PERÍMETROS DE MEDIDA MÍNIMA
COM OBSTÁCULOS SUTIS

RICARDO APPARICIO BACCI

Dissertação apresentada
ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação
da Universidade Estadual de Campinas
como requisito parcial para obtenção do título de
Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio

Campinas
- 1976 -

Para Leny

INDICE

INTRODUÇÃO

Nos problemas de integração K dimensional num espaço de dimensão n, uma das dificuldades que surge é que são envolvidos elementos de dimensões diferentes. As medidas apropriadas para tais casos são chamadas medidas dimensionais. Estamos interessados de modo especial na medida σ, introduzida por De Giorgi em 1972 e construida mediante perímetros (C.DG.P.[1]).

Como fundamento a essa teoria, De Giorgi desenvolveu em 1954-55 o conceito de perímetro de um conjunto (DG[1],DG[2]). Em 1964 Miranda generalizou este conceito para conjuntos de perímetro localmente finito (M[1]), e em 1971 aplicou tais idéias no estudo de problemas que envolviam perímetro mínimo com obstáculos (M[2]). Em 1972 De Giorgi, juntamente com Piccinini e Colombini, desenvolveram o problema de perímetro mínimo com obstáculos sutis (C.DG.P[1]) usando a medida dimensional σ.

O trabalho desenvolvido por nós teve como objetivo principal reunir os conceitos básicos e os resultados fundamentais da Teoria do Perímetro, considerando também uma aplicação dessa teoria na solução de problemas de área mínima.

No Capítulo I fizemos uma exposição suscinta da teoria da medida, dando destaque para os conceitos e propriedades de medida exterior, medida de Radon e de Hausdorff. As demonstrações não foram feitas, pois as mesmas se encontram em qualquer livro clássico de teoria da medida.

No Capítulo II estudamos os conjuntos de perímetros localmente finitos e suas propriedades fundamentais, como o teorema de compacidade (M[1]), o teorema de semicontuinidade do perímetro e a existência do boreliano mínimo para o problema de obstáculos.

No Capítulo III introduzimos a classe de conjuntos Gn e a partir daí definimos a medida (n-1)-dimensional σ, demonstran do algumas de suas propriedades e sua relação com a medida dimensional de Hausdorff.

Como aplicação desta medida estudamos no Capítulo IV, um problema de perímetro mínimo com obstáculos de medida (Lebesgue) nula, utilizando o funcional $F(B;A,E,L)=P(B,A)+\sigma((E-B)\cap A)+\sigma((L\cap B)\cap A)$ mais geral que o perímetro $P(B,A)=\sup\{\int_A \operatorname{div} g\phi_B dx, g\in[C_0^1(A)]^n \,|g|\leq 1\}$ onde A é um aberto de $\mathbb{R}^n$, E,e L borelianos disjuntos e $B\subset\mathbb{R}^n$.

Verificamos a semi-continuidade de F e com o teorema da Compacidade mostramos que existe um mínimo em Gn para esse funcional. Finalmente no Capítulo IV fizemos uma comparação entre os diferentes mínimos do problema de Perímetro com obstáculos.

Facilitou-nos bastante esta redação o apoio e estímulo que recebemos dos colegas Rodney Carlos Bassanezi e Ivan Resina aos quais queremos externar nossos agradecimentos.

Gostaria também de agradecer ao Prof.Ubiratan D'Ambrosio pela colaboração e orientação que nos prestou.

CAPÍTULO I
NOÇÕES GERAIS SOBRE TEORIA DA MEDIDA

Neste capítulo reunimos alguns conceitos e resultados da Teoria da Medida. De modo particular aqueles relacionados com a medida exterior. Assim é que definiremos medida aditiva e subaditiva, medida exterior gerada, medida de Radon e de Hausdorff. Para um estudo mais aprofundado deste assunto veja H [1] e F [1].

Definição 1.1 Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos e α uma função definida sobre $\mathcal{F}$ com valores em $[0,+\infty]$. Assumiremos sempre que $\phi \in \mathcal{F}$ e que $\alpha(\phi)=0$. Diremos que α é *numeravelmente subaditiva.* (NSA) se: para todo $F \in \mathcal{F}$ e toda sequência $\{F_h\}_{h \in N} \subset \mathcal{F}$, com $\bigcup_{h=1}^{\infty} F_h \supset F$ vale

$$\alpha(F) \leq \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(F_h)$$

Proposição 1.1 *Seja α NSA sobre $\mathcal{F}$ então se F' e F'' pertencem a $\mathcal{F}$ e $F' \subseteq F''$ temos que $\alpha(F') \leq \alpha(F'')$.*

Demonstração: consequência da definição 1.1.

Proposição 1.2 *Se $\{\alpha_j\}_{j \in J}$ é uma família qualquer de funções NSA definidas sobre $\mathcal{F}$ então para todo $F \in \mathcal{F}$:*

$\beta(F) = \sup_j \alpha_j(F)$ é também NSA sobre $\mathcal{F}$.

Demonstração: C.DG.P [1]

Definição 1.2 Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de um conjunto fechado E. A função $\alpha: \mathcal{F} \to [0,+\infty]$ é *completamente aditiva sobre* $\mathcal{F}$ se α é NSA sobre $\mathcal{F}$ e vale a seguinte propriedade: se $F_h \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{h \geq 1} F_h \in \mathcal{F}$, $F_i \cap F_j = \phi$ para $i \neq j$ então

$$\alpha\left(\bigcup_{h\geq 1} F_h\right) = \sum_{h\geq 1} \alpha(F_h)$$

Definição 1.3 Dado um conjunto E, diremos que α é uma *medida exterior sôbre E* se ela for numeravelmente subaditiva sobre $\mathcal{F}=P(E)$.

Definição 1.4 Diremos *medida exterior gerada por* α definida sobre $\mathcal{F}$ a máxima medida exterior definida sobre subconjuntos de $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F$, cuja restrição a $\mathcal{F}$ seja majorada por α.

Notação:

$$\beta_\alpha = \sup\{\beta/\beta \text{ é medida exterior sobre } \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F \ ,$$

$$\beta(F) \leq \alpha(F),\ \forall F\in\mathcal{F}\}$$

Observação 1

$$\beta_\alpha(X) = \inf\{\sum_{h\geq 1} \alpha(F_h) : F_h\in\mathcal{F},\ \bigcup F_h \supset X\}$$

com a convenção que $\inf\phi = +\infty$.

Observação 2

$$\beta_\alpha/_{\mathcal{F}} = \alpha \quad \text{see} \quad \alpha \text{ é NSA}$$

Definição 1.5 Seja β uma medida exterior definida sobre E. *Um conjunto $G \subseteq E$ se diz β-mensurável* (ou mensurável segundo Caratheodory) se para todo $F\in\mathcal{F}$, com $F \cap G\in\mathcal{F}$ e $F-G\in\mathcal{F}$ vale

$$\beta(F) = \beta(F \cap G) + \beta(F-G) \ .$$

Evidentemente E e ϕ são β-mensuráveis.

<u>Teorema 1.3</u> *Se β é uma medida exterior sobre E e $M_E = M \subset P(E)$ é a família de todos conjuntos β-mensuráveis então*

a) M_E é fechada em relação à união e intersecção enumerável e ao complemento

b) β/M é completamente aditiva

<u>Demonstração</u>: C.DG.P. [1]

<u>Observação 3</u> Seja $\alpha: \mathcal{F} \to [0,+\infty]$, cujo domínio é $A = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$. Se β_α é uma medida exterior sobre A, gerada por α, então se $M \subset A$ é α-mensurável implica que M é β_α-mensurável.

Veremos a seguir a medida de Hausdorff gerada por $\alpha: \mathcal{F} \to [0, +\infty]$. Seja $\mathcal{F} \subset P(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha(F) = (\mathrm{diam}\ F)^k$ para $0 < k \in \mathbb{R}$. Para todo $r > 0$, indicaremos com

$$\mathcal{F}_r = \{F \in \mathcal{F}: \mathrm{diam}\ F < r\}$$

$$\alpha_r = \alpha/\mathcal{F}_r$$

$$\beta_{\alpha_r} = \text{medida exterior sobre } \mathbb{R}^n \text{ gerada por } \alpha_r.$$

Assim $\beta_{\alpha_r}(F) = \inf\{\sum_{h=1}^{\infty} (\mathrm{diam}\ F_h)^k : F_h \in {}_r, \bigcup F_h \supset F\}$. Observemos que $\sup \beta_{\alpha_r}$ também é uma medida exterior, que notaremos por H_k^n. Como para todo r_1 e r_2 com $0 < r_1 < r_2$ vale $\beta_{\alpha_{r_1}} \geq \beta_{\alpha_{r_2}}$ podemos então escrever:

$$H_k^n(F) = \sup_{r>0} \beta_{\alpha_r}(F) = \lim_{r \downarrow 0} \beta_{\alpha_r}(F) \text{ para } F \subset \mathbb{R}^n$$

<u>Observação 1</u> $H^n_{n+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) = 0 \ \forall \varepsilon > 0$

<u>Demonstração:</u> Basta provar que $H^n_{n+\varepsilon}(C_L) = 0$, para todo $L > 0$, onde $C_L = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < L,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Logo

$$H^n_{n+\varepsilon}(C_L) \leq \lim\ \inf \{\sum_{h=1}^{\infty} (\mathrm{diam} X_h)^{n+\varepsilon} : \cup X_h \supset C_L,\ \mathrm{diam}\ X_h < \frac{2L\sqrt{n}}{N}\} \leq$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N^n (2L\sqrt{n})^{n+\varepsilon}}{N^{n+\varepsilon}} = \lim_{N\to\infty} \frac{(2L\sqrt{n})^{n+\varepsilon}}{N^{\varepsilon}} = 0$$

<u>Observação 2</u> Se $X \subset \mathbb{R}^n$ e $0 < H^n_k(X) < +\infty$ então $H^n_{k+\varepsilon}(X) = 0$ e $H^n_{k-\varepsilon}(X) = +\infty, \forall \varepsilon > 0$.

<u>Demonstração</u>:

$$H^n_{k+\varepsilon}(X) = \lim_{r\to 0} \inf\{\sum_{h=1}^{\infty} (\mathrm{diam}\ X_h)^{k+\varepsilon} : \cup X_h \supset X,\ \mathrm{diam} X_h < r\}$$

Como $\sum_h (\mathrm{diam}\ X_h)^{k+\varepsilon} \leq (\mathrm{diam}\ X_h)^k \cdot r^{\varepsilon}$ então

$$\inf \{\sum_h (\mathrm{diam}\ X_h)^{k+\varepsilon} : \cup X_h \supset X, \mathrm{diam}\ X_h < r\} \leq$$

$$\leq r^{\varepsilon} \inf \{\sum_h (\mathrm{diam}\ X_h)^k : \cup X_h \supset X,\ \mathrm{diam} X_h < r\} \leq$$

$$\leq r^{\varepsilon} H^n_k(X)$$

e portanto

$$H^n_{k+\varepsilon}(X) \leq \lim_{r\to 0} r^{\varepsilon} H^n_k(X) = 0$$

Para provar que $H^n_{k-\varepsilon}(X) = +\infty$, fazemos o mesmo tipo de raciocínio e encontramos:

$$H^n_{k-\varepsilon}(X) \geq \lim_{r\to 0^+} r^{-\varepsilon} H^n_k(X) = +\infty \quad .$$

A dimensão de Hausdorff de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é o número real definido por:

$$\dim_H X = \inf_{(H_k^n(X)=0)} K = \sup_{(H_k^n(X)=+\infty)} K$$

Observação 3: Para todo $k_1 < k_2$ vale $H_{k_1}^n \geq H_{k_2}^n$.

Observação 4 Se $k=0$, definimos $H_0^n(X)$=número de pontos de X. E se $K < 0$, definimos $H_k^n(X)=+\infty$, para todo $X \neq \phi$.

Logo as H_k^n são significativas para $0 \leq k \leq n$.

Definição 1.6 Para todo $X \subset \mathbb{R}^n$ e todo $k > 0$ definiremos a *medida de Hausdorff, k-dimensional por:*

$$H_k(X) = 2^{-k} W_k \, H_k^n(X) \quad ,$$

onde W_k é a medida da esfera unitária em $\mathbb{R}^k$.

Veremos agora algumas considerações sobre a Medida exterior num espaço métrico M.

(1) $\mathcal{B} \subseteq P(M)$ é uma família de Borel, se e somente se $\phi \in \mathcal{B}$ e valem as condições:

(i) $A \in \mathcal{B} \implies M - A \in \mathcal{B}$

(ii) $A_i \in \mathcal{B} \implies \bigcup A_i \in \mathcal{B}$

(iii) $A_i \in \mathcal{B} \implies \bigcap A_i \in \mathcal{B}$

(2) Com $\mathcal{B}(S)$ representamos a família de Borel gerada por S (menor família de Borel que contém S e satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) de (1)).

(3) Com $E(S)$ representamos a menor família contendo S, satisfazendo as condições (ii) e (iii) de (1), para todo $S \subset P(E)$. Portanto $S \subset E(S) \subset \mathcal{B}(S)$.

Lema 14 *Se S é tal que:* $A \in S \Rightarrow M-A \in E(S)$ então $E(S) = \mathcal{B}(S)$.
Demonstração: C.DG.P [1]

Teorema 1.5 *Seja M um espaço métrico e α a medida exterior sobre M, tal que os abertos são α-mensuráveis. Seja B um boreliano de M. Então se $\alpha(B) < +\infty$, para todo $\varepsilon > 0$ existe um fechado $C \subseteq B$ tal que* $\alpha(B-C) < \varepsilon$.

Demonstração: C.DG:P [1].

Teorema 1.6 *Se β é uma medida exterior sobre um espaço métrico M, aditiva sobre todo conjunto que tem distância positiva (isto é, $\beta(A) + \beta(B) = \beta(A \cup B)$ se $dist(A, B) > 0$), então todo conjunto fechado de M (portanto todo aberto de M) é β-mensurável.*

Demonstração C.DG.P [1].

Observação: Toda medida de Hausdorff é aditiva sobre todos os conjuntos com distância positiva. Então podemos enunciar a seguinte consequência do teorema 1.6.

"Todo boreliano é mensurável segundo Hausdorff e H_α/Borel é aditiva".

Definição 1.7: *Medida de Radon* sobre um espaço métrico M é uma função $\alpha: \mathcal{B}_0(M) \to [0, +\infty)$ que seja aditiva. Onde $\mathcal{B}_0(M) = \{B \subset M;\ B \text{ de Borel};\ \bar{B} \text{ compacto}\}$.

Proposição 1.7: *Se α é uma medida de Radon sobre M então vale a seguinte propriedade (P).*

$$(P) \quad \alpha(B) = \inf_{\substack{B \subset A \in \mathcal{B}_0(M) \\ A \text{ aberto}}} \alpha(A) = \sup_{\substack{C \subset B \\ C \text{ compacto}}} \alpha(C)$$

para todo B ε $_o(M)$. :

Demonstração: C.DG.P [1] .

O conhecimento dos valores de uma medida de Radon sobre os abertos relativamente compactos, determina o valor da mesma sobre os borelianos relativamente compactos. Este fato é particularmente interessante em $\mathbb{R}^n$, onde todo aberto pode ser obtido como união enumerável de cubos do tipo

$$\{x \in \mathbb{R}^n / \frac{m_i}{2^k} < x_i < \frac{m_i}{2^k} + \frac{1}{2^k}\} \qquad \text{onde } K \in N \quad ,$$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $m_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

O conhecimento do valor de μ sobre cubos do tipo acima, determina os valores de μ sobre qualquer conjunto de Borel limitado. Em particular se μ é invariante por translação basta conhecer o valor de μ sobre somente um de tais cubos. Segue-se, portanto que se α e μ são duas medidas de Radon sobre $\mathbb{R}^n$, invariantes por translação e α não é identicamente nula, então se tem:

$$\mu = \frac{\mu(\{x \in \mathbb{R}^n / 0 \leq x_i < 1\})}{\alpha(\{x \quad \mathbb{R}^n / 0 \leq x_i < 1\})} \cdot \alpha$$

Observações: A medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$ é a medida de Radon invariante por translação, que vale 1 sobre o cubo $\{x \in \mathbb{R}^n / 0 \leq x_i < 1\}$. As medidas de Hausdorff são aditivas sobre $\mathcal{B}_o$, portanto elas são de Radon.

Portanto se tem $H_n^n(X) = K.\mathrm{med}_n(X)$, isto é,

$$K = \frac{H_n^n(X)}{\mathrm{med}_n(X)}$$

CAPÍTULO II

CONJUNTO DE PERÍMETRO LOCALMENTE FINITO

Para o desenvolvimento deste capítulo, conservaremos as notações usadas no capítulo anterior e introduziremos algumas novas convenções. Assim, dados dois conjuntos B e B', a sua diferença simétrica será notada por $B \Delta B'$.

Se A é um aberto de $\mathbb{R}^n$, com a notação $B \subset\subset A$, indicaremos que B é um aberto de $\mathbb{R}^n$, $\overline{B}$ é um compacto e $\text{dist}(B, \partial A) > 0$, isto é, B é relativamente compacto em A.

Se $\{B_h\}$ é uma sequência de conjuntos mensuráveis, diremos que B_h *converge* a um conjunto B em $L^1(A)$ e notaremos por $B_h \to B$ em $L^1(A)$, se $\lim_{h\to\infty} \text{med}\left[(B_h \Delta B) \cap A\right] = 0$ ou seja, se $\lim_{h\to\infty} \int_A |\phi(x,B_h) - \phi(x,B)| = 0$, onde $\phi(x,B)$ é a função característica de B.

Do mesmo modo diremos que B_h *converge* a B em $L^1_{loc}(A)$, se para todo $K \subset\subset A$, $B_h \to B$ em $L^1(K)$.

Se para todo x, $\lim_{h\to\infty} \phi(x,B_h) = \phi(x,B)$ então $B_h \to B$. Analogamente $B_h \uparrow B$ significará que $B_h \subset B_{h+1}$ e $\bigcup_{h=1}^{\infty} B_h = B$, assim como $B_h \downarrow B$ significará que $B_{h+1} \subset B_h$ e $B = \bigcap_{h=1}^{\infty} B_h$.

Por $C_0^1(A)$ indicaremos o conjunto das funções contínuas com derivadas primeiras contínuas sobre A, cujo suporte é um compacto contido em A.

Com estas convenções, seja A um conjunto de $\mathbb{R}^n$, com fronteira bastante regular para que valha o teorema de Green:

$$\int_A \text{div } g(x)\,dx = \int_{\delta A} g.\nu(x) \; dH_{n-1}, \quad \forall g \in \left[C_0^1(\mathbb{R}^n)\right]^n \quad ; \qquad (1)$$

onde $\nu(x)$ é o vetor normal exterior, e $g.\nu(x)$ é g na direção da normal exterior.

Observe-que se tomarmos $|g(x)| \leq 1$, para todo x, com $g \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n$ então vale:

$$H_{n-1}(\delta A) = \sup\{\int_{\delta A} g(x)\, \nu(x)\, dH_{n-1} : g \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n, |g| \leq 1\}.$$

Logo usando a (1), podemos escrever

$$H_{n-1}(\delta A) = \sup\{\int_A \operatorname{div} g(x)\, dx : g \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n, |g| \leq 1\} \quad , \quad (2)$$

que nos sugere a seguinte definição.

