $\xi_1 \in \mathbb{F}_{\Theta_{L_Y}}$, por abuso de notação. Logo, $(\exp \text{Ad}(g_{t_n})Y) b_{\Theta_{L_Y}} \rightarrow \xi_1$, quando $t_n \rightarrow -\infty$.

Entretanto, $\|\text{Ad}(g_{t_n})Y\|_\theta \rightarrow \infty$ em $\mathfrak{n}_{\Theta_{L_Y}}^-$, pois os expoentes de Lyapunov do fluxo linear induzido ψ_t^v no fibrado flag linearizado $T^v(\mathcal{O}(\xi))$ para o tempo reverso são positivos (veja corolário 1.2.4). Dessa forma, ξ_1 está no complementar da célula de Bruhat determinada por $b_{\Theta_{L_Y}^*}$ (a origem do flag dual). Portanto, $s(\phi_{t_n}(y)) \cdot \xi_1 \in B$. Sendo $p = \lim_{t_n \rightarrow -\infty} s(\phi_{t_n}(y))$, segue que $\lim_{t_n \rightarrow -\infty} \phi_{t_n}(\xi') = p \cdot \xi_1$, o que implica que $\omega^*(\xi') \subset B$, já que B é fechado. \square

3.4.3 Conclusão da demonstração

Nas seções anteriores, mostrou-se que (A, B) formam um par atrator-repulsor. Assim, segue o resultado.

Corolário 3.4.10 *Nas condições anteriores, isto é, (A, B) é um par atrator-repulsor, tem-se que $\Theta_{M_0} \subset \Theta_{L_y}$. Portanto, $\Theta_{M_0} = \Theta_{L_y}$.*

Demonstração: Pelo teorema 1.1.7, $\{A, B\}$ define uma decomposição de Morse em $\mathbb{F}_{\Theta_{L_y}} Q$. Logo,

$$\mathcal{M}_{\Theta_{L_y}}^+ \subset A, \quad (3.2)$$

já que $\{\mathcal{M}_{\Theta_{L_y}}(w) : w \in W_{\Theta_{M_0}} \setminus W/W_{\Theta_{L_y}}\}$ é a decomposição de Morse mais fina em $\mathbb{F}_{\Theta_{L_y}} Q$.

Por outro lado,

$$A \subset \text{st}_{\Theta_{L_y}}(1). \quad (3.3)$$

Logo, de (3.2) e (3.3), $\mathcal{M}_{\Theta_{L_y}}^+ \subset \text{st}_{\Theta_{L_y}}(1)$, implicando que $\mathcal{M}_{\Theta_{L_y}}^+ = \text{st}_{\Theta_{L_y}}(1)$. Com isto, $\Theta_{M_0} = \Theta_{L_y}$, visto que as duas decomposições são dadas por elementos da álgebra de Lie, isto é, por seções num fibrado cuja fibra é uma órbita adjunta, que por sua vez é definida pelo tipo parabólico. \square

Exemplo: Considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} A : S^1 &\longrightarrow \text{SI}(2, \mathbb{R}) \\ \theta &\longmapsto A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta & -\text{sen } 2\pi\theta \\ -\text{sen } 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde $\gamma > 1$ é fixado. Defina a seguinte dinâmica no fibrado vetorial $\pi : S^1 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1$ associada à aplicação A :

$$\begin{aligned} \phi_n : S^1 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}^2 \\ (\theta, v) &\longmapsto \phi_n(\theta, v) = (R_\theta(n), A_\theta^n(v)), \end{aligned}$$

onde $R_\theta(n) := n + \theta$ é a rotação do ângulo $\theta \in S^1$ e

$$\begin{aligned} A_\theta^n &= A(R_\alpha^{n-1}(\theta)) \dots A(R_\alpha(\theta)) A(\theta), \\ &= A(\theta + (n-1)\alpha) \dots A(\theta + \alpha) A(\theta), \quad \alpha \in S^1. \end{aligned}$$

Observe que os expoentes de Lyapunov nesse fibrado dependem apenas dos pontos no fibrado projetivo $S^1 \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$.

Considere $B(S^1 \times \mathbb{R}^2) \rightarrow S^1$ o fibrado das bases de $S^1 \times \mathbb{R}^2$, um fibrado principal com grupo estrutural $\text{Gl}(2, \mathbb{R})$. Assim, denote por $\mathbb{F}(S^1 \times \mathbb{R}^2) = B(S^1 \times \mathbb{R}^2) \times_{\text{Gl}(2, \mathbb{R})} \mathbb{F}$ o fibrado associado a $B(S^1 \times \mathbb{R}^2)$, onde \mathbb{F} é a variedade flag maximal de $\text{Gl}(2, \mathbb{R})$.

Pelo teorema 3.1 de [14], se $\alpha \in S^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|A_\theta^n\| \geq \log \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2\gamma} \right),$$

para ν -quase todo $\theta \in S^1$, onde ν é a única medida de probabilidade invariante na base S^1 . Com isto, conclui-se que existem dois expoentes de Lyapunov distintos e, portanto, $\Theta_{\text{Ly}} = \emptyset$. Além disso, pelo teorema 6.1 de [14], o fluxo é transitivo por cadeias em $S^1 \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ e, assim, $\Theta_{\text{Mo}} = \Sigma$.

Note que as condições 2 e 3 do teorema 3.2.1 são trivialmente satisfeitas, pois só existe uma única medida de probabilidade invariante na base.

Entretanto, pelas proposições das seções 4.1.6 e 4.1.7 de [15], tem-se que os ângulos entre as componentes de Oseledets são arbitrariamente pequenos. Dessa forma, $\|A_\theta^n(v)\|$, $v \in \text{st}(w)$, não é limitada, ou seja, a seção de Oseledets não é limitada. Portanto, a condição 1 é *necessária*. □

Capítulo 4

Decomposição de Morse para Transformações de Calibre

Seja um *fluxo contínuo* ϕ_t , $t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} , invariante à direita, em um fibrado principal $Q \rightarrow X$ com grupo estrutural semi-simples de tal forma que o fluxo induzido na base seja a identidade. Neste caso, tal fluxo é dito *fluxo de transformações de calibre*. Dessa forma, tem-se condições para obter uma decomposição de Morse deste fluxo em cada fibra do fibrado flag $\mathbb{F}_\Theta Q = Q \times_G \mathbb{F}_\Theta$, fibrado associado a Q com fibra típica \mathbb{F}_Θ .

Neste capítulo, analisa-se quando a união dessas componentes de Morse fibra a fibra fornecem uma decomposição em todo o fibrado e qual a sua relação com a decomposição de Morse mais fina obtida no fibrado flag $\mathbb{F}_\Theta Q$ (veja teoremas 1.1.14 e 1.1.15).

4.1 Decomposição de Jordan

Nesta seção, serão vistos alguns resultados sobre as decomposições aditiva e multiplicativa de Jordan de grande utilidade nas próximas seções. As principais referências usadas aqui são seção 7, capítulo IX de [13] e [11].

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Um elemento $X \in \mathfrak{gl}(V)$ é

dito *semi-simples* se visto como um elemento de $\mathfrak{gl}(V_{\mathbb{C}})$ é conjugado a uma matriz diagonal, onde $V_{\mathbb{C}}$ é o complexificado de V . Por outro lado, um elemento $X \in \mathfrak{gl}(V)$ é *diagonalizável* (ou *semi-simples real*) se é conjugado a uma matriz diagonal.

Considere $g \in \text{Gl}(V)$ matriz semi-simples. Neste caso, o elemento g é dito *elíptico* se todos os seus autovalores possuem módulo 1. Por outro lado, g é dito *hiperbólico* se todos os seus autovalores são estritamente positivos.

Dado $X \in \mathfrak{gl}(V)$, pode-se escrever $X = E + H + N$ de maneira única, onde $E \in \mathfrak{gl}(V)$ é semi-simples (com autovalores imaginários), $H \in \mathfrak{gl}(V)$ é diagonalizável e $N \in \mathfrak{gl}(V)$ é nilpotente. Além disso, as aplicações lineares E , H e N comutam entre si. Tal decomposição é dita *decomposição aditiva de Jordan* (veja capítulo III de [13]).

Um elemento $g \in \text{Gl}(V)$ pode ser escrito unicamente como

$$g = eh u,$$

onde $e, h, u \in \text{Gl}(V)$ são as componentes elíptica, hiperbólica e unipotente (ou seja, $u - 1$ é nilpotente), respectivamente, e tais aplicações lineares comutam entre si (veja lema 7.1, capítulo IX, pág. 430 de [13]). A decomposição de $g \in \text{Gl}(V)$ é dita *decomposição multiplicativa de Jordan*. Tem-se ainda pelo teorema 7.2, capítulo IX, pág. 431 de [13], que a aplicação $e \in \text{Gl}(V)$ é uma isometria com relação a algum produto interno em V e $u \in \text{Gl}(V)$ é a exponencial de uma aplicação linear nilpotente em $\mathfrak{gl}(V)$.

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples real. Dado um elemento $X \in \mathfrak{g}$, diz-se que

$$X = E + H + N$$

é a *decomposição de Jordan* de $X \in \mathfrak{g}$ se $\text{ad}(X) = \text{ad}(E) + \text{ad}(H) + \text{ad}(N)$ é a decomposição aditiva de Jordan de $\text{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Neste caso, E , H e N comutam, são únicas e, são chamadas, respectivamente, de componentes elíptica, hiperbólica e nilpotente de X .

O resultado a seguir pode ser encontrado em [11], lema 3.1, item *i*), e será de grande utilidade na forma das decomposições de Morse para as transformações de

calibre.

Lema 4.1.1 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples. Para cada $X \in \mathfrak{g}$, existe uma decomposição de Jordan*

$$X = E + H + N$$

de forma que existe uma decomposição de Iwasawa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, onde $E \in \mathfrak{k}_H$ e $H \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$.

Para um grupo de Lie conexo e semi-simples G , $g = eh u \in G$ é a *decomposição multiplicativa de Jordan* se

$$\text{Ad}(g) = \text{Ad}(e)\text{Ad}(h)\text{Ad}(u)$$

é a decomposição multiplicativa de Jordan em $\text{Gl}(\mathfrak{g})$.

4.2 Decomposição de Morse em flags fibra a fibra

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples e $\pi : Q \rightarrow X$ fibrado principal com grupo estrutural G semi-simples. Considere ϕ_t um fluxo contínuo em Q , invariante à direita, de tal forma que o fluxo induzido na base X é a identidade.

Dessa forma, existe uma função $f : Q \rightarrow G$ tal que

$$\phi(q) = qf(q),$$

onde ϕ é o fluxo em Q no tempo $t = 1$. Isto se deve ao fato de que como o fluxo induzido na base é a identidade segue que $\pi(q) = \pi(\phi(q))$, para cada $q \in Q$. Observe ainda que

$$f(qg) = g^{-1}f(q)g. \tag{4.1}$$

De fato, pela definição de f , $\phi(qg) = (qg)f(qg)$. Entretanto,

$$\phi(qg) = \phi(q)g = qf(q)g.$$

Como a ação de G em Q é livre, segue o resultado.

Dessa forma, para $t \in \mathbb{T}$, tem-se que $\phi_t(q) = qf(q)^t$. No caso de tempo discreto, segue que

$$f(q)^n = \begin{cases} \underbrace{f(q) \dots f(q)}_{n \text{ vezes}}, & t > 0 \\ \underbrace{f(q)^{-1} \dots f(q)^{-1}}_{n \text{ vezes}}, & t < 0. \end{cases}$$

Neste caso, a decomposição multiplicativa de Jordan de $f(q) = e(q)h(q)u(q) \in G$ é tal que $\text{Ad}(e(q))$, $\text{Ad}(h(q))$ e $\text{Ad}(u(q))$ são as componentes elíptica, hiperbólica e unipotente em $\text{Gl}(\mathfrak{g})$, respectivamente.

Já no caso de tempo contínuo, $f(q)^t = \exp(tX(q))$ é o fluxo induzido em G pelo campo vetorial à direita $X(q)^r(a) = X(q)a$, $a \in G$, obtendo, dessa forma, uma aplicação $X : Q \rightarrow \mathfrak{g}$. Pelo lema 4.1.1, para cada $q \in Q$,

$$X(q) = E(q) + H(q) + N(q)$$

é decomposição de Jordan de $X(q) \in \mathfrak{g}$, onde existe $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}(q) \oplus \mathfrak{a}(q) \oplus \mathfrak{n}(q)^+$, decomposição de Iwasawa de \mathfrak{g} , tal que $E(q) \in \mathfrak{k}_{H(q)}$ e $H(q) \in \text{cl } \mathfrak{a}(q)^+$. Dessa forma, tem-se a seguinte decomposição de Jordan de $f(q) \in G$,

$$f(q) = e(q)h(q)u(q), \quad (4.2)$$

onde $e(q) = \exp(E(q))$, $h(q) = \exp(H(q))$ e $u(q) = \exp(N(q))$ pela unicidade da decomposição multiplicativa de Jordan em $\text{Gl}(\mathfrak{g})$. Desde que $E(q) \in \mathfrak{k}_{H(q)}$ e $H(q) \in \text{cl } \mathfrak{a}(q)^+$, tem-se que as componentes de Jordan de $f(q)$ pertencem a $Z_{H(q)} = K_{H(q)}AN_{H(q)}^+$.

Lema 4.2.1 *Para $q \in Q$ e $g \in G$, $f(qg) = \exp(\text{Ad}(g^{-1})X(q))$ e, portanto, $X(qg) = \text{Ad}(g^{-1})X(q)$.*

Demonstração: Pela equação (4.1), segue que

$$f(qg) = g^{-1} \exp(X(q))g = \exp(\text{Ad}(g^{-1})X(q)).$$

Analogamente, para as componentes da decomposição multiplicativa de Jordan,

$$f(qg) = \exp(\text{Ad}(g^{-1})E(q)) \exp(\text{Ad}(g^{-1})H(q)) \exp(\text{Ad}(g^{-1})N(q)),$$

onde $E(q)$, $H(q)$ e $N(q)$ são as componentes da decomposição de $X(q) \in \mathfrak{g}$. Logo, $X(qg) = \text{Ad}(g^{-1})E(q) + \text{Ad}(g^{-1})H(q) + \text{Ad}(g^{-1})N(q)$. Assim, pela unicidade da decomposição de $X(qg)$, conclui-se que $X(qg) = \text{Ad}(g^{-1})X(q)$. \square

Ao longo do capítulo, denota-se $X(qg) = \text{Ad}(g^{-1})X(q) := g^{-1}X(q)$.

Sejam $\Theta \subset \Sigma$ e \mathbb{F}_Θ a variedade flag de tipo Θ . Defina a representação $\rho : G \longrightarrow \text{Gl}(\bigwedge^p \mathfrak{g})$, onde $p = \dim \mathfrak{p}_\Theta$, induzida pela representação adjunta, ou seja,

$$\rho(g)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p) := \text{Ad}(g)X_1 \wedge \cdots \wedge \text{Ad}(g)X_p, \quad (4.3)$$

onde $g \in G$ e $X_i \in \mathfrak{g}$, $i = 1, \dots, p$.

Note que, para $t \in \mathbb{Z}$, é claro que $\rho(f(q)^t) = \rho(f(q))^t$. Para $t \in \mathbb{R}$, defina $\rho(f(q))^t := \exp(td_1\rho(X(q)))$, onde $d_1\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \text{gl}(\bigwedge^p \mathfrak{g})$ é a representação infinitesimal de ρ . Desse modo,

$$\rho(f(q)^t) = \rho(\exp(tX(q))) = \rho(f(q))^t.$$

Seja a *imersão de Plücker* dada por

$$i : L \in \text{Gr}_p(\mathfrak{g}) \longmapsto [X_1 \wedge \cdots \wedge X_p] \in \mathbb{P}(\bigwedge^p \mathfrak{g}),$$

onde $\{X_1, \dots, X_p\}$ é uma base para L . Desde que a variedade flag de tipo Θ pode ser realizada como sendo o conjunto de todas as subálgebras parabólicas conjugadas a \mathfrak{p}_Θ , tem-se que $\mathbb{F}_\Theta \subset \text{Gr}_p(\mathfrak{g})$. Assim, restrinja a imersão de Plücker a \mathbb{F}_Θ . Pela G -invariância de \mathbb{F}_Θ , tem-se a seguinte propriedade

$$i(gx) = \rho(g)i(x), \quad x \in \mathbb{F}_\Theta.$$

Além disso, $i(f(q)^t x) = \rho(f(q))^t i(x)$.

