Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Expoentes de Morse vetoriais e semifluxos em fibrados flag

Lucas Conque Seco Ferreira

Doutorado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. **Luiz Antonio Barrera San Martin**

Campinas - São Paulo, 2007

Este trabalho contou com o financiamento da FAPESP (Processo no.04/00392-7)

Expoentes de Morse vetoriais e semifluxos em fibrados flag

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Lucas Conque Seco Ferreira e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 15 de Março de 2007

Prof. Dr. Luiz Antonio
Barrera San Martin
Orientador

Banca Examinadora

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC-UNICAMP)

Prof. Dr. Ali Tahzibi (ICMC-USP)

Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo (IME-USP)

Prof. Dr. Paolo Piccione (IME-USP)

Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino (IMECC-UNICAMP)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Ferreira, Lucas Conque Seco

F413e Expoentes de Morse vetoriais e semifluxos em fibrados flag / Lucas Conque Seco Ferreira -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Luiz Antonio Barrera San Martin

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria dos sistemas dinâmicos. 2. Lie, Grupos de. 3. Semigrupos. 4. Fibrados (Matemática). I. San Martin, Luiz Antonio Barrera. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Vector valued Morse exponents and semiflows in flag bundles.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Dynamical systems. 2. Lie groups. 3. Semigroups. 4. Fiber bundles.

Área de concentração: Teoria de Sistemas Dinâmicos. Teoria de Lie.

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Ali Tahzibi (ICMC-USP)
Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo (IME-USP)
Prof. Dr. Paolo Piccione (IME-USP)
Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 15/03/2007

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 15 de março de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof. (a). Dr (a). ALI TAHZIBI

Prof. (a). Dr (a). CLODOALDO GROTTA RAGAZZO

Prof. (a). Dr (a). PAOLO PICCIONE

Prof. (a) Dr. (a) PAULO REGIS CARON RUFFINO

Fernando Gonzales, fonte: www.niquel.com.br.

Dedico esse trabalho às mães que o tornaram possível: Meri, Jacqueline e Odiméa.

Resumo

Essa tese estabelece um *procedimento intrínseco* que generaliza a *decomposição esférica/radial clássica de semifluxos lineares* para uma classe mais ampla de *semifluxos de endomorfismos de fibrados G-principais*, cujo grupo estrutural G é um *grupo de Lie* mais geral que o grupo linear geral $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Nesse contexto mais geral essa tese estabelece uma *relação estreita* entre os comportamentos assintóticos *esférico* e *radial* generalizados do semifluxo de endomorfismos com respeito à *recorrência por cadeias* por meio do conceito de *expoentes de Morse vetoriais*.

Abstract

This thesis establishes an *intrinsic procedure* which generalizes the *classical spherical/radial decomposition of linear semiflows* to a broader class of *semiflows of endomorphisms of G-principal fiber bundles*, whose structural group G is a *Lie group* that is more general than the general linear group $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. In this more general context this thesis establishes an *intimate relationship* between the generalized *spherical* and *radial* asymptotic behavior of the semiflow of endomorphisms with respect to *chain recurrence* through the concept of *vector valued Morse exponents*.

Agradecimentos

Esse trabalho de doutorado e tese foi o desafio intelectual/emocional de maior envergadura com o qual me envolvi na minha vida até agora. Um trabalho desse não se faz a uma só mão e depende da contribuição de diversas pessoas as quais gostaria de lembrar e agracer à seguir.

- Agradeço primeiro ao Mauro Patrão, pelas conversas sobre a matemática e sobre a vida e pela sua ajuda e presença decisiva em todo esse processo. Uma das contribuições mais importantes desse doutorado pra mim foi estreitar meus laços de amizade com você, cara. Oxalá estejamos trabalhando juntos logo aí em Brasília.

- Agradeço ao meu orientador de tese, Luiz San Martin, pela generosidade e pela empolgação ao compartilhar comigo coisas tão belas da matemática. Foi acima de tudo ele quem me mostrou que vale a pena traçar sua própria agenda de pesquisa, mesmo dentro dessa realidade árdua que é fazer matemática no Brasil.

- Agradeço à minha filhinha Luana, pela paciência e compreensão nas minhas visitas-relâmpago por Brasília e por me alimentar de afeto incondicional, combustível que possibilitou que eu fizesse essa minha jornada que, de um modo, também foi uma jornada dela.

- Agradeço à minha mãe, à Jacqueline e à sua mãe Odiméa, a quem dedico essa tese. Cuidando da Luana em Brasília elas me deram todo o apoio necessário para que eu fizesse essa jornada.

- Agradeço ao meu pai, por ter me inspirado a vocação científica e por estar sempre presente na minha vida. Não fossem as conversas que tivemos ao longo dessa jornada pai, era bem capaz de eu não ter chegado até aqui. Essas conversas foram coroadas com a sua vinda pra cá no dia da minha defesa, sua companhia aqui me deu um suporte indispensável nesses dias decisivos.

- Agradeço ao meu segundo pai, o Beto, e aos meus irmãos que, mesmo distantes, sempre me deram apoio e suporte incondicional para seguir adiante nessa jornada.

- Agradeço aos meus amigos pela paciência para lidar com o afastamento causado pela distância e pela compreensão dos momentos de reclusão necessários nessa jornada.

- Agradeço à todos que me hospedaram aqui em Barão Geraldo nos momentos de necessidade ou de visita: ao Pablão e Maria Luíza, ao Alê e as duas edições da "sua" república –Mateus, Fabiano e Natália e depois Marina, Paula, Antônio, William, Rodrigo–, ao Lucas Vitarque e Letícia Bartholo.

- Eu não teria saído na outra ponta dessa reta final super corrida que foi a defesa não fosse a presença de três anjos que invoquei no meu retorno à Brasília. Henrique e suas agulhas de acupuntura. Alessandra e sua luz da lanterninha. Letícia Resck e sua amizade generosa e desde já necessária.

- Agradeço ao tutor e "pai espiritual" do PET-MAT-UnB, Célius Magalhães, e à CAPES pela iniciativa do PET que, sem dúvida, contribuiu decisivamente para que eu chegasse aqui. E também ao meu orientador de mestrado, Mauro Rabelo, que me acolheu e me aconselhou numa época tão decisiva da minha vida.

- Agradeço ao Paolo Piccione, Carlos Tomei, Dan Marchesin, e ao Leonardo Macarini pela paciência, atenção e generosidade em nossas conversas quando eu ainda estava buscando o lugar onde eu iria fazer o meu doutorado.

- Agradeço à Ketty de Rezende pela atenção e orientação inicial aqui na UNICAMP e à minha irmãzinha-postiça Mariana Silveira pelos momentos agradáveis que passamos juntos aqui no IMECC.

- Agradeço a todos os funcionários da UNICAMP, em especial aos funcionários do IMECC e do CECOM, que tão bem me ofereceram serviços indispensáveis nesses três anos em Campinas. Em especial à Rosely e Nilton do CECOM, e à secretaria de pós-graduação do IMECC.

- Agradeço ao CNPq, CAPES e à FAPESP pela confiança e apoio financeiro em todo esse processo.

- Finalmente, agradeço ao povo trabalhador desse Brasil que não pára, que foi quem realmente me financiou em todo esse caminho desde a graduação, passando pelo mestrado até chegar ao doutorado. Espero poder retribuir desde já com o meu trabalho e meu empenho para transformar o Brasil num país mais justo e mais democrático, onde a ciência e a tecnologia tenha cada vez mais um papel fundamental no desenvolvimento humano igualitário.

Conteúdo

Lista de Figuras

Capítulo 0

Introdução

Um procedimento usual para se estudar o comportamento assintótico de um semifluxo linear que evolui num fibrado vetorial é introduzir uma norma no fibrado vetorial e decompor o semifluxo numa parte esférica e outra radial. Um semifluxo linear num fibrado vetorial é um caso particular de um semifluxo num fibrado associado que é induzido por um semifluxo de endomorfismos de um fibrado principal cujo grupo estrutural G é um grupo de Lie redutível mais geral que o grupo linear. Essa tese estabelece um procedimento intrínseco que generaliza a decomposição esférica/radial para o estudo dessa classe mais ampla de semifluxos. Nesse contexto mais geral essa tese estabelece uma relação estreita entre os comportamentos assintóticos esférico e radial com respeito a recorrência por cadeias.

Para tornar precisa a noção clássica de decomposição esférica/radial no caso linear, seja σ_t um semifluxo linear, $t \in \mathbb{T}$, evoluindo num fibrado vetorial $\mathcal{V} \to X$, onde $\mathbb{T} = \mathbb{Z}^+$ ou $\mathbb{R}^+$. Seja $|\cdot|$ uma norma Riemanniana nas fibras de $\mathcal{V}$ e seja $\mathbb{S}\mathcal{V} \to X$ o fibrado de esferas unitárias correspondente. A parte esférica de σ_t é o semifluxo $\sigma_t^{\mathbb{S}}$ induzido em $\mathbb{S}\mathcal{V}$ que é dado por

$$\sigma^{\mathbb{S}} : \mathbb{T} \times \mathbb{S}\mathcal{V} \to \mathbb{S}\mathcal{V}, \qquad \sigma_t^{\mathbb{S}}(\xi) := \sigma_t(\xi)/|\sigma_t(\xi)|. \tag{1}$$

Esse semifluxo possui a informação das direções de σ_t. A parte radial de σ_t é dada por

$$a : \mathbb{T} \times \mathbb{S}\mathcal{V} \to \mathbb{R}, \qquad a(t, \xi) := \log |\sigma_t(\xi)|, \tag{2}$$

que é um *cociclo escalar aditivo* sobre o semifluxo induzido no fibrado das esferas unitárias (cf. Definição 1.1), o assim chamado cociclo da norma. Esse cociclo possui a informação do crescimento das trajetórias de σ_t em cada direção. Na verdade tanto o semifluxo induzido (1) quanto o cociclo da norma (2) podem ser pensados como definidos no fibrado projetivo $\mathbb{P}\mathcal{V}$ de $\mathcal{V}$ uma vez que não dependem do sentido de $\xi \in \mathbb{S}\mathcal{V}$. O mesmo procedimento pode ser usado para se induzir o semifluxo σ_t nos fibrados Grassmanianos $\mathrm{Gr}_k\mathcal{V}$ de $\mathcal{V}$ e se considerar os cociclos da norma correspondentes (cf. Exemplo 1.4).

Seja agora a situação mais geral tratada nessa tese que é a de um semifluxo de endomorfismos σ_t, $t \in \mathbb{T}$, de um fibrado principal $Q \to X$ cujo grupo estrutural G é um grupo de Lie redutível. A parte esférica de σ_t é o semifluxo induzido induzido no fibrado flag maximal $\mathbb{F}Q$ de Q. O primeiro intuito dessa tese é construir o que seria a parte radial desse semifluxo, que será dada por um cociclo aditivo vetorial sobre o semifluxo induzido no fibrado flag maximal. Esse cociclo vetorial assume valores na álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ de um abeliano maximal de G. Uma vez construída essa parte radial de σ_t essa tese tem o intuito de estabelecer relações entre os comportamentos assintóticos desse cociclo vetorial e do semifluxo induzido em $\mathbb{F}Q$.

Para tornar mais precisa a noção de comportamento assintótico deve-se especificar que tipo de recorrência se está considerando. Nessa tese é considerada a teoria topológica de recorrência por cadeias que teve origem nos trabalhos de Conley (cf. apêndice A.1). Nessa teoria de recorrência um papel central é ocupado pela noção de *decomposição de Morse* de um fluxo ou, mais geralmente, de um semifluxo. O ponto de partida dessa parte da tese é a caracterização da recorrência por cadeias da parte esférica: a descrição algébrica da decomposição de Morse mais fina dos semifluxos em fibrados flag, obtida nos trabalhos do orientador da tese e colaboradores [17, 19, 20, 1, 25] (cf. apêndice B). Nessa descrição algébrica um papel central é ocupado pela noção de *tipo parabólico de um semifluxo* (Definição B.15). Ficava faltando descrever o comportamento assintótico da parte radial nesse contexto mais geral, o que será feito aqui.

A descrição do comportamento assintótico da parte radial é feita costumeiramente por meio de expoentes de crescimento radial. No caso de um semifluxo linear σ_t num fibrado vetorial normado $\mathcal{V}$ a noção clássica de expoente de crescimento radial é dado pelo expoente de Lyapunov de uma direção $\xi \in \mathbb{S}\mathcal{V}$

$$\lambda(\xi) := \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log |\sigma_t(\xi)| = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} a(t, \xi), \tag{3}$$

quando o limite existe, onde $a(t, \xi)$ é o cociclo da norma dado em (2). A noção de expoente de crescimento radial introduzida aqui difere dessa noção clássica nos seguintes sentidos.

1) Em primeiro lugar adotam-se os assim chamados expoentes de Morse, que são expoentes de crescimento ao longo de cadeias do semifluxo. Os expoentes de Morse podem ser vistos como um enfraquecimento dos expoentes de Lyapunov que podem ser estudados por meio da teoria topológica de recorrência por cadeias. Essa idéia foi introduzida por Colonius e Kliemann nos anos 90 no contexto de fluxos lineares [4] e já encontrou aplicações diversas no estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos diferenciáveis [16] e de sistemas de controle [5].

2) Em segundo lugar os expoentes de crescimento são considerados aqui não ao longo de uma direção no fibrado projetivo, mas ao longo das "várias direções simultâneas" no fibrado flag maximal adequado. Isso permite que se adotem expoentes de crescimento vetoriais, ao contrário dos expoentes clássicos que são escalares. No caso de semifluxos lineares esses expoentes vetoriais englobam ao mesmo tempo os vários expoentes escalares de crescimento dos fibrados Grassmanianos (cf. Exemplo 4.3).

3) Em terceiro lugar os expoentes considerados aqui são intrínsecos no sentido em que na sua construção é usada a teoria de Lie do grupo estrutural semi-simples G e a topologia do fibrado principal Q, sem fazer recurso a nenhum mergulho do grupo G num grupo linear ou do fibrado Q num fibrado trivial.

Observa-se que um cociclo vetorial a valores num espaço vetorial de dimensão finita V é determinado pelas suas coordenadas numa base de V e que essas coordenadas determinam cociclos escalares. O fato de que os expoentes vetoriais intrínsecos introduzidos aqui carregam mais informações que os expoentes escalares associados é o resultado central dessa tese. De fato, o Teorema 4.27 mostra que o espectro de Morse vetorial da componente atratora $\mathcal{M}^+$ no fibrado flag maximal caracteriza o tipo parabólico do semifluxo (cf. Figura 4.4).

Esse resultado vincula os comportamentos assintóticos esférico (componentes de Morse no fibrado flag maximal) e radial (espectro de Morse vetorial) do semifluxo com respeito a recorrência por cadeias. Em particular esse resultado mostra que o tipo parabólico do semifluxo fornece a irregularidade máxima dos expoentes de Morse (e, em particular, dos expoentes de Lyapunov) de $\mathcal{M}^+$. Esse resultado também pode ser visto como um método indireto para se calcular o tipo parabólico de um determinado semifluxo. Uma aplicação direta desse Teorema é a seguinte caracterização da recorrência por cadeias de um fluxo σ_t por meio do espectro de Morse vetorial: σ_t é transitivo por cadeias em $\mathbb{F}Q$ se, e somente se, o espectro de Morse vetorial da componente atratora $\mathcal{M}^+$ contém um expoente nulo (Proposição 4.28).

0.1 Contribuições da tese

As contribuições dessa tese são listadas e comentadas brevemente no que segue. Nessa tese introduziu-se uma teoria topológica geral de

- expoentes de Morse de um cociclo vetorial (capítulo 1),
- semigrupos de sombreamento por endomorfismos pequenos de um fibrado principal Q (capítulo 2).

Para um fibrado principal Q com grupo estrutural redutível G introduziu-se nessa tese uma teoria geral de

- decomposição de Iwasawa e polar de Q (capítulo 3),
- expoentes de Morse vetoriais intrínsecos de semifluxos de endomorfismos em Q (capítulo 4).

Esses conceitos já estavam disponíveis em situações particulares e são novos quando introduzidos nessa generalidade. Esse trabalho de conceituação é coroado no conceito de expoente de Morse vetorial intrínseco de um semifluxo de endomorfismos, que é o conceito central dessa tese. Quanto a métodos e resultados novos introduzidos nessa tese pode-se dizer o seguinte.

- Na seção 4.2 do capítulo 4 introduziu-se um método geral para o estudo desses expoentes de Morse vetoriais por meio dos semigrupos de sombreamento: os assim chamados *expoentes de sombreamento*. Por meio desse método obtém-se resultados que relacionam a localização do espectro de Morse vetorial das componentes transitivas do semifluxo com seu tipo parabólico (seção 4.4), em particular obteve-se a existência de um expoente quase-característico da componente atratora (Teorema 4.19).

- Na seção 4.5 do capítulo 4 usou-se de uma forma nova métodos anteriormente disponíveis (apêndice B.4) da teoria do tipo parabólico de semifluxos para se obter um refinamento da localização dos expoentes de Lyapunov da componente atratora no caso de fluxo de automorfismos (Teorema 4.26). A partir da existência do expoente quase-característico obtido anteriormente, esse resultado permite caracterizar o tipo parabólico do fluxo por meio do espectro de Morse da componente atratora (Teorema 4.27).

Vale ressaltar que esses dois resultados centrais do capítulo 4 listados acima funcionam apenas quando o grupo estrutural G de Q é semi-simples. Obtém-se também no Capítulo 4 um resultado colateral de teoria dos expoentes de sombreamento: um resultado de teoria de semigrupos abertos em grupos de Lie semi-simples que fornece a localização da A-parte de elementos "triangulares superiores" do semigrupo (Teorema 4.12).

No todo, acredita-se que a maior contribuição dessa tese foi chamar atenção para o espectro de Morse vetorial intrínseco de semifluxos de endomorfismos e a sua relação com o tipo parabólico do semifluxo. Os resultados dessa tese serão publicados em [27].

Observa-se que nessa tese tomou-se bastante cuidado em mostrar como as construções intermediárias dependem da escolha de câmaras e decomposições do grupo estrutural semi-simples G e das respectivas reduções do fibrado principal Q. No final das contas muitas dessas construções acabam indepedendendo dessas escolhas, independência essa que é devidamente enunciada e provada. No contexto da teoria de Lie essas escolhas podem ser vistas como a escolha de uma base adequada que é adaptada a cada problema considerado.

0.2 Estrutura da tese

A interdependência dos capítulos da tese é ilustrada no seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & 2 \arrow[d] & 3 \arrow[dl] \\
& 4 & \\
& B \arrow[u, dotted] &
\end{tikzcd}$$

O apêndice A contém notação e terminologia básica que é usada ao longo de todos os capítulos da tese. No que segue se faz um comentário mais detalhado cada capítulo da tese.

Capítulo 1: Espectro de Morse de cociclos vetoriais

Os objetivos desse capítulo são: introduzir a linguagem de cociclos, cociclos vetoriais e cociclos vetoriais sobre semifluxos. Para cociclos vetoriais sobre semifluxos introduz-se a noção de expoente de Lyapunov e de Morse do cociclo e obtém-se suas propriedades analíticas e ergódicas básicas.

Como a teoria desenvolvida nesse capítulo é uma reformulação e refinamento da teoria descrita em [3] e na seção 5.3 de [5], este capítulo da tese difere dos outros pois aqui a maioria das provas completas são fornecidas apenas quando o resultados é novo (item (6) do Teorema 1.9, Proposição 1.25), quando a demonstração do resultado foi significativamente simplificada (Teorema 1.22) ou quando a demonstração do resultado precisa ser esclarecida no caso de cocilos vetoriais (Teorema 1.19 e Proposição 1.21).

A teoria desenvolvida nesse capítulo é um refinamento da teoria descrita em [3, 5] nos seguintes aspectos: formula-se a teoria no contexto asbtrato de cociclos vetoriais sobre um semifluxo de tempo discreto ou contínuo num espaço topológico paracompacto Hausdorff (em [3] estuda-se apenas certas funções vetoriais associadas a um fluxo linear de tempo contínuo sobre uma base métrica compacta e em [5] estuda-se apenas o cociclo da norma de fluxos lineares de tempo contínuo); reduz-se a teoria de expoentes de Morse ao caso de expoentes tomados com cadeias de tempo discreto (isso permite usar diretamente teoria ergódica em tempo discreto o que simplifica muitos argumentos em [3, 5]); fornece-se uma prova simplificada e mais geral da caracterização ergódica do espectro de Morse vetorial (cf. Observação 1.23). Um dos interesses em se considerar essa teoria em espaços compactos Hausdorff não necessariamente metrizáveis vem da possibilidade de se considerar compactificações de semifluxos.

Em [3, 5] para se estudar expoentes de crescimento da norma de um fluxo linear mergulha-se o fluxo num fluxo linear trivial e faz-se uma cohomologia com um fluxo suave. Nessa tese considera-se uma abordagem mais geométrica (descrita nos capítulos 3 e 4) que não envolve nenhum mergulho ou cohomologia pois reduz o problema para o estudo do cociclo vetorial (4.2): o assim chamado cociclo radial do semifluxo.

Capítulo 2: Sombreamento com endomorfismos pequenos de Q

Como os objetivos deste capítulo são puramente topológicos, fixa-se um fibrado principal localmente trivial $\pi_X : Q \to X$, com grupo estrutural topológico G e base paracompacta X. Fixa-se também um fibrado associado $E := Q \times_G F \to X$ cuja fibra típica F é um espaço topológico compacto que é um espaço homogêneo de G. Fixa-se também um semifluxo contínuo σ_t de endomorfismos de Q, $t \in \mathbb{T}$, que é transitivo por cadeias na base X. Uma das principais vantagens da abordagem de semigrupos de sombreamento para o estudo da transitividade por cadeias num espaço E é que pode-se ter mais controle sob os saltos dados em E por cadeias do semifluxo. Nesse capítulo deseja-se especializar a teoria topológica de semigrupos de sombreamento em fibrados de [20] de modo a torná-la aplicável ao estudo do espectro de Morse vetorial de semifluxos em fibrados flag (capítulo 4). A idéia é que para se aplicar os semigrupos de sombreamento ao estudo de expoentes de crescimento deve-se construir semigrupos de sombreamento em Q cujos saltos são realizados por endomorfismos que são pequenos em Q (cf. Equação 4.18 e Proposição 4.7). Esses saltos devem ser pequenos o suficiente para se induzir em E as mesmas órbitas que os semigrupos de sombreamento de E definidos em (2.2) mas grandes o suficiente para se obter órbitas abertas em Q. O semigrupo de sombreamento original de [20] definido em (2.6) não é apropriado para essas aplicações pois nele os saltos do sombreamento são dados por endomorfismos que são pequenos no fibrado associado E, mas não necessariamente pequenos em Q.

Capítulo 3: Decomposição de Iwasawa e polar de fibrados principais

Fixa-se nesse capítulo um fibrado principal localmente trivial $\pi_X : Q \to X$ com grupo estrutural G redutível e base X paracompacta. Os objetivos desse capítulo são: introduzir o conceitos de decomposição de Iwasawa de Q, decomposição polar de Q, introduzir o cociclo radial associado a uma decomposição de Iwasawa de Q e obter expressões explícitas para esse cociclo. Esses conceitos são bem conhecidos no caso particular em que $Q = G$ semi-simples e a base X é um ponto e aqui são apropriadamente generalizados para o contexto de fibrados principais com grupo estrutural redutível.

Capítulo 4: Espectro de Morse vetorial

Esse é o capítulo central da tese. Fixam-se nesse capítulo um fibrado principal localmente trivial $\pi_X : Q \to X$ grupo estrutural redutível G e base paracompacta X, um semifluxo contínuo σ_t de endomorfismos de Q, $t \in \mathbb{T}$, que é transitivo por cadeias na base X. Os objetivos desse capítulo são: à partir do cociclo radial em $\mathbb{F}Q$ (capítulo 3) introduzir o cociclo radial (4.2) de σ_t em $\mathbb{F}Q$, à partir da teoria abstrata de expoentes vetoriais (capítulo 1) introduzir o espectro de Morse de σ_t que surge desse cociclo: o chamado espectro de Morse vetorial intrínseco de σ_t e, finalmente, relacionar esse espectro de Morse vetorial intrínseco de σ_t com o tipo parabólico de σ_t (aqui usa-se o capítulo 2 de modo decisivo).

Esse capítulo culmina nos Teoremas 4.19 e 4.27, que são os resultados centrais dessa tese. Mais comentários sobre o capítulo 4 encontram-se na seção 0.1.

Capítulo 1

Espectro de Morse de cociclos vetoriais

Os objetivos desse capítulo são: introduzir a linguagem de cociclos, cociclos vetoriais, no caso de cociclos vetoriais sobre semifluxos introduzir a noção de expoente de Lyapunov e de Morse e obter suas propriedades analíticas e ergódicas básicas.

Como a teoria desenvolvida nesse capítulo é uma reformulação e refinamento da teoria descrita em [3] e na seção 5.3 de [5], este capítulo da tese difere dos outros pois aqui a maioria das provas completas são fornecidas apenas quando o resultados é novo (item (6) do Teorema 1.9 e Proposição 1.25), quando a demonstração do resultado foi significativamente simplificada (Teorema 1.22) ou quando a demonstração do resultado precisa ser esclarecida no caso de cocilos vetoriais (Teorema 1.19 e Proposição 1.21).

1.1 Cociclos

Seja T um semigrupo local que age num espaço E (Definição B.1) e seja S um semigrupo abstrato, denota-se a ação de $t \in T$ em $x \in E$ por $t \cdot x = t(x)$ e os produtos em T e em S por justaposição.

Definição 1.1 *Um S-*cociclo *sobre a ação de T em E é uma aplicação parcialmente* *definida* $a : T \times E \to S$ *satisfazendo a assim chamada* propriedade de cociclo

$$a(t_2 t_1, x) = a(t_2, t_1 \cdot x) a(t_1, x), \tag{1.1}$$

sempre que os dois lados dessa expressão fizerem sentido. O espaço E *é chamado a* base do cociclo. *Caso a ação de* T *em* E *esteja subentendida chama-se* a *de um* S*-cociclo em* E*, caso o semigrupo* S *esteja subentendido chama-se* a *de cociclo em* E*. Seja* $K \subset T$ *um subsemigrupo. O cociclo* a *é denominado* K-invariante *à esquerda se para* $k \in K$ *se tem*

$$a(kt, x) = a(t, x), \qquad \textit{para todos } t \in T,\ x \in E. \tag{1.2}$$

O cociclo a *é denominado* K-equivariante *à direita se para* $k \in K$ *se tem*

$$a(tk, x) = a(t, kx), \qquad \textit{para todos } t \in T,\ x \in E. \tag{1.3}$$

Caso subentenda-se que T *e* S *são semigrupos topológicos e que a ação* $T \times E \to E$ *de* T *em* E *é contínua, também subentende-se que a aplicação* a *é contínua com respeito a essas topologias. Se* $S = V$ *é um espaço vetorial, diz-se que* a *é um* cociclo vetorial*, nesse caso a propriedade de cociclo (1.1) se torna*

$$a(t_2 t_1, x) = a(t_2, t_1 \cdot x) + a(t_1, x). \tag{1.4}$$

No caso particular em que $S = \mathbb{R}$ *diz-se que* a *é um* cociclo escalar.

Definição 1.2 *Sejam* a*,* b *dois* S*-cociclos sobre a ação de* T *em* E*, uma* cohomologia *entre esses cociclos é uma aplicação* $h : E \to S$ *tal que*

$$a(t, x) h(x) = h(t \cdot z) b(t, x), \tag{1.5}$$

nesse caso os cociclos a *e* b *são ditos* cohomólogos. *Se* a *e* b *são cociclos contínuos, subentende-se que a cohomologia* h *também é uma aplicação contínua.*

Em seguida descrevem-se maneiras clássicas de se obter cociclos e cohomologias.

Exemplo 1.3 *Seja $\pi : P \to X$ um fibrado A-principal trivial e seja T um semigrupo de endomorfismos locais de P. A cada seção global contínua $\chi : X \to P$ corresponde uma aplicação contínua $A^\chi : P \to A$ que é univocamente determinada pela equação (cf. apêndice A.2.2)*

$$p = \chi(\pi(p))A^\chi(p), \quad p \in P. \tag{1.6}$$

A partir dela define-se um A-cociclo sobre a ação de T em X que é dado por $a_\chi : T \times X \to A$,

$$a_\chi(t, x) := A^\chi(t \cdot \chi(x)), \tag{1.7}$$

de modo que a_χ é univocamente determinado pela equação

$$t\chi(x) = \chi(tx)a_\chi(t, x). \tag{1.8}$$

Se T é um semigrupo topológico que age continuamente em P, então da continuidade da aplicação A^χ segue que o cociclo a_χ é contínuo. Quaisquer dois cociclos que surjam desse processo são cohomólogos. De fato, seja $\eta : X \to P$ uma outra seção de P. Existe então uma aplicação contínua $h : X \to A$ satisfazendo $\chi(x) = \eta(x)h(x)$ (cf. apêndice A.2.2) de modo que

$$t\chi(x) = t\eta(x)h(x) = \eta(tx)a_\eta(t, x)h(x) = \chi(tx)a_\chi(t, x) = \eta(tx)h(tx)a_\chi(t, x), \tag{1.9}$$

o que implica que

$$a_\eta(t, x)h(x) = h(tx)a_\chi(t, x), \tag{1.10}$$

isto é, a aplicação h fornece uma cohomologia entre os cociclos a_η e a_χ.

Se A é um grupo de Lie abeliano com álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ então a aplicação $\exp : (\mathfrak{a}, +) \to (A, \cdot)$ é um homomorfismo de grupos que tem como inversa $\log : (A, \cdot) \to (\mathfrak{a}, +)$, onde $+$ é a soma do espaço vetorial $\mathfrak{a}$. Tomando-se o $\log$ do cociclo a_χ acima se obtém um cociclo $\mathfrak{a}$-vetorial sobre a ação de T em P.