<u>Definição 2.1</u> Se $E \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto mensurável, diremos *Perímetro* de E o valor (talvez $+\infty$) dado por:

$$P(E) = \sup\{\int_E \operatorname{div} g(x)\, dx : g \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n, \ |g| \leq 1\}$$

De Giorgi demonstrou o seguinte teorema: Se $P(E) < +\infty$ então existe um conjunto de Borel $\partial^* E \subset \partial E$ e para todo $x \in \partial^* E$ existe $\nu(x) \in \mathbb{R}^n$ com $|\nu(x)| = 1$ e $\nu(x)$ função de Baire, tal que

$$\int_E \operatorname{div} g(x)\, dx = \int_{\partial^* E} g(x) \nu(x)\, d\, H_{n-1}, \ \forall g \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n \quad ,$$

e portanto $P(E) = H_{n-1}(\partial^* E)$.

Consequentemente $H_{n-1}(\partial E) \leq P(E)$. Logo se $H_{n-1}(\partial E) < +\infty$ então $P(E) < +\infty$.

A recíproca, no entanto não vale, pois, se $\{B_{\rho_i}(x^{(i)})\}_i$ é uma sequência de bolas com centros em $\{x^{(i)}\}_i$, densa em $\mathbb{R}^n$ e com $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^{n-1} < +\infty$, provaremos que o conjunto $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\rho_i}(x^{(i)})$

tem as seguintes propriedades:

$$\text{(a)}\quad P(E) \leq n\ \omega_n \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^{n-1} < +\infty \quad ;$$

$$\text{(b)}\quad H_n(\delta E) = +\infty \quad ;$$

isto é, $P(E) < +\infty$ não implica $H_{n-1}(\delta E) < +\infty$.

De fato. Se $E_N = \bigcup_{i=1}^{N} B\rho_i(x^{(i)})$ então $P(E_N) \leq n\ \omega_n \sum_{i=1}^{N} \rho_i^{n-1}$ para todo inteiro N. Por outro lado, para toda $g\varepsilon\left[C_o^1(\mathbb{R}^n)\right]^n$ com $|g| \leq 1$ temos que:

$$\int_E \operatorname{div} g(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_{E_N} \operatorname{div} g(x)\,dx \leq \lim_{N\to\infty} \inf P(E_N) \quad ,$$

isto é,

$$P(E) < +\infty \quad .$$

Agora como $\mathbb{R}^n = E \cup \delta E$, e $H_n(E) \leq \omega_n \sum_{i=1}^{n} \rho_i^n < +\infty$ e $H_n(\mathbb{R}^n) = +\infty$ temos que $H_n(\delta E) = +\infty$ e portanto $H_{n-1}(\delta E) = +\infty$.

<u>Definição 2.2</u> O *Perímetro de um conjunto* B (boreliano) *em relação a um aberto* A de $\mathbb{R}^n$ é definido por:

$$P(B,A) = \sup_g \left\{ \int_A \operatorname{div} g\,\phi(x,B)\,dx : g\varepsilon\left[C_o^1(A)\right]^n,\ |g| \leq 1 \right\}$$

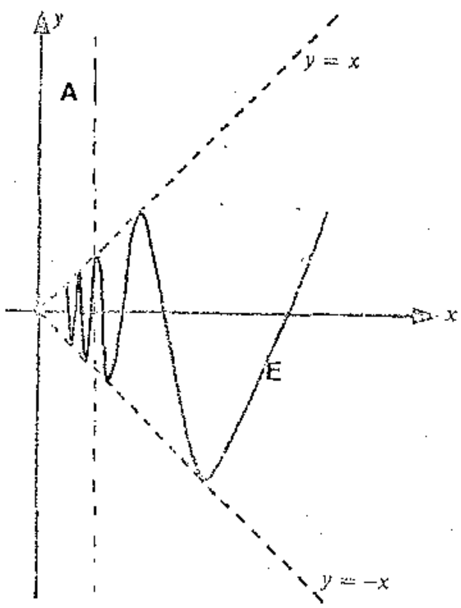
Se $A = \mathbb{R}^n$ essa definição coincide com a definição 2.1.

Se $P(B,A) < +\infty$ diremos que B tem perímetro finito relativamente a A.

Se $P(B,K) < +\infty$, para qualquer $K \subset\subset A$, diremos que B tem perímetro localmente finito em A.

Observação: Um conjunto E pode não ter perímetro finito em A mas ter perímetro localmente finito em A, onde $med(A) < +\infty$:

Exemplo: Seja $A = \{(x,y) \varepsilon \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1\}$, $f(x) = x \text{ sen } 1/x$; $x > 0$; $E = graf.f$



$P(E,A) = +\infty$

$P(E,K) < +\infty \ \forall K \subset\subset A$

Veremos agora algumas propriedades do perímetro de um conjunto em relação a um aberto do $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.1 *Se* $med[(B \Delta B') \cap A] = 0$ *então* $P(B,A) = P(B',A)$. *Em particular se* $med(B \cap A) = 0$ *então* $P(B,A) = 0$.

Demonstração: Pela definição 2.1, temos

$$P(B,A) = \sup_g \left\{ \int_A \operatorname{div} g\, \phi(x,B)\, dx : g \varepsilon [C_o^1(A)]^n ; \ |g| \leq 1 \right\}$$

$$P(B',A)=\sup_g\{\int_A \operatorname{div} g\ \phi(x,B')\,dx : g\in[C_o^1(A)]^n;\ |g|\le 1\}$$

Então utilizando propriedade do sup nas igualdades acima temos para $g\in[C_o^1(A)]^n$, $|g|\le 1$ que

$$|P(B,A)-P(B',A)|=\left|\int_A \operatorname{div} g\,\phi(x,B)\,dx-\int_A \operatorname{div} g\,\phi(x,B')\,dx\right|$$

$$=\left|\int_A \operatorname{div} g(\phi(x,B)-\phi(x,B'))\,dx\right|\le$$

$$\le\int_A |\operatorname{div} g|\ |\phi(x,B)-\phi(x,B')|\,dx \qquad (1)$$

como $|g|\le 1$ então $|\operatorname{div} g|\le M$.
E como med $[(B\Delta B')\cap A]=0$ então $\int_A |\phi(x,B)-\phi(x,B')|\,dx<\varepsilon/M$ para $\varepsilon>0$ e arbitrário portanto substituindo em (1) temos

$$|P(B,A)-P(B',A)|<\varepsilon$$

logo

$$P(B,A)=P(B',A)$$

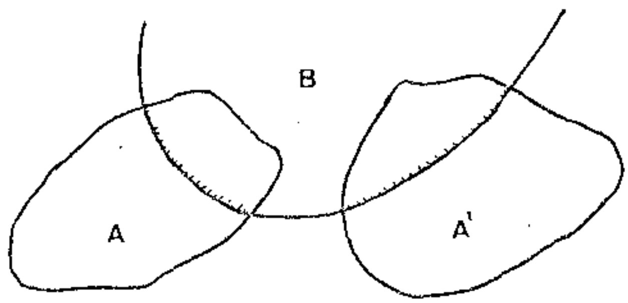
Em particular se med$(A\cap B)=0$ temos

$$P(B,A)=\sup\{\int_{A\cap B} \operatorname{div} g\ dx : g\in[C_o^1(A)]^n,\ |g|\le 1\}=0$$

cqd

<u>Proposição 2.2</u> *Se* A *e* A' *são abertos disjuntos então*

$P(B, A \cup A') = P(B,A) + P(B,A')$. *Mas se* A *e* A' *são abertos tais que* $A' \subseteq A$ *e* $\mathrm{dist}(B, A-A') > 0$ *então* $P(B,A) = P(B,A')$.



Demonstração: Para qualquer g_1 e g_2 : $g_1 \varepsilon C_o^1(A)$, $g_2 \varepsilon C_o^1(A')$ existe uma $g \varepsilon C_o^1(A \cup A')$ $g = g_1 + g_2$, tal que se $|g_1| \leq 1$, $|g_2| \leq 1$ então $|g| \leq 1$ e além disso vale sempre

$$\int_{A \cap B} \mathrm{div}\, g_1 dx + \int_{A' \cap B} \mathrm{div}\, g_2 dx = \int_{(A \cup A') \cap B} \mathrm{div}\, g \, dx$$

Observe que o segundo membro dessa relação é sempre menor ou igual ao $P(B, A \cup A')$ logo:

$$\int_{A \cap B} \mathrm{div}\, g_1 \, dx + \int_{A' \cap B} \mathrm{div}\, g_2 \, dx \leq P(B, A \cup A')$$

que vale para todo g_1 e g_2 satisfazendo as condições acima.

Então vale para o $\sup\limits_{g_1}$ e para o $\sup\limits_{g_2}$, o que nos permite concluir

$$P(B\ ,A) + P(B,A') \leq P(B, A \cup A') \qquad (1)$$

Por outro lado para qualquer $g \varepsilon C_o^1(A \cup A')$, $|g| \leq 1$ existe g_1 e g_2 tal que $g = g_1 + g_2$ com $|g_1| \leq 1$, $|g_2| \leq 1$ e

$g_1 \varepsilon C_o^1(A)$, $g_2 \varepsilon C_o^1(A')$.

Nestas condições vale sempre

$$\int_{(A \cup A') \cap B} \operatorname{div} g \, dx = \int_{A \cap B} \operatorname{div} g_1 dx + \int_{A' \cap B} \operatorname{div} g_2 dx$$

Tomando o $\sup\limits_{g_1}$ e depois o $\sup\limits_{g_2}$ veremos que o segundo membro dessa relação será sempre menor ou igual a $P(B,A)+P(B,A')$ logo:

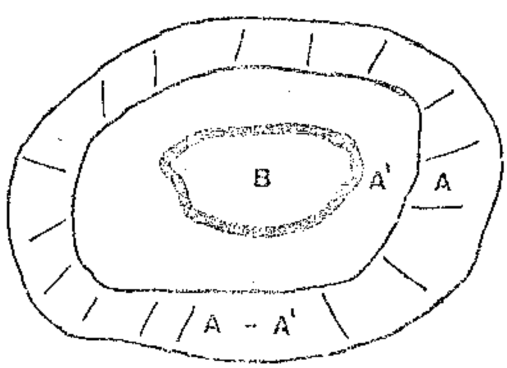
$$\int_{(A \cup A') \cap B} \operatorname{div} g \, dx \leq P(B,A)+P(B,A')$$

para todo g satisfazendo as condições acima, Então vale para $\sup\limits_{g}$ o que nos permite concluir

$$P(B,A \cup A') \leq P(B,A)+P(B,A') \qquad (2)$$

(1) e (2) nos dão a tese da proposição.

$2^{\underline{a}}$ Parte: $A' \subseteq A$ e $\operatorname{dist}(B, A - A') > 0$



Observe que $A = (A-A') \cup A'$ com $(A-A') \cap A' = \phi$, então aplicando a primeira parte da proposição temos

$$P(B,A) = P(B,A-A') + P(B,A')$$

mas $med(B \cap (A-A')) = 0$ logo $P(B,A-A')=0$ e $P(B,A)=P(B,A')$ cqd.

<u>Proposição 2.3</u> *Para todo aberto* A, *e para todo par de borelianos* B *e* B' *tem-se:*

$$P(B \cup B',A) \leq P(B,A) + P(B',A)$$

$$P(B \cap B',A) \leq P(B,A) + P(B',A)$$

<u>Demonstração</u>: Pela definição 2.2

$$P(B \cup B',A) = \sup\{\int_{A\cap(B\cup B')} \operatorname{div} g \, dx : g \in [C_o^1(A)]^n, |g| \leq 1\}$$

$$\leq \sup\{\int_{A\cap B} \operatorname{div} g \, dx : g \in [C_o^1(A)]^n, |g| \leq 1\} +$$

$$+ \sup\{\int_{A\cap B'} \operatorname{div} g \, dx : g \in [C_o^1(A)]^n, |g| \leq 1\} =$$

$$= P(B,A) + P(B',A)$$

e $$P(B \cap B',A) = \sup\{\int_{A\cap(B\cap B')} \operatorname{div} g \, dx, g \in [C_o^1(A)]^n, |g| \leq 1\}$$

$$\leq \sup\{\int_{A\cap(B\cup B')} \operatorname{div} g \, dx : g \in |C_0^1(A)|^n, |g| \leq 1\}$$

$$\leq P(B,A) + P(B',A)$$

<u>Proposição 2.4</u> *Seja* $\{A_h\}$ *uma seqüência de abertos de* $\mathbb{R}^n$ *com* $A_h \uparrow A$. *Então*

$$\lim_{h\to\infty} P(B,A_h) = P(B,A) \ ; \ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad ;$$

onde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *representa os borelianos contidos em* $\mathbb{R}^n$.

<u>Demonstração</u>:

1ª Parte: (1) $\lim\limits_{h\to\infty} P(B,A_h) \le P(B,A)$. De fato, pela definição 2.2 temos

$$\lim_{h\to\infty} P(B,A_h) = \lim_{h\to\infty} \left[\sup\left\{\int_{A_h \cap B} \operatorname{div} g \, dx, g \in [C_o^1(A_h)]^n, |g| \le 1\right\}\right]$$

$$\le \lim_{h\to\infty} \left[\sup\left\{\int_{A_h \cap B} \operatorname{div} g \, dx, g \in [C_o^1(A)]^n, |g| \le 1\right\}\right]$$

$$= \sup \left[\lim_{h\to\infty} \int_{A_h \cap B} \operatorname{div} g \, dx, \ g \in [C_o^1(A)]^n, \ |g| \le 1\}\right] =$$

$$= \sup\left\{\int_{A \cap B} \operatorname{div} g \, dx, \ g \in [C_o^1(A)]^n, \ |g| \le 1\right\} = P(B,A)$$

2ª Parte: (2) $P(B,A) \le \lim\limits_{h\to\infty} P(B,A_h)$. De fato pela definição 2.2. temos

$$P(B,A) = \sup\left\{\int_{A \cap B} \operatorname{div} g \, dx; g \in [C_o^1(A)]^n, \ |g| \le 1\right\}$$

$$= \sup\left\{\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)} \operatorname{div} g \, dx, g \in [C_o^1(A)]^n \ ; \ |g| \le 1\right\} \qquad (3)$$

onde $\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i = A$, $A'_j \cap A'_k = \phi$ para $j \neq k$, $\bigcup_{i=1}^{h} A'_i = A_h$

e
$$\sum_{i=1}^{h} P(B,A'_i) = P(B,A_h)$$

logo a expressão (3) será

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sup \left\{ \int_{A'_i \cap B} \operatorname{div} g \, dx, g \in [C_o^{1}(A)]^n, \ |g| \leq 1 \right\} =$$

$$= \lim_{h \to \infty} \sum_{i=1}^{h} \sup \left\{ \int_{A'_i \cap B} \operatorname{div} g \, dx, g \in [C_o^{1}(A)]^n, \ |g| \leq 1 \right\}$$

$$= \lim_{h \to \infty} \sum_{i=1}^{h} P(B,A'_i) = \lim_{h \to \infty} P(B,A_h)$$

cqd

<u>Proposição 2.5</u> *Se um conjunto* B *tem perímetro localmente finito em* A *então a função característica* $\phi(x,B)$ *admite derivada como medida e se tem ainda que*

$$P(B,K) = \int_K |D \ \phi(x,B)| \qquad \forall \ K \subset\subset A$$

isto é, a $P(B,K)$ *é igual a variação total da medida vetorial* $D_i \ \phi(x,B)$ *sobre* K.

<u>Demonstração</u>: Por hipótese temos

$$P(B,K) = \sup \left\{ \int_K \operatorname{div} g \ \phi(x,B) \, dx : g \in [C_o^{1}(K)]^n \ \ |g| \leq 1 \right\} < + \infty$$

$\forall \ K \subset\subset A$

Seja $F_i(g) = \int_K \phi(x,B) \dfrac{\partial g_i}{\partial x_i} \, dx : \ g \in [C_o^1(K)]^n \ , \ |g| \leq 1$

com $g = (g_1, \ldots, g_n)$.

Se suporte de g está contido em K e $|g| \leq 1$, então suporte de $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_i}$ também está contido em K e

$$|F_i(g)| \leq P(B,K) < +\infty$$

Seja $\Psi = \dfrac{g}{\max|g|}$ logo $|\Psi| \leq 1$ e portanto

$$|F_i(\Psi)| \leq P(B,K)$$

e daí

$$|F_i(g)| \leq P(B,K) \max|g|$$

Logo F_i é um funcional linear contínuo em relação à convergência de g, e pelo teorema de Riesz temos

$$F_i(g) = \int_K g_i D_i \; \phi(x,B) \; dx$$

onde $D_i \; \phi(x,B)$ é a medida derivada no sentido da distribuição. Obtemos desta maneira n medidas $D_1 \; \phi(x,B), \ldots, D_n \; \phi(x,B)$ o que implica que $\phi(x,B)$ tem derivada medida.

Agora como $\displaystyle\int_K \operatorname{div} g \; \phi(x,B)dx = \int_K \sum_{i=1}^{n} D_i g \; \phi(x,B)dx$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_K D_i g \; \phi(x,B)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_K g_i \; D_i \; \phi(x,B) \; dx$$

Tomando-se o sup em g em ambos os membros de

$$\int_K \operatorname{div} g \; \phi(x,B)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_K g_i \; D_i \; \phi(x,B)dx$$

considerando $K \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} K_h$ com $K=K_1$ e $K_h = \phi$ para $h > 1$ temos

$$P(B,K) = \int_K |D \quad \phi(x,B)|$$

onde $\int_K |D\,\phi(x,B)|$ é a variação total da medida vetorial $D\phi(x,B)$.

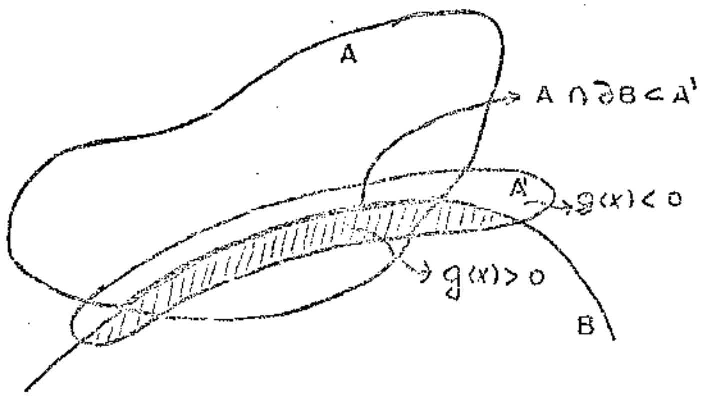
<u>Definição 2.3</u> *Um conjunto* B *é de classe* Γ^1 *em relação ao aberto* $A \subset \mathbb{R}^n$ (notação $B \in \Gamma^1(A)$) se existem:

a) um aberto A' tal que $A \cap \partial B \subseteq A'$

b) uma função $g(x) \in C^1(A)$ tal que

$$B \cap A' = \{x: x \in A';\ g(x) \geq 0\}$$

e além disso, para todo $x \in \partial B \cap A$ temos $|Dg(x)| \neq 0$.



<u>Observação</u>: Se B é de classe $\Gamma^1(A)$ então:

a) $P(B,K) < +\infty \ \forall K \subset\subset A$

b) $\forall K \subset\subset A$ tem-se $\int_K D_i\,\phi(x,B) = \int_{\partial B \cap K} \gamma_i \, d\,H_{n-1}$

onde γ é o vetor normal externo a ∂B.

c) $\int_K |D\ \phi(x,B)| = H_{n-1}(\partial B \cap K)$

d) $P(B,A) = H_{n-1}(\partial B \cap A)$

Como $|Dg(x)| \neq 0$ para todo x pertencente a $\partial B \cap A$, então em pelo menos uma direção h, $\frac{\partial g}{\partial x_h} \neq 0$, e nessa direção $\partial B \cap A$ é o gráfico de uma função C^∞. Assim sendo $H_{n-1}(\partial B \cap K) < +\infty$ para todo $K \subset\subset A$.

