

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Conjuntos de Controle em Órbitas Adjuntas e Compactificações Ordenadas de Semigrupos

Tese de Doutorado
Geometria/Topologia

Marcos André Verdi¹

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

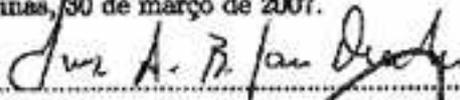
Co-orientador: Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio

¹Este trabalho contou com o apoio financeiro do programa BIG-UNICAMP

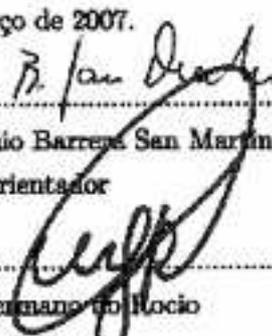
Conjuntos de Controle em Órbitas Adjuntas e Compactificações Ordenadas de Semigrupos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Marcos André Verdi e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 30 de março de 2007.



Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin
Orientador



Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio
Co-orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (Orientador)(IMECC/UNICAMP)
2. Prof. Dr. Marcos Salvai (Universidade de Córdoba - AR)
3. Prof. Dr. Carlos José Braga Barros (DMA/UEM)
4. Prof. Dr. Marcelo Firer (IMECC/UNICAMP)
5. Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC/UNICAMP)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Júlia Milari Rodrigues – CRB8a / 2116

Verdi, Marcos André
V384c Conjuntos de controle em órbitas adjacentes e compactificações ordenadas de semigrupos / Marcos André Verdi. -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2007.
Orientador : Luis Antonio Berrera San Martín; Osvaldo Germano do Rocio
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
1. Lie, Grupos de. 2. Espaços homogêneos. 3. Semigrupos. I. San Martín, Luis Antonio Berrera. II. Rocio, Osvaldo Germano do. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Control sets on adjoint orbits and ordered compactification of semigroups.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Lie groups. 2. Homogeneous spaces.
3. Semigroups

Área de concentração: Geometria/Topologia

Título: Doutor em Matemática

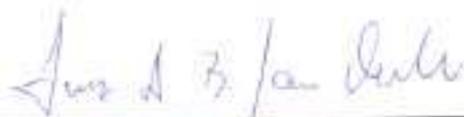
Banca examinadora: Prof. Dr. Luis Antonio Berrera San Martín (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Marcos Sábulu (FAMAF-UNC Universidade Nacional de Córdoba - Argentina)
Prof. Dr. Carlos José Braga Barros (DMA-UEM)
Prof. Dr. Marcelo Frier (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Pedro José Cuzzogno (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 06/03/2007

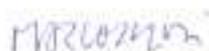
Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 06 de março de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN



Prof. (a). Dr (a). MARCOS SALVAI



Prof. (a). Dr (a). CARLOS JOSÉ BRAGA BARROS



Prof. (a). Dr (a). MARCELO FIRER



Prof. (a) Dr. (a) PEDRO JOSÉ CATUOGNO

Agradecimentos

Agradeço aos professores Luiz Antonio Barrera San Martin e Osvaldo Germano do Rocio pelo apoio e paciência na orientação deste trabalho. Agradeço também aos amigos e colegas André, Edson, Luciano, Gilmar, Ederson, Ademir e Fábio, que estiveram comigo durante todo esse caminho. À minha esposa Neuzilene pelo carinho e compreensão nesta etapa de minha vida. Aos meus pais, Flora e Osmar Verdi e meus irmãos, Marcelo e Cristiani, pelo apoio, inclusive financeiro, para que eu concluísse este curso. Agradeço também aos funcionários da secretaria de pós-graduação: Tânia, Cidinha e Ednaldo, pela atenção e colaboração. Enfim, agradeço a todos aqueles que de uma forma ou de outra contribuíram para a elaboração deste trabalho e que eu tenha esquecido de mencionar.

Dedico este trabalho à memória de meu pai, Osmar Verdi.

Resumo

Neste trabalho estudamos dois problemas distintos: ações de semigrupos em órbitas adjuntas e compactificações de semigrupos. Quanto ao estudo das ações de semigrupos, consideramos um grupo de Lie semi-simples, não compacto, conexo e com centro finito G e a órbita adjunta de G através de elementos H pertencentes a uma subálgebra abeliana maximal contida na parte não-compacta de uma decomposição de Cartan de G . Tomamos então um semigrupo $S \subset G$ com pontos interiores e descrevemos os conjuntos de controle para a ação de S nestas órbitas. Mostramos também que esses conjuntos não são comparáveis utilizando a relação de ordem usual para conjuntos de controle e descrevemos seus domínios de atração. Consideramos também o caso em que S é um semigrupo maximal, obtendo uma descrição melhor dos conjuntos de controle. Para compactificações de semigrupos, adotamos as mesmas hipóteses sobre G e tomamos S como o semigrupo de compressão de um subconjunto fechado da variedade “flag” maximal de G . Obtemos uma compactificação do espaço homogêneo G/H , onde H denota o grupo das unidades de S , como um subconjunto dos conjuntos fechados de G e mostramos que quando G tem posto 1 é possível realizar a imagem de S/H por essa compactificação no conjunto dos subconjuntos fechados da variedade flag maximal de G .

Abstract

In this work we study two distinct problems: semigroup actions on adjoint orbits and compactification of semigroups. For the study of the semigroup actions, we consider a semi-simple connected noncompact Lie group G and the adjoint orbit through elements in a maximal abelian subalgebra contained in the complement of a maximal compactly embedded subalgebra of the Lie algebra of G . We take then a semigroup $S \subset G$ with interior points and describe the control sets for the S -action on these orbits. It is proved here that these control sets are no comparable and we describe its domains of attraction. We also consider the case in that S is a maximal semigroup and obtain a better description of the control sets. For the compactification of semigroups, we use the same hypothesis about G and consider S as the compression semigroup of a closed subset in the maximal flag manifold of G . We obtain a compactification of the homogeneous space G/H , where $H = S \cap S^{-1}$, as a subset of the set of closed sets of G and we show that when G has rank one is possible to realize the image of S/H under this compactification in the set of the closed subsets of the maximal flag manifold.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Subgrupos Parabólicos e Variedades Flag	4
1.2 Conjuntos de controle em variedades flag	12
1.3 A Topologia de Vietoris	19
2 Órbitas adjuntas	22
2.1 Flag produto e ação diagonal	22
2.2 Órbitas adjuntas	27
3 Conjuntos de controle em órbitas adjuntas	31
3.1 Pontos fixos e conjuntos de controle	31
3.2 Domínios de atração	46
3.3 Semigrupos maximais do tipo $\{1\}$	48
4 Conjuntos de controle em $G/M_\Theta A_\Theta$	54
4.1 A órbita aberta	54
4.2 Conjuntos de controle	56
4.3 Semigrupos maximais	60
5 Compactificação Ordenada de Semigrupos	63
5.1 A Compactificação Ordenada de G/H	63
5.2 Um semigrupo de $Sl(2, \mathbb{R})$	71

Introdução

Seja G um grupo de Lie semi-simples, conexo, não compacto com centro finito e \mathfrak{g} sua álgebra de Lie, com uma decomposição de Iwasawa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$. Consideremos a correspondente decomposição global $G = KAN^+$ e denotemos por M o centralizador de A em K e por P o subgrupo parabólico minimal $P = MAN^+$. Em [4] San Martin e Tonelli caracterizam os conjuntos de controle para a ação de um semigrupo $S \subset G$ com $\text{int}S \neq \emptyset$ agindo na variedade flag maximal G/P essencialmente como conjuntos de pontos fixos de elementos no interior de S . Dado um elemento hiperbólico $h \in \text{int}S$ os pontos fixos de h , quando visto como um difeomorfismo de G/P , estão em bijeção com os elementos do grupo de Weyl W do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Esses pontos fixos estão no interior de conjuntos de controle e assim essa bijeção é utilizada para “rotular” os conjuntos de controle para S em G/P . Desta forma, para cada $w \in W$, $D(w)$ será o conjunto de controle contendo pontos fixos do tipo w . Foi mostrado também que os conjuntos de controle sobre as outras variedades flags são dados pelas projeções dos conjuntos de controle na flag maximal, através da fibração $\pi : G/P \rightarrow G/P_\Theta$. Além disso, quando $\Theta = \Theta(S)$ (o tipo parabólico do semigrupo), foi mostrado que o conjunto de controle invariante sobre G/P é exatamente a imagem inversa do conjunto de controle invariante C_Θ sobre G/P_Θ . Outra propriedade importante que ocorre neste caso é que C_Θ está contido na variedade estável para qualquer elemento hiperbólico $h \in \text{int}S$. Neste trabalho utilizamos esses resultados para estudar dois problemas distintos: conjuntos de controle em órbitas adjuntas e compactificações de semigrupos.

No estudo dos conjuntos de controle em órbitas adjuntas, o tratamento dado é o seguinte: Consideremos a ação adjunta de G em \mathfrak{g} , a qual é dada por $(g, X) \mapsto$

$\text{Ad}(g)X$, onde $g \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$. Se $H \in \mathfrak{a}$ é um elemento regular, então o subgrupo fechado MA é o centralizador de H em G . Desta forma, o espaço homogêneo G/MA identifica-se com a órbita adjunta de G através de H . Por outro lado, consideremos a ação diagonal de G em $G/P \times G/P$, a qual é dada por $(g, (x, y)) \mapsto (gx, gy)$ e denotemos por $x_0 = P$ a origem em G/P . Se w_0 é a involução principal de W , então o subgrupo de isotrofia no par $(\tilde{w}_0 x_0, x_0)$ também é dado por MA . Assim, temos uma identificação natural entre a órbita de G através de H em \mathfrak{g} e a órbita de G através de $(\tilde{w}_0 x_0, x_0)$ em $G/P \times G/P$ (essa órbita é denominada *órbita principal em $G/P \times G/P$*). Utilizamos essa identificação para obter uma descrição dos conjuntos de controle para a ação de S na órbita adjunta como conjunto de pontos fixos para elementos hiperbólicos no interior de S semelhante àquela descrita no parágrafo anterior para variedades flag. No entanto, as semelhanças param nesta descrição: Diferentemente de G/P , o espaço homogêneo G/MA não é uma variedade compacta. Assim, a existência de conjuntos de controle invariantes, que é sempre garantida em variedades compactas, não é esperada *a priori* em G/MA . Mostramos neste trabalho que nenhum semigrupo S com pontos interiores possui conjuntos de controle invariantes em G/MA .

Outro aspecto que diferencia os conjuntos de controle em G/MA e em G/P é o fato, também mostrado aqui, que em G/MA os conjuntos de controle para S não são comparáveis. Este fato tem uma consequência imediata no estudo dos respectivos domínios de atração: como os conjuntos de controle não são comparáveis, o domínio de atração de qualquer conjunto de controle em G/MA não pode interceptar os demais conjuntos de controle. Em particular, não pode ocorrer, como ocorre em variedades flag, que o domínio de atração de um conjunto de controle seja toda a variedade. Um estudo mais detalhado deste domínios é feito na seção 3.2.

Tendo feito o estudo dos conjuntos de controle para um semigrupo S apenas com a hipótese de que S tem interior não vazio, passamos a estudar o caso em que S é maximal. Neste caso, mostramos que o conjunto de controle contendo os h -pontos fixos do tipo 1 é dado como um produto cartesiano de conjuntos de controle em variedades flag. O passo seguinte neste trabalho é estudar os conjuntos de controle em órbitas adjuntas de elementos não necessariamente regulares. A descrição destes conjuntos é obtida de forma idêntica à feita em órbitas de elementos regulares.

O último capítulo deste trabalho trata de compactificações de semigrupos. Para isso, consideramos um subconjunto $C \subset G/P$ tal que $C = \text{fe}(\text{int}C)$ e $S = S_C$ o semigrupo de compressão de C . Denotemos por $H = S \cap S^{-1}$ o grupo das unidades de S e tomemos o espaço homogêneo G/H . Munindo o conjunto de todos os subconjuntos fechados de G , o qual denotaremos por $\mathcal{F}(G)$, da topologia de Vietoris (ver seção 1.3), obtemos um espaço compacto. A aplicação $\eta : G \rightarrow \mathcal{F}(G)$ definida por $\eta(g) = gS^{-1}$ fatora-se a uma aplicação $\bar{\eta} : G/H \rightarrow \mathcal{F}(G)$, a partir da qual obtemos uma compactificação de G/H , chamada *compactificação ordenada* de G/H . Consideremos ainda a aplicação $\iota : G \rightarrow \mathcal{F}(G/P)$ definida por $\iota(g) = gC$. Neste trabalho, mostramos que se G tem posto 1 então $\text{fe}(\eta(S))$ é homeomorfo a $\text{fe}(\iota(S))$. Este resultado é análogo ao obtido por Hilgert e Neeb em [10] no caso em que S é um semigrupo de Lie estendido, mas sem a hipótese adicional de que G tem posto 1.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo serão dadas as definições e os resultados básicos que serão usados no decorrer do trabalho. Começamos introduzindo alguns conceitos sobre a estrutura dos grupos de Lie semi-simples e suas variedades “flag”, que podem ser encontrados com mais detalhes no livro [7]. Em seguida, enunciaremos alguns resultados relacionados ao estudo de conjuntos de controle em variedades “flag”, cujas demonstrações podem ser encontrados em [2],[5],[3], [4] e [6]. A seção seguinte trata da topologia de Vietoris. Essa é uma topologia introduzida no conjunto dos subconjuntos fechados de um espaço metrizável e σ -compacto e será utilizada na compactificação de semigrupos, a ser estudada no último capítulo desta tese.

1.1 Subgrupos Parabólicos e Variedades Flag

Seja G um grupo de Lie semi-simples, não compacto, conexo, com centro finito e denotemos por \mathfrak{g} sua álgebra de Lie. Consideremos uma decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, com \mathfrak{k} subálgebra compacta. Escolhendo uma subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$, denotaremos por Π o sistema de raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Fixando uma câmara positiva \mathfrak{a}^+ temos, associado a essa escolha, um sistema de raízes positivas Π^+ e o correspondente sistema de raízes simples Σ . Sejam

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(H)X = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{a}\}$$

o espaço de raízes associado a raiz α e

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

a subálgebra nilpotente associada à escolha da câmara positiva \mathfrak{a}^+ . Obtemos assim uma *decomposição de Iwasawa* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$, que origina a correspondente decomposição global $G = KAN^+$, onde $K = \exp \mathfrak{k}$, $A = \exp \mathfrak{a}$ e $N^+ = \exp \mathfrak{n}^+$.

Sejam

$$M = \{u \in K : \text{Ad}(u)H = H \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}$$

e

$$M^* = \{u \in K : \text{Ad}(u)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}$$

respectivamente o centralizador e o normalizador de \mathfrak{a} em K e denotemos por \mathfrak{m} o centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{k} :

$$\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{k} : \text{ad}(X)H = H, \forall H \in \mathfrak{a}\}.$$

O grupo finito $W = M^*/M$ é o grupo de Weyl do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. De maneira equivalente, W é o grupo de reflexões gerado pelas raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. O subgrupo fechado $P = MAN^+$ é um *subgrupo parabólico minimal* de G , cuja álgebra de Lie é a *subálgebra parabólica minimal* $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$. Qualquer subgrupo parabólico minimal de G é obtido a partir de P através de uma conjugação por um elemento de G , bem como as demais subálgebras parabólicas minimais de \mathfrak{g} são da forma $\text{Ad}(g)\mathfrak{p}$, com $g \in G$. Como P é o normalizador de \mathfrak{p} em G , a *variedade flag maximal* $\mathbb{F} = G/P$ de G identifica-se ao conjunto de subálgebras parabólicas minimais $\{\text{Ad}(g)\mathfrak{p} : g \in G\}$. Como P é também o normalizador do nilradical de \mathfrak{p} , que é dado por \mathfrak{n}^+ , \mathbb{F} pode também ser identificada com o conjunto das subálgebras conjugadas a \mathfrak{n}^+ : $\{\text{Ad}(g)\mathfrak{n}^+ : g \in G\}$.

Exemplo 1.1 *Seja $G = Sl(n, \mathbb{R})$, o grupo das matrizes com determinante 1. Sua álgebra de Lie \mathfrak{g} é a álgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ das matrizes de traço 0. Uma decomposição de Cartan de \mathfrak{g} é dada por $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{s}$, onde $\mathfrak{so}(n)$ é a álgebra das matrizes anti-simétricas e \mathfrak{s} é o espaço das matrizes simétricas. O conjunto das matrizes diagonais \mathfrak{a} é uma subálgebra abeliana maximal contida em \mathfrak{s} . Sejam $\lambda_i : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$ os funcionais definidos por $\lambda_i(H) = a_i$, onde $H = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ é uma matriz diagonal com*

entradas diagonais $a_{ii} = a_i$. Então as raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ são os funcionais $\alpha_{i,j} = \lambda_i - \lambda_j$. O grupo de Weyl W é o grupo das permutações em n elementos, e age em \mathfrak{a} permutando as entradas diagonais de uma matriz $H \in \mathfrak{a}$. Podemos tomar como câmara positiva o conjunto das matrizes $\mathfrak{a}^+ := \{\text{diag}(a_1, \dots, a_n) : a_1 > a_2 > \dots > a_n\}$. O conjunto de raízes positivas associado a esta escolha de \mathfrak{a}^+ é o conjunto $\Pi^+ = \{\alpha_{i,j} : i > j\}$ e o correspondente sistema simples de raízes é o conjunto $\Sigma = \{\alpha_{i,i+1} : i = 1, 2, \dots, n-1\}$. Obtemos assim uma decomposição de Iwasawa

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+,$$

onde \mathfrak{n}^+ é o conjunto das matrizes triangulares superiores com entradas diagonais são todas iguais a zero. Exponenciando essas subálgebras obtemos a decomposição global

$$\text{Sl}(n, \mathbb{R}) = \text{SO}(n)AN^+,$$

onde $\text{SO}(n)$ é o grupo das matrizes ortogonais, A é o grupo das matrizes diagonais com entradas positivas e determinante 1 e N^+ o subgrupo nilpotente formado pelas matrizes triangulares superiores com entradas diagonais todas iguais a 1. O centralizador de A em $\text{SO}(n)$ é o subconjunto das matrizes ortogonais com entradas diagonais iguais a 1 ou -1 e as demais entradas todas nulas. Como esse grupo é finito, sua álgebra de Lie é trivial. Desta forma, uma subálgebra parabólica minimal é dada por $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ enquanto que o subgrupo parabólico correspondente é o conjunto das matrizes triangulares superiores $P = MAN^+$. A variedade flag maximal $\mathbb{F} = G/P$ de $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$ é realizada como o conjunto \mathbb{F}^n de flags de subespaços de \mathbb{R}^n da forma

$$x = (V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1}),$$

onde $\dim V_i = i$. De fato, $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$ age transitivamente em \mathbb{F}^n da seguinte maneira: dados $g \in \text{Sl}(n, \mathbb{R})$ e $x = (\langle v_1 \rangle \subset \langle v_1, v_2 \rangle \subset \dots \subset \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle) \in \mathbb{F}^n$, onde $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ denota o subespaço de \mathbb{R}^n gerado pelos vetores v_1, v_2, \dots, v_k , definimos $g \cdot x = (\langle gv_1 \rangle \subset \langle gv_1, gv_2 \rangle \subset \dots \subset \langle gv_1, gv_2, \dots, gv_{n-1} \rangle)$. Desta forma, se $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^n então o subgrupo de isotropia na flag $(\langle e_1 \rangle \subset \dots \subset \langle e_1, e_2, \dots, e_{n-1} \rangle)$ é justamente P . Portanto, $\text{Sl}(n, \mathbb{R})/P \approx \mathbb{F}^n$.

Dado um subconjunto $\Theta \subset \Sigma$, denotemos por $\langle \Theta \rangle$ o conjunto de raízes positivas gerada por Θ , isto é, o conjunto de raízes positivas que são combinações lineares de

(r_1, \dots, r_s) , com $r_s < n$, denotaremos por $\mathbb{F}^n(r)$ o conjunto de flags de subespaços de \mathbb{R}^n da forma

$$(V_{r_1} \subset \dots \subset V_{r_s}),$$

onde $\dim V_{r_i} = r_i$. $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ age em $\mathbb{F}^n(r)$ da maneira definida no exemplo 1.1. Com o subgrupo parabólico P_Θ descrito acima se vê que $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})/P_\Theta$ se realiza como a variedade flag $\mathbb{F}^n(1, \dots, i_1 - 1, j_1 + 1, \dots, i_k - 1, j_k + 1, \dots, n - 1)$. Dito em outras palavras, \mathbb{F}_Θ é a variedade obtida a partir de \mathbb{F}^n omitindo-se os subespaços de dimensão $i, i + 1, \dots, j$ sempre que $\Sigma(i, j) \subset \Theta$. A fibração canônica $\pi : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n(r_1, \dots, r_s)$ é também obtida desta forma: $\pi(V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1})$ é a flag obtida omitindo-se os subespaços cujas dimensões não aparecem na seqüência (r_1, \dots, r_s) .

Seja

$$\mathfrak{a}_\Theta = \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) = 0 \ \forall \alpha \in \Theta\}$$

o anulador de Θ em \mathfrak{a} e denotemos por L_Θ e $M_\Theta(K)$ os centralizadores de \mathfrak{a}_Θ em G e em K , respectivamente. A álgebra de Lie \mathfrak{l}_Θ de L_Θ é reductivel e se decompõe como $\mathfrak{l}_\Theta = \mathfrak{m}_\Theta \oplus \mathfrak{a}_\Theta$, com \mathfrak{m}_Θ semi-simples. Se M_Θ^0 é o subgrupo conexo cuja álgebra de Lie é \mathfrak{m}_Θ e $M_\Theta = M_\Theta(K)M_\Theta^0$, segue que a componente conexa da identidade de M_Θ é M_Θ^0 e o teorema de Bruhat-Moore ([7], teorema 1.2.4.8) fornece as seguintes decomposições de P_Θ .

1. $P_\Theta = M_\Theta A_\Theta N_\Theta$, onde $A_\Theta = \exp \mathfrak{a}_\Theta$ e $N_\Theta = \exp \mathfrak{n}_\Theta$;
2. $P_\Theta = M_\Theta(K)AN^+$.

Sejam

$$\mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

a subálgebra nilpotente oposta a \mathfrak{n}^+ e $N^- = \exp \mathfrak{n}^-$. A decomposição de \mathbb{F}_Θ em N^- -órbitas é a *decomposição de Bruhat* de \mathbb{F}_Θ . Essas órbitas são dadas por $N^- \tilde{w} \xi_0$, onde $\xi_0 = P_\Theta$ denota a origem em \mathbb{F}_Θ e \tilde{w} é um representante de $w \in W$ em M^* . Assim, o número de N^- -órbitas em \mathbb{F}_Θ é dado por $|W/W_\Theta|$, onde W_Θ denota o subgrupo de W gerado pelas reflexões com respeito às raízes simples em Θ . Existe exatamente uma N^- -órbita aberta (e, conseqüentemente, densa) dada por $N^- \xi_0$. Por uma *célula aberta* em \mathbb{F}_Θ entenderemos qualquer subconjunto da forma $g(N^- \xi_0)$, $g \in G$.

Seja w_0 a *involução principal* de W . Este elemento é caracterizado por uma das duas propriedades equivalentes: w_0 é o elemento de comprimento máximo como produto de reflexões com relação às raízes simples em Σ , ou ainda, o único elemento de W tal que $w_0(\Sigma) = -\Sigma$ ([1], proposição 9.18). Se denotarmos $\iota = -w_0$, então $\iota(\Sigma) = \Sigma$ e assim ι é um automorfismo involutivo do diagrama de Dynkin associado a Σ . Escreveremos $\Theta^* = \iota(\Theta)$, para $\Theta \subset \Sigma$. A variedade flag \mathbb{F}_{Θ^*} é dita ser *dual* a \mathbb{F}_{Θ} . Observamos que a variedade flag maximal é dual a si própria.

Exemplo 1.3 *A variedade flag dual à flag $\mathbb{F}^n(r_1, \dots, r_s)$ é a variedade $\mathbb{F}^n(n - r_s, \dots, n - r_1)$. De fato, o grupo de Weyl de $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$ é o grupo de permutação em n elementos e a involução principal é a permutação que reverte a ordem de todos os índices:*

$$w_0 = (1, n)(2, n - 1) \cdots (j, n - j + 1) \cdots.$$

Assim, o automorfismo ι permuta as raízes equidistantes do centro do diagrama de Dynkin associado a Σ , ou seja, $\iota(\alpha_{i, i+1}) = \alpha_{n-i, n-i+1}$. Logo, se $\Theta = \Sigma(i_1, j_1) \cup \cdots \cup \Sigma(i_k, j_k)$ então

$$\Theta^* = \iota(\Theta) = \Sigma(n - j_k, n - i_k) \cup \cdots \cup \Sigma(n - j_1, n - i_1).$$

Com a descrição da variedade flag associada a Θ feita no exemplo anterior, segue a afirmação. Em particular, a variedade dual ao espaço projetivo \mathbb{RP}^{n-1} é a grassmanniana de subespaços de dimensão $n - 1$ de \mathbb{R}^n .

Dada uma subálgebra parabólica $\mathfrak{b} \in \mathbb{F}_{\Theta}$ denotaremos seu nil-radical por $\mathfrak{nil}(\mathfrak{b})$.

Definição 1.4 *Diremos que duas subálgebras parabólicas $\mathfrak{b}_1 \in \mathbb{F}_{\Theta}$ e $\mathfrak{b}_2 \in \mathbb{F}_{\Theta^*}$ são transversais se $\mathfrak{nil}(\mathfrak{b}_1) \cap \mathfrak{nil}(\mathfrak{b}_2) = \{0\}$ e usaremos a notação $\mathfrak{b}_1 \top \mathfrak{b}_2$ para indicar isso.*

Dadas as subálgebras \mathfrak{b}_1 e \mathfrak{b}_2 , a intersecção $\mathfrak{nil}(\mathfrak{b}_1) \cap \mathfrak{b}_2$ está contida no nilradical de \mathfrak{b}_2 . Isso implica que as seguintes condições são equivalentes:

1. \mathfrak{b}_1 e \mathfrak{b}_2 são transversais;
2. $\mathfrak{nil}(\mathfrak{b}_1) \cap \mathfrak{b}_2 = \{0\}$;
3. $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{nil}(\mathfrak{b}_2) = \{0\}$.