Exemplo 1.4 *Seja $\mathbb{R}^n$ com a norma euclidiana $|\cdot|$ usual, seja $G := \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ agindo da maneira natural na Grassmaniana $\mathrm{Gr}^k(\mathbb{R}^n)$ dos subespaços k-dimensionais do $\mathbb{R}^n$. A seguir* *define-se o cociclo escalar*

$$a^k : G \times \mathrm{Gr}^k(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \tag{1.11}$$

chamado cociclo da norma em $\mathrm{Gr}^k(\mathbb{R}^n)$. *Considera-se a ação natural de G no produto alternado $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ que é dada por*

$$g(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = (gv_1) \wedge \cdots \wedge (gv_k). \tag{1.12}$$

Considera-se a projeção $\pi : (\Lambda^k(\mathbb{R}^n) - 0) \to \mathbb{P}(\Lambda^k(\mathbb{R}^n))$ que leva cada vetor não-nulo de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ à sua direção correspondente no espaço projetivo $\mathbb{P}(\Lambda^k(\mathbb{R}^n))$. Os elementos idecomponíveis de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ são os vetores da forma $v := v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$, $v_i \in \mathbb{R}^n$, onde $v \neq 0$ se, se somente, os vetores v_i são l.i. Além disso, dois conjuntos de vetores l.i. $\{v_1, \ldots, v_k\}$ e $\{v_1', \ldots, v_k'\}$ geram o mesmo subespaço $V \in \mathrm{Gr}^k(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \lambda(v_1' \wedge \cdots \wedge v_k')$, $\lambda \neq 0$. Daí segue que se pode considerar $\mathrm{Gr}^k(\mathbb{R}^n)$ como a subvariedade de $\mathbb{P}(\Lambda^k(\mathbb{R}^n))$ dada pela projeção dos elementos simples não-nulos de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$. Tem-se que

$$\text{se } \pi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = V \in \mathrm{Gr}^k(\mathbb{R}^n) \text{ então } \pi(g\,(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k)) = gV, \quad g \in G. \tag{1.13}$$

Em $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ considera-se a norma usual

$$|v_1 \wedge \cdots \wedge v_k| = \det(\langle v_i, v_j \rangle)^{1/2}. \tag{1.14}$$

Para $g \in G$ e $V \in \mathrm{Gr}^k(\mathbb{R}^n)$ define-se

$$a^k(g, V) := \log |g\,(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k)|, \tag{1.15}$$

onde

$$\pi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = V \text{ com } |v_1 \wedge \cdots \wedge v_k| = 1. \tag{1.16}$$

Para se mostrar que a^k é um cociclo sejam V e $v_1, \ldots, v_k$ como acima e sejam $g_1, g_2 \in G$. Seja $w := g_1\, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in (\Lambda^k(\mathbb{R}^n) - 0)$. Tem-se que $\pi(w/|w|) = g_1 V$ e que

$$a^k(g_2 g_1, V) = \log |g_2 w| = \log |g_2 w/|w|| + \log |w| = a^k(g_2, g_1 V) + a^k(g_1, V). \tag{1.17}$$

Para se mostrar que a^k está bem definido seja $\pi(v_1' \wedge \cdots \wedge v_k') = V$ com $|v_1' \wedge \cdots \wedge v_k'| = 1$. Então existe $\lambda \neq 0$ tal que $v_1' \wedge \cdots \wedge v_k' = \lambda(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k)$ e a condição de que estes vetores *tenham norma 1 implica que* $\lambda = \pm 1$. *Isso que fornece que* $g\, v_1' \wedge \cdots \wedge v_k' = \pm g\, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ *o que mostre que* a^k *está bem definido em (1.15). Observa-se que uma vez que* $\mathrm{O}(n)$ *preserva a norma* $|\cdot|$ *segue que se* $l \in \mathrm{O}(n)$ *então* $a^k(l, V) = 0$ *e também segue que* $a^k(gl, V) = a^k(g, lV)$. *Desse modo* a^k *é um cociclo escalar* $\mathrm{O}(n)$*-invariante à esquerda e* $\mathrm{O}(n)$*-equivariante à direita. Observa-se também que* $a_n(g) = a_n(g, \mathbb{R}^n) = \log |g\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n| = \log |\det(g)|$.

Seja $\mathcal{V} \to X$ *um fibrado vetorial com uma métrica Riemanniana. Consideram-se o seu fibrado de bases* $B\mathcal{V}$ *que é um fibrado* $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$*-principal. Considera-se o semigrupo de endomorfismos lineares locais* $\mathrm{End}_\ell(B\mathcal{V})$. *As construções acima podem ser repetidas fibra-a-fibra nos fibrados associados* $\mathrm{Gr}^k\mathcal{V}$, $\Lambda^k\mathcal{V}$ *e* $\mathbb{P}(\Lambda^k\mathcal{V})$ *para se obter uma projeção* $\pi : (\Lambda^k\mathcal{V} - 0) \to \mathbb{P}(\Lambda^k\mathcal{V}) \supset \mathrm{Gr}^k\mathcal{V}$, *uma métrica Riemanniana no fibrado vetorial* $\Lambda^k\mathcal{V}$ *dada por (1.14) e, por fim, um cociclo escalar*

$$a^k : \mathrm{End}_\ell(B\mathcal{V}) \times \mathrm{Gr}^k\mathcal{V} \to \mathbb{R}, \tag{1.18}$$

dado por

$$a^k(\varphi, V) := \log |\varphi\, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k|_{\varphi(x)}, \tag{1.19}$$

com $\varphi \in \mathrm{End}_\ell(B\mathcal{V})$, $V \in \mathrm{Gr}^k\mathcal{V}_x$ *e* $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Lambda^k\mathcal{V}_x$. *A métrica Riemanniana em* $\mathcal{V}$ *fornece uma* $\mathrm{O}(n)$*-redução* $O\mathcal{V}$ *do fibrado das bases* $B\mathcal{V}$ *que é dada pelo conjunto das bases ortonormais. Seja o subsemigrupo* $\mathrm{End}_\ell(O\mathcal{V})$ *dos endomorfismos lineares locais* $B\mathcal{V}$ *que são isometrias da métrica de* $\mathcal{V}$. *Tem-se que que* a^k *é* $\mathrm{End}_\ell(O\mathcal{V})$*-invariante.*

Seja o flag maximal do $\mathbb{R}^n$ *dado por*

$$\mathbb{F} = \{(V_1, \cdots, V_n) : V_i \subset V_{i+1} \text{ subespaços de } \mathbb{R}^n \text{ com } \dim V_i = i\}. \tag{1.20}$$

Seja $\mathbb{F}\mathcal{V}$ *o fibrado de flag maximal de* $\mathcal{V}$. *No Exemplo 3.15 será mostrado como todos os cociclos escalares da norma* a^k *em* $\mathrm{Gr}^k\mathcal{V}$ *podem ser obtidos de um mesmo cociclo vetorial em* $\mathbb{F}\mathcal{V}$, *o chamado* cociclo radial *em* $\mathbb{F}\mathcal{V}$.

1.2 Expoentes de crescimento de cociclos vetoriais

Fixa-se, num espaço topológico paracompacto Hausdorff E, um semifluxo contínuo $\sigma : \mathbb{T} \times E \to E$, onde $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{Z}^+$, e denota-se $\sigma(t,x) = \sigma_t(x) = t \cdot x$. Dessa maneira o semigrupo topológico $\mathbb{T}$ age continuamente em E por meio do semifluxo. Nesse caso um cociclo sobre a ação de $\mathbb{T}$ em E chama-se também de *cociclo sobre o semifluxo.* Fixa-se um espaço vetorial normado de dimensão finita V e fixa-se $a : \mathbb{T} \times E \to V$, um V-cociclo sobre o semifluxo. Se $T = \sum_{j=0}^{N} T_j$, com $T, T_j \in \mathbb{T}$, então colocando-se $x_0 := x$, $x_{j+1} := T_j \cdot x_j$ tem-se da propriedade de cociclo (1.4) que

$$a(T,x) = \sum_{j=0}^{N-1} a(T_j, x_j). \tag{1.21}$$

Em particular, se $T = N \in \mathbb{Z}^+$, então

$$a(N,x) = \sum_{j=0}^{N-1} a(1, j \cdot x). \tag{1.22}$$

Definição 1.5 *Dados $x \in E$, $T \in \mathbb{T}$, o* expoente de Lyapunov em tempo finito de a em *(x,T) é dado por*

$$\lambda_T(x) := \frac{1}{T} a(T,x), \tag{1.23}$$

e o expoente de Lyapunov de a em x *é o limite*

$$\lambda(x) = \lim \lambda_T(x), \quad T \to +\infty \ \text{em } \mathbb{T}, \tag{1.24}$$

se esse limite existe. Dado $\mathcal{M} \subset E$ define-se o espectro de Lyapunov de $\mathcal{M}$ *por*

$$\Lambda_{Ly}(\mathcal{M}) = \{\lambda(y) : \ y \in \mathcal{M} \ \text{e } \lambda(y) \ \text{existe}\}. \tag{1.25}$$

A existência do limite do exponente de Lyapunov é uma questão delicada. Por conta disso considera-se uma noção mais grosseira de exponentes de crescimento do cociclo a ao longo de cadeias de σ_t em E. Essa noção foi introduzida por Colonius e Kliemann no caso especial do cociclo da norma de um fluxo linear no fibrado projetivo ([5], capítulo 5.3 p.159). A idéia é que o estudo desses expoentes mais grosseiros de a seja factível por meio da teoria topológica de recorrêncoa por cadeias em E e que, a partir desses expoentes mais grosseiros, possa concluir-se algo a respeito dos expoentes de Lyapunov de a.

Será usada aqui a teoria topológica de recorrência por cadeias introduzida em [19] (cf. apêndice A.1). Para se controlar o tamanho dos saltos das cadeias fixa-se de antemão uma família $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de E que satifaz a condição de ser *admissível* (Definição A.1). Se $\mathcal{U}$ é uma cobertura de E, diz-se que dois pontos de E são $\mathcal{U}$*-próximos* se eles estão simultaneamente contidos num mesmo aberto de $\mathcal{U}$. Dados uma cobertura $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, um tempo $T \in \mathbb{T}$ e pontos $x, y \in E$, uma $(\mathcal{U}, T)$-cadeia ζ de x a y é dada por pontos $\{x = x_0, x_1, \ldots, x_N = y\} \subset E$, e tempos $\{T_0, T_1, \ldots, T_{N-1}\} \subset \mathbb{T}$, $T_i \geq T$, tais que

$$T_i \cdot x_i,\ x_{i+1} \text{ são } \mathcal{U}\text{-próximos} \qquad (i = 0, \ldots, N-1). \tag{1.26}$$

Diz-se que ζ é uma *cadeia de* $\mathcal{M}$ se seu ponto inicial x e final y (mas não necessariamente seus pontos intermediários) estão em $\mathcal{M}$. Diz-se que ζ é uma *cadeia periódica* se $x = y$.

Definição 1.6 *O* exponente Morse em tempo finito $\lambda(\zeta)$ *da* $(\mathcal{U}, T)$*-cadeia* ζ *por*

$$\lambda(\zeta) = \frac{1}{T(\zeta)} \sum_{j=0}^{N-1} a(T_j, x_j), \tag{1.27}$$

onde $T(\zeta) := \sum_{j=0}^{N-1} T_j$ *é o tempo total da cadeia. Caso se deseje enfatizar o cociclo que está sendo considerado escreve-se também* $\lambda(\zeta, a)$. *O* espectro de Morse em tempo finito *de todas as* $(\mathcal{U}, T)$*-cadeias de* $\mathcal{M}$ *é dado pelo conjunto*

$$\Lambda_{Mo}^{\mathcal{O}}(\mathcal{M}; \mathcal{U}, T) = \{\lambda(\zeta) : \zeta \text{ é uma } (\mathcal{U}, T)\text{-cadeia de } \mathcal{M}\}. \tag{1.28}$$

Se $T' \geq T$, $\mathcal{U}' \leq \mathcal{U}$, *então é imediato que*

$$\Lambda_{Mo}^{\mathcal{O}}(\mathcal{M}; \mathcal{U}', T') \subset \Lambda_{Mo}^{\mathcal{O}}(\mathcal{M}; \mathcal{U}, T). \tag{1.29}$$

Define-se então o $\mathcal{O}$-espectro de Morse de $\mathcal{M}$ *pela interseção encaixante*

$$\Lambda_{Mo}^{\mathcal{O}}(\mathcal{M}) := \bigcap \{\mathrm{cl}\Lambda_{Mo}^{\mathcal{O}}(\mathcal{M}; \mathcal{U}, T) : \mathcal{U} \in \mathcal{O},\, T > 0\}. \tag{1.30}$$

Cada $\lambda \in \Lambda_{Mo}^{\mathcal{O}}(\mathcal{M})$ *é chamado de* $\mathcal{O}$-expoente de Morse de $\mathcal{M}$.

Caso se deseje enfatizar o cociclo a que está sendo considerado escreve-se também

$$\Lambda^{\mathcal{O}}_{Mo}(\mathcal{M},\, a) := \Lambda^{\mathcal{O}}_{Mo}(\mathcal{M}). \tag{1.31}$$

Se $\mathcal{M} = \{x\}$ então denota-se

$$\Lambda^{\mathcal{O}}_{Mo}(x) := \Lambda^{\mathcal{O}}_{Mo}(\mathcal{M}), \tag{1.32}$$

que é o chamado *espectro de Morse periódico em x.* Observa-se que da Equação (1.27) segue imediatamente que

$$\lambda(\zeta) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{T_j}{T(\zeta)} \lambda_{T_j}(x_j), \tag{1.33}$$

de modo que cada expoente de Morse em tempo finito é uma combinação convexa de expoentes de Lyapunov em tempo finito. Mais adiante será mostrado que, sob certas hipóteses naturais, um resultado análogo vale para os expoentes limite (Teorema 1.22). Por último observa-se que, como na teoria de $\mathcal{O}$-cadeias, o espectro de Morse depende a priori da família admissível de coberturas $\mathcal{O}$ que se considera em E.

Exemplo 1.7 *Seja $\mathcal{V} \to X$ um fibrado vetorial com base X paracompacta e seja $\sigma_t^{\mathcal{V}}$ um semifluxo linear em $\mathcal{V}$ de tempo contínuo ou discreto. Considera-se o fibrado das bases $B\mathcal{V}$ que é um fibrado* $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$*-principal de modo que $\mathcal{V}$ é o fibrado associado de $B\mathcal{V}$ com fibra típica $\mathbb{R}^n$ e de modo que o semifluxo $\sigma_t^{\mathcal{V}}$ é o induzido em $\mathcal{V}$ de um semifluxo σ_t de endomorfismos lineares de $B\mathcal{V}$. Considera-se agora o fibrado associado* $\mathrm{Gr}^k\mathcal{V}$ *e o semifluxo induzido σ_t^k nesse fibrado por σ_t, $1 \leq k \leq n$. Escolhendo-se uma métrica Riemanniana em $\mathcal{V}$ considera-se o cociclo escalar da norma* $a^k : \mathrm{End}_\ell(B\mathcal{V}) \times \mathrm{Gr}^k\mathcal{V} \to \mathbb{R}$ *dado no Exemplo 1.4, e define-se com ele o cociclo escalar dado por*

$$a^k_\sigma : \mathbb{T} \times \mathrm{Gr}^k\mathcal{V} \to \mathbb{R}, \qquad a^k_\sigma(t,\xi) := a^k(\varphi_t, \xi). \tag{1.34}$$

Tem-se que a^k_σ é um cociclo escalar sobre a ação do semifluxo induzido σ_t^k em $\mathrm{Gr}^k\mathcal{V}$ *e, da definição de a^k, da continuidade de σ_t e da continuidade da métrica Riemanniana de $\mathcal{V}$ segue que a^k_σ é contínuo. Em palavras esse cociclo mede a taxa de expansão/contração de subespaços de dimensão k pelo semifluxo linear $\sigma_t^{\mathcal{V}}$. Seja $\mathcal{M}^k \subset$* $\mathrm{Gr}^k\mathcal{V}$ *uma componente* *transitiva por cadeias do semifluxo induzido* σ_t^k *em* $\mathrm{Gr}^k\mathcal{V}$*, denota-se o espectro de Morse de* a_σ^k *em* $\mathcal{M}^k$ *por*

$$\Lambda_{Mo}^k(\mathcal{M}^k) := \Lambda_{Mo}(\mathcal{M}^k, a_\sigma^k). \tag{1.35}$$

Esse espectro de Morse em Grassmanianas de $\mathcal{V}$ *é considerado em [6], que os obtém por meio de uma construção diferente mas que resulta no mesmo espectro definido acima. Ao longo da tese será elaborada uma teoria mais geral que a de [6] que recupera seus resultados principais (cf. Exemplo 4.3).*

1.3 Expoentes de Morse – aspectos analíticos

A seguir, para se relacionar os espectros de Morse e de Lyapunov, supõe-se que o espaço base E é compacto Hausdorff. O próximo resultado estabelece algumas propriedades básicas dos expoentes de Lyapunov de um cociclo vetorial a.

Proposição 1.8 *1) Se o cociclo* a *é cohomólogo ao cociclo* b *então eles têm os mesmos expoentes de Lyapunov.*

2) Para $T \in \mathbb{T}$ *suficientemente grande os expoentes de Lyapunov em tempo finito* $\lambda_S(x)$*,* $S \geq T$*, são uniformemente limitados.*

3) Se o expoente $\lambda(x)$ *existe então* $\lambda(x) = \lambda(t \cdot x)$*, para todo* $t \in \mathbb{T}$*.*

4) O expoente de Lyapunov $\lambda(x)$ *dado em (1.24) existe se, e só se, aquele limite existe quando se toma* $T \in \mathbb{Z}^+$*.*

Demonstração: Para o item (1) segue de (1.5) que $a(t,x) = b(t,x) + h(t \cdot x) - h(x)$, com $h : E \to V$ contínuo. Como E é compacto então h é uniformemente limitada de modo que se o limite (1.24) existe para a ele também existe para b e esses limites coincidem.

Para o item (2) considera-se a restrição do cociclo a ao compacto $[0,1] \times E$, então a norma de a é uniformemente limitada por um $M > 0$. Seja $S \geq 2$, escreve-se $S = N + \varepsilon$ com $N \in \mathbb{Z}^+$ e $\varepsilon \in [0,1)$, por (1.22) tem-se então que $a(S,x) = a(N, \varepsilon \cdot x) + a(\varepsilon, x) =$

$\sum_{j=0}^{N-1} a(1,(j+\varepsilon)\cdot x) + a(\varepsilon, x)$ de onde segue que $|\lambda_S(x)| \leq M(N+1)/N \leq 2M$, o que prova o item.

Para o item (3) tem-se que

$$\lambda(x) = \lim_{T\to\infty} [1/(T+t)]a(T+t,x) = \lim_{T\to\infty} (1/T)a(T+t,x). \tag{1.36}$$

Uma vez que $a(T+t,x) = a(T,t\cdot x)+a(t,x)$, esse último limite é igual à $\lim_{T\to\infty}(1/T)a(T,t\cdot x) = \lambda(t\cdot x)$.

Para o item (4) supõe-se que $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ e que o limite (1.24) existe para $T\to\infty$ em $\mathbb{Z}^+$. Seja $S_n \to \infty$ em $\mathbb{R}^+$, põe-se $S_n = T_n + \varepsilon_n$ onde $T_n \in \mathbb{Z}^+$ e $\varepsilon_n \in [0,1)$, então $a(S_n,x) = a(T_n,x)+a(\varepsilon_n, T_n\cdot x)$ e como a é uniformemente limitado no compacto $[0,1]\times E$ tem-se que

$$\lambda(x) = \lim_n \frac{1}{T_n} a(T_n,x) = \lim_n \frac{1}{T_n} a(S_n,x) = \lim_n \frac{1}{S_n} a(S_n,x). \tag{1.37}$$

Como a sequência $S_n \to \infty$ em $\mathbb{R}^+$ é arbitrária, segue que o limite (1.24) existe e é igual à $\lambda(x)$ para $T\to\infty \in \mathbb{R}^+$. ∎

No caso de E compacto os conjuntos transitivos por cadeia são os mesmos para qualquer família de coberturas $\mathcal{O}$ (Teorema 3.7 de [19]). Para o resto dessa seção supõe-se que $\mathcal{M}$ é um componente transitiva por cadeias de σ_t em E, tem-se então que $\mathcal{M}$ é compacta e invariante (Teorema 3.13 de [19]). Será estabelecido mais adiante que os expoentes de Morse de $\mathcal{M}$ também independem da família de coberturas $\mathcal{O}$ no caso de E compacto (Corolário 1.24 mais adiante). Assim, para se simplificar os enunciados desde já, suprime-se da notação a família $\mathcal{O}$.

Os próximos resultados estabelecem algumas propriedades básicas do espectro de Morse em $\mathcal{M}$ de um cociclo vetorial a.

Teorema 1.9 *1) Se o cociclo a é cohomólogo ao cociclo b então eles têm o mesmo espectro de Morse em $\mathcal{M}$.*

2) Para T suficientemente grande os $(\mathcal{U},T)$-expoentes de Morse em tempo finito são uniformemente limitados.

3) Se $\mathcal{M}$ contém o omega-limite $\omega(x)$, $x \in E$, então todos os valores de aderência da sequência $\lambda_T(x)$, $T \to +\infty$, estão contidos em $\Lambda_{Mo}(\mathcal{M})$. Em particular se existe o expoente de Lyapunov $\lambda(x)$ então $\lambda(x) \in \Lambda_{Mo}(\mathcal{M})$.

4) Fixando $x, y \in \mathcal{M}$, na definição do espectro de Morse $\Lambda_{Mo}(\mathcal{M})$ basta se considerar cadeias de x a y. Em particular tem-se que $\Lambda_{Mo}(x) = \Lambda_{Mo}(\mathcal{M})$.

5) O espectro de Morse $\Lambda_{Mo}(\mathcal{M})$ é um conjunto convexo, compacto e não-vazio de V.

Demonstração: Apenas o item (1) será feito com detalhes. De (1.5) segue que $a(t,x) = b(t,x) + h(t \cdot x) - h(x)$, com $h : E \to V$ contínuo. Como E é compacto então h é uniformemente limitada por um $M > 0$. Seja ζ uma $(\mathcal{U}, T)$-cadeia em $\mathcal{M}$ dada por pontos $x_0, \ldots, x_{N+1}$ com $x_0, x_{N+1} \in \mathcal{M}$ e tempos $T_0, \ldots, T_N$. Sejam $\lambda(\zeta, a)$, $\lambda(\zeta, b)$ os expoentes de Morse em tempo finito dessa cadeia segundo os cociclos a e b respectivamente. Então,

$$\lambda(\zeta, a) = \lambda(\zeta, b) + \frac{1}{T(\zeta)} \sum_{j=0}^{N-1} \left(h(t_i \cdot x_i) - h(x_i)\right). \tag{1.38}$$

Como $T(\zeta) \geq TN$ tem-se que

$$|\lambda(\zeta, a) - \lambda(\zeta, b)| \leq \frac{N}{T(\zeta)} 2M \leq \frac{2M}{T}. \tag{1.39}$$

Isso mostra que quando $T \to +\infty$ os expoentes de Morse dos cociclos a e b coincidem.

O item (2) segue diretamente da Equação (1.33) e do item (2) da Proposição anterior.

Os itens de (3) à (5) são provados como na seção 2 de [3], com as $\varepsilon/2$-bolas substituídas pelos $\leq \frac{1}{2}$-refinamentos de coberturas dados na Definição 3.1 de [19] e com a continuidade uniforme substituída pelo Lema 3.5 de [19].

∎

Teorema 1.10 *Na definição do espectro de Morse $\Lambda_{Mo}(\mathcal{M})$ basta se considerar cadeias em $\mathcal{M}$ com tempos inteiros $\mathbb{Z}^+$.*

Demonstração: Supõe-se que $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$, pois no caso $\mathbb{T} = \mathbb{Z}^+$ não há nada a se provar. Para $t \geq s$, tem-se da propriedade do semifluxo que

$$\sigma_{t-s} \circ \sigma_s(x) = \sigma_t(x), \tag{1.40}$$

e da propriedade do cociclo aplicada à $a(t,x) = a((t-s)+s,x)$, tem-se também que

$$a(t-s, s\cdot x) = a(t,x) - a(s,x). \tag{1.41}$$

Por compacidade, a restrição de a ao compacto $[0,1]\times E$ é uniformemente limitada por um $M>0$. Escolhendo um M maior se necessário pode-se supor que M também é o limitante uniforme dos expoentes de Morse de tempo finito que é dado pelo item (2). Considera-se a restrição de σ à $[0,1]\times E$, então pelo Lema 3.5 de [19] dado $\mathcal{U}\in\mathcal{O}$ existe $\mathcal{V}\in\mathcal{O}$ tal que se x, y são $\mathcal{V}$-próximos então $t\cdot x$, $t\cdot y$ são $\mathcal{U}$-próximos para todo $t\in[0,1]$. Agora sejam $T\geq 1$ e ζ uma $(\mathcal{V},2T)$-cadeia em $\mathcal{M}$ dada por pontos $x_0,\ldots,x_{N+1}$ com $x_0,x_{N+1}\in\mathcal{M}$ e tempos $T_0,\ldots,T_N$. Afirma-se que existem $\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_N\in[0,1)$ tais que a cadeia η dada por

$$y_0 := x_0, \quad y_i := \varepsilon_{i-1}x_i, \quad 1\leq i\leq N+1, \tag{1.42}$$

$$S_0 := T_0+\varepsilon_0, \quad S_i := T_i+\varepsilon_i-\varepsilon_{i-1}, \quad 1\leq i\leq N, \tag{1.43}$$

é uma $(\mathcal{U},T)$-cadeia em $\mathcal{M}$ com tempos inteiros $S_i\in\mathbb{Z}^+$ e tempo total $T(\eta)=T(\zeta)+\varepsilon_N$. De fato escolhe-se $\varepsilon_0\in[0,1)$ tal que $S_0=T_0+\varepsilon_0\in\mathbb{Z}^+$, então escolhe-se $\varepsilon_1\in[0,1)$ tal que $N_1=(t_1-\varepsilon_0)+\varepsilon_1\in\mathbb{Z}^+$ e assim em diante até ε_N. Tem-se que $S_i=T_i+\varepsilon_i-\varepsilon_{i-1}\geq 2T-1\geq T$ e que $T_i\geq 2>\varepsilon_{i-1}$. Por (1.40) tem-se que

$$S_iy_i = ((T_i+\varepsilon_i)-\varepsilon_{i-1})\cdot\varepsilon_{i-1}x_i = \varepsilon_i\cdot(T_i\cdot x_i). \tag{1.44}$$

Como $T_i\cdot x_i$ e x_{i+1} são $\mathcal{V}$-próximos e como $\varepsilon_i\in[0,1]$, pela escolha de $\mathcal{V}$ tem-se que $S_iy_i=\varepsilon_i\cdot(T_i\cdot x_i)$ e $y_{i+1}=\varepsilon_i\cdot x_{i+1}$ são $\mathcal{U}$-próximos, $1\leq i\leq N$. Como $\mathcal{M}$ é invariante, segue que $y_{N+1}=\varepsilon_N x_{N+1}\in\mathcal{M}$. Isso prova a afirmação sobre a cadeia η. Para relacionar os expoentes das cadeias ζ e η, usa-se (1.41) e obtém-se que

$$\begin{aligned}a(S_i,y_i) = a((T_i+\varepsilon_i)-\varepsilon_{i-1},\varepsilon_{i-1}\cdot x_i) &= a(T_i+\varepsilon_i,x_i)-a(\varepsilon_{i-1},x_i) = \\ &= a(T_i,x_i)+a(\varepsilon_i,T_i\cdot x_i)-a(\varepsilon_{i-1},x_i),\end{aligned}$$

de modo que

$$|a(S_i,y_i)-a(T_i,x_i)|\leq 2M. \tag{1.45}$$

Tem-se que

$$\lambda(\zeta) - \lambda(\eta) = \frac{1}{T(\eta)} \left(\varepsilon_N \lambda(\zeta) + \sum_{i=0}^{N} (a(T_i, x_i) - a(S_i, y_i)) \right). \tag{1.46}$$

Uma vez que $T(\eta) \geq TN$, pela escolha de M e por (1.45), tem-se então que

$$|\lambda(\zeta) - \lambda(\eta)| \leq \frac{3M}{T}, \tag{1.47}$$

onde M não depende de T, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$.

Dado um expoente $\lambda \in \Lambda_{Mo}(\mathcal{M})$ usam-se as considerações anteriores para se provar que ele pode ser arbitrariamente aproximado por um expoente de tempo finito de uma cadeia em $\mathcal{M}$ com tempos inteiros. De fato sejam dados $\delta > 0$, $T > 0$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Pode-se tomar T grande o suficiente para que $3M/T < \delta/2$. Seja $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ dado pelas considerações anteriores e tome uma $(\mathcal{V}, 2T)$-cadeia ζ tal que

$$|\lambda(\zeta) - \lambda| < \delta/2. \tag{1.48}$$

As considerações anteriores fornecem então uma $(\mathcal{U}, T)$-cadeia η em $\mathcal{M}$ com tempos inteiros tal que η satisfaz (1.47). Pela escolha de ζ e pela escolha de T, tem-se então que

$$|\lambda - \lambda(\eta)| \leq |\lambda(\eta) - \lambda(\zeta)| + |\lambda(\zeta) - \lambda| < \delta, \tag{1.49}$$

o que prova o resultado. ∎

Observação 1.11 *Serão feitas algumas considerações sobre o Teorema 1.9. O item (3) mosta que o espectro de Morse em $\mathcal{M}$ contém o espectro de Lyapunov em $\mathcal{M}$. O item (4) mostra que para obter o espectro de Morse em $\mathcal{M}$ é suficiente considerar cadeias periódicas num ponto inicial $x \in \mathcal{M}$ fixado. Grosso modo isso ocorre porque $\mathcal{M}$ é transitivo por cadeias de modo que as cadeias de x a x percorrem todo $\mathcal{M}$. O item (5) mostra que, apesar de ser grosseiro, o espectro de Morse mantém certa estrutura.*

O Teorema 1.10 é o único dentre esses resultados que não tem análogo em [3]. Ele mostra que, como no caso do expoente de Lyapunov, um expoente de Morse só depende do semifluxo com tempos inteiros. No caso em que $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ o resultado desse teorema *deve ser usado com cuidado: como as cadeias com tempos inteiros que se obtém em sua demonstração não têm os pontos finais fixados esse resultado não se pode usado ao mesmo tempo que item (5), além disso $\mathcal{M}$ deve ser a componente transitiva por cadeia do semifluxo de tempo contínuo.*

De qualquer modo é o Teorema 1.10 que possibilita que, nas próximas Seções, a teoria ergódica de tempo discreto possa ser aplicada ao estudo dos expoentes de Morse de cociclos vetoriais obtendo-se resultados que incluem os de [3]. O método usado em [3] para aplicar teoria ergódica de tempo contínuo ao estudo de expoentes de crescimento da norma de um fluxo linear é bem particular para fluxos lineares e bastante mais envolvido: mergulha-se o fluxo num fluxo linear trivial e faz-se uma cohomologia com um fluxo suave.

O próximo resultado mostra o que ocorre com o espectro de Morse de um fluxo quando se reverte seu tempo.

Proposição 1.12 *Supõe-se que σ_t é um fluxo e considera-se o fluxo de tempo invertido $\sigma_t^* = \sigma_{-t}$. Tem-se que $\mathcal{M}$ é uma componente transitiva por cadeias de σ_t^* em E e, denotando-se o espectro de Morse de σ_t^* em $\mathcal{M}$ por $\Lambda_{Mo}^*(\mathcal{M})$, tem-se que*

$$\Lambda_{Mo}^*(\mathcal{M}) = -\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}). \tag{1.50}$$

Demonstração: Usando-se a compacidade de E, substituindo-se as $\varepsilon/2$-bolas pelos $\leq \frac{1}{2}$-refinamentos de coberturas dados na Definição 3.1 de [19] e substituindo-se a continuidade uniforme pelo Lema 3.5 de [19] pode-se provar facilmente que $\mathcal{M}$ também é uma componente transitiva de σ_t^* em E.

