VARIEDADES DE GRASSMANN

JAIRO DE ARAUJO LOPES

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

L881v
4505/BC

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

UNICAMP

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO

AUTORIZAÇÃO PARA QUE A UNICAMP POSSA FORNECER, A PREÇO DE CUSTO, CÓPIAS DA TESE A INTERESSADOS

Nome do Aluno: JAIRO DE ARAUJO LOPES

Nº de Identificação: 746012

Endereço para Correspondência: R. FRANCISCO BIANCHINI, 419 - CEP 13.100 - CAMPINAS

Curso: MATEMÁTICA

Nome do Orientador: PROF. DR. ANTONIO CARLOS DO PATROCÍNIO

Título da Dissertação ou Tese: VARIEDADES DE GRASSMANN

Data proposta para a Defesa: 08/07/82

(O Aluno deverá assinar um dos 3 itens abaixo)

1) Autorizo a Universidade Estadual de Campinas a partir desta data, a fornecer, a preço de custo, cópias de minha Dissertação ou Tese a interessados.

07/06/82
Data

assinatura do aluno

2) Autorizo a Universidade Estadual de Campinas, a fornecer, a partir de dois anos após esta data, a preço de custo, cópias de minha Dissertação ou Tese a interessados.

__/__/__
Data

assinatura do aluno

3) Solicito que a Universidade Estadual de Campinas me consulte, dois anos após esta data, quanto à minha autorização para o fornecimento de cópias de minha Dissertação ou Tese, a preço de custo, a interessados.

__/__/__
Data

assinatura do aluno

DE ACORDO

Orientador

VARIEDADES DE GRASSMANN

JAIRO DE ARAUJO LOPES

ORIENTADOR

PROF. DR. ANTONIO CARLOS DO PATROCÍNIO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Junho, 1982.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Ao meu pai, à Beth,
Guilherme, Inaê e
Ceci.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por objetivo estudar alguns exemplos de variedades diferenciáveis definidas como espaço quociente G/H de grupos de Lie G por subgrupos fechados H, denominadas variedades homogêneas. Dentre os exemplos estudados damos ênfase às variedades de Grassmann, comparando sua estrutura diferenciável usual com a estrutura de variedade homogênea.

Assim, no Capítulo I definimos variedades diferenciáveis e apresentamos alguns exemplos. No entanto, características importantes concernentes aos nossos objetos de estudo não estão contidas nessa definição. Recorremos então à estrutura de grupos de Lie que caracteriza certas variedades, apresentando exemplos importantes como os grupos clássicos O(n), SO(n), U(n) e SU(n) utilizados no decorrer deste trabalho.

Iniciamos o Capítulo II garantindo a existência de uma estrutura de variedade diferenciável nos espaços quocientes descritos acima através do

<u>Teorema 2.1</u>: "Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G; $G/H = \{ xH : x \in G \}$ e $\pi : G \longrightarrow G/H$ com $\pi(x) = xH$ a aplicação quociente. Existe uma única estrutura de variedade diferenciável em G/H satisfazendo às condições:

(a) π é diferenciável.

(b) Para todo xH em G/H existe uma vizinhança W de xH em G/H e uma aplicação diferenciável $\zeta : W \longrightarrow G$ tal que $\pi \circ \zeta = id_W$".

Definimos ação transitiva de um grupo de Lie numa variedade e subgrupo de isotropia de um elemento p_o de uma variedade. O objetivo deste capítulo é identificar algumas variedades diferenciáveis na forma vista no Capítulo I como sendo variedades homogêneas. Tal fato é possível através do

<u>Teorema 2.2</u>: "Seja $\eta : G \times M \to M$ uma ação transitiva de um grupo de Lie G numa variedade M, $p_o \in M$ e G_{p_o} o subgrupo de isotropia de p_o. A aplicação

$$\begin{aligned} \alpha \quad : \quad & G/G_{p_o} \longrightarrow M \\ & xG_{p_o} \longmapsto \eta\,(x, p_o) = xp_o \end{aligned}$$

é um difeomorfismo".

Os seguintes exemplos são estudados:

1) *Esferas* - $S^{n-1} \simeq O(n)/O(n-1)$ e $X \simeq U(n)/U(n-1)$ onde X é a esfera unitária em C^n.

2) *Espaços Projetivos* - $P^{n-1} \simeq SO(n)/O(n-1)$ e $CP^{n-1} \simeq SU(n)/U(n-1)$.

3) *Variedade de Stiefel* - $S_m(R^n) \cong O(n)/O(n-m)$.

Um estudo análogo compõe o Capítulo III para a importante variedade de Grassmann, denotada por $G_{p,n}$ e constituída de todos os subespeços vetoriais de dimensão n do R^{n+p}. Primeiramente provamos o

<u>Teorema 3.1</u>: "$G_{p,n}$ é uma variedade diferenciável de classe C^∞".

Posteriormente, aplicando o Teorema 2.2 considerando a ação

$$\eta \; : \; O\,(n+p) \; \times G_{p,n} \to G_{p,n}$$

com a estrutura diferenciável dada pelo Teorema 3.1 concluimos:

<u>Teorema 3.2</u>: "$G_{p,n}$ é uma variedade homogênea".

Mais especificamente provamos que

$$" \, G_{p,n} \cong O(n+p) \,/\, O(n) \times O(p) \, ".$$

Em particular, tem-se $G_{p,n} \cong G_{n,p}$ e $P^{n-1} \cong G_{n-1,1}$.

CAPÍTULO I

VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS, GRUPOS DE LIE E A APLICAÇÃO EXPONENCIAL

Definição 1.1: Um par ordenado $(M, \mathcal{U})$ se diz uma *variedade diferenciável* de dimensão m e classe $C^k (k \geq 1)$ se:

(a) M é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável.

(b) $\mathcal{U}$ é uma coleção de homeomorfismos $x: U \to R^m$, de conjuntos abertos $U \subset M$ sobre abertos $x(U) \subset R^m$.

(c) Os domínios U dos homeomorfismos $x \in \mathcal{U}$ cobrem M.

(d) Dados os homeomorfismos $x: U \to R^m$ e $y: V \to R^m$ de $\mathcal{U}$, com $U \cap V \neq \emptyset$, a mudança de coordenadas

$$\varphi_{xy} = y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$$

é um homeomorfismo de classe C^k.

(e) Dado um homeomorfismo $z: W \to R^m$ de um aberto $W \subset M$

sobre $z(W) \subset R^m$ tal que φ_{zx} e φ_{xz} são de classe C^k para cada $x \in \mathcal{U}$ então $z \in \mathcal{U}$.

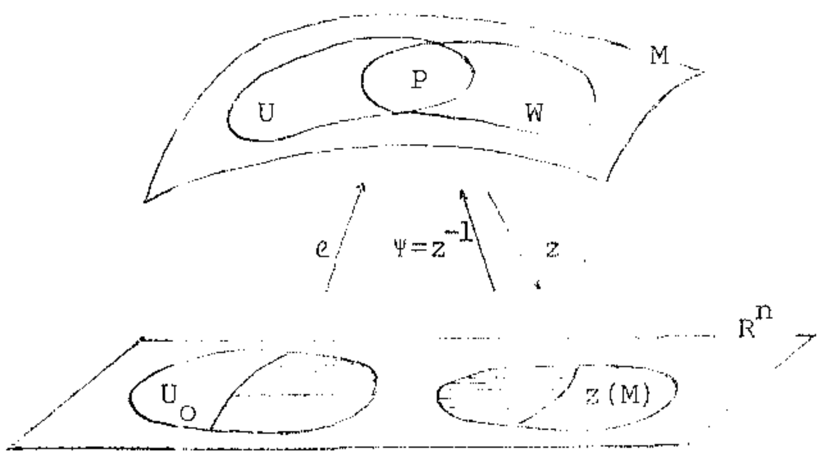
Uma coleção de homeomorfismos $\mathcal{U}$ satisfazendo a (b),(c) e (d) recebe o nome de *atlas diferenciável* de dimensão m e classe C^k sobre o espaço topológico M. Se adicionarmos todos os homeomorfismos que satisfazem (e) $\mathcal{U}$ se diz *atlas máximo* de dimensão m e classe C^k. Com isso, podemos definir variedade diferenciável de dimensão m e classe C^k como sendo o par ordenado $(M,\mathcal{U})$ onde M é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável e $\mathcal{U}$ um atlas máximo de dimensão m e classe C^k. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1 - *Os Espaços Euclidianos*

No R^m, consideremos o atlas $\mathcal{U}$ constituído somente do homeomorfismo $x = id : R^m \longrightarrow R^m$. Assim $\mathcal{U}$ é de classe C^k e dimensão m, mas $(R^m, \mathcal{U})$ não é uma variedade diferenciável visto que $y : R^m \longrightarrow R^m$, tal que $y(x_1, \ldots, x_m) = (2x_1, \ldots, 2x_m)$, é um homeomorfismo onde $\varphi_{xy} = y \circ x^{-1} : R^m \longrightarrow R^m$ tal que $\varphi_{xy}(x_1, \ldots, x_m) = (2x_1, \ldots, 2x_m)$ e $\varphi_{yx} = x \circ y^{-1} : R^m \longrightarrow R^m$ tal que $\varphi_{yx}(x_1, \ldots, x_m) = (\frac{1}{2} x_1, \ldots, \frac{1}{2} x_m)$ são homeomorfismos de classe C^k, sem contudo se ter $y \in \mathcal{U}$. Por outro lado, para cada $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, seja $\mathcal{U}_k$ o atlas máximo de classe C^k em R^m contendo a identidade; agora $(R^m, \mathcal{U}_k)$ é uma variedade diferenciável de dimensão m e classe C^k. Temos aqui $\mathcal{U}_1 \supseteq \mathcal{U}_2 \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{U}_\infty$.

Exemplo 2 - *As Superfícies no* R^n

Uma superfície M^m de dimensão m e classe C^k no R^n é uma variedade de dimensão m e classe C^k, considerando os homeomorfismos de $\mathcal{U}$ como sendo os inversos das parametrizações $\varphi: U_o \subset R^m \to U \subset M^m$ de classe C^k. De fato, sendo M^m subespaço de um espaço Hausdorff, então M^m é Hausdorff. Temos ainda o seguinte resultado: "Sejam U_o e V_o subconjuntos abertos do R^m e $\varphi : U_o \longrightarrow V$, $\psi : V_o \dashrightarrow V$ parametrizações de classe C^k do mesmo conjunto $V \subset R^n$. Então a mudança de coordenadas $\xi = \psi^{-1} \circ \varphi$ é um difeomorfismo de classe C^k". (ver [4] , página 43). Com isso ficam verificados os itens (b), (c) e (d) da definição de variedades diferenciáveis.Só nos resta provar que o atlas $\mathcal{U}$ é máximo. Seja $z : W \dashrightarrow R^m$ um homeomorfismo de um aberto $W \subset M$ sobre $z(W) \subset R^m$ tal φ_{zx} e φ_{xz} são de classe C^k para cada $x \in \mathcal{U}$. Pela própria definição de homeomorfismo, temos que $\psi = z^{-1} : z(W) \subset R^m \dashrightarrow W \subset M$ é um homeomorfismo. Para cada $p \in W$, existe uma parametrização $\theta : U_o \subset R^m \longrightarrow U \subset M$ com $p \in U \subset M$, de classe C^k.



Como, por hipótese, $\varphi_{z\theta^{-1}} = \theta^{-1} \circ z^{-1} = \theta^{-1} \circ \Psi : z(U \cap W) \to \theta^{-1}(U \cap W)$ é um difeomorfismo de classe C^k, então $z^{-1} = \theta \circ (\theta^{-1} \circ \Psi) : z(U \cap W) \to U \cap W$ é uma parametrização de classe C^k, isto é, $z \in \mathcal{U}$, concluindo que $\mathcal{U}$ é um atlas máximo. Logo $(M^m, \mathcal{U})$ é uma variedade diferenciável.

Exemplo 3 - *O Espaço Projetivo Real*

Definimos o espaço projetivo real P^n de dimensão n como sendo o espaço quociente da esfera unitária $S^n \subset R^{n+1}$ pela relação de equivalência dada por : $p \sim q \leftrightarrow p = \pm q$, para todo p e q em S^n. Se $p \sim q$ dizemos que p e q são pontos antípodos ou diametralmente opostos. Denotando por $[p] = \{+p, -p\}$ a classe de equivalência de p podemos escrever $P^n = \{[p] : p \in S^n\}$.

Seja $\pi : S^n \to P^n$ a aplicação canônica. Portanto $\pi(+p) = \pi(-p) = [p]$. Consideramos em P^n a topologia co-induzida pela aplicação canônica, isto é, $A \subset P^n$ é aberto se, e só se, $\pi^{-1}(A)$ é um aberto do S^n. Com esta consideração, π é uma aplicação contínua. Além disso, se U é um aberto de S^n, então $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup (-U)$, onde $-U = \{-p \in S^n : p \in U\}$, é aberto por ser uma união de dois abertos. Por outro lado, $\pi(U)$ é aberto de P^n se, e somente se, $\pi^{-1}(\pi(U))$ é aberto de S^n. Logo $\pi(U)$ é aberto, ou seja, $\pi : S^n \to P^n$ é uma aplicação aberta.

Vamos agora dar a P^n a estrutura de variedade diferenciável de dimensão n e classe C^k.