Além de $|Dg(x)| \neq 0$ em $\partial B \cap A$, também sabemos que $\partial B \cap A = \{x : g(x) = 0\}$ sendo portanto uma superfície regular que satisfaz as hipóteses do teorema de Green, então:

$$\int_K \phi(x,B)\, D_i g\, dx = -\int_{\partial B \cap K} g\, \gamma_i\, dH_{n-1} \qquad (1)$$

e

$$P(B,K) = H_{n-1}(\partial B \cap K) < +\infty \quad ,$$

que pela proposição 2.5, obtemos

$$P(B,K) = \int_K |D\phi(x,B)| \quad ,$$

logo

$$\int_K |D\phi(x,B)| = H_{n-1}(\partial B \cap K) \quad . \qquad (2)$$

Agora na demonstração da proposição 2.5 vimos que

$$F_i(g) = \int_K \phi(x,B)\, D_i g\, dx = -\int_K g\, D_i\, \phi(x,B) \qquad (3)$$

e comparando (1) e (3) temos

$$\int_K Di\ \phi(x,B) = \int_{B \cap K} \gamma_i \, dH_{n-1}$$

Finalmente, como consequência de (2) temos

$$P(B,A) = H_{n-1}(\partial B \cap A)$$

Veremos agora uma generalização da definição do P(B,A).

<u>Definição 2.4</u> Para toda $f \in L^1(A)$

$$v(f,A) = \sup \left\{ \int_A [\operatorname{div} g \cdot f]\, dx : g \in [C_0^1(A)]^n,\ |g| \leq 1 \right\}$$

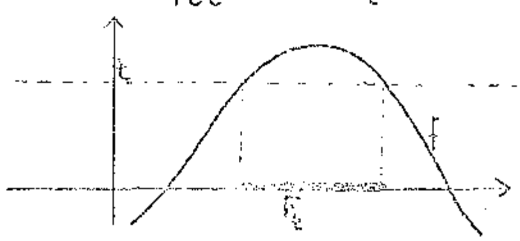
Observe que v(f,A) é a generalização da definição de P(B,A) pois se $f=\phi(x,B)$ segue-se que

$$v(\phi(x,B),A) = P(B,A)$$

<u>Lema 2.6</u>

$$v(f,A) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(F_t,A)\,dt$$

para $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *e aberto*, $f \in L^1_{loc}(A)$ *e* $F_t = \{x : x \in A : f(x) \geq t\}$



Em M[3] está demonstrado teoremas 1.3, 1.4, 1.6 que: se $f \in L^1_{loc}(A)$, A aberto de $\mathbb{R}^n$ então:

$$\int_A |Df|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{n-1}(A \cap f^{-1}(t))\ dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H_{n-1}(\partial\{x\varepsilon A : f(x) \geq t\}\ dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H_{n-1}(\partial\ F_t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P(F_t, A)dt$$

E em Federer temos que se $f\varepsilon C^1(A)$ então $v(f,A)=\int_A |Df|dx$. Portanto fica demonstrado o lema.

Lema 2.7 *Sendo:* A *um aberto de* $\mathbb{R}^n$, $u(x)$ *uma função de* $C^1(A)$ *limitada sobre* A *e* $M = \sup_{x\varepsilon A} |u(x)|$, *temos que, para todo boreliano* B *de perímetro finito em* A *a seguinte majoração:*

$$v[(u.\phi(x,B)),A] \leq M.P(B,A) + \int_{B\cap A} |Du|dx$$

Demonstração: Pela definição 2.4

$$v[(u.\phi(x,B)),A] = \sup\{\int_A \operatorname{div} g.u(x).\phi(x,B)\ dx :$$

$$g\varepsilon[C_0^1(A)]^n\ ;\ |g| \leq 1\}$$

como

$$\operatorname{div}\ (g.u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(ug_i) =$$

$$= u\ \operatorname{div}\ g + \langle Du, g\rangle \quad ,$$

temos:

$$v[(u\phi(x,B)),A] \leq \sup\ \{\int_A \operatorname{div}(gu)\phi(x,B)dx : g\varepsilon[C_0^1(A)]^n, |g| \leq 1\}$$

$$+ \sup \left\{ \int_A |Du| \; |g| \; \phi(x,B)dx ; g \in [C_o^1(A)]^n, \; |g| \leq 1 \right\}$$

$$\leq M \sup \left\{ \int_A \operatorname{div} \left[\frac{g(x)u(x)}{M} \right] \phi(x,B)dx : g \in [C_o^1(A)]^n, |g| \leq 1 \right\}$$

$$+ \int_{B \cap A} |Du| dx$$

onde

$$\left| \frac{g(x)u(x)}{M} \right| \leq 1 \text{ se } M = \sup_{x \in A} |u(x)|$$

logo pela definição 2.2, temos:

$$v[(u.\phi(x,B)),A] \leq M.P(B,A) + \int_{B \cap A} |Du| dx$$

cqd

Teorema 2.8: *Sejam* A *um aberto de* $\mathbb{R}^n$; B *um boreliano de* $\mathbb{R}^n$; $f \in C^1(A)$ *com* $0 \leq f(x) \leq 1$; $F_t = \{x \in B \; ; \; f(x) \leq t\}$. *Então*

$$\int_0^1 P(F_t, A) dt \leq \int_{A \cap B} |Df| dx + P(B,A)$$

Demonstração:

$$F_t = \{x ; x \in B, f(x) \geq t\} = \{x ; x \in A, \; f(x).\phi(x,B) \geq t\}$$

Pelo Lema 2.6 temos $v(f(x).\phi(x,B),A) \geq \int_0^1 P(F_t,A)dt$.

Pelo Lema 2.7 temos $v(f(x).\phi(x,B),A) \leq P(B,A) + \int_{A \cap B} |Df| dx$

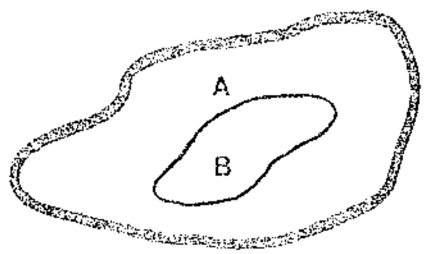
pois $M = \sup |f(x)| = 1$.

Então pelos Lemas 2.6 e 2.7 temos

$$\int_0^1 P(F_t,A)\,dt \leq P(B,A) + \int_{A \cap B} |Df|\,dx \qquad \text{cqd}$$

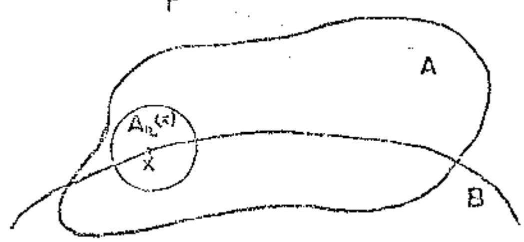
Observações:

1) Se A é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $B \subset K \subset\subset A$ então $P(B)=P(B,A)$



2) Se $P(B,K) < +\infty$ $\forall K \subset\subset A$ e se $\text{dist}(x,\partial A) > r > 0$ então:

$$P(B \cap A_r(x)) < +\infty$$



Estes fatos permite-nos extender as propriedades locais da fronteira reduzida de um conjunto de perímetro finito ao caso de um conjunto de perímetro localmente finito.

Definição 2.5 Dado um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$, diremos que um ponto x pertence à *fronteira reduzida* de B, e indicaremos por $x \in \partial^* B$, se para qualquer $r > 0$ temos $P(B, A_r(x)) < +\infty$ e existe finito o limite

$$\gamma(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{A_\varepsilon(x)} D\,\phi(x,B)}{\int_{A_\varepsilon(x)} |D\,\phi(x,B)|} \qquad \text{onde } |\gamma(x)| = 1$$

Observe que se $x \in \partial^* B$ então

$$\lim \frac{\text{med}(B \cap A_\varepsilon(x))}{\text{med } A_\varepsilon(x)} = \frac{1}{2}$$

e se $x \notin \partial^* B$ então $\gamma(x) = 0$.

<u>Teorema 2.9</u> *Se B tem perímetro localmente finito sobre um aberto A, então*

$$P(B,A) = H_{n-1}\left[\partial^* B \cap A\right] = \int_{\partial^* B \cap A} |D\,\phi(x,B)|$$

<u>Prova</u>:

$$P(B,A) = \int_A |D\,\phi(x,B)| \overset{(*)}{=} \int_A |\gamma(x)|\, dH_{n-1} =$$

$$= \int_{A \cap \partial^* B} |\gamma(x)|\, dH_{n-1} = H_{n-1}(A \cap \partial^* B)$$

<u>Teorema 2.10</u> (*Compacidade*) *Seja $\{B_s\}$ uma sequência de conjuntos tais que $P(B_s,A) \leq C(A) < +\infty$ para todo $A \subset\subset \Omega$, Ω aberto de $\mathbb{R}^n$. Então existe $\{B_{s_j}\}_j$ e um conjunto B tal que para todo $K \subset\subset \Omega$ resulta*

$$\lim_{j\to\infty} \int_K |\phi_{B_{s_j}} - \phi_B|\, dx = 0$$

<u>Demonstração</u>: Para $A \subset\subset \Omega$ fixo, existe $\{s_j\}_j \uparrow$ tal que $\phi_{B_{s_j}}$ converge em $L^1(A)$, isto é

$$\lim_{j,t\to\infty} \int_A |\phi_{B_{s_j}} - \phi_{B_{s_t}}|\, dx = 0 \qquad (1)$$

(*) Federer Cf. F[1]

De fato

$$\int_A |\phi_{B_{s_j}} - \phi_{B_{s_t}}| \leq \int_A |\phi_{B_{s_j}} - \Psi_{h,s_j}| dx + \int_A |\Psi_{h,s_j} - \Psi_{h,s_t}| dx +$$

$$+ \int_A |\Psi_{h,s_t} - \phi_{B_{s_t}}| \, dx \qquad (2)$$

onde $\Psi_{h,s}(x) = \int_{B_s} \tau_h(x-y)dy$ e $\tau_h(x)$ é definida por $\tau_h(x) = h^n \tau(hx)$ com $h\in\mathbb{N}$, sendo que τ é não negativa, $\tau \in C_o^\infty$, supp $\tau \subset \{x:|x| \leq 1\}$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \tau(x)dx = 1$.

Cfr S[1], $\Psi_{h,s}$ é indefinidamente diferenciável e a sequência $\{\Psi_{h,s}\}$ converge uniformemente para ϕ_{B_s} em $L^1_{loc}(\Omega)$.

Assim

$$\int_A |\phi_{B_{s_j}} - \Psi_{h,s_j}| dx \leq h^{-1}.n.C(A_1) \qquad (3)$$

e

$$\int_A |\Psi_{h,s_t} - \phi_{B_{s_t}}| \, dx \leq h^{-1}.n.C(A_2)$$

Agora, como $\{\Psi_{h,s}\}$ é equilimitada pois para todo h e s em $\mathbb{N}$, $|\Psi_{h,s}| \leq 1$, e equicontínua em A, pois $|\Psi_{h,s}(x) - \Psi_{h,s}(y)| \leq |x-y|.n.C(A)$ para todo x e y em A, pelo teorema de Arzelá-Ascoli existe $\{S_i^1\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\{\Psi_{1,s_i^1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em A.

Com o mesmo argumento existe $\{S_i^2\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \{S_i^1\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\{\Psi_{2,s_i^2}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em A. Em geral existe $\{S_i^m\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \{s_i^{m-1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\{\Psi_{m,s_i^m}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em A. Então a sequencia (4) $\{\Psi_{m},s_i^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em A, para todo índice m .

Assim o limite (1) segue de (3) e (4) substituidas em (2) para todo $h,j,t \in N$, isto é, para $A \subset\subset \Omega$ existe $\{s_j\}\uparrow$ tal que $\phi_{B_{s_j}}$ converge em $L^1(A)$.

Por outro lado, tomando uma partição de Ω da seguinte forma: $\Omega = \bigcup_{i \geq 1} A_i$ com $A_n \subset A_{n+1}$ e $A_1 = A$ obtemos; em A_1 existe $\{s_j^1\}\uparrow$ tal que $\phi_{B_{s_j^1}}$ converge em $L^1(A_1)$. Generalizando, em A_n existe $\{S_j^n\}\uparrow$ tal que $\phi_{B_{s_j^n}}$ converge em A_n.

Logo tomando a sequência diagonal, em A_n existe $\{S_n^n\}\uparrow$ tal que $\phi_{B_{s_n^n}}$ converge em $L^1(A_n)$.

Como, para qualquer $K \subset\subset \Omega$, $K \subset A_n$ algum n, temos que, se $\phi_{B_{s_n^n}}$ converge em $L^1(A_n)$ então $\phi_{B_{s_n^n}}$ converge em $L^1(K)$. cqd.

Teorema 2.11 *(Semicontinuidade do perímetro). Seja* A *um aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* $\{B_k\}$ *uma família de conjuntos tais que* $B_k \to B$ *em* $L^1_{loc}(A)$. *Então*

$$P(B,A) \leq \liminf_{k\to\infty} P(B_k,A)$$

Demonstração:

$B_k \to B$ em $L^1_{loc}(A)$ significa que $\forall\ K \subset\subset A$, $B_k \to B$ em $L^1(K)$, isto é, $\lim_{k\to\infty} \text{med}\left[(B_k \Delta B) \cap K\right] = 0$ ou seja

$$\lim_{k\to\infty} \int_A \phi(x,B_k) = \int_A \phi(x,B)$$

Então temos para $g \in [C_o^1(A)]^n$, $|g| \leq 1$

$$\int_A \phi(x,B)\, \mathrm{div} g\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_A \phi(x,B_k)\, \mathrm{div} g\, dx \leq$$

$$\leq P(B_k,A)$$

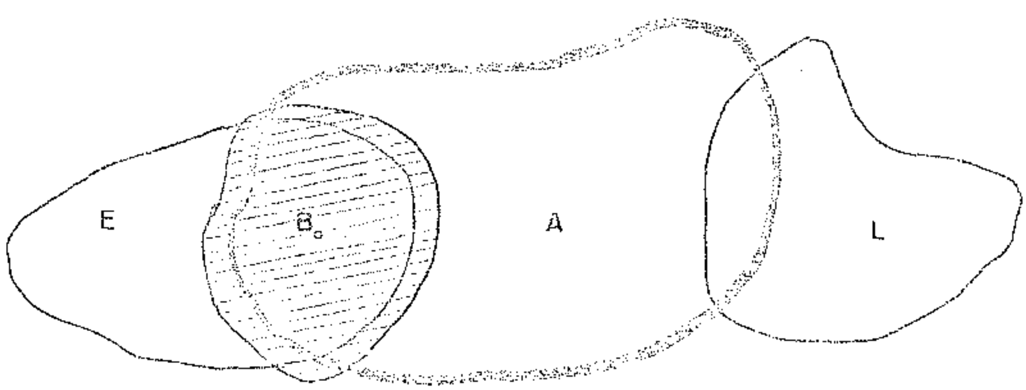
e dai

$$P(B,A) \leq \liminf_{k\to\infty} P(B_k,A)$$

Teorema 2.12 *(Existência do mínimo para o problema de obstáculos, não levando em conta obstáculos de medida nula). Sejam* A *um aberto do* $\mathbb{R}^n$; E *e* L *dois borelianos de* $\mathbb{R}^n$ *disjuntos. Então existe um boreliano* B_o *tal que:*

$$P(B_o,A) = \min \{P(B,A)\ ;\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\ ,$$

$$B \supseteq E \cap A\ ,\ B \cap (L \cap A) = \phi\}$$



Demonstração:

Seja $m = \inf\ \{P(B,A) / B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\ ,\ B \supseteq E \cap A, B \cap (L \cap A) = \phi\}$

Se $m = +\infty$, basta considerar $B_o = E$, pois neste caso $P(E,A) = +\infty$.

Se $m < +\infty$. Suponhamos $\{B_h\}$ uma família de borelianos tal que $B_h \supseteq E \cap A$, $B_h \cap L \cap A = \phi$ e $\lim_h P(B_h,A) = m$, isto é, $P(B_h,A)$ equilimitado.

Pelo teorema 2.10 (compacidade) temos:

$$\exists \{B_{h_i}\} \subset \{B_h\} \quad \text{tal que} \quad B_{h_i} \to B^* \text{ em } L^1_{loc}(A)$$

onde B^* satisfaz: $B^* \supseteq E \cap A$; $B^* \cap L \cap A = \phi$ e pelo teorema 2.11 temos ainda

$$P(B^*,A) \leq \liminf_{i\to\infty} P(B_{h_i},A) = m$$

B^* poderia não ser boreliano, então seja $B_o \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$B_o \supseteq E \cap A$$

$$B_o \cap L \cap A = \phi$$

e med $(B_o \,\Delta\, B^*) \cap A = 0$ logo

$$P(B_o,A) = \min \{P(B,A) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \,,$$

$$B \supseteq E \cap A \;;\; B \cap L \cap A = \phi\}$$

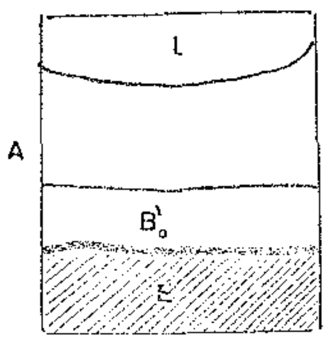
<u>Observação 1</u>: A solução do problema pode não ser única

(i) $\forall\, B_o'$ tal que

$$\text{med}\left[(B_o' \,\Delta\, B_o) \cap A\right] = 0$$

com $B_o' \supseteq E \cap A$ e $B_o' \cap L \cap A = \phi$ é também solução.

(ii) Existem casos em que med $((B_o' \Delta B_o) \cap A) \neq 0$ e B_o' também é solução.



Neste caso $B_o = E$ e B_o' é tal que

$$P(B_o', A) = P(B_o, A) =$$
$$= \min\{P(B,A)/B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$
$$E \cap A \subset B, L \cap B \cap A = \phi\}$$

Com med $[(B_o' \Delta B_o) \cap A] > 0$

(iii) Se $L = \phi$ então $B_o = A$ pois $P(A,A) = 0$.

Observação 2: O resultado desse teorema só é válido para quando os obstáculos E e L tiverem medidas de Lebesgue diferente de zero em $\mathbb{R}^n$. Para o estudo de obstáculos com medidas nulas introduziremos no Capítulo III a classe G_n e definiremos no capítulo IV um funcional mais geral que o perímetro.

CAPÍTULO III

MEDIDA (n-1) DIMENSIONAL CONSTRUIDA ATRAVÉS DO PERÍMETRO

No problema anterior a solução independia de obstáculos cuja medida de Lebesgue fosse nula. Para obstáculos de tal tipo devemos introduzir uma nova classe de conjuntos menos geral que a classe dos borelianos, a classe G_n que definiremos a seguir.

<u>Definição 3.1</u>: Um *conjunto* $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *pertence à classe* G_n se satisfaz as seguintes condições:

a) $B \in \mathcal{B}$

b) $\lim\limits_{\rho \to 0} \rho^{-n} \operatorname{med}(B \cap A_\rho(x)) = 0 \Rightarrow x \notin B$

isto é, B não contém pontos onde sua densidade é zero.