Pela compacidade de E tem-se do item (4) do Teorema 1.9 que $\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}) = \cup_{x\in\mathcal{M}}\Lambda_{Mo}(x)$ de modo que na definição (1.30) de $\Lambda_{Mo}(\mathcal{M})$ pode-se considerar na definição dos conjuntos de expoentes de Morse de tempo finito (1.28) apenas cadeias em $\mathcal{M}$ que são periódicas (aqui o ponto final e inicial de cada cadeia pode ser qualquer ponto de $\mathcal{M}$ e não é fixado de antemão). A mesma observação vale para $\Lambda_{Mo}^*(\mathcal{M})$. Seja então ζ uma $(\mathcal{U}, T)$-cadeia x_0-periódica de σ em E dada por pontos $x_0, \ldots, x_{N+1} = x_0$ e tempos $T_0, \ldots, T_N \in \mathbb{T}$.

Considera-se a cadeia ζ^* de σ^* dada por pontos $y_i := T_{N-i} \cdot x_{N-i}$, $y_{N+1} := y_0$ e tempos $S_i := T_{N-i}$, $i = 0, \dots, N$. Tem-se então que

$$\sigma^*(S_i, y_i) = x_{N-i}, \quad y_{i+1} = T_{N-i-1} \cdot x_{N-i-1}, \quad (i = 0, \dots, N-1) \tag{1.51}$$

além disso $\sigma^*(S_N, y_N) = x_0 = x_{N+1}$ e $y_{N+1} = y_0 = T_N \cdot x_N$. Desse modo $\sigma^*(S_i, y_i)$ e y_{i+1} são $\mathcal{U}$-próximos para $i = 0, \dots, N$, o que mostra que ζ^* é uma $(\mathcal{U}, T)$-cadeia y_0-periódica de σ^* em E. Tem-se que

$$0 = a_\sigma(-t + t, x) = a_\sigma(t, x) + a_\sigma(-t, t \cdot x), \tag{1.52}$$

de onde segue que

$$a_{\sigma^*}(S_i, y_i) = a_\sigma(-T_{N-i}, T_{N-i} \cdot x_{N-i}) = -a_\sigma(T_{N-i}, x_{N-i}). \tag{1.53}$$

Como $T(\zeta) = T(\zeta^*)$ segue então que

$$\lambda^*(\zeta^*) = \frac{1}{T(\zeta^*)} \sum_{i=0}^{N} a_{\sigma^*}(S_i, y_i) = -\frac{1}{T(\zeta)} \sum_{i=0}^{N} a_\sigma(T_i, x_i) = -\lambda(\zeta), \tag{1.54}$$

o que mostra que

$$-\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}; \mathcal{U}, T) \subset \Lambda^*_{Mo}(\mathcal{M}; \mathcal{U}, T). \tag{1.55}$$

Trocando os papéis de σ e σ^* obtém-se a inclusão recíproca na Equação (1.55) o que estabelece a igualdade nessa Equação. Como $\mathcal{U}$, T são arbitrários isso implica imediatamente a conclusão da Proposição. ∎

A seguir, a convexidade do espectro de Morse dada no item (5) do Teorema 1.9 será elucidada por meio de duas caracterizações do espectro de Morse (Teorema 1.22), em particular essas caracterizações fornecerão que cada ponto extremo do convexo $\Lambda_{Mo}(\mathcal{M})$ é um expoente de Lyapunov em $\mathcal{M}$. Para tal estabelecem-se na próxima seção alguns resultados auxiliares.

1.4 Alguns resultados de Teoria Convexa e de Teoria Ergódica

Nessa seção estabelecem-se notações e resultados auxiliares que serão necessários na próxima seção. Os resultados de Análise Funcional e Teoria de Medida usados aqui são encontrados em [23]. Os resutados de medidas invariantes e ergódicas usados aqui são encontrados em [21, 14], são resultados são clássicos que, no entanto, devem ser usados com cuidado, uma vez que na maioria das referências eles são provados no contexto de espaços métricos compactos e o contexto desse capítulo da tese é o de espaços Hausdorff compactos.

Seja W um espaço vetorial localmente convexo, $K \subset W$ um conjunto convexo. Um ponto $x \in K$ é um *ponto extremo de* K se não pode ser escrito como combinação convexa não-trivial de pontos de K, o conjunto de pontos extremos de K é denotado por $\operatorname{ex} K$. O *fecho convexo fechado* de um conjunto $X \subset W$, denotado por $\overline{\operatorname{co}}\, X$, é a interseção de todos convexos fechados de W que contém X. O seguinte resultado fundamental de teoria convexa fornece a existência e uma propriedade importante de pontos extremos (Teorema 26, seção 10.7 p.207 de [23]).

Teorema 1.13 (Krein-Milman) *Seja K um convexo compacto de W então tem-se que*

$$K = \overline{\operatorname{co}}\,(\operatorname{ex} K). \tag{1.56}$$

Seja V um outro espaço vetorial localmente convexo. Uma aplicação $T : K \to V$ se diz *afim* se $T(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha T(x) + (1-\alpha)T(y)$, para $x, y \in K$, $\alpha \in [0,1]$. O próximo resultado relaciona pontos extremos do domínio e da imagem de uma aplicação afim T.

Proposição 1.14 *Seja K um convexo compacto de W e seja $T : K \to V$ uma aplicação afim contínua, então valem os seguinte items.*

1) Se y é um ponto extremo de $T(K)$ então $\operatorname{ex}(T^{-1}(y)) \subset \operatorname{ex} K$.

2) $\operatorname{ex} T(K) \subset T(\operatorname{ex} K)$.

3) $T(K) = \overline{\text{co}}\, T(\text{ex}\, K)$.

4) Seja $V = \mathbb{R}$*, supõe-se que* $K \subset \{x : T(x) \geq 0\}$ *e que* $K \cap T^{-1}(0) \neq \varnothing$*, então* K *tem um ponto extremo em* $T^{-1}(0)$.

Demonstração: Para o item (1) seja $y \in \text{ex}\, T(K)$, toma-se $x \in \text{ex}\,(T^{-1}(y))$. Para se mostrar que $x \in \text{ex}\, K$ escreve-se $x = tx_1 + (1-t)x_2$, $t \in (0,1)$, x_1, $x_2 \in K$, então $y = Tx = tT(x_1) + (1-t)T(x_2)$, mas como y é extremo em $T(K)$ então $T(x_1) = T(x_2) = y$ de modo que x_1, $x_2 \in T^{-1}(y)$, mas como x é extremo nesse último convexo então $x_1 = x_2 = x$, o que mostra que x é extremo em K.

Para o item (2) seja $y \in \text{ex}\, T(K)$. Como V é Hausdorff, $\{y\}$ é fechado e, como T é contínua, segue que $T^{-1}(y)$ é um compacto convexo de modo que pelo Teorema de Krein-Milmam ele possui um ponto extremo x. Pelo item (1) esse ponto também é extremo em K e, como $T(x) = y$, isso prova a inclusão dada no item (2).

Para o item (3) usa-se o Teorema de Krein-Milmam em $T(K)$ e o item (2) para se obter que que $T(K) = \overline{\text{co}}\, \text{ex}\, T(K) \subset \overline{\text{co}}\, T(\text{ex}\, K) \subset \overline{\text{co}}\, T(K) = T(K)$.

Para o item (4) observa-se que as hipóteses implicam que $T(K) = [0, a] \subset \mathbb{R}$, $a \geq 0$, de modo que 0 é um ponto extremo de $T(K)$ e pelo item (2) $0 \in T(\text{ex}\, K)$, o que prova este item. ∎

Seja E um espaço compacto Hausdorff, fixa-se em E um semifluxo contínuo de tempo discreto σ_t cuja aplicação de tempo um $\sigma_1 : E \to E$ será denotada por σ. Consideram-se os seguintes espaços de medida de E (cf. capítulo 11 de [23])

$$\mathbb{M}(E) := \{\text{medidas finitas com sinal nos borelianos de } E\}\,, \tag{1.57}$$

$$\mathbb{P}(E) := \{\text{medidas de probabilidade em } \mathbb{M}(E)\}\,. \tag{1.58}$$

Uma medida de probabilidade $\mathbb{P} \in \mathbb{P}(E)$ é dita *invariante* se para todo boreliano B de E tem-se que $(\sigma^*\mathbb{P})(B) = \mathbb{P}(\sigma^{-1}B) = \mathbb{P}(B)$, considera-se então

$$\mathbb{P}_{\text{inv}}(E) := \{\text{medidas de probabilidade invariantes em } \mathbb{P}(E)\}\,. \tag{1.59}$$

Um conjunto $B \subset E$ é dito $\mathbb{P}$-invariante se é um boreliano tal que $\mathbb{P}(\sigma^{-1}(B)\triangle B) = 0$, onde $\triangle$ é a diferença simétrica de conjuntos. A medida de probabilidade $\mathbb{P} \in \mathbb{P}_{\text{inv}}(E)$ é dita *ergódica* se cada conjunto $\mathbb{P}$-invariante tem $\mathbb{P}$-medida 0 ou 1, considera-se então

$$\mathbb{P}_{\text{erg}}(E) := \{\text{medidas de probabilidade ergódicas em } \mathbb{P}_{\text{inv}}(E)\}. \tag{1.60}$$

A variação total de uma medida $\mu \in \mathbb{M}(E)$ é denotada por $|\mu|$, que define uma norma em $\mathbb{M}(E)$. É imediato que $\mathbb{P}(E) \supset \mathbb{P}_{\text{inv}}(E) \supset \mathbb{P}_{\text{erg}}(E)$ são convexos de $\mathbb{M}(E)$ que são fechados e limitados na topologia da norma de $\mathbb{M}(E)$, a seguir será considerada em $\mathbb{M}(E)$ uma topologia localmente convexa mais fraca que a topologia da norma na qual esses conjuntos são compactos.

Consideram-se o espaço de Banach $C(E)$ das funções reais contínuas de E munido da norma do sup dada por $\|f\|_\infty := \sup_{x\in E} |f(x)|$. Se W é um espaço vetorial normado, denota-se por W^* o espaço vetorial normado dos funcionais lineares contínuos $\varphi : W \to \mathbb{R}$, a norma de W^* é $\|\varphi\| := \sup_{|v|=1} |\varphi(v)|$. Dado $\mu \in \mathbb{M}(E)$ considera-se o funcional

$$L_\mu(f) = \int_E f \mathrm{d}\mu, \quad f \in C(E), \tag{1.61}$$

é imediato que $\|L_\mu\| = |\mu|$ de onde segue que $L_\mu \in C(E)^*$. Tem-se o seguinte resultado fundamental de teoria da medida (Teorema 8, seção 14.3 p.310 de [23]) que será usado mais adiante para se contruir medidas invariantes.

Teorema 1.15 (Riesz) *A correspondência $\mu \in \mathbb{M}(E) \mapsto L_\mu \in C(E)^*$ é uma isometria sobrejetiva.*

A *topologia da convergência pontual* em $\mathbb{M}(E)$ é definida da seguinte maneira: seja I um conjunto dirigido de índices, a rede $\mu_\alpha \in \mathbb{M}(E)$, $\alpha \in I$, converge à $\mu \in \mathbb{M}(E)$ se $L_{\mu_\alpha}(f) \to L_\mu(f)$ para todo $f \in C(E)$. O *suporte* de uma medida μ, denotado por $\operatorname{supp}\mu$ é o menor fechado K de E tal que $L_\mu(f) = 0$ se f se anula em K, $f \in C(E)$. Um funcional $L \in C(E)^*$ é dito *positivo* se $Lf \geq 0$ sempre que $f \geq 0$, $f \in C(E)$. Denota-se também por 1 a função de $C(E)$ que é constante e igual a 1. Tem-se então os seguintes resultados.

Corolário 1.16 *Sob a correspondência entre* $\mathbb{M}(E)$ *e* $C(E)^*$ *dada no Teorema de Riesz tem-se que*

i) a topologia da convergência pontual de $\mathbb{M}(E)$ *corresponde à topologia fraca-*$*$ *de* $C(E)^*$.

ii) $\mathbb{P}(E)$ *corresponde aos funcionais positivos* $L \in C(E)^*$ *tais que* $L(1) = 1$.

iii) $\mathbb{P}_{\text{inv}}(E)$ *corresponde aos funcionais positivos* $L \in C(E)^*$ *tais que* $L(1) = 1$ *e* $L(f \circ \sigma) = L(f)$ *para todos* $f \in C(E)$.

Demonstração: Os itens (i) e (ii) são imediatos. Para o item (iii) observa-se que pelo item (ii) tem-se $L = L_\mu$, $\mu \in \mathbb{P}(E)$, além disso $L(f \circ \sigma) = L_\mu(f \circ \sigma) = L_{\sigma^*\mu}(f)$. Assim $L(f \circ \sigma) = L(f)\ \forall f \in C(E)$ se, e somente se, $L_{\sigma^*\mu}(f) = L_\mu(f)\ \forall f \in C(E)$ o que ocorre, pela correspondência de Riesz, se, e somente se $\sigma^*\mu = \mu$ logo se, e somente se μ é invariante.
∎

Teorema 1.17 *Considerando-se* $\mathbb{M}(E)$ *com a topologia da convergência pontual então*

1) $\mathbb{M}(E)$ *é um espaço vetorial localmente convexo.*

2) $\mathbb{P}(E) \supset \mathbb{P}_{\text{inv}}(E) \supset \mathbb{P}_{\text{erg}}(E)$ *são compactos convexos de* $\mathbb{M}(E)$.

3) $\text{ex}\,\mathbb{P}_{\text{inv}}(E) = \mathbb{P}_{\text{erg}}(E)$.

Demonstração: O item (1) segue do item (i) da Proposição anterior, uma vez que a topologia fraca-$*$ de $C(E)^*$ é localmente convexa. Já se observou que cada conjunto dado no item (2) é um convexo fechado e limitado na topologia da norma de $\mathbb{M}(E)$, logo corresponde à um conjunto com as mesmas propriedades em $C(E)^*$ que, pelo Teorema de Banach-Alaouglu (Teorema 17, seção 10.7 p.202 de [23]), é um conjunto compacto na topologia fraca-$*$ de $C(E)^*$, de volta à $\mathbb{M}(E)$ obtém-se pelo item (i) da Proposição anterior que cada um desses conjuntos é compacto na topologia da convergência pontual em $\mathbb{M}(E)$. O item (3) é provado na seção 10 de [21] (para a inclusão "$\subset$ que é a única que será usada mais adiante cf. o Lema 4.1.20 p.139 de [14]). ∎

Consideram-se agora resultados que envolvem integração vetorial. Seja V um espaço vetorial dimensão finita com norma $|\cdot|$, considera-se o espaço de Banach $C(E,V)$ das funções contínuas de E em V munido da norma do sup dada por $\|f\|_\infty := \sup_{x\in E}|f(x)|$. Em particular $C(E) = C(E,\mathbb{R})$. Sejam dados $f \in C(E,V)$ e $\mu \in \mathbb{M}(E)$, a *integral de f com respeito a μ* é o vetor $\int_E f \mathrm{d}\mu \in V$ univocamente determinado por

$$\varphi\left(\int_E f \mathrm{d}\mu\right) = \int_E (\varphi \circ f)\mathrm{d}\mu, \quad \forall \varphi \in V^*, \tag{1.62}$$

em outras palavras integra-se f coordenada-à-coordenada. Enuncia-se a seguir uma versão fraca do Teorema Ergódico de Birkhoff que é adequada para o uso da próxima seção. Seja $q : E \to V$ contínua e $x \in E$, a *média temporal de q ao longo da trajetória de x* é o limite

$$\widetilde{q}(x) := \lim \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} q(j\cdot x), \quad N \to +\infty \text{ em } \mathbb{Z}^+, \tag{1.63}$$

caso esse limite exista.

Teorema 1.18 (Birkhoff) *Para toda probabilidade ergódica $\mathbb{P} \in \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(E)$ tem-se que as médias temporais e espaciais coincidem*

$$\widetilde{q}(x) = \int_E q \,\mathrm{d}\mathbb{P}, \tag{1.64}$$

para $\mathbb{P}$-quase todos $x \in \operatorname{supp}\mathbb{P}$.

Demonstração: Para $V = \mathbb{R}$ isso segue diretamente do Teorema Ergódico de Birkhoff clássico (Teorema 4.1.2 p.136 de [14]). Como V é de dimensão finita escolhe-se uma base $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ de V^*. Para cada i aplica-se o resultado para $V = \mathbb{R}$ à função real $\varphi_i \circ q$ e obtem-se que

$$\lim \varphi_i\left(\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} q(j\cdot x)\right) = \lim \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}(\varphi_i \circ q)(j\cdot x) = \int_E (\varphi_i \circ q)\,\mathrm{d}\mathbb{P}, \quad N \to +\infty \text{ em } \mathbb{Z}^+, \tag{1.65}$$

para x um conjunto U_i de $\mathbb{P}$-probabilidade 1, $U \subset \operatorname{supp}\mathbb{P}$. Tomando-se a interseção U dos U_i obtém-se $U \subset \operatorname{supp}\mathbb{P}$ com $\mathbb{P}$-probabilidade 1 e tal que para cada $x \in U$ a

Equação (1.65) vale para todos $i = 1, \ldots, n$. Como φ_i é uma base de V^* segue que o vetor $(1/N)\sum_{j=0}^{N-1} q(j \cdot x)$ converge em V, assim da equação anterior segue que

$$\varphi\left(\lim \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} q(j \cdot x)\right) = \int_E (\varphi \circ q)\, \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad N \to +\infty \text{ em } \mathbb{Z}^+, \quad \varphi \in V^*. \tag{1.66}$$

Pela definição de integral vetorial (1.62) obtém-se então a conclusão do Teorema. ∎

Uma espécie de recíproca do Teorema de Birkhoff é dada no resultado a seguir que é uma versão fraca do Teorema de Krylov-Bogolyubov adequada para o uso da próxima seção (cf. Teorema 4.1.1 p.135 de [14]).

Teorema 1.19 (Krylov-Bogolyubov) *Seja $x \in E$ tal que a média temporal $\widetilde{q}(x)$ dada em (1.63) existe. Então existe uma medida invariante $\mathbb{P}_x \in \mathbb{P}_{\mathrm{inv}}(E)$ tal que essa média temporal é dada por uma média espacial*

$$\widetilde{q}(x) = \int_E q\, \mathrm{d}\mathbb{P}_x. \tag{1.67}$$

Demonstração: Para $N \in \mathbb{Z}^+$ define-se a sequência

$$v_N := \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} q(j \cdot x), \tag{1.68}$$

e o funcional linear

$$L_{N,x}(f) := \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(j \cdot x), \quad f \in C(E), \tag{1.69}$$

é imediato então que para $\varphi \in V^*$ tem-se

$$\varphi(v_N) = L_{N,x}(\varphi \circ q). \tag{1.70}$$

Seja $L_N := L_{N,x}$, é imediato que L_N é positivo, que $L_N(1) = 1$ e que $\|L_N\| = 1$, em particular $L_N \in C(E)^*$. Pelo Teorema de Banach-Alaouglu (Teorema 17, seção 10.7 p.202 de [23]) a sequência de funcionais L_N possui então uma subrede que converge na topologia fraca-$*$ a $L \in C(E)^*$. É imediato que, como os L_N, o funcional limite L é positivo e tal que $L(1) = 1$, assim pelo item (ii) do Corolário 1.16 segue que $L = L_{\mathbb{P}_x}$ onde $\mathbb{P}_x \in \mathbb{P}(E)$. Uma vez que por hipótese existe a média temporal $\widetilde{q}(x)$ então qualquer subrede da sequência v_N converge à $\widetilde{q}(x)$, assim para cada $\varphi \in V^*$ toma-se o limite em (1.70) obtendo-se que

$$\varphi(\widetilde{q}(x)) = L(\varphi \circ q) = \int_E (\varphi \circ q) \mathrm{d}\mathbb{P}_x, \quad \forall \varphi \in V^*. \tag{1.71}$$

Para estabelecer o resultado em (1.67) só falta mostrar que $\mathbb{P}_x$ é invariante. Para tal observa-se que de (1.69) segue que para toda $f \in C(E)$ vale

$$L_N(f \circ \sigma) = L_N(f) + \frac{1}{N}(f(N \cdot x) - f(x)), \tag{1.72}$$

de modo que

$$|L_N(f \circ \sigma) - L_N(f)| \leq \frac{2}{N}\|f\|_\infty, \tag{1.73}$$

como L é o limite pontual de uma subrede da sequência L_N, $N \to \infty$, segue que L satisfaz $L(f \circ \sigma) = L(f)$ para todo $f \in C(E)$, como $L = L_{\mathbb{P}_x}$ segue então do item (iii) do Corolário 1.16 que $L_{\mathbb{P}_x}$ é uma probabilidade invariante. ∎

1.5 Expoentes de Morse – aspectos ergódicos

Nessa seção supõe-se que o espaço base E é compacto Hausdorff. À partir do cociclo a define-se a função contínua

$$q : E \to V, \quad q(x) := a(1, x), \qquad (x \in E). \tag{1.74}$$

Tem-se por (1.22) que para tempos discretos $N \in \mathbb{Z}^+$ o cociclo vetorial a é determinado pela função q por meio de

$$a(N, x) = \sum_{j=0}^{N-1} q(j \cdot x). \tag{1.75}$$

Pela Equação anterior e pelo item (4) da Proposição 1.8 tem-se que o expoente de Lyapunov vetorial $\lambda(x)$ é dado pelo limite

$$\lambda(x) = \lim \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} q(j \cdot x), \quad N \to +\infty \text{ em } \mathbb{Z}^+, \tag{1.76}$$

que é a média temporal de q ao longo da trajetória de x em tempo discreto. Quando o espaço base E é compacto, isso indica a conexão entre a teoria dos expoentes de Lyapunov e teoria ergódica em tempo discreto. A Equação (1.33) então indica a conexão entre a teoria dos expoentes de Morse e teoria ergódica em tempo discreto. Os próximos resultados dessa seção estabelecem essa conexão.

Proposição 1.20 *Se $\mathbb{P}_\lambda \in \mathbb{P}_{\text{inv}}(\mathcal{M})$ é ergódica então existe $x \in \mathcal{M}$ tal que o expoente de Lyapunov $\lambda(x)$ existe e é dado por*

$$\lambda(x) = \int_{\mathcal{M}} q \; \mathrm{d}\mathbb{P}_\lambda \in \Lambda_{Ly}(\mathcal{M}). \tag{1.77}$$

Demonstração: Esse resultado é uma consequência direta da expressão (1.76) do expoente de Lyapunov $\lambda(x)$ como uma média temporal de q e do Teorema Ergódico de Birkhoff (Teorema 1.18). ∎

O próximo resultado mostra que cada expoente de Morse (logo, pelo item (3) do Teorema 1.9, cada expoente de Lyapunov) do cociclo vetorial a admite uma representação integral por uma probabilidade invariante. Ele é uma generalização da construção dada em [5], apêndice B.3 p.552.

Proposição 1.21 *Para cada expoente de Morse $\lambda \in \Lambda_{Mo}(\mathcal{M})$ existe uma probabilidade invariante $\mathbb{P}_\lambda \in \mathbb{P}_{\text{inv}}(\mathcal{M})$ tal que*

$$\lambda = \int_{\mathcal{M}} q \; \mathrm{d}\mathbb{P}_\lambda. \tag{1.78}$$

Demonstração: A idéia é modificar a demonstração do Teorema de Krylov-Bogolyubov (Teorema 1.19) para se aplicar também a cadeias. Primeiro usa-se o Teorema 1.10 para se obter $\lambda = \lim_\alpha \lambda(\zeta_\alpha)$ onde ζ_α é a uma rede de cadeias em $\mathcal{M}$ com tempos inteiros.

Seja ζ uma $(\mathcal{U}, T)$-cadeia com tempos inteiros e com $T \geq 1$, pode-se usar então as Equações (1.33) e (1.75) para se escrever seu expoente de Morse de tempo finito como uma combinação convexa de médias temporais de q dada por

$$\lambda(\zeta) = \sum_{j=1}^{N} \frac{T_j}{T(\zeta)} \left(\frac{1}{T_j} \sum_{i=0}^{T_j - 1} q(i \cdot x_j) \right). \tag{1.79}$$

Para $T \in \mathbb{Z}^+$ toma-se os funcionais lineares $L_{x,T}$ definidos em (1.69) e considera-se o funcional linear dado pela seguinte combinação convexa

$$L_\zeta(f) := \sum_{j=1}^{N} \frac{T_j}{T(\zeta)} L_{T_i,x_i}(f), \quad f \in C(E). \tag{1.80}$$

Segue então de (1.79) que

$$\varphi(\lambda(\zeta)) = L_\zeta(\varphi \circ q), \quad \varphi \in V^*. \tag{1.81}$$

É imediato que L_ζ é positivo, que $L_\zeta(1) = 1$ e que $\|L_\zeta\| = 1$, , em particular $L_\zeta \in C(E)^*$. Além disso segue de (1.73) e de $T(\zeta) \geq NT$ que

$$|L_\zeta(f \circ \sigma) - L_\zeta(f)| \leq \sum_{j=1}^{N} \frac{T_j}{T(\zeta)} \left(\frac{1}{T_j} 2\|f\|_\infty \right) \leq \frac{2}{T}\|f\|_\infty. \tag{1.82}$$

Voltando à rede ζ_α seja $L_\alpha := L_{\zeta_\alpha}$ então de (1.81) segue que

$$\varphi(\lambda(\zeta_\alpha)) = L_\alpha(\varphi \circ q), \quad \varphi \in V^*. \tag{1.83}$$

Usando-se que $\lambda(\zeta_\alpha) \to \lambda$ e a estimativa (1.82) pode-se argumentar exatamente como no último parágrafo da demonstração do Teorema 1.19 para se obter uma probabilidade invariante $\mathbb{P}_\lambda$ satisfazendo (1.78). ∎

Teorema 1.22 *O espectro de Morse satisfaz*

$$\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}) = \left\{ \int_{\mathcal{M}} q \; \mathrm{d}\mathbb{P} : \; \textit{onde } \mathbb{P} \in \mathbb{P}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{M}) \right\}. \tag{1.84}$$

Em particular tem-se que

$$\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}) = \overline{\mathrm{co}} \left(\Lambda_{Ly}(\mathcal{M}) \right), \tag{1.85}$$

além disso, cada ponto extremo do espectro de Morse $\Lambda_{Mo}(\mathcal{M})$ é um expoente de Lyapunov de $\mathcal{M}$.

Demonstração: Considera-se a aplicação afim

$$Q : \mathbb{P}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{M}) \to V, \quad \mathbb{P} \mapsto \int_{\mathcal{M}} q \; \mathrm{d}\mathbb{P}, \tag{1.86}$$

que é claramente contínua quando se mune $\mathbb{P}_{\text{inv}}(\mathcal{M})$ da topologia da convergência pontual, de modo que pelo Teorema 1.17 pode-se aplicar os resultados da Proposição 1.14. Observa-se que da Proposição 1.21 segue que

$$\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}) \subset Q(\mathbb{P}_{\text{inv}}(\mathcal{M})). \tag{1.87}$$

Agora pelo item (3) da Proposição 1.14 tem-se que $Q(\mathbb{P}_{\text{inv}}(\mathcal{M})) = \overline{\text{co}}\, Q(\text{ex}\, \mathbb{P}_{\text{inv}}(\mathcal{M}))$. Como pelo item (3) do Teorema 1.17 os pontos extremos de $\mathbb{P}_{\text{inv}}(\mathcal{M})$ são probabilidades ergódicas, tem-se então da Proposição 1.20 e do item (3) do Teorema 1.9 que

$$Q(\text{ex}\, \mathbb{P}_{\text{inv}}(\mathcal{M})) \subset \Lambda_{Ly}(\mathcal{M}) \subset \Lambda_{Mo}(\mathcal{M}). \tag{1.88}$$

Pelo item (5) do Teorema 1.9 tem-se que $\Lambda_{Mo}(\mathcal{M})$ é fechado e convexo de modo que

$$Q(\mathbb{P}_{\text{inv}}(\mathcal{M})) = \overline{\text{co}}\, Q(\text{ex}\, \mathbb{P}_{\text{inv}}(\mathcal{M})) \subset \overline{\text{co}}\, \Lambda_{Mo}(\mathcal{M}) = \Lambda_{Mo}(\mathcal{M}). \tag{1.89}$$

As equações (1.87) e (1.89) fornecem então que $\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}) = Q(\mathbb{P}_{\text{inv}}(\mathcal{M}))$ o que prova (1.84).

O item (2) da Proposição 1.14 fornece que $\text{ex}\, \Lambda_{Mo}(\mathcal{M}) = \text{ex}\, Q(\mathbb{P}_{\text{inv}}(\mathcal{M})) = Q(\text{ex}\, \mathbb{P}_{\text{inv}}(\mathcal{M}))$ de modo que a Equação (1.85) e a afirmação logo após ela seguem da primeira inclusão em (1.88). ∎

Observação 1.23 *Em [3] prova-se que pontos extremos do espectro de Morse são expoentes de Lyapunov (item (ii) do Teorema 2.8) usando-se um argumento analítico de [13] que envolve a aplicação do Teorema de Choquet na base E, para tal é necessário que E seja metrizável [21]. Por outro lado o argumento usado na demonstração acima para se provar esse resultado vale para E compacto Hausdorff, é mais geométrico, é direto e é mais simples uma vez que depende apenas do Teorema de Krein-Milman, que pode ser visto como uma versão mais fraca do Teorema de Choquet [21].*

Enquanto a Equação (1.84) fornece uma caracterização ergódica do espectro de Morse, a Equação (1.85) fornece uma caracterização geométrica. Duas aplicações imediatas dessa caracterização geométrica são dadas a seguir.

Corolário 1.24 *Se a base E do cociclo é compacta então o $\mathcal{O}$-espectro de Morse de uma componente transitiva por cadeias não depende da família de coberturas $\mathcal{O}$.*

Demonstração: Como o lado direito da Equação (1.85) não depende de $\mathcal{O}$ o resultado segue imediatamente. ∎

Proposição 1.25 *Sejam E' um espaço compacto Hausdorff com um semifluxo contínuo σ'_t, $t \in \mathbb{T}$, V' um espaço vetorial de dimensão finita e b um V'-cociclo contínuo sobre E'. Supõe-se que $\pi : E \to E'$ é uma aplicação e que $L : V \to V'$ é uma aplicação linear que são tais que*

$$b(t, \pi(x)) = L(a(t, x)), \quad t \in \mathbb{T},\, x \in E, \tag{1.90}$$

e que $\pi(\mathcal{M})$ é uma componente transitiva por cadeias em E'. Então,

$$\Lambda_{Mo}(\pi(\mathcal{M}), b) = L(\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}, a)). \tag{1.91}$$

Demonstração: Denota-se $\Lambda^a_{Mo} := \Lambda_{Mo}(\mathcal{M}, a) \subset V$, $\Lambda^b_{Mo} := \Lambda_{Mo}(\pi(\mathcal{M}), b) \subset V'$, pelo item (5) do Teorema 1.9 ambos Λ^a_{Mo}, Λ^b_{Mo} são convexos compactos. Seja λ um expoente de Lyapunov de Λ^a_{Mo}. Então existe $x \in \mathcal{M}$ com $\lambda = \lim a(T, x)/T$ quando $T \to +\infty$, desse modo $L(\lambda) = \lim b(T, \pi(x))/T$ é um expoente de Lyapunov de Λ^b_{Mo}. Isso mostra que $L(\Lambda^a_{Ly}) \subset \Lambda^b_{Ly}$ o que implica, pela Equação (1.85) e pelo item (3) da Proposição 1.14, que $L(\Lambda^a_{Mo}) \subset \Lambda^b_{Mo}$.