(a) Temos o seguinte resultado: "Se X é um espaço topológico com base enumerável e $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua, aberta, de X sobre Y, então o espaço topológico Y também tem base enumerável" (ver [3], página 218). Como S^n tem base enumerável e $\pi : S^n \to P^n$ é uma aplicação contínua e aberta de S^n sobre P^n, concluimos que P^n tem base enumerável. Por outro lado, se p e q são pontos de S^n, não pertencentes à mesma classe de equivalência, existem vizinhanças V e W de p e q, respectivamente, tais que $V \cap W = \emptyset$ e $V \cap (-W) = \emptyset$. Logo $\pi(V)$ e $\pi(W)$ são vizinhanças disjuntas de $[p]$ e $[q]$, ou seja, P^n é Hausdorff.

(b) Vamos encontrar agora uma coleção $\mathcal{U}$ de homeomorfismos de abertos do S^n em abertos de P^n. Para cada $i = 1, \ldots, n+1$, consideremos os semi-espaços abertos H_i^+ e H_i^- determinados pelo hiperplano $y^i = 0$, ou seja,

$$H_i^+ = \{ y \in R^{n+1} : y^i > o \} \quad \text{e}$$

$$H_i^- = \{ y \in R^{n+1} : y^i < o \}$$

Os conjuntos

$$U_i^+ = H_i^+ \cap S^n = \{ y \in S^n : y^i > o \} \quad \text{e}$$

$$U_i^- = H_i^- \cap S^n = \{ y \in S^n : y^i < o \}$$

são abertos dos S^n e $\bigcup_{i=1}^{n+1} (U_i^+ \cup U_i^-) = S^n$. Cada uma das vizinhanças $U_i^{\pm}$ é dotada de uma parametrização de classe C^k do tipo

$$\varphi_i^{\pm} : B \longrightarrow U_i^{\pm} \quad ; \quad i = 1, \ldots, n+1$$

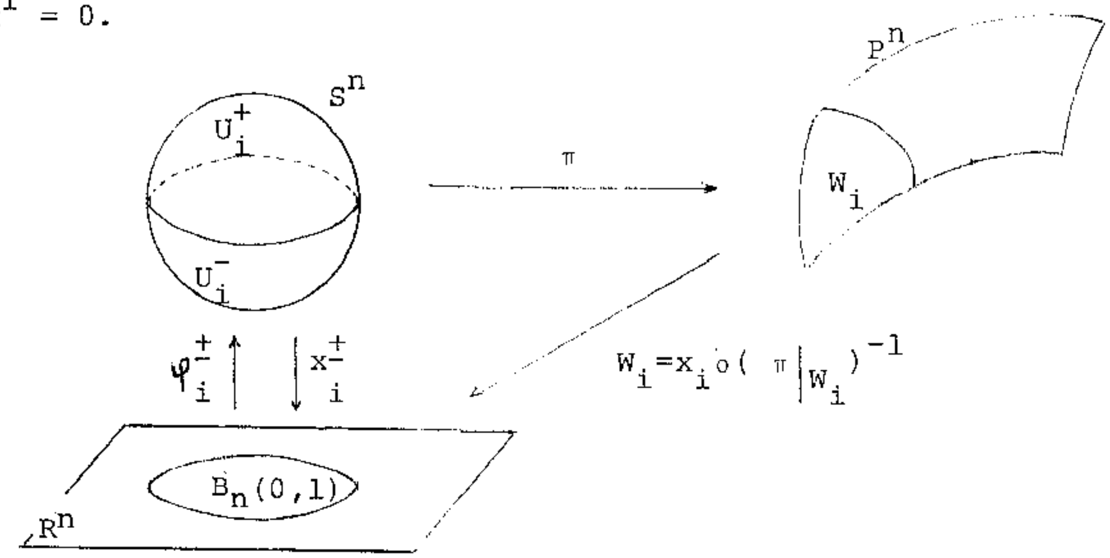
$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^{i-1}, \pm\sqrt{1-|x|^2}, x^i, \dots, x^n)$$

onde $B = \{x \in R^n : |x| < 1\}$, ou seja, B é a bola aberta do R^n de centro na origem e raio 1. Seja U o atlas C^∞ em S^n que consiste nos homeomorfismos

$$x_i^{\pm} = (\varphi_i^{\pm})^{-1} : U_i^{\pm} \subset S^n \longrightarrow B_n(0,1) \subset R^n$$

$$(x^1, \dots, x^i, \dots, x^{n+1}) \mapsto (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1})$$

Portanto $x_i^{\pm}$ projeta $U_i^{\pm}$ sobre a bola $B_n(0,1)$ do hiperplano $x^i = 0$.



Para cada $i = 1, \dots, n+1$, $\pi : S^n \to P^n$ aplicada homeomorficamente os hemisférios $U_i^{\pm}$ sobre o mesmo aberto $W_i \subset P^n$. Os homeomorfismos $w_i = x_i^+ \circ (\pi|_{U_i^+})^{-1} : W_i \longrightarrow R^n$ são sistemas de coordenadas locais. Seja U a coleção desses homeomorfismos.

(c) É fácil ver que $\bigcup_{i=1}^{n+1} W_i = P^n$, ou seja, os domínios W_i dos homeomorfismos w_i, $i = 1, \dots, n+1$, cobrem P^n.

(d) Mostremos agora que $\mathcal{U}$ é um atlas C^∞. Se $p \in W_i \cap W_j$ existe $x \in S^n$, com $x^i > o$ tal que $\pi(x) = p$ e $w_i(p) = (x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n)$. Desta forma, se $x^j > o$ então $x \in U_j^+$ e $w_j(p) = (x^1, \ldots, x^{j-1}, x^{j+1}, \ldots, x^{n+1})$; se $x^j < o$ então $x \in U_j^-$ e $w_j(p) = (-x^1, \ldots, -x^{j-1}, -x^{j+1}, \ldots, x^{n+1})$. A mudança de coordenadas $w_j \circ w_i^{-1}$ ou é expressa por $x_j^+ \circ (x_i^+)^{-1}$, ou por $x_j^+ \circ \alpha \circ (x_i^+)^{-1}$, onde $\alpha(x) = -x$, sempre com domínio expresso pela reunião de dois abertos, mas se apresentando como composição de funções C^∞. Logo $\mathcal{U}$ é um atlas C^∞.

(e) Para cada $k = 0, 1, \ldots, \infty$, seja $[\mathcal{U}]_k$ o único atlas máximo de contém $\mathcal{U}$.

Assim P^n fica munida da estrutura de variedade diferenciável de dimensão n e classe C^∞, isto é, para cada $k = 0, 1, \ldots, \infty$, $(P^n, [\mathcal{U}]_k)$ é uma variedade diferenciável de dimensão n e classe C^k.

Exemplo 4 - *Espaços de Matrizes*

Seja $M(n,R)$ o conjunto das matrizes reais de ordem $n \times n$. Podemos identificá-lo com R^{n^2} e muní-lo da topologia usual do R^{n^2}. A aplicação $\varphi : M(n,R) \to R$ tal que $\varphi(A) = \det A$ é contínua porque o determinante de uma matriz é um polinômio em seus coeficientes. Seja $GL(n,R) = \{ A \in M(n,R) : \det A \neq o \}$. Assim

$GL(n,R)$ é a imagem inversa pela aplicação φ do aberto $R-\{o\} \subset R$. Logo $GL(n,R)$ é um aberto, e, munida da topologia induzida, é um espaço topológico. Como R^{n^2} é uma variedade diferenciável de dimensão n^2 e classe C^∞, $M(n,R)$ também o é, e sendo $GL(n,R)$ em aberto de $M(n,R)$, considerando os homeomorfismos que compõem o atlas máximo $\mathcal{U}$ de $M(n,R)$ restritos a $GL(n,R)$, formamos um atlas máximo $\mathcal{U}'$ tal que $(GL(n,R), \mathcal{U}')$ é uma variedade diferenciável de dimensão n^2 e classe C^∞. Do mesmo modo provamos que o conjunto $GL(n,C)$ das matrizes complexas de ordem $n \times n$ e determinante diferente de zero pode ser munido da estrutura diferenciável de dimensão $2n^2$ e classe C^∞.

No que se segue, as diferenciabilidades em estudo serão consideradas de classe C^∞.

Definição 1.2 : *Um grupo de Lie* é uma variedade diferenciável G com uma estrutura de grupo tal que as aplicações

$$f : G \times G \longrightarrow G, \text{ definida por } f(x,y) = xy, \text{ e}$$

$$g : G \longrightarrow G, \quad \text{definida por } g(x) = x^{-1}$$

são diferenciáveis.

Para cada $x \in G$, onde G é um grupo de Lie, a aplicação $L_x : G \to G$, onde $L_x(y) = xy$, é um difeomorfismo. De fato, a aplicação $\varphi(x,y) = L_x(y) = xy$ é diferenciável e $(L_x)^{-1} = L_{x^{-1}}$ pelo mesmo motivo também o é. Tudo isso ocorre com a aplicação $R_x : G \longrightarrow G$ tal que $R_x(y) = yx$. Os difeomorfismos L_x e R_x recebem o nome de *translação à esquerda* por x, e *translação à di* *reita* por x , respectivamente.

Indicaremos por e o elemento neutro de G. Vejamos alguns exemplos de grupos de Lie.

Exemplo 1 - $(R, +)$ com a estrutura diferenciável usual é trivialmente um grupo de Lie.

Exemplo 2 - $S^1 = \{z \in C : |z| = 1\}$ onde C é o conjunto dos números complexos, é uma variedade diferenciável pois:

(a) S^1 é Hausdorff com base enumerável, com a topologia induzida do R^2; (b) podemos tomar $\mathcal{U}$ como a coleção dos homeomorfismos inversos da parametrização de S^1; (c) os domínios U destes homeomorfismos cobrem S^1; (d) as mudanças de coordenadas são homeomorfismos de classe C^∞ ; (e) $\mathcal{U}$ é um atlas máximo de dimensão 1. Consideremos esta variedade com a estrutura de grupo em relação à multiplicação de complexos. Esta operação está bem definida em S^1 visto que, se α e β estão em S^1, então $|\alpha . \beta| = |\alpha| . |\beta| = 1.1 = 1$, ou seja, $\alpha . \beta \in S^1$. Lembramos ainda que se $\alpha \in S^1$ então $\alpha \neq o$ pois devemos ter $|\alpha| = 1$. Logo as aplicações $f : S^1 \times S^1 \to S^1$ tal que $f(\alpha,\beta) = \alpha . \beta$, e $g : S^1 \longrightarrow S^1$ com $g(\alpha) = \alpha^{-1}$ estão bem definidas e são diferenciáveis. Acrescentando o fato de que o produto em S^1 é associativo, tendo 1 por elemento neutro, concluimos que S^1 é um grupo de Lie.

Dizemos que uma aplicação $h : G \to G'$, onde $(G,.)$ e $(G',\circ)$ são grupos de Lie, é um *homomorfismo de grupos de Lie* se é C^∞ e $h(x.y) = h(x) \circ h(y)$, para todo x e y em G, ou seja, um homomorfismo de grupos abstratos.

Se considerarmos os dois grupos de Lie estudados acima, podemos definir uma aplicação exp : $R \to S^1$ por $\exp(x) = e^{2\pi xi} = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$. Assim definida exp é C^∞ e $\exp(x + y) = e^{2\pi(x+y)i} = e^{2\pi xi} \cdot e^{2\pi yi} = \exp(x) \cdot \exp(y)$. Portanto a aplicação exp é um homomorfismo de grupos de Lie. Além disso, $\ker(\exp) = \{x \in R : \exp(x) = (1,0)\} = \{x \in R : (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) = (1,0)\} = Z$, que é um subgrupo normal de R.

Exemplo 3 - Os espaços euclidianos são grupos de Lie. Tomemos inicialmente, o R^2 com a estrutura de variedade diferenciável estudada anteriormente e a estrutura de produto direto de grupos, isto é:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2) .$$

As aplicações

$$f : R^2 \times R^2 \to R^2 , \qquad f((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2) \quad \text{e}$$

$$g : R^2 \to R^2 , \qquad g(x,y) = (-x, -y)$$

são diferenciáveis. Logo R^2 é um grupo de Lie. Utilizando-se de procedimento análogo, prova-se que $R^n = R \times \ldots \times R$ é um grupo de Lie. O produto de grupos de Lie também é um grupo de Lie. Com isso podemos afirmar que $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ é um grupo de Lie e a aplicação

$$\exp : R^n \to T^n \text{ dada por } \exp(x_1, \ldots, x_n) = (\exp x_1, \ldots, \exp x_n)$$

é um homomorfismo entre os grupos R^n e T^n, e tem por núcleo o conjunto $Z^n = Zx \ldots xZ$.