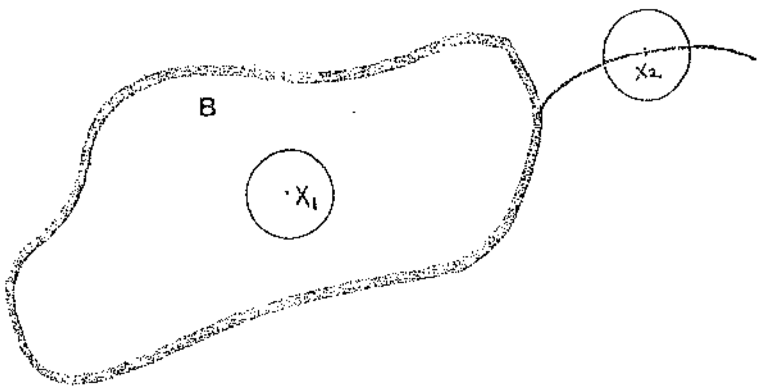
c) $\lim\limits_{\rho \to 0} \rho^{-n} \operatorname{med}(A_\rho(x) - B) = 0 \Rightarrow x \in B$

isto é, B contém todos os pontos onde sua densidade é 1, ou seja o complementar de B tem densidade zero em x.

Simbolicamente poderiamos escrever

$$B \in G_n \Leftrightarrow \forall x \in B \quad , \quad \operatorname{dens}(B,x) > 0$$

onde $\operatorname{dens}(B,x) = \lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\operatorname{med}(B \cap A_\rho(x))}{\operatorname{med} A_\rho(x)} = \lim\limits_{\rho \to 0} \rho^{-n} \dfrac{\operatorname{med}(B \cap A_\rho(x))}{\omega_n}$



$\mathrm{dens}(B, x_1) = 1$

$\mathrm{dens}(B, x_2) = 0$

logo $\lim\limits_{\rho \to 0} \rho^{-n}\, \mathrm{med}(B \cap A_\rho(x)) = 0 \iff \mathrm{dens}(B, x) = 0.$

<u>Observação 1</u>. Se $B \in G_n$ então $(\mathbb{R}^n - B) \in G_n$. De fato. Se $B \in G_n$, pela definição 3.1 temos:

$$\text{(i)} \quad \lim_{\rho \to 0} \rho^{-n}\, \mathrm{med}(A_\rho(x) \cap B) = 0 \implies x \notin B$$

logo

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^{-n}\, \mathrm{med}(A_\rho(x) - (\mathbb{R}^n - B)) = 0 \iff \text{(i)} \implies x \in \mathbb{R}^n - B$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{\rho \to 0} \rho^{-n}\, \mathrm{med}(A_\rho(x) - B) = 0 \implies x \in B$$

logo

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^{-n}\, \mathrm{med}(A_\rho(x)) \cap (\mathbb{R}^n - B) = 0 \iff \text{(ii)} \implies x \notin \mathbb{R}^n - B$$

Agora como a classe dos borelianos é uma σ-álgebra, temos que se B é boreliano então $\mathbb{R}^n - B$ também o é.

Portanto $\mathbb{R}^n - B \in G_n$.

<u>Observação 2</u>: Com o mesmo tipo de construção feito acima, podemos provar a recíproca da observação 1.

Em geral se pode associar infinitos conjuntos $B^* \in G_n$ a um dado boreliano $B \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $med(B \Delta B^*) = 0$. O que vai nos interessar é o conjunto que chamaremos de $\tilde{B}$ que difira o menos possível de B.

<u>Definição 3.2:</u> Se B é um boreliano de $\mathbb{R}^n$, definiremos os conjuntos $\tilde{B}''$, $\tilde{B}'$ e $\tilde{B}$ como segue:

a) $x \notin \tilde{B}'' \Leftrightarrow \lim_{\rho \to 0} \rho^{-n} med(B \cap A_\rho(x)) = 0$

isto é, $x \in \tilde{B}'' \Leftrightarrow dens(B,x) > 0$.

Portanto $\tilde{B}'' \in G_n$.

b) $x \in \tilde{B}' \Leftrightarrow \lim_{\rho \to 0} \rho^{-n} med(A_\rho(x) - B) = 0$

isto é, $x \in \tilde{B}' \Leftrightarrow dens(B,x) = 1$.

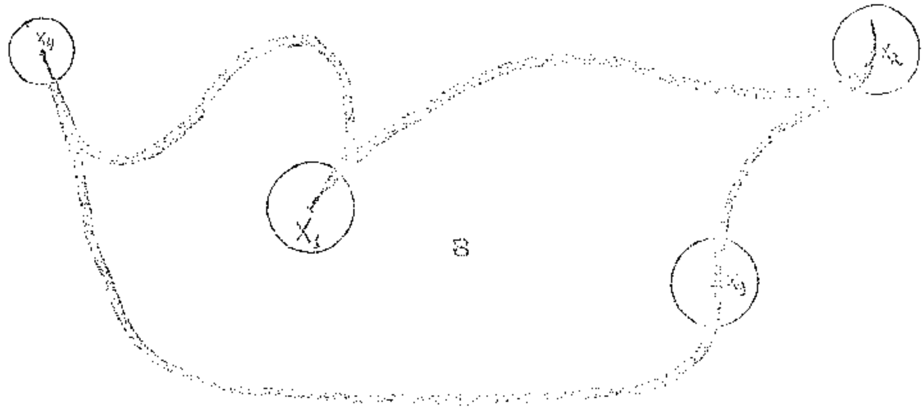
Portanto $\tilde{B}' \in G_n$.

c) $\tilde{B} = \tilde{B}' \cup (B \cap \tilde{B}'')$, isto é

$$dens(B,x) > 0 \Rightarrow x \in \tilde{B}$$

$\tilde{B}$ é o conjunto de G_n que difere de B o menos possível.

Exemplo



$$\begin{array}{llll} dens(B,x_1) = 1 & ; & x_1 \notin \tilde{B}'', \; x_1 \in \tilde{B}' , \; x_1 \in \tilde{B} \\ dens(B,x_2) = 0 & ; & x_2 \notin \tilde{B} \\ dens(B,x_3) = 1/2 & ; & x_3 \in \tilde{B}'', \; x_3 \notin \tilde{B}' , \; x_3 \in \tilde{B} \\ dens(B,x_4) = 0 & ; & x_4 \notin \tilde{B} \end{array}$$

<u>Proposição 3.1</u> *Valem as seguintes relações:*

a) $\tilde{B}' = \mathbb{R}^n - (\widetilde{\mathbb{R}^n - B})''$

$\tilde{B}'' = \mathbb{R}^n - (\widetilde{\mathbb{R}^n - B})'$

$$\begin{array}{lll} x \in \tilde{B}' & \Leftrightarrow \lim\limits_{\rho} \rho^{-n} \, med(A_\rho(x) - B) = 0 & \text{(definição 3.2)} \\ & \Leftrightarrow \lim\limits_{\rho} \rho^{-n} \, med(A_\rho(x) \cap (\mathbb{R}^n - B)) = 0 & \\ & \Leftrightarrow dens\left[(\mathbb{R}^n - B), x\right] = 0 & \\ & \Leftrightarrow \quad x \notin (\widetilde{\mathbb{R}^n - B})'' & \text{(definição 3.2)} \\ & \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}^n - (\widetilde{\mathbb{R}^n - B})'' & \end{array}$$

logo $\tilde{B}' \subset \mathbb{R}^n - (\widetilde{\mathbb{R}^n - B})''$ e $\tilde{B}' \supset \mathbb{R}^n - (\widetilde{\mathbb{R}^n - B})''$ o que implica a primeira relação.

Analogamente demonstramos a segunda relação.

b) *Seja* B *um boreliano. Então*

$$B \in G_n \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{B}' \subseteq B \subseteq \tilde{B}''$$

Como $B \in G_n$, temos que

$$\lim_{\rho \to o} \rho^{-n} \, med(A_\rho(x) \cap B) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \notin B \text{ (def. 3.1)}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^{-n} \operatorname{med}(A_\rho(x) \cap B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \notin \tilde{B}'' \quad (\text{def. } 3.2)$$

Logo se $x \in B$ então

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^{-n} \operatorname{med}(A_\rho(x) \cap B) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \tilde{B}'' \quad (\text{def. } 3.2)$$

portanto $B \subseteq \tilde{B}''$.

Por outro lado, $x \in \tilde{B}'$ se e somente se,

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^{-n} \operatorname{med}(A_\rho(x) - B) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in B$$

portanto $\tilde{B}' \subset B$.

c) *Para todo* $B^* \in G_n$ *tal que* $\operatorname{med}(B^* \Delta B) = 0$ *resulta*

$$\tilde{B} - B \subseteq B^* - B$$

$$B - \tilde{B} \subseteq B - B^*$$

isto é, $\tilde{B}$ é o conjunto de classe G_n que difere de B o menos possível. ($\operatorname{med}(B \Delta \tilde{B}) = 0$).

Para demonstrar usamos as definições 3.1 e 3.2 e propriedades da teoria dos conjuntos.

d) *Para todo boreliano tem-se*

$$B \in G_n \quad \Leftrightarrow \quad B = \tilde{B}$$

Pela parte (b)

$$B \in G_n \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{B}' \subseteq B \subseteq \tilde{B}''$$

Pela definição 3.2

$$\tilde{B} = \tilde{B}' \cup (B \cap \tilde{B}'')$$

$$\tilde{B} = \tilde{B}' \cup B \qquad \text{pois } B \subseteq \tilde{B}''$$

$$\tilde{B} = B \qquad \text{pois } \tilde{B}' \subseteq B$$

e) *Sejam:* A *um aberto de* $\mathbb{R}^n$; B_1 *e* B_2 *dois conjuntos de Borel, tais que* $B_1 \cap A = B_2 \cap A$; *então*

e_1) $B_1' \cap A = B_2' \cap A$

e_2) $B_1'' \cap A = B_2'' \cap A$

e_3) $\widetilde{B}_1 \cap A = \widetilde{B}_2 \cap A$

Para demonstrar essas três relações, basta usar as defições 3.1 e 3.2.

Consequência: Usando as propriedades da medida de Lebesgue se pode verificar que

(1) $med(B \Delta B') = med(B \Delta B'') = med(B \Delta \tilde{B}) = 0$

(2) Para todo B boreliano de $\mathbb{R}^n$ tem-se $\tilde{B} \in G_n$

(3) $\tilde{B}$ é o menor conjunto de G_n, tal que $med(B \Delta \tilde{B}) = 0$.

De fato: (1) Seja $X = \partial B$, $med(X) = 0$. Então para todo $x \in \mathbb{R}^n - X$ temos

$$dens(B,x) = \lim_{\rho \to 0} \frac{med(A_\rho(x) \cap B)}{med\, A_\rho(x)} = \phi(x,B) \quad ,$$

Portanto dens(B,x) = zero ou um.

Agora, como $B\Delta\tilde{B}' \subset X$ e $B\Delta\tilde{B}'' \subset X$ então $B\Delta\tilde{B} \subset X$ e sendo med$(X) = 0$ temos provado a parte 1 .

(2) De acordo com a definição 3.1 temos que mostrar:

(a) $\tilde{B}$ é boreliano. De fato: $\tilde{B}' = \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{\rho\to 0} \rho^{-n} \text{med}(A_\rho(x) - B) = 0\}$.

Então $\forall\, k \in \mathbb{N}, \exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que ρ^{-n} med$(A_\rho(x)-B) < \frac{1}{k}$ para todo $0 < \rho < \frac{1}{m}$.

Considerando

$$A_{\rho,k}(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho^{-n} \text{ med}(A_\rho(x) - B) < \frac{1}{k}\}$$

segue-se que

$$\tilde{B}' = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{0<\rho<\frac{1}{m}} A_{\rho,k}(x)$$ e a menos

da enumerabilidade da última intersecção $\tilde{B}'$ é boreliano. Como $\tilde{B}'' = \mathbb{R}^n - (\widetilde{\mathbb{R}^n - B})'$ então $\tilde{B}''$ é boreliano. Logo $\tilde{B} = \tilde{B}' \cup (B \cap \tilde{B}'')$ também é boreliano.

(b) Se $\lim_{\rho\to 0} \rho^{-n}$ med$(\tilde{B} \cap A_\rho(x)) = 0$, então

$\lim_{\rho\to 0} \rho^{-n}$ med$(B \cap A_\rho(x)) = 0$ logo $x \notin \tilde{B}''$ e $x \notin \tilde{B}'$

portanto $x \notin \tilde{B}$.

(c) Se $\lim_{\rho\to 0} \rho^{-n}$ med$(A_\rho(x) - \tilde{B}) = 0$ então

$\lim_{\rho\to 0} \rho^{-n}$ med$(A_\rho(x) - B) = 0$ logo $x \in \tilde{B}'$ portanto

$x \in \tilde{B}$.

Para demonstrar esta parte (b) usa-se o seguinte resultado: "med$(B \Delta B')$ = 0 se, e somente se dens(B,x) = dens$(\tilde{B},x)=0$."

(3) Para mostrar que $\tilde{B}$ é o menor conjunto de G_n, tal que med$(B\Delta\tilde{B})$ = 0, usa-se a parte (c) da proposição 3.1.

Proposição 3.2

(i) *Se* A_α *é uma família de abertos então* $\bigcup_\alpha A_\alpha \subseteq (\widetilde{\bigcup_\alpha A_\alpha})'$.
De fato: seja $\bigcup_\alpha A_\alpha = A =$ aberto de $\mathbb{R}^n$, então dens$(A,x) = 1$ para todo $x \in A$, logo, pela definição 3.2 $x \in \tilde{A}'$, isto é, $x \in (\widetilde{\bigcup_\alpha A_\alpha})'$.

(ii) *Se* E_α *é uma família de conjuntos de* G_n, *então*

$$(\widetilde{\bigcup_\alpha E_\alpha}) \supseteq (\bigcup_\alpha E_\alpha)$$

De fato: Para todo $x \in \bigcup E_\alpha$, deve existir um índice α_o tal que $x \in E_{\alpha o}$.

Como $E_{\alpha o} \in G_n$ então $E_{\alpha o} = \tilde{E}_{\alpha o}$. Mas $\tilde{E}_{\alpha o} = \tilde{E}'_{\alpha o} \cup (E_{\alpha o} \cap \tilde{E}''_{\alpha o})$.
Logo $x \in E_{\alpha o}$ implica que:

$$x \in \tilde{E}'_{\alpha o} \Rightarrow 1 = \text{dens}(E_{\alpha o},x) \leq \text{dens}(\bigcup E_\alpha, x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{dens}(\bigcup E_\alpha, x) > 0 \Rightarrow x \in \widetilde{\bigcup E_\alpha}$$

ou

$$x \in (E_{\alpha o} \cap \tilde{E}''_{\alpha o}) \Rightarrow 0 < \text{dens}(E_{\alpha o},x) \leq \text{dens}(\bigcup E_\alpha, x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{dens}(\bigcup E_\alpha, x) > 0 \Rightarrow x \in \widetilde{\bigcup E_\alpha}$$

(iii) *Se* $E \supseteq F$ *então* $\tilde{E} \supseteq \tilde{F}$.

<u>De fato:</u> Se $F \subseteq E$ então $\text{med}(A_\rho(x) \cap F) \leq \text{med}(A_\rho(x) \cap E)$ logo $\text{dens}(F,x) \leq \text{dens}(E,x)$.

Agora, se $x \in \tilde{F}$ temos que $\text{dens}(F,x) > 0$ logo $\text{dens}(E,x) > 0$ o que acarreta

$$x \in \tilde{E} \qquad\qquad \text{cqd}$$

(iv) *Se* E *satisfaz as condições:*

(a) $\lim\limits_{\rho \to o} \rho^{-n} \text{ med}(E \cap A_\rho(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \notin E$; então

$\tilde{E} \supseteq E$

b) $\lim\limits_{\rho \to o} \rho^{-n} \text{ med}(A_\rho(x) - E) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in E$; então

$E \supseteq \tilde{E}$

<u>De fato:</u>

a) $x \notin \tilde{E}'' \Leftrightarrow \lim\limits_{\rho \to o} \rho^{-n} \text{ med}(E \cap A_\rho(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \notin E$

logo

$\tilde{E}'' \supset E$ e $\tilde{E} = \tilde{E}' \cup (E \cap \tilde{E}'') = \tilde{E}' \cup E \supseteq E$

b) $x \in \tilde{E}' \Leftrightarrow \lim\limits_{\rho \to o} \rho^{-n} \text{ med}(A_\rho(x) - E) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in E$

logo

$\tilde{E}' \subseteq E$ e $\tilde{E} = \tilde{E}' \cup (E \cap \tilde{E}'') = E \cap (\tilde{E}' \cup \tilde{E}'') \subseteq E$

cqd

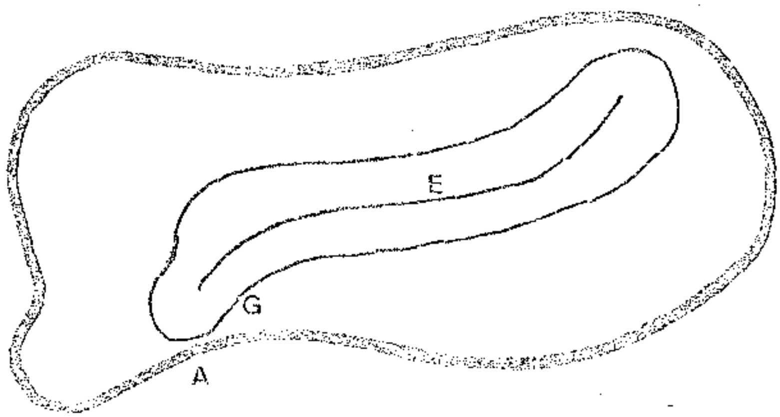
<u>Definição 3.3:</u> Sejam: A um aberto de $\mathbb{R}^n$; $E \in P(\mathbb{R}^n)$. De

finamos para todo $\varepsilon > 0$

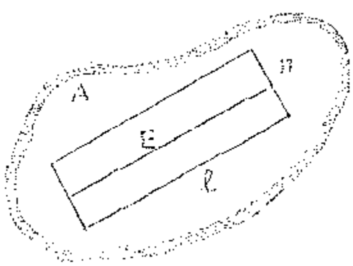
$$\sigma_\varepsilon (E;A) = \inf_G \{P(G,A) + \frac{med(G \cap A)}{\varepsilon};\ G \in G_n,\ G \supseteq E \cap A\}$$

e

$$\sigma(E;A) = \sup_{\varepsilon > 0} \sigma_\varepsilon(E;A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_\varepsilon(E;A)$$



Observações: (1) Se E é bem regular,



$$\sigma_\varepsilon(E,A) = \lim_{n \to 0} \{2\ell + 2n + \frac{n\ell}{\varepsilon}\} = 2\ell$$

onde ℓ = comprimento de E

(2) $\sigma_\varepsilon(\phi;A) = 0$ (imediato, basta tomar $G = \phi \in G_n$)

$\sigma_\varepsilon(\phi;A) = 0 \Rightarrow \sigma(\phi;A) = 0$

(3) Se $E \subseteq E'$ então $\sigma_\varepsilon(E;A) \leq \sigma_\varepsilon(E';A)$

e portanto $\sigma(E;A) \leq \sigma(E';A)$.

Como $E \subseteq E'$ então $E' \cap A \supseteq E \cap A$ e da definição de σ_ε e σ, segue o resultado.

(4) Se $med(E \cap A) > 0$ então $\sigma(E;A) = +\infty$.

(5) σ é uma medida $(n-1)$ dimensional obtida como limite de medidas n-dimensionais.