Por outro lado seja λ' um expoente de Lyapunov de Λ^b_{Mo}, então existe $\pi(x) \in \pi(\mathcal{M})$, $x \in \mathcal{M}$, tal que

$$\lambda' = \lim b(T, \pi(x))/T = \lim L(a(T, x)/T), \quad \text{quando } T \to +\infty. \tag{1.92}$$

Pelo item (2) da Proposição 1.8 tem-se que $a(T, x)/T$ é uniformemente limitada em V de modo que possui uma subsequência convergente $a(T_n, x)/T_n \to \lambda$, assim $\lambda' = L(\lambda)$. Como $\mathcal{M}$ é invariante ela contém $\omega(x)$ de modo que pelo item (3) do Teorema 1.9 tem-se que $\lambda \in \Lambda^a_{Mo}$. Segue daí que $\Lambda^b_{Ly} \subset L(\Lambda^a_{Mo})$ o que, pela Equação (1.85) implica que $\Lambda^b_{Mo} \subset L(\Lambda^a_{Mo})$. ∎

Observação 1.26 *Seria interesante obter uma prova puramente topológica da caracterização geométrica da Equação (1.85) e do fato que pontos extremos do espectro de Morse são expoentes de Lyapunov. Isso implicaria, por exemplo, numa prova topológica dos dois resultados anteriores.*

Na Proposição 1.25 a única relação que a aplicação π *tem com os semifluxos em* E *e* E' *é que* $\pi(\mathcal{M})$ *é uma componente transitiva por cadeias em* E'*. Não fosse a caracterização (1.85) do espectro de Morse, uma maneira direta de se provar um resultado nessa linha seria ter suficientes hipóteses sobre* π *para que se possa relacionar as cadeias dos semifluxos em* E *e em* E' *mostrando, grosso modo, que se podem projetar cadeias em* $\mathcal{M}$ *para cadeias em* $\pi(\mathcal{M})$ *e que se podem levantar cadeias em* $\pi(\mathcal{M})$ *para cadeias em* $\mathcal{M}$*.*

Capítulo 2

Sombreamento com endomorfismos pequenos de Q

Como os objetivos deste capítulo são puramente topológicos, fixa-se um fibrado principal localmente trivial $\pi_X : Q \to X$, com grupo estrutural topológico G e base paracompacta X. Fixa-se também um fibrado associado $E := Q \times_G F \to X$ cuja fibra típica F é um espaço topológico compacto que é um espaço homogêneo de G. Fixa-se também um semifluxo contínuo σ_t de endomorfismos de Q, $t \in \mathbb{T}$, que é transitivo por cadeias na base X.

2.1 Semigrupos de sombreamento de semifluxos em fibrados topológicos

O objetivo da teoria de semigrupos de sombreamento de um semifluxo num fibrado topológico de [20] é obter uma descrição fibra-a-fibra dos conjuntos transitivos por cadeias de um semifluxo num fibrado E. Nessa seção serão revisados os resultados desta teoria e será usada notação e nomenclatura de [20, 19], fazendo-se referência direta apenas às definições e resultados principais.

Primeiramente descreve-se o caso menos estruturado de [19] em que E é visto apenas como um espaço topológico e σ_t um semifluxo contínuo em E. Toda vez que se falar de cadeias ou de conjunto transitivo por cadeias está se referindo implicitamente ao semifluxo σ_t em E. A idéia da abordagem de semigrupos de sombreamento para o estudo da transitividade por cadeias é fazer com que perturbações adequadas do semifluxo dêem origem a um semigrupo local $S_{\mathcal{U},T}(E)$ cujas órbitas em E são precisamente as órbitas de $(\mathcal{U},T)$-cadeias do semifluxo. Desse modo os conjuntos de controle do semigrupo local $S_{\mathcal{U},T}(E)$ fornecem os conjuntos transitivos por $(\mathcal{U},T)$-cadeias e interceptando todos esses conjuntos de controle obtém-se as componentes transitivas por cadeias em E.

Os dois ingredientes necessários para se definir os semigrupos de sombreamento de σ_t em E são: um semigrupo local S de aplicações contínuas de E (cujos elementos realizarão os pulos das cadeias de σ_t) e uma família $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de E (que controlarão o tamanho desses pulos). Dada uma cobertura $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ diz-se que dois pontos de E são *$\mathcal{U}$-próximos* se eles estão simultaneamente contidos num mesmo aberto de $\mathcal{U}$. Define-se então a *$\mathcal{U}$-vizinhança da identidade em S relativa a E* por

$$N_{S,\mathcal{U}}(E) := \{\varphi \in S : \xi \text{ e } \varphi(\xi) \text{ estão } \mathcal{U}\text{-próximos } \forall \xi \in \mathrm{dom}\varphi\}, \tag{2.1}$$

Dados $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, $T \in \mathbb{T}$ define-se então o *$(\mathcal{U},T)$-semigrupo de sombreamento de σ_t em E* por

$$S_{\mathcal{U},T}(E) := \text{semigrupo gerado por } \{\varphi \circ \sigma_t : \varphi \in N_{S,\mathcal{U}}(E),\ t \geq T\}. \tag{2.2}$$

Claramente cada elemento $\varphi \in S_{\mathcal{U},T}(E)$ realiza uma $(\mathcal{U},T)$-cadeia em E. Introduz-se o conceito de uma família de coberturas $\mathcal{O}$ *admissível* e também de uma família $\mathcal{O}$ que é *localmente transitiva com respeito ao semigrupo S* (Definições 3.1 e 5.1 de [19]). Quando essas duas condições de compatibilidade são satisfeitas por $\mathcal{O}$ prova-se que, reciprocamente, cada $(\mathcal{U},T)$-cadeia em E é realizada por um elemento de $S_{\mathcal{U},T}(E)$ (Proposição 5.5 de [19]) e caracteriza-se cada conjunto $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias $\mathcal{M}$ de σ_t com o seguinte resultado (que é o Teorema 5.7 de [19]).

Teorema 2.1 *Sejam $\mathcal{O}$ uma família admissível de coberturas abertas de E e S um semigrupo local $\mathcal{O}$-localmente transitivo agindo em X, então valem os seguintes itens.*

1) Dados $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, $T \in \mathbb{T}$, para cada $x \in E$ tem-se que a órbita progressiva $S_{\mathcal{U},T}(E)x$ é dada precisamente pelos pontos finais das $(\mathcal{U},T)$-cadeias que partem de x, e a órbita *regressiva* $S_{\mathcal{U},T}(E)^*x$ *é dada precisamente pelos pontos iniciais das* $(\mathcal{U},T)$*-cadeias que chegam à* x*.*

2) Cada componente $\mathcal{O}$*-transitiva por cadeias* $\mathcal{M}$ *de* σ_t *em* E *é dada por*

$$\mathcal{M} = \bigcap_{\mathcal{U},T}(D_{\mathcal{M},\mathcal{U},T})_0 = \bigcap_{\mathcal{U},T}\mathrm{cl}(D_{\mathcal{M},\mathcal{U},T}), \tag{2.3}$$

onde para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$*,* $T \in \mathbb{T}$*, tem-se que* $D_{\mathcal{M},\mathcal{U},T}$ *é um conjunto de controle do semigrupo de sombreamento* $S_{\mathcal{U},T}(E)$ *tal que* $\mathcal{M} \subset D_{\mathcal{M},\mathcal{U},T}$*.*

Na situação mais estruturada de [20] considera-se um semifluxo σ_t^E num fibrado associado $E \to X$ que é o induzido de um semifluxo σ_t de endomorfismos do fibrado principal Q. Nesta situação deseja-se aplicar a teoria geral da ação de semigrupos em fibrados E de [20] que, sob certas condições, fornece uma descrição fibra-a-fibra dos conjuntos de controle em E (cf. capítulo 4 de [17] cujos resultados principais estão enunciados no apêndice B.3 para o caso em que E é um fibrado flag). Uma hipótese essencial dessa teoria geral é que o semigrupo agindo em E seja um semigrupo de endomorfismos locais de E. Para que os semigrupos de sombreamento (2.2) sejam semigrupos de endomorfismos locais de E basta tomar os saltos do sombreamento em $S := \mathrm{End}_\ell(E)$, uma vez que cada aplicação σ_t^E do semifluxo é, por definição, um endomorfismo de Q. Em palavras, as perturbações do semigrupo de sombreamento devem respeitar a estrutura de fibrado de E. Pelo visto no parágrafo anterior para que os semigrupos de sombreamento assim construídos tenham relação com as cadeias do semifluxo σ_t em E deve-se cumprir a seguinte hipótese

C) Cobertura de E: deve-se construir uma família de coberturas $\mathcal{O}(E)$ do fibrado E que seja admissível e localmente transitiva com respeito ao semigrupo $\mathrm{End}_\ell(E)$.

Uma outra hipótese essencial da teoria geral é que as órbitas do semigrupo agindo em E venham de um semigrupo de endomorfismos locais de Q cujas órbitas em Q são abertas, desse modo no caso dos semigrupos de sombreamento de σ_t deve-se cumprir a seguinte hipótese

A) Acessibilidade em Q: deve-se construir uma família de semigrupos $S(Q;\mathcal{U},T)$ de endomorfismos locais de Q, onde $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $T \in \mathbb{T}$, tal que cada semigrupo $S(Q;\mathcal{U},T)$ tem órbitas progressivas e regressivas abertas quando agindo em Q e tem as mesmas órbitas que $S_{\mathcal{U},T}(E)$ quando agindo em E.

Cada semigrupo $S(Q;\mathcal{U},T) \subset \mathrm{End}_\ell(Q)$ da família dada na condição (A) é chamado de $(\mathcal{U},T)$-*semigrupo de sombreamento de* σ_t *em* Q. Ressalta-se aqui a liberdade que se tem de escolher os semigrupos de sombreamento em Q: a única relação que eles devem ter com os semigrupos de sombreamento em E dados em (2.2) é que ambos tenham as mesmas órbitas em E. Será precisamente nessa escolha de semigrupos de sombreamento em Q que a teoria de [20] será modificada na próxima seção.

Com a condição (C) satisfeita tem-se no fibrado E a descrição dos conjuntos $\mathcal{O}(E)$-transitivo por cadeias como interseção de conjuntos de controle dos semigrupos de sombreamento $S_{\mathcal{U},T}(E) \subset \mathrm{End}_\ell(E)$ que é dada pelo Teorema 2.1. Com a condição (A) satisfeita tem-se uma descrição fibra-a-fibra dos conjuntos de controle da $S_{\mathcal{U},T}(E)$ que é dada pela teoria geral em [20]. Juntando-se esses dois resultados obtém-se uma descrição fibra-a-fibra dos conjuntos $\mathcal{O}$(E)-transitivos por cadeias de de σ_t^E em E (cf. Capítulos 5 e 6 de [17] cujos resultados principais estão enunciados no apêndice B.4 para o caso em que E é um fibrado flag). A seguir descreve-se sob que condições as hipóteses (C) e (A) são verificadas em [20, 17].

Fazem-se as seguintes hipóteses sob Q e $E = Q \times_G F$.

Q1) G tem um subgrupo compacto metrizável K, fixa-se uma métrica biinvariante d_K em K.

Q2) Q admite uma redução $R \subset Q$ de G para K, fixa-se uma tal redução.

E1) K age transitivamente e abertamente na fibra típica F.

E2) F com a métrica de Hausdorff d^H induzida da métrica biinvariante d_K de K é um espaço métrico convexo, fixa-se essa métrica em F.

Mostra-se em [20, 17] que essas hipóteses valem em situações bastante gerais, em particular no caso de fibrados flag (cf. também a seção 2.3).

Para a construção das cartas exigidas em (C) fixa-se a família cartas $\Psi = \{\psi_i\}_{i\in I}$ de Q adaptadas a redução R dadas na Proposição A.6. Como X é paracompacto pode-se supor que $\{\mathrm{dom}\psi_i\}_{i\in I}$ é uma cobertura localmente finita de X. Pela escolha em (E2) tem-se que K age à esquerda em F por isometrias. Denota-se por $\mathcal{O}(X)$ a família de todas coberturas abertas de X. Dados $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(X)$ e $\varepsilon > 0$, considera-se a *cobertura adaptada* $\mathcal{U}_\varepsilon$ de E definida por

$$\mathcal{U}_\varepsilon := \{(\psi_i^E)^{-1}((U_i \cap U) \times B_\varepsilon(v)) : i \in I, U \in \mathcal{U}, v \in F\}, \tag{2.4}$$

e denota-se por $\mathcal{O}_\Psi(E)$ a família de todas essas coberturas adaptadas E. Mostra-se na Proposição 3.5 e no Teorema 3.7 de [20] que sob as hipóteses (Q1), (Q2), (E1), (E2) a família de coberturas $\mathcal{O}_\Psi(E)$ é admissível e localmente transitiva com respeito a $\mathrm{End}_\ell(E)$, o que estabelece a condição (C).

Para a construção dos semigrupos de sombreamento em Q exigidos em (A) abrevia-se a vizinhança dada em (2.1) por

$$N_{\mathcal{U}_\varepsilon}(E) := N_{\mathrm{End}_\ell(E),\mathcal{U}_\varepsilon}(E) \subset \mathrm{End}_\ell(E). \tag{2.5}$$

e define-se

$$S(Q, E; \mathcal{U}_\varepsilon, T) := \text{semigrupo gerado por } \{\varphi \circ \sigma_t : \varphi \in \mathrm{End}_\ell(Q) \text{ com } \varphi^E \in N_{\mathcal{U}_\varepsilon}(E),\, t \geq T\}, \tag{2.6}$$

em palavras, os saltos desse sombreamento em Q são realizados por endomorfismos que são *pequenos em* E. É imediato que $S(Q, E; \mathcal{U}_\varepsilon, T)$ induz em E o semigrupo $S_{\mathcal{U}_\varepsilon,T}(E)$ em (2.2) logo possui em E as mesmas órbitas que esse semigrupo. Mostra-se no Corolário 5.13 de [17] que sob as hipóteses (Q1), (Q2), (E1), (E2) a o semigrupo (2.6) possui órbitas abertas em Q, o que estabelece a condição (A).

2.2 Sombreamento com endomorfismos pequenos

Nessa seção deseja-se especializar a teoria topológica de semigrupos de sombreamento em fibrados descrita na seção anterior modificando-a de modo a torná-la aplicável ao estudo do espectro de Morse de semifluxos em fibrados flag (capítulo 4).

Para se aplicar os semigrupos de sombreamento ao estudo de expoentes de crescimento deve-se construir semigrupos de sombreamento em Q cujos saltos são realizados por endomorfismos que são pequenos em Q (cf. Equação 4.18 e Proposição 4.7). Esses saltos devem ser pequenos o suficiente para se induzir em E as mesmas órbitas que $S_{\mathcal{U}_\varepsilon,T}(E)$ mas grandes o suficiente para se obter órbitas abertas em Q de modo que a hipótese (A) seja satisfeita. O semigrupo dado em (2.6) não é util para essas aplicações pois nele os saltos do sombreamento são dados por endomorfismos que são pequenos no fibrado associado E, mas não necessariamente pequenos em Q.

Primeiramente faz-se duas hipóteses adicionais sob o grupo estrutural G e sua ação na fibra típica F.

Q3) G é metrizável e sua métrica d_G é tal que sua restrição a K coincide com d_K (veja (Q1)).

E3) Para cada $u \in F$, $g \in G$ existe $k \in K$ tal que $d^H(gu, u) \leq d_G(gk, k)$.

Mais adiante, mostra-se que essas hipóteses valem em situações bastante gerais, em particular, no caso de fibrados flag (cf. seção 2.3).

Dado $\varepsilon > 0$ fixa-se a seguinte vizinhança da identidade em G

$$V_\varepsilon := \{g \in G : d_G(gk, k) < 2\varepsilon \text{ para todo } k \in K\} \subset B_{2\varepsilon}(1). \tag{2.7}$$

O fato que V_ε é uma vizinhança da identidade segue da compacidade de K. De (Q3) e da K-invariância à direita de d_K segue que

$$K \cap V_\varepsilon = \{k \in K : d_G(k, 1) < 2\varepsilon\}. \tag{2.8}$$

(Pode-se questionar aqui porque não se simplificam as coisas desde o começo impondo-se que a métrica d_G de G seja K-invariante à direita, a resposta a isso será dada na próxima seção, Observação 2.12). Usam-se as cartas $\Psi = \{\psi_i\}_{i\in I}$ de Q adaptadas a redução R que foram fixadas na seção anterior e usa-se a notação do apêndice A.2.2 para a expressão local de endomorfismos de Q com respeito a essas cartas.

Diz-se que o endomorfismo local $\varphi \in \mathrm{End}_\ell(Q)$ é $(\mathcal{U},\varepsilon)$-*pequeno* se para cada $x \in \pi_X(\mathrm{dom}\varphi)$ existe $i \in I$ e $U \in \mathcal{U}$ tais que

$$x,\, \varphi_X(x) \in U_i \cap U \quad \text{e} \quad \varphi_i^G(x) \in V_\varepsilon, \tag{2.9}$$

onde $\psi_i \circ \varphi \circ \psi_i^{-1}(x,a) = (\varphi_X(x),\, \varphi_i^G(x)a)$, para $x \in U_i$, $a \in G$. Define-se então a $(\mathcal{U},\varepsilon)$-*vizinhança da identidade em* $\mathrm{End}_\ell(Q)$ por

$$\mathcal{V}_{\mathcal{U},\varepsilon}(Q) := \{\varphi \in \mathrm{End}_\ell(Q) : \varphi \text{ é } (\mathcal{U},\varepsilon)\text{-pequeno}\}. \tag{2.10}$$

Dados $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, $T \in \mathbb{T}$, $\varepsilon > 0$ define-se o $(\mathcal{U},\varepsilon,T)$-*semigrupo de sombreamento de* σ_t *em* Q por

$$S(Q;\mathcal{U},\varepsilon,T) := \text{semigrupo gerado por } \{\varphi \circ \sigma_t : \varphi \in \mathcal{V}_{\mathcal{U},\varepsilon}(Q),\, t \geq T\}. \tag{2.11}$$

Observa-se que o fibrado associado E não tem nenhum papel na definição desses semigrupos de sombreamento, diferentemente do que ocorre em (2.6). Prova-se mais adiante o Teorema 2.9 que mostra que os semigrupos de sombreamento de Q em (2.11) satisfazem a condição de acessibilidade (A) de modo que a descrição fibra-a-fibra dos conjuntos $\mathcal{O}_\Psi(E)$-transitivos por cadeias de σ_t^E em E da seção anterior vale com essa escolha de semigrupo de sombreamento de Q. O Teorema 2.9 será obtido a partir dos resultados auxiliares dados a seguir (Lema 2.2, Proposições 2.3 e 2.6 são adaptadas de resultados em [17], Seções 5.1.2, 5.1.3).

A seguir consideram-se endomorfismos locais de Q construídos da seguinte maneira. Dadas a carta local $\psi_i : \pi_X^{-1}(U_i) \to U_i \times G$ de Q, $i \in I$, um aberto $U \in \mathcal{U}$, um ponto $y \in U_i \cap U$, e um elemento $g \in G$ define-se $\varphi_{i,U}^{g,y} \in \mathrm{End}_\ell(Q)$ por

$$\psi_i \circ \varphi_{i,U}^{g,y} \circ \psi_i^{-1}(x,a) := (y, ga), \qquad (x \in U_i \cap U,\, a \in G). \tag{2.12}$$

Esse endomorfismo local é constante em X e age em Q como um elemento constante de G. É imediato das definições que se $g \in V_\varepsilon$ então $\varphi_{i,U}^{g,y} \in \mathcal{V}_{\mathcal{U},\varepsilon}(Q)$ e que se $g \in K$ então

$\varphi_{i,U}^{g,y} \in \mathrm{End}_\ell(R)$, uma vez que as cartas locais ψ_i são adaptadas a K-redução R. Também segue imediatamente que o endomorfismo induzido $(\varphi_{i,U}^{g,y})^E$ no fibrado associado satisfaz

$$(\psi_i^E) \circ (\varphi_{i,U}^{g,y})^E \circ (\psi_i^E)^{-1}(x,v) = (y, gv), \qquad (x \in U_i \cap U,\, v \in F). \tag{2.13}$$

Lema 2.2 *Dados* $p, q \in Q$ *e* $\varphi \in \mathcal{V}_{\mathcal{U},\varepsilon}(Q)$ *tais que* $\varphi(p) = q$ *então existe* $i \in I$, $U \in \mathcal{U}$, $g \in V_\varepsilon$ *tais que* $\varphi_{i,U}^{g,\pi_X(q)}(p) = q$.

Demonstração: Como $\varphi \in \mathcal{V}_{\mathcal{U},\varepsilon}(Q)$ e $\pi_X(p) \in \pi_X(\mathrm{dom}\varphi)$, tem-se que existe $i \in I$ e $U \in \mathcal{U}$ tais que $\pi_X(p), \pi_X(q) \in U_i \cap U$ e $g := \varphi_i^G(\pi_X(p)) \in V_\varepsilon$. Como $\psi_i \circ \varphi \circ \psi_i^{-1}(\pi_X(p), a) = (\pi_X(q), ga)$ tem-se imediatamente de (2.12) que $\varphi_{i,U}^{g,\pi_X(p)}(p) = q$. ∎

Proposição 2.3 *As órbitas progressivas e regressivas de* $S(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, T)$ *em* Q *são abertas.*

Demonstração: Para se mostrar que a órbita progressiva de $p \in Q$ é aberta define-se $Op := \{(\varphi \circ \sigma_t)(p) : \varphi \in \mathcal{V}_{\mathcal{U},\varepsilon}(Q),\, t \geq T\}$, então define-se recursivamente $(Op)_1 := Op$,

$$(Op)_n := \bigcup \{Oq : q \in (Op)_{n-1}\}, \tag{2.14}$$

de onde segue imediatamente que

$$S(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, T)p = \bigcup_{n \geq 1} (Op)_n, \tag{2.15}$$

de modo que (2.14) e (2.15) reduzem o problem à mostrar que o conjunto Oq é aberto em Q para $q \in Q$ arbitrário. Seja $p \in Oq$, então $p = \varphi(\sigma_t(q))$, $\varphi \in \mathcal{V}_{\mathcal{U},\varepsilon}(Q)$, $t \geq T$. Pelo Lema 2.2 existe $i \in I$, $U \in \mathcal{U}$, $g \in V_\varepsilon$ tais que $\pi_X(p) \in U_i \cap U$ e $p = \varphi_{i,U}^{g,\pi_X(p)}(\sigma_t(q))$. Como para todo $h \in V_\varepsilon$, $y \in U_i \cap U$ vale $\varphi_{i,U}^{h,y} \in \mathcal{V}_{\mathcal{U},\varepsilon}(Q)$ pela definição de Op segue que $\varphi_{i,U}^{h,y}(\sigma_t(q)) \in Oq$. Seja $\psi_i(\sigma_t(q)) = (x, b)$, $x \in X$, $b \in G$, então por (2.12) tem-se que $\varphi_{i,U}^{h,y}(\sigma_t(q)) = \psi_i^{-1}(y, hb)$ de modo que

$$p \in \psi_i^{-1}((U \cap U_i) \times V_\varepsilon b) \subset Oq, \tag{2.16}$$

o que mostra que Oq é aberto em Q. Para a órbita regressiva procede-se de forma análoga. ∎

Proposição 2.4 *Dado $\varphi \in \mathcal{V}_{\mathcal{U},\varepsilon}(Q)$ tem-se que $\varphi^E \in N_{\mathcal{U}_\varepsilon}(E)$.*

Demonstração: Dado $\xi \in \mathrm{dom}\varphi^E$ arbitrário deve-se mostrar que ξ e $\varphi^E(\xi)$ são $\mathcal{U}_\varepsilon$-próximos. Seja $\xi = q \cdot u$, com $u \in F$, $q \in Q$, então $\varphi^E(\xi) = \varphi(q) \cdot u$. Como $\varphi \in \mathcal{V}_{\mathcal{U},\varepsilon}(Q)$ e $x := \pi_X(q) \in \pi_X(\mathrm{dom}\varphi)$ existe $i \in I$ e $U \in \mathcal{U}$ tais que x, $\varphi(x) \in U_i \cap U$ e $g := \varphi_i^G(x) \in V_\varepsilon$. Se $\psi_i(q) = (x, b)$, então $\psi_i(\varphi(q)) = (\varphi(x), gb)$, de modo que

$$\psi_i(q) \cdot u = (x, bu), \qquad \psi_i(\varphi(q)) \cdot u = (\varphi(x), gbu). \tag{2.17}$$

Por (E3) existe k tal que $d^H(bu, gbu) \leq d_G(k, gk) < 2\varepsilon$, uma vez que $g \in V_\varepsilon$. Agora por (E2) F é convexo de modo que existe $v \in F$ tal que bu, $gbu \in B_\varepsilon(v)$. Essas considerações mostram que ambos $\psi_i^E(\xi) = \psi_i(q) \cdot u$ e $\psi_i^E(\varphi^E(\xi)) = \psi_i(\varphi(q)) \cdot u$ estão em $(U_i \cap U) \times B_\varepsilon(v)$, de modo que ξ e $\varphi^E(\xi)$ são $\mathcal{U}_\varepsilon$-próximos. ∎

Usando-se as definições dos semigrupos de sombreamento em E (2.2) e em Q (2.11) tem-se o seguinte corolário imediato desse resultado.

Corolário 2.5 *$S(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, T)^E \subset S_{\mathcal{U}_\varepsilon, T}(E)$.*

A recíproca do resultado anterior não vale em geral, mas em seguida mostra-se que um salto em E feito por um elemento de $N_{\mathcal{U}_\varepsilon}(E)$ pode ser realizado por um elemento de $\mathcal{V}_{\mathcal{U},\varepsilon}(Q) \cap \mathrm{End}_\ell(R)$.

Proposição 2.6 *Dados $u, v \in F$ existe $k \in K$ tal que $ku = v$ e $d_K(k, 1) = d^H(u, v)$.*

Demonstração: Primeiro recorda-se como se define a distância d^H em F. Fixa-se um ponto base $w \in F$ e toma-se sua isotropia M em K, como K age em F transitivamente e abertamente tem-se o homeomorfismo canônico $\phi_w : K/M \to F$ dado por $kM \mapsto kw$. Em K/M tem-se a distância de Hausdorff dada por

$$d_w(aM, bM) := \min_{m \in M} \min_{m' \in M} d_K(am, bm'), \tag{2.18}$$

então $d_w(aM, bM) = \min_{m \in M} d_K(am, b)$ pela invariância à direita de d_K, logo $d_w(aM, bM) = d_K(am_0, b)$ para algum $m_0 \in M$, pela compacidade de K. Define-se então em F a distância de Hausdorff

$$d^H(u, v) := d_w(\phi_w^{-1}(u), \phi_w^{-1}(v)), \qquad (u, v \in F). \tag{2.19}$$

Usando-se a invariância à direita de d_K, mostra-se facilmente que essa métrica não depende da escolha do ponto base w.

Para se provar a Proposição, fixa-se por conveniência o ponto base u em F e considera-se M sua isotropia. Tem-se que $v = lu$, para algum $l \in K$, assim pelas observações acima tem-se que $d^H(u,v) = d_u(M, lM) = d_K(1, lm_0)$ para algum $m_0 \in M$. Colocando-se $k := lm_0$, tem-se que $d_K(1,k) = d^H(u,v)$ e que $ku = lm_0u = lu = v$, como desejado. ∎

Proposição 2.7 *Sejam $p, q \in Q$, $u \in F$ e $\varphi \in \mathrm{End}_\ell(Q)$ tais que $\varphi^E \in N_{\mathcal{U}_\varepsilon}(E)$ e $\varphi^E(q \cdot u) = p \cdot u$. Então existem $k \in K$, $U \in \mathcal{U}$, $i \in I$ tais que $(\varphi_{i,U}^{\pi_X(p),k})^E(q \cdot u) = p \cdot u$ e $\varphi_{i,U}^{\pi_X(p),k} \in \mathcal{V}_{\mathcal{U},\varepsilon}(Q) \cap \mathrm{End}_\ell(R)$.*

Demonstração: De $\varphi^E(q \cdot u) = p \cdot u$ conclui-se que $\varphi(q) = pa$, onde $a \in G$ é tal que $au = u$. Seja $\psi_i(q) = (\pi_X(q), b)$ então $\psi_i(\varphi(q)) = \psi_i(pa) = (\pi_X(p), gb)$, $g \in G$, e pela equivariância de ψ_i segue que $\psi_i(p) = (\pi_X(p), gba^{-1})$. Tem-se então que

$$\psi_i^E(q \cdot u) = \psi_i(q) \cdot u = (\pi_X(q), bu), \tag{2.20}$$

$$\psi_i^E(p \cdot u) = \psi_i(p) \cdot u = (\pi_X(p), gba^{-1}u) = (\pi_X(p), gbu). \tag{2.21}$$

De $\varphi^E \in N_{\mathcal{U}_\varepsilon}(E)$ tem-se que existem $i \in I$, $U \in \mathcal{U}$ e $v \in F$ tais que $\psi_i^E(q\cdot u)$, $\psi_i^E(p\cdot u) \in (U_i \cap U) \times B_\varepsilon(v)$, de modo que pelas considerações acima conclui-se que $\pi_X(q)$, $\pi_X(p) \in U_i \cap U$ e $d^H(bu, gbu) < 2\varepsilon$. Pela Proposição 2.6 existe $k \in K$ tal que

$$kbu = gbu, \quad d_K(k, 1) = d^H(bu, gbu) < 2\varepsilon, \tag{2.22}$$

logo por (2.8) tem-se que $k \in V_\varepsilon$, o que implica que $\rho := \varphi_{i,U}^{\pi_X(p),k} \in \mathcal{V}_{\mathcal{U},\varepsilon}(Q)$, além disso de $k \in K$ tem-se que $\rho \in \mathrm{End}_\ell(R)$. Por (2.12) tem-se que $\psi_i(\rho(q)) = (\pi_X(p), kb)$ de modo que por (2.22) tem-se $\psi_i^E(\rho^E(q \cdot u)) = \psi_i(\rho(q)) \cdot u = (\pi_X(p), kbu) = (\pi_X(p), gbu) = \psi_i^E(p \cdot u)$ o que implica que $\rho^E(q \cdot u) = p \cdot u$, como desejado. ∎

Um corolário imediato do resultado acima é o próximo resultado que mostra que os pulos dados numa órbita de sombreamento em E podem ser realizados por endomorfismos pequenos de Q que fixam R.