Agora, considere o fibrado flag $\mathbb{F}_\Theta Q := Q \times_G \mathbb{F}_\Theta$ associado ao fibrado principal Q . Induzindo o fluxo ϕ_t em $\mathbb{F}_\Theta Q$, temos que

$$\phi_t(q \cdot v) = \phi_t(q) \cdot v = q \cdot f(q)^t v.$$

Note que, fixado $q \in Q$, $f(q)^t$ fornece um fluxo em \mathbb{F}_Θ . Por (4.2), tal fluxo pode ser decomposto da seguinte forma

$$f(q)^t = e(q)^t h(q)^t u(q)^t,$$

onde, no caso de tempo contínuo, $e(q)^t = \exp(tE(q))$, $h(q)^t = \exp(tH(q))$ e $u(q)^t = \exp(tN(q))$. A seguir, prova-se que as componentes conexas do conjunto de pontos fixos da parte hiperbólica formam uma decomposição de Morse para o fluxo $f(q)^t$ no flag \mathbb{F}_Θ . Antes de mostrar tal resultado, necessita-se do seguinte lema.

Lema 4.2.2 *Seja $q \in Q$. Os conjuntos estável e instável de $\text{fix}_\Theta(H(q), w)$ com relação ao fluxo $f(q)^t$ em \mathbb{F}_Θ são dados por*

$$\text{st}(\text{fix}_\Theta(H(q), w)) = \text{st}_\Theta(H(q), w) \text{ e } \text{un}(\text{fix}_\Theta(H(q), w)) = \text{un}_\Theta(H(q), w).$$

Demonstração: Fixe $\mathfrak{a}^+(q)$ câmara de Weyl e b_Θ^q a origem do flag com relação à câmara $\mathfrak{a}^+(q)$. Pela decomposição de Bruhat de $\mathbb{F}_\Theta = \coprod_{w \in W_{H(q)} \backslash W / W_\Theta} \text{st}_\Theta(H(q), w)$, basta provar que $\text{st}_\Theta(H(q), w) \subset \text{st}(\text{fix}_\Theta(H(q), w))$. De fato, considere $x = \exp(Y)kwb_\Theta^q \in \text{st}_\Theta(H(q), w)$, onde $Y \in \mathfrak{n}_{H(q)}^-$ e $k \in K_{H(q)}$. Assim,

$$f(q)^t x = f(q)^t \exp(Y) f(q)^{-t} f(q)^t kwb_\Theta^q.$$

Note que, desde que $f(q)^t, k \in Z_{H(q)}$, segue que $f(q)^t kwb_\Theta^q \in \text{fix}_\Theta(H(q), w)$. Ainda tem-se que $f(q)^t Y \rightarrow 0$, já que o raio espectral de $\text{Ad}(f(q))$ restrita a $\mathfrak{n}_{H(q)}^-$ é menor que 1. Ou seja, os autovalores de $\text{Ad}(f(q))$ restrita a $\mathfrak{n}_{H(q)}^-$ são da forma $e^{-\alpha(H(q))}$, $\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta(H(q)) \rangle$; portanto, tais autovalores são menores que 1. Assim, pelo lema A.3 de [11], $f(q)^t Y \rightarrow 0$.

Supondo que $f(q)^{t_k} x \rightarrow y$, para alguma sequência $t_k \rightarrow +\infty$, segue $f(q)^{t_k} kwb_\Theta^q \rightarrow y$ e, desde que $f(q)^t kwb_\Theta^q$ pertence ao conjunto compacto $\text{fix}_\Theta(H(q), w)$, para todo t , é claro que $y \in \text{fix}_\Theta(H(q), w)$.

A prova para o conjunto instável é feita de forma análoga. □

Proposição 4.2.3 *Considere $f(q)^t$ fluxo em \mathbb{F}_Θ , para cada $q \in Q$. O conjunto*

$$\{\text{fix}_\Theta(H(q), w) : w \in W_{H(q)} \setminus W/W_\Theta\}$$

é uma decomposição de Morse para $f(q)^t$.

Demonstração: Observe, inicialmente, que $\text{fix}_\Theta(H(q), w) = Z_{H(q)}wb_\Theta^q$, onde b_Θ^q é a origem do flag com relação à câmara $\mathfrak{a}^+(q)$. Desde que $f(q)^t \in Z_{H(q)}$, tem-se que $\text{fix}_\Theta(H(q), w)$ é $f(q)^t$ -invariante. Além disso, é claro que $\text{fix}_\Theta(H(q), w)$ é compacto em \mathbb{F}_Θ .

Seja $x \in \mathbb{F}_\Theta$, pela decomposição de Bruhat de \mathbb{F}_Θ e pelo lema 4.2.2, é claro que

$$\omega(x), \omega^*(x) \subset \bigcup_{w \in W} \text{fix}_\Theta(H(q), w).$$

Suponha agora que $\omega(x), \omega^*(x) \subset \text{fix}_\Theta(H(q), w)$, para algum $w \in W$. Seja a imersão de Plücker restrita a \mathbb{F}_Θ , ou seja, $i : \mathbb{F}_\Theta \longrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^p \mathfrak{g})$. Observe que $i(\omega(x)) = \omega(i(x))$, $i(\omega^*(x)) = \omega^*(i(x))$ e que

$$i(\text{fix}(h(q)^t)) = \text{fix}(\rho(h(q))^t) \cap i(\mathbb{F}_\Theta),$$

onde $\rho : G \longrightarrow \text{Gl}(\bigwedge^p \mathfrak{g})$ é a representação dada por (4.3). Dessa forma,

$$\omega(i(x)), \omega^*(i(x)) \subset \text{fix}(\rho(h(q))^t) \cap i(\mathbb{F}_\Theta),$$

e $\text{fix}(\rho(h(q))^t)$ é dado pelo autoespaços de $\rho(h(q))$. Como tais autoespaços no espaço projetivo $\mathbb{P}(\bigwedge^p \mathfrak{g})$ formam uma decomposição de Morse (veja teorema de Selgrade, [28]), segue que $i(x) \subset \text{fix}(\rho(h(q))^t)$. Assim, $x \in \text{fix}(h(q)^t)$, isto é, existe $w' \in W$ tal que $x \in \text{fix}_\Theta(H(q), w')$. Pela invariância de $\text{fix}_\Theta(H(q), w')$, segue que

$$\omega(x) \subset \text{fix}_\Theta(H(q), w) \cap \text{fix}_\Theta(H(q), w'),$$

de onde conclui-se que $x \in \text{fix}_\Theta(H(q), w)$. □

Além disso, o resultado seguinte afirma que a decomposição de Morse no flag obtida anteriormente é a mais fina. A prova desse resultado é uma adaptação da prova do teorema 4.2 de [11] para o contexto aqui apresentado.

Proposição 4.2.4 *Para cada $q \in Q$, o conjunto*

$$\{\text{fix}_\Theta(H(q), w) : w \in W_{H(q)} \backslash W/W_\Theta\}$$

é a decomposição de Morse mais fina para $f(q)^t : \mathbb{F}_\Theta \longrightarrow \mathbb{F}_\Theta$. Portanto,

$$\mathcal{R}_C(f(q)^t) = \text{fix}(h(q)^t) = \bigcup_{w \in W} \text{fix}_\Theta(H(q), w).$$

Demonstração: Considere $f(q)^t = e(q)^t u(q)^t h(q)^t$ a decomposição de Jordan de $f(q)^t$. Pela conexidade de $\text{fix}_\Theta(H(q), w)$, basta provar que $\text{fix}_\Theta(H(q), w)$ é recorrente por cadeia. Note que, para $x \in \text{fix}_\Theta(H(q), w)$,

$$f(q)^t x = e(q)^t u(q)^t h(q)^t x = e(q)^t u(q)^t x.$$

Considerando a imersão de Plücker restrita a \mathbb{F}_Θ , observe que $i(u(q)^t y) = \rho(u(q))^t i(y)$, para todo $y \in \mathbb{F}_\Theta$. Pela definição da decomposição multiplicativa de Jordan em G , tem-se que $\text{Ad}(u(q))$ é unipotente; assim, pelo lema 3.2, item *ii*) de [11], $\rho(u(q))$ é unipotente. Logo, pelo lema A.6 de [11], segue que existe $[v] \in \mathbb{P}(\bigwedge^p \mathfrak{g})$ tal que

$$i(u(q)^t y) \rightarrow [v], \quad t \rightarrow \pm\infty.$$

Tomando $z \in \mathbb{F}_\Theta$ tal que $i(z) = [v]$, é claro que $u(q)^t y \rightarrow z, t \rightarrow \pm\infty$.

Note ainda que $e(q)^t$ é uma isometria com relação a algum produto interno em \mathbb{F}_Θ . De fato, pela decomposição multiplicativa de Jordan em G , tem-se que $\text{Ad}(e(q)^t)$ é elíptica. Assim, pelo lema 3.2, item *ii*) de [11], $\rho(e(q))^t$ é elíptica, ou seja, existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\bigwedge^p \mathfrak{g}$ tal que $\rho(e(q))^t$ é uma isometria, para todo $t \in \mathbb{T}$. Defina o seguinte produto interno em \mathbb{F}_Θ :

$$\langle y, z \rangle_{\mathbb{F}_\Theta} := \langle i(y), i(z) \rangle,$$

onde o produto interno no segundo membro da equação é o produto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzido em $\mathbb{P}(\bigwedge^p \mathfrak{g})$. Com relação a este produto interno em \mathbb{F}_Θ , $e(q)^t$ é uma isometria, para todo $t \in \mathbb{T}$. Portanto, provou-se que $e(q)^t u(q)^t$ é um fluxo recorrente por cadeia (veja lema 2.2 de [11]), o que mostra o resultado. \square

É importante notar que o lema 4.2.2 e as proposições 4.2.3 e 4.2.4 são adaptações feitas à proposição 5.1 e ao teorema 5.2 de [11].

Visto que o fluxo induzido na base é a identidade, obtém-se o fluxo restrito a cada fibra de $\mathbb{F}_\Theta Q \rightarrow X$, o qual denota-se por ϕ_t^x , isto é, para $x = \pi(q)$,

$$\begin{aligned}\phi_t^x : (\mathbb{F}_\Theta Q)_x &\longrightarrow (\mathbb{F}_\Theta Q)_x, \\ q \cdot v &\longmapsto q \cdot f(q)^t v.\end{aligned}$$

Note que o difeomorfismo $q : \mathbb{F}_\Theta \rightarrow (\mathbb{F}_\Theta Q)_x$ fornece uma conjugação entre os fluxos $f(q)^t$ em \mathbb{F}_Θ e ϕ_t^x em $(\mathbb{F}_\Theta Q)_x$, já que $\phi_t^x(q \cdot v) = q \circ f(q)^t \circ q^{-1}(v)$.

Fixado $x = \pi(q)$, defina o seguinte subconjunto de $(\mathbb{F}_\Theta Q)_x$:

$$\mathcal{M}_\Theta(w)_x := \{q \cdot v : v \in \text{fix}_\Theta(H(q), w)\}.$$

Inicialmente, observe que $\mathcal{M}_\Theta(w)_x$ independe do ponto q na fibra sobre x . De fato, sejam $q, q' \in \pi^{-1}\{x\}$; logo, existe $g \in G$ tal que $q' = q \cdot g$. Por definição, $q' \cdot v' \in \mathcal{M}_\Theta(w)_x$, com $v' \in \text{fix}_\Theta(H(qg), w) = g^{-1}\text{fix}_\Theta(H(q), w)$, isto é, $v' = g^{-1}v$, $v \in \text{fix}_\Theta(H(q), w)$. Assim,

$$q' \cdot v' = q \cdot v.$$

Desse modo, fixe $q_0 \in Q$ e, a partir disto, a câmara positiva $\mathfrak{a}(q_0)^+$. A seguir, prova-se que, para $H(q_0) \in \text{cl } \mathfrak{a}(q_0)^+$,

$$\{\mathcal{M}_\Theta(w)_x : w \in W_{H(q_0)} \setminus W/W_\Theta\}$$

fornece uma decomposição de Morse para ϕ_t^x em $(\mathbb{F}_\Theta Q)_x$, $x = \pi(q_0)$.

Proposição 4.2.5 *Tem-se que*

$$\{\mathcal{M}_\Theta(w)_x : w \in W_{H(q_0)} \setminus W/W_\Theta\}$$

fornece a decomposição de Morse mais fina para ϕ_t^x em $(\mathbb{F}_\Theta Q)_x$.

Demonstração: A prova de que os conjuntos $\mathcal{M}_\Theta(w)_x$ formam uma decomposição de Morse, segue claramente da identificação de $(\mathbb{F}_\Theta Q)_x$ com a variedade flag \mathbb{F}_Θ

através do difeomorfismo $q_0 : v \in \mathbb{F}_\Theta \mapsto q_0 \cdot v \in (\mathbb{F}_\Theta Q)_x$ combinada à proposição 4.2.3.

Para provar que tal decomposição é a mais fina, é preciso verificar que

$$\mathcal{R}_C(\phi_t^x) = \bigcup_{w \in W} \mathcal{M}_\Theta(w)_x.$$

Note, inicialmente, que $\mathcal{M}_\Theta(w)_x$ é um subconjunto conexo em $(\mathbb{F}_\Theta Q)_x$. De fato, desde que $\text{fix}_\Theta(H(q_0), w)$ é conexo, segue que $q_0(\text{fix}_\Theta(H(q_0), w)) = \mathcal{M}_\Theta(w)_x$ é conexo. Assim, como na proposição 4.2.4, é preciso mostrar apenas que $\mathcal{M}_\Theta(w)_x$ é recorrente por cadeia. Entretanto, desde que $\phi_t^x(q_0 \cdot v) = q_0 \cdot f(q_0)^t v$, o resultado segue claramente do fato que $\text{fix}_\Theta(H(q_0), w)$ é recorrente por cadeia com relação ao fluxo induzido $f(q_0)^t$ no flag \mathbb{F}_Θ (veja proposição 4.2.4). \square

Note que este resultado pode ser obtido diretamente da conjugação entre os fluxos $f(q)^t$ em \mathbb{F}_Θ e ϕ_t^x em $(\mathbb{F}_\Theta Q)_x$

Pelo que mostrou-se anteriormente, foi obtida uma decomposição de Morse em cada fibra do fibrado flag $\mathbb{F}_\Theta Q$. De um modo puramente intuitivo, será que existe uma maneira para que a “união” de tais componentes de Morse em cada fibra forneça uma decomposição de Morse no espaço todo? Com isso, surgiriam perguntas naturais a serem feitas, como:

1. Como juntar as componentes fibra a fibra, de modo que se tenha conjuntos bem definidos no fibrado flag?
2. A partir disso, é possível mostrar que tais conjuntos formam uma decomposição de Morse? Se esta resposta for positiva, qual a relação com a decomposição de Morse mais fina já obtida em [3] e [23].

Nas seções seguintes, o objetivo será fornecer respostas a tais perguntas.

4.2.1 Caso Regular

Suponha que a aplicação $H : Q \rightarrow \mathfrak{g}$ seja tal que $H(q)$ seja regular, para todo $q \in Q$. Defina o seguinte subconjunto no fibrado flag de tipo Θ :

$$\mathcal{M}_\Theta(w) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{M}_\Theta(w)_x.$$

Note que, pela regularidade da aplicação H , tal união está bem definida.

O objetivo aqui é provar que, de fato,

$$\{\mathcal{M}_\Theta(w) : w \in W/W_\Theta\}$$

forma uma decomposição de Morse em $\mathbb{F}_\Theta Q$. Para mostrar este fato, considere dois casos distintos. Fixe uma câmara de Weyl \mathfrak{a}^+ . No primeiro caso, suponha que, existe um elemento regular $H_0 \in \mathfrak{a}^+$ de modo que $H(q) \in \text{Ad}(G)H_0$, para todo $q \in Q$. Já no segundo caso, considere apenas que $H(q) \in \mathfrak{a}^+$, para todo $q \in Q$, ou mais precisamente, em cada fibra $x \in X$, existe um elemento $q_0^x \in Q_x$ tal que $H(q_0^x) \in \mathfrak{a}^+$.