Em [5], lema 2.1, foi mostrado que o conjunto das subálgebras parabólicas transversais a uma dada subálgebra parabólica $x \in \mathbb{F}_\Theta$ é uma célula aberta em \mathbb{F}_{Θ^*} . Denotaremos tal célula por σ_x . O próximo resultado, provado em [6], lema 1.3, descreve o comportamento destas células sob projeções.

Lema 1.5 *Sejam $\pi_\Theta : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ e $\pi_{\Theta^*} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta^*}$ as projeções canônicas. Então, para todo $x \in \mathbb{F}$ vale a igualdade $\sigma_{\pi_{\Theta^*}(x)} = \pi_\Theta(\sigma_x)$.*

Ainda em [5], o *dual* de um subconjunto $C \subset \mathbb{F}_\Theta$ foi definido como o subconjunto $C^* \subset \mathbb{F}_{\Theta^*}$ dado por

$$C^* = \{x \in \mathbb{F}_{\Theta^*} : C \subset \sigma_x\}.$$

Naturalmente, podemos também considerar o dual de um subconjunto $D \subset \mathbb{F}_{\Theta^*}$, o qual é um subconjunto de \mathbb{F}_Θ .

Definição 1.6 *Dado um subconjunto $C \subset \mathbb{F}_\Theta$, definimos o fecho convexo de C como*

$$\text{co}_{\mathcal{B}}(C) = C^{**}.$$

Diremos que C é \mathcal{B} -convexo se $C = \text{co}_{\mathcal{B}}(C)$

Diremos que um subconjunto C é admissível se $C^* \neq \emptyset$, isto é, se C está contido em alguma célula aberta. Em [5], lema 3.1, foi mostrado o seguinte resultado.

Lema 1.7 *Suponha que $C \subset \mathbb{F}_\Theta$ é admissível. Então, $\text{co}_{\mathcal{B}}(C)$ é dado pela intersecção das células abertas σ tais que $C \subset \sigma$.*

Diremos que $X \in \mathfrak{g}$ é um elemento hiperbólico regular (ou simplesmente hiperbólico) se $X = \text{Ad}(g)H$ para algum $g \in G$ e $H \in \mathfrak{a}^+$. Analogamente, $x \in G$ é dito hiperbólico se $x = ghg^{-1}$, com $g \in G$ e $h \in A^+ = \exp \mathfrak{a}^+$.

Usaremos frequentemente o seguinte lema, que é consequência direta das definições:

Lema 1.8 *Se $h \in A^+$ e $n \in N^-$ então $h^k n h^{-k} \rightarrow 1$ quando $k \rightarrow +\infty$. Se tomarmos $n_1 \in N^+$ então $h^{-k} n_1 h^k \rightarrow 1$ quando $k \rightarrow +\infty$.*

Demonstração: Sejam $X \in \mathfrak{n}^-$ e $H \in \mathfrak{a}^+$ tais que $n = \exp X$ e $h = \exp H$. Para todo $k > 0$, temos que:

$$\begin{aligned} h^k n h^{-k} &= (\exp(kH))(\exp X)(\exp(kH))^{-1} \\ &= \exp(\text{Ad}(\exp(kH))X) \\ &= \exp(\exp(k\text{ad}(H))X) \end{aligned}$$

Como $X = X_{\alpha_1} + \dots + X_{\alpha_n}$, onde $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ com α_i uma raiz negativa, $i = 1, 2, \dots, n$, temos que

$$\exp(k\text{ad}(H))X = \exp(k\text{ad}(H))(X_{\alpha_1} + \dots + X_{\alpha_n}) = e^{k\alpha_1(H)}X_{\alpha_1} + \dots + e^{k\alpha_n(H)}X_{\alpha_n},$$

com $\alpha_i(H) < 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Logo, $\exp(k\text{ad}(H))X \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$ e, consequentemente,

$$h^k n h^{-k} = \exp(\exp(k\text{ad}(H))X) \rightarrow 1 \text{ quando } k \rightarrow +\infty,$$

como queríamos. O valor do outro limite é obtido de maneira análoga. \square

Para $h \in A^+$ temos, pelo lema anterior, que $h^k y \rightarrow \xi_0$ quando $k \rightarrow +\infty$ para todo $y \in N^- \xi_0$, onde $\xi_0 = P_\Theta$. Diremos neste caso que ξ_0 é o *atrator* para h , tendo como *variedade estável* a célula aberta $N^- \xi_0$. Analogamente, se $x = gh_0 g^{-1}$ é um elemento hiperbólico, então o atrator correspondente é $g\xi_0$, com variedade estável $(gN^- g^{-1})g\xi_0 = gN^- \xi_0$.

Vendo h como um difeomorfismo de \mathbb{F} , temos que seus pontos fixos são dados por $\tilde{w}x_0$, $w \in W$, onde $x_0 = P$ denota a origem em \mathbb{F} . Usaremos essa bijeção entre os elementos do grupo de Weyl e os h -pontos fixos para classificá-los: diremos que $\tilde{w}x_0$ é o *h-ponto fixo do tipo w*. Com essa notação temos a seguinte relação entre h -pontos fixos em \mathbb{F} e as células de Bruhat: $h^k y$ converge para o h -ponto fixo do tipo w para todo $y \in N^- \tilde{w}x_0$. Em particular, o h -ponto fixo do tipo 1 é o atrator para h , tendo como variedade estável um subconjunto aberto e denso de \mathbb{F} . No outro extremo, o ponto fixo do tipo w_0 tem como variedade estável o conjunto unitário formado por ele próprio. Por essa razão, diremos que $\tilde{w}_0 x_0$ é um *repulsor* para h .

A descrição dos pontos fixos e correspondentes variedades estáveis para um elemento hiperbólico $x \in G$ não necessariamente em A^+ é feita de forma análoga. Se

$x = gh_0g^{-1}$, com $g \in G$ e $h_0 \in A^+$, então o ponto fixo do tipo w para x é dado por $g\tilde{w}x_0$.

Notação: Denotaremos por $\text{fix}(h, w)$ o ponto fixo do tipo w para $h \in G$ um elemento hiperbólico.

1.2 Conjuntos de controle em variedades flag

Nesta seção apresentamos alguns resultados da teoria dos conjuntos de controle em variedades flag. Assumiremos sempre que $S \subset G$ é um semigrupo com interior não vazio em G . Estes resultados podem ser encontrados em [3], [4], [5] e [6].

Usaremos a notação $\text{fe}A$ e $\text{int}A$ para denotar, respectivamente, o fecho e o interior de um subconjunto $A \subset M$.

Definição 1.9 *Por um conjunto de controle para a ação de S em uma variedade M entenderemos um subconjunto $D \subset M$ satisfazendo:*

1. $\text{int}D \neq \emptyset$
2. $D \subset \text{fe}(Sx)$ para todo $x \in D$.
3. D é maximal satisfazendo (1) e (2).

Se, além disso, $\text{fe}D = \text{fe}(Sx)$ para todo $x \in D$ então D é chamado *conjunto de controle invariante*. Seja $D_0 = \{x \in D : \exists g \in \text{int}S \text{ com } gx = x\}$. O subconjunto $D_0 \subset D$ é chamado o *conjunto de transitividade* de D . Se $D_0 \neq \emptyset$, então D_0 é denso em D e diremos neste caso que D é um conjunto de controle efetivo. Estes serão os únicos conjuntos de controle estudados aqui. Além disso, $\text{int}S$ é transitivo em D_0 (ver [4], proposição 2.2).

Utilizando argumentos de maximalidade pode-se mostrar que qualquer subconjunto de M satisfazendo (1) e (2) da definição anterior está contido em um conjunto de controle. Usando esse fato podemos mostrar a seguinte proposição:

Proposição 1.10 *Seja $x \in M$ tal que existe $g \in \text{int}S$ com $gx = x$. Então existe um conjunto de controle D sobre M com $x \in D_0$.*

Demonstração: Seja $E := (\text{int}S)x \cap (\text{int}S)^{-1}x$. Como $gx = x$ para algum $g \in \text{int}S$, temos que E é não vazio. Já que E é aberto, então E satisfaz (1) da definição 1.9. Além disso, dado $y \in E$ temos que existe $g_1 \in \text{int}S$ tal que $y = g_1^{-1}x$. Logo, $E = (\text{int}S)x \cap (\text{int}S)^{-1}x \subset (\text{int}S)g_1y \subset \text{fe}(Sy)$ e assim E satisfaz também a condição (2). Portanto, existe um conjunto de controle D contendo E e $x \in D_0$ pela definição de D_0 . \square

Freqüentemente usaremos a proposição anterior com g um elemento hiperbólico. Será conveniente utilizar a seguinte notação:

Notação: Denotaremos por $R(S)$ o conjunto dos elementos hiperbólicos $h \in G$ tais que $h \in \text{int}S$.

Foi mostrado em [2], teorema 3.4 e [4], teorema 3.5, que os conjuntos de controle para a ação de S em \mathbb{F} são descritos essencialmente como conjuntos de pontos fixos para a ação de elementos hiperbólicos no interior de S . Destacamos esse resultado no seguinte teorema:

Teorema 1.11 *Seja $D \subset \mathbb{F}$ um conjunto de controle efetivo para a ação de S . Então existe $w \in W$ tal que D_0 é o conjunto dos pontos fixos do tipo w para elementos hiperbólicos no interior de S . Reciprocamente, dado $w \in W$ o conjunto dos h -pontos fixos do tipo w para $h \in R(S)$ formam o conjunto de transitividade de um conjunto de controle sobre \mathbb{F} .*

Com esse resultado podemos usar W para rotular os conjuntos de controle sobre \mathbb{F} :

Notação: denotaremos por $D(w)$ o conjunto de controle contendo os pontos fixos do tipo w para h hiperbólico no interior de S .

Em [2] também foi mostrado que existe um único conjunto de controle invariante, dado por $D(1)$. Este conjunto também será denotado por C . Ele é caracterizado pelo fato de que seu conjunto de transitividade é constituído pelos atratores

para elementos em $R(S)$. Temos ainda que $D(w_0)$ é constituído pelos repulsores para $h \in R(S)$.

Em qualquer variedade flag \mathbb{F}_Θ também existe um único conjunto de controle invariante, o qual denotaremos por C_Θ . Ele é dado por $C_\Theta = \pi(D(1))$, onde $\pi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ é a projeção canônica. Os demais conjuntos de controle em \mathbb{F}_Θ são caracterizados pela seguinte proposição (ver [4], proposição 5.1):

Proposição 1.12 *Seja $E \subset \mathbb{F}_\Theta$ um conjunto de controle para S . Então existe $w' \in W$ tal que $\pi(D(w)_0) = E_0$ para todo $w \in w'W_\Theta$.*

Seja

$$W(S) = \{w \in W : D(w) = C\}.$$

Observamos que $W(S)$ depende da escolha de uma câmara de Weyl A^+ para sua definição. Quando for necessário destacar essa dependência usaremos a notação $W(S, A^+)$ ao invés de $W(S)$. Uma mudança na escolha da câmara básica implica em uma conjugação em $W(S)$ da seguinte maneira: se $A_1 = gA^+g^{-1}$, então $W(S, A_1) = gW(S, A^+)g^{-1}$ (ver [4], pág. 73).

Em [4] foi mostrado que $W(S)$ é um subgrupo de W . Além disso, $W(S)$ permite parametrizar os diferentes conjuntos de controle $D(w)$ sobre \mathbb{F} ([4], teorema 4.5):

Teorema 1.13 *$D(w_1) = D(w_2)$ se, e somente se, $W(S)w_1 = W(S)w_2$.*

Outra propriedade de $W(S)$ é que este subgrupo é parabólico, ou seja, é gerado pelas reflexões com respeito a raízes simples pertencentes a um certo subconjunto $\Theta \subset \Sigma$. Usamos essa propriedade para definir o tipo parabólico de S :

Definição 1.14 *Diremos que o subconjunto $\Theta(S)$ tal que $W(S) = W_{\Theta(S)}$ é o tipo parabólico de S . Alternativamente, denotaremos o tipo parabólico de S pela variedade flag correspondente $\mathbb{F}(S) := \mathbb{F}_{\Theta(S)}$.*

O conjunto de controle invariante na variedade $\mathbb{F}(S)$ tem as seguintes propriedades ([4], teorema 4.3 e proposição 4.8):

Teorema 1.15 *Seja $\pi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}(S)$ a projeção canônica e denote por $C(S)$ o conjunto de controle invariante em $\mathbb{F}(S)$. Então $\pi^{-1}(C(S)) = D(1)$. Além disso, se $h \in \text{int}S$ é um elemento hiperbólico, então $C(S)$ está contido na variedade estável para h .*

Os conjuntos de controle sobre uma variedade qualquer podem ser ordenados pela relação $D_1 \leq D_2$ se, e somente se, existe $x \in D_1$ tal que $\text{fe}(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset$. Na variedade flag maximal \mathbb{F} , temos que $D(1)$ é maximal enquanto que $D(w_0)$ é minimal. É possível descrever a ordem de todos os conjuntos de controle sobre \mathbb{F} a partir da ordem de Bruhat-Chevalley sobre W , a qual é definida da seguinte forma:

Definição 1.16 *Para cada $w \in W$, seja $w = s_1 \cdots s_n$ uma expressão reduzida de w como produto de reflexões com relação às raízes simples. A ordem de Bruhat-Chevalley sobre W é definida da seguinte forma: $w_1 \leq w$ se e só se existem inteiros $1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n$ tais que $w_1 = s_{i_1} \cdots s_{i_j}$ é uma expressão reduzida para w_1 .*

Em [3], teorema 4.1, foi mostrado que a ordem entre os conjuntos de controle $D(w)$ é a reversa da ordem de Bruhat-Chevalley:

Teorema 1.17 *Para $w_1, w_2 \in W$, são equivalentes:*

1. $D(w_1) \leq D(w_2)$.
2. Existe $w \in W$ tal que $w_1 \geq w$ e $w \in W(S)w_2$, isto é, $D(w) = D(w_2)$.

Uma consequência deste teorema é o seguinte corolário, também mostrado em [3]:

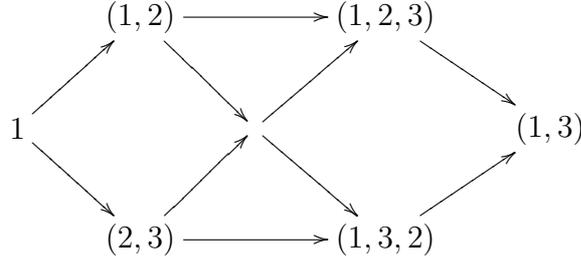
Corolário 1.18 *Seja w_0 a involução principal de W e tome $w_1, w_2 \in W$. Então, $w_1 \leq w_2$ se, e somente se, $w_0 w_1 \geq w_0 w_2$.*

Exemplo 1.19 *Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$, então W é o grupo de permutações em 3 elementos:*

$$W = \{1, (1, 2), (2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 3)\}.$$

Com os dados do exemplo 1.1 temos que $(1, 2, 3) = (1, 2)(2, 3)$, $(1, 3, 2) = (2, 3)(1, 2)$ e $(1, 3) = (1, 2)(2, 3)(1, 2) = (2, 3)(1, 2)(2, 3)$ são expressões reduzidas de $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$ e $(1, 3) = w_0$ como produto de reflexões em relação às raízes simples. Assim, o seguinte diagrama descreve a ordem de Bruhat-Chevalley entre os elementos de

W :



Aqui as setas $w_1 \rightarrow w_2$ indicam que $w_1 \leq w_2$. Se tomarmos um semigrupo com $W(S) = \{1\}$ então, pelo teorema 1.13, existem 6 conjuntos de controle distintos na variedade flag maximal \mathbb{F}^3 e, pelo teorema anterior, a ordem entre eles é obtida invertendo a ordem no diagrama anterior. Um semigrupo com essa propriedade pode ser construído da seguinte maneira: Tome uma decomposição de Iwasawa de $Sl(3, \mathbb{R})$ e considere um conjunto $C \neq \emptyset$ satisfazendo $C = \text{fe}(\text{int}C)$ e $C \subset N^-x_0$. Se S é o semigrupo de compressão de C , isto é,

$$S = S_C = \{g \in G : gC \subset C\},$$

então $W(S) = 1$ (ver proposição 1.25 a seguir). Como outro exemplo, considere um semigrupo $S \subset Sl(3, \mathbb{R})$ com $\Theta(S) = \{\alpha_{2,3}\}$ (um semigrupo com essa propriedade é o semigrupo das matrizes em $Sl(3, \mathbb{R})$ com todas as entradas não negativas (ver exemplo 4.5 em [2])). Então, $W(S) = \{1, (2, 3)\}$. Desta forma existem 3 conjuntos de controle distintos em \mathbb{F} . Eles são dados por $D(1) = D(2, 3)$, $D(1, 2) = D(1, 3, 2)$ e $D(1, 3) = D(1, 2, 3)$. Pelo teorema 1.17 obtemos, usando o diagrama anterior, $D(1, 3) \leq D(1, 2) \leq D(1)$.

Outro conceito que surge no estudo de conjuntos de controle é o de domínio de atração:

Definição 1.20 O domínio de atração $\mathcal{A}(D)$ de um conjunto de controle D para a ação de um semigrupo S em uma variedade M é o subconjunto de M dado por

$$\mathcal{A}(D) = \{x \in M : \text{existe } g \in S \text{ com } gx \in D\}.$$

Relacionando o domínio de atração e a ordem dos conjuntos de controle temos o seguinte resultado, provado em [3], proposição 2.1:

Proposição 1.21 *O domínio de atração $\mathcal{A}(D)$ do conjunto de controle D é aberto e se $x \in \mathcal{A}(D)$ então existe $g \in \text{int}S$ tal que $gx \in D_0$. Além disso, para os conjuntos de controle D_1 e D_2 as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $D_1 \leq D_2$.
2. Existem $x \in (D_1)_0$ e $g \in \text{int}S$ tais que $gx \in (D_2)_0$.
3. Para quaisquer $y \in (D_1)_0$ e $z \in (D_2)_0$ existe $g \in \text{int}S$ tal que $gy = z$.
4. $D_1 \subset \mathcal{A}(D_2)$.

Consideremos agora o semigrupo $S^{-1} = \{g^{-1} \in G : g \in S\}$. Denotaremos por D^- os conjuntos de controle para S^{-1} . Em particular, a notação $D^-(w)$ indica o conjunto de controle sobre \mathbb{F} contendo os pontos fixos do tipo w para elementos hiperbólicos no interior de S^{-1} . Temos o seguinte resultado, o qual relaciona os conjuntos de controle para S e para S^{-1} ([3], proposição 3.1).

Proposição 1.22 *Para cada $w \in W$ vale a igualdade $D^-(w)_0 = D(w_0w)_0$.*

Sobre o tipo parabólico de S^{-1} temos os seguintes resultados ([5], proposições 6.1 e 6.2).

Proposição 1.23 *Considere um elemento hiperbólico $h \in \text{int}S$ e seja A^+ a câmara de Weyl contendo h . Então*

$$W(S^{-1}, A^-) = W(S, A^+),$$

onde $A^- = \tilde{w}_0 A^+ \tilde{w}_0 = (A^+)^{-1}$.

Proposição 1.24 *O tipo parabólico do semigrupo S^{-1} é $\Theta(S^{-1}) = \Theta^*$.*

Pelo teorema 1.15 o conjunto de controle para a ação de um semigrupo com tipo parabólico Θ na variedade flag \mathbb{F}_Θ é um subconjunto admissível que coincide com o fecho de seu interior. O próximo resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [5], proposição 4.2, fornece uma recíproca desse fato, mostrando que todo subconjunto de \mathbb{F}_Θ tendo essas propriedades é o conjunto de controle de algum semigrupo de tipo Θ .

Proposição 1.25 *Suponha que $C \subset \mathbb{F}_\Theta$ é admissível e satisfaz $C = \text{fe}(\text{int}C)$. Então o semigrupo de compressão*

$$S_C = \{g \in G : gC \subset C\}$$

tem interior não vazio. Além disso, C é o conjunto de controle invariante de S_C em \mathbb{F}_Θ , $C_0 = \text{int}C$ e o tipo parabólico de S_C é Θ .

Em [5], teorema 5.4, os semigrupos maximais $S \subset G$ com $\text{int}S \neq \emptyset$ são descritos como semigrupos de compressão de subconjuntos \mathcal{B} -convexos contidos em variedades flag. Para dar essa descrição aqui, precisamos da seguinte definição.

Definição 1.26 *Diremos que um semigrupo $S \subset G$ com $\text{int}S \neq \emptyset$ é Θ -maximal ou maximal com respeito a \mathbb{F}_Θ se seu tipo parabólico é Θ e S não está contido propriamente em nenhum semigrupo de tipo parabólico Θ .*

Teorema 1.27 *Um semigrupo S é Θ -maximal se, e somente se, existe um conjunto \mathcal{B} -convexo $C \subset \mathbb{F}_\Theta$ com $\text{int}C \neq \emptyset$ tal que $S = S_K$, o semigrupo de compressão de $K = \text{fe}(\text{int}C)$. Neste caso, K é o conjunto de controle invariante de S em \mathbb{F}_Θ e $\text{co}_\mathcal{B}(K) \subset C$.*

O próximo resultado relaciona o conjunto de controle invariante para a ação de S^{-1} em $\mathbb{F}_{\Theta(S)}^*$ e o dual C^* do conjunto de controle invariante S sobre $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$. A demonstração pode ser encontrada em [6], proposição 1.9.

Proposição 1.28 *Seja S um semigrupo de tipo $\Theta(S)$ e denote por C seu conjunto de controle invariante em $\mathbb{F}(S)$. Seja D o conjunto de controle invariante de S^{-1} na variedade flag $\mathbb{F}_{\Theta(S)^*}$ dual a $\mathbb{F}(S)$. Então, $D_0 \subset C^*$.*

No caso em que S é Θ -maximal, o resultado anterior pode se tornar mais preciso, conforme foi mostrado em [5], proposição 6.3.

Proposição 1.29 *Seja S um semigrupo Θ -maximal e denote por C seu conjunto de controle invariante em \mathbb{F}_Θ . Então o conjunto de controle invariante de S^{-1} em \mathbb{F}_{Θ^*} é dado por $\text{fe}(C^*)$. Além disso, S^{-1} é o semigrupo de compressão de $S_{\text{fe}(C^*)}$.*

1.3 A Topologia de Vietoris

Nesta seção apresentamos a topologia de Vietoris, a qual é uma topologia compacta introduzida no conjunto dos subconjuntos fechados de um espaço metrizável e σ -compacto. Essa topologia será útil no último capítulo deste trabalho, onde estamos interessados em obter uma compactificação de grupos de Lie semi-simples. Os resultados e definições aqui enunciados podem ser encontrados em [9] e nas referências lá fornecidas.

Seja (K, d) um espaço métrico compacto. Denotaremos por $\mathcal{C}(K)$ o conjunto dos subconjuntos compactos de K e por $\mathcal{C}_0(K)$ o conjunto dos subconjuntos compactos não vazios de K .

Para $A \in \mathcal{C}_0(K)$ e $b \in K$ definimos

$$d(A, b) = d(b, A) := \min\{d(a, b) : a \in A\}$$

e para $A, B \in \mathcal{C}_0(K)$ definimos a distância de Hausdorff:

$$d(A, B) := \max\{\max\{d(a, B) : a \in A\}, \max\{d(b, A) : b \in B\}\}.$$

Essa métrica define uma topologia compacta sobre $\mathcal{C}_0(K)$, chamada *topologia de Vietoris*. Definimos ainda

$$d(A, \emptyset) = d(\emptyset, A) := \infty.$$

Para dois subconjuntos abertos $U, V \subset K$ pomos

$$K(U, V) := \{F \in \mathcal{C}(K) : F \subset U, F \cap V \neq \emptyset\}.$$

Os conjuntos $K(U, V)$ formam uma subbase para o topologia de Vietoris.

Seja X um espaço localmente compacto, o qual é metrizável e σ -compacto. Escrevemos $\mathcal{F}(X)$ para o conjunto de subconjuntos fechados de X e $\mathcal{C}(X)$ para o conjunto dos subconjuntos compactos. Para obter uma topologia compacta sobre $\mathcal{F}(X)$ consideramos a compactificação a um ponto $X^\omega := X \cup \{\omega\}$ e identificamos X com o correspondente subconjunto de X^ω . Observe que nossa hipótese sobre X implica que X^ω é metrizável. Definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \beta : \mathcal{F}(X) &\rightarrow \mathcal{C}_0(X^\omega) \\ F &\mapsto F \cup \{\omega\} \end{aligned}$$

Então β é injetiva e identificamos $\mathcal{F}(X)$, via β , com o subconjunto fechado $\text{Im}\beta = \{K \in \mathcal{C}_0(X^\omega) : \omega \in K\}$. Como um subespaço fechado de $\mathcal{C}_0(X^\omega)$, o espaço $\mathcal{F}(X)$ é um espaço topológico compacto e metrizável. Para uma seqüência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{F}(X)$ definimos

$$\liminf A_n := \{x \in X : \forall m \in \mathbb{N} \exists n_m \text{ tal que } \forall n \geq n_m \text{ tem-se que } d(x, A_n) < \frac{1}{m}\}$$

e

$$\limsup A_n := \{x \in X : \forall m \in \mathbb{N}, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 \text{ tal que } d(x, A_n) < \frac{1}{m}\}.$$

Esses conjuntos são sempre fechados.

Lema 1.30 *As seguintes afirmações ocorrem:*

1. *Se $U \subset X$ é aberto, então $\{F \in \mathcal{F}(X) : F \cap U \neq \emptyset\}$ é aberto; se $A \subset X$ é fechado então $\{F \in \mathcal{F}(X) : F \subset A\}$ é fechado.*
2. *Seja (A_n) uma seqüência em $\mathcal{F}(X)$. Então A_n converge para $A \in \mathcal{F}(X)$ se e só se*

$$A = \limsup A_n = \liminf A_n.$$

Neste caso, A consiste do conjunto dos pontos limites de seqüências (a_n) com $a_n \in A_n$.