Corolário 2.8 *Seja $\xi_0, \xi_1 \in E$ be tais que $\xi_1 \in S_{\mathcal{U}_\varepsilon,T}(E)\xi_0$ de modo que*

$$\xi_1 = (\varphi_n \circ \sigma_{t_n} \circ \cdots \varphi_1 \circ \sigma_{t_1})^E(\xi_0), \tag{2.23}$$

onde $\varphi_i \in N_{\mathcal{U}_\varepsilon}(E)$, $t_i \geq T$, $i = 1, \ldots, n$. Então existem endomorfismos locais $\kappa_i \in \mathcal{V}_{\mathcal{U},\varepsilon}(Q) \cap$ $\mathrm{End}_\ell(R)$ tais que

$$\xi_1 = (\kappa_n \circ \sigma_{t_n} \circ \cdots \kappa_1 \circ \sigma_{t_1})^E(\xi_0), \tag{2.24}$$

de modo que $\xi_1 \in S(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, T)^E \xi_0$.

Colecionando-se os resultados anteriores obtém-se o resultado desejado.

Teorema 2.9 *Satisfeitas as hipóteses (Q1) a (Q3) e (E1) a (E3) o semigrupo de sombreamento $S(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, T)$ em Q por endomorfismos pequenos satisfaz a condição de acessibilidade (A).*

Demonstração: A Proposição 2.3 fornece a abertura das órbitas progressivas e regressivas de $S(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, T)$ em Q. Tomando-se $\xi \in E$, o Corolário 2.8 implica que $S_{\mathcal{U}_\varepsilon,T}(E)\xi \subset S(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, T)^E \xi$, e o Corolário 2.5 implica a inclusão recíproca. Assim,

$$S_{\mathcal{U}_\varepsilon,T}(E)\xi = S(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, T)^E \xi \tag{2.25}$$

de onde segue que $(S_{\mathcal{U}_\varepsilon,T}(E))^* \xi = (S(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, T)^E)^* \xi$. ∎

Observação 2.10 *Observa-se que o mesmo semigrupo de sombreamento $S(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, T)$ em Q pode ser usado simultaneamente para realizar as $(\mathcal{U}_\varepsilon, T)$-cadeias em mais de um fibrado associado E, desde que cada fibrado E satisfaça as hipóteses (E1)-(E3). Em particular se $\pi : E_1 \to E_2$ é uma projeção $\mathrm{End}_\ell(Q)$-equivariante entre dois tais fibrados então segue que cada $(\mathcal{U}_\varepsilon, T)$-cadeia de E_1 se projeta numa $(\mathcal{U}_\varepsilon, T)$-cadeia de E_2 e cada $(\mathcal{U}_\varepsilon, T)$-cadeia de E_2 se levanta a uma $(\mathcal{U}_\varepsilon, T)$-cadeia de E_1.*

2.3 Sobre as hipóteses

Nessa seção mostra-se que as hipóteses (Q1)-(Q3), (E1)-(E3) dadas nas duas últimas Seções são satisfeitas em situações bastante gerais, em particular no caso de fibrados flag (cf. Teorema 2.13).

Diz-se que G se decompõe topologicamente como o produto de seus subgrupos K e U se $K \cap U = \{1\}$ e a restrição do produto de G dada por

$$K \times U \to G, \quad (k,\, h) \mapsto kh, \tag{2.26}$$

define um homeomorfismo de $K \times U$ sobre G, nesse caso por um leve abuso de notação escreve-se

$$G = K \times U. \tag{2.27}$$

A seguir são dadas algumas hipóteses sob o grupo estrutural G e sob a fibra típica F que serão consideradas no próximo resultado.

A1) G satisfaz (Q1) e tem um subgrupo U tal que $G = K \times U$.

A2) Em (A1) o subgrupo U é homeomorfo a algum $\mathbb{R}^n$.

A3) Em (A1) o subgrupo U fixa um ponto de F.

A4) G satisfaz (Q3) e (A1), além disso a métrica d_G em (Q3) é tal que $d_G(g, g') \geq d_K(k, k')$ onde $g = ku \in KU$, $g' = k'u' \in KU$ na decomposição de (A1).

Proposição 2.11 *Supondo-se (Q1) e (A1) tem-se que*

i) (A2) implica (Q2), (Q3) e (A4),

ii) (A3) implica (E1),

iii) (A4) e (A3) implica (E3).

Demonstração: Para o item (i), de ($A1$) segue que $G/K \simeq U$ e de (A2), $U \simeq \mathbb{R}^n$. Então da Proposição A.4 segue (Q2). Sem perda de generalidade pode-se assumir que $U = \mathbb{R}^n$ onde $1 \in U$ vai para $0 \in \mathbb{R}^n$. Fixa-se uma norma $|\cdot|$ em $\mathbb{R}^n$, usando-se a decomposição $G = K \times U$ de (A1) define-se

$$d_G(g, g') := d_K(k, k') + |u - u'|, \quad \text{onde } g = kh \in KU,\, g' = k'h' \in KU. \tag{2.28}$$

É imediato então que d_G é uma métrica em G cuja restrição à K é d_K, o que fornece (Q3), e é também imediato que d_G satisfaz (A4).

Para o item (ii), de (A3) toma-se $u \in F$ fixado por U. Como $G = KU$ tem-se que $F = Gu = Ku$ o que mostra que K age transtivamente em F. Pela transitividade de K, para mostrar que K age abertamente em F, basta mostrar que K age abertamente em u. Seja V um aberto de K, tem-se que $Vu = VUu$, de (A1) $G = K \times U$ segue que VU é aberto em G, como G age abertamente em F segue então que $Vu = VUu$ é aberto em F.

Para o item (iii), de (A3), toma-se $u \in F$ fixado por U. Além disso, pelo item anterior, tem-se (E1). Para se verificar (E3) tomam-se $g \in G$ e $v \in F$ arbitrários. Por (E1) tem-se $k \in K$ tal que $v = ku$, de modo que kUk^{-1} fixa v. Considera-se a decomposição $G = K \times (kUk^{-1})$ sob a qual g se decompõe como $g = l(khk^{-1}) \in K(kUk^{-1})$, desse modo gk se decompõe como $gk = (lk)h \in KU$. Tem-se então que

$$d^H(gv, v) = d^H(lv, v) \leq d_K(l, 1) = d_K(lk, k) \leq d_G(gk, k), \tag{2.29}$$

onde usou-se a K-invariância à direita de d_K e a desigualdade em (A4), o que estabelece (E3). ∎

Observação 2.12 *Como será visto no próximo exemplo, a decomposição em (A1) imita a decomposição de Iwasawa, assim não se deve esperar que K normalize U.*

Para se provar (E3) na Equação (2.29) usa-se a hipótese (A4). Para satisfazer (A4) a métrica d_G (2.28) construída na demonstração tem que respeitar a decomposição em (A1) mas como nessa decomposição fator K aparece à esquerda de U e como K não necessariamente normaliza U, não se deve esperar que se possa definir d_G K-invariante à *direita satisfazendo (A4). A métrica d_G (2.28) é claramente K-invariante à esquerda, no entanto se a hipótese de K-invariância à esquerda fosse feita em (Q3) isso não simplificaria nenhuma das construções da seção anterior.*

O caso concreto mais significativo onde todas as hipóteses deste capítulo são verificadas é dado a seguir.

Teorema 2.13 *Se o grupo estrutural G de Q é semi-simples e a fibra típica F de E é um flag $\mathbb{F}_\Theta$ de G, $\Theta \subset \Sigma$, então são satisfeitas todas as hipóteses (Qi), (Ei), (Aj), $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \ldots, 4$. Em particular a condição de acessibilidade (A) é satisfeita para os semigrupos de sombreamento em (2.11).*

Demonstração: Seja $G = K \times AN(\lambda_0)$ uma decomposição de Iwasawa de G, definindo-se $U := AN(\lambda_0)$ tem-se das propriedades da decomposição de Iwasawa que (Q1), (A1), (A2) são satisfeitas. Que (A3) é satisfeita segue de U estar contido na isotropia de $\mathfrak{p}_\Theta(\lambda_0) \in \mathbb{F}_\Theta$. Segue então da Proposição 2.11 que são satisfeitas (Q2), (Q3), (A4), (E1) e (E3). Por último (E2) é satisfeita uma vez que a métrica de Hausdorff d^H em $\mathbb{F}_\Theta$ é uma métrica Riemanniana completa, logo uma métrica convexa. A última afirmação é então imediata do Teorema 2.9. ∎

Assim no caso de grupo estrutural semi-simples G e semifluxo de endomorfismos σ_t em Q os resultados das últimas duas Seções podem ser aplicados para se fazer o sombreamento simultâneo dos semifluxos induzidos em todos fibrados flag $\mathbb{F}_\Theta Q$ de Q usando-se o mesmo semigrupo de sombreamento de Q por endomorfismos pequenos (cf. Observação 2.10).

Capítulo 3

Decomposição de Iwasawa e polar de fibrados principais

Fixa-se nesse capítulo um fibrado principal localmente trivial $\pi_X : Q \to X$ com grupo estrutural G semi-simples e base X paracompacta.

Os objetivos desse capítulo são introduzir o conceitos de decomposição de Iwasawa de Q, decomposição polar de Q, introduzir o cociclo radial associado a uma decomposição de Iwasawa de Q e obter expressões explícitas para esse cociclo.

A partir desse capítulo são usados livremente as notações e resultados de Teoria de Lie semi-simples do Apêndice A.3.

3.1 Decomposição de Iwasawa do fibrado Q

O objetivo desta seção é mostrar como uma decomposição de Iwasawa do grupo estrutural G dá origem a uma decomposição análoga do fibrado Q. Fixa-se uma decomposição de Iwasawa de G dada por

$$G = K(AN(\lambda_0)), \tag{3.1}$$

onde λ_0 é uma câmara de G. Se $g \in G$ tem decomposição de Iwasawa

$$g = kh(\lambda_0)n \in KA(\lambda_0)N(\lambda_0), \text{ onde } h \in A, \tag{3.2}$$

então denota-se por $\mathsf{K}(g) := k$ a K-parte de g e denota-se por $A(g) := h$ a A-parte canônica de g com respeito a essa decomposição de Iwasawa.

Como a base X de Q é paracompacta e como na decomposição de Iwasawa (3.1) de G o subgrupo $AN(\lambda_0)$ é difeomorfo a um $\mathbb{R}^n$ segue da Proposição A.4 que essa decomposição de Iwasawa fornece uma K-redução $R \subset Q$. Uma K-redução R de Q juntamente com a decomposição de Iwasawa $G = K(AN(\lambda_0))$ fornece uma certa decomposição de Q que é análoga à decomposição de Iwasawa de G, como mostram os seguintes resultados.

Proposição 3.1 *Dado $q \in Q$ existe um único $r \in R$ e um único elemento $hn \in AN(\lambda_0)$ tais que*

$$q = r\,(hn). \tag{3.3}$$

Demonstração: Seja $\widetilde{r} \in R$ na mesma fibra que q em Q, então existe $g \in G$ tal que $q = \widetilde{r}g$, seja $g = khn \in KAN(\lambda_0)$ a decomposição de Iwasawa de g e ponha $r := \widetilde{r}k \in R$, então $q = (\widetilde{r}k)hn = r\,hn$, o que prova a existência. Seja $h'n' \in AN(\lambda_0)$, $r' \in R$ tais que $q = r'\,h'n'$, então existe $k' \in K$ tal que $r' = rk'$ de modo que $q = r\,k'h'n' = r\,hn$, logo $k'h'n' = hn$, assim pela unicidade na decomposição de Iwasawa de G tem-se que $k' = 1$ e $hn = h'n'$, logo que $r' = r$, o que prova a unicidade. ∎

Chama-se a decomposição na Equação (3.3) da *decomposição de Iwasawa de Q* determinada pela escolha da K-redução $R \subset Q$ e da decomposição de Iwasawa $G = K(AN(\lambda_0))$, ela será denotada por

$$Q = R(AN(\lambda_0)). \tag{3.4}$$

Por um abuso de notação, daqui em diante usa-se o sobrescrito R para as construções em Q, ou em seus fibrados associados, que dependem desta decomposição de Iwasawa de Q.

Por meio da Proposição 3.1 podem-se definir as aplicações

$$\mathsf{R} : Q \to R, \quad \mathsf{AN}^R : Q \to AN(\lambda_0), \quad \mathsf{A}^R : Q \to A \tag{3.5}$$

que estão univocamente definidas pela equação

$$q = \mathsf{R}(q)\mathsf{AN}^R(q), \quad (q \in Q), \tag{3.6}$$

e por

$$\mathsf{A}^R(q) := A(\mathsf{AN}^R(q)), \quad (q \in Q). \tag{3.7}$$

Proposição 3.2 *As aplicações* R, AN^R *e* A^R *são contínuas e satisfazem as seguintes propriedades*

i) $\mathsf{R}(r) = r$, $\mathsf{AN}^R(r) = 1$, $\mathsf{A}^R(rg) = A(g)$ *para* $r \in R$, $g \in G$,

ii) $\mathsf{R}(qv) = \mathsf{R}(q)$, $\mathsf{AN}^R(qv) = \mathsf{AN}^R(q)v$, *para* $v \in AN(\lambda_0)$, $q \in Q$,

iii) $\mathsf{R}(qm) = \mathsf{R}(q)m$, $\mathsf{AN}^R(qm) = m^{-1}\mathsf{AN}^R(q)m$, *para* $m \in M(\lambda_0)$, $q \in Q$.

iv) Se $\psi_i(q) = (x, g)$ *então* $\mathsf{R}(q) = \psi_i^{-1}(x, \mathsf{K}(g))$, $\mathsf{A}^R(q) = A(g)$, *onde* ψ_i *é uma carta de* Q *adaptada à* R, $q \in Q$, $x \in X$, $g \in G$.

Demonstração: Primeiro provam-se as propriedades de (i) a (iii). As primeiras duas equações da propriedade (i) seguem imediatamente da unicidade, para a terceira toma-se a decomposição de Iwasawa $g = kh(\lambda_0)n \in KA(\lambda_0)N(\lambda_0)$ então $rg = (rk)h(\lambda_0)n$ onde $rk \in R$ de modo que $\mathsf{AN}^R(rg) = h(\lambda_0)n$, logo $\mathsf{A}^R(rg) = h = A(g)$. Para a segunda propriedade tem-se que

$$qv = (\mathsf{R}(q)\mathsf{AN}^R(q))v = \mathsf{R}(q)(\mathsf{AN}^R(q)v) = \mathsf{R}(qv)\mathsf{AN}^R(qv). \tag{3.8}$$

Disso e da unicidade segue (ii). Para a terceira propriedade tem-se que

$$qm = (\mathsf{R}(q)\mathsf{AN}^R(q))m = (\mathsf{R}(q)m)(m^{-1}\mathsf{AN}^R(q)m) = \mathsf{R}(qm)\mathsf{AN}^R(qm). \tag{3.9}$$

Como $m \in K$ normaliza $AN(\lambda_0)$, então (iii) segue da unicidade.

Para se provar a continuidade usa-se a Proposição A.6 para se obter cartas locais $\psi_i : \pi_X^{-1}(U_i) \to U_i \times G$ do fibrado Q adaptadas a redução R. Seja $i \in I$ tal que $\pi_X(q) \in U_i$, então $q = \psi_i^{-1}(\pi_X(q), g_i(q))$, onde $g_i : \pi_X^{-1}(U_i) \to G$ é contínua. Faz-se uma decomposição de Iwasawa $g_i(q) = \mathsf{K}(g_i(q))AN(g_i(q))$, onde $AN(g)$ denota a $AN(\lambda_0)$-parte de $g \in G$. Usa-se agora a propriedade de equivariância das cartas para se obter que

$$q = \psi_i^{-1}(\pi_X(q), g_i(q)) = \psi_i^{-1}(\pi_X(q), \mathsf{K}(g_i(q)))\, AN(g_i(q)). \tag{3.10}$$

Como as cartas ψ_i são adaptadas a R tem-se do item (ii) da Proposição A.6 que

$$\psi_i^{-1}(\pi_X(q), \mathsf{K}(g_i(q))) \in R, \tag{3.11}$$

assim da unicidade da decomposição de Iwasawa de Q segue que

$$\mathsf{R}(q) = \psi_i^{-1}(\pi_X(q), \mathsf{K}(g_i(q))), \quad \mathsf{AN}^R(q) = AN(g_i(q)), \tag{3.12}$$

de onde segue que

$$\mathsf{A}^R(q) = A(g_i(q)). \tag{3.13}$$

Da continuidade de decomposição de Iwasawa, segue então a continuidade de R, AN^R e A^R. O item (iv) segue imediatamente das duas equações anteriores. ∎

Como K age transitivamente em $\mathbb{F}$, o fibrado K-principal R também tem seu fibrado flag associado

$$\mathbb{F}R := R \times_K \mathbb{F}. \tag{3.14}$$

Proposição 3.3 *A inclusão $i^R : R \times \mathbb{F} \subset Q \times \mathbb{F}$ induz um homemorfismo $i^R : \mathbb{F}R \to \mathbb{F}Q$ cuja inversa $j^R : \mathbb{F}Q \to \mathbb{F}R$ é dada por*

$$j^R(q \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)) = \mathsf{R}(q) \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0), \quad (q \in Q). \tag{3.15}$$

Demonstração: A aplicação induzida é dada por $i^R(r \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)) = r \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)$ é claramente bem definida, logo contínua, e claramante injetiva. Para se provar que também é sobrejetiva usa-se a decomposição de Iwasawa (3.6) de Q observando que para $q \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0) \in \mathbb{F}Q$, $q \in Q$, tem-se que

$$q \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0) = \mathsf{R}(q)\mathsf{AN}^{\mathsf{R}}(q) \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0) = \mathsf{R}(q) \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0) = i^R(\mathsf{R}(q) \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)). \tag{3.16}$$

Definindo-se a aplicação j^R por (3.15) segue de (3.16) que $i^R(j^R(q \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0))) = q \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)$. Por outro lado, usando-se a primeira propriedade da Proposição 3.2, tem-se que

$$j^R(i^R(r \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0))) = \mathsf{R}(r) \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0) = r \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0). \tag{3.17}$$

O que mostra que j^R e i^R são inversas uma da outra. Falta apenas provar que a inversa j^R é bem definida, logo contínua, uma vez que a aplicação R é contínua pela Proposição 3.2. Sejam então $q', q \in Q$, tais que $q' \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0) = q \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)$. Segue que $q' = qg$ com $g \in P(\lambda_0)$. Pela decomposição de Iwasawa de $P(\lambda_0)$ tem-se que $g = mhn \in MAN(\lambda_0)$. Logo, pelas propriedades (ii) e (iii) da Proposição 3.2 tem-se $\mathsf{R}(q') = \mathsf{R}(q)m$ de modo que $\mathsf{R}(q') \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0) = \mathsf{R}(q)m \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0) = \mathsf{R}(q) \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)$, o que prova que j^R é bem definida. ∎

Exemplo 3.4 *No caso em que $Q = G$ com base X igual a um ponto então é imediato que: o semigrupo* $\mathrm{End}_\ell(Q) = G$ *agindo à direita em G, a K-redução de Q é a escolha do subgrupo compacto maximal $R = K \subset G$, o subsemigrupo* $\mathrm{End}_\ell(R) = K$, *a decomposição de Iwasawa (3.4) de Q é a decomposição de Iwasawa (3.1) de G, as aplicações* $\mathsf{R} : G \to K$, $\mathsf{AN}^R : G \to AN(\lambda_0)$, $\mathsf{A}^R : G \to A$ *de (3.5) são os respectivos fatores da decomposição de Iwasawa de G e, finalmente, o homeomorfismo i^R da Proposição 3.3 é o análogo do difeomorfismo entre $K/M(\lambda_0)$ e $G/P(\lambda_0)$ induzido pela inclusão $K \subset G$.*

3.2 Decomposição polar do grupo G

Observa-se que em [24] o conceito de decomposição polar do grupo semi-simples G sobre seu flag maximal $\mathbb{F}$ é introduzido de maneira não intrínseca. Aqui são feitas construções intrínsecas que serão depois utilizadas no contexto de fibrados.

Para se introduzir o fibrado que dá origem à decomposição polar de G escolhe-se uma câmara arbitrária λ_1 de G e considera-se o subgrupo parabólico associado $P(\lambda_1)$ com a decomposição de Iwasawa associada $P(\lambda_1) = (MAN)(\lambda_1) = (AMN)(\lambda_1)$. Uma vez que o $N(\lambda_1)$ é subgrupo fechado e $M(\lambda_1)$ subgrupo compacto, segue que $MN(\lambda_1)$ é subgrupo fechado de G. Define-se então o seguinte espaço homogêneo com ponto base

$$\mathbb{U} := G/MN(\lambda_1), \quad \eta(\lambda_1) := MN(\lambda_1), \tag{3.18}$$

e define-se a seguinte fibração G-equivariante de $\mathbb{U}$ sobre o flag maximal $\mathbb{F}$ de G

$$\pi_{\mathbb{F}} : \mathbb{U} \to \mathbb{F}, \quad \pi(g\eta(\lambda_1)) = g\mathfrak{p}(\lambda_1). \tag{3.19}$$

O espaço homogêneo $\mathbb{U}$ é chamado o *espaço total* da decomposição polar de G e a fibração $\pi_{\mathbb{F}}$ é chamada a *fibração da decomposição polar* de G. Uma vez que $P(\lambda_1) = A(\lambda_1)(MN(\lambda_1))$ e que $A(\lambda_1)$ normaliza $MN(\lambda_1)$ segue que $MN(\lambda_1)$ é subgrupo normal de $P(\lambda_1)$. Uma vez que $P(\lambda_1)/MN(\lambda_1) = A(\lambda_1)$ segue que a fibração acima é $A(\lambda_1)$-principal. Para que a escolha da câmara λ_1 seja inessencial nas construções acima considera-se A o abeliano canônico maximal de G. Define-se a ação à direita de A em $\mathbb{U}$ via

$$g\eta(\lambda_1) \cdot h := (gh(\lambda_1))\eta(\lambda_1), \quad (h \in A). \tag{3.20}$$

Segue de $A(\lambda_1) \cap MN(\lambda_1) = 1$ que essa ação é livre. Da decomposição de Iwasawa de $P(\lambda_1)$, tem-se que

$$(\pi_{\mathbb{F}})^{-1}(\mathfrak{p}(\lambda_1)) = P(\lambda_1)\eta(\lambda_1) = (AMN)(\lambda_1)\eta(\lambda_1) = A(\lambda_1)\eta(\lambda_1) = \eta(\lambda_1) \cdot A. \tag{3.21}$$

Logo $\pi_{\mathbb{F}} : \mathbb{U} \to \mathbb{F}$ é um fibrado A-principal. É necessário saber como muda a ação à direita de A e como muda o estabilizador em G quando se muda o ponto base em $\mathbb{U}$. Esse é o conteúdo do próximo resultado.

Proposição 3.5 *Dado uma câmara arbitrária λ_0 de G fixa-se um outro ponto base $\eta(\lambda_0) \in \mathbb{U}$ na fibra sobre $\mathfrak{p}(\lambda_0) \in \mathbb{F}$. Então o estabilizador de $\eta(\lambda_0)$ em G é $MN(\lambda_0)$ e, com respeito a esse ponto base, a ação do A canônico em $\mathbb{U}$ é dada por*

$$g\eta(\lambda_0) \cdot h := (gh(\lambda_0))\eta(\lambda_0), \quad (h \in A). \tag{3.22}$$

Demonstração: Como G age transitivamente nas suas câmaras existe $b \in G$ tais que $\lambda_0 = b\lambda_1 b^{-1}$. Assim $\mathfrak{p}(\lambda_0) = b\mathfrak{p}(\lambda_1)$ logo $b\eta(\lambda_1)$ está na fibra sobre $\mathfrak{p}(\lambda_0)$ e, como $\eta(\lambda_0)$ também está na fibra sobre $\mathfrak{p}(\lambda_0)$, existe $a \in A(\lambda_1)$ tal que $\eta(\lambda_0) = ba\eta(\lambda_1)$. Como $A(\lambda_1)$ normaliza λ_1 e estabiliza $\mathfrak{p}(\lambda_1)$, tomando $b' := ba$ tem-se que $\lambda_0 = b'\lambda_1 b'^{-1}$. Assim $\eta(\lambda_0) = b'\eta(\lambda_1)$. Daí segue que o estabilizador de $\eta(\lambda_0)$ em G é $b'MN(\lambda_1)b'^{-1} = MN(b'\lambda_1 b'^{-1}) = MN(\lambda_0)$, o que prova a primeira afirmação. Usando-se que $b'h(\lambda_1)b'^{-1} = h(b'\lambda_1 b'^{-1}) = h(\lambda_0)$ tem-se que

$$g\eta(\lambda_0) \cdot h = g(b'\eta(\lambda_1)) \cdot h = (gb'h(\lambda_1))\eta(\lambda_1) = g(b'h(\lambda_1)b'^{-1})b'\eta(\lambda_1) = gh(\lambda_0)\eta(\lambda_0), \tag{3.23}$$

o que prova a segunda afirmação. ∎

Como A é um subgrupo vetorial segue que o fibrado A-principal (3.19) é trivial, uma seção global explícita desse fibrado será construída na próxima seção no contexto mais geral de decomposição polar de fibrados.

3.3 Decomposição polar do fibrado Q

Os objetivos dessa seção são estender a decomposição polar de G da seção anterior para uma decomposição polar de um fibrado G-principal Q e, a partir de uma escolha de decomposição de Iwasawa do fibrado Q (seção 3.1), obter uma seção global explícita da fibração da decomposição polar de Q.

O fibrado A-principal (3.19) da decomposição polar de G descreve a decomposição polar de Q fibra-a-fibra. Para juntá-las num fibrado e obter a decomposição polar global de Q, consideram-se naturalmente os seguintes fibrados associados de Q

$$\mathbb{U}Q := Q \times_G \mathbb{U}, \qquad \mathbb{F}Q := Q \times_G \mathbb{F}, \tag{3.24}$$

e a fibração A-principal entre eles

$$\pi_{\mathbb{F}} : \mathbb{U}Q \to \mathbb{F}Q, \quad \pi_{\mathbb{F}}(q \cdot \eta(\lambda_0)) := q \cdot \pi_{\mathbb{F}}(\eta(\lambda_0)), \tag{3.25}$$

onde $\eta(\lambda_0) \in \mathbb{F}$ é arbitrário. O fibrado A-principal $\mathbb{U}Q$ se chama *fibrado espaço total* da decomposição polar de Q, sua base $\mathbb{F}Q$ é o fibrado flag maximal de Q e a fibração $\pi_{\mathbb{F}}$ é chamada a *fibração da decomposição polar* de Q. Um ponto de $\mathbb{U}Q$ será costumeiramente denotado por η e um ponto de $\mathbb{F}Q$ por ξ. Como A é um subgrupo vetorial segue que o fibrado A-principal (3.25) é trivial. A seguir deseja-se construir uma seção global explícita desse fibrado. Uma idéia imediata para se fazer isso seria considerar a seguinte aplicação

$$\chi : \mathbb{F}Q \to \mathbb{U}Q, \quad \chi(q \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)) := q \cdot \eta(\lambda_0), \quad q \in Q, \tag{3.26}$$

mas como o estabilizador de $\mathfrak{p}(\lambda_0)$ em G é $P(\lambda_0)$ que não estabiliza $\eta(\lambda_0)$ é imediato que essa aplicação não está bem definida em $\mathbb{F}Q$. A idéia para definir uma tal aplicação é então considerar uma K-redução R de G e definir χ no flag $\mathbb{F}R$ de R. Como o estabilizador de

$\mathfrak{p}(\lambda_0)$ em K é $M(\lambda_0)$, que estabiliza $\eta(\lambda_0)$ (Proposição 3.5), segue que esta aplicação estará bem definida em $\mathbb{F}R$. Mais precisamente tem-se o seguinte resultado.

Teorema 3.6 *À partir da escolha de uma decomposição de Iwasawa $Q = R(AN(\lambda_0))$ (3.4) do fibrado Q fixam-se nas fibras típicas o ponto base $\mathfrak{p}(\lambda_0) \in \mathbb{F}$ e um ponto base $\eta(\lambda_0) \in \mathbb{U}$ na fibra sobre $\mathfrak{p}(\lambda_0)$. Com essas escolhas, a aplicação*

$$\widetilde{\chi}^R : \mathbb{F}R \to \mathbb{U}Q, \quad \widetilde{\chi}^R(r \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)) := r \cdot \eta(\lambda_0), \qquad (r \in R), \tag{3.27}$$

é bem definida e contínua e a composição

$$\chi^R : \mathbb{F}Q \to \mathbb{U}Q, \quad \chi^R := \widetilde{\chi}^R \circ j^R, \tag{3.28}$$

define uma seção global contínua do fibrado A-principal da decomposição polar (3.25). Para $q \in Q$, a seção χ^R satisfaz

$$\chi^R(q \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)) = \mathsf{R}(q) \cdot \eta(\lambda_0) = q \cdot \eta(\lambda_0) \cdot \mathsf{A}^R(q)^{-1}. \tag{3.29}$$

Para $\psi \in \mathrm{End}_\ell(R)$ a seção χ^R satisfaz

$$\chi^R(\psi(\xi)) = \psi(\chi^R(\xi)), \quad \xi \in \mathbb{F}Q. \tag{3.30}$$

Demonstração: Da Proposição 3.5 segue que $MN(\lambda_0)$ estabiliza $\eta(\lambda_0)$. Para mostrar que $\widetilde{\chi}^R$ está bem definida, logo é contínua, sejam $r', r \in Q$, tais que $r' \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0) = r \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)$, segue então que $r' = rk$ com $k \in P(\lambda_0) \cap K = M(\lambda_0)$, pela decomposição de Iwasawa de $P(\lambda_0) = M(\lambda_0)AN(\lambda_0)$. Assim $\widetilde{\chi}^R(r' \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)) = r' \cdot \eta(\lambda_0) = r \cdot \eta(\lambda_0) = \widetilde{\chi}^R(r' \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0))$, o que prova que $\widetilde{\chi}^R$ está bem definida. Da Proposição 3.3 segue que j^R, logo χ^R, é contínua. Que χ^R é uma seção segue de

$$\pi_{\mathbb{F}}(\chi^R(r \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0))) = \pi_{\mathbb{F}}(r \cdot \eta(\lambda_0)) = r \cdot \pi_{\mathbb{F}}(\eta(\lambda_0)) = r \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0). \tag{3.31}$$

A primeira equação de (3.29) segue das Equações (3.15) e (3.27). Para a segunda equação seja $q = \mathsf{R}(q)\mathsf{AN}^R(q)$ com $\mathsf{AN}^R(q) = h(\lambda_0)n \in A(\lambda_0)N(\lambda_0)$, de modo que $\mathsf{A}^R(q) = h$. Como $A(\lambda_0)$ normaliza $N(\lambda_0)$ que estabiliza $\eta(\lambda_0)$ tem-se que

$$\mathsf{R}(q) \cdot \eta(\lambda_0) = \mathsf{R}(q) \cdot (h(\lambda_0)nh^{-1}(\lambda_0))\eta(\lambda_0) = \mathsf{R}(q)h(\lambda_0)n \cdot \eta(\lambda_0) \cdot h^{-1} = q \cdot \eta(\lambda_0) \cdot \mathsf{A}^R(q)^{-1}, \tag{3.32}$$

o que prova a segunda equação de (3.29).