1º Caso: $H(q) \in \text{Ad}(G)H_0$

Observe inicialmente que, pela regularidade de H_0 , $\text{fix}_\Theta(H_0, w) = wb_\Theta$, onde b_Θ é a origem do flag maximal \mathbb{F}_Θ com relação à câmara fixada \mathfrak{a}^+ . Assim, para $q_0^x \in Q_x$, $\mathcal{M}_\Theta(w)_x = \{q_0^x \cdot wb_\Theta\}$ e, portanto,

$$\mathcal{M}_\Theta(w) = \bigcup_{x \in X} \{q_0^x \cdot wb_\Theta\}.$$

Proposição 4.2.6 Defina $\mathcal{M}_\Theta(w) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{M}_\Theta(w)_x \subset \mathbb{F}_\Theta Q$. A coleção de subconjuntos

$$\{\mathcal{M}_\Theta(w) : w \in W/W_\Theta\}$$

forma uma decomposição de Morse em $\mathbb{F}_\Theta Q$.

Demonstração: Observe que o conjunto $\mathcal{M}_\Theta(w)$ satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\mathcal{M}_\Theta(w)$ é ϕ_t -invariante. De fato, seja $\xi \in \mathcal{M}_\Theta(w)$, $\pi(\xi) = x$; logo, $\xi \in \mathcal{M}_\Theta(w)_x$. Assim, como $\mathcal{M}_\Theta(w)_x$ é ϕ_t -invariante, segue que $\phi_t(\xi) \in \mathcal{M}_\Theta(w)$.

ii) $\mathcal{M}_\Theta(w)$ é um conjunto fechado em $\mathbb{F}_\Theta Q$ (logo, compacto). De fato, observe, inicialmente, que a função $H : Q \longrightarrow \text{Ad}(G)H_0$ define uma seção contínua ζ do fibrado associado $\mathbb{A} = Q \times_G \text{Ad}(G)H_0$, isto é,

$$\begin{aligned} \zeta : X &\longrightarrow \mathbb{A} \\ x &\longmapsto q \cdot H(q) \end{aligned}$$

Note que ζ está bem definida, pois $H(qg) = \text{Ad}(g^{-1})H(q)$.

Pela regularidade de H_0 , tem-se que $Z_G(H_0) = MA$. Assim, pela identificação da órbita G -adjunta em H_0 com o espaço homogêneo $G/Z_G(H_0)$, segue que existe uma fibração canônica entre os fibrados \mathbb{A} e $\mathbb{F}_\Theta Q$, ou seja,

$$q \cdot H(q) \in \mathbb{A} \longmapsto q \cdot gb_\Theta \in \mathbb{F}_\Theta Q,$$

onde $q \in Q$ é tal que $H(q) = gH_0$ e b_Θ é a origem de \mathbb{F}_Θ .

Dessa forma, obtém-se uma seção contínua χ de $\mathbb{F}_\Theta Q$. Logo, $\text{im } \chi$ é fechado em $\mathbb{F}_\Theta Q$. Entretanto, $\text{im } \chi = \mathcal{M}_\Theta(1)$. Para ver que as outras componentes $\mathcal{M}_\Theta(w)$ são fechadas, basta tomar a câmara que contém o elemento wH_0 , $w \in W$, e proceder como anteriormente, obtendo uma seção contínua cuja imagem é $\mathcal{M}_\Theta(w)$.

iii) Para todo $\xi \in \mathbb{F}_\Theta Q$, tem-se que $\omega(\xi), \omega^*(\xi) \subset \bigcup_{w \in W} \mathcal{M}_\Theta(w)$.

iv) Se $\omega(\xi), \omega^*(\xi) \subset \mathcal{M}_\Theta(w)$, então $\xi \in \mathcal{M}_\Theta(w)$.

As afirmações *iii)* e *iv)* seguem diretamente da proposição 4.2.5. □

Na demonstração da proposição anterior, obteve-se uma seção contínua do fibrado associado $\mathbb{A} = Q \times_G \text{Ad}(G)H_0$, de forma que as componentes de Morse são

dadas fibra a fibra

$$\mathcal{M}_\Theta(w)_{\pi(q)} = q \cdot \text{fix}_\Theta(H(q), w), \quad x = \pi(q).$$

Assim, tal decomposição coincide com a decomposição de Morse mais fina em $\mathbb{F}_\Theta Q$ (veja teorema 1.1.14 e 1.1.15, item *iii*).

Corolário 4.2.7 *A decomposição de Morse em $\mathbb{F}_\Theta Q$ obtida na proposição 4.2.6 é a mais fina. Portanto, o tipo parabólico do fluxo ϕ_t é vazio.*

2º Caso: $H(q) \in \text{Ad}(G)\mathfrak{a}^+$

Neste caso, para cada $x \in X$, existe um elemento q_0^x na fibra sobre x de tal modo que $H(q_0^x) \in \mathfrak{a}^+$. Denote por $H_x := H(q_0^x) \in \mathfrak{a}^+$. Note que, para $q \in Q_x$, $q = q_0^x g$, para algum $g \in G$; logo,

$$H(q) = g^{-1}H(q_0^x) = g^{-1}H_x \in g^{-1}\mathfrak{a}^+.$$

Dessa forma, a aplicação $H : Q \longrightarrow \mathfrak{g}$ é tal que $H(q) \in \text{Ad}(G)\mathfrak{a}^+$, ou seja, $H : Q \longrightarrow \text{Ad}(G)\mathfrak{a}^+$.

Considerando b_Θ a origem do flag maximal \mathbb{F}_Θ com relação à câmara fixada \mathfrak{a}^+ , segue que $\mathcal{M}_\Theta(w)_x = \{q_0^x \cdot wb_\Theta\}$. Assim,

$$\mathcal{M}_\Theta(w) = \bigcup_{x \in X} \{q_0^x \cdot wb_\Theta\}.$$

Para mostrar que a coleção de subconjuntos $\{\mathcal{M}_\Theta(w) : w \in W/W_\Theta\}$ forma uma decomposição de Morse, basta provar, como na proposição 4.2.6, que tais conjuntos são fechados no fibrado flag $\mathbb{F}_\Theta Q$. De fato, a aplicação $H : Q \longrightarrow \text{Ad}(G)\mathfrak{a}^+$ define uma seção contínua do fibrado associado $Q \times_G \text{Ad}(G)\mathfrak{a}^+$.

Defina por \mathcal{A} o conjunto de todas as câmaras de Weyl em \mathfrak{g} . Considere a ação natural à esquerda de G em \mathcal{A} . Dessa forma,

$$G/G_{\mathfrak{a}^+} \simeq \text{Ad}(G)\mathfrak{a}^+,$$

onde $G_{\mathfrak{a}^+}$ é o subgrupo de isotropia em \mathfrak{a}^+ dado por MA . Assim, $Q \times_G \text{Ad}(G)\mathfrak{a}^+$ pode ser identificado ao fibrado $Q \times_G G/MA$ e, com isso, obtém-se uma fibração canônica entre os fibrados $Q \times_G \text{Ad}(G)\mathfrak{a}^+$ e $\mathbb{F}_\Theta Q$:

$$q \cdot H(q) \in Q \times_G \text{Ad}(G)\mathfrak{a}^+ \longmapsto q \cdot gb_\Theta,$$

onde $q \in Q$ é tal que $H(q) = g\mathfrak{a}^+$.

Procedendo de maneira análoga à proposição 4.2.6, tem-se uma seção contínua de $\mathbb{F}_\Theta Q$, cuja imagem fechada é a componente $\mathcal{M}_\Theta(1)$. Com isto, mostrou-se o seguinte resultado.

Proposição 4.2.8 *A coleção de subconjuntos*

$$\{\mathcal{M}_\Theta(w) : w \in W/W_\Theta\}$$

forma uma decomposição de Morse em $\mathbb{F}_\Theta Q$. Além disso, tal decomposição coincide com a decomposição de Morse mais fina em $\mathbb{F}_\Theta Q$ e, portanto, o tipo parabólico do fluxo ϕ_t é vazio.

4.2.2 Caso Não-Regular

A aplicação $H : Q \longrightarrow \mathfrak{g}$ foi definida de tal forma que $H(q)$ é não-regular, para cada $q \in Q$. Entretanto, note que sob estas condições não é possível juntar as componentes de Morse fibra a fibra, já que, neste caso, em cada fibra $q_0^x \in Q_x$ tem-se $\left|W_{H(q_0^x)} \backslash W/W_\Theta\right|$ componentes de Morse, isto é, o número de componentes de Morse varia em cada fibra.

Como antes, fixe um elemento $q_0^x \in Q_x$ na fibra sobre x . Denote por $H_x := H(q_0^x) \in \text{cl } \mathfrak{a}^+(q_0^x)$ e por $\mathfrak{a}_x^+ := \mathfrak{a}^+(q_0^x)$. Assim, $H|_{Q_x} : Q_x \longrightarrow \text{Ad}(G)H_x$. Para que a união das componentes de Morse esteja bem definida, é preciso supor que dada uma câmara de Weyl \mathfrak{a}^+ ,

$$H_x \in \text{cl } \mathfrak{a}^+ \text{ e } \Delta := \Theta(H_x),$$

para todo $x \in X$.

Assim, usando a proposição 4.2.5, defina o seguinte subconjunto no fibrado flag maximal $\mathbb{F}_\Theta Q$:

$$\mathcal{M}_\Theta(w) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{M}_\Theta(w)_x.$$

Seja um elemento $H_\Delta \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$ tal que $\Delta = \Theta(H_\Delta)$. Portanto, a aplicação H é tal que $H(q) \in \text{Ad}(G)H_\Delta$, para todo $q \in Q$.

Note que para provar que $\mathcal{M}_\Theta(w)$, $w \in W_\Delta \setminus W/W_\Theta$, é suficiente mostrar que $\mathcal{M}(w)$, $w \in W_\Delta \setminus W$, é uma decomposição de Morse no fibrado flag maximal $\mathbb{F}Q$. De fato, considere a aplicação fechada $\pi_\Theta : \mathbb{F}Q \longrightarrow \mathbb{F}_\Theta Q$. Assim, $\pi_\Theta(\mathcal{M}(w)) = \mathcal{M}_\Theta(w)$ é um conjunto compacto em $\mathbb{F}_\Theta Q$ e, além disso, os fluxos induzidos nos fibrados flag $\mathbb{F}Q$ e $\mathbb{F}_\Theta Q$ comutam com π_Θ , isto é, $\pi_\Theta \circ \phi_t = \phi_t \circ \pi_\Theta$. Logo, segue o seguinte resultado.

Lema 4.2.9 *Se $\mathcal{M}(w)$, $w \in W_\Delta \setminus W$, é uma decomposição de Morse em $\mathbb{F}Q$, então $\pi_\Theta(\mathcal{M}(w)) = \mathcal{M}_\Theta(w)$, $w \in W_\Delta \setminus W/W_\Theta$, forma uma decomposição de Morse em $\mathbb{F}_\Theta Q$.*

A partir disso, pode-se obter uma seção contínua de $\mathbb{F}_\Delta Q$, cuja imagem fechada é a componente $\mathcal{M}_\Delta(1)$. Assim, mostra-se que a coleção de subconjuntos

$$\{\mathcal{M}(w) : w \in W_\Delta \setminus W\}$$

forma uma decomposição de Morse em $\mathbb{F}Q$.

Proposição 4.2.10 *A coleção de subconjuntos*

$$\{\mathcal{M}(w) : w \in W_\Delta \setminus W\}$$

forma uma decomposição de Morse em $\mathbb{F}Q$.

Demonstração: A aplicação $H : Q \longrightarrow \text{Ad}(G)H_\Delta$ define uma seção contínua do fibrado associado $Q \times_G \text{Ad}(G)H_\Delta$, ou seja, $x \in X \longrightarrow q \cdot H(q) \in Q \times_G \text{Ad}(G)H_\Delta$.

Sabe-se que $Z_G(H_\Delta) = K_\Delta AN^+(\Delta)$. Assim, identificando a órbita G -adjunta em H_Δ com o espaço homogêneo $G/Z_G(H_\Delta)$, obtém-se a seguinte fibração

$$q \cdot H(q) \in Q \times_G \text{Ad}(G)H_\Delta \longmapsto q \cdot gb_0 \in \mathbb{F}Q,$$

onde $q \in Q$ é tal que $H(q) = gH_\Delta$ e b_0 é a origem do flag maximal \mathbb{F} . Logo, obtém-se uma seção contínua de $\mathbb{F}Q$, cuja imagem fechada é dada por $\mathcal{M}(1)$. \square

A seção contínua do fibrado associado $Q \times_G \text{Ad}(G)H_\Delta$ obtida na proposição anterior descreve as componentes de Morse fibra a fibra. Assim, segue o seguinte resultado.

Corolário 4.2.11 *A decomposição de Morse em $\mathbb{F}_\Theta Q$ obtida na proposição 4.2.10 é a mais fina. Portanto, o tipo parabólico do fluxo ϕ_t é dado por $\Theta(H_\Delta)$.*

Exemplo: Considere o fibrado trivial $Q = X \times G \longrightarrow X$, onde G é grupo estrutural semi-simples. Seja o seguinte fluxo em Q :

$$(x, g) \in Q \longmapsto \phi_n(x, g) = (x, g^n) \in Q,$$

onde $g \in G$. O fluxo induzido em $\mathbb{F}_\Theta Q = X \times \mathbb{F}_\Theta$ é dado por $\phi_n(x, v) = (x, g^n v)$. Neste caso, $f(q) = 1$, para todo $q \in Q$. Logo, $H(q) = 0$, para todo q , e, com isso, o tipo parabólico do fluxo restrito a cada fibra é dado por $\Theta(H_x) = \Sigma$, para todo $x \in X$. Portanto, o tipo parabólico de ϕ é Σ . \square

Apêndice A

Preliminares

A.1 Teoria de Lie Semi-simples Real

Nesta seção, pretende-se fixar a notação e apresentar alguns conceitos e resultados sobre grupos e álgebras de Lie reais e semi-simples. As principais referências aqui são Duistermat, Kolk e Varadarajan [9], Patrão [23], San Martin [25] e [27], Varadarajan [32], Verdi [33] e Warner [34].

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie real, semi-simples e não-compacta. A *forma de Cartan-Killing* de \mathfrak{g} é definida pela seguinte forma bilinear não-degenerada

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(\text{ad}(X) \text{ad}(Y)), \quad X, Y \in \mathfrak{g},$$

onde $\text{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \text{gl}(\mathfrak{g})$, $\text{ad}(X)(\cdot) = [X, \cdot]$, é a *representação adjunta* de \mathfrak{g} . Denota-se por $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ o grupo dos automorfismos de \mathfrak{g} e por $\text{Int}(\mathfrak{g})$ o grupo dos automorfismos internos de \mathfrak{g} gerado pelas exponenciais de adjuntas de elementos de \mathfrak{g} .

Seja G um grupo de Lie semi-simples, isto é, um grupo de Lie conexo com centro finito e álgebra de Lie semi-simples. Dado $g \in G$, denote por C_g o automorfismo de G dado pela conjugação $x \in G \longmapsto gxg^{-1}$. A *representação adjunta* de G é dada por $\text{Ad} : G \longrightarrow \text{Gl}(\mathfrak{g})$, $\text{Ad}(g) = \text{d}(C_g)_1$. Sendo $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ a aplicação exponencial do

grupo de Lie G , tem-se a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d(C_g)_1} & \mathfrak{g} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{C_g} & G \end{array}$$

Ou seja,

$$\exp(\text{Ad}(g)(X)) = g \exp(X) g^{-1}, \quad g \in G, \quad X \in \mathfrak{g},$$

Além disso, denotando por $e : \text{gl}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \text{Gl}(\mathfrak{g})$ a aplicação exponencial do grupo linear $\text{Gl}(\mathfrak{g})$, segue que

$$\text{Ad}(\exp(X)) = e^{\text{ad}(X)}, \quad X \in \mathfrak{g},$$

tendo em vista que $d(\text{Ad})_1(X) = \text{ad}(X)$.