Teorema 3.3 *Para todo aberto* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, *a função* σ_ε *e* σ *da definição 3.3 são medidas exteriores.*

Demonstração: Basta mostrar que σ_ε é numeravelmente sub-aditiva, isto é, para toda família $\{E_h\}$ de $\mathbb{R}^n$ tem-se:

$$\sigma_\varepsilon\left(\bigcup_{h=1}^{\infty} E_h \; ; \; A\right) \leq \sum_{h=1}^{\infty} \sigma_\varepsilon(E_h \; ; \; A) \tag{1}$$

Da definição de σ_ε sabemos que: para todo $\eta > 0$, existe para todo h um conjunto $F_h \in G_n$, tal que

$$F_h \supseteq E_h \cap A \tag{2}$$

e além disso

$$\sigma_\varepsilon(E_h \; ; \; A) \geq P(F_h \; ; \; A) + \frac{med(F_h \cap A)}{\varepsilon} - \eta 2^{-h} \tag{3}$$

Seja agora $F = \bigcup^{\infty} F_h$. Como $F_h \in G_n$, temos pela proposição 3.2, que $\tilde{F} \supseteq F$. Mas em (2) $F_h \supseteq E_h \cap A$, então

$$\tilde{F} \supseteq \left[\bigcup^{\infty} E_h\right] \cap A \tag{4}$$

Da proposição 3.1 temos $med(\tilde{F} \Delta F) = 0$ (5), então pela proposição 2.1

$$P(\tilde{F},A) = P(F,A) \tag{6}$$

Como $F = \bigcup^{\infty} F_h$ então $P(F,A) \leq \sum_{h=1}^{\infty} P(F_h,A)$ (7)

Portanto temos finalmente:

$$\sigma_\varepsilon\Big[\bigcup_{h=1}^{\infty} E_h \; ; \; A\Big] \leq P(\tilde{F} \; ; \; A) + \frac{\operatorname{med}(\tilde{F} \cap A)}{\varepsilon} \quad \text{(pois é o ínfimo)}$$

$$= P(F,A) + \frac{\operatorname{med}\,(F \cap A)}{\varepsilon} \quad ((5) \text{ e } (6))$$

$$\leq \sum_{h=1}^{\infty} P(F_h \; ; \; A) + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\operatorname{med}(F_h \cap A)}{\varepsilon} \quad (7)$$

$$\leq \sum_{h=1}^{\infty} \sigma_\varepsilon(E_h,A) + \eta \sum_{h=1}^{\infty} 2^{-k} \quad (3)$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \sigma_\varepsilon(E_h,A) + \eta$$

Como η é arbitrário segue a tese da proposição.

Lema 3.4 *Sendo* A_1 *e* A_2 *dois abertos disjuntos de* $\mathbb{R}^n$, *resulta então para todo conjunto* $E \in P(\mathbb{R}^n)$ *que:*

$$\sigma_\varepsilon\,(E \; ; \; A_1) + \sigma_\varepsilon(E \; ; \; A_2) = \sigma_\varepsilon(E \; ; \; A_1 \cup A_2)$$

$$\sigma\,(E \; ; \; A_1) + \sigma(E \; ; \; A_2) = \sigma(E \; ; \; A_1 \cup A_2)$$

Demonstração:

Demonstraremos apenas a primeira visto que a segunda se obtem da primeira passando ao limite.

Pela definição de $\sigma_\varepsilon(E \; ; \; A_1 \cup A_2)$, para todo $\eta > 0$ existe $F \in G_n$, tal que $F \supseteq E \cap (A_1 \cup A_2)$ com

$$P(F;A_1 \cup A_2) + \frac{\operatorname{med}(F \cap (A_1 \cup A_2))}{\varepsilon} < \sigma_\varepsilon(E;A_1 \cup A_2) + \eta$$

Como $F \supseteq E \cap (A_1 \cup A_2)$ então $F \supseteq E \cap A_i$ $i = 1,2$ e pela definição de $\sigma_\varepsilon(E,A_i)$ temos:

$$\sigma_\varepsilon(E;A_1)+\sigma_\varepsilon(E;A_2) \leq \left[P(F,A_1)+\frac{med(F \cap A_1)}{\varepsilon}\right]+\left[P(F,A_2)+\frac{med(F \cap A_2)}{\varepsilon}\right]$$

Como $A_1 \cap A_2 = \phi$ então

$$P(F,A_1 \cup A_2) = P(F,A_1) + P(F,A_2)$$

logo

$$\sigma_\varepsilon(E,A_1)+\sigma_\varepsilon(E;A_2) \leq P(F,A_1 \cup A_2) + \frac{med(F \cap (A_1 \cup A_2))}{\varepsilon} <$$

$$< \sigma_\varepsilon(E;A_1 \cup A_2) + \eta$$

Pela arbitrariedade de η temos:

$$\sigma_\varepsilon(E,A_1) + \sigma_\varepsilon(E,A_2) \leq \sigma_\varepsilon(E;A_1 \cup A_2)$$

Reciprocamente, para todo $\eta > 0$, existe F_1 e F_2 pertentes a G_n, tais que $F_1 \supseteq E \cap A_1$, $F_2 \supseteq E \cap A_2$ e

$$P(F_1,A_1) + \frac{med(F_1 \cap A_1)}{\varepsilon} < \sigma_\varepsilon(E;A_1) + \eta$$

$$P(F_2,A_2) + \frac{med(F_2 \cap A_2)}{\varepsilon} < \sigma_\varepsilon(E;A_2) + \eta$$

Seja $F = \widetilde{F_1 \cup F_2}$ então $F \supseteq F_1 \cup F_2$ (proposição 3.2). Pelas propriedades do Perímetro vistas no Capítulo II, temos:

$$\sigma_\varepsilon(E;A_1 \cup A_2) \leq P(F,A_1 \cup A_2) + \frac{med(F \cap (A_1 \cup A_2))}{\varepsilon} =$$

$$= P(F_1, A_1) + \frac{\text{med}(F_1 \cap A_1)}{\varepsilon} + P(F_2, A_2) + \frac{\text{med}(F_2 \cap A_2)}{\varepsilon} <$$

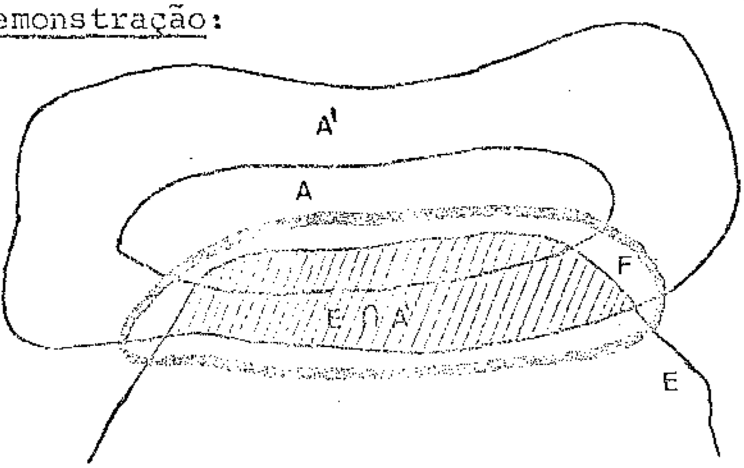
$$< \sigma_\varepsilon(E; A_1) + \sigma_\varepsilon(E; A_2) + 2\eta \quad .$$

Pela arbitrariedade de η segue:

$$\sigma_\varepsilon(E; A_1 \cup A_2) \leq \sigma_\varepsilon(E; A_1) + \sigma_\varepsilon(E; A_2) \qquad \text{cqd.}$$

Lema 3.5: *Sejam* A *e* A' *abertos de* $\mathbb{R}^n$, *com* $A \subseteq A'$. *Então para todo* $E \in P(\mathbb{R}^n)$ *resulta* $\sigma_\varepsilon(E;A) \leq \sigma_\varepsilon(E;A')$.

Demonstração:



Para todo $\eta > 0$, existe $F \in G_\eta$, $F \supseteq E \cap A'$ tal que $\sigma(E;A') + \eta \geq P(F,A') + \frac{\text{med}(F \cap A')}{\varepsilon}$.

Como $A \subseteq A'$ temos: $E \cap A \subseteq E \cap A'$; $F \cap A \subseteq F \cap A'$; $P(F,A) \leq P(F,A')$ e $\text{med}(F \cap A) \leq \text{med}(F \cap A')$. Então

$$P(F,A') + \frac{\text{med}(F \cap A')}{\varepsilon} \geq P(F,A) + \frac{\text{med}(F \cap A)}{\varepsilon} \geq \sigma_\varepsilon(E;A)$$

Pela arbitrariedade de η segue:

$$\sigma_\varepsilon(E;A) \leq \sigma_\varepsilon(E;A')$$

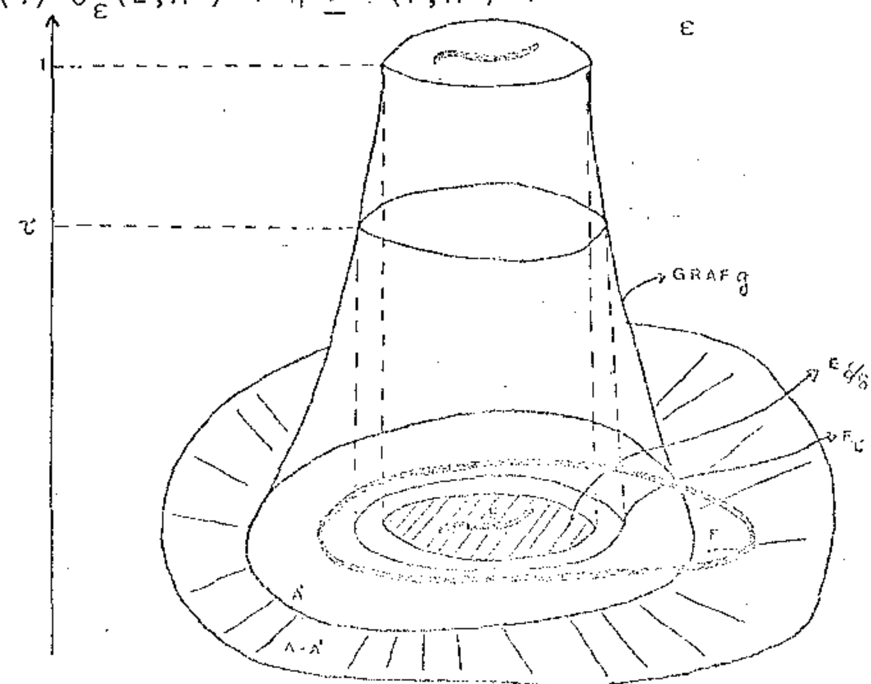
<u>Lema 3.6</u>: *Sejam* A e A' *abertos de* $\mathbb{R}^n$ *e* $E \in P(\mathbb{R}^n)$ *um conjunto tal que dist* $(E, A-A') \geq \delta > 0$. *Então*:

(a) $\sigma_\varepsilon(E;A) \leq \left[1 + \dfrac{2\varepsilon}{\delta}\right] \sigma_\varepsilon(E;A')$

(b) $\sigma(E;A) = \sigma(E,A')$

<u>Demonstração</u>: Se $\sigma_\varepsilon(E;A') = +\infty$ (a) e (b) são óbvias. Suponhamos $\sigma_\varepsilon(E;A') < +\infty$. Pela definição de σ_ε, temos que para todo $\eta > 0$, existe $F \in G_n$, $F \supseteq E \cap A'$ tal que:

(1) $\sigma_\varepsilon(E;A') + \eta \geq P(F,A') + \dfrac{\text{med}(F \cap A')}{\varepsilon}$



Seja $E_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x,E) < t\}$, então $E_{\delta/8}$ é aberto e $E_{\delta/8} \supseteq E$.

Consideremos $g(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E_{\delta/8} \\ & \\ 0 & \text{se } x \in A-A' \end{cases} \\ (2) & \end{array}$$

(ii) $|Dg(x)| \leq \dfrac{2}{\delta}$ para todo x.

Seja $F_t = \{x \in F: g(x) \geq t\}$, pelo teorema 2.8, fazendo A' o aberto de $\mathbb{R}^n$, F o boreliano e a função f igual a função g considerada acima, temos:

$$\int_0^1 P(F_t, A')dt \leq \int_{A' \cap F} |Dg|dx + P(F, A')$$

que por (ii) nos fornece

$$(3) \quad \int_0^1 P(F_t, A') \; dt \leq \frac{2}{\delta} \operatorname{med}(A' \cap F) + P(F, A')$$

A desigualdade (3) implica que existe τ, $0 < \tau < 1$, tal que:

$$(4) \quad P(F_\tau, A') \leq P(F, A') + \frac{2}{\delta} \operatorname{med}(A' \cap F)$$

O conjunto F_τ possui as seguintes propriedades:

(5) $\operatorname{dist}(F_\tau, A - A') > 0$

(6) $\tilde{F}_\tau \supseteq E \cap A'$

(7) $\tilde{F}_\tau \subseteq F$

Prova da (5). Se $\operatorname{dist}(F_\tau, A - A') = 0$, existiria pelo menos um x que pertenceria a F_τ e a $A - A'$ e portanto $g(x)$ seria igual a zero e maior ou igual que τ ao mesmo tempo, o que é absurdo.

Prova (6). Sendo $g(x) = 1$ sobre $E_{\delta/8}$, temos para $0 < \tau < 1$, que:

$$F_\tau \cap (E_{\delta/8} \cap A') = F \cap (E_{\delta/8} \cap A') \quad ;$$

e como $E_{\delta/8}$ é um aberto, pela proposição 3.1 parte e, obtemos

(8) $\tilde{F}_\tau \cap (E_{\delta/8} \cap A') = \tilde{F} \cap (E_{\delta/8} \cap A')$.

Mas $F \in G_n$, logo $F = \tilde{F}$ (prop. 3.1, d). Portanto

$\tilde{F} \cap (E_{\delta/8} \cap A') = F \cap (E_{\delta/8} \cap A') \supseteq E \cap A'$ pois,
por construção $F \supseteq E \cap A'$ e $E_{\delta/8} \supseteq E$.

Pela (8) temos $\tilde{F}_\tau \supseteq E \cap A'$.

Prova da (7). Sabemos que $F_\tau \subseteq F$ por construção de F_τ . Então pela proposição 3.2 temos

$$\tilde{F}_\tau \subseteq \tilde{F} = F \qquad \text{pois} \qquad F \in G_n.$$

Da relação (5) e das proposições 2.1 e 2.2 temos:

$$P(F_\tau, A') = P(F_\tau, A)$$

e

(9) $$P(F_\tau, A') = P(\tilde{F}_\tau, A)$$

Logo levando em consideração as relações (4), (7) e (9) temos:

$$P(\tilde{F}_\tau,A) + \frac{med(\tilde{F}_\tau \cap A)}{\varepsilon} = P(F_\tau,A) + \frac{med(F_\tau \cap A)}{\varepsilon} \qquad (9)$$

$$= P(F_\tau,A') + \frac{med(F_\tau \cap A')}{\varepsilon} \qquad (9)$$

$$\leq P(F,A') + \frac{2}{\delta}\, med(A' \cap F) + \frac{med(F_\tau \cap A')}{\varepsilon} \quad (4)$$

$$\leq P(F,A') + \frac{2}{\delta}\, med(A' \cap F) + \frac{med(F \cap A')}{\varepsilon} \quad (7)$$

$$\leq P(F,A') + med\,\frac{(F \cap A')}{\varepsilon} + \frac{2\varepsilon}{\delta}\left[P(F,A') + \frac{med(F \cap A')}{\varepsilon}\right]$$

$$\leq (\sigma_\varepsilon(E;A') + \eta) + \frac{2\varepsilon}{\delta}\,(\sigma_\varepsilon(E;A') + \eta) \qquad (1)$$

$$= \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\delta}\right)(\sigma_\varepsilon(E;A') + \eta)$$

Pela arbitrariedade de η tem-se:

$$\sigma_\varepsilon(E;A) \leq \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\delta}\right)\sigma_\varepsilon(E;A') \quad .$$

Passando ao limite para $\varepsilon \to 0$ esta relação, obtemos $\sigma(E,A) \leq \sigma(E,A')$. Pelo lema 3.5 temos a $\sigma(E,A) \geq \sigma(E,A')$ o que completa a demonstração do nosso lema.

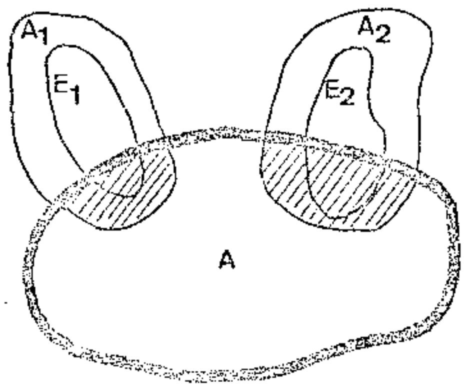
Teorema 3.7: *A medida exterior σ dada na definição 3.3. é uma medida regular segundo Borel ($\mathcal{B}$-regular); ou seja os conjuntos de Borel são σ-mensuráveis e para todo conjunto $E \in P(\mathbb{R}^n)$ resulta:*

$$\sigma(E,A) = \inf\{\sigma(B;A)\ ;\ B \in \mathcal{B},\ B \supseteq E\}$$

Demonstração: Para mostrar que os borelianos são σ - mensuráveis, faremos uso da proposição 1.4. Assim, sejam $E_1, E_2 \in P(\mathbb{R}^n)$, tais que, $\mathrm{dist}(E_1, E_2) > 0$. Mostremos que

$$\sigma(E_1;A) + \sigma(E_2;A) = \sigma(E_1 \cup E_2;A) \quad .$$

Sendo σ uma medida exterior, já temos pela definição 1.3, a sua subaditividade, isto é, $\sigma(E_1;A) + \sigma(E_2;A) \geq \sigma(E_1 \cup E_2;A)$. Basta então mostrar que $\sigma(E_1;A) + \sigma(E_2;A) \leq \sigma(E_1 \cup E_2;A)$.



Como $\mathrm{dist}(E_1,E_2) > 0$ é possível construir dois abertos disjuntos $A_1 \supseteq E_1$ e $A_2 \supseteq E_2$ tais que:

$$\mathrm{dist}(E_1, \mathbb{R}^n - A_1) > 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{dist}(E_2, \mathbb{R}^n - A_2) > 0$$

Então temos: $A_1 \cap A \subseteq A_1$ e $A_2 \cap A \subseteq A_2$ abertos de $\mathbb{R}^n$; E_1 e $E_2 \in P(\mathbb{R}^n)$, e $\mathrm{dist}(E_1, A-(A_1 \cap A)) > 0$, $\mathrm{dist}(E_2, A-(A_2 \cap A)) > 0$ portanto pelo lema 3.6 temos:

$$\sigma(E_1;A)+\sigma(E_2;A)=\sigma(E_1;A_1 \cap A)+\sigma(E_2;A_2 \cap A) \leq \sigma(E_1 \cup E_2;A_1 \cap A) +$$

$$+ \sigma(E_1 \cup E_2;A_2 \cap A) =$$

$$= \sigma(E_1 \cup E_2;A \cap (A_1 \cup A_2)) \qquad \text{(lema 3.4)}$$

$$\leq \sigma(E_1 \cup E_2;A) \qquad \text{(lema 3.5)}$$

isto é, $\sigma(E_1;A) + \sigma(E_2;A) \leq \sigma(E_1 \cup E_2;A)$ e com isso, fica demonstrado que os borelianos são σ-mensuráveis.