Para a equação (3.30) pela Proposição 3.3 escreve-se $\xi = r \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)$ e usa-se (3.27).

∎

Exemplo 3.7 *No caso em que $Q = G$ com base X igual a um ponto então o fibrado A-principal (3.25) é o fibrado de espaços homogêneos (3.19), além disso segue do Exemplo 3.4 e de (3.27) que nesse caso a seção global $\chi : \mathbb{F} \to \mathbb{U}$ dada no Teorema 3.6 é*

$$\chi(k\mathfrak{p}(\lambda_0)) = k\eta(\lambda_0), \quad (k \in K), \tag{3.33}$$

que é a seção de $\mathbb{U}$ considerada em [24], primeira parte da seção 3.

3.4 Cociclo radial em $\mathbb{F}Q$

O objetivo dessa seção é introduzir o cociclo radial associado a uma decomposição de Iwasawa de Q e obter expressões explícitas para esse cociclo. Serão aplicados a seguir os resultados do Exemplo 1.3 do capítulo 1.

Fazendo-se a escolha de uma decomposição de Iwasawa $Q = R(AN(\lambda_0))$ de Q e dos pontos base dados no enunuciado do Teorema 3.6 obtém-se uma seção global contínua χ^R do fibrado A-principal trivial $\pi_{\mathbb{F}} : \mathbb{U}Q \to \mathbb{F}Q$. A seção χ^R dá origem a uma aplicação contínua $A^R : \mathbb{U} \to A$, a chamada *aplicação radial em* $\mathbb{U}Q$ com respeito a decomposição de Iwasawa (3.4) de Q, que é determinada por (1.6) que, neste caso, toma a forma

$$\eta = \chi^R(\pi_{\mathbb{F}}(\eta))A^R(\eta), \quad (\eta \in \mathbb{U}Q). \tag{3.34}$$

A Equação (3.34) é chamada de *decomposição polar de Q* (mais precisamente, de $\mathbb{U}Q$), onde $A^R(\eta)$ é chamada a *parte radial de η* e $\chi^R(\pi_{\mathbb{F}}(\eta))$ é chamada de *parte projetiva de η*, todas elas com respeito a decomposição de Iwasawa (3.4) de Q. Como a seção global χ^R é um mergulho topológico de $\mathbb{F}Q$ em $\mathbb{U}Q$, também chama-se $\pi_{\mathbb{F}}(\eta)$ de *parte projetiva de η*. Tem-se a seguinte expressão explícita para a aplicação radial A^R.

Proposição 3.8

$$A^R(q \cdot \eta(\lambda_0)) = \mathsf{A}^R(q), \qquad (q \in Q). \tag{3.35}$$

Demonstração: Da última equação em (3.29) segue que $q \cdot \eta(\lambda_0) = \chi^R(q \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)) \cdot \mathsf{A}^R(q)$. Uma vez que $\pi_{\mathbb{F}}(q \cdot \eta(\lambda_0)) = q \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)$ o resultado segue de (3.34). ∎

Agora da ação de $\mathrm{End}_\ell(Q)$ em $\mathbb{U}Q$ tem-se o A-cociclo em $\mathbb{F}Q$ determinado por (1.7) que é dado por

$$A^R : \mathrm{End}_\ell(Q) \times \mathbb{F}Q \to A, \quad A^R(\varphi, \xi) := A^R(\varphi(\chi^R(\xi))), \tag{3.36}$$

esse é o chamado *cociclo radial* em $\mathbb{F}Q$ com respeito a decomposição de Iwasawa (3.4) de Q que, claramente, só está definido para pares (φ, ξ) tais que $\pi_X(\xi) \in \pi_X(\mathrm{dom}\varphi)$. A Equação (1.8) neste caso toma a forma

$$\varphi(\chi^R(\xi)) = \chi^R(\varphi(\xi)) A^R(\varphi, \xi), \tag{3.37}$$

de modo que $A^R(\varphi, \xi)$ mede o "deslocamento radial" em $\mathbb{U}Q$ que φ efetua em ξ com respeito a seção χ^R, como ilustrado na Figura 3.1. Fica claro do argumento se A^R denota a aplicação dada em (3.5), (3.34) ou (3.36). Tem-se a seguinte expressão explícita para o cociclo radial $A^R(\varphi, \xi)$.

Proposição 3.9

$$A^R(\varphi, r \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)) = \mathsf{A}^R(\varphi(r)), \qquad (r \in R). \tag{3.38}$$

Demonstração: De (3.29) tem-se que $\chi^R(r \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)) = r \cdot \eta(\lambda_0)$ uma vez que $r \in R$, logo $\varphi(\chi^R(r \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0))) = \varphi(r) \cdot \eta(\lambda_0)$ e o resultado segue de (3.36) e de (3.35). ∎

Proposição 3.10 *O cociclo radial $A^R(\varphi, \xi)$ é $\mathrm{End}_\ell(R)$-invariante à esquerda e $\mathrm{End}_\ell(R)$-equivariante à direita. Sejam $\varphi \in \mathrm{End}_\ell(Q)$, $r \in R$ e $g \in G$ tais que $\xi = r \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)$ e $\varphi(r) = rg$ então*

$$A^R(\varphi, \xi) = A(g). \tag{3.39}$$

Mais geralmente se $\xi = r \cdot k\mathfrak{p}(\lambda_0)$ com $k \in K$ então

$$A^R(\varphi, \xi) = A(kgk^{-1}). \tag{3.40}$$

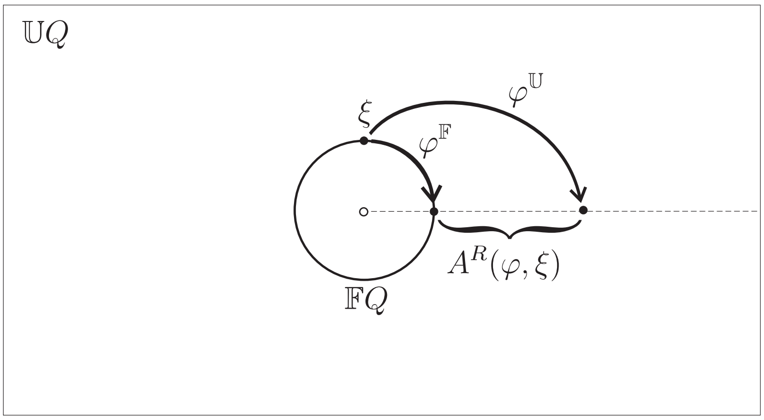

Figura 3.1: Interpretação geométrica da Equação (3.37), na figura $\mathbb{F}Q$ está mergulhado em $\mathbb{U}Q$ por meio da seção χ^R.

Demonstração: As três primeiras afirmações seguem imediatamente da expressão explícita (3.38), da equação (3.30) e do item (i) da Proposição 3.2. Para a quarta afirmação observa-se que pondo $r' := rk \in R$ tem-se $\xi = r' \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)$ e $\varphi(r') = \varphi(rk) = \varphi(r)k = rgk = r'k^{-1}gk$, desse modo a segunda afirmação se aplica com r e g substituidos por r' e $k^{-1}gk$ respectivamente. ∎

Em palavras o resultado anterior implica que se o endomorfismo local φ fixa a fibra de $\xi = r \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0) \in \mathbb{F}Q$, $r \in R$, agindo na fibra de Q em r como multiplicação à direita por $g \in G$, então φ age em $\chi^R(\xi) \in \mathbb{U}Q$ como multiplicação à direita por $A(g)$.

Para se obter expressões explícitas em termos de cartas locais consideram-se ψ_i cartas locais de Q adaptadas a redução R dadas na Proposição A.6.

Proposição 3.11 *Seja $q \in Q$ tal que $x = \pi_X(q) \in U_i$ e $\psi_i(q) = (x, g)$, $g \in G$, então*

$$A^R(q \cdot \eta(\lambda_0)) = A(g). \tag{3.41}$$

Sejam $\varphi \in \mathrm{End}_\ell(Q)$ e $r \in R$ tais que $x = \pi_X(r) \in U_i$, $\psi_i(r) = (x, k)$, $k \in K$ e $\varphi(x) \in U_j$ então

$$A^R(\varphi, r \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)) = A(\varphi^G_{ij}(x)k). \tag{3.42}$$

Demonstração: A primeira afirmação segue diretamente de (3.35) e do item (iv) da Proposição 3.2. Para a segunda afirmação tem-se das escolhas feitas que $\psi_j(\varphi(r)) = (\varphi(x), \varphi_{ij}^G(x)k)$ logo o resultado segue diretamente de (3.38) e da afirmação anterior. ∎

Observação 3.12 *Trivializando-se o fibrado da decomposição polar $\mathbb{U}Q \to \mathbb{F}Q$ (3.25) por meio de uma outra seção global $\chi' : \mathbb{F}Q \to \mathbb{U}Q$ (por exemplo, se χ' é a seção correspondente à uma outra decomposição de Iwasawa $Q = R'(AN(\lambda_0{}'))$ de Q), pelo Exemplo 1.3, obtém-se um outro A-cociclo $A^{\chi'}(\varphi, \xi)$ que é cohomólogo ao cociclo radial $A^R(\varphi, \xi)$ por uma cohomologia contínua $h : \mathbb{F}Q \to A$.*

Exemplo 3.13 *No caso em que $Q = G$ com base X igual a um ponto então segue do Exemplo 3.4 e de (3.38) que o cociclo radial é*

$$A^R : G \times \mathbb{F} \to A, \quad A^R(g, k \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)) = A(gk), \quad (g \in G,\, k \in K), \tag{3.43}$$

que é o A-cociclo K-invariante em $\mathbb{F}$ considerado em [10].

3.5 Flags parciais

A decomposição polar de Q sobre o seu fibrado flag maximal $\mathbb{F}Q$ feita nas últimas seções pode ser generalizada para seus flags parciais. Como a decomposição polar mais importante para as aplicações dessa tese é a decomposição polar sobre o fibrado flag maximal, as outras decomposições polares de Q serão apenas comentadas na presente seção. Primeiro retorna-se ao caso fibra-a-fibra.

Seja G um grupo semi-simples e seja $G = K(AN(\lambda_1))$ uma decomposição de Iwasawa de G. Suprime-se da notação da câmara λ_1 dos objetos que dependem de câmaras, a menos que se queira enfatizar a dependência na câmara. Seja $\Theta \subset \Sigma$. Seja $\mathfrak{g}(\Theta)$ a subálgebra semi-simples de tipo Θ de $\mathfrak{g}$ (cf. [26]) e seja $\mathfrak{n}_\Theta$ a subálgebra nilpotente dada por

$$\mathfrak{n}_\Theta := \sum \{ g_\alpha : \ \alpha \in \Pi^+ - \langle \Theta \rangle \}. \tag{3.44}$$

Tem-se que $\mathfrak{g}(\Theta)$ normaliza $\mathfrak{n}_\Theta$. Sejam $G(\Theta)$ e N_Θ os respectivos subgrupos conexos de G, segue que $G(\Theta)$ normaliza N_Θ. Define-se o subgrupo

$$L_\Theta := MG(\Theta)N_\Theta, \tag{3.45}$$

que é de fato um subgrupo uma vez que M normaliza $G(\Theta)$ e N_Θ. Uma vez que $K_\Theta = MK(\Theta)$ e que $N = N(\Theta)N_\Theta$ segue que a decomposição de Iwasawa de L_Θ é dada por

$$L_\Theta = K_\Theta A(\Theta)N. \tag{3.46}$$

Como $A(\Theta)N$ é subgrupo fechado de G e K_Θ é subgrupo compacto, segue que L_Θ é subgrupo fechado de G, logo um subgrupo de Lie. Da decomposição de Iwasawa do parabólico P_Θ segue que

$$P_\Theta = L_\Theta A_\Theta, \tag{3.47}$$

onde A_Θ normaliza L_Θ e $A_\Theta \cap L_\Theta = 1$. Segue daí que L_Θ é subgrupo fechado e normal de P_Θ e que

$$P_\Theta / L_\Theta = A_\Theta. \tag{3.48}$$

Define-se então o seguinte espaço homogêneo com ponto base

$$\mathbb{U}_\Theta := G/L_\Theta, \quad \eta(\lambda_1)_\Theta := L_\Theta, \tag{3.49}$$

e define-se a seguinte fibração G-equivariante de $\mathbb{U}$ sobre o flag $\mathbb{F}_\Theta$ de tipo Θ de G

$$\pi_{\mathbb{F}_\Theta} : \mathbb{U}_\Theta \to \mathbb{F}_\Theta, \quad \pi(g\eta(\lambda_1)_\Theta) = g\mathfrak{p}(\lambda_1)_\Theta. \tag{3.50}$$

O espaço homogêneo $\mathbb{U}_\Theta$ é chamado o *espaço total* da decomposição polar de G sobre o flag $\mathbb{F}_\Theta$. Segue das considerações anteriores que que a fibração acima é $A(\lambda_1)_\Theta$-principal. Novamente, para que a escolha da câmara λ_1 seja inessencial nas construções acima, considera-se A_Θ como subálgebra do abeliano canônico maximal A de G. Define-se a ação à direita de A_Θ em $\mathbb{U}$ via

$$g\eta(\lambda_1)_\Theta \cdot h := (gh(\lambda_1))\eta(\lambda_1)_\Theta, \quad (h \in A_\Theta). \tag{3.51}$$

Dessa maneira $\pi_{\mathbb{F}_\Theta} : \mathbb{U}_\Theta \to \mathbb{F}_\Theta$ é um fibrado A_Θ-principal. No caso particular em que $\Theta = \varnothing$ tem-se $L_\varnothing = MN(\lambda_1)$ e o que fornece a decomposição polar sobre o flag maximal.

Considera-se o fibrado A_Θ principal $\mathbb{U}_\Theta Q \to \mathbb{F}_\Theta Q$. A construção de uma seção χ^R_Θ : $\mathbb{F}_\Theta Q \to \mathbb{U}_\Theta Q$ dada por uma K-redução R de Q e do A_Θ-cociclo radial A^R_Θ correspondente são inteiremante análogas. Seja $\pi_\Theta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\Theta$ a projeção natural entre esses flags e seja $p_\Theta : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_\Theta$ a projeção ortogonal à $\mathfrak{a}(\Theta)$. A relação entre o A-cociclo radial A^R em $\mathbb{F}$ e o A_Θ-cociclo radial A^R_Θ em $\mathbb{F}_\Theta$ é dada por

$$A^R_\Theta(\varphi, \pi_\Theta(\xi)) = p_\Theta(A^R(\varphi, \xi)), \qquad (\varphi \in \mathrm{End}_\ell(Q),\, \xi \in \mathbb{F}Q). \tag{3.52}$$

3.6 Um caso de grupo redutível: $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$

Tudo o que foi feito nas últimas seções para um fibrado principal Q com grupo estrutural semi-simples G pode ser feito, mais geralmente, se o grupo estrutural de Q é um grupo de Lie redutível G bem comportado. A estrutura de componentes conexas de G deve ser tal que os flags de G sejam os mesmos que os flags de sua componente semi-simples (cf. Seção 5.3 de [1]). Além disso, G deve ter uma teoria de estrutura suficientemente boa para que se possa falar de decomposição de Cartan de G, abelianos maximais de G, decomposição de Iwasawa de G, etc. (cf. Capítulo VII.2, p.446, de [22].)

Ainda que a teoria possa ser desenvolvida na generalidade dada acima, o interesse dessa seção é desenvolvê-la quando G é o grupo linear redutível $G = \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ que ocorre no grupo estrutural do fibrado das bases de fibrados vetoriais. Desse modo, nessa seção desenvolve-se a teoria das seções anteriores nesse caso particular.

Os exemplos a seguir identificam no caso linear $G = \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ quem são o espaço total $\mathbb{U}Q$ da decomposição polar, a seção $\chi^R : \mathbb{F}Q \to \mathbb{U}Q$, a aplicação radial $A^R : \mathbb{U}Q \to A$ e o cociclo radial $A^R : \mathrm{End}_\ell(Q) \times \mathbb{F}Q \to A$, objetos que foram definidos no presente capítulo da tese. Em particular esse exemplos mostram como recuperar os cociclos clássicos da norma nos Grassmanianos (Exemplo 1.4) a partir do cociclo radial definido no presente capítulo.

Exemplo 3.14 *Escolhe-se a decomposição de Iwasawa usual de* $G = KAN$ *com* $K = O(n, \mathbb{R})$ = *isometrias lineares de* $\mathbb{R}^n$ *com a métrica euclidiana* $|\cdot|$, A = *matrizes diagonais positivas,* N = *matrizes triangulares superiores com 1 na diagonal. Tem-se que* M =

matrizes diagonais com entradas ± 1, $\mathfrak{a} =$ *matrizes diagonais. Consideram-se os funcionais* λ_k *de* $\mathfrak{a}$ *dados por* $\lambda_k(\mathrm{diag}(H_1,\dots,H_n)) := H_k$ *e definem-se os funcionais* $\mu_k := \lambda_1+\cdots+\lambda_k$, $k = 1,\dots,n$.

Considera-se o espaço vetorial $V := \Lambda(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \oplus \Lambda^2(\mathbb{R}^n) \oplus \cdots \oplus \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ *e a ação usual de* G *em* V*. Seja* $e_1,\dots,e_n$ *a base canônica de* $\mathbb{R}^n$*. Fixa-se o vetor*

$$v_0 := e_1 + e_1 \wedge e_2 + \cdots + e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \in V, \tag{3.53}$$

é imediato que sua isotropia é N *e que sua* G*-órbita em* V *é dada por*

$$\widetilde{\mathbb{U}} := \{v_1 + v_1 \wedge v_2 + \cdots + v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \in V :\ v_1,\dots,v_n \text{ é uma base de } \mathbb{R}^n\}. \tag{3.54}$$

Considerando-se o quociente $\widetilde{\mathbb{U}}/M$*, por um abuso de notação denota-se por* $\pm v$ *a imagem de* $v \in \widetilde{\mathbb{U}}$ *nesse quociente. Seja* $\eta_0 := \pm v_0$*, segue que a isotropia de* η_0 *é* MN *de modo que*

$$\mathbb{U} = \widetilde{\mathbb{U}}/M. \tag{3.55}$$

Seja $\mathbb{F}$ *o flag maximal do* $\mathbb{R}^n$ *dado em (1.20). A fibração* $\pi : \mathbb{U} \to \mathbb{F}$ *é dada por*

$$\pi(\pm(v_1+v_1\wedge v_2+\cdots+v_1\wedge\cdots\wedge v_n)) = (V_1,\cdots,V_n), \quad V_i = \text{ gerado por } \{v_1,\dots,v_i\}. \tag{3.56}$$

De fato, seja $\xi_0 := \pi(\eta_0)$ *então é imediato da definição que* $\pi(g\eta_0) = g\xi_0$, $g \in G$*, o que mostra que a fibração definida acima coincide com a fibração definida em (3.19).*

Seja uma base $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n$*. Ortogonaliza-se essa base pelo processo de Gram-Schmidt tomando-se*

$$u_i := v_i - \sum_{j<i} \mathrm{pr}_{u_j}(v_i), \quad i = 1,\dots,n, \tag{3.57}$$

onde $\mathrm{pr}_u(v) = \langle u,v\rangle/\langle u,u\rangle u$ *(aqui os* u_i *ainda não foram normalizados). Segue então que*

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = u_1 \wedge \cdots \wedge u_k, \tag{3.58}$$

logo de (1.14) segue que

$$|v_1 \wedge \cdots \wedge v_k| = |u_1| \cdots |u_k|, \tag{3.59}$$

para $k = 1,\dots,n$*. Escreve-se* $g = (v_i)$ *para se denotar a matriz* $n \times n$ *cujas colunas são os vetores* v_1, $\dots$, v_n*, nessa ordem, escritos na base* $e_1,\dots,e_n$*. Seja* $g = (v_i) \in G$.

Ortogonalizando-se os vetores v_i como anteriormente tem-se que $g = (u_i)n$ para um $n \in N$. Daí segue que

$$g = (u_i/|u_i|)\mathrm{diag}(|u_i|)n \tag{3.60}$$

é a decomposição Iwasawa de g de modo que

$$A(g) = \mathrm{diag}(|u_i|), \tag{3.61}$$

logo

$$\lambda_k(A(g)) = \log |u_k|. \tag{3.62}$$

Daí e de (3.59) segue que

$$\mu_k(\log A(g)) = \log(|u_1| \cdots |u_k|) = \log |v_1 \wedge \cdots \wedge v_k|. \tag{3.63}$$

Seja $A : \mathbb{U} \to A$ a aplicação radial com respeito a decomposição de Iwasawa escolhida e seja

$$\eta := \pm(v_1 + v_1 \wedge v_2 + \cdots + v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) \in \mathbb{U}. \tag{3.64}$$

Desse modo $g := (v_i) \in G$ é tal que $\eta = g\eta_0$ e de (3.41) segue que $A(\eta) = A(g)$, segue então do parágrafo anterior que

$$\mu_k(\log A(\eta)) = \log |v_1 \wedge \cdots \wedge v_k|. \tag{3.65}$$

Seja $\chi : \mathbb{F} \to \mathbb{U}$ a seção do Teorema 3.6 com respeito a decomposição de Iwasawa escolhida. Seja $\xi_0 = \pi(\eta_0) \in \mathbb{F}$ então de (3.27) segue que $\chi(\xi_0) = \eta_0$. Seja $\xi \in \mathbb{F}$, $\xi = (V_1, \ldots, V_n)$. Uma base $v_1, \ldots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$ é dita adaptada à $\xi \in \mathbb{F}$ se $V_i =$ gerado por $\{v_1, \ldots, v_i\}$. Seja $u_1, \ldots, u_n$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ adaptada a ξ. Pondo $k := (u_i) \in K$ tem-se que $\xi = k\xi_0$ logo de (3.30) segue que

$$\chi(\xi) = \chi(k\xi_0) = k\eta_0 = \pm(u_1 + u_1 \wedge u_2 + \cdots + u_1 \wedge \cdots \wedge u_n). \tag{3.66}$$

Por último, seja $A : G \times \mathbb{F} \to A$ o cociclo radial com respeito a decomposição de Iwasawa escolhida que é dado em (3.36) e seja $a^k : G \times \mathrm{Gr}^k(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ o cociclo da norma *em* $\mathrm{Gr}^k(\mathbb{R}^n)$ *dado no Exemplo 1.4. Seja* $\pi_k : \mathbb{F} \to \mathrm{Gr}^k(\mathbb{R}^n)$ *a projeção natural. Das duas equações anteriores tem-se que*

$$\lambda_k(\log A(g,\xi_0)) = \log|ge_k|, \tag{3.67}$$

$$a^k(g,\pi_k(\xi_0)) = \log|g\,e_1 \wedge \cdots \wedge e_k| = \mu_k(\log A(g,\xi_0)). \tag{3.68}$$

Da $\mathrm{O}(n)$*-equivariancia à direita dos cociclos* a^k *e* A *segue que*

$$\lambda_k(\log A(g,\xi)) = \log|gu_k|, \tag{3.69}$$

$$a^k(g,\pi_k(\xi)) = \mu_k(\log A(g,\xi)), \tag{3.70}$$

onde $g \in G$, $\xi \in \mathbb{F}$ *e* $u_1,\dots,u_n$ *é uma base ortonormal de* $\mathbb{R}^n$ *adaptada à* ξ. *Esta última equação é a relação desejada entre o cociclo da norma em* $\mathrm{Gr}^k(\mathbb{R}^n)$ *e o cociclo radial em* $\mathbb{F}$.

O exemplo anterior apresenta a situação fibra-a-fibra, o próximo exemplo mostra como se passa dessa situação à situação geral.

Exemplo 3.15 *Seja* $\mathcal{V} \to X$ *um fibrado vetorial com uma métrica Riemanniana e seja* $B\mathcal{V}$ *seu fibrado das bases. A métrica riemmaniana de* $\mathcal{V}$ *fornece uma* $K = \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$*-redução* OB *de* $B\mathcal{V}$ *dada pelas bases ortonormais de* $B\mathcal{V}$. *A redução* OB *é a* K*-redução dada pela escolha da decomposição de Iwasawa usual de* G *dada no início do Exemplo 3.14.*

Fixam-se aqui os outros objetos de G, $\mathfrak{a}$ *e a identificação do espaço homogêneo* $\mathbb{U}$ *dados no Exemplo 3.14. Seja*

$$\eta := \pm(v_1 + v_1 \wedge v_2 + \cdots + v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) \in (\mathbb{U}B\mathcal{V})_x, \tag{3.71}$$

onde v_i *é uma base de* $\mathcal{V}_x$, $x \in X$. *Como no final do Exemplo 3.14 ortogonaliza-se essa base de* $\mathcal{V}_x$ *pelo processo de Gram-Schmidt obtendo-se* $u_i \in \mathcal{V}_x$ *ortogonais (aqui os* u_i *ainda não foram normalizados) tais que*

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = u_1 \wedge \cdots \wedge u_k, \tag{3.72}$$

para $k = 1, \ldots, n$. *Define-se* $r \in OB_x$, $r : \mathbb{R}^n \to \mathcal{V}_x$ *linear ortogonal pondo* $r(e_i) = u_i/|u_i|_x$. *Seja* $\eta_0 = \pm(e_1 + e_1 \wedge e_2 + \cdots + e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)$ *na fibra típica* $\mathbb{U}$ *dada em (3.55), tem-se então que*

$$\eta = r \cdot \pm(|u_1|_x e_1 + (|u_1|_x e_1) \wedge (|u_2|_x e_2) + \cdots + (|u_1|_x e_1) \wedge \cdots \wedge (|u_n|_x e_n)) = r \cdot h\eta_0, \quad (3.73)$$

onde

$$h = \mathrm{diag}(|u_i|_x) \in A. \quad (3.74)$$

Seja $A : \mathbb{U}B\mathcal{V} \to A$ *a aplicação radial. Segue de* $\eta = r \cdot \eta_0 h$ *que* $A(\eta) = h$ *de modo que, como em (3.62) e (3.63), tem-se*

$$\lambda_k(\log A(\eta)) = \log |u_k|_x. \quad (3.75)$$

$$\mu_k(\log A(\eta)) = \log |v_1 \wedge \cdots \wedge v_k|_x. \quad (3.76)$$

Seja $\chi : \mathbb{F}\mathcal{V} \to \mathbb{U}B\mathcal{V}$ *a seção do Teorema 3.6 com respeito a redução* $O\mathcal{V}$. *Uma base* $v_1, \ldots, v_n$ *de* $\mathcal{V}_x$ *é dita adaptada à* $\xi \in \mathbb{F}\mathcal{V}_x$ *se* $V_i =$ *gerado por* $\{v_1, \ldots, v_i\}$. *Seja* $u_1, \ldots, u_n$ *uma base ortonormal de* $\mathcal{V}_x$ *adaptada à* ξ. *Argumentando-se como no Exemplo 3.14 tem-se que*

$$\chi(\xi) = \pm(u_1 + u_1 \wedge u_2 + \cdots + u_1 \wedge \cdots \wedge u_n). \quad (3.77)$$

Por último, seja $a^k : \mathrm{End}_\ell(B\mathcal{V}) \times \mathrm{Gr}^k\mathcal{V} \to \mathbb{R}$ *o cociclo da norma em* $\mathrm{Gr}^k\mathcal{V}$ *dado ao final do Exemplo 1.4 e seja* $\pi_k : \mathbb{F}\mathcal{V} \to \mathrm{Gr}^k\mathcal{V}$ *a projeção natural. Da equação anterior e argumentando-se como no final do Exemplo 3.14 tem-se que*

$$\lambda_k(\log A(\varphi, \xi)) = \log |\varphi(u_k)|_{\varphi(x)}, \quad (3.78)$$

$$a^k(\varphi, \pi_k(\xi)) = \mu_k(\log A(\varphi, \xi)), \quad (3.79)$$

onde $\varphi \in \mathrm{End}_\ell(B\mathcal{V})$, $\xi \in \mathbb{F}\mathcal{V}_x$ *e* $u_1, \ldots, u_n$ *é uma base ortonormal de* $\mathcal{V}_x$ *adaptada à* ξ. *Esta última equação é a relação desejada entre o cociclo da norma em* $\mathrm{Gr}^k\mathcal{V}$ *e o cociclo radial em* $\mathbb{F}\mathcal{V}$.

Capítulo 4

Espectro de Morse de semifluxos de endomorfismos

Fixam-se nesse capítulo um fibrado principal localmente trivial $\pi_X : Q \to X$ grupo estrutural semi-simples G e base paracompacta X, um semifluxo contínuo σ_t de endomorfismos de Q, $t \in \mathbb{T}$, que é transitivo por cadeias na base X. Seja $\Theta(\sigma)$ ou equivalentemente $W(\sigma)$ o tipo parabólico desse semifluxo (cf. Definição B.15).

Os objetivos desse capítulo são: introduzir o espectro de Morse vetorial de σ_t e relacionar esse espectro com o tipo parabólico de σ_t.

Nesse capítulo são usados livremente as notações e resultados de Teoria de Lie semi-simples do Apêndice A.3.

4.1 Espectro de Morse

Fixa-se uma decomposição de Iwasawa $Q = R(AN(\lambda_0))$ de Q onde $R \subset Q$ é uma K-redução (cf. Equação (3.4)) e, por um abuso de notação, daqui em diante usa-se o sobrescrito R para as construções que dependem desta decomposição de Iwasawa de Q. Considera-se o logaritmo do cociclo radial em $\mathbb{F}Q$ com respeito a essa decomposição (cf. Equação (3.36)) denotado por

$$a^R : \mathrm{End}_\ell(Q) \times \mathbb{F}Q \to \mathfrak{a}, \quad a^R(\varphi, \xi) := \log A^R(\varphi, \xi), \tag{4.1}$$

o que fornece um $\mathfrak{a}$-cociclo vetorial em $\mathbb{F}Q$. Compondo-se o semifluxo de endomorfismos σ_t com esse logaritmo do cociclo radial em $\mathbb{F}Q$ obtém-se o seguinte cociclo $\mathfrak{a}$-vetorial contínuo sobre o semifluxo σ_t induzido em $\mathbb{F}Q$

$$a_\sigma^R : \mathbb{T} \times \mathbb{F}Q \to \mathfrak{a}, \quad a_\sigma^R(t, \xi) := \log A^R(\sigma_t, \xi), \tag{4.2}$$

que é o chamado *cociclo radial do semifluxo com respeito a R.* A base desse cociclo é o fibrado flag maximal $\mathbb{F}Q$. A continuidade desse cociclo segue diretamente da continuidade do semifluxo e da Equação (3.36). Fixa-se uma norma $|\cdot|$ arbitrária em $\mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{a}$ é um espaço vetorial de dimensão finita, a escolha da norma não será relevante para as considerações topológicas que serão feitas aqui. Observa-se que se a base X é compacta então o fibrado flag $\mathbb{F}Q$ é compacto, uma vez que a fibra típica $\mathbb{F}$ é compacta e Q é localmente trivial.