3. *Se $A \subset X$ é fechado então $\{F \in \mathcal{F}(X) : A \subset F\}$ é fechado.*
4. *Se (A_n) é uma seqüência de conjuntos conexos, $A_n \rightarrow A \neq \emptyset$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $\bigcap_{m \geq n} A_m$ não é relativamente compacto, então toda componente conexa de A não é compacta.*

5. *A relação “ \subset ” é um conjunto fechado de $\mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X)$.*

Lembramos que um espaço de Hausdorff Y munido com uma ordem parcial fechada “ \leq ” é chamado um *pós-espaço*. Assim, $(\mathcal{F}(X), \subset)$ é um pós-espaço compacto.

Proposição 1.31 *Seja $\mu : G \times X \rightarrow X$ uma ação contínua de um grupo localmente compacto G . Então,*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mu) : G \times \mathcal{F}(X) &\rightarrow \mathcal{F}(X) \\ (g, F) &\mapsto gF \end{aligned}$$

define uma ação contínua de G sobre $\mathcal{F}(X)$.

Proposição 1.32 *Suponha que o grupo localmente compacto G age continuamente sobre X e seja $\mathcal{O} \subset X$ um subconjunto aberto. Então:*

1. *O conjunto*

$$S = S_{\mathcal{O}} := \{g \in G : g\mathcal{O} \subset \mathcal{O}\}$$

é um subsemigrupo fechado de G .

2. *Se X é um espaço homogêneo de G então o interior de S é dado por*

$$\text{int}S = \{g \in G : g \cdot \text{fe}\mathcal{O} \subset \mathcal{O}\}.$$

Proposição 1.33 *Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado. Ponha*

$$\mathcal{F}(G)^H := \{F \in \mathcal{F}(G) : Fh = F \text{ para todo } h \in H\}.$$

Então a aplicação

$$\pi^* : \mathcal{F}(G/H) \rightarrow \mathcal{F}(G)^H, F \mapsto \pi^{-1}(F)$$

é um homeomorfismo.

Capítulo 2

Órbitas adjuntas

Neste capítulo vamos destacar algumas propriedades e realizações geométricas das órbitas adjuntas $\text{Ad}(G)H$, com $H \in \mathfrak{g}$ um elemento hiperbólico regular. O principal resultado deste capítulo é a proposição 2.8, a qual caracteriza a órbita adjunta através de H com o conjunto dos pares de subálgebras parabólicas minimais de \mathfrak{g} ou, equivalentemente, com a órbita aberta e densa da ação diagonal de G em $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$. Assim, podemos ver a órbita como contida no produto cartesiano $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ e utilizar a descrição dos conjuntos de controle em \mathbb{F} feita em [4] para estudar os conjuntos de controle em $\text{Ad}(G)H$.

2.1 Flag produto e ação diagonal

Nesta seção vamos descrever as órbitas da ação diagonal de G no produto $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ de variedades flag maximais de G . Mostraremos que existe uma única órbita aberta e densa, a qual será chamada de *órbita principal* e desempenhará um papel fundamental neste trabalho.

Consideremos a *ação diagonal* de G em $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$, a qual é dada por

$$\begin{aligned} G \times (\mathbb{F} \times \mathbb{F}) &\rightarrow \mathbb{F} \times \mathbb{F} \\ (g, (x, y)) &\mapsto (gx, gy) \end{aligned}$$

Vamos inicialmente determinar as G -órbitas desta ação. Denotemos por $x_0 = P$ a origem em \mathbb{F} . Como G age transitivamente em \mathbb{F} , segue que para todo $(x, y) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F}$

existe $g \in G$ tal que $g \cdot (x, y) = (gx, gy) = (z, x_0)$ para algum $z \in \mathbb{F}$. Logo, toda órbita é da forma $G \cdot (z, x_0)$.

Agora, $G \cdot (y, x_0) = G \cdot (z, x_0)$ se, e somente se, existe $g \in G$ tal que $g \cdot (y, x_0) = (z, x_0)$, o que implica em $gx_0 = x_0$ e, conseqüentemente, $g \in P$. Portanto, as G -órbitas através de (y, x_0) e (z, x_0) coincidem se, e somente se, y e z pertencem a mesma P -órbita em \mathbb{F} . Desta forma, mantendo x_0 fixo na segunda coordenada se vê que as órbitas da ação diagonal de G são dadas pelas órbitas da ação de P em \mathbb{F} , as quais coincidem com as órbitas de N^+ em \mathbb{F} .

De fato, é claro que se $x \in \mathbb{F}$ então $N^+x \subset Px$. Por outro lado, se $g \in P = MAN^+$ e $x \in \mathbb{F} = \bigcup_{w \in W} N^+\tilde{w}x_0$, escreva $g = man_1$ e $x = n_2\tilde{w}x_0$. Então, usando o fato de que P é o normalizador de N^+ em G , M^* é o normalizador de A em K e que M é normal em M^* , temos que

$$gx = man_1n_2\tilde{w}x_0 = n'ma\tilde{w}x_0 = n'\tilde{w}x_0 = (n'n_2^{-1})n_2\tilde{w}x_0 = n''x,$$

onde $n'' = n'n_2^{-1}$. Portanto, $gx \in N^+x$, o que mostra que as P -órbitas em \mathbb{F} coincidem com as N^+ -órbitas.

Como as N^+ -órbitas em \mathbb{F} são as células de Bruhat $N^+\tilde{w}x_0$, segue que todo ponto $x \in \mathbb{F}$ pertence a P -órbita através de um elemento da forma $\tilde{w}x_0$, com $w \in W$. Conforme mostramos acima, as G -órbitas em $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ são determinadas pelas P -órbitas em \mathbb{F} . Portanto, todo ponto $(x, y) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ está numa órbita da forma $G \cdot (\tilde{w}x_0, x_0)$, com $w \in W$. Além disso, se $w_1 \neq w_2$, então as células de Bruhat correspondentes são disjuntas, logo $G \cdot (\tilde{w}_1x_0, x_0) \neq G \cdot (\tilde{w}_2x_0, x_0)$. Temos assim o seguinte resultado:

Proposição 2.1 *As órbitas da ação diagonal de G em $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ são da forma $G \cdot (\tilde{w}x_0, x_0)$, $w \in W$.*

A descrição da órbita $G \cdot (\tilde{w}x_0, x_0)$, como espaço homogêneo, é dada por G/M_w , onde

$$M_w = \{g \in G : g\tilde{w}x_0 = \tilde{w}x_0 \text{ e } gx_0 = x_0\}$$

é a intersecção dos subgrupos de isotropia em x_0 e em $\tilde{w}x_0$, ou seja,

$$M_w = P \cap P_w,$$

onde $P_w = \tilde{w}P\tilde{w}^{-1}$. Observamos que $P_w = MAN_w$, com $N_w = \tilde{w}N^+\tilde{w}^{-1}$. Em particular, se w_0 é a involução principal de W temos que $N_{w_0} = N^-$. Logo, $M_{w_0} = MAN^+ \cap MAN^- = MA$. Portanto, $G \cdot (\tilde{w}_0x_0, x_0)$ se identifica a G/MA . Destacaremos essa fato na seguinte proposição.

Proposição 2.2 *Seja w_0 a involução principal e $y_0 = \tilde{w}_0x_0$. Então a órbita por (y_0, x_0) é dada por*

$$G \cdot (y_0, x_0) \approx G/MA.$$

A órbita $G \cdot (y_0, x_0)$ será chamada de *órbita principal* em $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$. Ela terá um papel fundamental no desenvolvimento deste trabalho, por isso vamos estudá-la com mais detalhes. Uma propriedade importante da órbita $G \cdot (y_0, x_0)$ é que ela é densa em $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$, conforme mostra a próxima proposição.

Proposição 2.3 *A órbita $G \cdot (y_0, x_0)$ é aberta e densa em $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ (portanto, é a única órbita aberta da ação diagonal).*

Demonstração: A órbita é aberta pois seu espaço tangente em (y_0, x_0) coincide com o espaço tangente de $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$. De fato, $\mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-$ complementa a álgebra de isotropia em (y_0, x_0) e portanto, se identifica ao espaço tangente à órbita. A dimensão de $\mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-$ coincide com a dimensão de $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ (aliás, \mathfrak{n}^+ se identifica com $T_{y_0}\mathbb{F} \times \{0\}$ enquanto que \mathfrak{n}^- se identifica com $\{0\} \times T_{x_0}\mathbb{F}$).

Para ver que a órbita é densa, note que as dimensões de todas as outras órbitas são menores que a dimensão de $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$. De fato, a subálgebra de isotropia em $(\tilde{w}x_0, x_0)$ é dada por $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus (\text{Ad}(\tilde{w})\mathfrak{n}^+ \cap \mathfrak{n}^+)$. Agora, $\text{Ad}(\tilde{w})$ permuta os espaços de raízes e w_0 é o único elemento do grupo de Weyl que leva todas as raízes positivas em raízes negativas. Assim, se $w \neq w_0$ então $\text{Ad}(\tilde{w})\mathfrak{n}^+ \cap \mathfrak{n}^+ \neq \emptyset$. Logo, se $w \neq w_0$ então o complemento da subálgebra de isotropia em $(\tilde{w}x_0, x_0)$ tem dimensão menor que a dimensão de $\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{n}^+$, que é a dimensão de $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$. Portanto, nenhuma das outras órbitas é aberta. Como existe apenas um número finito de órbitas, segue que a única órbita aberta tem que ser densa. \square

Como \mathbb{F} identifica-se com o conjunto das subálgebras parabólicas minimais de \mathfrak{g} , o produto $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ é o conjunto dos pares de subálgebras parabólicas minimais.

Com essa identificação, o par (y_0, x_0) se identifica a $(\mathfrak{p}^-, \mathfrak{p}^+)$, onde $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^-$ e $\mathfrak{p}^+ = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$. A ação de G em $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ fica sendo então a ação adjunta nas subálgebras parabólicas minimais: $g \cdot (\mathfrak{p}^-, \mathfrak{p}^+) = (\text{Ad}(g)\mathfrak{p}^-, \text{Ad}(g)\mathfrak{p}^+)$.

Lembramos da seção 1.1 que duas subálgebras parabólicas $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in \mathbb{F}$ são transversais se $\text{nil}(\mathfrak{b}_1) \cap \text{nil}(\mathfrak{b}_2) = \{0\}$ e que estamos denotando essa condição de transversalidade por $\mathfrak{b}_1 \top \mathfrak{b}_2$. Em [6], Proposição 1.1, foi mostrado o seguinte resultado:

Proposição 2.4 *Duas subálgebras parabólicas minimais são transversais se, e somente se, pertencem à órbita principal $G \cdot (\mathfrak{p}^-, \mathfrak{p}^+)$.*

Portanto, a órbita principal identifica-se ao conjunto dos pares de subálgebras parabólicas minimais $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$ tais que $\mathfrak{b}_1 \top \mathfrak{b}_2$. Diremos que o par $(y, x) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ é *transversal* se as correspondentes subálgebras parabólicas são transversais, o que é equivalente a dizer que $(x, y) \in G \cdot (y_0, x_0)$.

Conforme dissemos na seção 1.1, o conjunto dos elementos transversais à uma dada subálgebra parabólica $x \in \mathbb{F}$ (isto é, o conjunto dos $y \in \mathbb{F}$ tais que $(y, x) \in G \cdot (y_0, x_0)$), é uma célula aberta. Vamos agora descrever essa célula. Começamos tomando $x = x_0$. Temos que um par da forma (y, x_0) pertence a $G \cdot (y_0, x_0)$ se, e somente, se existe $g \in G$ tal que $gy_0 = y$ e $gx_0 = x_0$. Como a segunda igualdade implica que $g \in P$, temos que os elementos em \mathbb{F} que são transversais a x_0 são os elementos da órbita $P\tilde{w}_0x_0 = N^+\tilde{w}_0x_0$. Analogamente, o conjunto dos elementos transversais a y_0 é a órbita aberta N^-x_0 . Passando-se a um elemento gx_0 qualquer em \mathbb{F} , se vê que $y \in \mathbb{F}$ é transversal a gx_0 se, e somente se, y pertence à célula aberta $gN^+w_0x_0$. Lembramos ainda que estamos usando a notação

$$\sigma(x) = \{y \in \mathbb{F} : (y, x) \in G \cdot (y_0, x_0)\}$$

para indicar esta célula.

Proposição 2.5 *Se $h \in G$ é um elemento hiperbólico e $x, y \in \mathbb{F}$ então valem as seguintes propriedades:*

1. *Se $(\text{fix}(h, w_0), x) \in G \cdot (\tilde{w}_0x_0, x_0)$ então $h^k \cdot (\text{fix}(h, w_0), x) \rightarrow (\text{fix}(h, w_0), \text{fix}(h, 1))$ quando $k \rightarrow +\infty$.*

2. Se $(y, \text{fix}(h, 1)) \in G \cdot (\tilde{w}_0 x_0, x_0)$ então $h^{-k} \cdot (y, \text{fix}(h, 1)) \rightarrow (\text{fix}(h, w_0), \text{fix}(h, 1))$ quando $k \rightarrow +\infty$.

Demonstração:

1. Suponha inicialmente que $h \in A^+$. Desta forma, $\text{fix}(h, w_0) = \tilde{w}_0 x_0$. Agora, se $(\tilde{w}_0 x_0, x) \in G \cdot (y_0, x_0)$ então $x \in \sigma(\tilde{w}_0 x_0) = N^- x_0$. Assim, $x = n x_0$ para algum $n \in N^-$. Pelo lema 1.8, segue que

$$\begin{aligned} h^k \cdot (\text{fix}(h, w_0), x) &= h^k \cdot (\tilde{w}_0 x_0, n x_0) = h^k \cdot (n \tilde{w}_0 x_0, n x_0) \\ &= (h^k n h^{-k} \tilde{w}_0 x_0, h^k n h^{-k} x_0) \rightarrow (\tilde{w}_0 x_0, x_0) \\ &= (\text{fix}(h, w_0), \text{fix}(h, 1)) \end{aligned}$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Para um elemento hiperbólico $h = g h_0 g^{-1}$, com $g \in G$ e $h_0 \in A^+$, a demonstração é análoga, bastando uma conjugação por g em toda parte.

2. A demonstração é semelhante à do ítem anterior: supondo inicialmente que $h \in A^+$ temos que $y \in N^+ \tilde{w}_0 x_0$ e usando o fato de que $h^{-k} n h^k \rightarrow 1$, quando $k \rightarrow +\infty$ para qualquer $n \in N^+$, mostra-se o ítem para esse caso. O caso geral é obtido por uma conjugação.

□

Exemplo 2.6 *Seja $G = Sl(n, \mathbb{R})$. Considere uma base $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n e seja*

$$x_0 = (\langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \dots \langle e_1, e_2, \dots, e_{n-1} \rangle).$$

Como a involução principal w_0 é a permutação que reverte a ordem de todos os índices, temos que

$$y_0 = \tilde{w}_0 x_0 = (\langle e_n \rangle \subset \langle e_n, e_{n-1} \rangle \subset \dots \langle e_n, e_{n-1}, \dots, e_2 \rangle).$$

O conjunto das elementos transversais a y_0 é a célula aberta $N^- x_0$. Aqui N^- é o conjunto das matrizes que na base β se escrevem como triangulares inferiores com

entradas diagonais todas iguais a 1. Usaremos a seguinte notação: denotaremos um subespaço vetorial V de \mathbb{R}^n por uma matriz $A = (a_{ij})$ tal que os vetores-colunas de A geram V . Com essa notação, temos que os elementos de N^-x_0 são flags da forma

$$\left(\left(\begin{array}{c} I_1 \\ a_1 \end{array} \right) \subset \left(\begin{array}{c} I_2 \\ a_2 \end{array} \right) \subset \cdots \subset \left(\begin{array}{c} I_{n-1} \\ a_{n-1} \end{array} \right) \right),$$

onde I_j é a matriz identidade de ordem j e a_j é uma matriz $(n-j) \times j$ qualquer, $j = 1, \dots, n-1$. Assim se vê que essa célula é o conjunto das flags $(V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1})$ tais que $V_1 \cap \langle e_n, e_{n-1}, \dots, e_2 \rangle = \{0\}$, $V_2 \cap \langle e_n, e_{n-1}, \dots, e_3 \rangle = \{0\}$, \dots , $V_{n-1} \cap \langle e_n \rangle = \{0\}$. Desta forma concluímos que dada uma flag $y = (U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_{n-1})$ o conjunto dos elementos transversais a y é

$$\sigma(y) = \{(V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1}) : V_j \cap U_{n-j} = \{0\}\}.$$

Exemplo 2.7 Como um caso particular do exemplo anterior consideremos $G = \text{Sl}(3, \mathbb{R})$. Temos que um par $((V_1 \subset V_2), (U_1 \subset U_2)) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ é um elemento da órbita principal $G \cdot (y_0, x_0)$ se e só se $V_1 \not\subset U_2$ e $U_1 \not\subset V_2$. Um caso mais trivial ocorre quando $n = 2$. Neste caso, a variedade flag maximal é a reta projetiva \mathbb{RP}^1 e as células abertas são os complementos de conjuntos unitários. Portanto, todo par $(x, y) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ com $x \neq y$ é um elemento da órbita principal.

2.2 Órbitas adjuntas

Nesta seção consideraremos as órbitas adjuntas do grupo G . Apresentaremos algumas realizações geométricas que serão úteis no estudo dos conjuntos de controle nestas órbitas.

Denominaremos a ação

$$\begin{aligned} G \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ (g, X) &\mapsto g \cdot X \end{aligned}$$

onde $g \cdot X = \text{Ad}(g)X$, de ação adjunta de G em \mathfrak{g} , ou simplesmente de ação adjunta.

Para qualquer elemento hiperbólico $H \in \mathfrak{a}$, temos que $g \cdot H = H$ se, e somente se, $g \in MA$, ou seja, o subgrupo de isotropia em H é MA . Desta forma, identificamos a órbita adjunta através de H , que denotaremos por $\mathcal{O}_H = \{g \cdot H : g \in G\}$, com

o espaço homogêneo G/MA . Este fato, juntamente com os resultados da seção anterior, fornece a seguinte caracterização de órbitas pela ação adjunta.

Proposição 2.8 *A órbita adjunta através de um elemento hiperbólico regular $H \in \mathfrak{g}$ identifica-se com a órbita aberta da ação diagonal de G em $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ ou, equivalentemente, ao conjunto dos pares de subálgebras parabólicas minimais $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$ tais que $\mathfrak{b}_1 \top \mathfrak{b}_2$.*

Essa identificação se dá da seguinte forma: dado H hiperbólico, denote por y_0 o repulsor de $h = \exp H$ e por x_0 o seu atrator. Então, a identificação é dada pela aplicação

$$\phi : G \cdot (y_0, x_0) \rightarrow G \cdot H$$

tal que $\phi(g \cdot (y_0, x_0)) = g \cdot H$. Isso acontece pois tanto o subgrupo de isotropia em (y_0, x_0) quanto em H coincidem com MA .

A inversa da aplicação ϕ tem a seguinte interpretação geométrica: seja $X = g \cdot H \in \mathcal{O}_H$. Como X é hiperbólico, $\exp X$ tem um único repulsor y e um único atrator x . Como $X = g \cdot H$, é claro que $y = g \cdot y_0$ e $x = g \cdot x_0$. Portanto, $\phi^{-1}(X)$ é o par formado pelo repulsor de $\exp X$ e o seu atrator.

Para realizar geometricamente a aplicação ϕ , identifique $G \cdot (y_0, x_0)$ com o conjunto dos pares de subálgebras parabólicas minimais transversais. Sejam \mathfrak{p}_1 e \mathfrak{p}_2 álgebras transversais. Então existe $g \in G$ tal que $\mathfrak{p}_1 = g \cdot \mathfrak{p}^-$ e $\mathfrak{p}_2 = g \cdot \mathfrak{p}^+$. Logo, $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$, onde $\mathfrak{m}_1 = g \cdot \mathfrak{m}$ e $\mathfrak{a}_1 = g \cdot \mathfrak{a}$. Além disso, se \mathfrak{a}^+ é a câmara de Weyl em \mathfrak{a} tal que as raízes negativas em \mathfrak{a}^+ fornecem \mathfrak{p}^- e as positivas determinam \mathfrak{p}^+ , então $\mathfrak{a}_1^+ = g \cdot \mathfrak{a}^+$ é a câmara de Weyl em \mathfrak{a}_1 tal que as raízes negativas em \mathfrak{a}_1^+ determinam \mathfrak{p}_1 e as positivas determinam \mathfrak{p}_2 . Como H é hiperbólico, \mathcal{O}_H intercepta $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ em \mathfrak{a}_1 e essa intersecção se dá em um número finito de pontos (esses pontos formam uma órbita do grupo de Weyl de \mathfrak{a}_1) e intercepta \mathfrak{a}_1^+ em um único ponto. Obtemos assim a seguinte interpretação para ϕ :

Proposição 2.9 *Mantenha as notações e identificações acima. Então, $\phi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = H_1$, onde*

$$\mathfrak{a}_1^+ \cap \mathcal{O}_H = \{H_1\}.$$

Demonstração: De fato, $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ identifica-se ao par $(y, x) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ de tal forma que y é o repulsor de H_1 e x é o atrator. \square

Exemplo 2.10 *Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Consideremos $H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Em [8], proposição II.3.6 foi mostrado que as órbitas adjuntas de $G = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ em \mathfrak{g} são os conjuntos $\{hH_0 + tT + uU : h^2 + t^2 - u^2 = \text{constante}\}$. Vamos considerar a órbita através de H_0 . Temos que*

$$\mathrm{Ad}(G)H_0 = \mathcal{O} = \left\{ \begin{pmatrix} h & t - u \\ t + u & -h \end{pmatrix} : h^2 + t^2 - u^2 = 1 \right\},$$

a qual descreve um hiperbolóide de uma folha. As subálgebras parabólicas minimais são planos passando pela origem. Dadas duas subálgebras parabólicas minimais \mathfrak{p}_1 e \mathfrak{p}_2 sua intersecção é uma subálgebra abeliana. As câmaras de Weyl nestas subálgebras são as semi-retas espaciais determinadas pela origem. A intersecção da semi-reta \mathfrak{a}^+ tal que as raízes positivas em \mathfrak{a}^+ determinam \mathfrak{p}_2 e as negativas determinam \mathfrak{p}_1 com o hiperbolóide é a imagem $\phi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$.

Além das realizações geométricas já destacadas até aqui, G/MA também pode ser identificado ao conjunto das câmaras de Weyl de G (ou \mathfrak{g}) (conferir [4], página 66). A bijeção é dada pela aplicação $gMA \mapsto gA^+g^{-1} \leftrightarrow g \cdot \mathfrak{a}^+$, onde \mathfrak{a}^+ é a câmara positiva da decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$. Assim, podemos identificar também o conjunto das câmaras de Weyl em \mathfrak{g} com o conjunto dos pares de subálgebras parabólicas minimais transversais. Geometricamente, essa identificação é obtida associando um par $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ com a câmara de Weyl $\alpha \subset \mathfrak{g}$ cujas raízes negativas sobre α determinam \mathfrak{p}_1 e as positivas \mathfrak{p}_2 .

Tomando $H \in \mathfrak{a}^+$ e denotando por Υ o conjunto das câmaras de Weyl em G conjugadas a A^+ , podemos resumir as identificações tratadas até aqui no seguinte quadro:

$$\begin{array}{ccccccc} G/MA & \leftrightarrow & \Upsilon & \leftrightarrow & G \cdot H & \leftrightarrow & G \cdot (y_0, x_0) \leftrightarrow G \cdot (\mathfrak{p}^-, \mathfrak{p}^+) \\ gMA & \leftrightarrow & gA^+g^{-1} & \leftrightarrow & g \cdot H & \leftrightarrow & (gy_0, gx_0) \leftrightarrow (g \cdot \mathfrak{p}^-, g \cdot \mathfrak{p}^+) \end{array}$$

Consideremos agora o espaço homogêneo G/M^*A . Em [4], G/M^*A é identificado com o conjunto dos subgrupos (subálgebras) split de G (\mathfrak{g}) e assim a projeção canônica $G/MA \rightarrow G/M^*A$ é interpretada como a aplicação que associa uma dada câmara de Weyl $\alpha \in G/MA$ ao subgrupo split contendo α . Identificando G/MA com o conjunto dos pares de subálgebras parabólicas transversais, esta projeção fica sendo a aplicação que associa ao par $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ a única subálgebra split \mathfrak{a}_1 contida em $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$.

Como MA é um subgrupo normal de M^*A , a projeção $G/MA \rightarrow G/M^*A$ define G/MA como um fibrado principal sobre G/M^*A . O grupo estrutural deste fibrado é $M^*A/MA/ \approx W$ e assim existe uma ação natural à direita de W em G/MA , dada por $(gMA) \cdot w = g\tilde{w}MA$. Através das identificações acima, a ação de W é dada em cada caso da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccc} (gA^+g^{-1}) \cdot w & \leftrightarrow & (g \cdot H) \cdot w & \leftrightarrow & (gy_0, gx_0) \cdot w & \leftrightarrow & (g \cdot \mathfrak{p}^-, g \cdot \mathfrak{p}^+) \cdot w \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ g\tilde{w}A^+(g\tilde{w})^{-1} & \leftrightarrow & g\tilde{w} \cdot H & \leftrightarrow & (g\tilde{w}y_0, g\tilde{w}x_0) & \leftrightarrow & (g\tilde{w} \cdot \mathfrak{p}^-, g\tilde{w} \cdot \mathfrak{p}^+) \end{array}$$

Observação 2.11 *As ações de G e de W em G/MA comutam entre si. De fato,*

$$g \cdot ((g_1MA) \cdot w) = g \cdot (g_1\tilde{w}MA) = gg_1\tilde{w}MA = (gg_1MA) \cdot w = (g \cdot (g_1MA)) \cdot w.$$

Também em [4], a fibração $G/MA \rightarrow G/MAN^+$ é realizada como a aplicação que associa a uma câmara de Weyl α em G o único subgrupo parabólico em \mathbb{F} que contém α como câmara positiva. Identificando G/MA com a órbita aberta da ação diagonal, esta aplicação é a projeção na segunda coordenada, $(gy_0, gx_0) \mapsto gx_0$, e será denotada daqui em diante por π_2 .