Exemplo 4 - Consideremos a variedade $GL(n,R)$ munida da multiplicação de matrizes. $(GL(n,R),.)$ é um grupo e as aplicações $f : GL(n,R) \times GL(n,R) \longrightarrow GL(n,R)$ definida por $f(A,B) = A.B$ e $g : GL(n,R) \longrightarrow GL(n,R)$ definida por $g(A) = A^{-1}$ são diferenciáveis. Provemos a diferenciabilidade de g num ponto genérico A, lembrando que deve existir uma transformação linear T, única, chamada derivada da g em A, tal que

$$g(A+H) = g(A) + T.H + r(H), \text{ onde } \lim_{H \to 0} \frac{|r(H)|}{|H|} = o .$$

Afirmamos que a derivada de g em A é a transformação linear que a cada $H \in M(n,R)$ associa a matriz $-A^{-1}.H.A^{-1} \in M(n,R)$ pois

$$(A+H)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} H A^{-1} + r(H), \text{ ou}$$

$$r(H) = (A^{-1}H)^2 . (A + H)^{-1} ;$$

então

$$\lim_{H \to o} \frac{|r(H)|}{|H|} \leqslant \lim_{H \to o} \frac{|A^{-1}|^2 \ |H|^2 \ |A + H|^{-1}}{|H|} = o$$

Sendo A ponto genérico, fica provada a diferenciabilidade de g em $GL(n,R)$. Logo $GL(n,R)$ é um grupo de Lie. De forma análoga prova-se que $GL(n,C)$ admite a estrutura de grupo de Lie. Os grupos $GL(n,R)$ e $GL(n,C)$ se dizem Grupos Lineares e contêm os sub grupos:

$U(n) = \{ A \in GL(n,C) \ : \ A^{-1} = \overline{A^t} \}$ (grupo unitário)

$SL(n,C) = \{ A \in GL(n,C) \ : \ \det A = 1 \}$ (grupo linear especial)

$O(n,C) = \{ A \in GL(n,C) \ : \ A\,A^t = I \}$ (grupo ortogonal complexo)

$SU(n) = U(n) \cap SL(n,C)$ (grupo unitário especial)

$SL(n,R) = SL(n,C) \cap GL(n,R)$ (grupo linear especial real)

$O(n) = \{ A \in GL(n,R) \ : \ A.A^t = I \}$ (grupo ortogonal)

$SO(n) = O(n) \cap SL(n,R)$ (grupo ortogonal especial)

Provemos que $O(n)$ é uma sub-variedade de $GL(n,R)$. Para isso, seja $S_n = \{ A \in M(n,R) \ : \ A = A^t \}$ o conjunto das matrizes reais de ordem n simétricas. É fácil ver que as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

formam uma base do subespaço S_n, e que, por contagem,

$$\dim S_n = n + \frac{(n-1+1)(n-1)}{2} = \frac{n}{2}(n+1) .$$

Definimos $f : M(n,R) \longrightarrow S_n$ por $f(A) = A \,.\, A^t$. A aplicação f está bem definida pois, dado $A \in M(n,R)$, temos $(A \,.\, A^t)^t = (A^t)^t .\, A^t = A.A^t$, ou seja, $A.A^t \in S_n$. Além disso, f é diferen—

ciável e $f^{-1}(I) = \{ A \in M(n,R): A.A^t = I\} = O(n)$. Temos o seguinte resultado: "Sejam $U \subset R^n$ aberto e $f: U \longrightarrow R^{n-m}$ da classe C^k, $k \geqslant 1$. Se c é um valor regular da f, ou bem $f^{-1}(c)$ é vazio ou bem é uma superfície m - dimensional de classe C^k em R^n ". (ver |4| , página 58).

No nosso caso podemos escrever $f : M(n,R) \cong R^{n^2} \longrightarrow S_n \approx R^{\frac{n}{2}(n+1)}$ - bastando provar que I é valor regular da f. Se X e $H \in M(n,R)$ então

$$df_X(H) = \lim_{r\to o} \frac{f(X + rH) - f(X)}{r} =$$

$$= \lim_{r\to o} \frac{(X + rH) . (X + rH)^t - XX^t}{r}$$

$$= \lim_{r\to o} \frac{XX^t + rXH^t + rHX^t + r^2H.H^t - XX^t}{r} =$$

$$= XH^t + HX^t.$$

Se $X \in O(n)$ e $S \in S_n$, tomando $Y = \frac{SX}{2} \in M(n,R)$ temos

$$df_X(Y) = X(\frac{SX}{2})^t + \frac{SX}{2} . X^t = \frac{S^t}{2} + \frac{S}{2} = S ,$$

ou seja, df_X é sobrejetora para todo $X \in f^{-1}(I) = O(n)$. Logo I é valor regular da f e $O(n)$ é uma variedade diferenciável de classe C^∞ e dimensão $n^2 - \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n}{2}(n-1)$. As aplicações

$f : O(n) \times O(n) \longrightarrow O(n)$ onde $f(A,B) = AB$ e $g : O(n) \longrightarrow O(n)$ tal que $g(A) = A^{-1}$ então bem definidas pois, se A e $B \in O(n)$, temos $(AB) . (AB)^t = (A.B)(B^t . A^t) = A.(B.B^t).A^t = A.I.A^t = I$ e $(A^{-1})(A^{-1})^t = (A^{-1})(A^t)^{-1} = (A^t . A)^{-1} = I^{-1} = I$. Como são também diferenciáveis concluímos que $O(n)$ é um grupo de Lie.

Definição 1.3 - Um *campo* X de *vetores tangentes* a um grupo de Lie G é uma aplicação que a cada ponto p de G corresponde em vetor X_p de T_pG, onde X_p denota o valor do campo X no ponto $p \in G$. Um campo X de vetores tangentes ao grupo de Lie G se diz *invariante* à esquerda quando $X_{xy} = dL_x . X_y$, onde dL_x é a diferencial da translação L_x à esquerda de x. Indicaremos por $\mathcal{G}$ o conjunto dos campos invariantes à esquerda de um grupo de Lie G. Conhecendo-se X_e é fácil conhecer X_p pois $X_p = X_{p.e} = dL_p . X_e$. Se o campo X está definido num aberto U, $\phi : U \dashrightarrow R^n$ é um sistema de coordenadas em G com $\phi = (x^1, \ldots, x^n)$, $x^i : U \longrightarrow R$, e $p \in U$, então o vetor X_p se expressa, em relação à base

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \right\}_{i=1,\ldots,n} \quad \text{de } T_pG, \text{ por}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \xi^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p ,$$

onde os ξ^i são as componentes do campo relativamente as coordenadas $x^1, \ldots, x^n$. Assim dizemos que o campo de vetores X é *diferenciável* numa vizinhança de p se, nesta vizinhança, ξ^1, ..., ξ^n são funções diferenciáveis.

PROPOSIÇÃO 1.1 : Seja G um grupo de Lie e $\mathcal{G}$ o conjunto dos campos invariantes à esquerda de G.

(i) $\mathcal{G}$ é um espaço vetorial real.

(ii) A aplicação $\alpha : \mathcal{G} \longrightarrow T_e(G)$ tal que $\alpha(X) = X_e$ é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

(iii) Se $X \in \mathcal{G}$ então X é diferenciável.

Demonstração: $\mathcal{G}$ é um espaço vetorial real e a aplicação α é linear pois, se X e $Y \in \mathcal{G}$ então $\alpha(X + kY) = (X + kY)_e = X_e + (kY)_e = X_e + kY_e = \alpha(X) + k\alpha(Y)$. Por outro lado, se $\alpha(X) = \alpha(Y)$, para todo $x \in G$ temos $X_x = dL_x . X_e = dL_x Y_e = Y_x$; portanto $X = Y$, ou seja, α é injetora. Se $v \in T_e(G)$, definimos um campo X por $X_x = dL_x . v$, para todo x em G. Com isso $X_{xy} = dL_{xy} . v = dL_x dL_y v = dL_x . X_y$, o que prova que o campo X, como foi definido, pertence a $\mathcal{G}$, e $\alpha(X) = X_e = dL_e . v = Iv = v$; portanto α é sobrejetora. Sendo α uma aplicação bijetora, é um isomorfismo entre estes espaços, provando o item (ii). Consideremos agora $\phi : U \to R^n$ em sistema de coordenadas locais em G, com $e \in U$, ou seja, um homeomorfismo de um aberto $U \subset G$ num aberto $\phi(U) \subset R^n$, com $\phi = (x^1, \ldots, x^n)$, $x^i : U \longrightarrow R$, e seja $x \in U$. Então

$$X_x(x^i) = (dL_x X_e)(x^i)$$

Aqui deveríamos ter $L_x(U) \subset U$, o que nem sempre acontece. Para contornarmos este problema, tomaremos $V \subset U$ contenco e tal que, para todo $x, y \in V$ se tenha $x \cdot y \in V$. Isto é possível pela continuidade das operações no grupo. Restringimos o estudo da ϕ a V e escrevemos X_e como combinação linear dos elementos da base de $T_e\,(G)$; portanto $X_e = \sum_j c_j \dfrac{\partial}{\partial x^j}(e)$, $c_j \in R$ e então $X_x(x^i) = (dL_x \cdot X_e) \cdot (x_i) = \sum_j c_j \dfrac{\partial(x^i \cdot L_x)}{\partial x^j}(e)$.

Definimos a aplicação diferenciável $f^i : V \times V \longrightarrow R$ por $f^i\,(x,y) = x^i(x,y)$, que é a i-ésima coordenada do produto $x\,y = L_x y$. Então temos $X_x\,(x^i) = \sum_j c_j \dfrac{\partial f^i(x, e)}{\partial x^j}$, que é uma função diferenciável de x, ou seja, X é diferenciável em $x \in V$. Para estendermos este resultado a todo $x \in G$ basta lembrarmos de que $L_{x^{-1}}$ é um difeomorfismo C^∞ e a composição de difeomorfismos C^∞ é um difeomorfismo C^∞.

Definição 1.4 : Chama-se *álgebra de Lie* um espaço vetorial G munido do operador bilinear

$$[\ ,\ ] : G \times G \longrightarrow G \quad \text{satifazendo:}$$

(a) $[X,Y] = -[Y,X]$,

(b) $[[X,Y],Z] + [[Z,X],Y] + [[Y,Z],X] = 0$,

para todo X, Y e Z em G .

Vejamos dois exemplos importantes.

1) $M(n,R)$ com a operação $[A,B] = AB - BA$, onde AB representa o produto usual de matrizes, é uma álgebra de Lie, visto que:

(a) $[A,B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B,A]$

(b) $[[A,B], C] + [[C,A], B] + [[B,C], A] = [AB - BA, C] +$

$+ [CA - AC, B] + [BC - CB, A] = (AB - BA) C - C(AB-BA) +$

$+ CA - AC) B - B(CA - AC) + (BC - CB) A - A(BC - CB) =$

$= ABC - BAC - CAB + CBA + CAB - ACB - BCA + BAC +$

$+ BCA - CBA - ABC + ACB = o$

2) O conjunto $\mathcal{G}$ dos campos invariantes à esquerda de um grupo de Lie G é outro exemplo de álgebra de Lie denominada álgebra de Lie associada ao grupo de Lie G. Basta observar que o colchete de dois campos X e Y (ver [8], página 36), quando X e Y são campos de vetores invariantes à esquerda, é um campo de vetores invariantes à esquerda, e que as propriedades (a) e (b) da definição 1.4 são válidas (ver [8], página 85). O isomorfismo $\alpha : \mathcal{G} \to T_e(G)$ da proposição 1.1 nos leva a afirmar que $T_e(G)$ é também uma álgebra de Lie, e $\dim \mathcal{G} = \dim T_e(G)$.

Sejam agora, G um grupo de Lie, $\mathcal{G}$ a álgebra de Lie associada a G e $X \in \mathcal{G}$. Da teoria de equações diferenciais ordinárias tem-se que, dado $x \in G$, existem abertos $U \subset G$, $(-\xi, \xi) \subset R$ contendo x e uma aplicação diferenciável $\varphi : U \times (-\xi,\xi) \longrightarrow G$ tal que, para todo $y \in U$,

$$\begin{cases} \varphi(y, o) = y \\ \\ \dfrac{d\varphi}{dt}(y,t) = X_{\varphi(y,t)} \,. \end{cases} \qquad (1)$$

φ recebe o nome de *fluxo* do campo X. Adotaremos a seguinte notação $\varphi(e,t) = \varphi_t$, que representa a única trajetória de X por e. Neste caso, sem nenhum problema escrevemos $\varphi : (-\xi, \xi) \subset R \to G$.

PROPOSIÇÃO 1.2 : Num grupo de Lie G, φ_t é definido para todo t, e a aplicação $\varphi : R \longrightarrow G$ é um homomorfismo de grupos de Lie.