A seguir se obtém uma expressão local desse cociclo. Sejam dados $\xi \in \mathbb{F}Q$ e $t \in \mathbb{T}$, toma-se $x := \pi_X(\xi) \in X$. Consideram-se $\chi_1 : U_1 \to R$ e $\chi_2 : U_2 \to R$ seções locais da K-redução R ao redor de x e $t \cdot x$ respectivamente, elas determinam o cociclo local $\rho(s, z)$ com valores em G dado por (cf. Exemplo 1.3)

$$\sigma_s(\chi_1(z)) = \chi_2(s \cdot z)\rho(s, z), \tag{4.3}$$

que está definido se $z \in U_1$, $s \cdot z \in U_2$. Da Proposição 3.3 tem-se que $\xi = \chi_1(x) \cdot k\mathfrak{p}(\lambda_0)$, $k \in K$, de modo que

$$\sigma_t(\xi) = \sigma_t(\chi_1(x)) \cdot k\mathfrak{p}(\lambda_0) = \chi_2(t \cdot x)\rho(t, x)k \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0). \tag{4.4}$$

Assim das Equações (3.38) e (3.11) segue que

$$a_\sigma^R(t, \xi) = \log A(\rho(t, x)k). \tag{4.5}$$

Definição 4.1 *Para $\xi \in \mathbb{F}Q$ define-se o* espectro de Morse vetorial de σ_t em ξ com respeito a R. *Como o espectro de Morse periódico (1.32) em ξ do cociclo vetorial a_σ^R definido acima,* *esse espectro será denotado por*

$$\Lambda^R_{Mo}(\xi) := \Lambda^{\mathcal{O}_\Psi(\mathbb{F}Q)}_{Mo}(\xi) \tag{4.6}$$

onde a família de coberturas $\mathcal{O}_\Psi(\mathbb{F}Q)$ adaptadas a R é definida em (2.4).

Em palavras, o espectro de Morse vetorial com respeito a R fornece o crescimento assintótico radial em $\mathbb{U}Q$ de cadeias ξ-periódicas de σ_t em $\mathbb{F}Q$ que são levantadas pela seção χ^R dada em (3.28).

Proposição 4.2 *Se a base X de Q é compacta e $\mathcal{M} \subset \mathbb{F}Q$ é uma componente transitiva por cadeias de σ_t em $\mathbb{F}Q$, então o espectro de Morse $\Lambda^R_{Mo}(\xi)$ não depende nem da escolha do ponto $\xi \in \mathcal{M}$, nem da escolha da decomposição de Iwasawa de Q, nem da escolha da família de coberturas adaptadas a R, nesse caso denota-se o espectro de Morse vetorial de σ_t por*

$$\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}) := \Lambda^R_{Mo}(\xi) \tag{4.7}$$

Demonstração: A independência da escolha de $\xi \in \mathcal{M}$ segue da compacidade de $\mathbb{F}Q$ e do item (4) do Teorema 1.9. A independência da escolha da família de coberturas adaptadas $\mathcal{O}_\Psi(\mathbb{F}Q)$ segue do Corolário 1.24. Se $Q' = R'(AN(\lambda_0'))$ é outra decomposição de Iwasawa de Q que dá origem a outro cociclo radial, logo a outro cociclo $\mathfrak{a}$-vetorial $a^{R'}_\sigma$ sobre $\mathbb{F}Q$, segue da Observação 3.12 que a^R_σ e $a^{R'}_\sigma$ são cohomólogos por uma cohomologia contínua, assim o resultado segue do item (1) do Teorema 1.9. ∎

Daqui em diante nesse capítulo usam-se resultados e notações do apêndice B.4, em particular usa-se a rotulação das componentes transitivas $\mathcal{M}(w)$ de σ_t em $\mathbb{F}Q$ dada no Teorema B.14. Se a base X de Q é compacta o resultado anterior fornece que, dado $\xi_w \in \mathcal{M}(w)$, $w \in W$, tem-se que

$$\Lambda^R_{Mo}(\xi_w) = \Lambda_{Mo}(\mathcal{M}(w)). \tag{4.8}$$

Assim no caso em que a base X é compacta pode-se falar do espectro de Morse vetorial de cada componente $\mathcal{M}(w)$, $w \in W$.

No Exemplo à seguir retoma-se o Exemplo 1.7 para se fornecer uma relação entre o expoente de Morse vetorial intrínseco e os expoentes de Morse escalares de [4, 5, 6].

Exemplo 4.3 *Seja $\mathcal{V} \to X$ um fibrado vetorial com base X compacta e seja $\sigma_t^{\mathcal{V}}$ um semifluxo linear em $\mathcal{V}$ de tempo contínuo ou discreto que é transitivo por cadeias na base X. Considera-se o fibrado das bases $B\mathcal{V}$ que é um fibrado $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$-principal de modo que $\mathcal{V}$ é o fibrado associado de $B\mathcal{V}$ com fibra típica $\mathbb{R}^n$ e de modo que o semifluxo $\sigma_t^{\mathcal{V}}$ é o induzido em $\mathcal{V}$ de um semifluxo σ_t de endomorfismos lineares de $B\mathcal{V}$. Fixa-se uma métrica riemmaniana em $\mathcal{V}$. Do Exemplo 1.7 tem-se o cociclo da norma clássico*

$$a_\sigma^k : \mathbb{T} \times \mathrm{Gr}^k\mathcal{V} \to \mathbb{R} \tag{4.9}$$

sobre a ação do semifluxo induzido σ_t^k em $\mathrm{Gr}^k\mathcal{V}$. A métrica Riemanniana em $\mathcal{V}$ fornece uma $K := \mathrm{O}(n)$-redução $R := O\mathcal{V}$ do fibrado das bases $B\mathcal{V}$ dada pelas bases ortonormais de $B\mathcal{V}$. Do Exemplo 3.15 tem-se que as construções do cociclo radial (4.2) e do espectro de Morse vetorial intrínseco (4.8) feitas acima valem para $B\mathcal{V}$ com grupo estrutural $G = \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ e K-redução $R = O\mathcal{V}$. Seja $\pi_k : \mathbb{F}\mathcal{V} \to \mathrm{Gr}^k\mathcal{V}$ a projeção natural. Consideram-se os funcionais λ_k de $\mathfrak{a}$ dados por $\lambda_k(\mathrm{diag}(H_1,\ldots,H_n)) := H_k$ e definem-se os funcionais $\mu_k := \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$, $k = 1,\ldots,n$. A Equação (3.79) relaciona o cociclo da norma a^k em $\mathrm{Gr}^k\mathcal{V}$ e o cociclo radial a_σ^R em $\mathbb{F}\mathcal{V}$ por meio de

$$a^k(t,\pi_k(\xi)) = \mu_k(a^R(t,\xi)), \quad (t \in \mathbb{T},\ \xi \in \mathbb{F}\mathcal{V}). \tag{4.10}$$

Uma vez que $\mathrm{Gr}^k\mathcal{V}$ é um fibrado flag parcial de $\mathcal{V}$ o item (5) do Teorema B.14 fornece que se $\mathcal{M}$ é uma componente transitiva em $\mathbb{F}\mathcal{V}$ então $\pi_k(\mathcal{M})$ é uma componente transitiva em $\mathrm{Gr}^k\mathcal{V}$ e que, além disso, todas as componentes transitivas em $\mathrm{Gr}^k\mathcal{V}$ são dadas dessa maneira. Da Proposição 1.25 tem-se então que

$$\Lambda_{Mo}^k := \Lambda_{Mo}(\pi_k(\mathcal{M}), a^k) = \mu_k(\Lambda_{Mo}(\mathcal{M})). \tag{4.11}$$

Segue do item (5) do Teorema 1.9 que Λ_{Mo}^k é um intervalo compacto. Do item (2) da Proposição 1.14 cada extremidade do intervalo Λ_{Mo}^k é imagem por μ_k de um ponto extremo λ do espectro vetorial $\Lambda_{Mo}(\mathcal{M})$. Pelo Teorema 1.22 λ é um expoente de Lyapunov *vetorial de $\mathcal{M}$. Da Equação (3.78) segue que cada coordenada $\lambda_k(\lambda)$ do vetor λ é um expoente de Lyapunov escalar clássico (cf. Equação (3)) do semifluxo linear $\sigma_t^{\mathcal{V}}$. Segue dessa argumentação que $\Lambda^k_{Mo}(\pi_k(\mathcal{M}))$ é um intervalo compacto cujos extremos são somas de expoentes de Lyapunov clássicos. Isso recupera os resultados principais de [6]. No caso particular em que $k = 1$ os extremos dos intervalos de expoentes de Morse do cociclo da norma são expoentes de Lyapunov clássicos, o que recupera os resultados principais sobre expoentes de Morse do cociclo da norma de [5].*

O objetivo dos próximos resultados desse capítulo é relacionar o espectro de Morse vetorial intrínseco do semifluxo σ_t com seu tipo parabólico.

4.2 Espectro de Sombreamento

Para se relacionar o espectro de Morse vetorial do semifluxo σ_t com seu tipo parabólico, introduz-se uma noção auxiliar de espectro que vem diretamente dos semigrupos de sombreamento (2.11) de σ_t em Q.

Usam-se as notações e os resultados do capítulo 2, em particular faz-se menção das hipóteses (A) e (C) lá definidas. Pelo Teorema 2.13 todos os resultados daquele capítulo valem para Q com grupo estrutural G semi-simples e fibrado associado $E := \mathbb{F}Q$.

Sejam dados $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(X)$, $\varepsilon > 0$, $T > 0$ e $\xi \in \mathbb{F}Q$. Como a condição (C) é satisfeita, toda $(\mathcal{U}_\varepsilon, T)$-cadeia em $\mathbb{F}Q$ é dada pela órbita de um elemento do semigrupo $S_{\mathcal{U}_\varepsilon,T}(\mathbb{F}Q)$ e toda órbita de um elemento desse semigrupo fornece uma $(\mathcal{U}_\varepsilon, T)$-cadeia em $\mathbb{F}Q$ (item (1) do Teorema 2.1). Como a condição (A) é satisfeita, as órbitas de $S_{\mathcal{U}_\varepsilon,T}(\mathbb{F}Q)$ coincidem com as do semigrupo $S(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, T)$ em $\mathbb{F}Q$ (Teorema 2.9). Assim cada endomorfismo local $\varphi \in S(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, T)$ que fixa ξ em $\mathbb{F}Q$ realiza uma $(\mathcal{U}_\varepsilon, T)$-cadeia ξ-periódica (não única) ζ em $\mathbb{F}Q$ e, reciprocamente, cada $(\mathcal{U}_\varepsilon, T)$-cadeia ξ-periódica ζ em $\mathbb{F}Q$ é realizada dessa maneira. Mais precisamente, a cada endomorfismo $\varphi \in S(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, T)$ apresentado (não unicamente) como

$$\varphi = \varphi_n \circ \sigma_{t_n} \circ \cdots \varphi_1 \circ \sigma_{t_1}, \qquad \varphi_i \in \mathcal{V}_{\mathcal{U},\varepsilon}(Q), \quad t_i \geq T, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{4.12}$$

corresponde a $(\mathcal{U}_\varepsilon, T)$-cadeia ξ-periódica ζ em $\mathbb{F}Q$ dada pelos pontos e tempos

$$\xi_1 := \xi, \quad \xi_{i+1} := (\varphi_i \circ \sigma_{t_i})(\xi_i); \quad t_i \geq T, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{4.13}$$

e, reciprocamente, toda $(\mathcal{U}_\varepsilon, T)$-cadeia ξ-periódica ζ em $\mathbb{F}Q$ pode ser assim apresentada. Considera-se o cociclo $\mathfrak{a}$-vetorial sobre a ação de $\mathrm{End}_\ell(Q)$ em $\mathbb{F}Q$ definido em (4.1) e define-se então o expoente de sombreamento em tempo finito de φ com respeito a cadeia ζ como

$$\lambda^R(\varphi, \zeta) := \frac{1}{T(\zeta)} a^R(\varphi, \xi), \tag{4.14}$$

e coleciona-se todos esses expoentes em tempo finito no conjunto

$$\Lambda^R_{So}(\xi; \mathcal{U}, \varepsilon, T) := \{\lambda^R(\varphi, \zeta) : \varphi \in S(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, T) \text{ realiza uma cadeia } \xi\text{-periódica } \zeta \text{ em } \mathbb{F}Q\}. \tag{4.15}$$

Definição 4.4 *O* espectro de sombreamento *em ξ é definido por*

$$\Lambda^R_{So}(\xi) := \bigcap \{\mathrm{cl}\Lambda_{So}(\xi; \mathcal{U}, \varepsilon, T) : \mathcal{U} \in \mathcal{O}(X),\, \varepsilon > 0,\, T \in \mathbb{T}\}. \tag{4.16}$$

Em palavras, o espectro de sombreamento com respeito a R fornece o crescimento assintótico radial dos endomorfismos de sombreamento de σ_t em Q que realizam cadeias ξ-periódicas de σ_t quando induzidas em $\mathbb{F}Q$.

Que o espectro de sombreamento em (4.16) coincide com o espectro de Morse vetorial em (4.6) é o conteúdo do Teorema 4.10, que será demonstrado abaixo. Para prová-lo precisa-se primeiro de alguns resultados auxiliares. Para se comparar os expoentes de sombreamento e de Morse seja $\varphi \in S(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, T)$ apresentado como na Equação (4.12) de modo que ele realiza a $(\mathcal{U}_\varepsilon, T)$-cadeia ξ-periódica ζ em $\mathbb{F}Q$ dada na Equação (4.13). Usando-se essas equações e a propriedade de cociclo de a^R, tem-se que

$$a^R(\varphi, \xi) = \sum_{i=1}^{n} a^R(\varphi_i \circ \sigma_{t_i},\, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} a^R(\sigma_{t_i},\, \xi_i) + \sum_{i=1}^{n} a^R(\varphi_i,\, \xi_i^*), \tag{4.17}$$

onde $\xi_i^* := \sigma_{t_i}(\xi_i)$, daí segue que

$$\lambda(\varphi, \zeta) = \lambda(\zeta) + \frac{1}{T(\zeta)} \sum_{i=1}^{n} a^R(\varphi_i,\, \xi_i^*). \tag{4.18}$$

Lema 4.5 $\Lambda^R_{Mo}(\xi;\mathcal{U}_\varepsilon,T)\subset\Lambda^R_{So}(\xi;\mathcal{U},\varepsilon,T)$.

Demonstração: Seja $\lambda(\zeta)\in\Lambda^R_{Mo}(\xi;\mathcal{U}_\varepsilon,T)$, escolhe-se uma apresentação da $(\mathcal{U}_\varepsilon,T)$-cadeia ξ-periódica ζ como em (4.12) e (4.13). Pelo Corolário 2.8 a $(\mathcal{U}_\varepsilon,T)$-cadeia ξ-periódica ζ pode ser realizada por

$$\kappa:=\kappa_n\circ\sigma_{t_n}\circ\cdots\kappa_1\circ\sigma_{t_1}\in S(Q;\mathcal{U},\varepsilon,T), \tag{4.19}$$

com saltos $\kappa_i\in\mathrm{End}_\ell(R)$. Por (4.18) e pela $\mathrm{End}_\ell(R)$-invariância do cociclo a^R (Proposição 3.10) tem-se que

$$\lambda(\kappa,\zeta)=\lambda(\zeta), \tag{4.20}$$

como κ fixa ξ tem-se então que $\lambda(\zeta)\in\Lambda^R_{So}(\xi;\mathcal{U},\varepsilon,T)$ como desejado. ∎

Corolário 4.6 $\Lambda^R_{Mo}(\xi)\subset\Lambda^R_{So}(\xi)$.

Os próximos dois resultados estabelecem a inclusão recíproca.

Proposição 4.7 *Dado $\delta>0$, existe $\varepsilon>0$ tal que*

$$|a^R(\varphi,\xi)|<\delta/2,\quad \textit{para todo } \varphi\in\mathcal{V}_{\mathcal{U},\varepsilon}(Q) \textit{ e todos } \xi\in\mathrm{dom}\varphi^{\mathbb{F}}. \tag{4.21}$$

Demonstração: Sejam $\varphi\in\mathrm{End}_\ell(Q)$, $r\in R$ e $i\in I$ tais que $r\in\mathrm{dom}\varphi$ e ambos $x=\pi_X(r)$, $\varphi(x)\in U_i$. Então $\psi_i(r)=(x,g_i(r))$ e de (3.42) segue que

$$A^R(\varphi,r\cdot\mathfrak{p}(\lambda_0))=A(\varphi_i^G(x)g_i(r)). \tag{4.22}$$

Uma vez que $\log A(k)=0$ para todo $k\in K$, da compacidade de K segue que dado $\delta>0$ existe $\varepsilon>0$ tais que

$$|\log A(gk)|<\delta/2,\quad \text{para todo } g\in B_{2\varepsilon}(1) \text{ e todo } k\in K. \tag{4.23}$$

Tomando-se $\varphi\in\mathcal{V}_{\mathcal{U},\varepsilon}(Q)$ e $\xi\in\mathrm{dom}\varphi^{\mathbb{F}}$, pela Proposição 3.3 tem-se $\xi=r\cdot\mathfrak{p}(\lambda_0)$, com $r\in R$, de modo que $r\in\mathrm{dom}\varphi$. Tem-se de (2.9) e da discussão acima que existe $i\in I$ tal que vale (4.22) onde $\varphi_i^G(x)\in V_\varepsilon\subset B_{2\varepsilon}(1)$. Como as cartas ψ_i são adaptadas a R tem-se do item (ii) da Proposição A.6 que $g_i(r)\in K$, de (4.23) segue então o resultado desejado. ∎

Para uso futuro obtém-se para o espectro de sombreamento o análogo do item (2) do Teorema 1.9.

Proposição 4.8 *Se a base X de Q é compacta então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e T suficientemente grande, os expoentes de sombreamento de tempo finito são uniformemente limitados.*

Demonstração: Pela Proposição 4.7 tomando-se $\delta = 2$ existe $\varepsilon > 0$ satisfazendo (4.21). Pode-se tomar esse ε tão pequeno quanto se queira. Seja $T \geq 1$, como X é compacto então $\mathbb{F}Q$ é compacto. Logo pelo item (2) do Teorema 1.9 o conjunto de expoentes de Morse de tempo finito $\Lambda^R_{Mo}(\xi; \mathcal{U}_\varepsilon, T)$ é limitado em $\mathfrak{a}$ por um $M > 0$. Seja $\lambda(\varphi, \zeta) \in \Lambda^R_{So}(\xi; \mathcal{U}, \varepsilon, T)$, sejam φ apresentado como em (4.12) e a $(\mathcal{U}_\varepsilon, T)$-cadeia ζ dada como em (4.13). Pela escolha de T tem-se que $T(\zeta) \geq n$, por (4.18) e a escolha de ε satisfazendo (4.21) tem-se que

$$|\lambda(\varphi, \zeta)| \leq |\lambda(\zeta)| + \frac{n}{T(\zeta)} \leq M + 1, \tag{4.24}$$

o que mostra que os $((\mathcal{U}, \varepsilon), T)$-expoentes de sombreamento de tempo finito são uniformemente limitados por $M + 1$, o que estabelece o resultado. ∎

Lema 4.9 $\Lambda^R_{Mo}(\xi) \supset \Lambda^R_{So}(\xi)$.

Demonstração: Fixa-se $\lambda \in \Lambda^R_{So}(\xi)$. Para se obter a inclusão desejada deve-se mostrar que dados $\delta > 0$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(X)$, $\varepsilon > 0$, $T \in \mathbb{T}^+$, pode-se encontrar uma $(\mathcal{U}_\varepsilon, T)$-cadeia ξ-periódica ζ tal que $|\lambda - \lambda(\zeta)| < \delta$.

Dados $\varepsilon' \leq \varepsilon$, $T' \geq T$ tem-se que a $(\mathcal{U}_{\varepsilon'}, T')$-cadeia é também uma $(\mathcal{U}_\varepsilon, T)$-cadeia de modo que pode-se supor que $T \geq 1$ e, pela Proposição 4.7, pode-se tomar $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente de modo a satisfazer (4.21). Como $\lambda \in \Lambda^R_{So}(\xi)$, existe $\varphi \in S(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, T)$ que realiza a $(\mathcal{U}_\varepsilon, T)$-cadeia ξ-periódica ζ e é tal que

$$|\lambda - \lambda(\varphi, \zeta)| < \delta/2. \tag{4.25}$$

Seja φ be apresentado como em (4.12). Considera-se a $(\mathcal{U}_\varepsilon, T)$-cadeia ζ dada em (4.13). Então por (4.18) tem-se que

$$|\lambda(\varphi,\zeta) - \lambda(\zeta)| \leq \frac{1}{T(\zeta)} \sum_{i=1}^{n} |a^R(\varphi_i,\, \xi_i^*)|. \tag{4.26}$$

Como $T \geq 1$ então $T(\zeta) \geq n$. Como $\varepsilon > 0$ foi escolhido para satisfazer (4.21) e como cada $\varphi_i \in \mathcal{V}_{\mathcal{U},\varepsilon}(Q)$ tem-se que $|a^R(\varphi_i,\, \xi_i^*)| < \delta/2$, de modo que por (4.26) tem-se

$$|\lambda(\varphi,\zeta) - \lambda(\zeta)| < \delta/2. \tag{4.27}$$

Agora por (4.25) e (4.27) tem-se que $|\lambda - \lambda(\zeta)| < \delta$, de modo que ζ é a cadeia procurada, o que provas esse resultado. ∎

Juntando-se o Corolário 4.6 e o Lema 4.9 tem-se então resultado almejado.

Teorema 4.10 $\Lambda^R_{Mo}(\xi) = \Lambda^R_{So}(\xi)$.

Com essa igualdade em mãos é possível se provar resultados sobre o espectro de Morse vetorial periódico do semifluxo σ_t analisando-se a parte radial de endomorfismos de semigrupos de sombreamento em Q que fixam um ponto de $\mathbb{F}Q$. Isso é feito nas próximas Seções.

Observação 4.11 *Observa-se que o espectro de sombreamento depende apenas da ação dos elementos do semigrupos de sombreamento que fixam $\xi \in \mathbb{F}Q$ e dos tempos das cadeias na base X. Desse modo a igualdade acima fornece que o espectro de Morse vetorial no fibrado $\mathbb{F}Q \to X$ depende apenas do que ocorre na fibra de Q sobre ξ e na base transitiva por cadeias X. Esse fenômeno de um problema no fibrado se decompor em um problema numa fibra fixa e na base ocorre também na teoria de conjuntos de controle de semigrupos em fibrados flag (cf. apêndice B.3).*

4.3 Localização da A-parte de elementos de semigrupos

Nessa seção prova-se um resultado de teoria de semigrupos e resultados auxiliares de teoria de Lie que serão aplicados mais adiante à teoria de espectro de Morse vetorial. Usam-se resultados e notações do apêndice B.2, em particular usa-se o tipo parabólico $W(S) = W_{\Theta(S)}$ de um semigrupo aberto $S \subset G$ e a relação desse tipo parabólico com os conjuntos de controle $\mathbb{A}(w)$ de S, $w \in W$, em $\mathbb{F}$.

Teorema 4.12 *Seja S um semigrupo aberto de G, seja $w \in W$ e seja λ_0 uma câmara de Weyl em G tal que $\mathfrak{p}_w(\lambda_0) \in \mathbb{A}(w)$. Dado $g \in S \cap P^w(\lambda_0)$ com decomposição de Iwasawa*

$$g = mh(\lambda_0)n, \quad m \in M(\lambda_0),\, h \in A,\, n \in N^w(\lambda_0), \tag{4.28}$$

tem-se que

$$\log h \in W(S)\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+. \tag{4.29}$$

Demonstração: Como $g \in S$ pela Proposição B.10, existe um inteiro positivo k e $n_1 \in N^w(\lambda_0)$ tais que $h(\lambda_0)^k n_1 \in S$. Usando-se que elementos regulares são densos em A e que S é aberto, pode-se tomar $h' \in A$, regular, arbitrariamente próximo a h tal que $g' := h'(\lambda_0)^k n_1 \in S$. Como h' é regular, aplicando-se o Lema 1.5, capítulo IX p.403 de [12] tem-se que $h'(\lambda_0)^k n_1 = n_2 h'(\lambda_0)^k n_2^{-1}$ para algum $n_2 \in N^w(\lambda_0)$. Seja $s \in W$ tal que $h' \in sA^+s^{-1}$ de modo que

$$h'(\lambda_0) \in s(\lambda_0)\lambda_0 s(\lambda_0)^{-1} = {\lambda_0}^s, \qquad \log h' \in s\mathfrak{a}^+. \tag{4.30}$$

Segue que

$$g' = n_2 h'(\lambda_0)^k n_2^{-1} \in n_2 {\lambda_0}^s n_2^{-1} =: \lambda_1, \tag{4.31}$$

de modo que a câmara λ_1 intercepta S. Por (B.13), tem-se então que $\mathfrak{p}_{s^{-1}w}(\lambda_1) \in \mathbb{A}(s^{-1}w)$. Mas por outro lado usando-se (A.38) tem-se que

$$\mathfrak{p}_{s^{-1}w}(\lambda_1) = \mathfrak{p}_{s^{-1}w}(n_2 {\lambda_0}^s n_2^{-1}) = n_2 \mathfrak{p}_{s^{-1}w}({\lambda_0}^s) = n_2 \mathfrak{p}({\lambda_0}^w) = \mathfrak{p}({\lambda_0}^w) = \mathfrak{p}_w(\lambda_0), \tag{4.32}$$

onde usou-se que $n_2 \in N^w(\lambda_0)$. Como por hipótese $\mathfrak{p}_w(\lambda_0) \in \mathbb{A}(w)_0$ e como conjuntos de controle distintos são disjuntos segue que $\mathbb{A}(s^{-1}w) = \mathbb{A}(w)$ o que, pelo item (3) do Teorema B.8 implica que $W(S)s^{-1}w = W(S)w$ de onde segue que $s \in W(S)$. De (4.30) segue então que $\log h' \in W(S)\mathfrak{a}^+$. Agora fazendo h' tender à h tem-se que $\log h \in \mathrm{cl}(W(S)\mathfrak{a}^+) = W(S)\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$ o que fornece a conclusão do resultado. ∎

Observa-se aqui que é importante para as aplicações da próxima seção que a câmara λ_0 do enunciado do Teorema não é necessariamente uma câmera do semigrupo S. A seguir apresenta-se o conjunto $W(S)\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+ = W_{\Theta(S)}\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$ como um cone convexo e fechado descrito pelas raízes em $\Theta(S)$ (cf. Figura 4.1).

Proposição 4.13 *Se $w \in W_\Theta$ então $w^*(\Pi^+ - \langle\Theta\rangle) = \Pi^+ - \langle\Theta\rangle$.*

Demonstração: Para a demonstração serão utilizados resultados de sistemas de raízes e grupos de Weyl (cf. Capítulo 9 de [26]). Para $\alpha \in \langle\Theta\rangle$, denotando-se por r_α a reflexão em torno da raiz α, tem-se que

$$r_\alpha^*(\Pi^+ - \langle\Theta\rangle) = \Pi^+ - \langle\Theta\rangle. \tag{4.33}$$

De fato, tem-se que $r_\alpha^*(\Pi^+ - \langle\alpha\rangle) = \Pi^+ - \langle\alpha\rangle \subset \Pi^+$ (Proposição 9.12, p.241 de [26]), o que implica que

$$r_\alpha^*(\Pi^+ - \langle\Theta\rangle) \subset r_\alpha^*(\Pi^+ - \langle\alpha\rangle) \subset \Pi^+. \tag{4.34}$$

Agora se $\beta \in \Pi$ é tal que $r_\alpha^*(\beta) \in \langle\Theta\rangle$ então

$$r_\alpha^*(\beta) = \beta - 2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha \in \langle\Theta\rangle, \tag{4.35}$$

como da fórmula de Killing (Proposição 9.8, p.234 de [26]) tem-se que $2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}$ segue da equação (4.35) que $\beta \in \langle\Theta\rangle$, o que mostra que

$$r_\alpha^*(\Pi^+ - \langle\Theta\rangle) \subset \Pi - \langle\Theta\rangle. \tag{4.36}$$

A equação (4.33) segue então das equações (4.34) e (4.36). Escrevendo-se $w \in W_\Theta$ como produto de reflexões em torno de raízes de $\langle\Theta\rangle$ e usando-se sucessivamente a equação (4.33) prova-se o desejado. ∎

Proposição 4.14 *Para $\Delta \subset \Sigma$ definem-se*

$$\langle\Delta\rangle^+ := \langle\Delta\rangle \cap \Pi^+, \quad \langle\Delta\rangle^- := \langle\Delta\rangle \cap \Pi^-. \tag{4.37}$$

Seja w_Δ^- a involução principal de W_Δ com respeito a Δ, então $(w_\Delta^-)^*\langle\Delta\rangle^+ = \langle\Delta\rangle^-$.

Demonstração: Fixa-se uma câmara λ_0 de G. Nessa demonstração, suprime-se a câmara dos objetos de G que dependem de câmaras, e.g. $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\lambda_0)$, $\Delta = \Delta(\lambda_0) \subset \mathfrak{a}(\lambda_0)^* = \mathfrak{a}^*$, $\Pi^{(+/-)} = \Pi^{(+/-)}(\lambda_0)$, etc. Serão usados resultados e notação sobre subálgebras semi-simples de $\mathfrak{g}$ de tipo Δ (cf. seção A.2.2, p.128 de [17], e resultados lá contidos). Considera-se a subálgebra semi-simples $\mathfrak{g}(\Delta)$ de $\mathfrak{g}$ de tipo Δ com abeliano maximal $\mathfrak{a}(\Delta) \subset \mathfrak{a}$, raízes simples $\Sigma(\Delta)$, raízes $\Pi^{(+/-)}(\Delta)$, grupo de Weyl $W(\Delta)$. Uma vez que os funcionais em Δ anulam $\mathfrak{a}_\Delta$ e que W_Δ centraliza $\mathfrak{a}_\Delta$ segue que a restrição de $\mathfrak{a}$ para $\mathfrak{a}(\Delta)$ fornece uma bijeção entre Δ e $\Sigma(\Delta)$, $\langle\Delta\rangle^{+/-}$ e $\Pi^{(+/-)}(\Delta)$ e um isomorfismo entre W_Δ e $W(\Delta)$. Esse isomorfismo entre grupos de Weyl claramente leva a involução principal de W_Δ com respeito a Δ à involução principal de $W(\Delta)$ com respeito a $\Sigma(\Delta)$. Tomando-se $\alpha \in \langle\Delta\rangle^+$ segue dessa discussão que $\alpha|_{\mathfrak{a}(\Delta)} \in \Pi^+(\Delta)$ de modo que

$$((w_\Delta^-)^*\alpha)|_{\mathfrak{a}(\Delta)} = (w_\Delta^-|_{\mathfrak{a}(\Delta)})^*(\alpha|_{\mathfrak{a}(\Delta)}) = -(\beta|_{\mathfrak{a}(\Delta)}) \in \Pi^-(\Delta), \tag{4.38}$$

onde $\beta|_{\mathfrak{a}(\Delta)} \in \Pi^+(\Delta)$. Segue daí que

$$(w_\Delta^-)^*\alpha = -\beta \in \langle\Delta\rangle^-, \tag{4.39}$$

como desejado. ∎

Proposição 4.15 *Dado $\Theta \subset \Sigma$ tem-se que*

$$W_\Theta \,\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) \geq 0, \, \alpha \in \Pi^+ - \langle\Theta\rangle\}. \tag{4.40}$$

Demonstração: Toma-se $wH \in W_\Theta \,\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$ no lado esquerdo de (4.40), com $w \in W_\Theta$, $H \in \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$. Dada uma raiz $\alpha \in \Pi^+ - \langle\Theta\rangle$ da Proposição 4.13 tem-se que $(w^{-1})^*\alpha \in \Pi^+$, de modo que $\alpha(wH) = (w^{-1})^*\alpha(H) \geq 0$, uma vez que $H \in \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$. Isso prova a inclusão "$\subset$" em (4.40).