Capítulo 3

Conjuntos de controle em órbitas adjuntas

Seja $S \subset G$ um semigrupo com pontos interiores. O objetivo deste capítulo é caracterizar os conjuntos de controle efetivos para a ação de S nas órbitas adjuntas de elementos hiperbólicos. A existência desses conjuntos é assegurada pelo fato de que sempre é possível tomar uma decomposição de Iwasawa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ de tal forma que exista um elemento hiperbólico $H \in \mathfrak{a}$ com $h = \exp H \in \text{int}S$ (lema 3.2 de [2]). Tomando uma tal decomposição, temos que $h \cdot H = H$, com $h \in \text{int}S$ e, pela proposição 1.10, concluímos H pertence ao conjunto de transitividade de um conjunto de controle.

3.1 Pontos fixos e conjuntos de controle

Nesta seção caracterizaremos os conjuntos de controle para a ação de um semigrupo $S \subset G$ com $\text{int}S \neq \emptyset$ nas órbitas adjuntas de elementos hiperbólicos. Esta caracterização diz que os conjuntos de controle são essencialmente conjuntos de pontos fixos para elementos hiperbólicos no interior de S . Por isso, começamos estudando tais pontos fixos. Isto será feito utilizando as realizações geométricas do capítulo anterior.

Seja $H \in \mathfrak{a}$ um elemento hiperbólico e $h = \exp H$. Identifiquemos a órbita adjunta por H com a órbita principal $G \cdot (y_0, x_0)$ estudada no capítulo anterior. Os

pontos fixos para a ação de h em \mathbb{F} são dados por $\tilde{w}x_0$, com $w \in W$. Por isso os pontos fixos de h em $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$, pela ação diagonal, são dados por $(\tilde{w}_1x_0, \tilde{w}_2x_0)$ com $w_1, w_2 \in W$. Existem, portanto, $|W|^2$ pontos fixos. A proposição a seguir descreve os h -pontos fixos na órbita principal.

Proposição 3.1 *Se $h \in A^+$ então os pontos fixos para a ação de h em $G \cdot (y_0, x_0)$ são dados por $(\tilde{w}\tilde{w}_0x_0, \tilde{w}x_0)$, $w \in W$.*

Demonstração: Sabemos que os h -pontos fixos em $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ devem ser da forma $(\tilde{w}_1x_0, \tilde{w}_2x_0)$. Para que um par desta forma pertença à órbita principal é necessário que as correspondentes subálgebras parabólicas sejam transversais. Escreva

$$(\tilde{w}_1x_0, \tilde{w}_2x_0) = ((\tilde{w}_1\tilde{w}_0)\tilde{w}_0x_0, \tilde{w}_2x_0) = (\tilde{w}\tilde{w}_0x_0, \tilde{w}_2x_0),$$

onde $\tilde{w} = \tilde{w}_1\tilde{w}_0$. Temos que $\mathfrak{nil}(\tilde{w}\tilde{w}_0 \cdot \mathfrak{p}^+) = \tilde{w}\tilde{w}_0 \cdot \mathfrak{n}^+ = \tilde{w} \cdot \mathfrak{n}^-$ e que $\mathfrak{nil}(\tilde{w}_2 \cdot \mathfrak{p}^+) = \tilde{w}_2 \cdot \mathfrak{n}^+$. Suponha primeiramente que $\tilde{w}_2 = 1$. Como w permuta os espaços de raízes e \mathfrak{n}^- é a soma dos auto-espacos correspondentes às raízes negativas, para que $\tilde{w} \cdot \mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{n}^+$ seja trivial devemos ter $w = 1$, pois caso contrário ao menos uma raiz negativa seria levada em uma raiz positiva pela ação de w e assim não teríamos $\tilde{w} \cdot \mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{n}^+ = \{0\}$. Suponha agora que $\tilde{w}_2 \neq 1$. Como $\tilde{w} \cdot \mathfrak{n}^- \cap \tilde{w}_2 \cdot \mathfrak{n}^+ = \{0\}$ implica em $\tilde{w}_2^{-1}\tilde{w} \cdot \mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{n}^+ = \{0\}$, concluímos que uma condição necessária para que $\tilde{w} \cdot \mathfrak{n}^- \cap \tilde{w}_2 \cdot \mathfrak{n}^+$ seja trivial é que $\tilde{w}_2^{-1}\tilde{w} = 1$, ou seja, $w = w_2$. Portanto, os pontos fixos de h em $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ que pertencem à órbita principal $G \cdot (\tilde{w}_0x_0, x_0)$ são da forma $(\tilde{w}\tilde{w}_0x_0, \tilde{w}x_0)$, como queríamos. \square

Pela proposição anterior, o número de pontos fixos na órbita principal é $|W|$. Passando a um elemento hiperbólico g qualquer, temos que os pontos fixos de g são dados pelos pares formados pelo g -ponto fixo do tipo ww_0 em \mathbb{F} junto com o g -ponto fixo do tipo w em \mathbb{F} .

Definição 3.2 *Se $h \in G$ é um elemento hiperbólico, diremos que o par*

$$(\text{fix}(h, ww_0), \text{fix}(h, w))$$

é o ponto fixo do tipo w para a ação de h na órbita principal (ou, o que é a mesma coisa, na órbita adjunta), onde $\text{fix}(h, w)$ denota o ponto fixo para a ação em \mathbb{F} . Usaremos a notação

$$\text{fix}_{\mathcal{O}}(h, w) := (\text{fix}(h, ww_0), \text{fix}(h, w))$$

para indicar o h -ponto fixo em \mathcal{O}_H .

Observamos que se $h \in gA^+g^{-1}$, então $\text{fix}_{\mathcal{O}}(h, w) = (g\tilde{w}\tilde{w}_0x_0, g\tilde{w}x_0)$. Pela bijeção entre a órbita adjunta e a órbita principal, temos que $\text{fix}_{\mathcal{O}}(h, w) = (g\tilde{w}) \cdot H$.

Observação 3.3 *Se tomarmos h hiperbólico em G , então $h \in gA^+g^{-1}$ para algum $g \in G$ e assim*

$$\begin{aligned} (\text{fix}(h, w_0), \text{fix}(h, 1)) \cdot w &= (g\tilde{w}_0x_0, gx_0) \cdot w = (g\tilde{w}\tilde{w}_0x_0, g\tilde{w}x_0) \\ &= (\text{fix}(h, ww_0), \text{fix}(h, w)) \end{aligned}$$

ou seja, $\text{fix}_{\mathcal{O}}(h, w) = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, 1) \cdot w$. Portanto, os pontos fixos do tipo w na órbita adjunta são obtidos através da ação à direita de w nos pontos fixos do tipo 1 na órbita.

Exemplo 3.4 *Seja $G = \text{Sl}(3, \mathbb{R})$. Considere a órbita através de um elemento hiperbólico $H = \text{diag}(a_1, a_2, a_3) \in \mathfrak{a}^+$. Se $h = \exp H$, os h -pontos fixos na órbita são os elementos $H \cdot w$, que são as matrizes obtidas à partir de H permutando a ordem das entradas diagonais. Identificando a órbita adjunta com a órbita principal em $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$, temos que $H = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, 1)$ é identificado ao par (y_0, x_0) com*

$$x_0 = (\langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle) \text{ e } y_0 = (\langle e_3 \rangle \subset \langle e_3, e_2 \rangle).$$

Os demais pontos fixos são obtidos pela ação de W neste elemento. Por exemplo,

$$\text{fix}_{\mathcal{O}}(h, (1, 2)) = (y_0, x_0) \cdot (1, 2) = ((\langle e_3 \rangle \subset \langle e_1, e_3 \rangle), (\langle e_2 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle)).$$

Como na seção 1.2, $R(S)$ denota o conjunto dos elementos hiperbólicos que pertencem ao interior de S . Se $h \in R(S)$ então, pela proposição 1.10, temos que $\text{fix}_{\mathcal{O}}(h, w)$ pertence ao interior de um conjunto de controle sobre G/MA , o qual denotaremos provisoriamente por $D_{\mathcal{O}}(h, w)$. A proposição seguinte diz que todo conjunto de controle efetivo em G/MA contém algum ponto da forma $\text{fix}_{\mathcal{O}}(h, w)$.

Proposição 3.5 *Todo conjunto de controle efetivo para a ação de S sobre G/MA é da forma $D(h, w)$.*

Demonstração: Seja D um conjunto de controle efetivo para S e tome $x \in D_0$. A isotropia em x é da forma $M'A'$ (pois todo ponto da órbita é hiperbólico) e satisfaz $M'A' \cap \text{int}S \neq \emptyset$. Seja

$$\tau = \{m \in M' : \exists h \in A' \text{ com } mh \in \text{int}S\}.$$

Temos que τ é um semigrupo com interior não vazio em M' . Como M' é compacto tem-se que $1 \in \tau$, ou seja, $A' \cap \text{int}S \neq \emptyset$. Agora, o conjunto dos elementos hiperbólicos é denso em A' . Assim, existe h hiperbólico tal que $h \in \text{int}S$ e $hx = x$, ou seja, x é um ponto fixo do elemento hiperbólico h e $D = D(h, w)$ para algum $w \in W$. \square

Mostraremos agora que os h -pontos fixos de mesmo tipo w estão no mesmo conjunto de controle. Começamos mostrando a afirmação para $w = 1$.

Proposição 3.6 *Se $h_1, h_2 \in R(S)$, então $\text{fix}_{\mathcal{O}}(h_1, 1)$ e $\text{fix}_{\mathcal{O}}(h_2, 1)$ pertencem a um mesmo conjunto de controle.*

Demonstração: Sejam $h_1, h_2 \in R(S)$. Temos que

$$\text{fix}_{\mathcal{O}}(h_1, 1) = (\text{fix}(h_1, w_0), \text{fix}(h_1, 1))$$

e

$$\text{fix}_{\mathcal{O}}(h_2, 1) = (\text{fix}(h_2, w_0), \text{fix}(h_2, 1)).$$

Como $\text{fix}(h_1, 1)$ e $\text{fix}(h_2, 1)$ pertencem a $D(1)_0$, existe $g \in \text{int}S$ tal que $g\text{fix}(h_2, 1) = \text{fix}(h_1, 1)$. Portanto, $g^{-1}\text{fix}(h_1, 1) = \text{fix}(h_2, 1)$. Logo

$$g^{-1} \cdot \text{fix}_{\mathcal{O}}(h_1, 1) = (g^{-1} \cdot \text{fix}(h_1, w_0), g^{-1}\text{fix}(h_1, 1)) = (g^{-1}\text{fix}(h_1, w_0), \text{fix}(h_2, 1)).$$

Agora, $g^{-1} \cdot \text{fix}_{\mathcal{O}}(h_1, 1)$ pertence à órbita aberta em $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$. Consequentemente, $g^{-1}\text{fix}(h_1, w_0)$ pertence à célula aberta de Bruhat transversal a $\text{fix}(h_2, 1)$ (veja proposição 2.4). Pela proposição 2.5 temos que

$$h_2^{-k}g^{-1} \cdot (\text{fix}(h_1, w_0), \text{fix}(h_1, 1)) \rightarrow (\text{fix}(h_2, w_0), \text{fix}(h_2, 1)) = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h_2, 1).$$

Como $\text{fix}_{\mathcal{O}}(h_2, 1) \in D_{\mathcal{O}}(h_2, 1)_0$, concluímos que $D_{\mathcal{O}}(h_2, 1) \leq D_{\mathcal{O}}(h_1, 1)$. Analogamente obtemos a desigualdade inversa e a proposição fica demonstrada. \square

Podemos agora mostrar que dado $w \in W$ os pontos fixos do tipo w pertencem a um mesmo conjunto de controle. Isto é feito no próximo resultado.

Teorema 3.7 *Sejam $h_1, h_2 \in R(S)$. Então $D_{\mathcal{O}}(h_1, w) = D_{\mathcal{O}}(h_2, w)$, para todo $w \in W$.*

Demonstração: Conforme mostramos na observação 3.3,

$$\text{fix}_{\mathcal{O}}(h_1, w) = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h_1, 1) \cdot w$$

e

$$\text{fix}_{\mathcal{O}}(h_2, w) = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h_2, 1) \cdot w.$$

Pela proposição anterior, $\text{fix}_{\mathcal{O}}(h_1, 1)$ e $\text{fix}_{\mathcal{O}}(h_2, 1)$ pertencem ao conjunto de transitividade de um mesmo conjunto de controle. Logo, existe $g \in \text{int}S$ tal que $g \cdot \text{fix}_{\mathcal{O}}(h_1, 1) = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h_2, 1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} g \cdot \text{fix}_{\mathcal{O}}(h_1, w) &= g \cdot (\text{fix}_{\mathcal{O}}(h_1, 1) \cdot w) = (g \cdot \text{fix}_{\mathcal{O}}(h_1, 1)) \cdot w = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h_2, 1) \cdot w \\ &= \text{fix}_{\mathcal{O}}(h_2, w). \end{aligned}$$

Analogamente mostramos a existência de $g_1 \in \text{int}S$ tal que $g_1 \cdot \text{fix}_{\mathcal{O}}(h_2, w) = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h_1, w)$, o que mostra que $\text{fix}_{\mathcal{O}}(h_1, w)$ e $\text{fix}_{\mathcal{O}}(h_2, w)$ pertencem ao mesmo conjunto de controle e concluímos a demonstração. \square

Notação: Em vista do teorema anterior, denotaremos o conjunto de controle contendo os h -pontos fixos do tipo w por $D_{\mathcal{O}}(w)$.

Mostramos na proposição 3.5 que todo conjunto de controle para a ação de S em G/MA contém pontos fixos do tipo w para algum $w \in W$. O teorema anterior mostra que todos os pontos fixos do mesmo tipo w estão no mesmo conjunto de controle $D_{\mathcal{O}}(w)$. Para completar a descrição destes conjuntos, resta mostrar que todo ponto no conjunto de transitividade $(D_{\mathcal{O}}(w))_0$ de $D_{\mathcal{O}}(w)$ é ponto fixo do tipo w para algum $h \in R(S)$. Para mostrar esse fato precisaremos do seguinte lema:

Lema 3.8 *Sejam $h \in A^+$ e $h_1, h_2 \in A$. Então existe $k > 0$ tal que $h_1 h^k h_2 \in A^+$.*

Demonstração: Sejam $H_1, H_2 \in \mathfrak{a}$ e $H \in \mathfrak{a}^+$ tais que $\exp H_1 = h_1$, $\exp H_2 = h_2$ e $\exp H = h$. Então, para todo inteiro positivo k

$$h_1 h^k h_2 = (\exp H_1)(\exp H)^k (\exp H_2) = \exp(H_1 + kH + H_2).$$

Agora, para toda raiz α do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ temos que

$$\alpha(H_1 + kH + H_2) = \alpha(H_1) + k\alpha(H) + \alpha(H_2).$$

Assim, se α é uma raiz positiva, então $\alpha(H) > 0$ (pois $H \in \mathfrak{a}^+$) e, conseqüentemente, para k suficientemente grande, temos que

$$\alpha(H_1 + kH + H_2) > 0,$$

ou seja, $H_1 + kH + H_2 \in \mathfrak{a}^+$. Portanto, $h_1 h^k h_2 \in \exp \mathfrak{a}^+ = A^+$. \square

Para simplificar a notação, no próximo resultado identificamos G/MA com a órbita adjunta através de $H_0 \in \mathfrak{a}^+$ e assumimos que $A^+ \cap \text{int}S \neq \emptyset$.

Teorema 3.9 *Para cada $H \in (D_{\mathcal{O}}(w))_0$ existe $h \in R(S)$ tal que $H = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, w)$.*

Demonstração: Seja $H \in (D_{\mathcal{O}}(w))_0$. Pela proposição 3.5 temos que existem $h \in R(S)$ e $w_1 \in W$ tais que $H = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, w_1)$. Para simplificar a notação, assumamos que $h \in A^+$ e assim $H = \tilde{w}_1 \cdot H_0$. Seja ainda $H' = \tilde{w} \cdot H_0$. Temos que H e H' pertencem a $(D_{\mathcal{O}}(w))_0$. Logo, existem $g, g' \in \text{int}S$ tais que

$$\begin{aligned} g \cdot H' &= H = \tilde{w}_1 \cdot H_0 = \tilde{w}_1 \tilde{w}_1^{-1} H' \\ g' \cdot H &= H' = \tilde{w} \cdot H_0 = \tilde{w} \tilde{w}_1^{-1} \cdot H \end{aligned}$$

Desta forma, $\tilde{w} \tilde{w}_1^{-1} g$ pertence ao subgrupo de isotropia em H' e $\tilde{w}_1 \tilde{w}_1^{-1} g'$ pertence ao subgrupo de isotropia em H . Como $H' = \tilde{w} \cdot H_0$ e $H = \tilde{w}_1 \cdot H_0$ são elementos hiperbólicos em \mathfrak{a} , seus subgrupos de isotropia coincidem com MA . Portanto,

$$\begin{aligned} g &\in \tilde{w}_1 \tilde{w}_1^{-1} MA \\ g' &\in \tilde{w} \tilde{w}_1^{-1} MA. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$g = \tilde{w}_1 \tilde{w}_1^{-1} m_1 h_1 \quad (3.1)$$

$$g' = \tilde{w} \tilde{w}_1^{-1} m_2 h_2, \quad (3.2)$$

onde $m_1, m_2 \in M$. Lembramos agora a notação utilizada aqui: dado $w \in W$, \tilde{w} denota um representante em M^* da classe de equivalência de w em $M^*/M = W$. Portanto, se $m \in M$ então \tilde{w} e $\tilde{w}m$ são representantes da mesma classe de equivalência, ou seja, do mesmo elemento $w \in W$. Desta forma, podemos reescrever (3.1) e (3.2) como

$$g = \tilde{w}_1 \tilde{w}_1^{-1} h_1$$

$$g' = \tilde{w} \tilde{w}_1^{-1} h_2.$$

Temos ainda que para todo inteiro positivo k , $gh^k g' \in \text{int}S$. Agora,

$$gh^k g' = \tilde{w}_1 \tilde{w}_1^{-1} h_1 h^k \tilde{w} \tilde{w}_1^{-1} h_2 = \tilde{w}_1 \tilde{w}_1^{-1} h_1 h^k h_3 \tilde{w} \tilde{w}_1^{-1}, \quad (3.3)$$

para algum $h_3 \in A$, pois M^* normaliza A . Pelo lema anterior, tomando k suficientemente grande podemos assumir que $h_1 h^k h_3 \in A^+$ e assim $h_5 = \tilde{w}_1 \tilde{w}_1^{-1} h_1 h^k h_3 \tilde{w} \tilde{w}_1^{-1} \in \tilde{w}_1 \tilde{w}_1^{-1} A^+ \tilde{w} \tilde{w}_1^{-1}$. Por (3.3) temos que $h_5 \in \text{int}S$. Além disso,

$$\text{fix}_{\mathcal{O}}(h_5, w) = \tilde{w}_1 \tilde{w}_1^{-1} \tilde{w} \cdot H_0 = H.$$

Portanto, H é um ponto fixo do tipo w para este elemento $h_5 \in R(S)$, como queríamos. \square

Com esse resultado completamos a caracterização dos conjuntos de controle em G/MA . Juntamos os teoremas 3.7 e 3.9 para obter o seguinte teorema:

Teorema 3.10 *Se $D \subset G/MA$ é um conjunto de controle para a ação de um semigrupo $S \subset G$ com $\text{int}S \neq \emptyset$ então existe $w \in W$ tal que D_0 é o conjunto dos pontos fixos do tipo w para elementos hiperbólicos no interior de S . Reciprocamente, dado $w \in W$ o conjunto dos h -pontos fixos do tipo w , $h \in R(S)$, é o conjunto de transitividade de um conjunto de controle $D \subset G/MA$.*

Vamos agora estudar outras propriedades dos conjuntos $D_{\mathcal{O}}(w)$. A primeira delas é a seguinte: como $\text{fix}_{\mathcal{O}}(h, w) = (\text{fix}(h, ww_0), \text{fix}(h, w))$ segue imediatamente que os conjuntos de transitividade dos conjuntos de controle na órbita principal estão contidos no produto cartesiano de conjuntos de controle nas variedades flag. Destacamos esse fato na seguinte proposição.

Proposição 3.11 *Com a identificação da órbita adjunta com a órbita aberta em $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$, temos que para cada $w \in W$ vale a seguinte inclusão:*

$$D_{\mathcal{O}}(w)_0 \subset D(ww_0)_0 \times D(w)_0. \quad (3.4)$$

O resultado da proposição anterior se estende aos conjuntos de controle, conforme estabelecemos no próximo resultado.

Proposição 3.12 $D_{\mathcal{O}}(w) \subset D(ww_0) \times D(w)$.

Demonstração: Dado $(x, y) \in D_{\mathcal{O}}(w)$, se mostrarmos que $D(ww_0) \cup \{x\}$ e $D(w) \cup \{y\}$ satisfazem a condição (2) da definição de conjuntos de controle então, pela maximalidade destes conjuntos, concluiremos que $x \in D(ww_0)$ e $y \in D(w)$. Seja $(x, y) \in D_{\mathcal{O}}(w)$ e tome $(a, b) \in D_{\mathcal{O}}(w)_0$. Como $D_{\mathcal{O}}(w) \subset \text{fe}(S(x, y))$, então existe uma seqüência $((s_n x, s_n y))_{n \in \mathbb{N}}$, com $s_n \in S$ para todo n tal que $(s_n x, s_n y) \rightarrow (a, b)$. Logo, $b \in \text{fe}(Sy)$ e assim $\text{fe}(Sb) \subset \text{fe}(Sy)$. Por outro lado, temos também que $D_{\mathcal{O}}(w) \subset \text{fe}(S(a, b))$. Portanto, podemos encontrar uma seqüência $((s_n a, s_n b))_{n \in \mathbb{N}}$, onde $s_n \in S$ para todo n com $(s_n a, s_n b) \rightarrow (x, y)$, o que implica em $y \in \text{fe}(Sb)$ e, conseqüentemente, $\text{fe}(Sy) \subset \text{fe}(Sb)$. Portanto, $\text{fe}(Sy) = \text{fe}(Sb)$ e, como $\text{fe}(Sb) = \text{fe}(Sz)$ para todo $z \in D(w)$, temos que $\text{fe}(Sy) = \text{fe}(Sz)$ para qualquer $z \in D(w)$. Já que $y \in \text{fe}(Sy)$, concluímos que

$$D(w) \cup \{y\} \subset \text{fe}(Sz) \text{ para todo } z \in D(w) \cup \{y\}.$$

Analogamente, mostramos que $D(ww_0) \cup \{x\} \subset \text{fe}(Sz)$ para todo $z \in D(ww_0) \cup \{x\}$ e a proposição fica demonstrada. \square

Mostraremos na próxima seção que para semigrupos maximais com $W(S) = \{1\}$ o resultado anterior pode ser melhorado quando $w = 1$, valendo a igualdade $D_{\mathcal{O}}(1) =$

$D(w_0) \times D(1)$. No restante desta seção continuamos estudando propriedades dos conjuntos de controle para $S \subset G$ com $\text{int}S \neq \emptyset$ não necessariamente maximais.

Denotaremos por Γ o conjunto das câmaras de Weyl que interceptam o interior de S :

$$\Gamma = \{\alpha \in G/MA : \alpha \cap \text{int}S \neq \emptyset\}.$$

Vimos na seção 2.2 que \mathcal{O} se identifica ao conjunto das câmaras de Weyl em G . Mostraremos a seguir que, com essa realização, $(D_{\mathcal{O}}(1))_0$ é identificado com Γ e que os demais conjuntos de controle em \mathcal{O} são obtidos pela ação à direita de W em Γ .

Começamos observando o seguinte fato: Seja $X \in \mathfrak{g}$ um elemento hiperbólico. Então $X = g \cdot H$ para algum $g \in G$, $H \in \mathfrak{a}^+$. Consideremos agora $h = \exp X = \exp(g \cdot H) = g(\exp H)g^{-1} \in G$. Temos que o h -ponto fixo do tipo 1 em \mathcal{O} é dado por $g \cdot H_0 \in g \cdot \mathfrak{a}^+$. Como a câmara de Weyl contendo X é justamente $g \cdot \mathfrak{a}^+$, obtemos o seguinte resultado:

Lema 3.13 *Se $h = \exp X$ é um elemento hiperbólico em G então $\text{fix}_{\mathcal{O}}(h, 1)$ é a intersecção de \mathcal{O} com a câmara de Weyl contendo X .*

Deste resultado segue o próximo lema, o qual por sua vez permitirá identificar $(D_{\mathcal{O}}(1))_0$ com o conjunto das câmaras de Weyl em G que interceptam o interior de S .

Lema 3.14 *Seja $H \in \mathcal{O}$. Então, $H = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, 1)$ para algum $h \in R(S)$ se, e somente se, $\exp \mathfrak{a}' \cap \text{int}S \neq \emptyset$, onde \mathfrak{a}' é a câmara de Weyl contendo H .*

Demonstração: Se $H = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, 1)$ para algum $h \in G$ hiperbólico, então pelo lema anterior H pertence à câmara de Weyl contendo o elemento X tal que $\exp X = h$. Se além disso h pertence ao interior de S , então $\exp \mathfrak{a}' \cap \text{int}S \neq \emptyset$. Reciprocamente, se $\exp \mathfrak{a}' \cap \text{int}S \neq \emptyset$ então tomando $h \in \exp \mathfrak{a}' \cap \text{int}S$ temos, novamente pelo lema anterior, que $H = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, 1)$ com $h \in R(S)$. \square

Temos agora a seguinte realização do conjunto de transitividade de $D_{\mathcal{O}}(1)$:

Proposição 3.15 *Identifique \mathcal{O} com o conjunto das câmaras de Weyl em G . Então, $(D_{\mathcal{O}}(1))_0 \subset \mathcal{O}$ se identifica a Γ .*

Demonstração: Dado $H \in (D_{\mathcal{O}}(1))_0$ temos, pelo lema anterior, que a câmara de Weyl \mathfrak{a}' contendo H satisfaz $\exp \mathfrak{a}' \cap \text{int}S \neq \emptyset$. Como H é identificado a câmara $\alpha = \exp \mathfrak{a}'$, segue que H fica identificado com um elemento $\alpha \in \Gamma$. Reciprocamente, se $\alpha = \exp \mathfrak{a}' \in \Gamma$ então o elemento $H \in \mathcal{O}$ com o qual α é identificada (que é a intersecção de \mathcal{O} com \mathfrak{a}') é ponto fixo do tipo 1 para qualquer $h \in \alpha \cap \text{int}S$ e, conseqüentemente, pertence a $(D_{\mathcal{O}}(1))_0$. \square

Para os demais conjuntos de controle, vale o seguinte resultado.