A.1.1 Decomposições de Cartan e de Iwasawa

Seja $\theta \neq 1$ um automorfismo involutivo de \mathfrak{g} , isto é, $\theta^2 = \theta \circ \theta = 1$, onde 1 é o automorfismo identidade de \mathfrak{g} . Denote por \mathfrak{k} e \mathfrak{s} os autoespaços associados aos autovalores 1 e -1 , respectivamente, de θ . Estes autoespaços satisfazem as seguintes relações:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s} \text{ e } [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{k}.$$

Em particular, \mathfrak{k} é uma subálgebra de \mathfrak{g} . Define-se a forma bilinear associada a θ por

$$\langle X, Y \rangle_\theta = -\langle X, \theta(Y) \rangle.$$

Os subespaços \mathfrak{k} e \mathfrak{s} são ortogonais em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ e, para $X \in \mathfrak{k}$ e $Y \in \mathfrak{s}$, $\text{ad}(X)$ e $\text{ad}(Y)$ são, respectivamente, anti-simétrica e simétrica com relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$. Além disso, como a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} é não-degenerada, segue que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ é uma forma bilinear não-degenerada. No caso em que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ é um produto interno, θ é dito uma *involução de Cartan* e, neste caso, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ é dita uma *decomposição de Cartan* de \mathfrak{g} .

Dada uma decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, considere $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ uma subálgebra abeliana maximal. Desse modo, para $H \in \mathfrak{a}$, $\text{ad}(H)$ é uma matriz diagonalizável e, portanto, para cada funcional $\alpha \in \mathfrak{a}^*$, defina

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(H)X = \alpha(H)X \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Note que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$, o centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{g} , que pode ser escrito como $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, onde \mathfrak{m} é o centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{k} . Um funcional não-nulo $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ tal que $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ é chamado de *raiz associada ao par* (θ, \mathfrak{a}) e, neste caso, \mathfrak{g}_α é dito *espaço de raízes associado à raiz* α . Denote por $\Pi = \Pi(\theta, \mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}^*$ o sistema de raízes associado ao par (θ, \mathfrak{a}) . Observe ainda que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$$

é a decomposição de \mathfrak{g} em espaços de raízes com relação à (θ, \mathfrak{a}) . Tal decomposição é única a menos de conjugação por $\text{Int}(\mathfrak{g})$. Denotando por $K = \exp \mathfrak{k}$, subgrupo compacto de G , e por $S = \exp \mathfrak{s}$, segue que

$$G = KS$$

é a *decomposição de Cartan* do grupo G .

Denote por M e M^* o *centralizador* e o *normalizador* de \mathfrak{a} em K , respectivamente, isto é,

$$M = \{u \in K : \text{Ad}(u)H = H \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}$$

e

$$M^* = \{u \in K : \text{Ad}(u)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}.$$

Observe que M é um subgrupo normal de M^* . O *grupo de Weyl* associado ao par (θ, \mathfrak{a}) é o grupo quociente $W := M^*/M$, que coincide com o grupo gerado pelas reflexões r_α , $\alpha \in \Pi$.

O seguinte subconjunto de \mathfrak{a} ,

$$\{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) \neq 0, \text{ para todo } \alpha \in \Pi\}$$

é aberto e denso em \mathfrak{a} . Os elementos deste conjunto são ditos *elementos regulares* em \mathfrak{a} e suas componentes conexas são as *câmaras de Weyl* em \mathfrak{a} . Um elemento $g \in G$ é *regular*, se existe $X \in \mathfrak{g}$ regular tal que $g = \exp X$. Denote por $\mathcal{R}(G)$ o conjunto dos elementos regulares de G . Este conjunto é aberto e denso em G .

Seja \mathfrak{a}^+ uma câmara de Weyl. Denotemos por Π^+ o conjunto de *raízes positivas* associado a \mathfrak{a}^+ , ou seja,

$$\Pi^+ = \{\alpha \in \Pi : \alpha(H) > 0, \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}^+\}.$$

O conjunto das raízes negativas é dado por $\Pi^- := -\Pi^+$. Além disso, existe um conjunto $\Sigma \subset \Pi^+$, denominado de *sistema simples* de raízes, linearmente independentes tais que todas as raízes positivas são combinações de raízes em Σ com coeficientes inteiros positivos. Denote por $w_0 \in W$, *involução principal*, dado pelo elemento do grupo de Weyl de comprimento máximo visto como um produto de reflexões com relação às raízes simples em Σ ou, equivalentemente, o único elemento de W tal que $w_0(\Sigma) = -\Sigma$.

Dada uma escolha da câmara \mathfrak{a}^+ , as subálgebras

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \text{ e } \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi^-} \mathfrak{g}_\alpha,$$

são nilpotentes e \mathfrak{g} decompõe-se como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+,$$

dita *decomposição de Iwasawa* de \mathfrak{g} com relação à $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ e é única a menos de conjugação por $\text{Int}(\mathfrak{g})$. Sejam $A = \exp \mathfrak{a}$ e $N^+ = \exp \mathfrak{n}^+$ subgrupos conexos de G . Assim,

$$G = KAN$$

é a *decomposição de Iwasawa* do grupo G .

Exemplo: Seja $G = \text{Sl}(n, \mathbb{R})$ o grupo das matrizes inversíveis de ordem n com determinante 1. A álgebra de Lie de G é dada por $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, conjunto das

matrizes em $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ de traço zero. Tomando $\theta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ involução de Cartan, tem-se que $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{s}$ é uma decomposição de Cartan de \mathfrak{g} , onde $\mathfrak{so}(n)$ é a subálgebra das matrizes anti-simétricas e \mathfrak{s} é o conjunto dado pelas matrizes simétricas. A subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ é dada pelo conjunto das matrizes diagonais. Sejam $\lambda_i : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, os funcionais lineares definidos por $\lambda_i(H) = a_i$, onde $H = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$. Para $i, j = 1, \dots, n$, seja $E_{ij} = (a_{rs})_{r,s}$ a matriz de ordem n cuja entrada não-nula é $a_{ij} = 1$. O conjunto $\{E_{ij}, E_{ii} - E_{jj} : i \neq j\}$ é uma base de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Além disso,

$$\text{ad}(H)(E_{ij}) = (a_i - a_j)E_{ij}.$$

Com isto, os funcionais $\alpha_{i,j} = \lambda_i - \lambda_j$, $i \neq j$, são as raízes associadas ao par (θ, \mathfrak{a}) , ou seja, $\Pi = \{\alpha_{i,j} : i \neq j\}$. O grupo de Weyl W é o grupo das permutações de n elementos e age em \mathfrak{a} permutando as entradas de $H \in \mathfrak{a}$, matriz diagonal. Considere a seguinte câmara de Weyl

$$\mathfrak{a}^+ = \{H = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) : a_1 > a_2 > \dots > a_n\}.$$

Assim, o conjunto das raízes positivas associadas a \mathfrak{a}^+ é dado por $\Pi^+ = \{\alpha_{i,j} : i > j\}$ e o correspondente sistema simples de raízes é dado por $\Sigma = \{\alpha_{i,i+1} : i = 1, \dots, n-1\}$. Dessa forma, a decomposição de Iwasawa de \mathfrak{g} com relação à $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ é dada por

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+,$$

onde \mathfrak{n}^+ é a subálgebra nilpotente formada pelas matrizes triangulares superiores com entradas diagonais nulas. Tomando a exponencial $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ na igualdade acima, tem-se a decomposição global de Iwasawa de G :

$$G = \text{SO}(n) \oplus A \oplus N^+,$$

onde $\text{SO}(n)$ é o subgrupo das matrizes ortogonais, A é o subgrupo das matrizes diagonais com entradas positivas e determinante 1 e N^+ é o subgrupo nilpotente dado pelas matrizes triangulares superiores com 1 na diagonal. \square

A.1.2 Subgrupos Parabólicos e Variedades Flag

Fixe $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ e $\Sigma \subset \Pi^+$ o sistema simples de raízes associado à \mathfrak{a}^+ . Dado um subconjunto de raízes simples $\Theta \subset \Sigma$, denote por $\langle \Theta \rangle$ o conjunto de todas as raízes em Π que são combinações lineares de raízes em Θ e por $\langle \Theta \rangle^+ = \langle \Theta \rangle \cap \Pi^+$. Considere as seguintes subálgebras nilpotentes

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}^+(\Theta) &= \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha, \\ \mathfrak{n}^-(\Theta) &= \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}. \end{aligned}$$

A *subálgebra parabólica minimal* de \mathfrak{g} associada a \mathfrak{a}^+ é dada por

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+,$$

e a *subálgebra parabólica de tipo Θ* é dada por

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta).$$

Seja $\mathfrak{a}(\Theta)$ o subespaço abeliano de \mathfrak{a} gerado por H_α , onde $\alpha \in \Theta$ e H_α é definido por $\alpha(\cdot) = \langle \cdot, H_\alpha \rangle$. Denotando por \mathfrak{a}_Θ o complemento ortogonal de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em \mathfrak{a} , em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$, e \mathfrak{k}_Θ o centralizador de \mathfrak{a}_Θ em \mathfrak{k} , tem-se que

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+,$$

é a decomposição de Iwasawa da subálgebra parabólica \mathfrak{p}_Θ . Denote também por \mathfrak{z}_Θ o centralizador de \mathfrak{a}_Θ em \mathfrak{g} . Sua decomposição de Iwasawa é dada por

$$\mathfrak{z}_\Theta = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta).$$

Denota-se por P_Θ o *subgrupo parabólico de G de tipo Θ* , dado pelo normalizador em G da subálgebra \mathfrak{p}_Θ . A decomposição de Iwasawa de P_Θ é dada por

$$P_\Theta = K_\Theta AN,$$

onde K_Θ é o centralizador de \mathfrak{a}_Θ em K . Além disso, denote por $P := P_\emptyset$ o *subgrupo parabólico minimal* de G . Desde que $K_\emptyset = M$, segue que a decomposição de Iwasawa do subgrupo parabólico minimal é dada por

$$P = MAN^+.$$

Além disso, a decomposição de Iwasawa do centralizador Z_Θ de \mathfrak{a}_Θ em G é dada por

$$P_\Theta = K_\Theta AN^+(\Theta).$$

A *variedade flag* de tipo Θ é dada pelo espaço homogêneo $\mathbb{F}_\Theta := G/P_\Theta$. Para $\Theta = \emptyset$, tem-se que $\mathbb{F} := \mathbb{F}_\emptyset$ é dita *variedade flag maximal*. Se $\Theta_1 \subset \Theta_2$, então $P_{\Theta_1} \subset P_{\Theta_2}$ e, dessa forma, então existe uma fibração canônica $\pi_{\Theta_2}^{\Theta_1} : \mathbb{F}_{\Theta_1} \longrightarrow \mathbb{F}_{\Theta_2}$, dada por $gP_{\Theta_1} \mapsto gP_{\Theta_2}$. Se $\Theta_1 = \emptyset$, denotemos $\pi_{\Theta_2}^\emptyset$ simplesmente por π_{Θ_2} . As projeções $\pi_{\Theta_2}^{\Theta_1}$ são equivariantes em relação à ação de G , isto é, $\pi_{\Theta_2}^{\Theta_1}(g \cdot x) = g \cdot \pi_{\Theta_2}^{\Theta_1}(x)$, para todo $g \in G$ e todo $x \in \mathbb{F}_{\Theta_1}$.

Exemplo: Seja $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ e a descrição das raízes feita no exemplo A.1.1. Inicialmente, note que o centralizador de \mathfrak{a} em $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n)$ é trivial, logo a subálgebra parabólica minimal associada à câmara de Weyl \mathfrak{a}^+ é dada por $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$. Assim, $P = MAN^+$, o subgrupo parabólico minimal de G associado à \mathfrak{p} é dado pelas matrizes triangulares superiores. A variedade flag maximal $\mathbb{F} = G/P$ de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ é realizada como o conjunto $\mathbb{F}(\mathbb{R}^n)$ de flags $(V_1, V_2, \dots, V_{n-1})$ de subespaços de \mathbb{R}^n da forma, onde

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1}$$

e $\dim V_i = i$. De fato, para $g \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}^n)$ e $x = (\langle v_1 \rangle, \dots, \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle) \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^n)$, considere a seguinte ação transitiva de G em $\mathbb{F}(\mathbb{R}^n)$:

$$g \cdot x = (\langle gv_1 \rangle, \langle gv_1, gv_2 \rangle, \dots, \langle gv_1, gv_2, \dots, gv_{n-1} \rangle) \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^n).$$

O subgrupo de isotropia em $(\langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle, \dots, \langle e_1, e_2, \dots, e_{n-1} \rangle)$ é dado por P . Assim, $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}^n)/P = \mathbb{F}(\mathbb{R}^n)$.

Defina o seguinte subconjunto de raízes simples $\Sigma(i, j) = \{\alpha_{r, r+1} : i \leq r \leq j\}$. Note

Defina a seguinte subálgebra nilpotente

$$\mathfrak{n}_\Theta^- := \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

e o subgrupo conexo $N_\Theta^- = \exp \mathfrak{n}_\Theta^-$ associado a \mathfrak{n}_Θ^- . Seja b_Θ a origem do flag \mathbb{F}_Θ , em relação a P_Θ . A decomposição de \mathbb{F}_Θ como união disjunta das órbitas de N_Θ^- é denominada *decomposição de Bruhat regular*, ou seja,

$$\mathbb{F}_\Theta = \bigcup_{w \in W/W_\Theta} N_\Theta^- \cdot \tilde{w}b_\Theta,$$

onde \tilde{w} é um representante de $w \in W$ em M^* e W_Θ é o subgrupo parabólico de tipo Θ de W gerado pelas reflexões em torno das raízes de Θ . A órbita $N_\Theta^- \cdot b_\Theta$ é aberta e densa em \mathbb{F}_Θ e os seus conjugados $g(N_\Theta^- \cdot b_\Theta)$, $g \in G$, são chamados de *células abertas de Bruhat*.

Dado $H \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$, denote por \tilde{H} o campo vetorial induzido no flag de tipo Θ , \mathbb{F}_Θ , com fluxo $\exp(tH)$, $t \in \mathbb{R}$. Seja $Z_H := \{g \in G : \text{Ad}(g)H = H\}$ o centralizador de H em G e $K_H := Z_H \cap K$. As componentes conexas do conjunto dos pontos fixos de $\exp(tH)$ ou, equivalentemente, das singularidades de \tilde{H} são dadas pelas órbitas

$$Z_H \cdot wb_\Theta = K_H \cdot wb_\Theta, \quad w \in W,$$

as quais são denotadas por $\text{fix}_\Theta(H, w)$ (também denota-se tais componentes por $\text{fix}_\Theta(h, w)$, $h = \exp H$). Tais componentes conexas são ditas *pontos fixos tipo w* . Tem-se que $\text{fix}_\Theta(H, 1)$ é o único atrator e $\text{fix}_\Theta(H, w_0)$ é o único repulsor, onde w_0 é a involução principal. Além disso, $K_H \cdot w_1b_\Theta = K_H \cdot w_2b_\Theta$ se, e somente se, $W_H w_1 W_\Theta = W_H w_2 W_\Theta$, onde $W_H := \{w \in W : wH = H\}$.

As variedades estável e instável da componente conexa $\text{fix}_\Theta(H, w)$ são dadas, respectivamente, pelas órbitas

$$\begin{aligned} \text{st}_\Theta(H, w) &:= N_H^- K_H \cdot wb_\Theta, \\ \text{un}_\Theta(H, w) &:= N_H^+ K_H \cdot wb_\Theta, \end{aligned}$$

onde N_H^- é o subgrupo conexo gerado por $\mathfrak{n}_H^\pm = \mathfrak{n}_{\Theta(H)}^\pm$ e $\Theta(H) := \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H) = 0\}$. Com isto, pode ser obtida a chamada *decomposição de Bruhat generalizada* do flag \mathbb{F}_Θ dada por

$$\mathbb{F}_\Theta = \bigcup_{w \in W_H \backslash W / W_\Theta} N_H^- K_H \cdot wb_\Theta = \bigcup_{w \in W_H \backslash W / W_\Theta} \text{st}_\Theta(H, w).$$

Dinamicamente, esta decomposição pode ser vista como uma decomposição do flag de tipo Θ em variedades estáveis da ação de um elemento não-regular $h = \exp(H) \in \text{cl } A^+$.

Se $Y = \text{Ad}(g)H$, $H \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$, os campos vetoriais \tilde{Y} e \tilde{H} são conjugados e, desse modo, as singularidades de \tilde{Y} em \mathbb{F}_Θ são dadas por $\text{fix}_\Theta(Y, w) := g(K_H \cdot wb_\Theta)$, onde $g(K_H \cdot b_\Theta)$ é o atrator e $g(K_H \cdot w_0 b_\Theta)$ é o repulsor. As variedades estável e instável associadas são dadas, respectivamente, por $\text{st}_\Theta(Y, w) := g(N_H^- K_H \cdot wb_\Theta)$ e $\text{un}_\Theta(Y, w) := g(N_H^+ K_H \cdot wb_\Theta)$.