Para demonstrar que $\sigma(E;A) = \inf\{\sigma(B;A),\ B \in \mathcal{B}, B \supseteq E\}$, seja $E \in P(\mathbb{R}^n)$. E pela definição de σ_ε temos que, existe para todo $\varepsilon > 0$ e para todo h inteiro positivo um conjunto $G_{h\varepsilon} \in G_n$ tal que: $G_{h\varepsilon} \supseteq E$ e

$$\sigma_\varepsilon(G_{h\varepsilon};A) \leq P(G_{h\varepsilon};A) + \frac{\text{med}(G_{h\varepsilon} \cap A)}{\varepsilon} \leq \sigma_\varepsilon(E;A) + \frac{1}{h}$$

Os conjuntos $G_{h\varepsilon} \in G_n$ são borelianos, pois $G_n \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, logo $G_\varepsilon = \bigcap_{h=1}^{\infty} G_{h\varepsilon}$ é um boreliano e $G_\varepsilon \supseteq E \cap A$ e além disso

$$\sigma_\varepsilon(E;A) = \sigma_\varepsilon(E \cap A;A) \leq \sigma_\varepsilon(G_\varepsilon;A) \leq \inf_{h\in N} \sigma_\varepsilon(G_h;A) = \sigma_\varepsilon(E;A)$$

Então, para todo $\varepsilon > 0$, $\exists\, G_\varepsilon \in \mathcal{B}$, com $G_\varepsilon \supseteq E \cap A$ tal que:

$$\sigma_\varepsilon(E;A) = \sigma_\varepsilon(G_\varepsilon;A)$$

Agora, para todo $k > 0$, inteiro, construimos $G_{1/k}$, como foi feito para $G_\varepsilon(\varepsilon = \frac{1}{k})$. Colocando $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_{1/k}$ resulta $G \supseteq E \cap A$ e

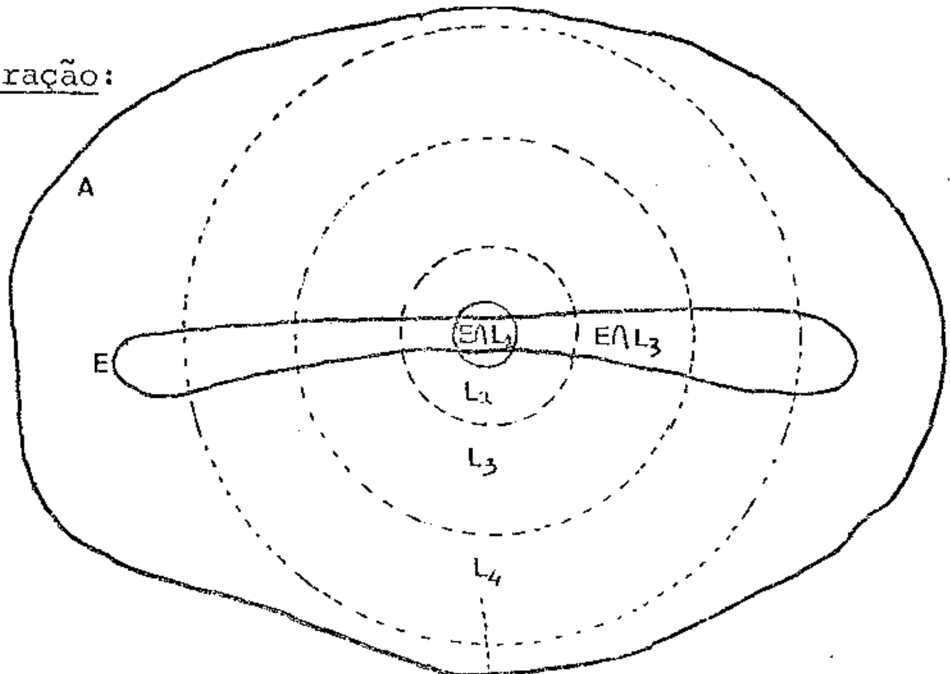
$$\sigma_{1/k}(G;A) \leq \sigma_{1/k}(G_{1/k};A) = \sigma_{1/k}(E;A)$$

que pela definição 3.3 nos dá

$$\sigma(G;A) = \sigma(E;A)$$

<u>Teorema 3.8</u> *Seja* A *um aberto de* $\mathbb{R}^n$, *e* $E \in P(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $E \subseteq A$. *Então temos que* $\sigma(E;A) = \sigma(E)$ *e portanto para todo* $F \in \bar{P}(\mathbb{R}^n)$ *temos* $\sigma(F,A) = \sigma(F \cap A)$.

Demonstração:



Consideremos a sequência $\{K_h\}$, definida para todo $h > 0$ e inteiro, por:

$$K_h = \{x : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n - A) \geq \frac{1}{h}\}$$

Temos então uma sequência crescente de borelianos portanto de conjuntos mensuráveis segundo Caratheodory. $(K_1 \subset K_2 \subset \ldots)$

Seja a sequência $\{L_k\}$ tal que $L_k = K_k - K_{k-1}$ para $k > 1$ e $L_1 = K_1$. Os conjuntos L_k são mensuráveis e disjuntos.

Então vale a seguinte relação:

$$\sigma(E \cap A) = \sigma\left[\bigcup_{K=1}^{\infty} (E \cap L_k)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(E \cap L_k)$$

(vide teorema 1.3).

Agora, como $E \subset A$ e $\sum_{K=1}^{N} \sigma(E \cap L_K) = \sigma(E \cap K_N)$ então

$$\sigma(E) = \lim_{N\to\infty} \sigma(E \cap K_N) \qquad (i)$$

Como $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \cap K_N \in P(\mathbb{R}^n)$, $E \cap K_N \subset E$ e

$\text{dist}(E \cap K_N, \mathbb{R}^n - A) > 0$ podemos escrever:

a) pelo lema 3.6 e pela definição de σ

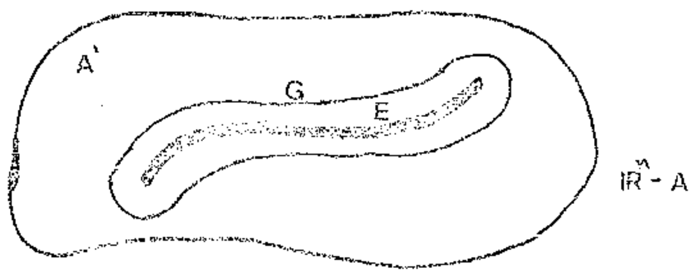
$$\sigma(E \cap K_N) = \sigma(E \cap K_N; A) \leq \sigma(E; A) \qquad (2)$$

(1) e (2) implicam $\sigma(E) \leq \sigma(E, A)$

b) pelo lema 3.5

$$\sigma(E; A) \leq \sigma(E) \qquad \text{cqd.}$$

Lema 3.9: (Reformulação do lema 3.6). *Sejam: A' um aberto de $\mathbb{R}^n$, $E \in P(\mathbb{R}^n)$ um conjunto tal que $\text{dist}(E; \mathbb{R}^n - A) > 0$. Então para todo $\lambda > 0$ existe um conjunto $G \in G_n$ tal que $E \subseteq G \subseteq A'$ e $P(G) = P(G, A') < \sigma(E, A') + \lambda$.*



Demonstração: No lema 3.6 tínhamos $\sigma(E, A') = \sigma(E, A)$ quando $A' \subseteq A$, $E \in P(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{dist}(E, A - A') \geq \delta > 0$. Agora temos $A' \subseteq \mathbb{R}^n$. Então repetimos a demonstração do lema 3.6, fazendo $A = \mathbb{R}^n$ e $\delta = \text{dist}(E, \mathbb{R}^n - A')$.

Pode-se estabelecer algumas relações entre a medida de Hausdorff e a medida σ construída através do perímetro.

Os principais resultados são os dois seguintes teoremas.

Teorema A. *Existem duas constantes $C_1(n)$ e $C_2(n)$ dependen* *tes somente da dimensão* n *do espaço tais que para todo* $E \in P(\mathbb{R}^n)$ *resulta*

$$\sigma(E) \leq C_1(n)\ H_{n-1}(E)$$

$$H_{n-1}(E) \leq C_2(n)\ \sigma(E)$$

Teorema B. *Se* B *é um boreliano de* $\mathbb{R}^n$, *contido numa união enumerável de hipersuperfícies de classe* C_1, *então*

$$\sigma(B) = 2\ H_{n-1}(B)$$

A demonstração desses dois teoremas se encontram em C.DG.P [1], páginas 161, 169 respectivamente.

Observe que as desigualdades do teorema A são válidas para qualquer conjunto enquanto que a igualdade do teorema B vale somente para conjuntos contidos em hipersuperfícies de classe C^1. Não sendo conhecido ainda até que ponto esta igualdade pode ser estendida a classe de conjuntos mais gerais, nem existem contra exemplos.

CAPÍTULO IV

PERÍMETRO MÍNIMO COM OBSTÁCULOS

No teorema 2.12, provamos a existência do boreliano B_o tal que

$$P(B_o,A)=\min\ \{P(B,A)\ ;\ B\varepsilon\ (\mathbb{R}^n),\ B\supseteq E\cap A, B\cap L\cap A=\phi\}$$

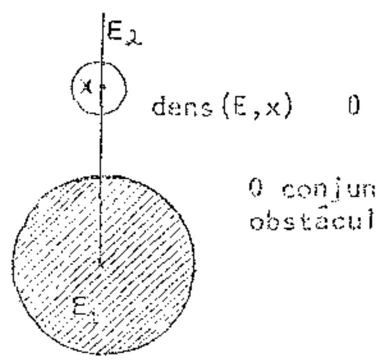
sem levar em consideração obstáculos de medida nula.

<u>Definição 4.1</u> Um conjunto E tem um *obstáculo sutil* se existir pelo menos um ponto $x\varepsilon E$ tal que $\lim\limits_{\rho\to o}\rho^{-n}\,\mathrm{med}(A_\rho(x)\cap E)=0$, isto é, $\mathrm{dens}(E,x)=0$.

Exemplo 1. Seja $E=E_1\cup E_2$ onde

$$E_1=\{(x_1,x_2,x_3)\varepsilon\mathbb{R}^3/x_1^2+x_2^2\leq R^2 \text{ e } x_3=0\}$$

$$E_2=\{(x_1,x_2,x_3)\varepsilon\mathbb{R}^3/x_1=x_2=0 \text{ e } 0\leq x_3\leq 1\}$$



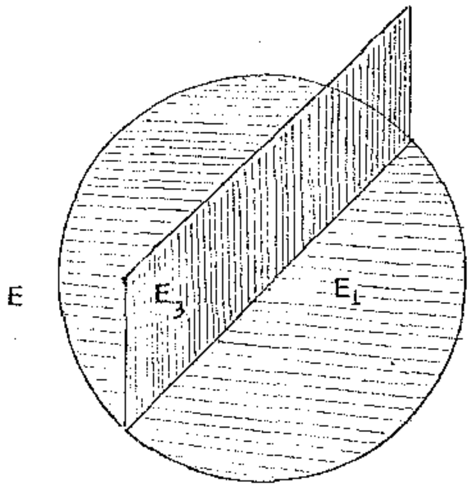
E

O conjunto E possui um obstáculo sutil.

Exemplo 2. Seja $E=E_1\cup E_3$ onde

E_1 é o conjunto do exemplo anterior e

$$E_3=\{(x_1,x_2,x_3)\varepsilon\mathbb{R}^3/|x_1|\leq R, x_2=0,\ 0\leq x_3\leq 1\}$$



Qualquer que seja $x \in E$, $\mathrm{dens}(E,x) > 0$ portanto E neste exemplo é um obstáculo grosso.

Observe que quando o obstáculo não é sutil vale sempre $E \subseteq \tilde{E}''$.

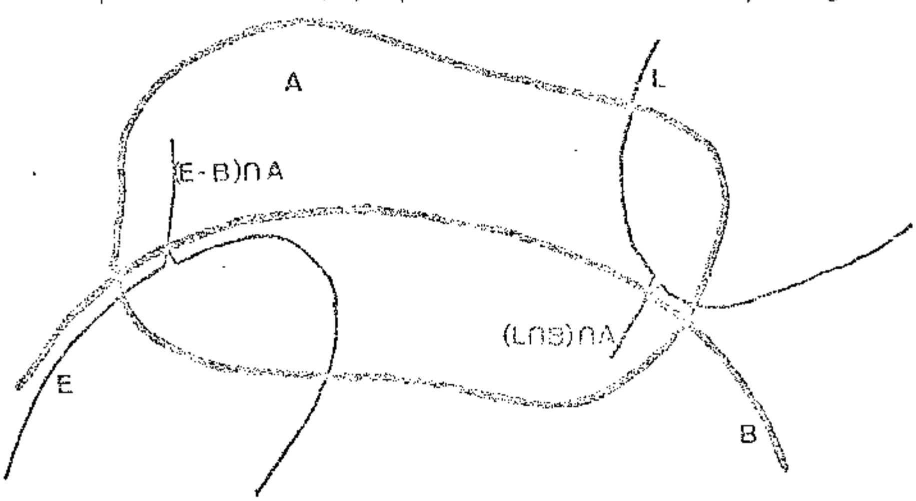
Quando os obstáculos são sutis, trabalharemos na classe G_n (def. 3.1) menos geral que a dos borelianos. A partir da medida σ(def. 3.3) definiremos o funcional F, mostraremos sua semi-continuidade e demonstraremos no teorema 4.4 a existência do mínimo em G_n.

No final do capítulo veremos no teorema 4.5, relações entre os diferentes mínimos.

<u>Definição 4.2</u> Sejam A um aberto de $\mathbb{R}^n$, E e L dois borelianos disjuntos. Então para todo $B \subset \mathbb{R}^n$ poremos:

$$F(B;A,E,L) = P(B,A) + \sigma((E-B) \cap A) + \sigma((L \cap B) \cap A)$$

ou notaremos simplesmente $F(B)$ quando não houver perigo de confusão.



<u>Observação</u>: Se $E \subseteq B$ e $B \cap L = \phi$ então $F(B;A,E,L) = P(B,A)$.

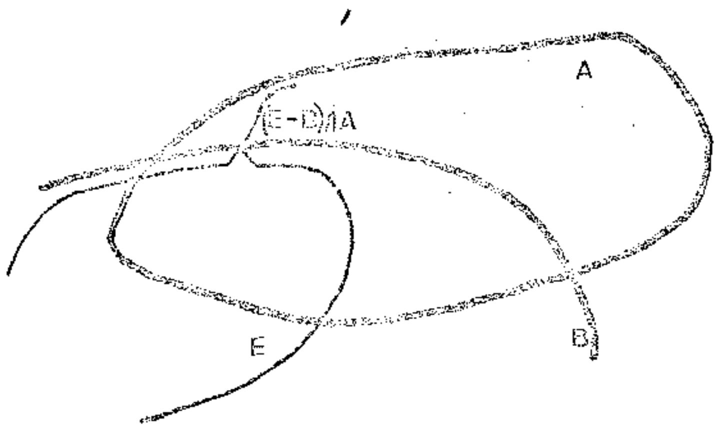
Para mostrarmos a semicontinuidade de F, necessitamos provar dois lemas:

<u>Lema 4.1</u> *Sejam*: A *um aberto de* $\mathbb{R}^n$; E *boreliano de* $\mathbb{R}^n$; e B *pertencente a* G_n *tal que:*

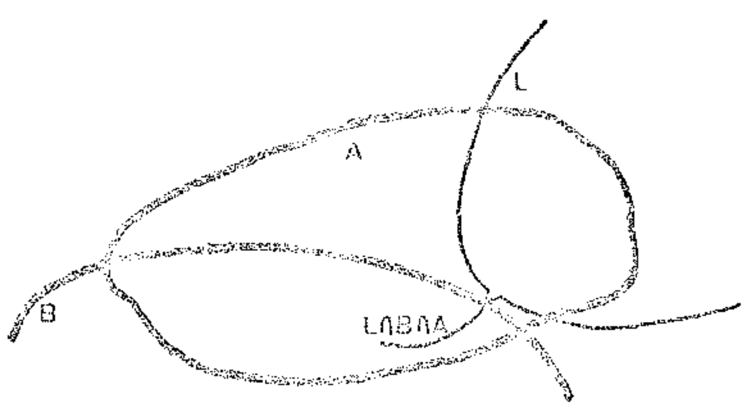
$$x \in (E-B) \Rightarrow \lim_{\rho \to 0} \rho^{-n} \text{ med } (B \cap A_\rho(x)) = 0$$

isto é, densidade de B *em* x *é zero. Seja* $\{B_h\}$ *uma sequência de conjuntos de* G_n *que tende a* B *em* $L^1_{loc}(A)$. *Então*

$$\sigma((E-B) \cap A) \leq \min_{h \to \infty} \lim [P(B_h, A) + \sigma((E-B_h) \cap A)] + P(B,A)$$



Lema 4.1



Lema 4.2

Observação: A implicação da hipótese acima indica que para todo B' pertencente a G_n, equivalente a B temos $B' \cap E \equiv B \cap E$, isto é, B é o conjunto que contem a maior parte possível de E.

Prova da observação: Seja $x \in B' \cap E$. Suponhamos por absurdo que $x \notin B$ então $x \in (E-B)$. Logo $\mathrm{dens}(x,B) = 0$ e portanto $\mathrm{dens}(x,B') = 0$, pois B' e B são equivalentes. Como $B' \in G_n$ temos $x \notin B'$ e daí $x \notin B' \cap E$ o que é absurdo. Então $x \in B \cap E$.

Prova do lema: Seja $A' \subset\subset A$. Para todo $\varepsilon > 0$, σ_ε é uma medida exterior, (teorema 3.3), então como

$$(E-B) \subseteq (E-B_h) \cup [(B_h-B) \cap E]$$

temos

$$(1) \quad \sigma_\varepsilon(E-B;A') \leq \sigma_\varepsilon(E-B_h;A') + \sigma_\varepsilon(B_h-B) \cap E ; A')$$

Observe agora que $E \cap (B_h-B) \subset \widetilde{B_h-B}$ pois se $x \in E \cap (B_h-B)$ temos que:

a) $x \in E-B \Rightarrow \lim\limits_{\rho \to o} \rho^{-n} \mathrm{med}(B \cap A_\rho(x)) = 0$ (hipótese)

b) $x \in E \cap B_h (B_h \in G_n) \Rightarrow \max \lim\limits_{\rho \to o} \rho^{-n} \mathrm{med}(B_h \cap A_\rho(x)) > 0$

$\Rightarrow \max \lim\limits_{\rho \to o} \rho^{-n} \mathrm{med}\ [(B_h-B) \cap A_\rho(x)] > 0$

$\Rightarrow x \in \widetilde{B_h-B}$ (pela definição 3.2)

Recordando as proposições 2.1, 2.2, 2.3 temos:

$$(2) \quad P(\widetilde{B_h-B},A') = P(B_h-B,A') \leq P(B_h,A') + P(B,A')$$

pois $\mathrm{med}(\widetilde{B_h - B} \,\Delta\, B_h - B) = 0$, $B_h - B = B_h \cap (\mathbb{R}^n - B)$ e $P(B,A') = $
$= P(\mathbb{R}^n - B, A')$.

(3) $\mathrm{med}\,(\widetilde{B_h - B}, A') = \mathrm{med}(B_h - B, A')$.
Pela definição de σ_ε temos:

$$\sigma_\varepsilon((B_h - B) \cap E; A') \leq P(G,A') + \frac{\mathrm{med}(G \cap A')}{\varepsilon}, G \in G_h, G \supset E^* \cap A'$$

onde $E^* = (B_h - B) \cap E$.
Como já mostramos $E^* \subset \widetilde{B_h - B}$, então tomemos $G = \widetilde{B_h - B}$

$$\sigma_\varepsilon((B_h - B) \cap E; A') \leq P(\widetilde{B_h - B}, A') + \frac{\mathrm{med}(\widetilde{B_h - B} \cap A')}{\varepsilon}$$

substituindo $P(\widetilde{B_h - B}, A')$ pela (2) temos

$$\sigma_\varepsilon((B_h - B) \cap E; A') \leq P(B_h, A') + P(B, A') + \frac{\mathrm{med}(B_h - B) \cap A'}{\varepsilon}$$

substituindo em (1) nos dá a majoração seguinte:

$$\sigma_\varepsilon(E - B; A') \leq \sigma(E - B_h; A) + P(B_h, A) + P(B, A) + \frac{\mathrm{med}(B_h - B) \cap A'}{\varepsilon}$$

que passando ao limite para $h \to +\infty$ fica:

$$\sigma_\varepsilon(E - B; A') \leq \min_{h \to +\infty} \lim \{\sigma(E - B_h; A) + P(B_h, A)\} + P(B, A)$$

fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos

$$\sigma(E - B; A') \leq \min_{h \to \infty} \lim \{\sigma(E - B_h; A) + P(B_h, A)\} + P(B, A)$$

que pelo teorema 3.8 pode ser escrita como:

$$\sigma\,(E-B \cap A') \leq \min_{h \to +\infty} \lim \{\sigma((E-B_h) \cap A) + P(B_h,A)\} + P(B,A)$$

que vale para todos os abertos $A' \subset\subset A$.