Demonstração: Fixemos $t_o \in (-\xi,\xi)$ e façamos $\varphi_{t_o} = z$. Definimos $\overline{\varphi}_t = z^{-1} . \varphi_t = L_{z^{-1}}(\varphi_t)$. Portanto $\overline{\varphi}_{t_o} =$ $= z^{-1}.\varphi_{t_o} = z^{-1}.z = e$, e ainda

$$\frac{d\overline{\varphi}_t}{dt} = \frac{d}{dt}(L_{z^{-1}}(\varphi_t)) = dL_{z^{-1}} \frac{d\varphi_t}{dt} \overset{(1)}{=} dL_{z^{-1}} \cdot X_{\varphi_t} =$$

$$= X_{z^{-1}.\varphi_t} = X_{\overline{\varphi}_t}$$

Como $\dfrac{d\overline{\varphi}_t}{dt} = X_{\overline{\varphi}_t}$ e $\overline{\varphi}_{t_o} = o$ concluimos que $\overline{\varphi}_t$ é solução do sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,x}{d\,t} = X_x \\ \\ x\,(t_o) = e \end{cases} \qquad (*)$$

Para $t_o > o$, definimos a aplicação $\Psi : (t_o - \varepsilon,\ t_o + \varepsilon) \longrightarrow G$ por $\Psi(t) = \varphi_{t-t_o}$. Assim Ψ também é solução do sistema (*) pois

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\Psi(t)}{dt} = \dfrac{d\varphi_{t-t_o}}{dt} \overset{(1)}{=} X_{\varphi_{t-t_o}} \\ \\ \Psi\,(t_o) = \varphi_{t_o-t_o} = \varphi_o = \varphi\,(e,o) \overset{(1)}{=} e \end{cases}$$

Pela unicidade a solução de uma equação diferencial temos

$$\overline{\varphi}_t = \varphi_{t-t_o} \qquad (2)$$

com domínio podendo ser estendido para $(-\varepsilon,\ t_o + \varepsilon)$ e, consequen temente $\varphi_t = \varphi_{t_o} \cdot \overline{\varphi}_t$ pode ser estendido para todo $t \in R$. Por outro lado, como $\varphi_{t_o} = z$, $\overline{\varphi}_t = z^{-1} . \varphi_t$ e $\overline{\varphi}_t = \varphi_{t-t_o}$ podemos escrever

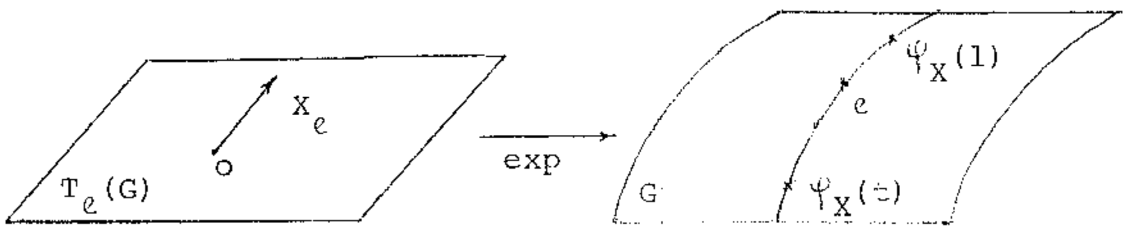
$$(\varphi_{t_o})^{-1} \cdot \varphi_t = \varphi_{t-t_o} . \qquad (3)$$

Considerando $t_o = t$ e $t = o$ temos $(\varphi_t)^{-1} . \varphi_o = \varphi_{-t}$, ou, pelo fato de $\varphi_o = \varphi(e,o) = e$,

$$(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t} \qquad (4)$$

Além disso, para todo $s,t \in R$ temos $\varphi_{t+s} = \varphi_{s+t} = \varphi_{s-(-t)} \overset{(3)}{=} (\varphi_{-t})^{-1} \cdot \varphi_s \overset{(4)}{=} \varphi_t \cdot \varphi_s$, ou seja, $\varphi_{t+s} = \varphi_t \cdot \varphi_s$. Logo φ é um homomorfismo de grupos de Lie.

<u>Definição 1.5</u> : Seja $\mathcal{G}$ a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie G, e $X \in \mathcal{G}$. Denotando por φ_X a trajetória de X pela origem e, ou seja, com $\varphi_X(o, e) = e$, chamamos de *aplicação exponencial* de G a aplicação $\exp: \mathcal{G} \approx T_e(G) \to G$ tal que $\exp(X) = \varphi_X(1, e) = \varphi_X(1)$.



<u>TEOREMA 1.1</u> : Se X pertence à algebra de Lie $\mathcal{G}$ de um grupo de Lie G, então, para todo t, t_1 e $t_2 \in R$ temos:

(a) $\exp(t_1 + t_2) X = (\exp t_1 X) . (\exp t_2 X)$.

(b) $\exp (-t X) = (\exp t X)^{-1}$.

(c) exp é diferenciável.

(d) exp é um difeomorfismo numa vizinhança de e.

Demonstração

(a) Provemos primeiramente que $\varphi_{sX}(t) = \varphi_X(s,t)$, para qualquer s e t em R. Para isso, fazendo $\varphi_X(st) = \Psi(t)$ teremos,

$$\begin{cases} \Psi(o) = \varphi_X(o) = e \\ \dfrac{d\,\Psi(t)}{dt} = \dfrac{d\,\varphi_X(st)}{dt} . s = s.X_{\varphi_X(st)} = s.X_{\Psi(t)} \end{cases}$$

Ψ é solução do sistema

$$\begin{cases} x(o) = e \\ \dfrac{d\,x}{dt} = s.\,X_{x(t)} \end{cases}$$

que também tem φ_{sX} por solução. Logo $\Psi(t) = \varphi_X(st) = \varphi_{sX}(t)$. Provado este resultado podemos escrever $\exp(t_1 + t_2) X =$

$= \varphi_{(t_1 + t_2)X}(1,e) = \varphi_X(t_1 + t_2, e) = \varphi_X(t_1, \varphi_X(t_2, e))$ onde a última igualdade deve-se a uma propriedade de fluxos de sistemas autônomos (ver [6] , página 38).

Por outro lado, $(\exp t_1X).(\exp t_2X) = \varphi_{t_1X}(1,e) . \varphi_{t_2X}(1,e) = \varphi_X(t_1,e) . \varphi_X(t_2, e)$. Consideremos as curvas

$$\Psi_1(t) = \varphi_X(t_1,e) . \varphi_X(t, e) \qquad \text{e}$$

$$\Psi_2(t) = \varphi_X(t, \varphi_X(t_1,e)) = \varphi_X(t_1 + t_2, e)$$

Para Ψ_1 temos: $\Psi_1(o) = \varphi_X(t_1,e).\varphi_X(o,e) = \varphi_X(t_1,e) . e = \varphi_X(t_1, e) = \varphi_{t_1X}(1,e) = \exp(t_1 X)$, e $\dfrac{d\Psi_1(t)}{dt} = \dfrac{d\varphi_X(t_1,e).\varphi_X(t,e)}{dt} =$

$= \varphi_X(t_1,e). X_{\varphi_X(t,e)} = X_{\varphi_X(t_1,e).\varphi_X(t,e)} = X_{\Psi_1(t)}$. Para Ψ_2 temos:

$\Psi_2(o) = \varphi_X(o, \varphi_X(t_1,e)) = \varphi_X(t_1,e) = \varphi_{t_1X}(1,e) = \exp(t_1 X)$, e

$\dfrac{d\Psi_2}{dt}(t) = \dfrac{d\varphi_X(t, \varphi_X(t_1,e))}{dt} = X_{\varphi_X(t,\varphi_X(t_1,e))} = X_{\Psi_2(t)}$.

Provamos então que Ψ_1 e Ψ_2 são soluções do sistema

$$\begin{cases} x(o) = \exp(t_1, X) \\ \dfrac{dx}{dt}(t) = X_{x(t)} \end{cases}$$

Daí $\Psi_1 = \Psi_2$, ou seja , $\varphi_X(t_1,e) \cdot \varphi_X(t,e) = \varphi_X(t,\varphi_X(t_1,e))$, ou ainda, exp $(t_1 X)$. exp $(t X)$ = exp $[(t_1 + t_2) X]$, concluindo (a).

(b) e = exp o = exp (t-t) = (exp t X).(exp (-t X)) . Logo exp (-t X) = $(\exp t X)^{-1}$.

(c) Consideremos o campo vetorial $V : G \times G \longrightarrow R^{2n}$ onde $V(y, X) = (X_y, o)$. O fluxo Ψ de V por $(e, X) \in G \times G$ é dada por $\Psi(t) = (\varphi_X(t), X) = (\exp t X, X)$ pois

$$\begin{cases} \Psi(o) = (\varphi_X(o), X) = (e, X) \quad \text{e} \\ \dfrac{d\Psi(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\varphi_X(t), X) = (\dfrac{d\varphi_X(t)}{dt}, X) = (X_{\varphi_X(t)}, X) = \\ = (X_{\varphi_{tX}(1)}, X) = (X_{\exp(tX)}, X). \end{cases}$$

Consideremos a aplicação diferenciável $\pi : G \times G \longrightarrow G$ tal que $\pi(x,X) = x$, e $\text{Exp} : R \times G \longrightarrow G$ onde Exp (t,X) = exp t X . Assim Exp = π o Ψ , conforme o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} R \times G & \xrightarrow{\Psi} & G \times G & \xrightarrow{\pi} & G \\ (t,X) & \longmapsto & (\exp tX, X) & \longmapsto & \exp t X. \end{array}$$

sendo Ψ também diferenciável por ser fluxo. Logo Exp é diferenciável em t e X, o que nos faz concluir que exp é diferenciável em $\mathcal{G}$.

(d) Para $X \in \mathcal{G}$ definimos a aplicação $\gamma : R \longrightarrow \mathcal{G}$ tal que $\gamma(t) = t X$. Então $\gamma(o) = o$ e $\frac{d\gamma}{dt}(o) = X$ e $(d \exp)_o \, . \, X =$

$$= (d \exp)_o \, . \, \frac{d\gamma}{dt}(o) = (d \exp)_o . \left. \frac{d\, tX}{dt} \right|_{t=o} = \left. \frac{d(\exp t X)}{dt} \right|_{t=o} =$$

$= X_{\varphi_X(o)} = X_e$, ou seja $(d \exp)_o$ é não singular. Pelo Teorema da Função Inversa, exp é um difeomorfismo numa vizinhança de e .

CAPÍTULO II

VARIEDADES HOMOGÊNEAS

Faremos, neste capítulo, um estudo dos espaços homogêneos, que são espaços quocientes de grupos de Lie por subgrupos fechados.

TEOREMA 2.1 : Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G, $G/H = \{xH : x \in G\}$ e $\pi : G \longrightarrow G/H$ com $\pi(x) = xH$ a aplicação quociente. Existe uma única estrutura de variedade diferenciável em G/H satisfazendo às condições:

(a) π é diferenciável.

(b) Para todo xH em G/H existe uma vizinhança W de xH em G/H e uma aplicação diferenciável $\zeta : W \longrightarrow G$ tal que $\pi \circ \zeta \doteq id_W$. A aplicação τ recebe o nome de secção local da aplicação π .

Demonstração : Seja dim G = n, dim H = k e $(G/H)_1$ o mesmo conjunto G/H munido de outra estrutura diferenciável satisfazendo também (a) e (b). Consideremos a aplicação $id : G/H \to (G/H)_1$, e, para $xH \in G/H$, seja (W,ζ) dado pelo condição (b). Escrevendo $id_W = \pi \circ \zeta$, temos uma composição de aplicações diferenciáveis:por

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ W \subset G/H \arrow[ur, bend left, "\tau"] \arrow[rr, "id_W"] & & (G/H)_1 \end{tikzcd}$$

tanto id_W é diferenciável e então id é diferenciável em xH . Da mesma forma, considerando $id:(G/H)_1 \to G/H$ e, para $(xH)_1 \in (G/H)_1$, tomando-se o par (W_1,ζ) da condição (b), com o mesmo raciocínio concluímos que id_{W_1} é diferenciável; então id é diferenciável em

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ W_1 \subset (G/H)_1 \arrow[ur, bend left, "\tau"] \arrow[rr, "id_{W_1}"] & & G/H \end{tikzcd}$$

$(xH)_1$. Os resultados acima nos levam a afirmar que $id:G/H \to (G/H)_1$ é um difeomorfismo. Como duas estruturas diferenciáveis são equivalentes se a identidade for um difeomorfismo, fica provada a unicidade da estrutura diferenciável em G/H que satisfaz às condições (a) e (b).

Provemos agora a existência. G é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável. Consideremos então em G/H a topologia co-induzida pela aplicação π, isto é, é aberto de G/H o conjunto cuja imagem inversa é um aberto de G. Pelo fato de π ser contínua e aberta, e tendo o Lema: "Se X é um espaço topológico com base enumerável e $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua, aberta, de X sobre Y, então o espaço topológico Y também tem base enumerável" (ver [3], página 218), concluímos que G/H tem base enumerável. Além disso, a Proposição: "Seja G um grupo topológico de Hausdorff e H um subgrupo de G. Para que o espaço topológico G/H seja de Hausdorff é necessário e suficiente que H seja fechado", (ver [5], página I-13), nos faz concluir que G/H é de Hausdorff pois H é fechado. Seja $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}'$ onde $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ são as álgebras de Lie de H e G, respectivamente, e $\mathcal{H}'$ é o espaço complementar de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$. Faremos uso do seguintes Lema: "A aplicação $\varphi : \mathcal{G} \to G$ dada por $\varphi(X+X') = (\exp X).(\exp X')$, $X \in \mathcal{H}$, $X' \in \mathcal{H}'$ é um difeomorfismo em uma vizinhança de $0 \in \mathcal{G}$". (ver [1], página 58). Seja $V = V_1 + V'_1$ a citada vizinhança de $0 \in \mathcal{G}$, onde $V_1 \subset \mathcal{H}$ e $V'_1 \subset \mathcal{H}'$, e mais, $U = \varphi(V)$ e $W = \pi(U)$. Eis o diagrama:

$$V = V_1 + V'_1 \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}' \xrightarrow{\varphi} U \subset G \xrightarrow{\pi} W \subset G/H .$$

Temos então $\pi^{-1}(W) = \{\pi^{-1}(xH)\}_{xH \in W} = \bigcup\limits_{u \in U} \{uh : h \in H\} =$

$= \{uh : u \in U \text{ e } h \in H\} = \bigcup_{h \in H} Uh$ que é uma união de abertos; portanto um aberto. Pela definição de topologia co-induzida, W é um aberto de G/H. Considerando dim $(G) = n$ e dim $(H) = k$, temos dim $(H') = (n - k)$, pois dim $(H \cap H') = o$. Definimos

$$\sigma : W \subset G/H \longrightarrow H' \cong R^{n-k}$$
$$x H \longmapsto X'$$

onde $x = (\exp X').(\exp X) \in U$ com $X \in H$ e $X' \in H'$.