Teorema 3.16 *Identifique \mathcal{O} com o conjunto das câmaras de Weyl em G . Então, para cada $w \in W$ vale a igualdade*

$$(D_{\mathcal{O}}(w))_0 = \Gamma \cdot w.$$

Demonstração: Se $\alpha \in \Gamma$ e $h \in \alpha \cap \text{int}S$, então $\text{fix}_{\mathcal{O}}(h, 1) \cdot w = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, w) \in (D_{\mathcal{O}}(w))_0$, logo $\Gamma \cdot w \subset (D_{\mathcal{O}}(w))_0$. Por outro lado, se $H \in (D_{\mathcal{O}}(w))_0$, então $H = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, w)$ para algum $h \in R(S)$. Assim, $H = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, 1) \cdot w \in \Gamma \cdot w$, provando a inclusão contrária. \square

Exemplo 3.17 *Sejam $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e $S = \text{Sl}^+(2, \mathbb{R}) \subset \text{Sl}(2, \mathbb{R})$ o semigrupo das matrizes com todas as entradas não-negativas. O interior de S é o conjunto das matrizes em $\text{Sl}(2, \mathbb{R})$ com todas as entradas estritamente positivas. Para determinar os conjuntos de controle para a ação de S em \mathcal{O} , considere a descrição de \mathcal{O} dada no exemplo 2.10. Dado $H \in \mathcal{O}$ escreva $H = \begin{pmatrix} x & y - z \\ y + z & -x \end{pmatrix} = xH_0 + yT + zU$. Como H é o $\exp H$ -ponto fixo do tipo 1, temos que $H \in D_{\mathcal{O}}(1)_0$ se e só se a câmara de Weyl em G contendo $\exp H$ intercepta o interior de S . Como neste caso as câmaras de Weyl são semi-retas espaciais determinadas pela origem, temos que $H \in D_{\mathcal{O}}(1)_0$ se e somente se $\exp tH \in \text{int}S$ para algum $t > 0$. Temos também que*

$$\exp tH = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x(e^t - e^{-t}) + (e^t + e^{-t}) & (y - z)(e^t - e^{-t}) \\ (y + z)(e^t - e^{-t}) & x(e^{-t} - e^t) + (e^t + e^{-t}) \end{pmatrix}.$$

Para que todas as entradas de $\exp tH$ sejam estritamente positivas, resolvemos as inequações $(\exp tH)_{i,j} > 0$, $i, j = 1, 2$ para $t > 0$ e obtemos que $x^2 < 1$ e $y > 0$. Portanto,

$$D_{\mathcal{O}}(1)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y - z \\ y + z & -x \end{pmatrix} \in \mathcal{O} : x^2 < 1, y > 0 \right\}.$$

Na base $\{H_0, T, U\}$ adotada, $D_{\mathcal{O}}(1)_0$ corresponde à região do hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ que está entre os planos $y = \pm z$ com $y > 0$. O conjunto de transitividade de $D_{\mathcal{O}}(w_0)$ é dado por $(D_{\mathcal{O}}(1)_0) \cdot w_0$. Neste caso, um representante de w_0 em M^* é dado por $\tilde{w}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Assim,

$$\text{Ad}(\tilde{w}_0)H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y - z \\ x + z & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -x & -y - z \\ -y + z & x \end{pmatrix}.$$

Portanto, a ação de w_0 em \mathcal{O} é dada por $xH_0 + yT + zU \mapsto -xH_0 - yT + zU$, ou seja, é a reflexão em torno do eixo z . Assim,

$$D_{\mathcal{O}}(w_0)_0 = (D_{\mathcal{O}}(1)_0) \cdot w_0 = \{xH_0 + yT + zU \in \mathcal{O} : x^2 < 1, y < 0\}.$$

Consideremos agora a projeção canônica $G/MA \rightarrow G/MAN^+$. Lembramos que na seção 2.2 esta fibração foi realizada como a projeção na segunda coordenada $\pi_2 : \mathcal{O} \subset \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$, $(x, y) \mapsto y$. Com isso fica fácil mostrar que os conjuntos de transitividade dos conjuntos de controle sobre \mathcal{O} projetam-se sobre os conjuntos de transitividade dos conjuntos de controle do mesmo tipo w sobre \mathbb{F} , que é o conteúdo do próximo teorema:

Teorema 3.18 *Se $\pi_2 : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{F}$ denota a fibração canônica então, para cada $w \in W$, vale a igualdade $\pi_2((D_{\mathcal{O}}(w))_0) = (D(w))_0$.*

Demonstração: Se $x \in (D(w))_0$, então $x = \text{fix}(h, w)$ para algum $h \in R(S)$. Como $\text{fix}(h, w) = \pi_2(\text{fix}(h, ww_0), \text{fix}(h, w)) = \pi_2(\text{fix}_{\mathcal{O}}(h, w))$, concluímos que $(D(w))_0 \subset \pi_2((D_{\mathcal{O}}(w))_0)$. Por outro lado, se $H \in (D_{\mathcal{O}}(w))_0$ então pelo teorema 3.9

$$H = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, w) = (\text{fix}(h, ww_0), \text{fix}(h, w))$$

para algum $h \in R(S)$. Portanto $\pi_2(H) = \text{fix}(h, w) \in (D(w))_0$ mostrando a inclusão contrária e concluindo a demonstração. \square

Com esse teorema concluímos que se $D_{\mathcal{O}}(w_1) = D_{\mathcal{O}}(w_2)$ então $D(w_1) = D(w_2)$. Vamos agora mostrar a recíproca deste fato. Começamos mostrando esse fato com $w_2 = 1$. Lembramos que $W(S)$ é o subgrupo dos elementos $w \in W$ tais que $D(w)$ é o conjunto de controle invariante sobre a variedade flag maximal \mathbb{F} .

Proposição 3.19 *Se $w \in W(S)$ então $D_{\mathcal{O}}(w) = D_{\mathcal{O}}(1)$.*

Demonstração: Tome uma decomposição $G = KAN^+$, com $A^+ \in \Gamma$ e seja $h \in A^+$. Então, $(\text{fix}(h, w_0), \text{fix}(h, 1)) \in D_{\mathcal{O}}(1)$. Por hipótese, $x_0 = \text{fix}(h, 1) \in D(w)_0 = \pi_2(D_{\mathcal{O}}(w)_0)$. Logo, $x_0 = \pi_2(\text{fix}(h_1, ww_0), \text{fix}(h_1, w))$ para algum $h_1 \in R(S)$. Como $\pi_2^{-1}\{x_0\} = \{(n\tilde{w}_0x_0, x_0) : n \in N^+\}$, então $(\text{fix}(h_1, ww_0), \text{fix}(h_1, w)) = (n\tilde{w}_0x_0, x_0)$ para algum $n \in N^+$. Desta forma,

$$h^{-k}(\text{fix}(h_1, ww_0), \text{fix}(h_1, w)) = h^{-k}(n\tilde{w}_0x_0, x_0) \rightarrow (\tilde{w}_0x_0, x_0),$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Como $(\tilde{w}_0x_0, x_0) \in D_{\mathcal{O}}(1)_0$, concluímos que $D_{\mathcal{O}}(1) \leq D_{\mathcal{O}}(w)$. Para mostrar a desigualdade inversa, notamos em primeiro lugar que $w \in W(S)$ é equivalente a $D(ww_0) = D(w)$. De fato, temos que $D(ww_0) = D(w_0)$ se e só se $W(S)ww_0 = W(S)w_0$, o que é equivalente a afirmar que $W(S)w = W(S)$, ou seja, que $w \in W(S)$. Desta forma, temos por hipótese que $D(ww_0) = D(w_0)$. Logo $\tilde{w}\tilde{w}_0x_0 = \text{fix}(h_2, w_0)$ para algum $h_2 \in R(S)$. Como $\tilde{w}\tilde{w}_0x_0$ é transversal a $\tilde{w}x_0$, temos que $(\text{fix}(h_2, w_0), \tilde{w}x_0) = (\tilde{w}\tilde{w}_0x_0, \tilde{w}x_0) \in G \cdot (y_0, x_0)$. Assim, pela proposição 2.5 obtemos $h_2^k(\tilde{w}\tilde{w}_0x_0, \tilde{w}x_0) \rightarrow (\text{fix}(h_2, w_0), \text{fix}(h_2, 1)) \in D_{\mathcal{O}}(1)$. Portanto, $D_{\mathcal{O}}(w) \leq D_{\mathcal{O}}(1)$ e a proposição fica demonstrada. \square

Com os resultados mostrados até aqui obtemos a seguinte caracterização de $W(S)$:

Teorema 3.20 *$W(S)$ é o subgrupo do grupo de Weyl que deixa Γ invariante.*

Demonstração: Pela proposição 3.16, temos que $D_{\mathcal{O}}(w)_0 = \Gamma \cdot w$. A proposição anterior afirma que se $w \in W(S)$ então $\Gamma \cdot w = D_{\mathcal{O}}(w)_0 = D_{\mathcal{O}}(1)_0 = \Gamma$. Reciprocamente, se $\Gamma \cdot w = \Gamma$ para algum $w \in W$ então $D_{\mathcal{O}}(1)_0 = D_{\mathcal{O}}(w)_0$. Logo, pelo teorema 3.18 temos que $D(1) = D(w)$, ou seja, $w \in W(S)$. \square

Podemos agora mostrar que os conjuntos de controle em G/MA estão em bijeção com os conjuntos de controle em \mathbb{F} .

Teorema 3.21 $D(w_1) = D(w_2)$ se, e somente se, $D_{\mathcal{O}}(w_1) = D_{\mathcal{O}}(w_2)$.

Demonstração: Pelo teorema 3.18, $\pi_2(D_{\mathcal{O}}(w)_0) = D(w)_0$ para qualquer $w \in W$. Logo, se $D_{\mathcal{O}}(w_1) = D_{\mathcal{O}}(w_2)$ então $D(w_1) = D(w_2)$. Para mostrar a recíproca, assumamos que $D(w_1) = D(w_2)$. Pelo teorema 1.13 temos que $w_1 w_2^{-1} \in W(S)$. Assim, a proposição 3.19 implica que $D_{\mathcal{O}}(w_1 w_2^{-1}) = D_{\mathcal{O}}(1)$. Usando o teorema anterior, obtemos que $\Gamma \cdot (w_1 w_2^{-1}) = \Gamma$. Desta forma $\Gamma \cdot w_1 = \Gamma \cdot w_2$, ou seja, $D_{\mathcal{O}}(w_1)_0 = D_{\mathcal{O}}(w_2)_0$. Portanto, $D_{\mathcal{O}}(w_1) = D_{\mathcal{O}}(w_2)$. \square

Corolário 3.22 *O número de conjuntos de controle em G/MA e em \mathbb{F} é o mesmo.*

Mostraremos agora duas propriedades dos conjuntos de controle em G/MA que contrastam com as dos conjuntos de controle em variedades flag: a primeira é que em G/MA os conjuntos de controle não são comparáveis dois a dois e a segunda propriedade é que não existem conjuntos de controle invariantes para a ação de um semigrupo de interior não vazio $S \subset G$, a menos que $S = G$.

Lembramos que estamos denotando por $D^-(w)$ o conjunto de controle para a ação de S^{-1} em \mathbb{F} que contém os h -pontos fixos do tipo w para $h \in S^{-1}$. Temos o seguinte lema:

Lema 3.23 *Sejam $w_1, w_2 \in W$. Então, $D(w_1) \leq D(w_2)$ se, e somente se,*

$$D^-(w_0 w_2) \leq D^-(w_0 w_1).$$

Demonstração: Se $D(w_1) \leq D(w_2)$ então, pela proposição 1.21 existem $g \in \text{int}S$ e $x \in D(w_1)_0$ tais que $gx = y \in D(w_2)_0$. Assim, $x = g^{-1}y \in D(w_1)_0$, com

$g^{-1} \in S^{-1}$ e $y \in D(w_2)_0$. Agora, pela proposição 1.22, $D(w_1)_0 = D^-(w_0w_1)_0$ e $D(w_2)_0 = D^-(w_0w_2)_0$. Logo, existem $g^{-1} \in S^{-1}$ e $y \in D^-(w_0w_2)$ tais que $g^{-1}y \in D^-(w_0w_1)$, ou seja, $D^-(w_0w_2) \leq D^-(w_0w_1)$. Revertendo o argumento mostra-se a recíproca. \square

Teorema 3.24 *Se $D_{\mathcal{O}}(w_1) \leq D_{\mathcal{O}}(w_2)$ então $D_{\mathcal{O}}(w_1) = D_{\mathcal{O}}(w_2)$.*

Demonstração: Por definição, temos que $D_{\mathcal{O}}(w_1) \leq D_{\mathcal{O}}(w_2)$ se e só se existe $x \in D_{\mathcal{O}}(w_1)$ tal que $\text{fe}(Sx) \cap D_{\mathcal{O}}(w_2) \neq \emptyset$. Neste caso, existe $y \in D_{\mathcal{O}}(w_2)$ tal que $y \in \text{fe}(Sx)$. Logo, $\text{fe}(Sy) \subset \text{fe}(Sx)$ e como $D_{\mathcal{O}}(w_2) \subset \text{fe}(Sy)$, então $D_{\mathcal{O}}(w_2) \subset \text{fe}(Sx)$. Já que $D_{\mathcal{O}}(w_2)$ tem interior não vazio, concluímos que se $D_{\mathcal{O}}(w_1) \leq D_{\mathcal{O}}(w_2)$ então $(S \cdot D_{\mathcal{O}}(w_1)) \cap D_{\mathcal{O}}(w_2) \neq \emptyset$. Portanto, para demonstrar o teorema basta provar que $(S \cdot D_{\mathcal{O}}(w_1)) \cap D_{\mathcal{O}}(w_2) = \emptyset$ sempre que $D_{\mathcal{O}}(w_1) \neq D_{\mathcal{O}}(w_2)$.

Suponha que $S \cdot D_{\mathcal{O}}(w_1) \cap D_{\mathcal{O}}(w_2) \neq \emptyset$. Pela proposição 3.12, temos que $D_{\mathcal{O}}(w_1) \subset D(w_1w_0) \times D(w_1)$ e $D_{\mathcal{O}}(w_2) \subset D(w_2w_0) \times D(w_2)$. Logo, $S \cdot D_{\mathcal{O}}(w_1) \subset SD(w_1w_0) \times SD(w_0)$, o que implica em

$$(SD(w_1w_0) \times SD(w_0)) \cap (D(w_2w_0) \times D(w_2)) \neq \emptyset.$$

Conseqüentemente, devemos ter

$$D(w_1w_0) \leq D(w_2w_0) \quad \text{e} \quad D(w_1) \leq D(w_2). \quad (3.5)$$

Agora, pelo lema anterior, $D(w_1w_0) \leq D(w_2w_0)$ implica em $D^-(w_0w_2w_0) \leq D^-(w_0w_1w_0)$. Assim, pela proposição 1.17 existe $w \in W$ tal que:

1. $w_0w_2w_0 \geq w$ e
2. $w \in W(S^{-1}, A^+)(w_0w_1w_0)$.

Pelo corolário 1.18, temos que (1) implica em $w_2 \geq w_0ww_0$. Além disso, usando a proposição 1.23 obtemos

$$W(S^{-1}, A^+) = W(S^{-1}, w_0A^-w_0) = w_0W(S^{-1}, A^-)w_0 = w_0W(S, A^+)w_0.$$

Logo, (1) e (2) implicam na existência de $w \in W$ satisfazendo:

- i. $w_2 \geq w_0 w w_0$ e
- ii. $w_0 w w_0 \in (w_0 W(S^{-1}, A^+) w_0) w_0 (w_0 w_1 w_0) w_0 = W(S, A^+) w_1$.

Usando novamente a proposição 1.17 concluímos que $D(w_2) \leq D(w_1)$. Assim, para obtermos (3.5) devemos ter $D(w_1) = D(w_2)$. Portanto, pelo teorema 3.21 temos que $D_{\mathcal{O}}(w_1) = D_{\mathcal{O}}(w_2)$.

□

Uma consequencia imediata deste teorema é o seguinte resultado:

Corolário 3.25 *Seja $S \subset G$ um semigrupo com $\text{int}S \neq \emptyset$. Se para algum $h \in R(S)$ existe $g \in S$ tal que $g \cdot \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, w_0) = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, 1)$ então $S = G$.*

Demonstração: De fato, se g e h são como nas hipóteses do corolário então $D_{\mathcal{O}}(w_0) = D_{\mathcal{O}}(1)$ pelo teorema anterior. Logo, pelo teorema 3.21 temos que $D(w_0) = D(1)$, o que implica em $S = G$.

□

Proposição 3.26 *Suponha que $S \neq G$. Então, qualquer que seja $w \in W$, $D_{\mathcal{O}}(w)$ não é um conjunto de controle invariante.*

Demonstração: Todo ponto de $D_{\mathcal{O}}(w)_0$ é da forma

$$(\text{fix}(h, w w_0), \text{fix}(h, w)) \in D(w w_0)_0 \times D(w).$$

Agora, $D(w w_0)$ e $D(w)$ não podem ser ambos invariantes em \mathbb{F} , pois se w e $w w_0$ pertencem a $W(S)$ então $w^{-1} w w_0 = w_0 \in W(S)$, ou seja, $D(w_0) = D(1)$. Mas isso ocorre se e só se $S = G$. Portanto, existe $g \in S$ tal que $g \text{fix}(w w_0, h) \notin D(w w_0)$ ou $g \text{fix}(w, h) \notin D(w)$. Assim, $S \cdot D_{\mathcal{O}}(w)_0$ não pode estar contido em $D(w w_0)_0 \times D(w)_0$ e, em particular, em $D_{\mathcal{O}}(w)_0$.

□

3.2 Domínios de atração

Nesta seção vamos descrever o domínio de atração dos conjuntos de controle em \mathcal{O} . Estes domínios são bem diferentes dos obtidos no caso de variedades flag. Por exemplo, temos que $\mathcal{A}(D(1)) = \mathbb{F}$. Em \mathcal{O} temos que $\mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(w)) \neq \mathcal{O}$ para todo $w \in W$. De fato, como os conjuntos de controle em \mathcal{O} não são comparáveis, a proposição 1.21 implica que o domínio de atração de um conjunto $D_{\mathcal{O}}(w)$ não intercepta nenhum outro conjunto de controle. Assim, $\mathcal{A}(D(w_1))$ está contido no complemento de

$$\bigcup_{D_{\mathcal{O}}(w) \neq D_{\mathcal{O}}(w_1)} D_{\mathcal{O}}(w).$$

Começamos a caracterização dos domínios de atração com o seguinte resultado:

Proposição 3.27 *Identifique \mathcal{O} com o conjunto dos pares de subálgebras parabólicas minimais transversais. Então, $\mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(w)) \subset \mathcal{A}(D(w_0)) \times \mathcal{A}(D(w))$.*

Demonstração: Se $(x, y) \in \mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(w))$, então existe $g \in S$ tal que $g \cdot (x, y) = (gx, gy) \in D_{\mathcal{O}}(w) \subset D(w_0) \times D(w)$. Desta forma, $gx \in D(w_0)$ e $gy \in D(w)$. Logo, $(x, y) \in \mathcal{A}(D(w_0)) \times \mathcal{A}(D(w))$, como havíamos afirmado. \square

Em particular, como $\mathcal{A}(D(1)) = \mathbb{F}$ e $\mathcal{A}(D(w_0)) = D(w_0)$ temos que $\mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(1)) \subset (D(w_0) \times \mathbb{F}) \cap \mathcal{O}$. Mostraremos agora que neste caso vale a inclusão inversa.

Proposição 3.28 $\mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(1)) = (D(w_0) \times \mathbb{F}) \cap \mathcal{O}$.

Demonstração: Assuma que $A^+ \cap \text{int}S \neq \emptyset$ e seja $(x, y) \in (D(w_0) \times \mathbb{F}) \cap \mathcal{O}$. Então, existe $g \in \text{int}S$ tal que $gx = \tilde{w}_0 x_0$. Assim, $g(x, y) = (\tilde{w}_0 x_0, gy) \in \mathcal{O}$, ou seja, gy é transversal a $\tilde{w}_0 x_0$. Como o conjunto dos elementos transversais a $\tilde{w}_0 x_0$ é a célula aberta $N^- x_0$, temos que $gy = nx_0$ para algum $n \in N^-$. Tomando $h \in A^+ \cap \text{int}S$ temos, para qualquer $k > 0$,

$$h^k g(x, y) = h^k(\tilde{w}_0 x_0, nx_0) = (\tilde{w}_0 x_0, h^k n h^{-k} x_0),$$

de onde concluímos que $h^k g(x, y) \rightarrow (\tilde{w}_0 x_0, x_0)$ quando $k \rightarrow \infty$. Como $(\tilde{w}_0 x_0, x_0) \in (D_{\mathcal{O}}(1))_0$ e este conjunto é aberto, então existe $k_0 > 0$ tal que $h^{k_0} g(x, y) \in D_{\mathcal{O}}(1)$.

Portanto, $(x, y) \in \mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(1))$, o que mostra que $(D(w_0) \times \mathbb{F}) \cap \mathcal{O} \subset \mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(1))$. A inclusão inversa foi mostrada na discussão que precede essa proposição. \square

O próximo resultado mostra que o domínio de atração de $D_{\mathcal{O}}(w)$ é dado pela atração à direita de w em $\mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(1))$.

Proposição 3.29 *Para cada $w \in W$ vale a igualdade*

$$\mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(w)) = (\mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(1))) \cdot w.$$

Demonstração: Sejam $w \in W$ e $(x, y) \in \mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(w))$. Pela proposição 1.21 existe $g \in \text{int}S$ tal que $g \cdot (x, y) \in (D_{\mathcal{O}}(w))_0$. Assim, $g \cdot (x, y) = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, w) = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, 1) \cdot w$ para algum $h \in R(S)$ ou, equivalentemente, $(x, y) = (g^{-1} \cdot \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, 1)) \cdot w$. Como $\text{fix}_{\mathcal{O}}(h, 1) \in D_{\mathcal{O}}(1)$ então $g^{-1} \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, 1) \in \mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(1))$. Logo, $(x, y) = (g^{-1} \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, 1)) \cdot w \in (\mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(1))) \cdot w$, o que mostra que $\mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(w)) \subset (\mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(1))) \cdot w$. Para provar a inclusão contrária, tome $(x, y) \in (\mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(1))) \cdot w$. Então, $(x, y) = (x_1, y_1) \cdot w$ para algum $(x_1, y_1) \in \mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(1))$. Pela proposição 1.21 existe $g \in \text{int}S$ tal que $g \cdot (x_1, y_1) \in (D_{\mathcal{O}}(1))_0$, ou seja, $g \cdot (x_1, y_1) = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h_1, 1)$ para algum $h_1 \in R(S)$. Logo, $g \cdot (x, y) = g \cdot ((x_1, y_1) \cdot w) = (g \cdot (x_1, y_1)) \cdot w = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h_1, 1) \cdot w = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h_1, w)$ ou, equivalentemente, $(x, y) = g^{-1} \cdot \text{fix}_{\mathcal{O}}(h_1, w)$. Como $\text{fix}_{\mathcal{O}}(h_1, w) \in D_{\mathcal{O}}(w)$, concluímos que $(x, y) \in \mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(w))$ e fica mostrada a proposição. \square

Vamos agora melhorar a caracterização dos domínios de atração. Mostramos na proposição 3.28 que

$$\mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(1)) = \{(x, y) \in \mathcal{O} : x \in D(w_0)\}.$$

Agora, se $x \in D(w_0)$ então $x = \text{fix}(h, w_0)$ para algum $h \in R(S)$. Considerando uma decomposição $G = KAN^+$, temos que $h \in gA^+g^{-1}$ para algum $g \in G$. Denotemos por N_h^- o subgrupo gN^-g^{-1} . Então, o conjunto dos elementos em \mathbb{F} transversais à $\text{fix}(h, w_0)$ é a célula aberta $N_h^- \text{fix}(h, 1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(1)) &= \{(x, y) \in \mathcal{O} : x \in D(w_0)\} \\ &= \{(\text{fix}(h, w_0), n \text{fix}(h, 1)) : h \in R(S), n \in N_h^-\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{N_h^- \cdot (\text{fix}(h, w_0), \text{fix}(h, 1)) : h \in R(S)\} \\
 &= \{N_h^- \cdot \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, 1) : h \in R(S)\} \\
 &= \bigcup_{h \in R(S)} N_h^- \cdot \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, 1).
 \end{aligned}$$

Como $\mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(w)) = (\mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(1))) \cdot w$, obtemos a seguinte caracterização dos domínios de atração dos conjuntos de controle $D_{\mathcal{O}}(w)$:

Teorema 3.30 *Mantenha as notações acima. Então, para cada $w \in W$ temos que*

$$\mathcal{A}(D_{\mathcal{O}}(w)) = \bigcup_{h \in R(S)} N_h^- \cdot \text{fix}_{\mathcal{O}}(h, w).$$

3.3 Semigrupos maximais do tipo $\{1\}$

Nas seções anteriores a única hipótese exigida sobre o semigrupo $S \subset G$ era que $\text{int}S \neq \emptyset$. Nesta seção usaremos a hipótese adicional de que S é um semigrupo maximal cujo tipo parabólico é a variedade flag maximal. Com essa propriedade, é possível dar uma descrição mais precisa do conjunto de controle contendo os pontos fixos do tipo 1 para elementos hiperbólicos no interior de S : $D_{\mathcal{O}}(1)$ é dado como o produto cartesiano $D(w_0) \times D(1)$, conforme veremos na proposição 3.32.

Lembramos da seção 1.1 que dado um subconjunto $C \subset \mathbb{F}$, o seu dual $C^* \subset \mathbb{F}$ foi definido por

$$C^* = \{\mathfrak{b} \in \mathbb{F} : (\forall \mathfrak{b}' \in C), \mathfrak{b} \top \mathfrak{b}'\}.$$

Quando S é um semigrupo maximal com $W(S) = \{1\}$, temos, pela proposição 1.29 que o conjunto de controle invariante para S^{-1} em \mathbb{F} é dado por $\text{fe}(C^*)$, onde C denota o S -conjunto de controle invariante em \mathbb{F} . Mostraremos aqui que uma dualidade como essa também ocorre entre os conjuntos de controle $D_{\mathcal{O}}(w_0)$ e $D_{\mathcal{O}}(1)$.