Seja $\iota := -w_0$. Dessa forma, $\iota(\Sigma) = \Sigma$ e, para $\Theta \subset \Sigma$, $\Theta^* = \iota(\Theta)$. Defina a seguinte subálgebra

$$\mathfrak{p}_\Theta^- := \theta(\mathfrak{p}_\Theta) = \mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{p}^-,$$

onde $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^-$. Denota-se por P_Θ^- o subgrupo parabólico associado a \mathfrak{p}_Θ^- , isto é, o normalizador em G de \mathfrak{p}_Θ^- . Tem-se que $\mathfrak{p}_\Theta^- \in \mathbb{F}_{\Theta^*}$, o *flag dual* a \mathbb{F}_Θ . De fato, seja $\tilde{w}_0 \in M^*$, representante de $w_0 \in W$ em M^* ; assim, $\tilde{w}_0(\mathfrak{p}^+) = \mathfrak{p}^-$ e $\tilde{w}_0(-\Theta^*) = \Theta$. Logo, $\tilde{w}_0(\mathfrak{n}^-(\Theta^*)) = \mathfrak{n}^+(\Theta)$ e, com isto, $\tilde{w}_0(\mathfrak{p}_{\Theta^*}) = \mathfrak{p}_\Theta^-$.

Lema A.1.1 *Seja $H \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$. Considere $\Theta = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H) = 0\}$ e o seu dual Θ^* . Denote por $\pi_{\Theta^*} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta^*}$ a projeção canônica. Então,*

$$\pi_{\Theta^*}(\text{fix}(H, w_0)) = \{b_{\Theta^*}^-\},$$

onde $b_{\Theta^*}^- = \pi_{\Theta^*}(w_0 b)$ é o repulsor da câmara \mathfrak{a}^+ em \mathbb{F}_{Θ^*} . Portanto, o conjunto repulsor de H em \mathbb{F}_{Θ^*} reduz-se a um ponto.

Demonstração: De fato, tem-se que $\text{fix}(H, w_0) = K_H \cdot w_0 b$. Logo,

$$\begin{aligned} K_H \cdot w_0 b &= w_0(w_0^{-1} K_H w_0) \cdot b = w_0 K_{w_0 H} \cdot b \\ &= w_0 \text{fix}(w_0 H, 1). \end{aligned}$$

Como $\pi_{\Theta^*}(\text{fix}(w_0H, 1)) = b_{\Theta^*}$, segue que

$$\pi_{\Theta^*}(\text{fix}(H, w_0)) = w_0 b_{\Theta^*} = b_{\Theta^*}^-.$$

□

Exemplo: Seja $H = \text{diag}\{n-1, -1, \dots, -1\} \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Então, para $\Theta = \Theta(H)$, $\mathbb{F}_{\Theta} = \mathbb{P}^{n-1}$ e $\mathbb{F}_{\Theta^*} = \text{Gr}_{n-1}(n)$. O repulsor de H em \mathbb{P}^{n-1} é o subconjunto correspondente ao hiperplano gerado pelos $(n-1)$ últimos vetores da base enquanto que na Grassmanniana é um ponto. □

A.1.3 Subálgebras transversais

Definição A.1.2 *Duas subálgebras $\mathfrak{b}_1 \in \mathbb{F}_{\Theta}$ e $\mathfrak{b}_2 \in \mathbb{F}_{\Theta^*}$ são opostas quando $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) \in G \cdot (\mathfrak{p}_{\Theta}, \mathfrak{p}_{\Theta}^-)$.*

Notação: $\mathfrak{b}_1 \top \mathfrak{b}_2$

Observe que $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) \in \mathbb{F}_{\Theta} \times \mathbb{F}_{\Theta^*}$ são subálgebras opostas se, e somente se, para $g \in G$, $(g \cdot \mathfrak{b}_1, g \cdot \mathfrak{b}_2) \in \mathbb{F}_{\Theta} \times \mathbb{F}_{\Theta^*}$ o são.

Dada uma subálgebra \mathfrak{c} , denote por $\text{nil}(\mathfrak{c})$ seu nilradical. O resultado seguinte pode ser encontrado em [27], proposição 1.2, e fornece uma descrição das subálgebras opostas a uma dada subálgebra em \mathbb{F}_{Θ^*} .

Proposição A.1.3 *Uma subálgebra $\mathfrak{b}_1 \in \mathbb{F}_{\Theta}$ é oposta a $\mathfrak{b}_2 \in \mathbb{F}_{\Theta^*}$ se, e só se, uma das duas condições de transversalidade são satisfeitas:*

$$\mathfrak{b}_1 \cap \text{nil}(\mathfrak{b}_2) = \{0\} \text{ e } \mathfrak{b}_2 \cap \text{nil}(\mathfrak{b}_1) = \{0\}.$$

Além disso, para $\mathfrak{c} \in \mathbb{F}_{\Theta^*}$, o subconjunto $\sigma(\mathfrak{b}) = \{\mathfrak{b} \in \mathbb{F}_{\Theta} : \mathfrak{b} \cap \text{nil}(\mathfrak{c}) = \{0\}\}$ é uma célula aberta em \mathbb{F}_{Θ} .

Mais geralmente, diremos que $b_1 \in \mathbb{F}_\Theta$ e $b_2 \in \mathbb{F}_{\Theta^*}$ são elementos *opostos* se $b_1 \in \mathfrak{b}_1$ e $b_2 \in \mathfrak{b}_2$, onde \mathfrak{b}_1 e \mathfrak{b}_2 são subálgebras opostas. Além disso, é claro que b_1 e b_2 são opostos se, e só se, gb_1 e gb_2 o são para qualquer $g \in G$.

Lema A.1.4 *Sejam $H \in \text{cl } \mathfrak{a}^+$ e $\Theta = \Theta(H)$. Considere, como no lema A.1.1,*

$$\{b_{\Theta^*}^-\} = \pi_{\Theta^*}(\text{fix}(H, w_0)),$$

onde Θ^* é o flag dual a Θ . Então, o conjunto das subálgebras opostas a $b_{\Theta^*}^-$ é dado por $\text{st}_\Theta(H, 1)$.

Demonstração: O nilradical da subálgebra parabólica associada a $b_{\Theta^*}^-$ é dado por

$$\text{nil}(b_{\Theta^*}^-) = \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

que é claramente transversal à subálgebra parabólica associada a b_Θ . Portanto, b_Θ e $b_{\Theta^*}^-$ são subálgebras opostas.

Como $\Theta = \Theta(H)$, segue que $\text{fix}_\Theta(H, 1) = \{b_\Theta\}$; logo, a variedade estável $\text{st}_\Theta(H, 1)$ é dada por N^-b_Θ . Entretanto, se $n \in N^-$ então $nb_{\Theta^*}^- = b_{\Theta^*}^-$. Assim, nb_Θ é oposta a $b_{\Theta^*}^-$, mostrando que $\text{st}_\Theta(H, 1)$ está contido no conjunto das subálgebras opostas a $b_{\Theta^*}^-$. Pela proposição A.1.3, esse conjunto, assim como $\text{st}_\Theta(H, 1)$, são células abertas de Bruhat, seguindo a igualdade requerida. \square

Corolário A.1.5 *Seja H como no lema acima. Para $D \in \text{Ad}(G)H$, $\text{st}_\Theta(D, 1) \subset \mathbb{F}_\Theta$ é o conjunto dos elementos opostos a $\text{fix}_{\Theta^*}(D, w_0)$.*

A.2 Representações de Grupos Adjuntos

Seja $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$, $\dim V < \infty$, uma representação fiel da álgebra de Lie \mathfrak{g} . Sua imagem $\rho(\mathfrak{g})$ é isomorfa a \mathfrak{g} e o subgrupo de Lie $G_\rho \subset \text{Gl}(V)$ gerado por $\exp(\rho(\mathfrak{g}))$ tem álgebra de Lie $\rho(\mathfrak{g}) \approx \mathfrak{g}$. O grupo G_ρ varia com a representação ρ .

Além disso, a representação de \mathfrak{g} se “estende” a uma representação de um grupo G , com álgebra de Lie \mathfrak{g} se, e só se, G é um recobrimento de G_ρ .

Particularmente, se \mathfrak{g} é semi-simples, então todo grupo G com álgebra \mathfrak{g} recobre o grupo adjunto $\text{Aut}_0(\mathfrak{g})$, a componente conexa da identidade do grupo dos automorfismos de \mathfrak{g} . Dessa forma, a representação ρ de \mathfrak{g} se estende a representações de qualquer grupo G , com álgebra de Lie \mathfrak{g} , se, e só se $G_\rho = \text{Aut}_0(\mathfrak{g})$.

A.2.1 Álgebras compactas

Seja \mathfrak{u} uma álgebra de Lie compacta semi-simples e denote por $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ sua complexificada. Sem perda de generalidade, pode-se supor que \mathfrak{u} é construída a partir de uma *base de Weyl* de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Ou seja, seja \mathfrak{h} uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ (uma subálgebra nilpotente tal que o normalizador de \mathfrak{h} em $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ coincide com \mathfrak{h}) e denote por Σ o sistema simples de raízes do conjunto de raízes Π associado ao par $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h})$. Uma base de Weyl é uma base de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ formada por H_α , $\alpha \in \Sigma$, e $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Pi$ que satisfazem as seguintes propriedades:

- $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$;
- $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta}X_{\alpha,\beta}$, com $m_{\alpha,\beta} = 0$ se $(\alpha + \beta)$ não é raiz e tal que $m_{\alpha,\beta} = m_{-\alpha,-\beta}$.

Dessa forma, \mathfrak{u} é subespaço real gerado por $\{iH_\alpha, X_\alpha - X_{-\alpha}, i(X_\alpha + X_{-\alpha})\}$, para α percorrendo Π^+ , o subconjunto das raízes positivas (veja teorema 12.13, seção 12.2, pág. 334 de [25]). Particularmente, $i\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ é uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{u} .

Seja ρ uma representação de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ em V , de dimensão finita. Um *peso* de ρ é um funcional linear $\mu \in \mathfrak{h}^*$ tal que o subespaço de pesos

$$V_\mu = \{v \in V : \rho(H)v = \mu(H)v, \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

é não-nulo. A *multiplicidade* de um peso μ é a dimensão do subespaço de pesos V_μ . Ainda tem-se que μ é um *peso máximo* se $\rho(\mathfrak{n}^+)V_\mu = 0$.

Pelo teorema 11.5, seção 11.1, pág. 291 de [25], toda representação irredutível de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, de dimensão finita, admite peso máximo μ de forma que $\mu(H'_\alpha) \in \mathbb{Z}^+$, onde

$$H'_\alpha = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} H_\alpha, \quad \alpha \in \Pi.$$

Denote por $H_i = H'_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, l$, onde $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ é o sistema simples de raízes. Seja $\Phi = \{\mu_1, \dots, \mu_l\}$ a base dual de $\{H_1, \dots, H_l\}$. Observe que um funcional μ de \mathfrak{h} é o peso máximo de uma representação irredutível de dimensão finita se, e somente se,

$$\mu = n_1\mu_1 + \dots + n_l\mu_l,$$

com coeficientes inteiros $n_i \geq 0$. Observe que, os elementos de Φ são pesos máximos e são ditos *pesos fundamentais*. Neste caso, Φ é dito um *sistema fundamental de pesos*.

A representação associada a μ é denotada por $\rho_\mu : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V_\mu)$. Essa representação é fiel se $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ é simples e $\mu \neq 0$. De forma mais geral, seja

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_m$$

a decomposição de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ em componentes simples de tal forma que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{h}_m$, onde \mathfrak{h}_j é subálgebra de Cartan de \mathfrak{g}_j . Então, a representação é fiel se μ não é identicamente nula em cada componente \mathfrak{h}_j . Portanto, se $\langle \alpha^\vee, \mu \rangle \neq 0$, para toda raiz simples $\alpha \in \Sigma$, então a representação é fiel.

Uma representação de \mathfrak{u} num espaço vetorial complexo estende-se de maneira natural a uma representação de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. E, vice-versa, representações complexas de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ restringem-se a representações de \mathfrak{u} . Se uma é irredutível, então a outra também é.

Seja

$$\mathcal{L} = \{H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} : \alpha(H) \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Pi\}$$

o reticulado de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ onde as raízes assumem valores inteiros. Note que, para $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, $\exp(\text{ad}(iH)) = \text{id}$ se, e só se, $H \in 2\pi\mathcal{L}$. Considere também o reticulado

$$\mathcal{L}^\vee = \{H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} : \alpha^\vee(H) \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Pi\}.$$

Os pesos fundamentais são da forma $\mu(\cdot) = \langle H, \cdot \rangle$, com $H \in \mathcal{L}^\vee \cap \text{cl } \mathfrak{a}^+$.

Dado um peso fundamental μ , considere a aplicação exponencial

$$\exp_\mu : \mathfrak{gl}(V_\mu) \longrightarrow \text{Gl}(V_\mu).$$

Seja também U_μ o grupo gerado por $\exp_\mu \rho_\mu(\mathfrak{u})$. Esse grupo é determinado pelo seu centro, pois a álgebra de Lie já está dada.

Proposição A.2.1 *O centro $Z(U_\mu)$ de U_μ é dado por*

$$\begin{aligned} Z(U_\mu) &= \{ \exp_\mu 2\pi i \rho_\mu(H) : H \in \mathcal{L} \} \\ &= \{ \exp_\mu i \rho_\mu(H) : H \in 2\pi \mathcal{L} \}. \end{aligned}$$

Demonstração: Seja $\text{Aut}_0(\mathfrak{u})$ a componente conexa da identidade do grupo dos automorfismos de \mathfrak{u} . Esse é o menor grupo de Lie cuja álgebra de Lie é \mathfrak{u} e seu centro é trivial. O homomorfismo canônico $\phi : U_\mu \longrightarrow \text{Aut}_0(\mathfrak{u})$ permuta as exponenciais, logo

$$\phi(\exp_\mu i \rho_\mu(H)) = \exp(\text{ad}(iH)).$$

Como $\ker \phi = Z(U_\mu)$, segue que $\exp_\mu i \rho_\mu(H) \in Z(U_\mu)$ se, e só se, $\exp(\text{ad}(iH)) = \text{id}$, ou ainda, se, e só se, $H \in 2\pi \mathcal{L}$. E, por fim, o centro de um grupo compacto está contido em todo toro maximal, isto é, $Z(U_\mu) \subset \exp_\mu i \rho_\mu(\mathfrak{h}_\mathbb{R})$. \square

Usando o lema de Schur (veja proposição 1.8, seção 1.3.4, pág. 38 de [25]), segue que o centro de U_μ pode ser escrito da seguinte forma.

Proposição A.2.2 *Tem-se que $Z(U_\mu) = \{ \exp 2\pi i \mu(H) \cdot \text{id} : H \in \mathcal{L} \}$.*

Demonstração: Um elemento do centro $g = \exp_\mu 2\pi i \rho_\mu(H) \in Z(U_\mu)$, $H \in \mathcal{L}$, é uma transformação linear de V_μ que comuta com os elementos de U_μ e, portanto, $\rho_\mu(H)$ comuta com os elementos de $\rho_\mu(\mathfrak{u})$ e de $\rho_\mu(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. Como $\mu(H)$ é um dos autovalores para $\rho_\mu(H)$, segue pelo lema de Schur, que $\rho_\mu(H) = \mu(H) \cdot \text{id}$. Portanto, $g = \exp_\mu 2\pi i \mu(H) \cdot \text{id}$. \square

Corolário A.2.3 *Suponha que o peso fundamental μ seja tal que $\mu(H) \in \mathbb{Z}$, para todo $H \in \mathcal{L}$. Então, $U_\mu = \text{Aut}_0(\mathfrak{u})$.*

O conjunto dos pesos fundamentais μ tais que $\mu(H) \in \mathbb{Z}$, $H \in \mathcal{L}$, gera o dual $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$. De fato, seja $\Pi' = \{H_\alpha : \alpha \in \Pi\} \subset \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ os duais das raízes e defina

$$\mathcal{R} = \mathbb{Z} \cdot \Pi'$$

o reticulado gerado por esses duais. A fórmula de Killing (veja teorema 6.10, seção 6.3, pág. 158 de [25]) diz que se $\alpha, \beta \in \Pi$ então $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$, isto é, $\alpha^\vee(H_\beta) \in \mathbb{Z}$, o que implica que $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}^\vee$. Portanto, se $H \in \mathcal{R} \cap \text{cla}^+$, então $\mu_H(\cdot) = \langle H, \cdot \rangle$ é um peso fundamental.