(i) σ está bem definida. Para provarmos este resultado basta tomar $x = (\exp X').(\exp X) \in U$ e $y = \exp Y \in (H \cap \exp V)$ e mostrar que $\sigma(x\,y\,H) = \sigma(x\,H)$. Temos então: $x\,y = (\exp X')(\exp X)(\exp Y) = (\exp X')(\exp Z)$ para algum $Z \in H \cap V$, pois $\varphi|_V$ é um difeomorfismo. Logo $\sigma(x\,y\,H) = X' = \sigma(x\,H)$, confirmando a afirmação.

(ii) σ é 1-1. De fato, sejam $x = (\exp X')(\exp X)$ e $y = (\exp Y')(\exp Y)$ tais que $X' = Y'$, ou seja, $\sigma(x) = \sigma(y)$. Então $y^{-1} x = (\exp Y^{-1})(\exp Y')^{-1}.(\exp X').(\exp X)$. Como $X' = Y'$ temos $y^{-1} x = (\exp Y)^{-1} (\exp X)$ que pertence a H. Por definição $xH = yH$, ou seja, σ é 1 - 1.

Provemos localmente os itens (a) e (b) do teorema. A aplicação $p : G = H \oplus H' \longrightarrow H'$ tal que $p(X + X') = X'$ é diferenciável, e a aplicação $\varphi^{-1} : U \longrightarrow V$ também o é, pois $\varphi : V \longrightarrow U$ o difeomorfismo citado anteriormente. Daí $\rho =$

$= p \circ \varphi^{-1} : U \longrightarrow V_1'$ dada por $\rho(\exp X \cdot \exp X') = X'$ onde $X' \in V_1'$ é diferenciável por ser uma composição de aplicações diferenciáveis. Pelo mesmo motivo temos que $(\sigma^{-1} \circ \varphi): U \longrightarrow W$ é diferenciável quando consideramos em W a estrutura diferenciável que torna σ um difeomorfismo. Então $(\sigma^{-1} \circ \rho)(x) = (\sigma^{-1} \circ \rho)(\exp X' \cdot \exp X) = \sigma^{-1}(X^{-1}) = xH = \pi(x)$, e concluímos que $\pi|_U$ é diferenciável. Seja agora $\zeta : W \longrightarrow G$ dada por $\zeta = \exp \circ \sigma$. Assim definida ζ é C^∞ e $\pi \circ \zeta(xH) = \pi(\exp X') = (\exp X')H = (\exp X')(\exp X) \cdot H = xH$ pois $\exp X \in H$, e então $\pi \circ \zeta = id_W$, provando localmente (b), ou melhor, provando (b) para uma vizinhança coordenada de $H \subset G/H$. Por translação à esquerda vamos obter vizinhanças coordenadas em torno dos demais pontos de G/H. Para isso, se $x \in G$ definimos $\tilde{L}_x$ como sendo o homeomorfismo de G/H, induzido pela translação à esquerda L_x em G, isto é, $\tilde{L}_x(yH) = xyH$, $y \in G$. Definimos também a aplicação $\sigma_{xH} = \sigma \circ \tilde{L}_{x^{-1}}\Big|_{\tilde{L}_x(W)} : \tilde{L}_x(W) \longrightarrow H' \approx R^{n-k}$ e obtemos $(\sigma_{xH}, \tilde{L}_x(W))$, uma vizinhança coordenada em torno de xH. Fazendo x percorrer G temos que $\{(\sigma_{xH}, \tilde{L}_x(W)) : x \in G\}$ fornece uma estrutura diferenciável em G/H. A mudança de coordenadas é diferenciável pois na intersecção das vizinhanças coordenadas de um ponto xH os homeomorfismos locais do atlas correspondente gozam de uma mesma estrutura diferenciável, demonstrando assim o teorema.

<u>Definição 2.1</u> : Chamam-se *variedades homogêneas*, as variedades diferenciáveis da forma G/H onde G é um grupo de Lie, $H \subset G$ é um subgrupo fechado, e existe uma estrutura diferenciável dada

pelo teorema acima.

Definição 2.2 : Dizemos que um grupo de Lie G *age* em uma variedade M se existe uma aplicação diferenciável $\eta : G \times M \to M$ dada por $\eta(x,p) = xp$, tal que

(a) $e\, p = p$

(b) $(xy)\, p = x(yp)$

Dizemos também que η é uma *ação* de G em M. O conjunto $Gp = \{xp : x \in G\}$ é a *órbita* do ponto $p \in M$ segundo a ação η, que pode ser definida como a imagem da aplicação

$$G \times \{p\} \longrightarrow M$$

$$(x, p) \longmapsto \eta\,(x, p)$$

A ação η é *transitiva*, ou G *age transitivamente* em M através de η se $Gp = M$ para todo $p \in M$, equivalendo dizer que, dados p e q em M, existe $x \in G$ tal que $x\,p = q$. Para $p_o \in M$ definimos *grupo de isotropia* de p_o, o que se denota por G_{p_o}, como sendo o conjunto $G_{p_o} = \{x \in G : xp_o = p_o\}$.

Provemos que G_{p_o} é um subgrupo de G. É óbvio que $G_{p_o} \subset G$. Além disso, $e \in G_{p_o}$ pois $e\,.p_o = p_o$. Por outro lado, se $x, y \in G_{p_o}$ então $x\,p_o = p_o$ e $y\,p_o = p_o$. Daí $x\,p_o = y\,p_o$, ou $y^{-1}x\,p_o = p_o$. Por definição $y^{-1}\,x \in G_{p_o}$. Assim G_{p_o} é subgrupo de G. Para provarmos que G_{p_o} é fechado consideramos a translação à direita $R_{p_o} : G \longrightarrow G$ tal que $R_{p_o}(x) =$

$=xp_o$. Como R_{p_o} é contínua e $G - \{p_o\}$ é um aberto, temos que $R_{p_o}^{-1}(G - \{p_o\})$ é um aberto de G. Mas G_{p_o} é o complementar de $R_{p_o}^{-1}(G - \{p_o\})$; logo G_{p_o} é fechado.

PROPOSIÇÃO 2.1 : Se $\eta : G \times M \to M$ é uma ação transitiva, então Gp é isomorfo a Gq, para todo p e q em M .

Demonstração: Pelo fato de η ser transitiva dado p e q em M, existe $a \in G$ tal que $ap = q$, ou $p = a^{-1}q$, e daí $p = e\,p = (a^{-1}a)\,p = a^{-1}(a\,p) = a^{-1}q$. Definimos as aplicações $\varphi : Gp \to Gq$ onde $\varphi(x) = a\,x\,a^{-1}$, e $\Psi: Gq \longrightarrow Gp$ onde $\Psi(y) = a^{-1}ya$. Elas estão bem definidas pois: se $x \in Gp$ então $a\,x\,a^{-1}q = axp = ap = q$, logo $a\,x\,a^{-1} \in Gq$; se $y \in Gq$ então $a^{-1}yap = a^{-1}yq = a^{-1}q = p$, logo $a^{-1}ya \in G_p$. Temos ainda $(\varphi \circ \Psi)(y) = \varphi(a^{-1}ya) = a(a^{-1}ya)\,a^{-1} = (a\,a^{-1})\,y\,(a\,a^{-1}) = y$, portanto $\varphi \circ \Psi = id_{Gq}$. Da mesma forma $(\Psi \circ \varphi)(x) = \Psi(axa^{-1}) = a^{-1}(axa^{-1})a = (a^{-1}a)x(a^{-1}a) = x$, portanto id_{Gp}. Provamos assim que φ e Ψ são funções inversas. Podemos ainda escrever: $L_a \circ R_{a^{-1}}\big|_{Gp}(x) = L_a(x\,a^{-1}) = a\,x\,a^{-1} = \varphi(x)$ e $R_a \circ L_{a^{-1}}\big|_{Gq}(y) = R_a(a^{-1}y) = a^{-1}\,y\,a = \Psi(y)$,

ou seja $L_a \circ R_{a^{-1}} = \varphi$ e $R_a \circ L_{a^{-1}} = \Psi$ nas órbitas Gp e Gq .

Por serem composições de funções contínuas e diferenciáveis, adicionando o fato de serem inversas, concluimos que Gp e Gq são isomorfos para todo p e q em M.

<u>TEOREMA 2.2</u>: Seja $\eta : G \times M \to M$ uma ação transitiva de um grupo de Lie G na variedade M. Seja $p_o \in M$ e G_{p_o} o grupo de isotropia de p_o. A aplicação

$$\alpha : G/G_{p_o} \longrightarrow M$$

$$x\, G_{p_o} \longmapsto \eta(x,\, p_o) = x\, p_o$$

é um difeomorfismo.

Demonstração: Provemos primeiramente que α está bem definida. Consideremos $xG_{p_o} = yG_{p_o}$; então $y^{-1}x \in G_{p_o}$, ou $y^{-1}xp_o = p_o$, ou ainda $xp_o = y\, p_o$. Logo $\alpha(x\, G_{p_o}) = \alpha(y\, G_{p_o})$.

Temos também que α é sobrejetora pois, dado $q \in M$, existe $x \in G$ tal que $xp_o = q$ em virtude de η ser uma ação transitiva. Portanto α é sobrejetora.

Suponhamos agora $xp_o = yp_o$. Então $y^{-1}\, xp_o = p_o$, ou seja $y^{-1}x \in G_{p_o}$. Se isto acontece temos que $x\, G_{p_o} = y\, G_{p_o}$, o que nos faz concluir que α é injetora.

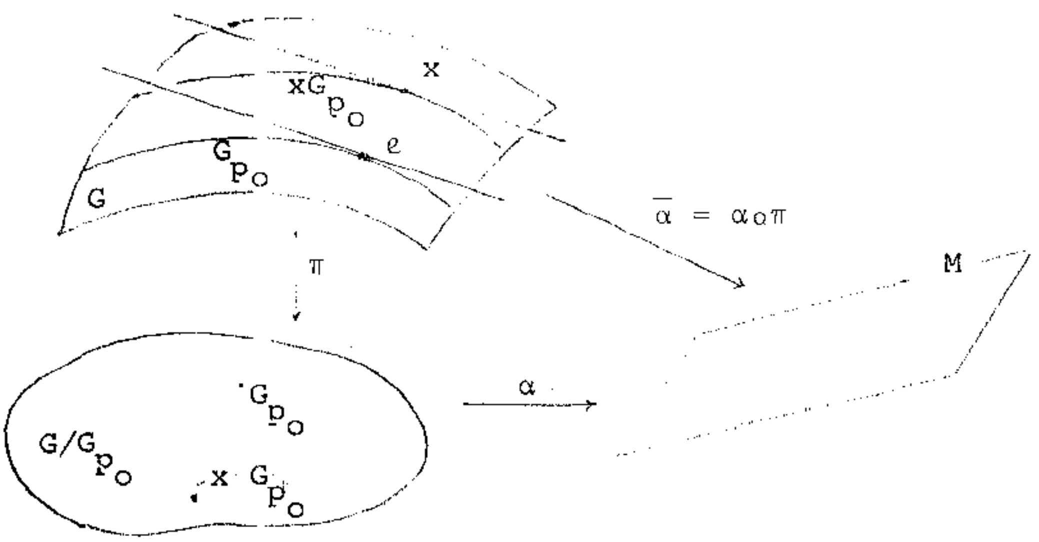
Mostremos que α é diferenciável. Utilizaremos para isso o seguinte resultado: $\alpha : G/G_{p_o} \longrightarrow M$ é diferenciável se, e só se, $\alpha \circ \pi : G \longrightarrow M$ é diferenciável, onde $\pi : G \longrightarrow G/G_{p_o}$ é a aplicação quociente. Demonstremos tal resultado. Como já provamos que π é diferenciável, sendo α diferenciável, então $\alpha \circ \pi$ é diferenciável. Suponhamos agora $\alpha \circ \pi$ diferenciável. Consideremos o par (W, τ) dado pelo Teorema 2.1 .

$$\begin{tikzcd}
 & & G \arrow[dl, "\pi"] \arrow[dr, "\alpha\circ\pi"] & \\
W \arrow[urr, "\tau"] & G/G_{p_o} \arrow[rr, "\alpha"] & & M
\end{tikzcd}$$

Em W temos $\alpha = \alpha \circ id_W = \alpha \circ (\pi \circ \zeta) = (\alpha \circ \pi) \circ \zeta$ onde $\alpha \circ \pi$ é diferenciável por hipótese e ζ é diferenciável como no teorema 1. Então α é diferenciável em cada vizinhança de $x\,G_{p_o}$, para $x \in G$. Pela unicidade da estrutura diferenciável em G/G_{p_o} concluímos que α é diferenciável.

Para provarmos que α é um difeomorfismo devemos provar que $d\alpha_{xG_{p_o}}$ é não singular para todo $x \in G$, isto é,

$\ker\ d\alpha_{xG_{p_o}} = \{o\}$.