Começamos com o seguinte resultado.

Teorema 3.31 *Suponha que S seja o semigrupo de compressão de seu conjunto de controle invariante $D(1)$ em \mathbb{F} . Então,*

$$D_{\mathcal{O}}(1)_0 = D(w_0) \times D(1)_0.$$

Demonstração: Como $S = S_{D(1)}$ então a proposição 1.25 implica que o tipo parabólico de S é a variedade flag maximal \mathbb{F} . Assim, pela proposição 1.28 temos que $D(w_0) \subset (D(1))^*$. Portanto, se $(y, x) \in D(w_0) \times D(1)_0$ então as correspondentes subálgebras parabólicas minimais são transversais. Denotemos por $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ esse par de subálgebras e seja \mathfrak{a}^+ a câmara de Weyl em \mathfrak{g} tal que as raízes negativas sobre \mathfrak{a}^+ determinam \mathfrak{p}_1 e as raízes positivas determinam \mathfrak{p}_2 . Seja ainda $A^+ = \exp \mathfrak{a}^+$ e tomemos $h \in A^+$. Pela escolha de h , temos que $(y, x) = (\text{fix}(h, w_0), \text{fix}(h, 1))$. Denotemos por N_h^- o subgrupo nilpotente associado à subálgebra dada pela soma dos espaços de raízes negativas. Com essa notação, temos que o conjunto dos elementos de \mathbb{F} que são transversais a y é a célula aberta $N_h^- \text{fix}(h, 1)$. Como $y \in D(w_0) \subset D(1)^*$, temos que $D(1) \subset N_h^- \text{fix}(h, 1)$. Assim, para k_0 suficientemente grande $h^{k_0} D(1) \subset D(1)_0$. Como o semigrupo de compressão de $D(1)$ é S , concluímos que $h^{k_0} \in \text{int}S$. Além disso,

$$(y, x) = (\text{fix}(h, w_0), \text{fix}(h, 1)) = (\text{fix}(h^{k_0}, w_0), \text{fix}(h^{k_0}, 1)) = \text{fix}_{\mathcal{O}}(h^{k_0}, 1),$$

pois h e h^{k_0} pertencem à mesma câmara de Weyl. Portanto, $(y, x) \in D_{\mathcal{O}}(1)_0$. \square

O próximo resultado mostra que o próprio conjunto de controle se descreve como um produto cartesiano sempre que isso ocorre com seu conjunto de transitividade.

Proposição 3.32 *Se $D_{\mathcal{O}}(1)_0 = D(w_0) \times D(1)_0$ então $D_{\mathcal{O}}(1) = D(w_0) \times D(1)$.*

Demonstração: Já mostramos que a inclusão $D_{\mathcal{O}}(1) \subset D(w_0) \times D(1)$ é válida em geral. Para mostrar a inclusão contrária, tome $(y, x) \in D(w_0) \times D(1)$. Como $D(1) = \text{fe}(D(1)_0)$, então existe uma seqüência $x_n \rightarrow x$ com $x_n \in D(1)_0$ para todo n . Temos ainda que $D(w_0) = D(w_0)_0$, assim $(y, x_n) \in D(w_0)_0 \times D(1)_0 = D_{\mathcal{O}}(1)_0$ e $(y, x_n) \rightarrow (y, x)$, o que garante que $(y, x) \in \text{fe}D_{\mathcal{O}}(1)_0 \subset \text{fe}(S(z, w))$ para todo $(z, w) \in D_{\mathcal{O}}(1)$. Portanto $(y, x) \in \text{fe}(S(z, w))$ e $\text{fe}(S(x, y)) \subset \text{fe}(S(z, w))$ para todo $(z, w) \in D_{\mathcal{O}}(1)$. Por outro lado, como $D_{\mathcal{O}}(w_0) \subset (D(1))^*$, temos que y e x são transversais. Como $y \in D(w_0)$, então existe $h_1 \in R(S)$ tal que $y = \text{fix}(w_0, h_1)$ e assim o par $(y, x_1) = (\text{fix}(w_0, h_1), \text{fix}(1, h_1)) \in D_{\mathcal{O}}(1)_0$. Uma vez que x e x_1 são transversais a y , ambos pertencem a uma mesma célula aberta σ , cujo atrator para h_1 é $\text{fix}(1, h_1) = x_1$. Logo, $h_1^n(y, x) \rightarrow (y, x_1)$ e consequentemente $(y, x_1) \in \text{fe}(S(y, x))$, o

que implica que $\text{fe}(S(x, y_1) \subset \text{fe}(S(y, x))$ e assim $\text{fe}(S(z, w)) \subset \text{fe}(S(y, x))$ para todo $(z, w) \in D_{\mathcal{O}}(1)$. Desta forma $\text{fe}(S(y, x)) = \text{fe}(S(z, w))$ para todo $(z, w) \in D_{\mathcal{O}}(1)$. Portanto, $D_{\mathcal{O}}(1) \cup \{(y, x)\} \subset \text{fe}(S(z, w))$ para todo $(z, w) \in D_{\mathcal{O}}(1) \cup \{(y, x)\}$ e, pela condição de maximalidade na definição de conjuntos de controle, $(y, x) \in D_{\mathcal{O}}(1)$, conforme o desejado. \square

Quando S é um semigrupo \emptyset -maximal o teorema 1.27 garante que S satisfaz a hipótese do teorema 3.31. Portanto, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.33 *Seja S um semigrupo maximal de tipo \emptyset . Então,*

$$D_{\mathcal{O}}(1)_0 = D(w_0) \times D(1)_0.$$

Consequentemente, vale também a igualdade

$$D_{\mathcal{O}}(1) = D(w_0) \times D(1).$$

Vamos agora introduzir nas órbitas adjuntas conceitos de dualidade análogos aos definidos em variedades flag. Dados $H_1 = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2), H_2 = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) \in \mathcal{O}$, diremos que H_1 é transversal a H_2 se e só se $\mathbf{b}_1 \top \mathbf{c}_1$ e $\mathbf{b}_2 \top \mathbf{c}_2$. Lembrando que um elemento $H \in \mathcal{O}$ é identificado ao par (repulsor (H), atrator(H)) os elementos H_1 e H_2 são transversais se e só se o repulsor de H_1 for transversal ao repulsor de H_2 e o atrator de H_1 for transversal ao atrator de H_2 . Usaremos ainda a notação $H_1 \top H_2$ para indicar esta transversalidade e denotaremos por H^* o conjunto de todos os elementos da órbita que são transversais a H :

$$H^* = \{H_1 \in \mathcal{O} : H \top H_1\}.$$

Se $C \subset \mathcal{O}$ é um subconjunto qualquer, também usaremos a notação C^* para indicar o conjunto dos elementos em \mathcal{O} que são transversais a todos os elementos de C .

$$C^* = \{X \in \mathcal{O} : X \top H \text{ para todo } H \in C\}.$$

Vamos agora descrever o conjunto H^* . Seja $H = (\mathbf{p}^-, \mathbf{p}^+)$. Os elementos $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \in \mathcal{O}$ que são transversais à H são os pares tais que $\mathbf{p}_1 \top \mathbf{p}^-$ e $\mathbf{p}_2 \top \mathbf{p}^+$. Como $\mathbf{p}_1 \top \mathbf{p}^-$ se e só se $\mathbf{p}_1 \in N^- \cdot \mathbf{p}^-$, temos que os pares tais que $\mathbf{p}_1 \top \mathbf{p}^-$ são da forma

$(n \cdot \mathfrak{p}^+, \mathfrak{p}_2)$ com $n \in N^-$ e \mathfrak{p}_2 transversal a $n \cdot \mathfrak{p}^+$. Fixando $n \in N^-$, os elementos em \mathbb{F} que são transversais à $n \cdot \mathfrak{p}^+$ são os elementos da célula aberta $(nN^+n^{-1})n\mathfrak{p}^- = nN^+\mathfrak{p}^-$. Fazendo agora n variar em N^- , concluímos que o conjunto dos elementos de \mathcal{O} cuja primeira coordenada é transversal à \mathfrak{p}^- é dado por

$$N^-N^+(\mathfrak{p}^+, \mathfrak{p}^-) = N^-N^+(\tilde{w}_0\mathfrak{p}^-, \tilde{w}_0\mathfrak{p}^+) = N^-N^+((\mathfrak{p}^-, \mathfrak{p}^+) \cdot w_0) = N^-N^+(H \cdot w_0).$$

Analogamente, os pares $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ tais que $\mathfrak{p}_2 \top \mathfrak{p}^+$ são da forma $(\mathfrak{p}_1, n \cdot \mathfrak{p}^-)$ com $n \in N^+$ e \mathfrak{p}_1 transversal a $n \cdot \mathfrak{p}^-$, de onde concluímos que $\mathfrak{p}_1 \in nN^- \cdot \mathfrak{p}^+$ e, conseqüentemente, $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) \in N^+N^-(\mathfrak{p}^+, \mathfrak{p}^-) = N^+N^-(H \cdot w_0)$.

Portanto

$$H^* = N^+N^-(H \cdot w_0) \cap N^-N^+(H \cdot w_0)$$

Alternativamente, podemos caracterizar H^* descrevendo seu complemento. Um par $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) \in \mathcal{O}$ não será transversal à H se \mathfrak{p}_1 não for transversal à \mathfrak{p}^- ou \mathfrak{p}_2 não for transversal a \mathfrak{p}^+ . Os elementos de \mathbb{F} que não são transversais à \mathfrak{p}^- são dados por $\bigcup_{w \neq 1} N^- \tilde{w} \mathfrak{p}^+$. Portanto, para que um par $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) \in \mathcal{O}$ não tenha a primeira componente transversal à \mathfrak{p}^- ele deve ser da forma $(n w \mathfrak{p}^+, \mathfrak{p}_2)$ com $n \in N^-$, $w \neq 1$ e \mathfrak{p}_2 transversal à $n w \mathfrak{p}^+$. Logo, $\mathfrak{p}_2 \in (n \tilde{w} N^+ \tilde{w}^{-1} n^{-1}) n \tilde{w} \mathfrak{p}^- = n (\tilde{w} N^+ \tilde{w}^{-1}) \tilde{w} \mathfrak{p}^- = n N_w \tilde{w} \mathfrak{p}^-$. Assim, $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) \in N^- N_w^+(\tilde{w} \mathfrak{p}^+, \tilde{w} \mathfrak{p}^-) = N^- N_w^+((\mathfrak{p}^-, \mathfrak{p}^+) \cdot w w_0) = N^- N_w^+(H \cdot w w_0)$, com $w \neq 1$. Usando o mesmo argumento concluímos que para um par $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ não tem a segunda componente transversal à \mathfrak{p}^+ se e só se $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) \in N^+ N_w^-(H \cdot w w_0)$ com $w \neq 1$, onde $N_w^- = \tilde{w} N^- \tilde{w}^{-1}$. Portanto,

$$H^* = \left(\bigcup_{w \neq 1} (N^- N_w^+(H \cdot w w_0) \cup N^+ N_w^-(H \cdot w w_0)) \right)^C.$$

Conforme vimos no teorema 3.33, quando S é maximal com $W(S) = \{1\}$ vale a igualdade $D_{\mathcal{O}}(1) = D(w_0) \times D(1)$. Além disso, pelo teorema 1.29 temos $D(1)^* = D(w_0)$. Com isso, podemos mostrar o seguinte resultado.

Proposição 3.34 *Se S é maximal com $W(S) = \{1\}$ então $D_{\mathcal{O}}(1)^* = D_{\mathcal{O}}(w_0)$.*

Demonstração: De fato, $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) \in D_{\mathcal{O}}(1)^* = (D(w_0) \times D(1))^*$ se e só se $\mathfrak{b}_1 \top \mathfrak{c}_1$ para todo $\mathfrak{c}_1 \in D(w_0)$ e $\mathfrak{b}_2 \top \mathfrak{c}_2$ para todo $\mathfrak{c}_2 \in D(1)$, o que é equivalente à afirmar que $\mathfrak{b}_1 \in D(w_0)^* = D(1)$ e $\mathfrak{b}_2 \in D(1)^* = D(w_0)$, ou seja, $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) \in D(1) \times D(w_0) =$

$D_{\mathcal{O}}(w_0)$. □

Considerando a descrição dos conjuntos H^* , a proposição anterior fornece a seguinte descrição de $D_{\mathcal{O}}(w_0)$:

$$D_{\mathcal{O}}(w_0) = \bigcap_{H \in D_{\mathcal{O}}(1)} ((N_H^- N_H^+(H \cdot w_0)) \cap (N_H^+ N_H^-(H \cdot w_0))),$$

onde N_H^+ e N_H^- denotam os subgrupos nilpotentes associados às raízes positivas e negativas, respectivamente, obtidos em uma decomposição de Iwasawa tomando como câmara positiva a câmara contendo H . De forma equivalente, mantendo fixa uma decomposição $G = KAN^+$, temos que se $H \in g \cdot \mathfrak{a}^+$ então $N_H^+ = gN^+g^{-1}$ e $N_H^- = gN^-g^{-1}$.

Exemplo 3.35 *Vamos considerar o caso particular em que $G = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$. Temos que $\mathbb{F} = \mathbb{RP}^1$ e que as células de Bruhat são os complementares de conjuntos unitários. Por isso, um ponto $\mathfrak{p} \in \mathbb{F}$ é transversal à todo ponto $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}$. Tomando a decomposição $\mathfrak{sl}(2) = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$, onde $\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathfrak{n}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, temos que $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ é identificado ao par $(\mathfrak{p}^-, \mathfrak{p}^+)$ e $W = \{1, w_0\}$. Assim,*

$$H^* = (N^-(H \cdot w_0 w_0) \cup N^+(H \cdot w_0 w_0))^C = (N^- \cdot H \cup N^+ \cdot H)^C.$$

Tomando como base de $\mathfrak{sl}(2)$ o conjunto $\{H, T, U\}$ onde

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

temos que a órbita através de H é descrita como o hiperbolóide $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Além disso,

$$\begin{aligned} N^- \cdot H &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & -1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{(1, x, x) : x \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

enquanto que

$$\begin{aligned} N^+ \cdot H &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{(1, -y, y) : y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Denotaremos por $B(\cdot, \cdot)$ a forma de Cartan-Killing. Observamos que se $X = \begin{pmatrix} h & t-u \\ t+u & -h \end{pmatrix} \in \mathcal{O}$, então

$$B(H, X) = 4\text{tr}(HX) = 4\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & t-u \\ t+u & -h \end{pmatrix} = 8h$$

e que

$$B(H, H) = 8.$$

Assim,

$$B(H, X) = B(H, H) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & t-u \\ t+u & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $X \in \mathcal{O}$, devemos ter $1+t^2-u^2 = 1$, ou seja, $t = \pm u$. Assim, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & -1 \end{pmatrix}$

ou $X = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ou seja,

$$B(H, X) = B(H, H) \Leftrightarrow X \in N^\pm \cdot H.$$

Portanto:

$$H^* = \{X \in \mathcal{O} : B(H, X) = B(H, H)\}^C$$

ou ainda, definindo $f_H : G \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_H(g) = B(H, \text{Ad}(g)H)$, temos que

$$H^* = \{\text{Ad}(g)H : f_H(g) = f_H(1)\}^C.$$

Capítulo 4

Conjuntos de controle em $G/M_\Theta A_\Theta$

Neste capítulo vamos estudar os conjuntos de controle nas órbitas de elementos Θ -hiperbólicos. Os conjuntos de controle para a ação de S nestas variedades serão descritos de maneira semelhante à descrição dada no capítulo anterior para órbitas de elementos hiperbólicos. Em particular, mostraremos que quando Θ é o tipo parabólico do semigrupo então o conjunto de controle contendo os pontos fixos do tipo 1 é descrito como um produto cartesiano e é o dual do conjunto de controle contendo os pontos fixos do tipo w_0 .

4.1 A órbita aberta

Seja $H \in \mathfrak{a}$ não necessariamente hiperbólico. Assuma sem perda de generalidade que $H \in \text{fe}\mathfrak{a}^+$ e seja Σ o sistema simples de raízes associado a \mathfrak{a}^+ . Ponha

$$\Theta = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H) = 0\}$$

e considere a ação diagonal de G em $\mathbb{F}_{\Theta^*} \times \mathbb{F}_\Theta$. Analogamente ao caso de $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$, as G -órbitas, que são determinadas pelas órbitas da ação de P_Θ em \mathbb{F}_{Θ^*} , são da forma $G \cdot (\tilde{w}\tilde{w}_0\xi_0, \tilde{w}\eta_0)$, $w \in W/W_\Theta$, onde $\xi_0 = P_{\Theta^*}$ e $\eta = P_\Theta$ denotam a origem em \mathbb{F}_{Θ^*} e \mathbb{F}_Θ , respectivamente. Uma primeira propriedade da órbita $G \cdot (\tilde{w}_0\xi_0, \eta_0)$ é estabelecida na seguinte proposição.

Proposição 4.1 *A órbita $G \cdot (w_0\xi_0, \eta_0)$ é aberta e densa em $\mathbb{F}_{\Theta^*} \times \mathbb{F}_\Theta$.*

Demonstração: Como $w_0(-\Theta^*) = \Theta$, temos que $\tilde{w}_0 \cdot \mathfrak{n}^-(\Theta^*) = \mathfrak{n}^+(\Theta)$. Além disso, temos que $\tilde{w}_0 \cdot \mathfrak{p}^+ = \mathfrak{p}^-$. Portanto, a subálgebra de isotropia da ação de G em \mathbb{F}_{Θ^*} em $w_0\xi_0$ é dada por

$$\text{Ad}(w_0)\mathfrak{p}_{\Theta^*} = \text{Ad}(w_0)(\mathfrak{n}^-(\Theta^*) \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+) = \mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^-$$

enquanto que a subálgebra de isotropia em η_0 é $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$. Desta forma, a subálgebra de isotropia para a ação diagonal de G em $(w_0\xi_0, \eta_0)$ é $\mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)$. Como $\mathfrak{n}_\Theta^+ \oplus \mathfrak{n}_\Theta^-$ complementa tal subálgebra, então o espaço tangente à órbita é identificado com $\mathfrak{n}_\Theta^+ \oplus \mathfrak{n}_\Theta^-$, cuja dimensão coincide com a dimensão de $\mathbb{F}_{\Theta^*} \times \mathbb{F}_\Theta$. Portanto, $G \cdot (w_0\xi_0, \eta_0)$ é aberta em $\mathbb{F}_{\Theta^*} \times \mathbb{F}_\Theta$. Como as dimensões das demais órbitas são menores que a de $\mathbb{F}_{\Theta^*} \times \mathbb{F}_\Theta$ e o número destas é finito, nenhuma das outras órbitas é aberta e a órbita aberta é densa. \square

Assim como no capítulo anterior, a órbita aberta da ação diagonal de G em $\mathbb{F}_{\Theta^*} \times \mathbb{F}_\Theta$ será chamada de órbita principal e se identifica ao conjunto dos pares de subálgebras parabólicas $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) \in \mathbb{F}_{\Theta^*} \times \mathbb{F}_\Theta$ tais que \mathfrak{q}_1 é transversal a \mathfrak{q}_2 (ver definição 1.4).

Vamos agora identificar $G \cdot (\tilde{w}_0\xi_0, \eta_0)$ com a órbita adjunta através de H . Para isso, consideremos a ação adjunta de G em \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned} G \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ (\mathfrak{g}, X) &\mapsto g \cdot X \end{aligned}$$

A subálgebra de isotropia em H é o centralizador $\mathfrak{z}(H) = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(X)H = 0\}$ de H em \mathfrak{g} , o qual é dado por

$$\mathfrak{z}(H) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum \mathfrak{g}_\alpha,$$

com a soma se estendendo às raízes $\alpha \in \Pi$ tais que $\alpha(H) = 0$. De fato, \mathfrak{g} se decompõe como $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$. Assim, se $X \in \mathfrak{z}(H)$, escreva $X = \tilde{X} + X_1 + \cdots + X_k$, com $\tilde{X} \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ e $X_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$, todos não-nulos. Então,

$$\begin{aligned} 0 &= \text{ad}(H)X = \text{ad}(H)\tilde{X} + \text{ad}(H)X_1 + \cdots + \text{ad}(H)X_n \\ &= \alpha_1(H)X_1 + \cdots + \alpha_n(H)X_n. \end{aligned}$$

Se $\alpha_i(H) \neq 0$ para algum i , digamos $i = 1$, então

$$X_1 = -\frac{\alpha_2(H)}{\alpha_1(H)}X_2 - \dots - \frac{\alpha_n(H)}{\alpha_1(H)}X_n,$$

o que não pode ocorrer pois a decomposição de \mathfrak{g} é dada como soma direta dos auto-espacos, o que demonstra a afirmação. Como $\Theta = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H) = 0\}$, temos que $\alpha(H) = 0$ se e só se $\pm\alpha \in \langle \Theta \rangle$. Portanto,

$$\mathfrak{z}(H) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta) = \text{Ad}(w_0)\mathfrak{p}_{\Theta^*} \cap \mathfrak{p}_\Theta.$$

Desta forma, a subálgebra de isotropia em H para a ação adjunta de G em \mathfrak{g} coincide com a subálgebra de isotropia em $(\tilde{w}_0\xi_0, \eta_0)$ para a ação diagonal de G em $\mathbb{F}_{\Theta^*} \times \mathbb{F}_\Theta$. Consequentemente, os correspondentes subgrupos de isotropia também coincidem e assim

$$G \cdot (\tilde{w}_0\xi_0, \eta_0) \approx G \cdot H.$$

Conforme vimos na seção 1.1, o centralizador de H em G é o subgrupo fechado $M_\Theta A_\Theta$. Em resumo, temos o seguinte resultado.

Proposição 4.2 *Mantenha as definições e notações acima. A órbita adjunta através de H identifica-se ao espaço homogêneo $G/M_\Theta A_\Theta$, ou ainda ao conjunto dos pares de subálgebras parabólicas transversais em $\mathbb{F}_{\Theta^*} \times \mathbb{F}_\Theta$, a qual é dada pela órbita principal $G \cdot (\tilde{w}_0\mathfrak{p}_{\Theta^*}, \mathfrak{p}_\Theta) \leftrightarrow G \cdot (w_0\xi_0, \eta_0)$.*

Notação: Denotaremos por \mathcal{O}_Θ a órbita adjunta através de H , onde, Θ é o subconjunto das raízes simples que se anulam em H . Denotaremos por π_Θ e π_{Θ^*} as projeções de \mathbb{F} em \mathbb{F}_Θ e \mathbb{F}_{Θ^*} , respectivamente. A projeção $G/MA \rightarrow G/M_\Theta A_\Theta$ será denotada por π^Θ .

4.2 Conjuntos de controle

Vamos agora descrever os conjuntos de controle para a ação de S em $G/M_\Theta A_\Theta$. De acordo com [4], se $E \subset \mathbb{F}_\Theta$ é um conjunto de controle então existe um conjunto de controle $D(w) \subset \mathbb{F}$ com $\pi_\Theta((D(w))_0) = E_0$. Usaremos a notação $E = D^\Theta(w)$ sempre que $E_0 = \pi_\Theta((D(w))_0)$.

Começamos a descrição dos conjuntos de controle sobre \mathcal{O}_Θ com a seguinte proposição.

Proposição 4.3 *Se $E \subset \mathcal{O}_\Theta$ é um conjunto de controle, então existem $w_1, w_2 \in W$ tais que*

$$E_0 \subset D^{\Theta^*}(w_1)_0 \times D^\Theta(w_2)_0.$$

Demonstração: Sejam $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2) \in E_0$. Por definição, existem $h_1, h_2 \in \text{int}S$ tais que $h_1(\xi_1, \eta_1) = (\xi_1, \eta_1)$ e $h_2(\xi_2, \eta_2) = (\xi_2, \eta_2)$. Desta forma, $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{F}_{\Theta^*}$ e $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{F}_\Theta$ são pontos fixos para elementos no interior de S e, conseqüentemente, pertencem ao conjunto de transitividade de conjuntos de controle sobre \mathbb{F}_{Θ^*} e \mathbb{F}_Θ respectivamente. Como existem g_1 e g_2 no interior de S tais que $g_1(\xi_1, \eta_1) = (\xi_2, \eta_2)$ e $g_2(\xi_2, \eta_2) = (\xi_1, \eta_1)$, temos que $g_1\xi_1 = \xi_2$ e $g_2\xi_2 = \xi_1$. Logo, existe um conjunto de controle $D^{\Theta^*}(w_1)$ contendo ξ_1 e ξ_2 em seu conjunto de transitividade. Analogamente mostramos que η_1 e η_2 pertencem a um mesmo conjunto de controle $D^\Theta(w_2)$. Portanto, $E_0 \subset D^{\Theta^*}(w_1)_0 \times D^\Theta(w_2)_0$. \square

Para uma descrição dos conjuntos de controle em \mathcal{O}_Θ é necessário um estudo dos pontos fixos para elementos no interior de S nas fibras $(\pi^\Theta)^{-1}(\{y\})$, onde $y \in \mathcal{O}_\Theta$ é ponto fixo para algum $g \in \text{int}S$. Essa descrição, bem como a notação utilizada, é semelhante a feita em [4] para pontos fixos em \mathbb{F}_Θ .