Note que, por definição, se $H \in \mathcal{R}$ e $x \in \mathcal{L}$, então $\mu_H(x) = \langle H, x \rangle \in \mathbb{Z}$. Isto juntamente com o fato de que $\mathcal{R} \cap \text{cla}^+$ gera $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ produz o seguinte resultado.

Proposição A.2.4 *O conjunto dos pesos fundamentais μ tais que $U_\mu = \text{Aut}_0(\mathfrak{u})$ gera o dual $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$.*

Corolário A.2.5 *Seja U um grupo de Lie compacto, conexo e semi-simples com álgebra de Lie \mathfrak{u} . Denote por Φ_U o conjunto dos pesos fundamentais $\mu \in \Phi$ tais que a representação de \mathfrak{u} em V_μ se estende a U . Então, Φ_U gera $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$.*

A.2.2 Álgebras semi-simples não-compactas

Sejam \mathfrak{g} álgebra de Lie semi-simples real e $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ sua complexificada. Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ é uma decomposição de Cartan de \mathfrak{g} e $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ é um abeliano maximal, então uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é dada por

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_k,$$

onde $\mathfrak{h}_k = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ (veja teorema 12.25, seção 12.4, pág. 347 de [25]). Seja $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ a complexificada de \mathfrak{h} e denote por Π o conjunto das raízes de $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$. Considere também o subespaço real $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ gerado por $\{H_\alpha : \alpha \in \Pi\}$ e Π_0 o conjunto das raízes de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Note que, $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ e $\mathfrak{h}_k = \mathfrak{h} \cap i\mathfrak{h}_\mathbb{R}$.

No caso de uma representação fiel, $\rho_\mu(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \approx \mathfrak{g}_\mathbb{C}$. A restrição de ρ_μ a \mathfrak{g} define uma representação de \mathfrak{g} . É claro que se ρ_μ é fiel, então essa restrição também é uma representação fiel de \mathfrak{g} . Neste caso, $\rho_\mu(\mathfrak{g}) \approx \mathfrak{g}$.

Denote por G_μ o subgrupo de Lie conexo de $\text{Gl}(V_\mu)$ cuja álgebra de Lie é $\rho_\mu(\mathfrak{g})$. Se a representação é fiel, então G_μ é um dos grupos de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} , que são localmente isomorfos ao grupo de Lie $\text{Aut}_0(\mathfrak{g})$, componente conexa da identidade do grupo dos automorfismos de \mathfrak{g} .

Como no caso compacto visto na seção anterior, o grupo G_μ é determinado pelo seu centro $Z(G_\mu)$. Esse centro está contido no compacto maximal K , que por sua vez está dentro de U_μ . Agora, um elemento de $\text{Gl}(V_\mu)$ que centraliza G_μ também centraliza $\rho_\mu(\mathfrak{g})$ e, portanto, $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ e \mathfrak{u} . Ou seja, $Z(G_\mu) \subset Z(U_\mu)$.

Assim, da mesma forma que no caso compacto, os pesos fundamentais cujas representações se estendem aos grupos $\text{Aut}_0(\mathfrak{g})$ geram o dual $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$.

Proposição A.2.6 *Seja G um grupo de Lie semi-simples e conexo com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Denote por Φ_G o conjunto dos pesos fundamentais μ de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ tais que a representação de \mathfrak{g} em V_μ se estende a G . Então, Φ_G gera $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$.*

A.3 Fibrados Principais e Associados

Seja uma variedade X e um grupo de Lie G . Um *fibrado principal sobre M com grupo estrutural G* consiste de uma variedade Q e uma ação de G em Q satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) G age livremente à direita em Q : $(q, g) \in Q \times G \mapsto qg \in Q$;
- (ii) O espaço das órbitas dessa ação é M , isto é, existe uma aplicação sobrejetora

$$\pi : Q \longrightarrow X$$

tal que as órbitas de G são os conjuntos $\pi^{-1}\{x\}$, $x \in X$;

- (iii) Q é localmente trivial, ou seja, dado $x \in X$ existe uma vizinhança U de x e

uma aplicação bijetora da seguinte forma

$$\begin{aligned}\psi : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times G \\ q &\longmapsto \psi(q) = (\pi(q), \phi(q)),\end{aligned}$$

onde $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow G$ é uma aplicação satisfazendo a seguinte condição

$$\phi(qg) = \phi(q)g, \tag{A.1}$$

para todo $q \in \pi^{-1}(U)$ e $g \in G$.

Denota-se um fibrado principal por $Q(X, G, \pi)$, $Q(X, G)$ ou simplesmente Q . Além disso, tem-se que Q é o *espaço total*, X o *espaço base*, G o *grupo estrutural* e π a *projeção*. As fibras do fibrado principal são dadas por $Q_x = \pi^{-1}\{x\}$, $x \in X$.

Pela trivialidade local de Q , segue que existe $\{U_i\}_{i \in I}$ cobertura aberta de X e seções locais $\chi_i : U_i \longrightarrow Q$ tais que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então

$$\chi_i(x) = \chi_j a_{ij}(x),$$

onde $a_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ são ditas *funções de transição*.

Exemplo: Sejam um grupo de Lie G e uma variedade diferenciável X . O produto $Q = X \times G$ é um fibrado principal com base X e grupo estrutural G , cuja ação à direita de G em Q é dada por

$$((x, g), h) \in Q \times G \longmapsto (x, gh) \in Q.$$

O fibrado principal $Q(X, G)$ obtido é *trivial*. □

Exemplo: Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e TM seu fibrado tangente. O *fibrado das bases* ou *fibrado dos referenciais* de M é o conjunto BM de todas as bases de TM , isto é, um elemento $q \in BM$ é uma base

$$\{f_1, \dots, f_n\} \tag{A.2}$$

de algum espaço tangente $T_x M$, $x \in M$. Equivalentemente, $q \in BM$ pode ser visto como sendo uma aplicação linear inversível ou um *referencial* $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x M$, $x \in M$. Considere a aplicação $\pi : BM \longrightarrow M$ que associa a cada $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x M$ o ponto $x \in M$. Ainda existe uma ação natural à direita de $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ em BM dada por

$$(q, g) \in BM \times \text{Gl}(n, \mathbb{R}) \longmapsto qg := q \circ g \in BM.$$

Tem-se que BM é um fibrado principal com base M e grupo estrutural $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$. \square

Seja F uma variedade diferenciável e uma ação à esquerda do grupo estrutural G em F . O grupo G age à direita no produto $Q \times F$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} (Q \times F) \times G &\longrightarrow Q \times F \\ ((q, v), g) &\longmapsto (q, v) \cdot g := (qg, g^{-1}v). \end{aligned}$$

Esta ação determina a seguinte relação de equivalência \sim em $Q \times F$: $(q, v) \sim (p, w)$ se, e só se, existe $g \in G$: $p = qg$ e $w = g^{-1}v$. A classe de equivalência do par $(q, v) \in Q \times F$ será denotada por $q \cdot v$. O espaço quociente de $Q \times F$ pela relação de equivalência será denotado por $E = Q \times_G F$. Dizemos que E é o *fibrado associado com fibra típica F e base X* .

Observe que se $(q, v) \sim (p, w)$ então q e p estão na mesma fibra de Q , a aplicação $\pi_E : Q \times_G F \longrightarrow X$ dada por $\pi_E(q \cdot v) = \pi(q)$ está bem definida. A aplicação π_E é dita *projecção* de E sobre X . Para cada $x \in X$, denota-se a fibra de E sobre x por $E_x = \pi_E^{-1}\{x\}$. Além disso, para cada $q \in Q$, as aplicações

$$v \in F \longmapsto p \cdot v \in E_x, \quad x = \pi(q),$$

são difeomorfismos.

Exemplo: Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e o fibrado das bases $BM(M, \text{Gl}(n, \mathbb{R}))$. Considerando a ação linear canônica de $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ em \mathbb{R}^n , tem-se que TM pode ser visto como o fibrado associado a BM , $BM \times_{\text{Gl}(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^n$. De fato,

basta considerar a aplicação α que a cada elemento $q \cdot v \in BM \times_{\text{Gl}(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^n$ associa o vetor tangente $\alpha(q \cdot v) = p(v) \in T_x M$, $x = \pi(q)$, onde $q : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ é um elemento de BM . \square

Seja ϕ_t , $t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} , um fluxo sobre o fibrado principal $Q(X, G)$ que comuta com a ação à direita de G em Q , isto é, $\phi_t(qg) = \phi_t(q)g$, para todo $t \in \mathbb{T}$, $q \in Q$ e $g \in G$. Essa propriedade implica que ϕ_t leva fibras em fibras, ou seja, ϕ_t leva a órbita $q \cdot G$ em $\phi_t(q) \cdot G$, $q \in Q$. Equivalentemente, como X é o espaço das órbitas da ação à direita de G em Q , temos que ϕ_t preserva as fibras Q_x , $x \in X$. Dessa forma, pode-se induzir um fluxo na base X do fibrado principal. Denota-se tal fluxo por $(x, t) \in X \times \mathbb{T} \mapsto t \cdot x := \pi(\phi_t(q)) \in M$, $\pi(q) = x$. Assim, o fluxo induzido no fibrado associado $E = Q \times_G F$ é dado por $\varphi_t(q \cdot v) := \phi_t(q) \cdot v$, $(q, v) \in Q \times F$.

Definição A.3.1 *Sejam $Q \rightarrow X$ e $Q' \rightarrow X'$ fibrados principais sobre G e G' , respectivamente. Uma aplicação $l : Q \rightarrow Q'$ é um homomorfismo de fibrados principais se existe um homomorfismo de $\psi : G \rightarrow G'$ tal que*

$$l(qg) = l(q)\psi(g), \quad q \in Q, g \in G.$$

Note que, dessa definição, pode-se definir uma aplicação $\bar{l} : X \rightarrow X'$, visto que um homomorfismo de fibrados principais respeita fibras. Quando \bar{l} é a identidade e $\psi : G \hookrightarrow G'$ é a inclusão de um subgrupo G de G' , Q é dita uma G -redução de Q' . A aplicação l pode ser de classe \mathcal{C}^r , contínua ou, simplesmente, mensurável e, com isso, a G -redução de Q' é dita classe \mathcal{C}^r , contínua ou mensurável, respectivamente.

Proposição A.3.2 *Sejam $Q \rightarrow X$ um fibrado principal com grupo estrutural G e $F = G/H$ uma variedade na qual G age transitivamente e H é o subgrupo de isotropia em $u_0 \in F$. As seguintes afirmações equivalentes:*

- i) Q admite uma H -redução $R \subset Q$ mensurável;*
- ii) Existe uma seção global mensurável $\chi : Q \times_G F \rightarrow X$ do fibrado associado a Q com fibra típica F tal que*

$$R := \{q \in Q : \chi(\pi(q)) = q \cdot u_0\}$$

é uma H -redução de Q ;

iii) Existe uma aplicação $f : Q \longrightarrow F$ mensurável e G -equivariante, ou seja, $f(qg) = g^{-1}f(q)$, $g \in G$. Além disso,

$$R := f^{-1}(u_0)$$

é uma H -redução de Q .

Demonstração: A prova desta proposição pode ser facilmente adaptada do teorema 5.6, capítulo I, pág. 57 de [20]. \square

A.3.1 Decomposição de Iwasawa

Considere $G = KAN$ decomposição de Iwasawa do grupo G . Seja R uma K -redução de Q . Dado $q \in Q$, existe $g \in G$ e $r' \in R$ tais que $q = r' \cdot g$. Escrevendo $g = khn \in KAN$, tem-se que $q = r' \cdot (khn)$. Como K deixa R invariante, visto que R é um fibrado principal com grupo estrutural K , e a decomposição de Iwasawa é única, conclui-se que $q \in Q$ pode ser escrito de maneira única como

$$q = r \cdot hn,$$

onde $r = r'k \in R$, $hn \in AN$. Portanto, $Q = R \cdot AN$ é a *decomposição de Iwasawa* do fibrado principal Q .

Sejam

$$R : q \in Q \longmapsto r \in R \text{ e } A : q \in Q \longmapsto h \in A$$

as projeções associadas, as quais são contínuas.

Proposição A.3.3 *As projeções $R : Q \longrightarrow R$ e $A : Q \longrightarrow A$ satisfazem as seguintes propriedades:*

i) Para $r \in R$, $R(r) = 1$ e $A(r) = 1$;

ii) Para $q \in Q$ e $p \in P = mhn \in P = MAN$, $R(q \cdot p) = R(q)m$ e $A(q \cdot p) = A(q)h$.

Defina a seguinte aplicação para $q \in Q$,

$$\mathbf{a}(q) = \log A(q) \in \mathfrak{a}.$$

Note que, da propriedade *ii*), segue que

$$\mathbf{a}(q \cdot p) = \mathbf{a}(q) + \mathbf{a}(p), \quad q \in Q, p \in P, \quad (\text{A.3})$$

onde, por abuso de notação, denota-se a projeção de $g \in G$ sobre a A -componente por \mathbf{a} .

A.3.2 Decomposição de Cartan

Fixe uma decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ da álgebra de Lie \mathfrak{g} de G e a correspondente decomposição no grupo de Lie $G = KS$. Seja R a K -redução de Q obtida anteriormente. Para $q \in Q$, existe $g \in G$ e $r' \in R$ tais que $q = r' \cdot g$. Escrevendo $g = ks \in KS$, tem-se pela K -invariância de R e pela unicidade da decomposição de Cartan que $q \in Q$ pode ser escrito unicamente como

$$q = r \cdot s,$$

onde $r = r'k \in R$ e $s \in S$. Portanto, $Q = R \cdot S$ é a *decomposição de Cartan* do fibrado principal Q .

Sejam as projeções associadas

$$R^C : q \in Q \mapsto r \in R \text{ e } S : q \in Q \mapsto s \in S,$$

as quais são contínuas.

Proposição A.3.4 *As projeções $R^C : Q \rightarrow R$ e $S : Q \rightarrow S$ satisfazem as seguintes propriedades:*

- i) Para $q \in Q$ e $k \in K$, $R^C(q \cdot k) = R^C(q) \cdot k$ e $S(q \cdot k) = k^{-1}S(q)k$;*
- ii) Dado $g \in G$, denote por $S(g)$ a S -componente. Então, $R^C(r) = r$ e $S(r \cdot g) = S(g)$;*
- iii) Para $q \in Q$ e $g \in G$, $S(q \cdot g) = S(S(q)g)$.*

A.3.3 Decomposição Polar

Fixe uma câmara de Weyl A^+ contida em uma subálgebra abeliana maximal $A \subset S$ e, por conseguinte, a decomposição polar de $G = K(\text{cl}A^+)K$. Para $q \in Q$, existe $g \in G$ e $r' \in R$ tais que $q = r' \cdot g$. Escrevendo $g = uhv \in K(\text{cl}A^+)K$, note que $g = ks$, onde $k = uv$ e $s = v^{-1}hv$. Combinando esta decomposição polar juntamente com a decomposição de Cartan de Q e a K -invariância de R , tem-se que $q \in Q$ pode ser escrito como

$$q = r' \cdot s = r \cdot hv,$$

onde $r = r'v^{-1}$, $h \in \text{cl}(A)^+$ e $v \in K$.

A componente $h \in \text{cl}(A)^+$ é unicamente determinada (entretanto, r e v não são). Logo, a projeção A^+ sobre $\text{cl}(A)^+$ está bem definida, isto é,

$$A^+ : q \in Q \longmapsto h \in \text{cl}(A)^+.$$

Note ainda que $A^+(q \cdot k) = A^+(q)$, para $q \in Q$ e $k \in K$.

Defina também as seguintes aplicações para $q \in Q$,

$$\mathfrak{s}(q) = \log S(q) \in \mathfrak{s} \text{ e } \mathfrak{a}^+(q) = \log A^+(q) \in \text{cl}\mathfrak{a}^+.$$

A.3.4 \mathfrak{a} -cociclo sobre fibrados flag

Seja $\Theta \subset \Sigma$. A partir da ação à esquerda de G em \mathbb{F}_Θ , seja o fibrado associado $Q \times_G \mathbb{F}_\Theta$, denominado de *fibrado flag de tipo Θ* e denotado por $\mathbb{F}_\Theta Q$. Para $\Theta = \emptyset$, o fibrado flag é denotado simplesmente por $\mathbb{F}Q$.