Seja $\bar{\alpha} = \alpha \circ \pi : G \longrightarrow M$ onde $\bar{\alpha}(x) = (\alpha \circ \pi)(x) = \alpha(xG_{p_o}) = x \cdot p_o$

Consideremos as derivadas

$$d\pi_x : T_x(G) \longrightarrow T_{xG_{p_o}}(G/G_{p_o}) \quad ,$$

$$d\alpha_{xG_{p_o}} : T_{xG_{p_o}}(G) \longrightarrow T_{xp_o}(M) \quad \text{e}$$

$$d\bar{\alpha}_x : T_x(G) \longrightarrow T_{xp_o}(M) .$$

Temos que $\ker d\pi_x = T_x(x\, G_{p_o})$ e que $d\pi_x$ é sobrejetora. Mostraremos agora que $\ker d\bar{\alpha}_x = T_x(x\, G_{p_o})$, ou seja, que $d\bar{\alpha}_x(Y) = o$ se, e somente se, $Y \in T_x(x\, G_{p_o})$. Definimos então a aplicação $\eta_x : M \to M$ por $\eta_x(m) = xm$. Temos agora $(\eta_x \circ \bar{\alpha} \circ L_{x^{-1}})(y) = (\eta_x \circ \bar{\alpha})(x^{-1}y) = \eta_x(x^{-1}y\, p_o) = x^{-1}\, x\, y\, p_o = y\, p_o = \bar{\alpha}(y)$ para todo y em G. Como $\bar{\alpha} = \eta_x \circ \bar{\alpha} \circ L_{x^{-1}}$, mostrar que $\ker d\bar{\alpha}_x = T_x(x\, G_{p_o})$ equivale mostrar que $\ker d\bar{\alpha}_e = T_e(G_{p_o})$, isto é, basta mostrar que se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ são as álgebras de Lie de G e G_{p_o}, respectivamente, então $d\bar{\alpha}(X) = o$ se, e somente se, $X \in \mathcal{H}$.

Se $X \in \mathcal{H}$ temos $d\pi_e(X) = o$; então $d\bar{\alpha}_e(X) = d(\alpha \circ \pi)_e(X) = d\alpha(d\pi_e(X)) = o$. Por outro lado, se $d\bar{\alpha}_e(X) = o$ com $X \in \mathcal{G}$, definimos a aplicação $\lambda : R \longrightarrow M$ por $\lambda(t) = \bar{\alpha}(\exp tX) = (\bar{\alpha} \circ \varphi_X)(t)$.

Temos que

$$\frac{d\,\lambda(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\alpha} \circ \varphi_X(t)) = d\,\bar{\alpha}\left(\frac{d}{dt}(\varphi_X(t))\right) =$$

$$= d\,\bar{\alpha}\left(X_{X(t)}\right) = d\,\bar{\alpha}\left(X_{\exp tX}\right) =$$

$$= d\left(\eta_{\exp tX} \circ \bar{\alpha} \circ L_{\exp -tX}\right) \cdot \left(X_{\exp tX}\right) =$$

$$= \left(d\,\eta_{\exp tX} \circ d\,\bar{\alpha} \circ d\,L_{\exp -tX}\right)\left(X_{\exp tX}\right) =$$

$$= d\,\eta_{\exp tX}\left(d\,\bar{\alpha}\,(X)\right) = 0$$

donde podemos concluir que $\lambda(t) = \bar{\alpha}\,(\exp tX) = (\exp tX)\,p_o$ é constante, e como $\lambda(0) = p_o$, então $(\exp tX)\,p_o = p_o$ para todo $t \in R$, o que significa dizer que $\exp tX \in G_{p_o}$, ou seja, $X \in H$. Está provado então que $d\,\bar{\alpha}\,(X) = 0$ se, e somente se, $X \in H$, ou seja, $\ker d\,\bar{\alpha}_x =$ $= T_x\,(x\,G_{p_o})$. Seja $X \in T_{x\,G_{p_o}}\,(G/G_{p_o})$; então $X = d\,\pi_x(Y)$ para algum Y em $T_x\,(G_{p_o})$ pois $d\,\pi_x$ é sobrejetora. Daí

$$d\,\alpha_{x\,G_{p_o}}\,(X) = d\,\alpha_{x\,G_{p_o}}\,(d\,\pi_x\,(Y))$$

$$= d\,(\alpha \circ \pi)_x\,(Y) =$$

$$= d\,\bar{\alpha}_x\,(Y)$$

Logo, se $d\,\alpha_{x\,G_{p_o}}\,(X) = 0$ é porque $d\,\bar{\alpha}_x\,(Y) = 0$, ou seja, $Y \in H$, donde $d\,\pi_x\,(Y) = 0$, o que significa dizer que $X = 0$. Concluímos então que $\ker d\,\alpha_{x\,G_{p_o}} = \{0\}$, equivalendo a $d\,\alpha_{x\,G_{p_o}}$ não é singular, ou α é um difeomorfismo, demonstrando o teorema.

Vejamos alguns exemplos onde se aplica o teorema acima.

Exemplo 1 - As Esferas

1) Seja $\eta: SO(n) \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ dada por $\eta(A,v) = A\,v$. Assim definida, η é uma ação de $SO(n)$ em S^{n-1}. Vamos mostrar que esta ação é transitiva. Dado $\mu_1 \in S^{n-1}$, escolhemos $\mu_2, \dots, \mu_n$ em S^{n-1} tais que $\mathcal{B} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ seja uma base ortonormal do R^n com a mesma orientação da sua base canônica. Cada elemento desta nova base pode ser escrito da forma $\mu_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ji}\, e_j$, com $\mu_{ji} \in R$, ou, em função de suas coordenadas, $\mu_i = (\mu_{1i}, \dots, \mu_{ni})$. Tomando-se as coordenadas dos vetores de $\mathcal{B}$, na ordem da base, construímos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{n1} & \cdots & \mu_{nn} \end{bmatrix}$$

Como $\mathcal{B}$ é formada a partir da base canônica, a menos de uma rotação, temos que $\det A = 1 = \det A^t$, ou seja, $A \in SO(n)$.

Por exemplo, no $SO(2)$ temos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

por matriz associada ao operador linear rotação segundo um ângulo θ, onde $\det A = \cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta = 1$.

Um outro exemplo é a composição de duas rotações no R^3: a primeira segundo um ângulo θ tendo $\overrightarrow{OX}$ por eixo de rotação, e a outra de um ângulo $\emptyset$ em torno de $\overrightarrow{OY}$. A composição acima é uma transformação linear associada à matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta\cos\emptyset & \cos\theta\cos\emptyset & -\operatorname{sen}\emptyset \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\emptyset & \cos\theta\operatorname{sen}\emptyset & \cos\emptyset \end{bmatrix}$$

de determinante igual a 1.

De um modo geral, A é a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base canônica $\{A\, e_i = u_i,\ i = 1, 2, \dots n\}$. Em particular $A\, e_1 = u_1$; portanto dados u e v em S^{n-1} existem A e B em SO(n) tais que $A\, e_1 = u$ e $B\, e_1 = v$ ou $B^{-1}\, v = e_1$. Segue-se que $(A.B^{-1})v = A(B^{-1}\, v) = A\, e_1 = u$, ou seja, existe $AB^{-1} \in SO(n)$ tal que $AB^{-1}v$, ou ainda η é uma ação transitiva.

Seja

$$SO(n-1) = \left\{ A \in SO(n) : A = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & \tilde{A} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{A} \in SO(n-1) \right\}$$

Se $A \in SO(n-1)$ então

$$A.e_n = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & \tilde{A} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_n$$

Logo $SO(n-1) \subset SO(n)_{e_n}$ (*), onde $SO(n)_{e_n}$ é o grupo de isotropia do ponto e_n. Tomemos agora $A = (a_{ij}) \in SO(n)$ tal que $A\, e_n = e_n$. Por exemplo, se n = 3 e

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

devemos ter

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ ou } \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Então $a_{13} = a_{23} = 0$ e $a_{33} = 1$. É fácil ver que se $A\, e_n = e_n$ devemos ter, necessariamente, $a_{in} = 0$ para $i=1, \ldots, n-1$ e $a_{nn}=1$; portanto $\sum_{i=1}^{n} a_{in} = 1$. Por outro lado, temos $AA^t = I$. Vejamos o que ocorre quando:

1º) n = 2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (a_{11})^2 & a_{11} \cdot a_{21} \\ a_{11} \cdot a_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto $a_{11} = 1$ e $a_{21} = 0$, ou seja, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2º) $n = 3$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (a_{11})^2 + (a_{12})^2 & a_{11}\,a_{21} + a_{12}\,a_{22} & a_{11}\,a_{31} + a_{12}\,a_{32} \\ a_{21}\,a_{11} + a_{22}\,a_{12} & (a_{21})^2 + (a_{22})^2 & a_{21}\,a_{31} + a_{22}\,a_{32} \\ a_{31}\,a_{11} + a_{32}\,a_{12} & a_{31}\,a_{21} + a_{32}\,a_{22} & (a_{31})^2 + (a_{32})^2 + 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto $(a_{31})^2 + (a_{32})^2 + 1 = 1$, ou seja, $a_{31} = 0$ e $a_{32} = 0$. Devemos ter

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$$

Generalizando, vamos ter sempre $a_{ni} = 0$ para $i=1, \ldots, n-1$ e $a_{nn} = 1$, ou melhor,

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} & \tilde{A} & & 0 \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

com det $\tilde{A} = 1$ pois det $A = 1 = (-1)^{2n}$. det A', pelo desenvolvimento de Laplace segundo a última coluna. Logo $A \in SO(n-1)$, e então $SO(n)_{e_n} \subset SO(n-1)$ (**).

De (*) e (**) concluímos que $SO(n)_{e_n} = SO(n-1)$, e assim, pelo Teorema 2.2, $SO(n)/SO(n-1)$ é difeomorfo a S^{n-1}.

De modo idêntico ao estudado acima, porém sem a necessidade de considerar a base $\mathcal{B}$ com a mesma orientação da canônica, mostramos que η é uma ação transitiva. O grupo de isotropia $O(n)_{e_n}$ do ponto e_n é o conjunto

$$O(n-1) = \left\{ A \in O(n) : A = \begin{bmatrix} & \tilde{A} & & 0 \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{A} \in O(n-1) \right\}$$

onde det $\tilde{A} = \pm 1$. Observemos que det $A = \pm 1 =$ det $\tilde{A}$ e que $A\, e_n = e_n$, para todo A em $O(n-1)$. Novamente pelo Teorema 2.2, temos que $O(n)/$ $/O(n-1)$ é difeomorfo a S^{n-1}.

2) Seja C^n com a base complexa canônica $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ onde cada e_i é uma n-upla constituída de zeros, exceto para 1 na i-ésima posição. Cada matriz $A = (a_{ij})$ de $GL(n,C)$ determina, de maneira única, uma transformação linear de C^n em C^n tal que $A\, e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i$. Desta forma a aplicação $\eta: GL(n,C) \times C^n \longrightarrow C^n$ tal que $\eta(A,v) = A\,v$ é uma ação do grupo de Lie $GL(n,C)$ $2n^2$-dimensional sobre a variedade C^n 2n-dimensional. Seja $<\ ,\ >$ a notação

do produto interno em C^n, onde

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i\, e_i\ ,\ \sum_{i=1}^{n} b_i\, e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \overline{b}_i$$

se $A \in GL(n,C)$ então $< A(v), w > = < v, \overline{A^t}(w) >$. (ver [2] , página 254). Se $A \in U(n)$, isto é, $\overline{A^t}A = I$, então segue-se que A preserva os comprimentos dos vetores em C^n, pois $< A(v), A(v) > = < v, \overline{A^t}\, A(v) > = < v, I\, v > = < v, v >$. Seja X a esfera unitária em C^n. Consideremos a ação η: $U(n) \times X \longrightarrow X$ do grupo unitário U(n) sobre a esfera unitária $X \subset C^n$. Esta ação é transitiva. Seja $v_1 \in X$ e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal de C^n contendo v_1 como primeiro elemento. Se $v_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\, e_j$, então a matriz σ dos coeficientes assim obtidos é unitária e $\sigma(e_1) = v_1$. De um modo geral, como foi provado anteriormente, dados v e w em X, existe σ ortonormal tal que $\sigma(v) = w$, o que mostra que a ação η é transitiva. O grupo de isotropia $U(n)_{e_n}$ do ponto e_n é o conjunto

$$U(n-1) = \left\{ \sigma \in U(n) :\ \sigma = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & \tilde{\sigma} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{\sigma} \in U(n-1) \right\}$$

que é um subgrupo fechado de U(n). Pelo Teorema 2.2 temos que X é difeomorfo a U(n)/U(n-1).

Se tivéssemos considerado o sistema de coordenada canônica global que tem por base o conjunto $\{e_1, \ldots, e_n, \sqrt{-1}\, e_1, \ldots, \sqrt{-1}\, e_n\}$,

teríamos $C^n \simeq R^{2n}$ e $X \simeq S^{2n-1}$, e então $SU(n)/SU(n-1) \simeq S^{2n-1} \simeq$
$\simeq U(n)/U(n-1)$.