Seja $y \in \mathcal{O}_\Theta$ um ponto fixo para algum $g \in \text{int}S$. Assuma sem perda de generalidade que $y = M_\Theta A_\Theta$. Assim, $M_\Theta A_\Theta \cap \text{int}S \neq \emptyset$. Denotando por M_Θ^0 a componente conexa da identidade de M_Θ , temos que $S_\Theta := M_\Theta^0 A_\Theta \cap \text{int}S \neq \emptyset$, pois o número de componentes conexas de M_Θ é finito. Como A_Θ é um subgrupo normal de $M_\Theta^0 A_\Theta$ e A_Θ fixa MA , temos que a ação de S_Θ em $(\pi^\Theta)^{-1}(\{y\}) = M_\Theta A_\Theta / MA$ depende somente da ação de $\Gamma_\Theta = S_\Theta / A_\Theta$, o qual é um semigrupo com interior não vazio em $M_\Theta^0 A_\Theta / A_\Theta$. Denotemos por $\mathfrak{g}(\Theta)$ a subálgebra gerada por $\mathfrak{n}^+(\Theta) + \mathfrak{n}^-(\Theta)$ e por $Z(\mathfrak{g}(\Theta))$ o centralizador de $\mathfrak{g}(\Theta)$ em M_Θ^0 . Então, a álgebra de Lie de $G(\Theta) := M_\Theta^0 / Z(\mathfrak{g}(\Theta))$ coincide com $\mathfrak{g}(\Theta)$, a qual é semi-simples. Como $Z(\mathfrak{g}(\Theta))$ é um subgrupo normal de M_Θ^0 contido em M , temos que $Z(\mathfrak{g}(\Theta)) \cdot MA = MA$ e assim sua ação sobre $(\pi^\Theta)^{-1}(\{y\})$ é trivial. Logo, a ação de Γ_Θ nesta fibra depende somente da ação de $S(\Theta) = \Gamma_\Theta / Z(\mathfrak{g}(\Theta))$, o qual é um semigrupo com interior não vazio em $G(\Theta)$.

Seja agora $H \in \mathfrak{g}(\Theta)$ um elemento hiperbólico. Pondo $A(\Theta) = A \cap M_\Theta$, temos

$$\frac{M_\Theta A_\Theta}{MA} \approx \frac{M_\Theta}{MA(\Theta)} \approx \frac{M_\Theta^0}{M^0 A(\Theta)} = \frac{\frac{M_\Theta^0}{Z(\mathfrak{g}(\Theta))}}{\frac{M^0 A(\Theta)}{Z(\mathfrak{g}(\Theta))}} = \frac{G(\Theta)}{Z_{G(\Theta)}(H)},$$

onde $Z_{G(\Theta)}(H)$ denota o centralizador de H em $G(\Theta)$. Desta forma, a fibra $(\pi^\Theta)^{-1}(\{y\})$ é uma órbita adjunta de $G(\Theta)$. Assim, tomando h hiperbólico em $\text{int}(S(\Theta))$, garantimos a existência de pontos fixos para elementos hiperbólicos no interior de S nesta fibra. Portanto,

$$y = \pi^\Theta(\text{fix}_\mathcal{O}(h, w)) = \pi^\Theta(\text{fix}(h, ww_0), \text{fix}(h, w))$$

para algum $w \in W$. Além disso, como o grupo de Weyl de $G(\Theta)$ é W_Θ , o número de tais pontos fixos é $|W_\Theta|$.

Com essa descrição podemos mostrar o seguinte resultado.

Teorema 4.4 *Se E é um conjunto de controle para S sobre \mathcal{O}_Θ então existe $w' \in W$ tal que $\pi^\Theta(D_\mathcal{O}(w)_0) = E_0$ para todo $w \in w'W_\Theta$.*

Demonstração: Seja $(\xi, \eta) \in E_0$. Do que vimos no parágrafo anterior, existe $h \in \text{int}S$ tal que $(\xi, \eta) = \pi^\Theta(\text{fix}(h, ww_0), \text{fix}(h, w))$ para algum $w \in W$. Além disso, o número de h -pontos fixos na fibra $(\pi^\Theta)^{-1}(\xi, \eta)$ é dado por $|W_\Theta|$. Por outro lado, como η pertence ao conjunto de transitividade de um conjunto de controle sobre \mathbb{F}_Θ , a proposição 1.12 afirma que os h -pontos fixos projetando-se em η são da forma $\text{fix}(h, w)$, com $w \in w'$ para algum $w'W_\Theta$. Logo, os h -pontos fixos projetando-se sobre (ξ, η) são da forma $(\text{fix}(h, ww_0), \text{fix}(h, w))$ com $w \in w'W_\Theta$. Se (ξ_1, η_1) é outro ponto de E_0 , então η e η_1 pertencem ao mesmo conjunto de controle sobre \mathbb{F}_Θ . Desta forma, usando novamente a proposição 1.12 e o fato de que o número de pontos fixos para um elemento hiperbólico $h_1 \in \text{int}S$ é $|W_\Theta|$, temos que $(\xi_1, \eta_1) = \pi^\Theta(\text{fix}(h_1, ww_0), \text{fix}(h_1, w))$ para todo $w \in w'W_\Theta$. Como $(\text{fix}(h, ww_0), \text{fix}(h, w)) \in D_\mathcal{O}(w)_0$ para todo $h \in R(S)$, temos que $E_0 = \pi^\Theta(D_\mathcal{O}(w)_0)$ para todo $w \in w'W_\Theta$, o que conclui a demonstração. \square

Notação: Denotaremos por $D_\mathcal{O}^\Theta(w)$ o conjunto de controle sobre \mathcal{O}_Θ tal que

$$\pi^\Theta((D_\mathcal{O}(w))_0) = D_\mathcal{O}^\Theta(w)_0.$$

Observamos que pelo teorema anterior todo conjunto de controle em \mathcal{O}_Θ é da forma $D_{\mathcal{O}}^\Theta(w)$ para algum $w \in W$.

Do teorema anterior segue o seguinte resultado, que melhora a proposição 4.3.

Corolário 4.5 $D_{\mathcal{O}}^\Theta(w)_0 \subset D^{\Theta^*}(ww_0)_0 \times D^\Theta(w)_0$ para todo $w \in W$.

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{O}}^\Theta(w)_0 &= \pi^\Theta(D_{\mathcal{O}}(w)_0) \subset \pi^\Theta(D(ww_0)_0 \times D(w)_0) \\ &\subset \pi_{\Theta^*}(D(ww_0)_0) \times \pi_\Theta(D(w)_0) = D^{\Theta^*}(ww_0)_0 \times D^\Theta(w)_0 \end{aligned}$$

para todo $w \in W$. □

Usando a mesma demonstração da proposição 3.6, mostramos que a inclusão do corolário anterior vale também para o próprio conjunto de controle, e não apenas para seu conjunto de transitividade.

Corolário 4.6 Para todo $w \in W$, $D_{\mathcal{O}}^\Theta(w) \subset D^{\Theta^*}(ww_0) \times D^\Theta(w)$.

No caso particular em que Θ coincide com o tipo parabólico $\Theta(S)$ do semigrupo temos que o conjunto de controle $D_{\mathcal{O}}(1)$ é essencialmente dado pela imagem inversa do conjunto de controle $D_{\mathcal{O}}^\Theta(1)$, conforme mostra o seguinte teorema.

Teorema 4.7 Se $\Theta = \Theta(S)$ então $(\pi^\Theta)^{-1}(D_{\mathcal{O}}^\Theta(1)_0) = D_{\mathcal{O}}(1)_0$.

Demonstração: Foi mostrado em [4], pg 75, que quando $\Theta = \Theta(S)$ a igualdade $G(\Theta) = S(\Theta)$ ocorre. Portanto, S age transitivamente em toda fibra $(\pi^\Theta)^{-1}(\{y\})$ para $y \in D_{\mathcal{O}}^\Theta(1)_0$. Sejam $x_1, x_2 \in (\pi^\Theta)^{-1}(D_{\mathcal{O}}^\Theta(1)_0)$. Como $\pi(x_1)$ e $\pi(x_2)$ pertencem a $D_{\mathcal{O}}^\Theta(1)_0$, existe $g \in \text{int}S$ tal que $\pi^\Theta(gx_1) = g\pi^\Theta(x_1) = \pi^\Theta(x_2)$. Consequentemente, $gx_1 \in (\pi^\Theta)^{-1}(\{x_2\})$ e, como S age transitivamente nesta fibra, existe $g_1 \in \text{int}S$ tal que $g_1gx_1 = x_2$. Analogamente determinamos $g_2 \in \text{int}S$ tal que $g_2x_2 = x_1$, o que mostra que $(\pi^\Theta)^{-1}(D_{\mathcal{O}}^\Theta(1)_0) \subset D_{\mathcal{O}}(1)_0$. Por outro lado, como $\pi^\Theta(D_{\mathcal{O}}(1)_0) = D_{\mathcal{O}}^\Theta(1)_0$, segue que $D_{\mathcal{O}}(1)_0 \subset (\pi^\Theta)^{-1}(D_{\mathcal{O}}^\Theta(1)_0)$, o que conclui a demonstração. □

4.3 Semigrupos maximais

Nesta seção mostraremos que se S é o semigrupo de compressão de seu conjunto de controle invariante C_Θ na variedade flag $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$, então o conjunto de controle $D_\Theta^\Theta(1)$ sobre \mathcal{O}_Θ contendo os h -pontos fixos do tipo 1 para $h \in R(S)$ é descrito como um produto cartesiano. Foi mostrado em [5] que quando C_Θ é \mathcal{B} -convexo, S_{C_Θ} é maximal. Assim, o resultado aqui demonstrado afirma que o conjunto de controle $D_\Theta^\Theta(1)$ para semigrupos maximais de tipo Θ se descreve como um produto cartesiano. Outro resultado importante é a recíproca deste fato: se $D_\Theta^\Theta(1)$ é um produto cartesiano, então S é maximal.

Lembramos da seção 1.1 que dado um conjunto $C \subset \mathbb{F}_\Theta$ seu dual $C^* \subset \mathbb{F}_{\Theta^*}$ é definido por

$$C^* = \{\mathfrak{q} \in \mathbb{F}_{\Theta^*} : \text{para todo } \mathfrak{q}' \in C, \mathfrak{q} \top \mathfrak{q}'\}.$$

Assim como fizemos na seção 3.3 vamos introduzir em \mathcal{O}_Θ conceitos de transversalidade análogos aos dados em [5] para variedades flag. Primeiramente, definimos a *órbita dual* a \mathcal{O}_Θ como o conjunto dos pares de subálgebras parabólicas $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) \in \mathbb{F}_\Theta \times \mathbb{F}_{\Theta^*}$ tais que $\mathfrak{q}_1 \top \mathfrak{q}_2$, a qual denotaremos por \mathcal{O}_{Θ^*} . Diremos que $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) \in \mathcal{O}_\Theta$ e $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) \in \mathcal{O}_{\Theta^*}$ são transversais se $\mathfrak{p}_1 \top \mathfrak{q}_1$ e $\mathfrak{p}_2 \top \mathfrak{q}_2$. Usaremos as mesmas notações utilizadas no caso de variedade flag para indicar o conjunto de elementos transversais a um dado par $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) \in \mathcal{O}_\Theta$ e o dual de um subconjunto $C \subset \mathcal{O}_\Theta$. A fibração $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_{\Theta^*}$ será indicada por π^{Θ^*} .

Se S é o semigrupo de compressão de seu conjunto de controle invariante sobre a variedade flag $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$, então o conjunto de transitividade do conjunto de controle contendo os pontos fixos do tipo 1 em $G/M_\Theta A_\Theta$ é dado como um produto cartesiano, conforme mostra a seguinte proposição.

Proposição 4.8 *Suponha que S seja o semigrupo de compressão de seu conjunto de controle invariante $D^\Theta(1)$ em \mathbb{F}_Θ . Então,*

$$\pi^\Theta((D_\mathcal{O}(1))_0) = D^\Theta(w_0) \times D^\Theta(1)_0.$$

Demonstração: Pela proposição 1.25 temos que o tipo parabólico de S é Θ . Logo, a proposição 1.28 implica que se $(\xi, \eta) \in D^\Theta(w_0) \times D^\Theta(1)_0$ então as subálgebras parabólicas correspondentes são transversais. Assim, $\eta \in \sigma(\xi)$. Seja $x \in \pi_{\Theta^*}^{-1}\{\xi\}$.

Como $\pi_{\Theta^*}(x) = \xi$ e $\sigma(\pi_{\Theta^*})(x) = \pi_\Theta(\sigma(x))$ (ver lema 1.5), então existe $y \in \sigma(x)$ tal que $\eta = \pi_\Theta(y)$. Logo existe um par $(x, y) \in \mathcal{O}$ com $\pi^\Theta(x, y) = (\xi, \eta)$. Tome h na câmara positiva definida por (x, y) . Como $\xi \in (D^\Theta(1))_0$ e ξ é ponto fixo do tipo 1 para h , temos que $D^\Theta(1)$ está contida na célula aberta determinada por h . Assim, existe $k > 0$ tal que $h^k D^\Theta(1) \subset (D^\Theta(1))_0$. Com a hipótese de que $S = S_{D^\Theta(1)}$, concluímos que $h_1 = h^k \in \text{int}S$. Como $(x, y) = (\text{fix}(h_1, w_0), \text{fix}(h_1, 1))$, temos que $(x, y) \in (D_{\mathcal{O}}(1))_0$, o que conclui a demonstração. \square

Observação 4.9 *Com o mesmo argumento da demonstração acima mostra-se que se $D_{\mathcal{O}}^{\Theta^*}(w_0) \subset \mathcal{O}_{\Theta^*}$ é a projeção de $D_{\mathcal{O}}(w_0)$ então $D_{\mathcal{O}}^{\Theta^*}(w_0) = C_\Theta \times C_{\Theta^*}^-$.*

Sejam $\Theta_1 \subset \Theta_2$. Então $M_{\Theta_1}A_{\Theta_1} \subset M_{\Theta_2}A_{\Theta_2}$ e podemos considerar a fibração $\pi^{\Theta_1, \Theta_2} : \mathcal{O}_{\Theta_1} \rightarrow \mathcal{O}_{\Theta_2}$. Como $D_{\mathcal{O}}^{\Theta_1}(1)_0$ projeta-se sobre $D_{\mathcal{O}}^{\Theta_2}(1)_0$ temos a seguinte

Proposição 4.10 *Se na órbita adjunta \mathcal{O}_Θ ocorre $D_{\mathcal{O}}^\Theta(1)_0 = C_{\Theta^*}^- \times (C_\Theta)_0$ como na conclusão da proposição 4.8, então para todo Θ_1 com $\Theta \subset \Theta_1$ temos que $D_{\mathcal{O}}^{\Theta_1}(1)_0 = C_{\Theta_1^*}^- \times (C_{\Theta_1})_0$.*

Demonstração: De fato, temos que

$$D_{\mathcal{O}}^{\Theta_1}(1)_0 = \pi^{\Theta, \Theta_2}(D_{\mathcal{O}}^\Theta(1)_0) = \pi^{\Theta, \Theta_2}(C_{\Theta^*}^- \times (C_\Theta)_0) = C_{\Theta_1^*}^- \times (C_{\Theta_1})_0,$$

o que demonstra a afirmação. \square

Com a mesma demonstração utilizada na proposição 3.14, podemos estender o resultado do teorema 4.8 para $D_{\mathcal{O}}^\Theta(1)$.

Proposição 4.11 *Com as mesmas hipóteses do teorema 4.8 vale a igualdade*

$$D_{\mathcal{O}}^\Theta(1) = C_{\Theta^*}^- \times (C_\Theta).$$

Temos o seguinte resultado para semigrupo maximais de tipo Θ .

Proposição 4.12 *Seja $C_\Theta \subset \mathbb{F}_\Theta$ um conjunto admissível com $C_\Theta = \text{fe}(\text{int}C_\Theta)$ e $S = S_{C_\Theta}$. Então, C_Θ é \mathcal{B} -convexo se, e somente se, $D_{\mathcal{O}}^\Theta(1) = C_{\Theta^*}^- \times C_\Theta$, $D_{\mathcal{O}}^{\Theta^*}(w_0) = C_\Theta \times C_{\Theta^*}^-$ e $(D_{\mathcal{O}}^\Theta(1))^* = D_{\mathcal{O}}^{\Theta^*}(w_0)$, onde $C_{\Theta^*}^-$ é o conjunto de controle minimal para S em \mathbb{F}_{Θ^*} .*

Demonstração:

Assuma que C_Θ é \mathcal{B} -convexo. Como $S = S_{C_\Theta}$, temos que o tipo parabólico de S é Θ e que C_Θ é o conjunto de controle invariante para S em \mathbb{F}_Θ . Assim, a proposição 4.8 garante que $D_{\mathcal{O}}^\Theta(1) = C_{\Theta^*}^- \times C_\Theta$ e $D_{\mathcal{O}}^{\Theta^*}(w_0) = C_\Theta \times C_{\Theta^*}^-$. Além disso, temos pela proposição 1.27 S é Θ -maximal e portanto $(C_\Theta)^* = C_{\Theta^*}^-$ (ver proposição 1.29) e $(C_{\Theta^*}^-)^* = (C_\Theta)^{**} = C_\Theta$. Como

$$\begin{aligned} (D_{\mathcal{O}}^\Theta(1))^* &= \{(\xi, \eta) \in \mathcal{O}_{\Theta^*} : \xi \top \xi_1 \forall \xi_1 \in C_{\Theta^*}^- \text{ e } \eta \top \eta_1 \forall \eta_1 \in C_\Theta\} \\ &= \{(\xi, \eta) \in \mathcal{O}_{\Theta^*} : \xi \in (C_{\Theta^*}^-)^* \text{ e } \eta \in (C_\Theta)^*\}, \end{aligned}$$

temos que $(D_{\mathcal{O}}^\Theta(1))^* = ((C_{\Theta^*}^-)^* \times (C_\Theta)^*) \cap \mathcal{O}_{\Theta^*} = (C_\Theta \times C_{\Theta^*}^-) \cap \mathcal{O}_{\Theta^*}$. Mas $C_\Theta \times C_{\Theta^*}^- \subset \mathcal{O}_{\Theta^*}$, pois $C_\Theta \times C_{\Theta^*}^- = D_{\mathcal{O}}^{\Theta^*}(w_0)$ é um conjunto de controle sobre \mathcal{O}_{Θ^*} . Assim, $(D_{\mathcal{O}}^\Theta(1))^* = C_\Theta \times C_{\Theta^*}^- = D_{\mathcal{O}}^{\Theta^*}(w_0)$.

Reciprocamente, assuma que $D_{\mathcal{O}}^\Theta(1) = C_{\Theta^*}^- \times C_\Theta$, $D_{\mathcal{O}}^{\Theta^*}(w_0) = C_\Theta \times C_{\Theta^*}^-$ e $(D_{\mathcal{O}}^{\Theta^*}(w_0))^* = D_{\mathcal{O}}^\Theta(1)$. A igualdade

$$(D_{\mathcal{O}}^\Theta(1))^* = \{(\xi, \eta) \in \mathcal{O}_{\Theta^*} : \xi \in (C_{\Theta^*}^-)^* \text{ e } \eta \in (C_\Theta)^*\} = C_\Theta \times C_{\Theta^*}^-$$

implica em $(C_{\Theta^*}^-)^* = C_\Theta$ e $(C_\Theta)^* = C_{\Theta^*}^-$. Portanto, $((C_\Theta)^*)^* = (C_{\Theta^*}^-)^* = C_\Theta$, ou seja, C_Θ é \mathcal{B} -convexo. \square

Capítulo 5

Compactificação Ordenada de Semigrupos

Sejam G um grupo de Lie semi-simples, conexo, não-compacto e com centro finito, $C \subset \mathbb{F}$ um subconjunto fechado e com interior não vazio e $S = S_C$ o semigrupo de compressão de C . Denotemos por $\mathcal{F}(X)$ o conjunto dos subconjuntos fechados de um espaço topológico X , munido da topologia de Vietoris (ver seção 1.3). Denotemos por $H := S \cap S^{-1}$ o grupo das unidades de S e consideremos a aplicação $\eta : G \rightarrow \mathcal{F}(G)$, $g \mapsto gS^{-1}$. Veremos neste capítulo que $\text{fe}(\eta(G))$ é uma compactificação de G/H e que se G tem posto 1 então o conjunto $G_+^{cpt} := \text{fe}(\eta(S)) \subset \mathcal{F}(G)$ é homeomorfo a $\text{fe}\{gC : g \in S\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{F})$. Na última seção faremos uma realização geométrica do conjunto $\text{fe}\{gC : g \in S\}$ no caso em que $G = \text{Sl}(2, \mathbb{R})$ e S é o semigrupo das matrizes com todas as entradas não negativas.

5.1 A Compactificação Ordenada de G/H

Dado um subconjunto $A \subset G$, definimos

$$\downarrow A = \{g \in G : gS \cap A \neq \emptyset\}.$$

Temos o seguinte resultado:

Lema 5.1 1. O conjunto $\mathcal{F}_\downarrow(G) := \{F \in \mathcal{F}(G) : \downarrow F = F\}$ é fechado.

2. O conjunto $\mathcal{F}_\downarrow(G/H) := \{F \in \mathcal{F}(G/H) : \downarrow F = F\}$ é fechado.

Demonstração:

1. Observamos primeiramente que $gS \cap F \neq \emptyset$ se e só se existem $s \in S$ e $f \in F$ tais que $gs = f$, ou seja, $g = fs^{-1}$, o que equivale a dizer que $g \in FS^{-1}$. Assim $\downarrow F = F$ se, e somente se, $FS \subset F$ para todo $s \in S^{-1}$. Para cada $s \in S^{-1}$, ponha:

$$\mathcal{F}_s := \{F \in \mathcal{F}(G) : FS \subset F\}.$$

Pelo lema 1.30, \mathcal{F}_s é fechado para todo $s \in S^{-1}$. Portanto,

$$\mathcal{F}_\downarrow(G) = \bigcap_{s \in S^{-1}} \mathcal{F}_s$$

é fechado.

2. Isso segue diretamente da proposição 1.33 e do item 1.

□

Seja

$$\begin{aligned} \eta : G &\rightarrow \mathcal{F}(G) \\ g &\mapsto gS^{-1} \end{aligned}.$$

Pela proposição 1.31, temos que η é uma aplicação contínua. Além disso, como η é constante sobre as classes $g(S \cap S^{-1})$ de $H := (S \cap S^{-1})$ em G , então η se fatora a uma aplicação $\bar{\eta} : G/H \rightarrow \mathcal{F}(G)$. Sejam agora $a, b \in G$ tais que $\eta(a) = \eta(b)$. Assim, $aS^{-1} = bS^{-1}$. Como $1 \in S$, então $a \in bS^{-1}$. Logo, $a = bs_1^{-1}$ para algum $s_1 \in S$ e, conseqüentemente, $b^{-1}a = s_1^{-1} \in S^{-1}$. Analogamente, $b = as_2^{-1}$ para algum $s_2 \in S$, de onde concluímos que $b^{-1}a \in S$. Portanto, $b^{-1}a \in (S \cap S^{-1})$, ou seja, $b(S \cap S^{-1}) = a(S \cap S^{-1})$. Desta forma, $\bar{\eta} : G/H \rightarrow \mathcal{F}(G)$, $aH \mapsto aS^{-1}$ é injetiva.

Consideremos em G/H a relação \preceq_S definida por

$$gH \preceq_S g'H \Leftrightarrow g' \in gS.$$

Notemos em primeiro lugar que a relação “ \preceq_S ” está bem definida. De fato, se $a \in gH$, $b \in g'H$ e $g' \in gS$, então $a = gs$, $b = g's'$ e $g' = gs_1$, onde $s, s' \in H = S \cap S^{-1}$ e $s_1 \in S$. Assim,

$$b = g's' = gs_1s' = as^{-1}s_1s' \in aS.$$

Portanto, a definição de “ \preceq_S ” independe dos representantes de gH e $g'H$ considerados. Além disso, “ \preceq_S ” é uma relação de ordem parcial em G/H . De fato:

1. *Reflexividade*: Como $S = S_C$, então $1 \in S$. Portanto, $g \in gS$, ou seja, $gH \preceq_S gH$.
2. *Transitividade*: Se $gH \preceq_S g'H$ e $g'H \preceq_S g''H$ então $g' \in gS$ e $g'' \in g'S$. Logo, $g' = gs_1$ e $g'' = g's_2$, onde $s_1, s_2 \in S$. Assim, $g'' = g's_2 = gs_1s_2 \in gS$. Portanto, $gH \preceq_S g''H$.
3. *Anti-simetria*: Se $gH \preceq_S g' \preceq_S gH$ então $g' \in gS$ e $g \in g'S$. Desta forma, temos que $(g'^{-1}g)^{-1}g^{-1}g' \in S$ e $g'^{-1}gS$, ou seja, $g'^{-1}g \in S \cap S^{-1} = H$. Portanto, $gH = g'H$.

Portanto a relação “ \preceq_S ” é uma relação de ordem parcial em G/H . Agora, consideremos em $\mathcal{F}(G)$ a relação de ordem dada pela inclusão. A aplicação

$$\bar{\eta} : (G/H, \preceq_S) \rightarrow (\mathcal{F}(G), \subset)$$

preserva a ordem. De fato, sejam $gH, g'H \in G/H$ tais que $g' \in gS$. Então, $g' = gs$ para algum $s \in S$ o que é equivalente a $g = g's^{-1}$. Este fato por sua vez implica que $gS^{-1} = g's^{-1}S^{-1} \subset g'S^{-1}$. Com isso mostramos que se $gH \preceq_S g'H$ então $\bar{\eta}(gH) \subset \bar{\eta}(g'H)$.

Definimos agora

$$G^{cpt} = G^{cpt}(S) := \text{fe}(\bar{\eta}(G/H)) = \text{fe}(\eta(G))$$

e

$$G_+^{cpt} = G_+^{cpt}(S) := \text{fe}(\bar{\eta}(S \cdot H)) = \text{fe}(\eta(S)).$$

Como $\bar{\eta}$ é uma aplicação que preserva ordem, G^{cpt} é chamado *compactificação ordenada* de G/H .

Observamos que para cada $g \in G$, temos que $\eta(g) = gS^{-1} = \downarrow \eta(g)$, ou seja, $\eta(g) \in \mathcal{F}_\downarrow(G)$ para todo $g \in G$. Como $\mathcal{F}_\downarrow(G)$ é fechado, segue que $F = \downarrow F$ para todo $F \in G^{cpt}$.

Lema 5.2 *Seja $F \in G^{cpt}$. As seguintes afirmações ocorrem:*

1. $F \in G_+^{cpt}$ se e só se $1 \in F$.
2. $F = \{g \in G : g^{-1}F \in G_+^{cpt}\}$
3. Se $F \neq \emptyset$ então existe $g \in G$ com $gF \in G_+^{cpt}$.