Portanto, basta considerarmos uma sequência de abertos $A_s \subset\subset A$ com $A_{s+1} \supseteq A_s$ e $\bigcup_{s=1}^{\infty} A_s = A$ e obtemos

$$\sigma((E-B) \cap A) \leq \min_{h \to \infty} \lim \left[P(B_h,A) + \sigma(E-B_h) \cap A)\right] + P(B,A)$$

Lema 4.2 *Sejam: A um aberto de* $\mathbb{R}^n$; *L um boreliano de* $\mathbb{R}^n$; *B um conjunto de* G_n *tal que: se* $x \in L \cap B$ *então*

$$\lim_{\rho \to o} \rho^{-n}\, \mathrm{med}(A_\rho(x)-B) = 0.$$

Seja $\{B_h\}$ uma sequência de conjuntos de G_n que tende a B em $L^1_{loc}(A)$. Então

$$\sigma\,((L \cap B) \cap A) \leq \min_{h \to \infty} \lim \{P(B_h,A)+\sigma((L \cap B_h) \cap A)\}+P(B,A)$$

Observação: A implicação da hipótese acima, indica que de todos os conjuntos de G_n, equivalentes a B, B é aquele que contém a menor parte de L.

Para provar esse lema, basta tomar $L \cap B = L-(\mathbb{R}^n-B)$ e aplicar o lema anterior.

Teorema 4.3 *(Semicontinuidade do funcional F). Considerando por hipótese os seguintes fatos:*

(i) *A aberto do* $\mathbb{R}^n$.

(ii) E e L *dois borelianos de* $\mathbb{R}^n$, *tal que*, $E \cap L = \phi$.

(iii) *Para todo* $x \in (E-B)$ *então* $\operatorname{dens}(x,B) = 0$.

(iv) *Para todo* $x \in (L \cap B)$ *então* $\operatorname{dens}(x,B) = 1$.

(v) $\{B_h\}$ *sequência de conjuntos de* G_n, *que tende a* $B \in G_n$ *em* $L^1_{loc}(A)$.

Então: $F(B) \leq \min\lim\limits_{h\to\infty} F(B_h;A,E,L)$

Demonstração: Suponhamos que o segundo membro da desigualdade acima seja finito, pois caso contrário, nada resta a demonstrar.

(1) Pela definição do funcional F temos:

$$\min\lim_{h\to\infty} F(B_h;A,E,L) = \min\lim_{h\to\infty} \{P(B_h,A) + \sigma[(E-B_h) \cap A] +$$

$$+ \sigma((L \cap B_h) \cap A)\} < +\infty$$

(2) Pela semicontinuidade do Perímetro temos

$$P(B,A) \leq \min\lim_{h\to\infty} P(B_h,A) < +\infty$$

(3) Pelos lemas 4.1 e 4.2 temos

$$\sigma((E-B) \cap A) \leq P(B,A) + \min\lim_{h \to +\infty} \{P(B_h,A) + \sigma((E-B_h) \cap A)\} < +\infty$$

$$\sigma(L \cap B \cap A) \leq P(B,A) + \min\lim_{h \to +\infty} \{P(B_h,A) + \sigma(L \cap B_h \cap A)\} < +\infty$$

(4) Pela propriedade da fronteira reduzida de B, isto é, se $x \in \partial^* B$ então

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \frac{\text{med}(B \cap A_\rho(x))}{\text{med } A_\rho(x)} = \frac{1}{2}$$

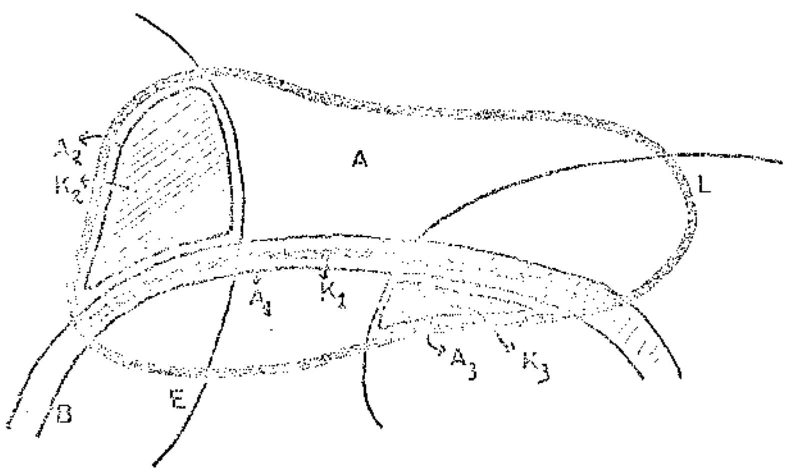
e pelas hipóteses (iii) e (iv) temos:

$$\partial^* B \cap (E-B) = \phi$$

$$\partial^* B \cap (L \cap B) = \phi$$

(5) Como $E \cap L = \phi$, podemos encontrar três compactos disjuntos, tais que:

$$K_1 \subseteq \partial^* B \cap A \; ; \; K_2 \subseteq (E-B) \cap A \; ; \; K_3 \subseteq (L \cap B) \cap A$$



(6) Do fato de $P(B,A) < +\infty$, pelo teorema 2.9, temos:

$$P(B,A) = \int_{\partial^* B \cap A} |D\phi(x,B)|$$

e pelo teorema 1.5, para todo $\varepsilon > 0$, temos:

a) o fechado $K_1 \subset \partial^* B \cap A$ tal que

$$\int_{\partial^* B \cap A} |D\phi(x,B)| < \int_{K_1} |D\phi(x,B)| + \varepsilon < P(B,A_1) + \varepsilon$$

b) o fechado $K_2 \subset (E-B) \cap A$ tal que

$$\sigma((E-B) \cap A) \leq \sigma(K_2) + \varepsilon = \sigma(K_2-B) \cap A_2) + \varepsilon$$

c) o fechado $K_3 \subset (L \cap B) \cap A$ tal que:

$$\sigma((L \cap B \cap A) \leq \sigma(K_3) + \varepsilon = \sigma(K_3 \cap B \cap A_3) + \varepsilon$$

onde A_i, $i=1,2,3$, são abertos tais que $A_i \subset\subset A$, $K_i \subset A_i$ e $\mathrm{dist}(A_i, A_j) > 0$ para $i \neq j$.

(7) De acordo com a definição do funcional F e as majorações (a), (b), (c) de (6) temos:

$$F(B;A,E,L) \leq P(B,A_1) + \sigma(K_2) + \sigma(K_3) + 3\varepsilon =$$

$$= P(B,A_1) + \sigma((K_2-B) \cap A_2) + \sigma(K_3 \cap B \cap A_3) + 3\varepsilon$$

(8) Por outro lado temos que

$$P(B, A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(B,A_1) + P(B,A_2) + P(B,A_3) \qquad \text{(prop. 2.2)}$$

$$\leq P(B,A) \qquad (\cup A_i \subset A)$$

$$\leq P(B,A_1) + \varepsilon \qquad \text{((a) acima)}$$

então $P(B,A_2) + P(B,A_3) < \varepsilon$ ou ainda $P(B,A_2) < \varepsilon$ e $P(B,A_3) < \varepsilon$.

(9) Pela semicontinuidade do perímetro (teo 2.11)

$$P(B,A_1) \leq \min_{h} \lim_{\to \infty} P(B_h,A_1) \quad ;$$

e pelos lemas 4.1 e 4.2, usando (8) temos:

$$\sigma((K_2-B)\cap A_2) \leq \min_{h \to \infty} \lim [P(B_h,A_2)+\sigma((K_2-B_h)\cap A)]+\varepsilon$$

$$\sigma((K_3 \cap B \cap A_3) \leq \min_{h} \lim_{\to \infty} [P(B_h,A_3)+\sigma(K_3 \cap B_h \cap A)]+\varepsilon$$

(10) Do fato de A_1, A_2, A_3 serem abertos disjuntos contidos em A, temos para todo h

$$\sum_{i=1}^{3} P(B_h,A_i) = P(B_h, \bigcup_{i=1}^{3} A_i) \leq P(B_h,A)$$

(11) Majorando $\sigma((K_2-B_h)\cap A)$ com $\sigma((E-B_h)\cap A)$ e $\sigma(K_3 \cap B_h \cap A)$ com $\sigma(L \cap B_h \cap A)$, pois σ é subaditiva e $K_2 \subset E$, $K_3 \subset L$.

(12) E das relações obtidas em (9), se tem majorando a desigualdade (7) a seguinte relação

$$F(B;A,E,L) \leq \min_{h} \lim_{\to \infty} [P(B_h,A_1)+P(B_h,A_2)+P(B_h,A_3)$$

$$+ \sigma((K_2-B_h)\cap A)+\sigma(K_3 \cap B_h \cap A)]+5\varepsilon \leq$$

$$\leq \min_{h} \lim_{\to \infty} [P(B_h,A)+\sigma((E-B_h)\cap A)+\sigma(L \cap B_h \cap A)]+5\varepsilon$$

$$= \min_{h} \lim_{\to \infty} F(B_h;A,E,L) + 5\,\varepsilon$$

Pela arbitrariedade de ε temos:

$$F(B;A,E,L) \leq \min_{h\to\infty} \lim F(B_h;A,E,L)$$ cqd.

Teorema 4.4 *(Existência do mínimo do funcional F) Sejam:* A *um aberto de* $\mathbb{R}^n$; E *e* L *dois borelianos de* $\mathbb{R}^n$; *e* $E \cap L = \phi$, *: Então existe* $B_o \in G_n$ *tal que:*

$$F(B_o;A,E,L) = \min\{F(B;A,E,L)\ ;\ B \in G_n\}$$

Demonstração:

Seja $\{B_h\}$ uma sequência de conjuntos de G_n, tal que $F(B_h)$ converge para $\inf\{F(B):B\in G_n\} = m$ (que existe pois $F(B) \geq 0$).

Logo $P(B_h,A) \leq F(B_h) \leq k$ e o perímetro é equilimitado, então pelo teorema de compacidade, existe (B_{h_k}) tal que

$$B_{h_k} \to B_1 \quad \text{em} \quad L^1_{loc}(A)$$

Definimos $B_o = (\tilde{B}''_1 \cap E) \cup (\tilde{B}'_1 \cap (\mathbb{R}^n - E))$ e temos como verdadeiro os seguintes fatos:

(1) $\text{med}\ (B_o \,\Delta\, B_1) = 0$

(2) $B_o \in G_n$

(3) $x \in E - B_o \Rightarrow \text{dens}(x,B_o) = 0$

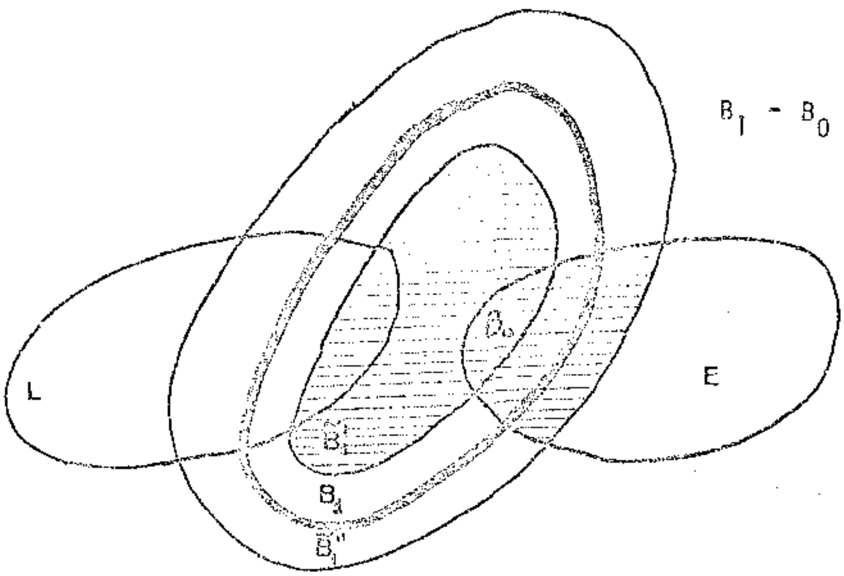
(4) $x \in L \cap B_o \Rightarrow \text{dens}(x,B_o) = 1$

que implicam pelo teorema 4.3.

$$F(B_o) = \min \{F(B) : B \in G_n\}$$

Prova de (1)

$$B_o \,\Delta\, B_1 = (B_1 - B_o) \cup (B_o - B_1)$$



$B_1 - B_0 = (B_1 - \tilde{B}') - (B_1 \cap E \cap (\mathbb{R}^n - \tilde{B}_1')) \subseteq$

$\subseteq B_1 - \tilde{B}_1'$

$B_0 - B_1 \subseteq \tilde{B}_1'' - B_1$ a menos de um conjunto de medida nula.

portanto

$$\text{med}(B_1 \,\Delta\, B_o) = \text{med}(B_1 - B_o) + \text{med}(B_o - B_1) \leq$$

$$\leq \text{med}(B_1 - \tilde{B}_1') + \text{med}(\tilde{B}_1'' - B_1) \leq$$

$$\leq \text{med}(B_1 \,\Delta\, \tilde{B}_1') + \text{med}(B_1 \,\Delta\, \tilde{B}_1'') = 0$$

Prova de (2) $B_o \in G_n$. De fato:

se $\text{dens}(x, B_o) = 0$ então $\text{dens}(x, B_1) = 0$ logo $x \notin \tilde{B}_1''$.
Como $x \notin \tilde{B}_1'$ temos $x \notin B_o$;

se $\mathrm{dens}(x,B_o) = 1$ então $\mathrm{dens}(x,B_1) = 1$ logo $x \in \tilde{B}_1'$.
Pela definição de B_o temos $x \in B_o$.

Prova de (3) Se $x \in E-B_o$ então $\mathrm{dens}(x,B_o) = 0$. De fato:

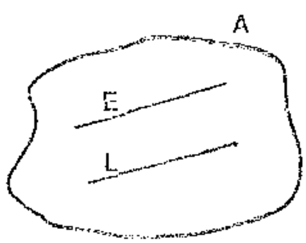
$x \in E-B_o \Rightarrow x \in E$ e $x \notin B_o$ logo $x \notin \tilde{B}_1''$ o que implica que $\mathrm{dens}(x,B_1)=0$ e portanto $\mathrm{dens}(x,B_o)=0$.

Prova de (4) Se $x \in L \cap B_o$ então $\mathrm{dens}(x,B_o) = 1$. De fato:

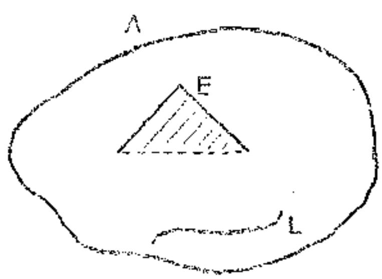
$x \in L \cap B_o \Rightarrow x \in L$ e $x \in B_o$ logo $x \in \tilde{B}_1'$ o que implica que $\mathrm{dens}(x,B_1)=1$ e portanto $\mathrm{dens}(x,B_o) = 1$.

cqd.

<u>Observação</u>: Como $B_o=(\tilde{B}'' \cap E) \cup (\tilde{B}' \cap (\mathbb{R}^n-E))$, então se E e L são como nas figuras abaixo então temos o seguinte:



$B_o = \phi$



B_o é o triângulo

Teorema 4.5: *Sejam:* A *um aberto de* $\mathbb{R}^n$; E *e* L *dois borelianos de* $\mathbb{R}^n$ *disjuntos. Então:*

a) *se chamarmos de:*

$$\lambda = \min\{P(B,A) \ ; \ B \text{ de } Borel \ , \ B \supseteq E \ , \ B \cap L = \phi\}$$

$$u = \min\{P(B,A)+\sigma((E-B) \cap A)+\sigma(L \cap B \cap A) \ ; \ B \in G_n\}$$

$$\gamma = \inf\{P(B,A) \ ; \ B \in G_n, \ B \supseteq E \cap A \ , \ (B \cap L) \cap A = \phi\}$$

teremos $\lambda \leq u \leq \gamma$

(b) *Se* $E \cap A$, $L \cap A$ *são obstáculos grossos, isto é,* $(E \cap A) \equiv (\widetilde{E \cap A})''$ e $(L \cap A) \equiv (\widetilde{L \cap A})''$ *teremos*

$$\lambda = u = \gamma = \min \ \{P(B,A) \ ; \ B \in G_n, \ B \supseteq E \cap A, \ B \cap L \cap A = \phi\}$$

(c) *Se existem dois abertos* U *e* V *contidos em* A, *tais que,* $U \supseteq E \cap A$ *e* $V \supseteq L \cap A$, *teremos:*

$$u = \gamma$$

Demonstração da parte a) Demonstraremos primeiro que

$$(1) \quad \lambda \leq u$$

para isso suponhamos que $u < +\infty$, isto é,

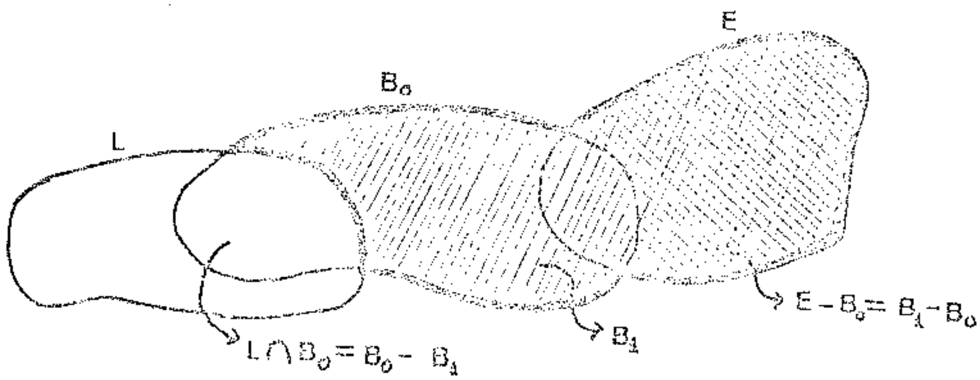
$$\sigma((E-B) \cap A) < +\infty \qquad \text{e} \quad \sigma(L \cap B \cap A) < +\infty$$

que pela definição de σ vemos que $\text{med}((E-B) \cap A) = 0$. e $\text{med}(L \cap B \cap A) = 0$.

Seja $B_o \in G_n$ tal que

$P(B_o, A) + \sigma(E - B_o; A) + \sigma(B_o \cap L; A) = u$

O conjunto $B_1 = [B_o \cup (E - B_o)] - (B_o \cap L)$ é um borelia no e verifica as seguintes condições: $B_1 \supseteq E$; $B_1 \cap L = \phi$ e $\mathrm{med}[(B_1 \triangle B_o) \cap A] = 0$.