Exemplo 2 - Os Espaços Projetivos

1) Inicialmente vamos identificar os pontos de uma mesma reta que passa pela origem do R^n, excetuando a própria origem, através da relação: se $a, b \in R^n - \{0\}$, então $a \sim b$ se, e somente se, $a = \lambda b$ para algum $\lambda \in R - \{0\}$. Consideremos a aplicação quociente $\pi: R^n-\{0\} \longrightarrow R^n-\{0\}/\sim$, e em $R^n-\{0\}/\sim$ a topologia co-induzida pela π; desta forma, π é uma aplicação contínua. A restrição de π à esfera S^{n-1} é um recobrimento de duas folhas de $R^n-\{0\}/\sim$. Como S^{n-1} é um subgrupo fechado de $R^n - \{0\}$, pelo Teorema 2.1, existe uma única estrutura de variedade diferencial em $R^n-\{0\}/\sim$ tal que π é um difeomorfismo local. Daí podemos escrever $R^n-\{0\}/\sim$ como sendo o espaço

$$P^{n-1} = \{\overline{x} = \{x,-x\} : x \in S^{n-1}\}$$

chamado espaço projetivo real. A aplicação $\eta: SO(n) \times P^{n-1} \longrightarrow P^{n-1}$ dada por $\eta(A,\overline{x}) = \overline{Ax} = \{Ax,-Ax\}$ está bem definida pois, se $(A,\overline{x}) = (A,\overline{y})$, então $\overline{Ax} = \overline{Ay}$, ou seja $Ax = Ay$ ou $Ax = -Ay$; mas se isto ocorre, temos $x = y$ ou $x = -y$, ou seja, $\overline{x} = \overline{y}$. Além disso, η é uma ação transitiva, ou seja, dados $\overline{x}, \overline{y} \in P^{n-1}$, existe $A \in SO(n)$, tal que $A\overline{x} = \overline{y}$. Para provarmos este resultado, tomemos $X, Y \in SO(n)$, tais que $Xe_1 = x$ ou $Xe_1 = -x$, e $Ye_1 = y$ ou $Ye_1 = -y$. Daí $X^{-1}x = e_1$ ou $X^{-1}(-x) = e_1$ e então $y = Ye_1 = Y(X^{-1}x) = (YX^{-1})x$ ou $y = Ye_1 = Y(X^{-1}(-x)) = (YX^{-1})(-x)$. Logo, existe $A = YX^{-1} \in SO(n)$ tal que $Ax = y$ ou $A(-x) = y$, ou seja, $A\overline{x} = \overline{y}$, provando que a ação é transitiva. É fácil ver que o grupo de isotropia de $\bar{e}_n \in P^{n-1}$ é o conjunto

$$O(n-1) = \left\{ A \in SO(n) : A = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \ \ldots \ 0 & \det \tilde{A} \end{array}\right] \text{ e } \tilde{A} \in O(n-1) \right\}$$

pois $\det A = (\det \tilde{A})^2 = 1$, portanto $A \in SO(n)$; além disso, como $\det \tilde{A} = \pm 1$, temos $A\, e_n = e_n$ ou $A\, e_n = -e_n$, ou seja, $\overline{A\, e_n} = \bar{e}_n$. Pelo Teorema 2.2 podemos afirmar que P^{n-1} é difeomorfo a $SO(n)/O(n-1)$.

2) Como conjunto, o espaço projetivo CP^{n-1} é o conjunto das classes de equivalência dos pontos de $C^n - \{0\}$ com a seguinte relação de equivalência: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é equivalente a $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, se existe um complexo λ não nulo, tal que $\lambda\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$. Pelo mesmo motivo anterior podemos considerar

$$CP^{n-1} = \{\bar{w} = \{w,-w\} : w \in C^n \text{ e } |w| = 1\}.$$

Temos naturalmente definida a ação $\eta: SU(n) \times CP^{n-1} \longrightarrow CP^{n-1}$, tal que $\eta(A,\bar{w}) = \overline{Aw} = \{Aw, -Aw\}$. A aplicação η está bem definida, pois $|Aw| = |-Aw| = 1$, e portanto $\overline{Aw} \in CP^{n-1}$. A transitividade é provada como no caso anterior. O grupo de isotropia de $\bar{e}_n \in CP^{n-1}$ é o subconjunto $U(n-1)$ de $SU(n)$, onde

$$U(n-1) = \left\{ A \in SU(n) : A = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \begin{matrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \ \dots \ 0 & 1/\det \tilde{A} \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{A} \in U(n-1) \right\}$$

De fato, $\det A = \det \tilde{A} \cdot \frac{1}{\det \tilde{A}} = 1$, e $A\, e_n = \frac{1}{\det \tilde{A}} \cdot e_n$ ou , $A(-e_n) = \frac{1}{\det \tilde{A}}\, e_n$; logo $\overline{A\, e_n} = \overline{e}_n$. Provemos que a aplicação $\varphi: SU(n)/U(n-1) \longrightarrow CP^{n-1}$ tal que $\varphi(A.U(n-1)) = \overline{A\, e_n}$ é uma bijeção. Se $\overline{A\, e_n} = \overline{B\, e_n}$, então $A\, e_n = B\, e_n$ ou $A\, e_n = -B\, e_n$; logo $A^{-1}\, B\, e_n = e_n$ ou $A^{-1}\, B\, e_n = -e_n$, e então $A^{-1}\, B \in U(n-1)$, significando dizer que A e B determinam a mesma classe de equivalência. A sobrejeção deve-se ao fato de que a união das classes de equivalência é o próprio CP^{n-1}. A estrutura diferenciável de CP^{n-1} é a que torma φ um difeomormismo, como garante o Teorema 2.2.

Exemplo 3 - A Variedade de Stiefel

Denotemos por $S_m(R^n)$ o conjunto dos m-referenciais ortonormais do R^n, isto é,

$$S_m(R^n) = \left\{ \tilde{u} = (u_1, \dots, u_m) : m \leq n \text{ e } u_1, \dots, u_m \text{ ortonormais em } R^n \right\}$$

Definimos $\eta: O(n) \times S_m(R^n) \longrightarrow S_m(R^n)$ por $\eta(A,\tilde{u}) = A\tilde{u} = (Au_1, \dots, Au_m)$ que está obviamente bem definida. Por outro lado, dados dois referenciais $\tilde{u} = (u_1, \dots, u_m)$ e $\tilde{v} = (v_1, \dots, v_m)$ em $S_m(R^n)$ existe uma única transformação linear dada por uma matriz $A \in O(n)$, tal que $A\, u_1 = v_1, \dots, A\, u_m = v_m$, ou seja , $A\, \tilde{u} = \tilde{v}$. Logo η é uma ação transitiva. Considerando a base canônica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ do R^n e o referencial $\tilde{e} = (e_1, \ldots, e_m) \in S_m(R^n)$, é fácil ver que o grupo de isotropia de $\tilde{e}$ e o conjunto

$$H = \left\{ A \in O(n) : A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, I \text{ é a matriz identidade } n \times n \text{ e } B \in O(n-m) \right\}$$

Pelo fato de distinguirmos os elementos de H somente por B podemos identificar H com $O(n-m)$. Como temos feito até aqui, provamos que a aplicação $\varphi: O(n)/O(n-m) \longrightarrow S_m(R^n)$ dada por $\varphi(A \cdot O(n-m)) = \eta(A, \tilde{e}) = A\tilde{e}$ está bem definida e é bijetora. Existe, então, uma estrutura de variedade diferenciável em $S_m(R^n)$, que é a mesma que faz de φ o difeomorfismo garantido pelo Teorema 2.2. Daí concluímos que $\dim S_m(R^n) = \dim O(n)/O(n-m) = \frac{n}{2} \cdot (n-1) - \frac{n-m}{2} \cdot (n-m-1) = \frac{m}{2}(2n-m-1)$, e $S_m(R^n)$ se diz Variedade de Stiefel.

CAPÍTULO III

AS VARIEDADES DE GRASSMANN

Neste capítulo vamos estudar o conjunto de todos os subespaços n-dimensionais do R^{n+p}, ou seja, o conjunto de todos os n-planos do R^{n+p} passando pela origem, primeiramente como uma variedade na sua forma usual definida no Capítulo I, e depois como uma variedade homogênea definida no Capítulo II. Em ambos os casos teremos a denominada *variedade de Grassmann*, e o conjunto em estudo denotado por $G_{p,n}$. Portanto

$$G_{p,n} = \{\text{n-planos do } R^{n+p} \text{ passando pela origem}\}$$

Por exemplo, $G_{2,1}$ é o conjunto de todos os subespaços de dimensão 1, ou seja, retas que passam pela origem, no R^3.

Utilizaremos M (p, q) para denotar o conjunto das pxq matrizes reais, e $M(p, q; n)$ para denotar o subconjunto de $M(p, q)$ composto das matrizes de posto n. As linhas de uma matriz $A \in M(n, n+p; n)$ formam um conjunto de n vetores linearmente independentes do R^{n+p} e, portanto, geram um elemento de $G_{p,n}$ denotado por $\lambda(A)$. Duas matrizes A e B podem determinar o mesmo elemento de $G_{p,n}$. Isto acontece se, e somente se, cada linha de uma delas for combinação linear das linhas da outra, isto é, se existir uma nxn matriz não singular tal que $A = C B$.

Podemos definir um isomorfismo $\tau: M(n, n+p) \longrightarrow R^{n(n+p)}$ que a cada matriz da forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{1(n+p)} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & \cdots & a_{2(n+p)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \cdots & a_{n(n+p)} \end{bmatrix}$$

associa a $n(n+p)$-upla.

$(a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{1(n+p)}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{2(n+p)}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn}, \ldots, a_{n(n+p)})$.

O conjunto $M(n, n+p; n)$ é um subconjunto aberto do R^{n+p}. De fato: seja $D: M(n, n+p) \longrightarrow R$ onde $D(A)$ é a soma dos quadrados dos determinantes das nxn submatrizes. A aplicação D é contínua, $R - \{0\}$ é um aberto de R e $D^{-1}(R - \{0\}) = M(n, n+p; n)$; logo $M(n, n+p; n)$ é um aberto.

Defihimos agora a aplicação $\lambda: M(n, n+p; n) \longrightarrow G_{p,n}$ que a cada $A \in M\ (n, n+p; n)$ associa o subespaço $\lambda\ (A)$ descrito acima. Podemos introduzir uma topologia em $G_{p,n}$, onde V é aberto de $G_{p,n}$ se, e somente se, $\lambda^{-1}(V)$ é um aberto de $M\ (n, n+p; n)$. Mostremos que λ é uma aplicação aberta. Seja U um aberto de $M\ (n, n+p; n)$. Para cada C em $M\ (n, n; n)$ a aplicação $\alpha_C: M\ (n, n+p; n) \longrightarrow M\ (n, n+p; n)$ tal que $\alpha_C\ (A) = C\ A$ é um homeomorfismo de $M\ (n, n+p; n)$ sobre si mesmo. De fato, da forma como foi definida α_C é contínua e sua inversa é dada por $(\alpha_C)^{-1} = \alpha_{C^{-1}}$ que, do mesmo modo é contínua, lembrando a existência de C^{-1} pois C tem posto n. Logo α_C é uma aplicação aberta, isto é , para U aberto em $M\ (n, n+p; n)$ temos $\alpha_C\ (U)$ aberto em $M\ (n, n+p; n)$. Se $A \subset U$, $\lambda^{-1}\ (\lambda A)$ pode ser qualquer matriz $\alpha_C\ (A) = C\ A$ com $C \in M\ (n, n; n)$ que é um aberto. Pela topologia co-induzida por λ em $G_{p,n}$, temos que $\lambda\ (U)$ é aberto, ou seja, λ é uma aplicação aberta.

<u>TEOREMA 3.1:</u> $G_{p,n}$, com esta topologia, é uma variedade diferenciável de classe C^{∞}.

Demonstração:

(a) Provemos que $G_{p,n}$ é um espaço Hausdorff com base enumerável. Sejam $\lambda(A)$ e $\lambda(B)$ subespaços distintos de $G_{p,n}$. Portanto a matriz $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ deve ter, no mínimo, posto n+1. Escolhemos $\xi > 0$ tal que qualquer $2n \times (n+p)$ matriz à distância menor do que ξ de $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ deve ter, no mínimo, posto n+1. Seja U a ξ -vizinhança de A e V a ξ-vizinhança de B. Sendo ξ uma aplicação aberta, temos que $\lambda\ (U)$ e $\lambda\ (V)$ são vizinhanças de A e B, respectivamente, e disjuntas pois, se existisse $A' \in \lambda\ (U) \cap \lambda\ (V)$, existiria também $X \in U$ e $Y \in V$ com $\lambda\ (X) = \lambda\ (Y) = A'$ e $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ teria posto n, o que não pode ocorrer. Assim $G_{p,n}$ é Haüsdorff. A enumerabilidade da base de $G_{p,n}$ decorre do fato de λ: M (n, n+p; n) $\subset R^{n(n+p)} \longrightarrow G_{p,n}$ ser contínua, aberta, e da enumerabilidade de M (n, n+p; n) por ser subconjunto de $R^{n(n+p)}$ (ver [3], páginas 217 e 218).