A partir de um fluxo ϕ_t no fibrado principal Q , $t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} , define-se o \mathfrak{a} -cociclo sobre $\mathbb{F}Q$ como uma aplicação $\mathfrak{a} : \mathbb{T} \times \mathbb{F}Q \longrightarrow \mathfrak{a}$ satisfazendo

$$\mathfrak{a}(t + s, \xi) = \mathfrak{a}(t, \phi_s(\xi)) + \mathfrak{a}(s, \xi).$$

Observe que, para cada $\xi \in \mathbb{F}Q$, pode-se escrever $\xi = r \cdot b_0$, onde $r \in R$, a K -redução de Q , e b_0 é a origem do flag \mathbb{F} . Dessa forma, pela decomposição de Iwasawa do fibrado Q , $\phi_t(r) = r_t \cdot a_t n_t \in R \cdot AN$. Segue da seção 4.2 de [30] que

$$\mathfrak{a}(t, r \cdot b_0) = \log a_t.$$

A.4 Linearização de fibrados flag

Seja $\Theta \subset \Sigma$ subconjunto de raízes simples. O objetivo desta seção é construir um fibrado vetorial cujas fibras são os espaços tangentes às fibras do fibrado flag $\pi : \mathbb{F}_\Theta Q \longrightarrow X$, as quais são variedades diferenciáveis.

Para cada $g \in G$, considere o difeomorfismo $g : \mathbb{F}_\Theta \longrightarrow \mathbb{F}_\Theta$. Desse modo, considere a ação à esquerda de G no fibrado tangente $T(\mathbb{F}_\Theta)$, onde $g \in G$ age pela diferencial $dg : T(\mathbb{F}_\Theta) \longrightarrow T(\mathbb{F}_\Theta)$, isto é,

$$\begin{aligned} G \times T(\mathbb{F}_\Theta) &\longrightarrow T(\mathbb{F}_\Theta) \\ (g, v) &\longmapsto (dg)_\xi(v), \end{aligned}$$

onde $v \in T_\xi \mathbb{F}_\Theta$, $\xi \in \mathbb{F}_\Theta$. Observe que, para cada $g \in G$ e $\xi \in \mathbb{F}_\Theta$, $(dg)_\xi : T_\xi \mathbb{F}_\Theta \longrightarrow T_{g\xi} \mathbb{F}_\Theta$ é um isomorfismo linear. Dessa forma, definimos o fibrado associado:

$$\pi^v : T^v(\mathbb{F}_\Theta Q) \longrightarrow \mathbb{F}_\Theta Q,$$

o qual é um fibrado vetorial. Além disso, é claro que $T^v(\mathbb{F}_\Theta Q)$ é um fibrado associado sobre X .

A.4.1 Métrica em $T^v(\mathbb{F}_\Theta Q)$

O espaço tangente a \mathbb{F}_Θ em $b_\Theta := \mathfrak{p}_\Theta \in \mathbb{F}_\Theta$ é dado por \mathfrak{n}_Θ^- e Z_Θ normaliza \mathfrak{n}_Θ^- . Tomando a decomposição de Iwasawa de $Z_\Theta = K_\Theta AN^+(\Theta)$, considere o produto interno $\text{Ad}(K_\Theta)$ -invariante dado pela restrição da métrica B_θ em \mathfrak{g} . Pela transitividade de K em \mathbb{F}_Θ , tem-se que $\mathbb{F}_\Theta = \text{Ad}(K)b_\Theta$; assim, a métrica em $T_{b_\Theta} \mathbb{F}_\Theta$ induz a uma métrica K -invariante em $T(\mathbb{F}_\Theta)$, denotada por $B_\theta(\cdot, \cdot)_\xi$, $\xi \in \mathbb{F}_\Theta$.

Agora, considere $H_\Theta \in \mathfrak{a}$ tal que $\Theta := \Theta(H_\Theta) = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H_\Theta) = 0\}$. O resultado seguinte segue da proposição A.7, pág. 125 de [31].

Proposição A.4.1 *Seja $g \in Z_\Theta$ agindo como um difeomorfismo de \mathbb{F}_Θ . Tem-se que*

$$(dg)_{b_\Theta} = \text{Ad}(g) : \mathfrak{n}_\Theta^- \longrightarrow \mathfrak{n}_\Theta^-.$$

Além disso, tomando a decomposição de Iwasawa de $g = uhn \in K_\Theta AN^+(\Theta)$, segue que

$$(dg)_{b_\Theta} = (du)_{b_\Theta} \circ (dh)_{b_\Theta} \circ (dn)_{b_\Theta},$$

onde $(du)_{b_\Theta} = \text{Ad}(u)|_{\mathfrak{n}_\Theta^-}$ é B_θ -isometria, $(dh)_{b_\Theta} = \text{Ad}(h)|_{\mathfrak{n}_\Theta^-}$ é B_θ -simétrica e $(dn)_{b_\Theta} = \text{Ad}(n)|_{\mathfrak{n}_\Theta^-} = \text{id}_{\mathfrak{n}_\Theta^-}$.

Seja $Q = R \cdot AN$ decomposição de Iwasawa do fibrado Q , onde $R \subset Q$ é uma K -redução de Q . Finalmente, pode-se definir uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_\xi$, $\xi \in \mathbb{F}_\Theta Q$, no fibrado vetorial $T^v(\mathbb{F}_\Theta Q)$. De fato, escrevendo $\xi = r \cdot b \in \mathbb{F}_\Theta Q$, $r \in R$, $b \in \mathbb{F}_\Theta$, segue que, para $w, w' \in T_b \mathbb{F}_\Theta$, define-se

$$\langle r \cdot w, r \cdot w' \rangle_\xi := B_\theta(w, w')_b.$$

Note que tal métrica está bem definida, visto que $B_\theta(\cdot, \cdot)_b$, $b \in \mathbb{F}_\Theta$, em $T(\mathbb{F}_\Theta)$ é K -invariante. Além disso, a aplicação

$$r : T_b \mathbb{F}_\Theta \longrightarrow T^v(\mathbb{F}_\Theta Q)_{\xi=r \cdot b}$$

é uma isometria com relação à métrica em $T^v(\mathbb{F}_\Theta Q)$.

A.4.2 Fluxo induzido em $T^v(\mathbb{F}_\Theta Q)$

Seja ϕ_t um fluxo no fibrado principal $\pi : Q \longrightarrow X$ que comuta com a ação à direita de G em Q . Denote o fluxo induzido na base X por $t \cdot x := \pi(\phi_t(q))$, $\pi(q) = x \in X$. O fluxo induzido no fibrado flag $\mathbb{F}_\Theta Q$ levanta-se a um fluxo linear ψ_t^v no fibrado vetorial $T^v(\mathbb{F}_\Theta Q)$ tomando diferenciais na direção das fibras. A seguir, será dada uma descrição local deste fluxo (veja seção 4.5.1, pág. 92 de [31]).

Para cada $x \in X$, seja $q \in Q$ tal que $\pi(q) = x$. Considere $x' := t \cdot x$, $t \in \mathbb{T}$. Tome $\chi_1 : U_1 \longrightarrow Q$ e $\chi_2 : U_2 \longrightarrow Q$ seções locais de Q , onde U_1 e U_2 são abertos de x e x' , respectivamente. Assim, $\phi_t(\chi_1(x))$ e $\chi_2(t \cdot x)$ estão sobre a mesma fibra $Q_{x'}$, ou seja, existe $\rho(t, x) \in G$ cociclo local (veja seção 5.2, pág. 105 de [1]) tal que

$$\phi_t(\chi_1(x)) = \chi_2(t \cdot x)\rho(t, x). \tag{A.4}$$

Fixado $x \in X$, denote por $g_t := \rho(t, x)$. Para $\xi = \chi_1(x) \cdot b$, $b \in \mathbb{F}_\Theta$, tem-se por (A.4) que o fluxo em $\mathbb{F}_\Theta Q$ restrito à fibra sobre x é dado por

$$\phi_t(\xi) = \chi_2(t \cdot x) \cdot g_t b.$$

Agora, considere $v \in T^v(\mathbb{F}_\Theta Q)_\xi$. Logo, $v = \chi_1(x) \cdot w$, $w \in T_b \mathbb{F}_\Theta$. Portanto,

$$\psi_t^v(v) = \phi_t(\chi_1(x)) \cdot w = \chi_2(t \cdot x) \cdot (dg_t)_b(w).$$

Apêndice B

Medidas Invariantes

Neste apêndice, apresenta-se resultados e definições sobre Teoria da Medida que serão usados ao longo da tese, principalmente nos capítulos 1 e 3.

B.1 Medidas de ocupação

Seja ϕ_t um fluxo em um espaço de Hausdorff compacto X , onde $t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} . Denote por $\mathbb{M}(X)$ o espaço das medidas finitas com sinal nos borelianos de X e por $\mathbb{P}(X)$ o espaço das medidas de probabilidade em $\mathbb{M}(X)$.

Definição B.1.1 *Uma medida de probabilidade $\mu \in \mathbb{P}(X)$ é dita invariante pelo fluxo se, para todo $t \in \mathbb{T}$, $\phi_{t*}\mu = \mu$, onde $(\phi_*\mu)(\cdot) = \mu(\phi_t^{-1}(\cdot))$, isto é,*

$$(\phi_{t*}\mu)(B) = \mu(\phi_t^{-1}(B)) = \mu(B),$$

para todo boreliano B de X . Denota-se por $\mathbb{P}_{\text{inv}}(X)$ o espaço das medidas de probabilidade invariantes em $\mathbb{P}(X)$.

Um boreliano $B \subset X$ é dito μ -invariante se $\phi_t^{-1}(B) = B$ em quase todo ponto, para todo $t \in \mathbb{T}$. Uma medida de probabilidade $\mu \in \mathbb{P}_{\text{inv}}(X)$ é dita *ergódica* se os únicos conjuntos μ -invariantes são os triviais.

Dada uma medida $\mu \in \mathbb{M}(X)$, denota-se por $|\mu|$ a sua variação total, a qual define uma norma em $\mathbb{M}(X)$. Considerando $C(X)$ o espaço das funções reais contínuas, munido da norma do supremo, dada por

$$\|f\|_\infty := \sup \{|f(x)|; x \in X\},$$

considere o seguinte funcional linear

$$L_\mu(f) = \int_X f d\mu, \quad f \in C(X).$$

Observe que $\|L_\mu\| = |\mu|$, onde $\|L_\mu\| = \sup \{|L_\mu(f)|; \|f\|_\infty = 1\}$, e, portanto, $L_\mu \in C(X)^*$, o espaço dual a $C(X)$.

Teorema B.1.2 (Representação de Riesz) *Para cada funcional linear contínuo F em $C(X)$, existe uma medida $\mu \in \mathbb{M}(X)$ tal que*

$$F(f) = \int_X f d\mu, \quad f \in C(X).$$

Além disso, $\|F\| = |\mu|(X)$.

Demonstração: Veja teorema 8, seção 14.7, pág. 310 de [24]. □

A *topologia da convergência pontual* em $\mathbb{M}(X)$ é dada da seguinte forma: uma rede $(\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$, I conjunto dirigido, converge à $\mu \in \mathbb{M}(X)$ se $L_{\mu_\alpha}(f) \rightarrow L_\mu(f)$, para todo $f \in C(X)$. Note que, devido ao teorema de representação de Riesz, a topologia da convergência pontual em $\mathbb{M}(X)$ corresponde à topologia fraca-* de $C(X)^*$ e o espaço das medidas de probabilidade $\mathbb{P}(X)$ corresponde aos funcionais positivos $L \in C(X)^*$ tais que $L(1) = 1$.

Dada uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in X$, a *média temporal de f ao longo da trajetória de x* é dada pelo seguinte limite

$$\tilde{f}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\phi_k(x)), \quad (\text{B.1})$$

caso o mesmo exista.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$, defina o seguinte funcional linear contínuo em $C(X)$:

$$\begin{aligned} L_{n,x} : C(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto L_{n,x}(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\phi_k(x)). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

(Em cada caso de tempo contínuo, tal somatório é substituída por uma integral; dados $T > 0$ e $x \in X$,

$$L_{T,x}(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi_t(x)) dt.)$$

Note que, $L_{n,x}(f) \geq 0$, para todo funcional $f \in C(X)$, e que $L_{n,x}(1) = 1$. Dessa forma, pelo teorema de representação de Riesz, tem-se que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma medida de probabilidade $\nu_{n,x} \in \mathbb{P}(X)$ tais que

$$L_{n,x}(f) = \int_X f d\nu_{n,x}.$$

Como $L_{n,x} \in \{F \in C(X)^*; \|F\| \leq 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, o qual é um conjunto compacto na topologia fraca-* pelo teorema de Banach-Alaoglu (teorema 17, seção 10.6, pág. 202 de [24]), segue que existe uma subsequência $(\nu_{n_k,x})$ de $(\nu_{n,x})$ convergente, isto é,

$$\nu_{n_k,x} \rightarrow \mu_x.$$

Observe que μ_x é uma medida de probabilidade ϕ -invariante. A medida μ_x é dita uma *medida de ocupação*. Com isso, mostrou-se o seguinte resultado.

Teorema B.1.3 (Krylov-Bogolyubov) *Seja uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e um ponto $x \in X$ tal que a média temporal ao longo da trajetória de x dada por (B.1) existe, então existe uma medida de probabilidade invariante $\mu_x \in \mathbb{P}_{\text{inv}}(X)$ tal que*

$$\tilde{f}(x) = \int_X f d\mu_x.$$

O teorema seguinte fornece a decomposição de uma medida invariante em componentes ergódicas.

Teorema B.1.4 (Choquet) *Seja uma medida μ ϕ -invariante em X . Então, toda função μ -integrável é μ_x -integrável, para quase todo $x \in X$, e*

$$\int_X \left(\int_X f d\mu_x \right) d\mu = \int_X f d\mu.$$

Em particular, as medidas μ_x podem ser tomadas como ergódicas.

Proposição B.1.5 *Seja $x \in X$ e μ_x medida de ocupação ergódica. Então, tem-se que $\text{supp } \mu_x \subset \omega(x)$.*

Demonstração: Considere $y \in \text{supp } \mu_x$ e uma vizinhança U de y tal que $\mu_x(U) > 0$. Por outro lado, pelo corolário 4.1.14, pág. 140 de [18], temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_U(\phi_k(x)) = \mu_x(U) > 0,$$

onde $\mathbf{1}_U$ é a função característica em U . Desse modo, $y \in \omega(x)$. □

Corolário B.1.6 *Seja A um atrator para ϕ_t em X . Então, para todo $x \in A$, $\text{supp } \mu_x \subset A$.*

Demonstração: De fato, seja N a vizinhança de A tal que $\omega(N) = A$. Logo, para todo $x \in A$, $\text{supp } \mu_x \subset \omega(x) \subset A$. □

Dada a projeção $\pi : \mathbb{F}Q \rightarrow X$ e uma medida ν na base X , uma medida μ projeta-se sobre ν se $\nu = \pi_*\mu$, ou seja, $\nu(B) = \mu(\pi^{-1}(B))$, onde B é um boreliano de X .