Logo pela proposição 2.1 temos que

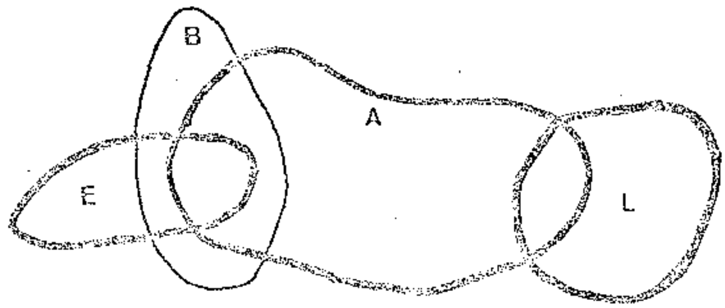
$$P(B_1, A) = P(B_o, A) \leq u$$

Como $\lambda = \min \{P(B_1, A) ; B_1 \in \mathcal{B}, B_1 \supseteq E, B_1 \cap L = \phi\}$ então

$$\lambda \leq P(B_1, A) \leq u \qquad \text{cqd.}$$

Mostraremos agora que

(2) $u \leq \gamma$



Para todo $B \in G_n$, tal que $B \supseteq E \cap A$, $B \cap L \cap A = \phi$ portanto $(E-B) \cap A = \phi$ temos $\sigma((E-B) \cap A) = 0$ e $\sigma(B \cap L \cap A)=0$; então

$$F(B;A,E,L) = P(B,A)$$

Nas condições acima e pelas definições de u e γ temos:

$$P(B,A) \geq u$$

$$P(B,A) \leq \gamma + \varepsilon$$

logo $$u \leq \gamma$$

Demonstração da parte b) Quando os obstáculos são grossos temos:

(3) $\lambda = u = \gamma = \min\{P(B,A); B \in G_n,\ B \supseteq E \cap A, B \cap L \cap A = \phi\}$

Seja B_o um boreliano tal que $B_o \supseteq E$, $B_o \cap L = \phi$ e $P(B_o,A) = \lambda$. Pela proposição 3.2 temos que se $B_o \supseteq E$ então $B_o \supseteq E \cap A$ e daí $\tilde{B}_o \supseteq \widetilde{E \cap A} \supseteq E \cap A$. Pela prop. 3.1 do fato de $B_o \cap L = \phi$ temos $\mathbb{R}^n - B_o \supseteq L$ e portanto $\mathbb{R}^n - \tilde{B}_o \supseteq \tilde{L} \supseteq L$ o que nos dá $\tilde{B}_o \cap L = \phi$. Logo

$$\gamma = \inf\{P(\tilde{B}_o, A) \; ; \; \tilde{B}_o \in G_n \; , \; \tilde{B}_o \supseteq E \cap A \; , \; \tilde{B}_o \cap L \cap A = \phi\}$$

e portanto

$$P(\tilde{B}_o, A) \geq \gamma$$

Mas B_o e $\tilde{B}_o$ são equivalentes $(\text{med}[(B_o \Delta \tilde{B}_o) \cap A] = 0)$ então pela proposição 3.1 tem o mesmo perímetro em relação a A, isto é,

$$\gamma \leq P(\tilde{B}_o, A) = P(B_o, A) = \lambda \qquad \text{(por hipótese)}$$

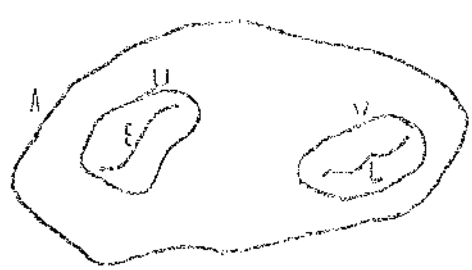
Logo $\gamma \leq \lambda$ e por (1) e (2) da parte (a) temos

$$\lambda = u = \gamma$$

Demonstração da parte c)

(4) $u = \gamma$

Por hipótese existem dois abertos disjuntos U e V tais que $A \supseteq U \supseteq E \cap A$, $A \supseteq V \supseteq L \cap A$. Suponhamos também que existe B_o pertencente a G_n, tal que $F(B_o; A, E, L) = u < +\infty$.



Chamemos de

$$U_o = \{x \in U: dist(x, \mathbb{R}^n - U) \geq 1/2\}$$

$$U_h = \{x \in U: {}^1/_{2^{h+1}} \leq dist(x, \mathbb{R}^n - U) < {}^1/_{2^h}\}$$
$$h = 1, 2, \ldots\ldots$$

$$V_o = \{x \in V: dist(x, \mathbb{R}^n - V) < 1/2\}$$

$$V_k = \{x \in V: {}^1/_{2^{k+1}} \leq dist(x, \mathbb{R}^n - V) < {}^1/_{2^k}\}$$
$$k = 1, 2, \ldots.$$

Então $\bigcup_{h=0}^{\infty} U_h = U$ e $\bigcup_{k=0}^{\infty} V_k = V$

Pelo teo 3.8 se $E \cong A$ então $\sigma(E;A) = \sigma(E)$. Como σ é completamente aditiva nos borelianos temos

$$(5) \quad \sum_{h=0}^{\infty} \sigma((E-B_o) \cap U_h) = \sigma((E-B_o) \cap U) = \sigma((E-B_o) \cap A)$$

$$(6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sigma(L \cap B_o \cap V_k) = \sigma(L \cap B_o \cap V) = \sigma(L \cap B_o \cap A) \quad ;$$

pois, $E \cap A \cong U$ e $L \cap A \cong V$, logo $(E-B_o) \cap A \cong U$ e $(L \cap B_o \cap A) \cong V$.

Como por construção $dist(V_k, V_{k+2}) > 0$ e $dist(U_h, U_{h+2}) > 0$ pelo lema 3.9, temos para todo $\varepsilon > 0$, duas sequências de conjuntos de classe G_n, $\{F_h\}$, $\{G_k\}$ tais que

$$(E-B_o) \cap U_h \cong F_h \cong \left[\bigcup_{j=0}^{h+1} U_j\right]$$

$$(L \cap B_o) \cap V_k \cong G_k \cong \left[\bigcup_{j=0}^{k+1} V_j\right] \quad \text{e além disso}$$

$$(7)\quad P(F_h) < \sigma[(E-B_o) \cap U_h] + \frac{\varepsilon}{2^h}$$

$$(8)\quad P(G_k) < \sigma(L \cap B_o \cap V_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Agora pela prop 2.2 temos $P(F_h)=P(F_h,A)$ e $P(G_k)=P(G_k,A)$. Portanto, pelas relações (5) e (6), $U \cup V \supseteq A$, e chamando de $F = \bigcup_{k=0}^{\infty} F_h$ e $G= \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ obtemos:

$$(9)\quad P(F,A) \leq \sum_{h=0}^{\infty} P(F_h,A) = \sum_{h=0}^{\infty} P(F_h) < \sigma[(E-B_o) \cap A]+2\varepsilon$$

$$(10)\quad P(G,A) \leq \sum_{k=0}^{\infty} P(G_k,A) = \sum_{k=0}^{\infty} P(G_k) < \sigma(L \cap B_o \cap A)+2\varepsilon$$

vale ainda

$$(E-B_o) \cap A = (E-B_o) \cap U \subseteq F \subseteq U$$

$$(L \cap B_o \cap A) = L \cap B_o \cap V \subseteq G \subseteq V$$

Definindo $B_1 = (B_o \cup F)-G$ teremos que: $B_1 \supseteq E \cap A$; $B_1 \cap (L \cap A) = \phi$ e além disso pela (9) e (10) obtemos:

$$P(\tilde{B}_1,A)=P(B_1,A) \leq P(B_o,A) + P(F,A) + P(G,A) \leq$$

$$\leq P(B_o,A)+\sigma((E-B_o) \cap A)+\sigma(L \cap B_o \cap A)+4\varepsilon=u + 4\varepsilon$$

Como $\gamma = \inf\{P(\tilde{B}_1,A) ; \tilde{B}_1 \varepsilon G_n, \tilde{B}_1 \supseteq E \cap A, \tilde{B}_1 \cap L \cap A = \phi\}$ temos $\gamma \leq P(\tilde{B}_1,A) \leq u+4\varepsilon$ e pela arbitrariedade de ε nos dá $\gamma \leq u$, que com a relação (2) resulta $u = \gamma$.

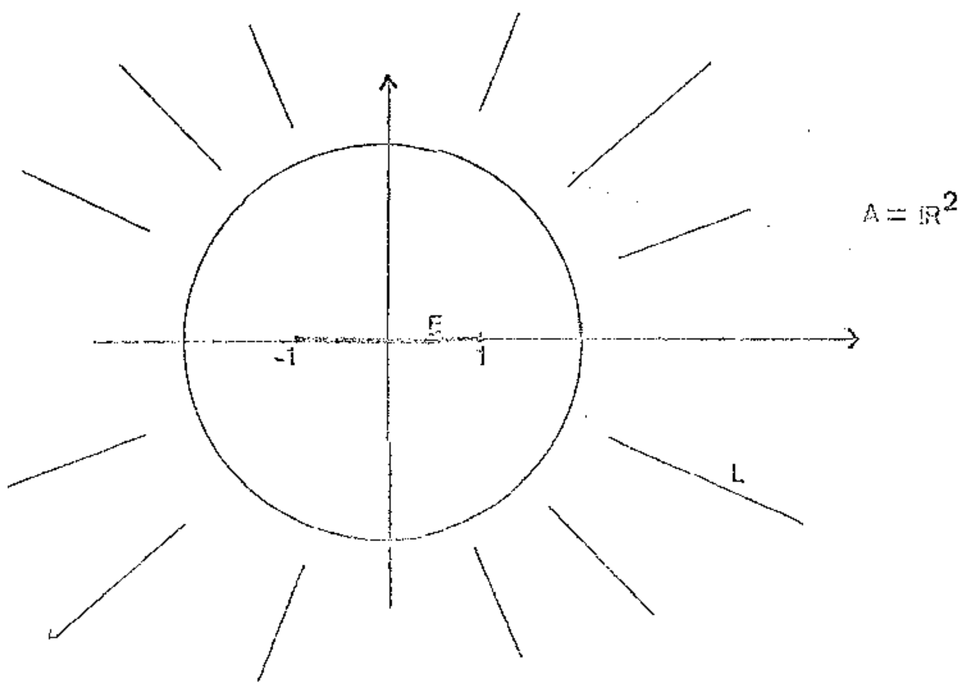
Observação: (1) $\tilde{B}_1 \supseteq E \cap A$

(2) $\tilde{B}_1 \cap (L \cap A) = \phi$

De fato. Como $B_1 \cap U \supseteq E \cap U = E \cap A$, então basta mostrar que $\tilde{B}_1 \cap U \supseteq E \cap U$. Observe que $B_1 \cap U = (B_o \cup F) \cap U$ com $B_o \in G_n$ e $F = \cup F_h$, $\underbrace{F_h \in G_n}$ logo pelas proposições 3.1 e 3.2 temos $B_1 \cap U = (B_o \cup F) \cap U \supseteq E \cap U$ e $\widetilde{B_1} \cap U \supseteq E \cap U$.

Para (2) basta mostrar que $L \cap A \subseteq \mathbb{R}^n - \tilde{B}_1 = \widetilde{\mathbb{R}^n - B_1}$. Usando a definição de B_1 temos $\mathbb{R}^n - B_1 = [(\mathbb{R}^n - B_o) \cup G] - F$ e com procedimento análogo mostra-se que $\widetilde{\mathbb{R}^n - B_1} \supseteq L \cap A$.

<u>Exemplo 3</u>: Sejam: $A = \mathbb{R}^2$; $L = \{x: |x|^2 \geq 4\}$; $E = \{(x_1, 0) : X_1 \leq 1\}$



Nestas condições:

(i) $\lambda = \min\{P(B)\ ,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), B \supset E, B \cap L = \phi\} = 0$,

pois esse mínimo será obtido por $B_o = E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ e $P(E, \mathbb{R}^2) = 0$ (teo 2.12).

(ii) $u = \min \{F(B)\ ,\ B \in G_n\} = 4$

pois esse mínimo será obtido por $B_o = \phi \in G_n$ e $F(\phi) = \sigma(E)$ = duas vezes comprimento de $E = 4$.

(iii) $\nu = \inf\{P(B,\mathbb{R}^2)\ ,\ B \in G_n, B \supseteq E, B \cap L = \phi\} = 4$

pois tomando a sequência minimizante $\{B_h\}$ tal que $B_h = \left\{(x_1,x_2) : |x_1| \leq 1,\ |x_2| \leq \frac{1}{h}\right\}$, temos que

$$\nu = \lim_{h\to\infty} P(B_h,\ \mathbb{R}^2) = \lim_{h\to\infty} \left(4 + \frac{4}{h}\right) = 4$$

Observe que neste exemplo existe dois abertos U e V tais que $U \supseteq E \cap \mathbb{R}^2$ e $V \supseteq L \cap \mathbb{R}^2$, isto é,

$$U = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x|^2 < R,\ 1 < R < 2\}$$

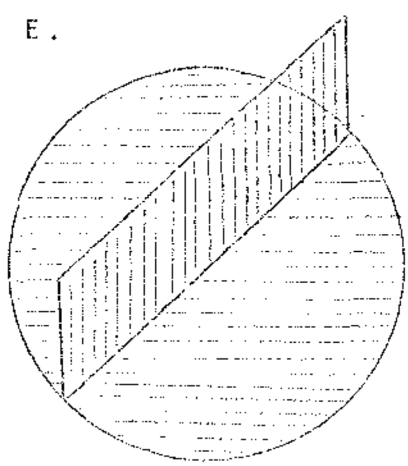
$$V = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x|^2 > R,\ 1 < R < 2\}.$$

Então pela parte (c) do teorema

$$u = \gamma = 4.$$

<u>Exemplo 4</u>: Sejam: E o conjunto do exemplo 2; $A = \mathbb{R}^3$ e $L = \mathbb{R}^3 - B$ tal que $B \supseteq E$.

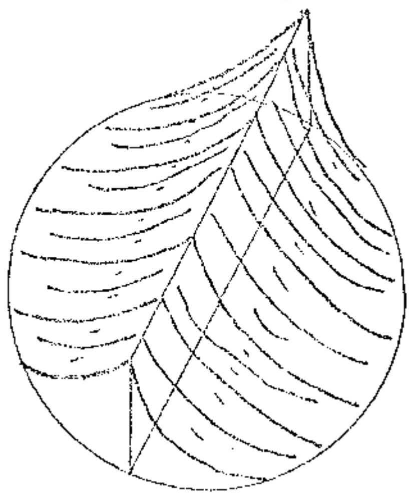
E



Neste caso teremos

$$\lambda=u=\gamma=\min\{P(B), B\in G_n, B \supseteq E, B \cap L = \phi\}$$

pois, construindo o contorno do conjunto E com arame bem fino e mergulhando o conjunto assim obtido em uma mistura de água e sabão, obteremos uma bolha no seguinte formato.



O conjunto formado pela bolha chamaremos de B_o e para esse B_o obtemos

$$\lambda = P(B_o) = \min\{P(B); B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3), B \supset E, B \cap L = \phi\}$$

$$u = F(B_o) = \min\{F(B) , B \in G_n\} =$$

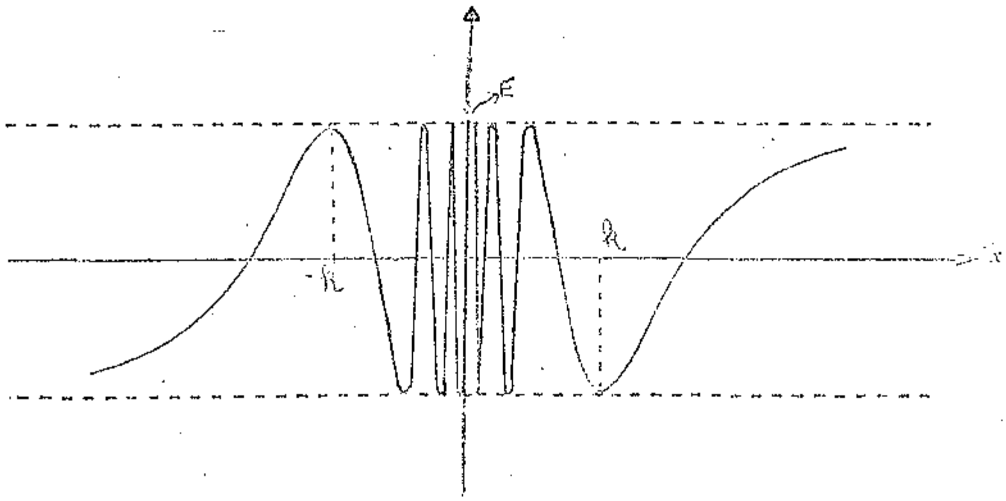
$$= P(B_o) + \sigma(E-B_o) + \sigma(L \cap B_o) = P(B_o)$$

$$\gamma = P(B_o) = \inf\{P(B) , B \in G_n , B \supset E, B \cap L = \phi\}$$

$$= \min \{P(B), B \in G_n, B \supset E, B \cap L = \phi\}$$

isto é, $\lambda = u = \gamma$ como na parte b do teorema.

<u>Exemplo 5</u>: Sejam: E e L descritos pela figura seguinte:



$E = \{(0,y) : |y| \leq 1\}$

$L = \{(x,y) : y = \text{sen } 1/x;\ 0<|x|\leq k\}$

$A = \mathbb{R}^3$

Assim

$\lambda = P(B_o) = \min\{P(B); B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3), B \supset E, B \cap L = \phi\}$

$= P(E) = 0$

$u = F(B_o) = \min\{F(B), B \in G_n\} = F(\phi) = 4$

$\gamma = \inf\{P(B); B \in G_n, B \supset E, B \cap L = \phi\} = \inf \phi = +\infty$

Portanto $\lambda < u < \gamma$ como na parte (a) do teorema 4.5.

BIBLIOGRAFIA

C. DG. P [1] Colombini, F. - De Giorgi, E - Piccinini, L.C. "Frontiere Orientate di Misura Mínima e Questioni Collegate" Scuola Normale Superiore, Pisa - - Classe di Scienza - 1972.

D [1] D'Ambrosio, U. "Superfícies Generalizadas e Conjuntos de Perímetro Finito" Tese Doutoramento São Carlos - 1963.

DG [1] De Giorgi, E. "Su Una Teoria Generale Della Misura (n-1) Dimensionale in Uno Spazio ad n Dimensione" Ann. Di Matemática, serie IV, vol. 36, 1954, 191-213.

DG [2] De Giorgi, E. "Nuovi Teoremi Relativialle Misure (n-1) Dimensionali in Uno Spazio ad n-dimensioni" - Ricerche di Mat., 4 (1955), 95-113.

DG [3] "Complementi Alla Teoria Dalla Misura (n-1) Dimensionale in Uno Spazio n Dimensionale" - Seminário de Mat. della Scuola Normale Superiore, Pisa (1960-61).

F [1] Federer, H. "Measure and Area" - Bull. of the Am. Math. Soc., 58 (1952(, 306-378.

F [2] Federer, H. "A Note on the Gauss-Green Theorem" Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 9 (1958) 447-451.

G [1] Giaquinta, M. e outros - "Problema de Plateau" 1974.

H [1] Halmos, P. "Measure Theory" Van Nostrand, NY, 1950.

M [1] Miranda, M. "Distribuzioni Aventi Derivate Misure, Insieme di Perímetro Localmente Finito" Ann. Scuola Normale Superiore, Pisa, 18 (1964) 27-56.

M [2] Miranda, M. "Frontiere Minimali con Ostacoli", Ann. Univ. Ferrara - 1971.

S [1] Schwartz, L. "Theorie des Distributions" Hermann , Paris (1966).