Demonstração:

1. Se $F \in G_+^{cpt}$ então $F = \lim \eta(g_n) = \lim g_n S^{-1}$, com $g_n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, $1 \in g_n S^{-1}$, logo $1 \in \lim \eta(g_n) = F$ pelo ítem 2 do lema 1.30. Reciprocamente, suponha que $1 \in F$. Como $F = \lim g_n S^{-1}$, $g_n \in G$, então existe uma seqüência (a_n) , com $a_n \in g_n S^{-1}$ para todo n e $a_n \rightarrow 1$. Agora, $a_n \in g_n S^{-1}$ implica em $a_n^{-1}g_n \in S$. Como $a_n^{-1} \rightarrow 1$, então

$$F = \lim g_n S^{-1} = \lim a_n^{-1}g_n S^{-1}$$

com $a_n^{-1}g_n \in S$, ou seja, $F = \lim h_n S^{-1}$ com $h_n \in S$. Portanto, $F \in G_+^{cpt}$.

2. Pelo ítem anterior temos que

$$g^{-1}F \in G_+^{cpt} \Leftrightarrow 1 \in g^{-1}F \Leftrightarrow g \in F.$$

3. Se $F \neq \emptyset$, tome $g \in F$. Pelo ítem 2, temos que $g^{-1}F \in G_+^{cpt}$.

□

Lema 5.3 *Seja $A \subset G$ um subconjunto fechado com $\downarrow A = A$. Então, $A = \text{fe}(\text{int}A)$.*

Demonstração: Escolha uma seqüência (s_n) com $s_n \in \text{int}S$ para todo n e $\lim s_n = 1$. Dado $a \in A$, temos que $as_n^{-1} \in A$, pois $\downarrow A = A$. Como $s_n^{-1} \in \text{int}(S^{-1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um aberto $U_n \subset S^{-1}$ contendo s_n^{-1} . Como

$as_n^{-1} \subset aU_n \subset AS^{-1} = A$ e aU_n é um aberto contendo as_n^{-1} , temos que $as_n^{-1} \in \text{int}A$ para todo $a \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $As_n^{-1} \subset \text{int}(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, $\lim As_n^{-1} = A$. Desta forma, todo elemento $a \in A$ é um limite $a = \lim a_n s_n^{-1}$, com $a_n \in A$ para todo n . Como $a_n s_n^{-1} \in \text{int}A$ então $a = \lim a_n s_n^{-1} \in \text{fe}(\text{int}A)$ e portanto $A \subset \text{fe}(\text{int}A)$, como queríamos. \square

Consideremos agora o conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{F})$ com a topologia de Vietoris e denotemos por 2^G o conjunto de todos os subconjuntos de G . Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{F}(\mathbb{F}) &\rightarrow \mathcal{F}(G) \\ F &\mapsto \{g \in G : g^{-1}F \subset C\} \end{aligned}$$

O próximo lema fornece algumas propriedades da aplicação Γ que serão úteis posteriormente. Lembramos da seção 1.2 que com a hipótese de que $S = S_C$ temos que C é o conjunto de controle invariante para a ação de S em \mathbb{F} e que C_0 denota o conjunto de transitividade de C (neste caso, temos que $C_0 = \text{int}C$ pela proposição 1.25).

Lema 5.4 1. $\downarrow \Gamma(F) = \Gamma(F)$ para todo $F \in \mathcal{F}(\mathbb{F})$.

2. $\text{int}(\Gamma(F)) = \{g \in G : g^{-1}F \subset C_0\}$.

3. $\Gamma(gF) = g\Gamma(F)$ para quaisquer $g \in G$ e $F \in \mathcal{F}(\mathbb{F})$.

4. $\Gamma(gC) = gS^{-1}$ para todo $g \in G$.

Demonstração:

1. Sejam $g \in \downarrow \Gamma(F)$ e $s \in S$. Assim, $g^{-1}F \subset C$ e conseqüentemente $(gs^{-1})^{-1}F = sg^{-1}F \subset sC \subset C$. Portanto $\downarrow \Gamma(F) \subset \Gamma(F)$. A inclusão oposta ocorre em geral.

2. Seja $g \in \text{int}(\Gamma(F))$. Existe uma vizinhança U de 1 em G tal que $gU \subset \Gamma(F)$. Como S tem interior denso e $1 \in S$, então $U \cap \text{int}S \neq \emptyset$. Assim, existe $s \in \text{int}S$ com $gs \in \Gamma(F)$. Portanto,

$$g^{-1}F = s(gs)^{-1}F \subset sC \subset C_0.$$

Reciprocamente, suponha que $g^{-1}F \subset C_0$. Como F é compacto e C_0 é aberto, existe uma vizinhança U de g em G tal que $U^{-1}F \subset C$. Assim, $g \in U \subset \Gamma(F)$, ou seja, $g \in \text{int}(\Gamma(F))$.

3. Temos que

$$x \in \Gamma(gF) \Leftrightarrow x^{-1}(gF) \subset C \Leftrightarrow (g^{-1}x)^{-1}F \subset C \Leftrightarrow g^{-1}x \in \Gamma(F) \Leftrightarrow x \in g\Gamma(F).$$

4.

$$\begin{aligned} \Gamma(gC) &= \{x \in G : x^{-1}gC \subset C\} \\ &= \{x \in G : (g^{-1}x)^{-1} \in S\} \\ &= \{x \in G : g^{-1}x \in S^{-1}\} \\ &= gS^{-1} \end{aligned}$$

□

Lema 5.5 *A aplicação $\Gamma : \mathcal{F}(\mathbb{F}) \rightarrow \mathcal{F}(G)$ é contínua com respeito a topologia de Vietoris.*

Demonstração: Suponha que $F_n \rightarrow F$ em $\mathcal{F}(\mathbb{F})$. Dividimos a demonstração em duas partes:

1. $\text{int}(\Gamma(F)) \subset \liminf \Gamma(F_n)$: Seja $g \in \text{int}(\Gamma(F))$. Pelo ítem 2 do lema anterior temos que $g^{-1}F \subset C_0$ ou seja, $F \subset gC_0$. Conseqüentemente existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_n \subset gC_0$ para todo $n \geq n_0$. De fato, o conjunto

$$K(gC_0) := \{H \in \mathcal{F}(\mathbb{F}) : H \subset gC_0\}$$

é um aberto em $\mathcal{F}(\mathbb{F})$ na topologia de Vietoris (ver seção 1.3). Como $F \in K(gC_0)$ e $F_n \rightarrow F$, então existe $n_0 > 0$ tal que $F_n \in K(gC_0)$ para todo $n > n_0$, ou seja, $F_n \subset gC_0$ para todo $n > n_0$. Assim, $g^{-1}F_n \subset C_0 \subset C$ para todo $n > n_0$. Portanto, $g \in \liminf \Gamma(F_n)$.

2. $\limsup \Gamma(F_n) \subset \Gamma(F)$: Seja $g \in \limsup \Gamma(F_n)$ e escolha uma subsequência F_{n_k} e $g_k \in \Gamma(F_{n_k})$ com $g_k \rightarrow g$. Temos que $F = \lim F_{n_k}$. Tome $f \in F$ e seja $f_k \in F_{n_k}$ com $f_k \rightarrow f$. Como $g_k \in \Gamma(F_{n_k})$, então $F_{n_k} \subset g_k C$. Daí que $f_k \in g_k C$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, $f = \lim f_k \in \lim g_k C = gC$. Como $f \in F$ foi tomado arbitrário, segue que $g \in \Gamma(F)$.

Usando agora o fato que $\liminf(\Gamma(F_n))$ é fechado, temos por (1) e (2) que

$$\text{fe}(\text{int}(\Gamma(F))) \subset \liminf \Gamma(F_n) \subset \limsup \Gamma(F_n) \subset \Gamma(F).$$

Mas $\Gamma(F)$ é fechado e satisfaz $\Gamma(F) = \downarrow \Gamma(F)$. Logo, o lema 5.3 implica que $\Gamma(F) = \text{fe}(\text{int}(\Gamma(F)))$. Assim,

$$\liminf \Gamma(F_n) = \limsup \Gamma(F_n) = \Gamma(F).$$

Portanto, o lema 1.30 implica que $\Gamma(F_n) \rightarrow \Gamma(F)$. □

Definimos agora

$$\begin{aligned} G^C &:= \text{fe}\{gC : g \in G\}, \\ \iota : G &\rightarrow G^C \\ g &\mapsto gC \end{aligned}$$

e

$$G_+^C := \text{fe}(\iota(S)) = \text{fe}\{gC : g \in S\}.$$

Temos o seguinte resultado:

Proposição 5.6 *A aplicação $\Gamma : G^C \rightarrow G^{cpt}$ é uma aplicação quociente de G -espaços compactos, onde a ação de G sobre G^C é dada por $(g, F) \mapsto gF$.*

Demonstração: Mostraremos primeiro que Γ é sobrejetora. Para $g \in G$, temos:

$$\Gamma(gC) = gS^{-1} = \eta(g).$$

Como $\Gamma : G^C \rightarrow \mathcal{F}(G)$ e $\eta : G \rightarrow \mathcal{F}(G)$ são contínuas e $\{gC : g \in G\}$ é denso em G^C e $\{gS^{-1} : g \in G\}$ é denso em G^{cpt} , segue que Γ é sobrejetora. Agora, pelo item (3) do lema 5.4, Γ é equivariante, isto é, Γ é uma aplicação quociente de G -espaços compactos. □

Lema 5.7 *Assuma que, além das hipóteses já estabelecidas, G seja um grupo de posto 1. Sejam $C_1 = \lim g_n C$, $C_2 = \lim g'_n C \in G_+^C$ com $C_1 \neq C_2$. Então $\Gamma(C_1) \neq \Gamma(C_2)$.*

Demonstração: Como $g_n, g'_n \in S$ para todo n , segue que $g_n C$ e $g'_n C$ estão contidos em C para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, dado um conjunto fechado $F \subset \mathbb{F}$ temos que

$$\{A \in \mathcal{F}(\mathbb{F}) : A \subset F\}$$

é fechado na topologia de Vietoris (ver lema 1.30). Desta forma, $C_1 = \lim g_n C$ e $C_2 = \lim g'_n C$ estão contidos em C . Portanto, pela proposição 1.15 existem um elemento hiperbólico $h_0 \in G$ e k_0 um inteiro positivo tais que $h_0^{k_0} C_1 \subset C_0$. Como G tem posto 1, segue que o conjunto dos elementos transversais a um dado $y \in \mathbb{F}$ é o complemento de $\{y\}$. Portanto, tomando $y \in C_2 - C_1$ temos que $C_1 \subset \sigma(y)$ e, conseqüentemente, $h_0^{k_0} C_1 \subset h_0^{k_0} \sigma(y) = \sigma(h_0^{k_0} y)$. Denotemos $h_0^{k_0} y = y_1$ e seja $x_1 \in h_0^{k_0} C_1$. Para simplificar a notação, assuma que $y_1 = \tilde{w}_0 x_0$ (x_0 a origem em G/P). Desta forma, $\sigma(y_1) = N^- x_0$ e daíque $x_1 \in N^- x_0$. Logo, podemos escrever $x_1 = n x_0$ para algum $n \in N^-$. Para $h_1 \in n A^+ n^{-1}$ temos que $y_1 = \text{fix}(h_1, w_0)$ e $x_1 = \text{fix}(h_1, 1)$. Consideremos agora a célula aberta $\sigma(x_1)$. Como $\sigma(x_1)$ é densa em \mathbb{F} , temos que existe $z \in C^C \cap \sigma(x_1)$. Para um tal z , seja h_2 hiperbólico tal que $x_1 = \text{fix}(h_2, w_0)$ e $z = \text{fix}(h_2, 1)$. Como $y_1 \in \sigma(x_1)$, então existe $k_2 > 0$ tal que $h_2^{k_2} y_1 \in C^C$ (pois $h_2^k w_0 \rightarrow z \in C^C$ quando $k \rightarrow \infty$ para todo $w_0 \in \sigma(x_1)$). Pelo fato de x_1 ser um h_2 -ponto fixo, existe uma vizinhança U de x_1 em \mathbb{F} tal que $h_2^{k_2} U \subset C_0$. Para uma tal vizinhança U , tome k_1 inteiro positivo de tal forma que $h_1^{k_1} h_0^{k_0} C_1 \subset U$. Assim,

$$h_2^{k_2} h_1^{k_1} h_0^{k_0} y = h_2^{k_2} y_1 \in C^C$$

e

$$h_2^{k_2} h_1^{k_1} h_0^{k_0} C_1 \subset h_2^{k_2} U \subset C_0 \subset C.$$

Portanto, $g = (h_2^{k_2} h_1^{k_1} h_0^{k_0})^{-1} \in \Gamma(C_1)$ mas $g \notin \Gamma(C_2)$. □

Teorema 5.8 *Com as hipóteses do lema anterior, $\Gamma : \mathcal{F}(\mathbb{F}) \rightarrow \mathcal{F}(G)$ induz um homeomorfismo $G_+^C \rightarrow G_+^{cpt}$.*

Demonstração: Note em primeiro lugar que $\Gamma(G_+^C) = G_+^{cpt}$. De fato, para $g \in G$ temos que

$$\Gamma(gC) = gS^{-1} = \eta(g).$$

Como Γ e η são contínuas e $\{gC : g \in S\}$ é denso em G_+^C e $\{gS^{-1} : g \in S\}$ é denso em G_+^{cpt} segue que $\Gamma : G_+^C \rightarrow G_+^{cpt}$ é sobrejetora. Pelo lema anterior, $\Gamma : G_+^C \rightarrow G_+^{cpt}$ é também injetora. Além disso, mostramos na proposição 5.6 que Γ é uma aplicação quociente. Portanto, $\Gamma : G_+^C \rightarrow G_+^{cpt}$ é um homeomorfismo. \square

5.2 Um semigrupo de $\text{Sl}(2, \mathbb{R})$

Nesta seção consideramos $G = \text{Sl}(2, \mathbb{R})$ e tomamos $S \subset G$ com sendo o semigrupo das matrizes com todas as entradas não negativas. Descreveremos o conjunto G_+^C neste caso.

Consideremos a decomposição de Iwasawa $G = KAN^+$ com $K = \text{SO}(2, \mathbb{R})$, A o conjunto das matrizes diagonais com entradas positivas e N^+ o conjunto das matrizes triangulares superiores com entradas diagonais todas iguais a 1. Dado $g \in G$, g se decompõe de forma única como $g = uhn$ com

$$u = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in K$$

e

$$hn = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in AN^+.$$

Defina uma ação de G em \mathbb{R}^3 da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \cdot (x, y, z) = (x \cos \theta - y \text{sen } \theta, x \text{sen } \theta + y \cos \theta, z + a),$$

isto é, a rotação por θ em (x, y) e uma translação por a na coordenada z . A órbita desta ação através de $(1, 0, 0)$ é o cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Agora, o subgrupo de isotropia em $(1, 0, 0)$ é dado por A . Portanto,

$$G \cdot (1, 0, 0) \approx G/A.$$

Como N^+ normaliza A , podemos ainda identificar $G/A = KAN^+/A \approx KN^+$.

Com essas identificações, o elemento

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & a \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & a \operatorname{sen} \theta + \cos \theta \end{pmatrix} \in KN^+$$

é identificado com o ponto $(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, a)$ do cilindro.

Seja agora $S \subset G$ o semigrupo das matrizes com todas as entradas não negativas. Então $S \cap S^{-1} = A$ e se $\pi : G \rightarrow G/A$ denota a projeção canônica então $\pi(S)$ é identificado com o subconjunto S' do cilindro dado por

$$S' = \{(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, a) : 0 \leq \theta < \pi/2, a \geq (\operatorname{sen} \theta / \cos \theta)\}.$$

O conjunto de controle invariante para S sobre \mathbb{RP}^1 é dado por

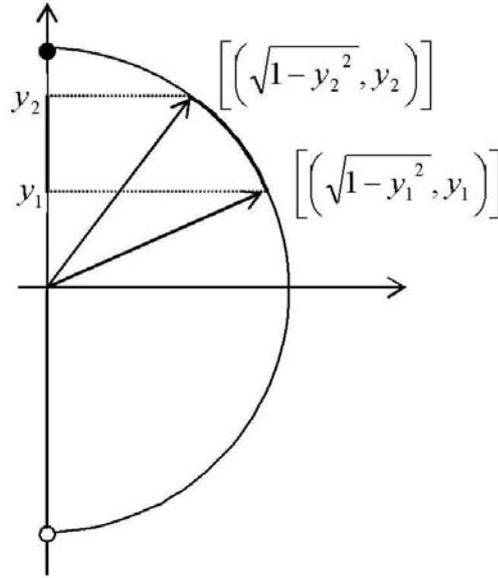
$$C = \{[(x, y)] : x, y \geq 0\}.$$

Consideremos agora o conjunto dos subconjuntos conexos e fechados de \mathbb{RP}^1 contidos em C , o qual denotaremos por $\mathcal{F}_C(\mathbb{F})$. Podemos identificar esse conjunto com o conjunto dos pares ordenados (a, b) com $0 \leq a \leq b \leq 1$, o qual será denotado por T , da seguinte maneira. Identifique \mathbb{RP}^1 com a semi-circunferência

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\},$$

com os pontos $(0, 1)$ e $(0, -1)$ identificados. Dado $C_1 \in \mathcal{F}_C(\mathbb{F})$, temos que C_1 é um ponto da forma $[(\sqrt{1-y^2}, y)]$, com $0 \leq y \leq 1$ ou C_1 é o subconjunto de \mathbb{RP}^1 determinado pela região de \mathbb{R}^2 que está entre duas retas da forma $[(\sqrt{1-y_1^2}, y_1)]$ e $[(\sqrt{1-y_2^2}, y_2)]$, com $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1$. No primeiro caso, identificamos C_1 com o par ordenado (y, y) . No segundo caso, identificamos C_1 com o par ordenado (y_1, y_2) . Conjuntos desta forma serão chamados de *intervalos* em \mathbb{RP}^1 (note que y_1 e y_2 são os extremos do intervalo fechado determinado pela “projeção” de C_1 no eixo y).

Reciprocamente, dado um par da forma (y_1, y_2) , com $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1$, identificamos este par com a região de \mathbb{RP}^1 que está entre as retas $[(\sqrt{1-y_1^2}, y_1)]$ e $[(\sqrt{1-y_2^2}, y_2)]$. Naturalmente, pontos da forma (y_1, y_1) são identificados com conjuntos unitários em \mathbb{RP}^1 .



Tome agora $C_1, C_2 \in \mathcal{F}_C(\mathbb{F})$. Sejam $[(\sqrt{1-x_1^2}, x_1)]$ e $[(\sqrt{1-y_1^2}, y_1)]$ os “pontos extremos” de C_1 e $[(\sqrt{1-x_2^2}, x_2)]$, $[(\sqrt{1-y_2^2}, y_2)]$ os “pontos extremos” de C_2 . A distância de Hausdorff $d(C_1, C_2)$ entre C_1 e C_2 é dada por

$$d(C_1, C_2) = \max\{\sqrt{(\sqrt{1-x_2^2} - \sqrt{1-x_1^2})^2 + (x_2 - x_1)^2}, \sqrt{(\sqrt{1-y_2^2} - \sqrt{1-y_1^2})^2 + (y_2 - y_1)^2}\}.$$

Agora, temos que C_1 é identificado ao par (x_1, y_1) , enquanto que C_2 é identificado ao par (x_2, y_2) . Assim, se considerarmos em T a métrica definida por

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{\sqrt{(\sqrt{1-x_2^2} - \sqrt{1-x_1^2})^2 + (x_2 - x_1)^2}, \sqrt{(\sqrt{1-y_2^2} - \sqrt{1-y_1^2})^2 + (y_2 - y_1)^2}\},$$

teremos que a identificação de $\mathcal{F}_C(\mathbb{F})$ com T é uma isometria.

Para cada $g \in S$, temos que gC é um intervalo do espaço projetivo contido em C . Assim, $\{gC : g \in S\}$ é um subconjunto de $\mathcal{F}_C(\mathbb{F})$. O fecho deste conjunto é exatamente $\mathcal{F}_C(\mathbb{F})$. Para verificar esse fato observamos primeiramente que, pela continuidade da ação, se uma seqüência da forma $g_n C$ com $g_n \in S$ converge, então

ela converge para um subconjunto conexo de \mathbb{RP}^1 e, como $g_n C \subset C$ para todo n então esses limites estão contidos em C (ver lema 1.30, item (1)). Logo, $G_+^C = \text{fe}\{gC : g \in S\} \subset \mathcal{F}_C(\mathbb{F})$. Para mostrar a inclusão oposta, observamos inicialmente que todo intervalo em $\mathcal{F}_C(\mathbb{F})$ pode ser escrito da forma gC com $g \in S$. De fato, se C_1 é um intervalo com pontos extremos $[(\sqrt{1-y_1^2}, y_1)]$, $[(\sqrt{1-y_2^2}, y_2)]$ então, como $\{(1,0), (0,1)\}$ e $\{(\sqrt{1-y_1^2}, y_1), (\sqrt{1-y_2^2}, y_2)\}$ são bases de \mathbb{R}^2 , existe $g \in S$ tal que $g(1,0) = (\sqrt{1-y_1^2}, y_1)$ e $g(0,1) = (\sqrt{1-y_2^2}, y_2)$. Conseqüentemente, $C_1 = gC$. Além disso, se $[(x,y)] \in C_0 = \{[(x,y)] \in C : x,y > 0\}$, temos que existe $h \in \text{int}S$ tal que $[(x,y)]$ é o h -ponto fixo do tipo 1 e C está contido na variedade estável para h . Desta forma, $h^k C \rightarrow [(x,y)]$ quando $k \rightarrow \infty$. Os pontos $[(1,0)]$ e $[(0,1)]$ (que não pertencem a C_0) podem ser escritos como limites de seqüências de pontos em C (pois $\text{fe}C_0 = C$). Portanto, temos que $\mathcal{F}_C(\mathbb{F}) \subset G_+^C$ e a igualdade fica demonstrada.

Desta forma, G_+^C é identificado com T e essa identificação é uma isometria.

Uma melhor descrição da relação entre S/A com T pode ser obtida da seguinte maneira: dado

$$g = \begin{pmatrix} \cos \theta & a \cos \theta - \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & a \text{sen } \theta + \cos \theta \end{pmatrix} \in \pi(S),$$

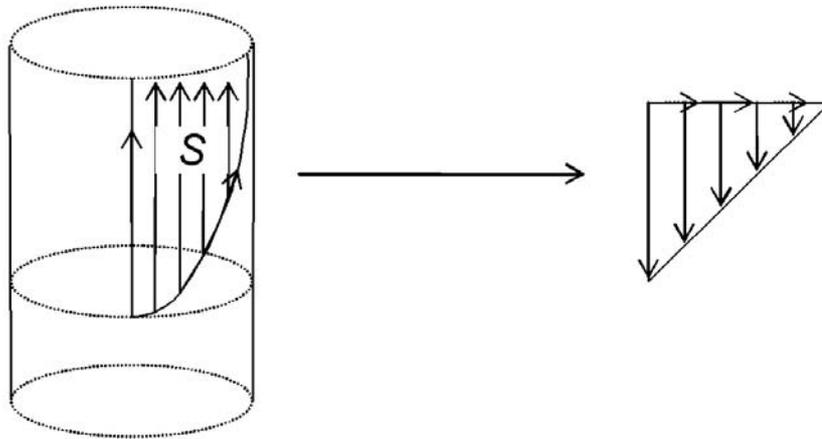
temos que gC é o subconjunto de \mathbb{RP}^1 determinado pela região entre as retas $[(\cos \theta, \text{sen } \theta)]$ e $[(a \cos \theta - \text{sen } \theta, a \text{sen } \theta + \cos \theta)]$. Assim, gC é identificado ao par $(\text{sen } \theta, \frac{a \text{sen } \theta + \cos \theta}{\sqrt{1+a^2}}) \in T$. Quando $a = \text{sen } \theta / \cos \theta$ temos que

$$\frac{a \text{sen } \theta + \cos \theta}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{(\text{sen } \theta / \cos \theta) \text{sen } \theta + \cos \theta}{\sqrt{1 + (\text{sen }^2 \theta / \cos^2 \theta)}} = 1$$

e assim $(\text{sen } \theta, \frac{a \text{sen } \theta + \cos \theta}{\sqrt{1+a^2}}) = (\text{sen } \theta, 1)$. Quando $\theta = 0$, obtemos

$$(\text{sen } \theta, \frac{a \text{sen } \theta + \cos \theta}{\sqrt{1+a^2}}) = (0, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}).$$

Portanto, os “pontos de fronteira de S ” são identificados com pontos da forma $(\text{sen } \theta, 1)$ ou $(0, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}})$ em T . Além disso, mantendo θ fixo e fazendo $a \rightarrow \infty$ temos que $(\text{sen } \theta, \frac{a \text{sen } \theta + \cos \theta}{\sqrt{1+a^2}}) \rightarrow (\text{sen } \theta, \text{sen } \theta)$. Assim, “pontos no infinito” são identificados com pontos sobre a diagonal em T e a compactificação de S pode ser representada na figura abaixo:



Referências Bibliográficas

- [1] San Martin, L.A.B.: “Álgebras de Lie”, Editora da UNICAMP, 1999.
- [2] San Martin, L.A.B.: *Invariant control sets on flag manifolds*, Math. of Control, Signals and Systems, 6 (1993) 41-61.
- [3] San Martin, L.A.B.: *Order and domains of attraction of control sets in flag manifolds*, Journal of Lie Theory, 8 (1998) 335-350.
- [4] San Martin, L.A.B, P.A. Tonelli: *Semigroup actions on homogeneous spaces*, Semigroup Forum, 50 (1995) 59-88.
- [5] San Martin, L.A.B.: *Maximal semigroups in semi-simple Lie groups*, Transactions of the American Mathematical Society, 353 (2001) 5165-5184.
- [6] San Martin, L.A.B.: *Nonexistence of invariant semigroups in affine symmetric spaces*, Mathematische Annalen, 321 (2001) 587-600.
- [7] Warner, G.: “Harmonic Analysis on Semi-simple Lie Groups I”, Springer-Verlag, 1970.
- [8] Hilgert, J., K.H. Hofmann, J.D. Lawson: “Lie Groups, Convex Cones and Semigroups, Oxford University Press, 1989.
- [9] Hilgert, J., G. Ólafsson: “Causal Symmetric Spaces”, Academic Press, 1997.
- [10] Hilgert, J., K.H. Neeb: *Grupoid C^* -algebras of order compactified symmetric spaces*, Jpn J. Math. 21 (1995) 117-188.