Lema B.1.7 *Se $\xi \in \mathbb{F}Q$ e μ_ξ é uma medida de ocupação para ξ , então $\pi_*\mu_\xi$ é uma medida de ocupação para $x = \pi(\xi)$.*

Demonstração: De forma análoga ao que foi feito no teorema de Krylov-Bogolyubov, considere os seguintes funcionais lineares em $C(\mathbb{F}Q)$:

$$L_{n,\xi} : C(\mathbb{F}Q) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto L_{n,\xi}(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\phi_k(\xi)).$$

Do teorema de representação de Riesz, segue que $L_{n,\xi}(f) = \int_{\mathbb{F}Q} f d\nu_{n,\xi}$, onde $\nu_{n,\xi} \in \mathbb{P}(\mathbb{F}Q)$. Além disso, pelo teorema de Banach-Alaoglu (teorema 17, seção 10.6, pág. 202 de [24]), existe uma subsequência $(\nu_{n_k,\xi})$ convergente, isto é, $\nu_{n_k,\xi} \rightarrow \mu_\xi$. Dada uma função contínua $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ e aplicando os funcionais $L_{n,\xi}$ em $g \circ \pi$, obtém-se

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (g \circ \pi)(\phi_k(\xi)) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(\phi_k(x)).$$

Aplicando o limite para $n \rightarrow +\infty$, conclui-se, que a primeira parte da igualdade converge para $\pi_*\mu_\xi$ e a outra para a medida de ocupação μ_x . \square

Teorema B.1.8 (Birkhoff) *Dada uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, valem as seguintes afirmações:*

i) *Para toda medida de probabilidade ϕ -invariante $\mu \in \mathbb{P}_{\text{inv}}(X)$, a média temporal*

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\phi_k(x))$$

existe, para μ -quase todo $x \in X$;

ii) *Para toda medida de probabilidade $\mu \in \mathbb{P}_{\text{inv}}(X)$,*

$$\int_X f d\mu = \int_X \tilde{f} d\mu;$$

iii) *Para toda probabilidade ergódica μ ,*

$$\tilde{f}(x) = \int_X f d\mu,$$

para μ -quase todo $x \in X$.

Corolário B.1.9 *Seja ν uma medida ergódica em X . Então, existe um conjunto mensurável Ω , com $\nu(\Omega) = 1$, tal que, para todo $x \in \Omega$, $\mu_x = \nu$, onde μ_x é medida de ocupação.*

Demonstração: De fato, pelo teorema de Birkhoff, seja Ω tal que

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\phi_k(x)) = \int_X f d\nu$$

existe, para todo $x \in \Omega$. Por outro lado,

$$\tilde{f}(x) = \int_X f d\mu_x.$$

Logo, $\nu = \mu_x$. □

Para o próximo resultado, considere um fluxo ϕ_t , invariante à direita, em um fibrado principal $\pi : Q \rightarrow X$ com grupo estrutural G . Dada uma ação de G à esquerda de G em F , considere o fluxo induzido no fibrado associado $E := Q \times_G F$.

Corolário B.1.10 *Sejam ν uma medida ergódica na base X e μ uma medida ϕ -invariante tais que $\pi_*\mu = \nu$. Então, a medida μ em E pode ser decomposta em componentes ergódicas da seguinte forma*

$$\mu(\cdot) = \int \mu_\eta(\cdot) d\mu(\eta),$$

onde μ_η são medidas de contagem ergódicas e, para quase todo $\eta \in E$, $\pi_*\mu_\eta = \nu$.

Demonstração: A primeira parte e o fato de que as medidas μ_η são ergódicas, segue diretamente do teorema B.1.4. Note que as medidas de contagem θ_η projetam-se em medidas de contagem, isto é, $\pi_*\theta_\eta = \theta_{\pi(\eta)}$. Além disso, é claro que $\theta_{\pi(\eta)}$ são ergódicas. Assim, pelo corolário B.1.8, para ν -quase todo $x \in X$, $\theta_x = \nu$, o que mostra o resultado. □

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido da norma $|\cdot|$ e $C(X, V)$ o espaço de Banach das funções contínuas de X em V munido da norma do supremo. Dados $f \in C(X, V)$ e $\mu \in \mathbb{M}(X)$, define-se a *integral de f com relação a μ* pelo vetor $\int_X f d\mu$, unicamente determinado por

$$\varphi \left(\int_X f d\mu \right) = \int_X (\varphi \circ f) d\mu, \quad \varphi \in V^*. \quad (\text{B.3})$$

Considere o cociclo vetorial $a : \mathbb{T} \times X \rightarrow V$ sobre o fluxo $\phi_t : X \rightarrow X$. Defina a seguinte função em $C(X, V)$:

$$q : x \in X \mapsto q(x) := a(1, x) \in V.$$

Para $x \in X$, a *média temporal de q ao longo da trajetória de x* é dada pelo seguinte limite,

$$\tilde{q}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q(\phi_k(x)),$$

caso o mesmo exista. Assim, como no item *iii*) do teorema ergódico de Birkhoff (teorema B.1.8), pode-se provar que, dada uma medida ergódica μ em X , a média temporal coincide com a integral de q com relação a μ , para quase todo $x \in X$.

Teorema B.1.11 *Seja $\mu \in \mathbb{P}(X)$ ergódica. Tem-se que, para quase todo $x \in X$,*

$$\tilde{q}(x) = \int_X q d\mu,$$

isto é, as médias temporais e espaciais de q coincidem.

Demonstração: Considere $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ base de V^* . Para cada $i = 1, \dots, n$, tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\varphi_i \circ q)(\phi_k(x)) = \int_X (\varphi_i \circ q) d\mu,$$

para $x \in U_i$, onde $\mu(U_i) = 1$. Tomando $U := \bigcap_{i=1}^n U_i$, tem-se que $\mu(U) = 1$ e

$$\varphi_i(\tilde{q}(x)) = \varphi_i \left(\int_X q d\mu \right),$$

para todo $x \in U$. O resultado segue pela definição (B.3) de integração vetorial. \square

Uma generalização do teorema ergódico de Birkhoff é o teorema ergódico subaditivo de Kingman, dado a seguir e cuja a prova é dada no teorema 1.8 de [19].

Teorema B.1.12 (Kingman) *Seja uma medida de probabilidade ϕ -invariante $\mu \in \mathbb{P}_{\text{inv}}(X)$ e $(f_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis de X em $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ satisfazendo as seguintes condições:*

a) *Integrabilidade: $f_1^+ \in L^1(X)$;*

b) *Subaditividade: $f_{m+n}(x) \leq f_m(x) + f_n \circ \phi^m(x)$ em μ -quase todo $x \in X$.*

Então, existe uma função mensurável ϕ -invariante $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tal que $f^+ \in L^1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f_n = f,$$

para μ -quase todo $x \in X$, e,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int f_n(x) d\mu(x) = \inf_n \frac{1}{n} \int f_n(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x).$$

B.1.1 Expoentes de Lyapunov e de Morse realizados por integrais

Considere novamente o cociclo vetorial $a : \mathbb{T} \times X \rightarrow V$ sobre o fluxo $\phi_t : X \rightarrow X$ e a aplicação contínua $q : x \in X \mapsto q(x) = a(1, x) \in V$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita. Pela propriedade de cociclo (1.1), tem-se que, para $N \in \mathbb{Z}^+$,

$$a(N, x) = \sum_{j=0}^{N-1} q(\phi_j(x)).$$

Ou seja,

$$\lambda_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} q(\phi_j(x)). \quad (\text{B.4})$$

Dessa forma, pela proposição 1.1.3, item *iii*), o expoente de Lyapunov de a em $x \in X$ é dado por

$$\lambda(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} q(\phi_j(x)).$$

Note, que pelo teorema de Birkhoff (teorema B.1.11), dada uma medida $\mu \in \mathbb{P}_{\text{inv}}(X)$ ergódica, o expoente de Lyapunov existe e é dado por

$$\lambda(x) = \int_X q d\mu.$$

Já no próximo resultado (veja proposição 1.21, capítulo 1, pág. 33 de [31]), cada expoente de Morse (logo, cada expoente de Lyapunov pela proposição 1.1.4) admite uma representação integral por uma medida de probabilidade invariante. A prova deste resultado é uma adaptação do teorema de Krylov-Bogolyubov (veja teorema B.1.3) para cadeias.

Proposição B.1.13 *Dado um subconjunto $\mathcal{M} \subset X$, para cada expoente de Morse $\lambda \in \Lambda_{\text{Mo}}(\mathcal{M})$ existe uma medida de probabilidade invariante $\mu \in \mathbb{P}_{\text{inv}}(\mathcal{M})$ tal que*

$$\lambda = \int_{\mathcal{M}} q d\mu.$$

Além disso, se μ é ergódica, então $\lambda = \int_{\mathcal{M}} q d\mu$ é um expoente de Lyapunov.

Demonstração: Seja ζ uma (ε, T) -cadeia em \mathcal{M} com tempos inteiros e $T \geq 1$. Defina o seguinte funcional linear em $C(X)^*$, dado pela seguinte combinação convexa

$$L_\zeta(f) := \sum_{j=0}^{N-1} \frac{T_j}{T(\zeta)} L_{T_j, x_j}, \quad f \in C(X),$$

onde L_{T_j, x_j} , $j = 0, \dots, N-1$, é o funcional linear definido em (B.2). É fácil ver que $L_\zeta(f) \geq 0$, para todo $f \in C(X)$, e que $\|L_\zeta\| = 1$. Assim, pelo teorema de representação de Riesz, existe uma rede de probabilidades $(\nu_\zeta) \subset \mathbb{P}(X)$ tais que

$$L_\zeta(f) = \int_X f d\nu_\zeta.$$

Agora, pela combinação convexa (1.4) e pela equação (B.4),

$$\begin{aligned} \lambda(\zeta) &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{T_j}{T(\zeta)} \lambda_{T_j}(x_j) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{T_j}{T(\zeta)} \left(\frac{1}{T_j} \sum_{i=0}^{T_j-1} q(i \cdot x_j) \right). \end{aligned}$$

Ou seja, $\varphi(\lambda(\zeta)) = L_\zeta(\varphi \circ q)$, $\varphi \in V^*$.

Procedendo como na demonstração do teorema de Krylov-Bogolyubov, tem-se que a rede (ν_ζ) converge para uma medida μ ϕ -invariante tal que $\varphi(\lambda) = \int_X (\varphi \circ q) d\mu$, $\varphi \in V^*$, o que mostra o resultado.

A última afirmação segue claramente do teorema B.1.8, item *iii*). □

B.2 Desintegração de Medidas

Seja Y um espaço topológico separável munido de uma medida μ . Denote por $\mathbb{M}^+(Y)$ o espaço das medidas positivas nos borelianos de Y .

Definição B.2.1 *Seja X um espaço topológico. Uma aplicação $f : Y \rightarrow X$ é μ -própria se f é μ -mensurável e se todo ponto $x \in X$ admite uma vizinhança V tal que $\mu(f^{-1}(V)) < +\infty$.*

Exemplo: Sejam Y e X espaços topológicos como na definição acima. Uma aplicação $f : Y \rightarrow X$ contínua e própria (ou seja, a imagem inversa por f de qualquer compacto em X é compacta) é μ -própria, para toda medida μ localmente finita. De fato, seja $x \in X$; como f é própria, segue que $f^{-1}(x)$ é compacto. Seja U uma vizinhança aberta de $f^{-1}(x)$. Tomando $V = X \setminus f(Y \setminus U)$, tem-se que V é aberto em X (já que f é fechada), contém x e $\mu(f^{-1}(V)) \leq \mu(U) < +\infty$. □

Considere agora que $\nu = \pi_*(\mu)$, onde $\pi : Y \longrightarrow X$ é uma aplicação qualquer e ν é uma medida em X .

Definição B.2.2 *A medida μ em Y admite uma desintegração se existe uma aplicação mensurável $x \in X \longmapsto \mu_x \in \mathbb{M}^+(Y)$ tal que*

$$\mu(A) = \int_X \mu_x(A) d\nu(x),$$

onde A é um boreliano de Y .

O próximo resultado, provado em [5], capítulo IX, proposição 13, pág. 39, afirma que, para aplicações π μ -próprias, sempre existe uma desintegração de $\nu = \pi_*(\mu)$.

Proposição B.2.3 *Sejam Y um espaço metrizável, munido de uma medida μ , e X um espaço topológico com uma medida ν . Considere $\pi : Y \longrightarrow X$ uma aplicação μ -própria. Então, μ admite uma desintegração $x \in X \longmapsto \mu_x \in \mathbb{M}^+(Y)$. Além disso, para todo $x \in X$, a medida μ_x possui suporte sobre $\pi^{-1}(x)$.*

Referências Bibliográficas

- [1] Alves, L., *Expoentes de Lyapunov e o Teorema Ergódico Multiplicativo de Osledec*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas (2007).
- [2] Alves, L., San Martin, L.A.B., *Multiplicative ergodic theorem on flag bundles*, em preparação.
- [3] Braga Barros, C.J., San Martin, L.A.B., *Chain transitive sets for flows on flag bundles*, Forum Math. 19, 19-60 (2007).
- [4] Bochi, J., Viana, M., *Uniform (projective) hyperbolicity or no hyperbolicity: a dichotomy for generic conservative maps*, Annales de L' Institut Henri Poincaré 19, v. 1, p. 113-123 (2002).
- [5] Bourbaki, N., *Intégration*, Hermann, Paris (1963).
- [6] Colonius, F., Fabbri, R., Johnson, R., *Chain recurrence, growth rates and ergodic limits*, Ergodic Theory & Dynamical Systems, v. 27, p. 1-16 (2007).
- [7] Colonius, F., Kliemann, W., *The dynamics of control*, Birkhäuser, Boston (2000).
- [8] Conley, C., *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Conf. Ser. in Math, 38, American Mathematical Society (1978).
- [9] Duistermat, J.J., Kolk, J. A. C., Varadarajan, V. S., *Functions, flows and oscillatory integral on flag manifolds*, Compositio Math. 49, 309-398 (1983).

- [10] Feres, R., *Dynamical systems and semisimple Groups: an introduction*, Cambridge University Press (1998).
- [11] Ferraiol, T., Patrão, M., Seco, L., *Jordan decomposition and dynamics on flag manifolds*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A (2010).
- [12] Guivarch, Y., Ji, L., Taylor, J. C., *Compactifications of symmetric spaces*, Springer-Verlag (1998).
- [13] Helgason, S., *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, New York (1978).
- [14] Herman, M., *Construction d'un difféomorphisme minimal d'entropie topologique non nulle*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., 65-76 (1981).
- [15] Herman, M., *Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'Arnold et de Moser sur le tore de dimension 2*, Comment Math. Helvetici 58, 453-502 (1983).
- [16] Link, G., *Limit sets of discrete groups acting on symmetric spaces*, PhD thesis, Fakultät für Mathematik der Universität Karlsruhe (2002).
- [17] Kaimanovich, V.A., *Lyapunov exponents, symmetric spaces, and a multiplicative ergodic theorem for semisimple Lie groups*, J. Soviet Math. 47, 2387-2398 (1989).
- [18] Katok, A., Hasselblatt, B., *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press (1995).
- [19] Kingman, J. F. C., *Subadditive processes*, in *École d'été des probabilités de Saint-Flour*, Lecture Notes in Math., n° 539, Berlin, Springer (1976).
- [20] Kobayashi, S., Nomizu, K., *Foundations of differential geometry*, vol.I, InterScience Publishers (1963).

- [21] Lyapunov, A. M., *General problem of stability of motion*, Collected Works (in Russian), Vol. 2, Moscow-Leningrad , 7-263 (1956).
- [22] Oseledets, V. I., *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*, Trans. Moscow Math. Soc. 19, 197-231 (1968).
- [23] Patrão, M., *Semigrupos em Fibrados Flag e seus Semigrupos de Sombreamento*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas (2006).
- [24] Royden, H. L., *Real analysis*, Second edition, The Macmillan Company, New York (1968).
- [25] San Martin, L. A. B., *Álgebras de Lie*, Editora da Unicamp, Campinas (2010).
- [26] San Martin, L. A. B., *Maximal semigroups in semi-simple Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc., 353, 5165-5184 (2001).
- [27] San Martin, L. A. B., *Nonexistence of invariant semigroups in affine symmetric spaces*, Math. Ann. 321, 587-600 (2001).
- [28] Selgrade, J., *Isolated invariant sets for flows on flag bundles*, Trans. Amer. Math. Soc. 203, 359-390 (1975).
- [29] San Martin, L. A. B., Tonelli, P. A., *Semigroups actions on homogeneous spaces*, Semigroup Forum 50, 59-88 (1995).
- [30] Seco, L., San Martin, L. A. B., *Morse and Lyapunov spectra and dynamics on flag bundles*, Ergodic Theory & Dynamical Systems, v. 23, p. 1 (2009).
- [31] Seco, L., *Expoentes de Morse Vetoriais e Semifluxos em Fibrados Flag*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas (2007).
- [32] Varadarajan, V. S., *Harmonic analysis on real reductive groups*, Lecture Notes in Mathematics 576, Springer-Verlag (1977).

- [33] Verdi, M. A., *Conjuntos de Controle em Órbitas Adjuntas e Compactificações Ordenadas de Semigrupos*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas (2007).
- [34] Warner, G., *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I*, Springer-Verlag (1972).