(b) Vamos agora construir uma coleção de homeomorfismos de abertos do $G_{p,n}$ sobre abertos do $R^{p\ n}$. Provemos que $G_{p,n}$ é localmente euclidiano. A idéia geométrica é a que segue. Seja γ um n-plano contendo a origem de R^{n+p}. Então γ representa um espaço de dimensão n em R^{n+p}. Existe uma projeção π do R^{n+p} num n-plano coordenado de tal forma que, restrito a γ, π é um isomorfismo. Seja U o conjunto de todos os n-planos γ que se projetam isomorficamente neste n-plano coordenado através da π. Para cada $\gamma \in$ U temos uma n-upla de vetores $(v_1, \ldots, v_n)$ projetando-se pela ação de π na base canônica do n-plano coordenado, ao mesmo tempo em que cada n-upla $(v_1, \ldots, v_n)$ determina um plano γ de U. Podemos tomar um plano projetante para U com base canônica $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ de tal forma que as n primeiras componentes de v_i coincidam com as componentes de $e_i = \pi(v_i)$. Os outros p componentes de v_i, na verdade, é que vão diferenciar cada $\gamma \in$ U. Daí concluímos que U é homeomorfo a $R^{p\ n}$. Segundo esta idéia geométrica, seja λ (A) um elemento genérico de $G_{p,n}$ tal que as primeiras n colunas de A formem uma nxn matriz de posto n e seja U o conjunto das matrizes da forma $[P,Q]$ onde P é uma nxn matriz de posto n. U é um conjunto aberto de $R^{n(n+p)}$ e, portanto, de M (n, n+p; n). Sendo λ uma aplicação aberta temos que V = λ (U) é um aberto de $G_{p,n}$. Consideremos Ψ : M (n, p) $\longrightarrow$ M (n, n+p; n) tal que $\Psi_*(Q) = [I,Q]$, sendo I a identidade de ordem n. A aplicação Ψ é contínua pois é uma inclusão. Como $G_{p,n}$ tem a estrutura topológica co-induzida pela λ, então $\Psi_o = \lambda \circ \Psi$ é uma aplicação contínua de $M(n, p)$ em $G_{p,n}$. Podemos afirmar que Ψ_o é injetora visto que, se $\Psi_o(Q_1) = \Psi_o(Q_2)$, temos $\lambda(\Psi(Q_1)) = \lambda(\Psi(Q_2))$, ou ainda, $\lambda[I, Q_1] = \lambda[I, Q_2]$. A última igualdade ocorre se, e somente se, existe $C \in M(n, n; n)$ tal que $[I, Q_1] = C[I, Q_2]$, ou $C = I_n$; portanto $Q_1 = Q_2$. Além disso, Ψ_o aplica $M(n, p)$ sobre $V = \lambda(U)$. De fato, dado $\lambda[P, Q]$ em V temos $\lambda[P, Q] = \lambda[I, (P^{-1}Q)] = \Psi_o(P^{-1}Q)$. A primeira igualdade decorre do fato de existir $P \in M(n, n; n)$ tal que $P[I, (P^{-1}Q)] = [PI, P(P^{-1}Q)] = [P, Q]$. Seja $\varphi : U \to M(n, p)$ a função definida por $\varphi[P, Q] = P^{-1}Q$. Esta aplicação é constante em cada $\lambda^{-1}(\gamma)$. De fato, dado $\gamma = \lambda[P_1, Q_1]$ temos $\lambda^{-1}(\gamma) = [P_2, Q_2] = C[P_1, Q_1]$, para todo $C \in M(n, n; n)$, ou seja, $[P_2, Q_2] = [CP_1, CQ_1]$ e então $\varphi[P_2, Q_2] = \varphi[CP_1, CQ_1] = (CP_1)^{-1}(CQ_1) = (P_1^{-1}C^{-1})(CQ_1) = P_1^{-1}(C^{-1}C)Q_1 = P_1^{-1}Q_1 = \varphi[P_1, Q_1]$. Logo φ induz uma aplicação contínua φ_o de $V = \lambda(U)$ sobre $M(n, p)$ que é a inversa da Ψ_o pois $\varphi_o(\Psi_o(Q)) = \varphi_o[I, Q] = I^{-1}Q = Q$. Eis o diagrama resultante.

$$\begin{tikzcd}
M(n,p) \arrow[r, shift left, "\Psi"] \arrow[drr, shift left, "\Psi_o"] & U \arrow[l, shift left, "\varphi"] \arrow[d, "\lambda"] \arrow[r, phantom, "\subset"] & M(n,n+p;\, n) \arrow[d, "\lambda"] \\
 & V \arrow[ul, shift left, "\varphi_o"] \arrow[r, phantom, "\subset"] & G_{p,n}
\end{tikzcd}$$

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Como Ψ_o é contínua e tem inversa φ_o contínua, então Ψ_o é um homeomorfismo de M (n, p) em $G_{p,n}$ e, consequentemente, φ_o é um homeomorfismo de $V \subset G_{p,n}$ em M (n, p). Distribuindo as colunas de $Q \in M$ (n, p) por entre as colunas da nxn matriz identidade temos abertos $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$ que definem novos homeomorfismos $\tilde{\varphi}_o$ semelhantes a φ_o. Denotemos por $\mathcal{U}'$ a coleção dos homeomorfismos do tipo φ_o $\tilde{\varphi}_o$.

(c) É fácil ver que os domínios dos homeomorfismos de $\mathcal{U}'$ cobrem $G_{p,n}$.

(d) Consideremos (V, φ_o) e $(\tilde{V}, \tilde{\varphi}_o)$ duas vizinhanças coordenadas da forma estudada no ítem (b), tais que $V \cap \tilde{V} = \emptyset$, e mostremos que a mudança de coordenadas é um homeomorfismo C^∞. A mudança de coordenadas é dada por $\varphi_o \circ \tilde{\Psi}_o$: $\tilde{\varphi}\ (U \cap \tilde{U}) \longrightarrow \varphi(U \cap \tilde{U})$, com $\varphi_o \circ \tilde{\Psi}_o = \varphi_o \circ (\lambda \circ \tilde{\Psi}) = (\varphi_o \circ \lambda) \circ \tilde{\Psi} = \varphi \circ \tilde{\Psi}$ onde $\tilde{\Psi}$ é uma aplicação de classe C^∞ e φ também o é no aberto $U \subset M$ (n, n+p; n). Logo $\varphi_o \circ \tilde{\Psi}_o$ é de classe C^∞, e obviamente um homeomorfismo.

(e) Vamos considerar o atlas máximo $\mathcal{U}$, de classe C^k possuindo todos os homeomorfismos φ_o de $V \subset G_{p,n}$ em M (n, p) descritos acima. É claro que $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$.

Pela definição 1.1 temos que $(G_{p,n}, \mathcal{U})$ é uma variedade diferenciável de dimensão pn e classe C^∞.

<u>TEOREMA 3.2</u>: $G_{p,n}$ é uma variedade homogênea.

Demonstração: Lembremo-nos primeiramente de que uma transformação linear não singular leva base em base, ou melhor, leva subespaço n-dimensional em subespaço n-dimensional. Sabemos também que dados 2 subespaços n-dimensionais existe uma única transformação linear não singular que leva um subespaço no outro. Por isso a aplicação η: $O\ (n+p) \times G_{p,n} \longrightarrow G_{p,n}$ onde $\eta\ (A, \gamma) = A\gamma = \{Ax : x \in \gamma\}$ está bem definida, e se provarmos que η é diferenciável, então será uma ação transitiva. Provemos primeiramente que η é contínua. Seja $\tilde{\eta}$: $O\ (n+p) \times M\ (n, n+p; n) \longrightarrow M\ (n, n+p; n)$ dada por $\tilde{\eta}\ (A,B) = BA^t$. O seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
O\ (n+p) \arrow[d, equal] & \times & M\ (n, n+p; n) \arrow[rr, "\tilde{\eta}"] \arrow[d, "\lambda"] & & M\ (n, n+p; n) \arrow[d, "\lambda"] \\
O\ (n+p) & \times & G_{p,n} \arrow[rr, "\eta"] \arrow[urr, dashed, "\eta^*"] & & G_{p,n}
\end{tikzcd}$$

Como $G_{p,n}$ tem a topologia co-induzida por λ, e sendo $\tilde{\eta}$ obviamente contínua, então η é contínua. Para provar que η é diferenciável no ponto (A, γ) consideremos o levantamento local η^* de η sobre $W \subset O\ (n+p) \times G_{p,n}$:

$$\eta^* : W \longrightarrow M\ (n, n+p; n)$$

dado por $\eta^*\ (B, \delta) = [I, \varphi_o\ \eta\ (B, \delta)]$ (ver [7], página 50). Devido à continuidade da η podemos escolher um sistema de coordenadas φ_o: $V \subset G_{p,n} \longrightarrow M\ (n, p)$ de tal modo que $\eta\ (A, \gamma) \in V$, e restringindo o aberto W tenhamos $\eta\ (W) \subset V$. Do modo como foram introduzidos os sistemas de coordenadas em $G_{p,n}$, o aberto V é a imagem por λ do aberto $U \subset M\ (n, n+p; n)$, constituído pelas matrizes $[P,Q]$ onde P é uma nxn matriz inversível. Seja $\lambda\ [P,Q] = \delta$, $[P,Q] \in U$. Mostraremos que $\varphi_o\ \eta$ é diferenciável; mas $\varphi_o\ \eta\ (B, \delta) = \varphi_o\ (\lambda([P,Q]B^t)) = \varphi([P,Q]\ B^t)$. Se $B^t = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$ onde B_1 é nxn, B_2 é nxp, B_3 é pxn e B_4 é pxp, então $[P,Q]\, B^t = [PB_1 + QB_3,\ PB_2 + QB_4]$. Fazendo $C = PB_1 + QB_3$ e $D = PB_2 + QB_4$ podemos escrever $\varphi_o\, \eta\, (B,\delta) = \varphi\,[C,D] = C^{-1} D$, onde a inversibilidade de C deve-se à escolha da vizinhança U. Então $\varphi_o\, \eta$ é diferenciável porque soma, produto e inversão de matrizes são aplicações C^{∞}, e, portanto, o levantamento η^* é diferenciável. Por outro lado, λ também é diferenciável, considerando que $\varphi_o\, \lambda[P,Q] = \varphi\,[P,Q] = P^{-1} Q$. Logo, $\eta = \lambda\, \eta^*$ é diferenciável. Fica assim provado que η é uma ação transitiva. Seja agora γ_o o n-plano que tem sua base formada pelos n primeiros elementos da base canônica $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+p}\}$ do R^{n+p}. Então o grupo de isotropia de γ_o é o conjunto

$$H = \left\{ M = \left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array}\right] \in O\,(n+p) : A \in O\,(n) \text{ e } B \in O\,(p) \right\}$$

pois os elementos de H deixam γ_o fixo. Como as matrizes A e B são as que vão distinguir os elementos de H, podemos identificar H com $O\,(n) \times O\,(p)$, e a aplicação $\varphi : O\,(n+p)\, /\, O\,(n) \times O\,(p) \longrightarrow G_{p,n}$, onde $\varphi\,(M\,(O\,(n) \times O\,(p))) = \eta\,(M,\gamma_o) = M \cdot \gamma_o$, pelo Teorema 2.2 é um difeomorfismo, ou seja:

$G_{p,n}$ é difeomorfo a $O(n+p)\, /\, O(n) \times O(p)$

Vamos provar agora que existe uma bijeção entre $G_{n,1}$ e P^n, o que corresponde a uma bijeção entre $G_{n-1,1}$ e P^{n-1}. Partindo dos resultados:

$G_{n-1,1} \cong O(n)/O(1) \times O(n-1)$ e

$$P^{n-1} \simeq SO(n) / O(n-1) \qquad ,$$

provaremos que $O(n)/O(1)$ pode ser identificado com $SO(n)$, onde $O(1)$, pensado como subconjunto de $O(n)$ através da inclusão, é o conjunto

$$\left\{ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Temos definida a seguinte relação de equivalência em $O(n)$: se $A = (a_{ij})_{nxn}$, $B = (b_{ij})_{nxn} \in O(n)$, então $A \sim B$ se, e somente se, $A = B$ ou se A e B são tais que

$$a_{ij} = \begin{cases} b_{ij} & \text{se } i \neq 1 \\ -b_{ij} & \text{se } i = 1 \end{cases}$$

Assim, cada classe de equivalência de $O(n) / O(1)$ compõe-se de dois elementos somente, um com determinante +1 e o outro com determinante -1. Definimos então a aplicação $\alpha: O(n) / O(1) \longrightarrow SO(n)$ de forma que, se $\overline{A} = \{A, B\}$ está em $O(n) / O(1)$, então

$$\alpha(\overline{A}) = \begin{cases} A & \text{se } \det(A) = +1 \quad , \quad \text{ou} \\ B & \text{se } \det(B) = +1 \end{cases}$$

Esta aplicação é bijetora, permitindo identificar $O(n)/O(1)$ e $SO(n)$ e, consequentemente, $G_{n-1,1}$ e $SO(n)$. Com isso temos também identificado $G_{n;1}$ e P^n, o que mostra que os espaços projetivos são casos particulares das variedades de Grassmann.

Outro resultado: sendo $G_{p,n}$ difeomorfo a $O(n+p)/O(n)xO(p)$, e, portanto, $G_{n,p}$ difeomorfo a $O(n+p)/O(p)xO(n)$, é fácil ver que $G_{p,n} \simeq G_{n,p}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Carmo, M. P., *Notas de um Curso de Grupos de Lie*, Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1974.

[2] Hoffmann/Kunze, *Álgebra Linear*, Editora da Universidade de São Paulo e Editora Polígono, São Paulo, 1971.

[3] Lima, E. L., *Elementos de Topologia Geral*, Editora da Universidade de São Paulo e Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1970.

[4] Lima, E. L., *Variedades Diferenciáveis*, Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1973.

[5] Matsushima, Y., *Groupes de Lie*, Université de Grenoble, Grenoble, 1966.

[6] Mello, A. H./Barone Jr., M., *Equações Diferenciais - Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, Publicações do IMEUSP, São Paulo, 1979.

[7] Munkres, J. R., *Elementary Differential Topology*, Princeton University Press, Princeton, 1966.

[8] Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott-Foresman and Company, Glenview, Illinois, London, 1971.

Unidade BC
Proc.
Preço doação
Data 26/7/82