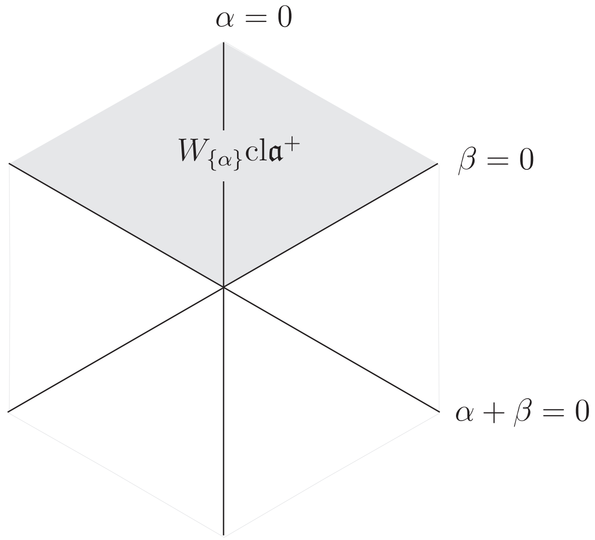

Figura 4.1: Ilustração da Proposição 4.15 com $\Theta = \{\alpha\}$.

Para a inclusão recíproca toma-se $H \in \mathfrak{a}$ no lado direito de (4.40), logo $\alpha(H) \geq 0$ para todo $\alpha \in \Pi^+ - \langle\Theta\rangle$. Seja $\Delta := \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H) < 0\}$. Da escolha de H segue imediatamente que $\Delta \subset \Theta$. Uma vez que as raízes (resp. negativas) positivas são combinações lineares de raízes simples com coeficientes todos positivos (resp. negativos), usando-se a notação da Proposição 4.14 é imediato que

$$\langle\Delta\rangle^+ = \{\alpha \in \Pi^+ : \alpha(H) < 0\}, \qquad \langle\Delta\rangle^- = \{\alpha \in \Pi^- : \alpha(H) > 0\}. \tag{4.41}$$

Seja w_Δ^- a involução principal de W_Δ, então $(w_\Delta^-)^{-1} = w_\Delta^-$. Afirma-se que $w_\Delta^- H \in \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$. De fato, seja $\alpha \in \Pi^+$. Se $\alpha \in \langle\Delta\rangle^+$ segue da Proposição 4.14 que $(w_\Delta^-)^*\alpha \in \langle\Delta\rangle^-$. Segue então de (4.41) que $\alpha(w_\Delta^- H) = (w_\Delta^-)^*\alpha(H) > 0$. Se por outro lado $\alpha \in \Pi^+ - \langle\Delta\rangle^+$, uma vez que $\Pi^+ - \langle\Delta\rangle^+ = \Pi^+ - \langle\Delta\rangle$ segue da Proposição 4.13 que $(w_\Delta^-)^*\alpha \in \Pi^+ - \langle\Delta\rangle^+$. Segue então de (4.41) que $\alpha(w_\Delta^- H) = (w_\Delta^-)^*\alpha(H) \geq 0$. Em qualquer caso $\alpha(w_\Delta^- H) \geq 0$ e, como $\alpha \in \Pi^+$ é arbitrário, isso mostra que $w_\Delta^- H \in \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$, como desejado. Segue disso que $H \in w_\Delta^-\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$, logo de $\Delta \subset \Theta$ segue que $H \in W_\Delta\, \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+ \subset W_\Theta\, \mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$, o que prova a inclusão “$\supset$” em (4.40).

∎

A próxima Proposição fornece duas propriedades dos cones $wW_\Theta \operatorname{cl}\mathfrak{a}^+$, $w \in W$, que serão usadas mais adiante.

Proposição 4.16 *i) Seja $w \in W$, então*

$$wW_\Theta \operatorname{cl}\mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) \geq 0, \, \alpha \in w^*(\Pi^+ - \langle\Theta\rangle)\}. \tag{4.42}$$

ii) Sejam $w_1, w_2 \in W$ tais que a interseção $(w_1 W_\Theta \operatorname{cl}\mathfrak{a}^+) \cap (w_2 W_\Theta \operatorname{cl}\mathfrak{a}^+)$ tem interior não vazio em $\mathfrak{a}$ ou contém um elemento regular, então $w_1 W_\Theta = w_2 W_\Theta$. Em particular, se os cones $w_1 W_\Theta \operatorname{cl}\mathfrak{a}^+$ e $w_2 W_\Theta \operatorname{cl}\mathfrak{a}^+$ não coincidem então eles só podem se interceptar em hiperplanos de raízes.

Demonstração: A primeira propriedade segue diretamente de (4.40). Para a segunda propriedade, se aquela interseção tem interior não vazio em $\mathfrak{a}$ então ela contém um elemento regular de modo que, pelo modo que cada cone é definido, existem $s_1, s_2 \in W_\Theta$, $H_1, H_2 \in \mathfrak{a}^+$ tais que $w_1 s_1 H_1 = w_2 s_2 H_2$. Mas então $(w_2 s_2)^{-1} w_1 s_1 H_1 = H_2$ e como W age de maneira simplesmente transitiva nas câmaras de Weyl tem-se então que $(w_2 s_2)^{-1} w_1 s_1 = 1$ de modo que $w_1 s_1 = w_2 s_2$, o que prova a primeira afirmação do item (2). Para a segunda afirmação do item (2) se os cones não coincidem então, do que já foi provado do item (2), eles só podem interceptar-se em suas fronteiras. O item (1) mostra que a fronteira desses cones está contida na união de hiperplanos de raízes, o que estabelece a afirmação. ∎

Pode-se usar a Proposição 4.15 para tornar a conclusão do Teorema 4.12 mais precisa no caso em que $w = 1$. Uma vez que o próximo resultado não será usado em nenhuma demonstração da teoria de expoentes de crescimento, será dado aqui apenas um esboço da demonstração.

Teorema 4.17 *Considerando-se as mesmas hipóteses e notações do Teorema 4.12 com $w = 1$ toma-se $g \in S \cap P(\lambda_0)$. Tem-se que*

$$\log h \in \operatorname{int}\left(W(S)\operatorname{cl}\mathfrak{a}^+\right). \tag{4.43}$$

Demonstração: Seja $H := \log h$. Pelo Teorema 4.12 H está no fecho do cone em (4.43) e pela Proposição 4.15, a fronteira desse cone está contida na união de hiperplanos de raízes fora de $\Theta(S)$. Basta então mostrar que nenhuma raiz fora de $\Theta(S)$ anula H. Isso é feito modificando-se apropriadamente argumentos do Corolário 5.7 de [9], substituindo-se a decomposição de Jordan de g pela decomposição de Iwasawa de g dada em (4.28) e a comutação dos fatores da decomposição de Jordan de g pela Proposição B.10. Desse modo obtém-se que $\Theta(H) \subset \Theta(S)$, como desejado. A idéia é que, uma vez que o interesse está na $\mathfrak{a}$-parte de elementos parabólicos $g \in S \cap P(\lambda_0)$ do semigrupo S, a Proposição B.10 permite que se desconsidere a parte compacta de g em $M(\lambda_0)$. ∎

4.4 Localização do espectro de Morse

O objetivo dessa seção é mostrar como o tipo parabólico de σ_t pode ser usado para localizar o espectro de Morse de σ_t dentro das câmaras de $\mathfrak{a}$.

Teorema 4.18 *Seja $W(\sigma)$ o tipo parabólico do semifluxo σ_t. Fixando-se um ponto $\xi_w \in \mathcal{M}(w)$, $w \in W$, tem-se que*

$$\Lambda^R_{Mo}(\xi_w) \subset w^{-1}W(\sigma)\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+. \tag{4.44}$$

Em particular, dados ξ_1, $\xi_2 \in \mathbb{F}Q$ em componentes transitivas distintas tem-se que os dois conjuntos de espectro de Morse $\Lambda^R_{Mo}(\xi_1)$, $\Lambda^R_{Mo}(\xi_2)$ só podem se interceptar em hiperplanos de raízes.

Demonstração: Pela Proposição 3.3 existe $r \in R$ tal que

$$\xi_w = r \cdot \mathfrak{p}_w(\lambda_0). \tag{4.45}$$

Para cada terno $j := (\mathcal{U}, \varepsilon, T)$, onde $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(X)$, $\varepsilon > 0$, $T \in \mathbb{T}$, tem-se o semigrupo de sombreamento $S^j(Q) := S(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, T) \subset \mathrm{End}_\ell(Q)$ de σ_t em Q dado em (2.11). Fixado o $r \in Q$ dado acima tem-se o semigrupo dado em (B.16) e denotado por $S^j := S^r(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, T) \subset G$. Os conjuntos de controle de S_j na fibra típica $\mathbb{F}Q$ são denotados por $\mathbb{A}^r_j(w) := \mathbb{A}^r_{\mathcal{U},\varepsilon,T}(w)$,

$w \in W$. Uma vez que $\pi_X(\xi_w) = \pi_X(r)$, de (B.20) e de (B.13) segue que

$$\xi_w \in (\mathcal{M}(w))_{\pi(r)} = r \cdot \left(\bigcap_j \mathbb{A}_j^r(w)_0 \right) = r \cdot \left(\bigcap_j \mathrm{fix}_w(S^j) \right). \tag{4.46}$$

Daí segue que para cada j existe uma câmara λ^j que intercepta S^j tal que

$$\xi_w = r \cdot \mathfrak{p}_w(\lambda^j) = r \cdot \mathfrak{p}_w(\lambda_0), \tag{4.47}$$

de onde se conclui que

$$\mathfrak{p}_w(\lambda_0) = \mathfrak{p}_w(\lambda^j) \in \mathbb{A}_j^r(w)_0. \tag{4.48}$$

Pelo item (3) do Teorema B.14 tomando j suficientemente grande tem-se que

$$W(S^j) = W(\sigma). \tag{4.49}$$

Seja agora $\varphi \in S^j(Q)$ tal que $\varphi(\xi_w) = \xi_w$, então tem-se que $\varphi(r) = r \cdot g$ com $g \in S^j \cap P^w(\lambda_0)$. Seja g com decomposição de Iwasawa

$$g = mh(\lambda_0)n, \quad m \in M(\lambda_0),\, h \in A,\, n \in N^w(\lambda_0). \tag{4.50}$$

Como $\xi_w = r \cdot \mathfrak{p}_w(\lambda_0)$, tomando-se $k \in M^*(\lambda_0)$ um representante de w tem-se pela Proposição 3.10 que $a^R(\varphi, \xi_w) = \log A(k^{-1}gk)$. Como $M^*(\lambda_0)$ normaliza $M(\lambda_0)$, conjugando-se os fatores da decomposição de Iwasawa de g em (4.50) tem-se que

$$k^{-1}gk = m'(w^{-1}hw)(\lambda_0)n', \quad m' \in M(\lambda_0),\, n' \in N(\lambda_0), \tag{4.51}$$

de modo que $A^R(k^{-1}gk) = w^{-1}hw$, o que mostra que

$$a^R(\varphi, \xi_w) = w^{-1} \log h. \tag{4.52}$$

De (4.48), (4.49) e (4.50) pode-se aplicar o Teorema 4.12 para se obter que $\log h \in W(\sigma)\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$ de modo que de (4.52) segue que

$$a^R(\varphi, \xi_w) \in w^{-1}W(\sigma)\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+. \tag{4.53}$$

Usando-se (4.53), a definição (4.14) do expoente de sombreamento em tempo finito e a definição (4.16) do espectro de sombreamento tem-se que $\Lambda^R_{So}(\xi_w) \subset w^{-1}W(S)\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$, uma vez que esse último conjunto é um cone fechado. A Equação (4.44) segue então do Teorema 4.10 que fornece que $\Lambda_{So}^R(\xi_w) = \Lambda_{Mo}^R(\xi_w)$.

Para a segunda afirmação do Teorema usa-se o item (3) do Teorema B.14 para se obter que $\xi_i \in \mathcal{M}(w_i)$, $w_i \in W$, $i = 1, 2$, onde $W(\sigma)w_1 \neq W(\sigma)w_2$ uma vez que esses duas componentes transitivas são distintas. Denota-se por Λ_{Mo}^i o espectro de Morse em ξ_i com respeito a R e supõe-se por contradição que os espectros Λ_{Mo}^i se interceptam num elemento regular de $\mathfrak{a}$. Segue então de (4.44) que os cones $(w_i)^{-1}W(\sigma)\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$ se encontram num elemento regular. Logo pela Proposição 4.16 tem-se que $(w_1)^{-1}W(\sigma) = (w_2)^{-1}W(\sigma)$, o que fornece que $W(\sigma)w_1 = W(\sigma)w_2$, uma contradição. ∎

O próximo resultado mostra, em particular, que o espectro de Morse vetorial da componente de Morse atratora $\mathcal{M}^+$ de σ_t encontra todos os hiperplanos de raízes que interceptam o interior de $W(\sigma)\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$. Isso é feito obtendo-se um expoente vetorial λ_σ de $\mathcal{M}^+$ que é "quase-característico" para σ_t no sentido em que $\Theta(\sigma) \subset \Theta(\lambda_\sigma)$. Desse modo, sob essa hipótese de compacidade, a localização do espectro de Morse vetorial dada no Teorema 4.18 é a mais precisa possível no sentido em que $\Theta(\sigma)$ não poderia ser menor, logo o cone fechado da forma $W(\sigma)\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$ não poderia ser menor.

Teorema 4.19 *Se a base X de Q é compacta então para cada $w \in W$ o espectro de Morse vetorial $\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}(w))$ satisfaz*

$$\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}(w)) \subset w^{-1}W(\sigma)\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+, \tag{4.54}$$

e dois conjuntos de espectro de Morse distintos só podem se interceptar em hiperplanos de raízes. Além disso, para o espectro da componente atratora $\mathcal{M}^+$ existe um expoente de Morse vetorial $\lambda_\sigma \in \Lambda_{Mo}(\mathcal{M}^+)$ tal que $\Theta(\lambda_\sigma) \supset \Theta(\sigma)$. Em outras palavras $\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}^+)$ encontra todos os hiperplanos de raízes que interceptam o interior do cone $W(\sigma)\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$.

Demonstração: A primeira afirmação segue de (4.8) e (4.44). Para a segunda afirmação fixa-se uma decomposição de Iwasawa $Q = R(AN(\lambda_0))$ do fibrado Q e fixa-se $\xi_1 \in \mathcal{M}^+$. Por (4.8) e pelo Teorema 4.10, tem-se que

$$\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}^+) = \Lambda_{Mo}^R(\xi_1) = \Lambda_{So}^R(\xi_1). \tag{4.55}$$

Como $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}(1)$ seguindo-se a notação e as escolhas do primeiro parágrafo da prova do Teorema 4.18 com $w = 1$ obtém-se o seguinte: $\xi_1 = r \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)$, $r \in R$, para cada índice $j := (\mathcal{U}, \varepsilon, T)$ obtém-se o semigrupo de sombreamento $S^j(Q) \subset \mathrm{End}_\ell(Q)$ e semigrupo induzido $S^j \subset G$, tomando-se j suficientemente grande tem-se que $\Theta(S^j) = \Theta(\sigma)$. Esses objetos são tais que para cada j existe uma câmara λ^j que intercepta S^j tal que

$$\xi_1 = r \cdot \mathfrak{p}(\lambda^j) = r \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0). \tag{4.56}$$

Daí segue que $\mathfrak{p}(\lambda^j) = \mathfrak{p}(\lambda_0)$, logo de (A.40) segue que $N(\lambda^j) = N(\lambda_0)$ e que existe $n_j \in N(\lambda_0)$ tal que

$$\lambda^j = n_j \lambda_0 n_j^{-1}. \tag{4.57}$$

Como cada câmara λ^j intercepta S^j, para cada j toma-se $H_j \in \mathfrak{a}$ característico para S^j com respeito a essa câmara (Proposição B.11) de modo que

i) $\Theta(H_j) = \Theta(S^j) = \Theta(\sigma)$,

ii) $H_j(\lambda^j) \in \Lambda_N(\lambda^j)$.

Pelo item (ii) acima, pela definição do cone $\Lambda_N(\lambda^j)$ em (B.15) e usando-se que $N(\lambda^j) = N(\lambda_0)$, segue que para cada H_j caracteístico existe $T_j \in \mathbb{T}$ e $u_j \in N(\lambda_0)$ tais que

$$g_j := \exp(T_j H_j(\lambda^j)) u_j \in S^j. \tag{4.58}$$

Usando-se que $H_j(\lambda^j) = \mathrm{Ad}(n_j) H_j(\lambda_0)$ e que $A(\lambda_0)$ normaliza $N(\lambda_0)$ tem-se que

$$g_j = n_j \exp(T_j H_j(\lambda_0)) n_j^{-1} u_j = \exp(T_j H_j(\lambda_0)) u_j' \in A(\lambda_0) N(\lambda_0), \tag{4.59}$$

para algum $u_j' \in N(\lambda_0)$, de onde segue que

$$\log A(g_j) = T_j H_j. \tag{4.60}$$

Como $g_j \in S^j$ segue que existe $\varphi_j \in S^j(Q)$ tal que $\varphi_j(r) = r \cdot g_j$ e φ_j realiza uma $(\mathcal{U}_\varepsilon, T)$-cadeia ξ_1-periódica ζ_j em $\mathbb{F}Q$, assim da última equação e da Proposição 3.10 segue que $a^R(\varphi_j, \xi_1) = T_j H_j$ de modo que

$$\gamma_j := \lambda^R(\varphi_j, \zeta_j) = (T_j / T(\zeta_j)) H_j \in \Lambda^R_{So}(\xi_1; \mathcal{U}, \varepsilon, T) \tag{4.61}$$

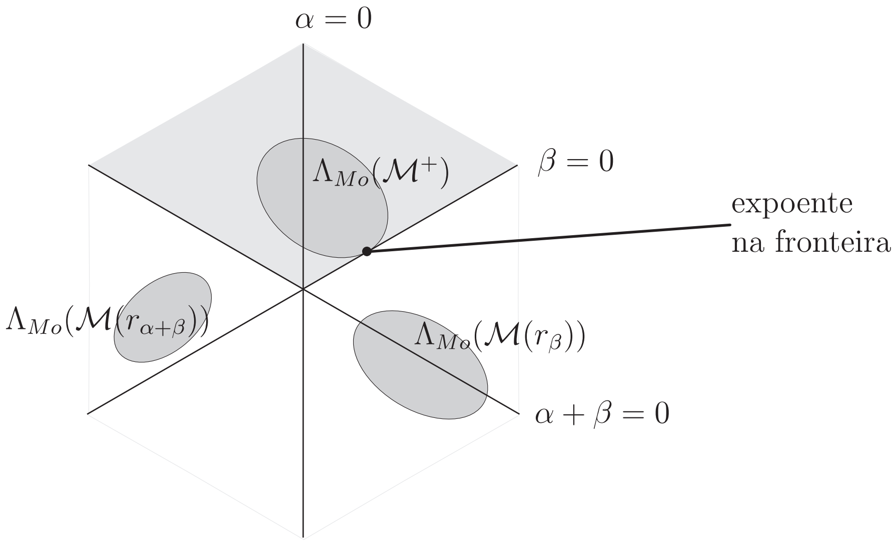

Figura 4.2: Ilustração do Teorema 4.19 com $\Theta(\sigma) = \{\alpha\}$. Para um resultado mais preciso com hipóteses mais restritivas cf. a Figura 4.4 do Teorema 4.27.

assim pelo item (i) acima esse expoente de sombreamento de tempo finito satisfaz

$$\Theta(\gamma_j) = \Theta(\sigma). \tag{4.62}$$

Denota-se agora $\Lambda^j_{So} := \Lambda^R_{So}(\xi_1; \mathcal{U}, \varepsilon, T)$ e considera-se a rede $\gamma_j \in \Lambda^j_{So}$. Para j_0 suficientemente grande tem-se pela Proposição 4.8 que o conjunto $\Lambda^{j_0}_{So}$ é limitado. Como $\gamma_j \in \Lambda^{j_0}_{So}$ para $j \geq j_0$, a rede γ_j possui uma subrede convergente no compacto $\mathrm{cl}\Lambda^{j_0}_{So}$, tomando-se subredes tem-se então que $\gamma_j \to \gamma$. Como $\Lambda^R_{So}(\xi_1) = \bigcap_j \mathrm{cl}\Lambda^j_{So}$ tem-se que $\gamma \in \Lambda^R_{So}(\xi_1)$ e tomando-se limites em (4.62) segue que $\Theta(\gamma) \supset \Theta(\sigma)$, por (4.55) colocando-se $\lambda_\sigma := \gamma$ isso prova a primeira afirmação do Teorema.

A segunda afirmação segue então da Proposição 4.15 que fornece que os hiperplanos de raízes que interceptam o interior de $W(\sigma)\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+ = W_{\Theta(\sigma)}\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$ são precisamente aqueles dados pelas raízes em $\Theta(\sigma)$. ∎

O exemplo a seguir ilustra o Teorema 4.19 no caso particular de um fluxo gerado por um elemento diagonalizável de G.

Exemplo 4.20 *Um elemento fixo $h \in G$ determina um fluxo de automorfismos de $Q := G$ de tempo discreto σ_i que é dado pela ação de h^i à esquerda de G, $i \in \mathbb{Z}$. O fluxo induzido em $\mathbb{F}$ é dado pela ação à esquerda de h^i em $\mathbb{F}$. Supõe-se nesse exemplo que h é um elemento diagonalizável de G, isto é, que existe uma câmara λ_0 de G tal que $h \in A(\lambda_0)$. Nesse caso [8] fornece uma descrição completa da dinâmica da ação de h em $\mathbb{F}$ (para mais detalhes veja a Seção 5.1 de [1]). Seja $h = \exp(H)$, $H \in \mathfrak{a}(\lambda_0)$, seja $G = K(AN(\lambda_0))$ uma decomposição de Iwasawa de G que é compatível com λ_0 e seja K_H o centralizador de H em K. Segue de [8] que as componentes da decomposição de Morse mais fina são dadas por*

$$\mathcal{M}(w) = K_H \mathfrak{p}_w(\lambda_0), \quad (w \in W). \tag{4.63}$$

Para se calcular o espectro de cada uma dessas componentes escolhe-se a redução $R := K \subset G$. Nesse caso para $x = l\mathfrak{p}(\lambda_0)$, $l \in K$ e $i \in \mathbb{Z}$ segue de (4.5) que

$$a_\sigma^R(i, x) = \log A(h^i l). \tag{4.64}$$

Assim para $x \in \mathcal{M}(w)$, tem-se de (4.63) que $x = l\mathfrak{p}_w(\lambda_0) = lw^*\mathfrak{p}(\lambda_0)$ onde $l \in K_H$ e $w^* \in M^*(\lambda_0)$ é um representante de $w \in W$. Como l comuta com h e como $A(g)$ é K-invariante à esquerda de (4.64) segue que para $i \in \mathbb{Z}$ tem-se

$$a_\sigma^R(i, x) = \log A(h^i l w^*) = \log A(l h^i w^*) = \log A((w^*)^{-1} h^i w^*) = w^{-1} \log A(h^i) = i(w^{-1}H), \tag{4.65}$$

de modo que

$$\frac{1}{i} a_\sigma^R(i, x) = w^{-1}H. \tag{4.66}$$

Daí segue que o único expoente de Lyapunov de $\mathcal{M}(w)$ é $w^{-1}H$ logo do Teorema 1.22 segue que

$$\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}(w)) = \{w^{-1}H\}. \tag{4.67}$$

A localização do espectro de semifluxos dada nos Teoremas 4.18 e 4.19 não é tão precisa como poderia se esperar por analogia ao Teorema 4.17 de semigrupos. De fato, o espectro de Morse da componente atratora $\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}^+)$ de um semifluxo poderia, à priori, tocar a fronteira do cone $W(\sigma)\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$ (cf. Figura 4.2, para fluxos será mostrado que isso não pode ocorrer, cf. Teorema 4.27). Uma vez que essa fronteira está contida em hiperplanos de raízes que não estão em $\langle\Theta(\sigma)\rangle$ (cf. Proposição 4.15) podem então existir expoentes de Morse vetoriais do semifluxo σ_t que são mais irregulares que o tipo parabólico de σ_t. De qualquer modo, sempre que isso ocorre, mostra-se que existe um expoente de Lyapunov de σ_t em $\mathcal{M}^+$ que está contido em tais hiperplanos de raízes. De fato tem-se o seguinte resultado um pouco mais geral.

Teorema 4.21 *Se a base X de Q é compacta então sempre que $\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}(w))$ intercepta um hiperplano de uma raíz que não está em $\langle w^*\Theta(\sigma)\rangle$ então σ_t tem um expoente de Lyapunov em $\mathcal{M}(w)$ que está contido nesse hiperplano.*

Demonstração: Supõe-se que $\Lambda^w_{Mo} := \Lambda_{Mo}(\mathcal{M}(w))$ intercepta o hiperplano da raíz $\alpha \notin w^*\Theta(\sigma)$. De X compacto segue que $\mathbb{F}Q$ é compacto de modo que o item (5) do Teorema 1.9 fornece que Λ^w_{Mo} é convexo e compacto. Pelo Teorema 4.18, Λ^w_{Mo} está contido no cone $w^{-1}W(\sigma)\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$ e pelo item (i) da Proposição 4.16, o hiperplano da raíz α intercepta a fronteira desse cone. Daí segue que o convexo compacto Λ^w_{Mo} está contido num semi-espaço de α e intercepta o hiperplano da raíz α. Usa-se então o item (4) da Proposição 1.14 para se concluir que Λ^w_{Mo} tem um ponto extremo λ contido nesse hiperplano. Finalmente pelo Teorema 1.22 segue que esse ponto extremo λ é o expoente de Lyapunov de um ponto em $\mathcal{M}(w)$, o que fornece o resultado. ∎

No caso em que σ_t é um fluxo esse tipo de fenômeno não pode ocorrer com o espectro de Morse da componente atratora $\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}^+)$, como será visto na próxima seção.

4.5 Localização do espectro de Morse da componente atratora

Supõe-se ao longo dessa seção que σ_t é um fluxo, com $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, e que a base X de Q é compacta. Esta seção é dedicada à demonstração do teorema 4.27 que mostra que para um fluxo σ_t de automorfismos de Q com base X compacta o expoente de Morse da componente atratora $\mathcal{M}^+$ está no interior do cone $W_{\Theta(\sigma)}\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+$ e, além disso, contém um expoente de Morse λ_σ tal que $\Theta(\lambda_\sigma) = \Theta(\sigma)$. Todos os resultados dessa seção valem mais geralmente para um semifluxo σ_t desde que a componente atratora $\mathcal{M}^+$ seja regressivamente invariante, hipótese que é automaticamente satisfeita no caso de um fluxo.

A prova do Teorema 4.27 dada aqui depende da construção de dois outros fibrados, a saber, um fibrado vetorial sobre $\mathbb{F}_\Theta Q$ (seção 4.5.1) e uma redução σ_t-invariante de Q que está relacionada com o tipo parabólico $\Theta(\sigma)$ (seção 4.5.2). A idéia é mostrar que, do mesmo modo que o fluxo "contrai" uma vizinhança do atrator, no fibrado flag de tipo parabólico $\mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}Q$, o fluxo "contrai" vetores tangentes às fibras desse atrator (seção 4.5.3). Essa propriedade de contração de vetores tangentes permite que se faça uma estimativa do crescimento de $\alpha(a^R(t,\xi))$, onde α é uma raiz positiva fora do tipo parabólico $\langle\Theta(\sigma)\rangle$, ξ é um ponto no atrator $\mathcal{M}^+$ do flag maximal e $t \geq 0$ (seção 4.5.4). Essa estimativa fornece o resultado principal dessa seção (Teorema 4.26) que, juntamente com os resultados das seções anteriores, fornecem o Teorema 4.27.

Todos os resultados dessa seção valem para um semifluxo σ_t *desde que a componente maximal* $\mathcal{M}^+_{\Theta(\sigma)}$ *seja regressivamente invariante*, hipótese essa que é automaticamente satisfeita quando σ_t é um fluxo.

4.5.1 O fibrado vetorial sobre $\mathbb{F}_\Theta Q$

Para as construções dessa seção, Θ pode ser arbitrário. A seguir constrói-se o fibrado vetorial $T^v(\mathbb{F}_\Theta Q) \to \mathbb{F}_\Theta Q$ cujas fibras são os espaços tangentes às fibras de $\mathbb{F}_\Theta Q \to X$, que são variedades diferenciáveis (o sobrescrito v denota que se está considerando os espaços tangentes verticais, i.e. tangentes às fibras). Esse fibrado vetorial é construído considerando-se a ação à esquerda de G no fibrado tangente $p : T(\mathbb{F}_\Theta) \to \mathbb{F}_\Theta$, onde $g \in G$ age pela diferencial $\mathrm{d}g : T(\mathbb{F}_\Theta) \to T(\mathbb{F}_\Theta)$, onde para cada $b \in \mathbb{F}_\Theta$ tem-se o isomorfismo entre espaços tangentes $\mathrm{d}g_b : T(\mathbb{F}_\Theta)_b \to T(\mathbb{F}_\Theta)_{gp}$. Define-se então o fibrado associado

$$T^v(\mathbb{F}_\Theta Q) := Q \times_G T(\mathbb{F}_\Theta) \longrightarrow X \tag{4.68}$$

cuja projeção π^v para X se fatora por

$$\begin{tikzcd} T^v(\mathbb{F}_\Theta Q) \arrow[d, "p^v"] \arrow[dd, bend right, "\pi^v"'] \\ \mathbb{F}_\Theta Q \arrow[d, "\pi"] \\ X \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} p^v(q \cdot w) &:= q \cdot p(w), \\ \pi(q \cdot \xi(\lambda_0)) &:= \pi_X(q), \end{aligned} \tag{4.69}$$

onde $\xi(\lambda_0) \in \mathbb{F}_\Theta$ e $w \in T(\mathbb{F}_\Theta)_{\xi(\lambda_0)}$ são arbitrários. Para $\xi \in \mathbb{F}Q$ denota-se por $T^v(\mathbb{F}_\Theta Q)_\xi = (p^v)^{-1}(\xi)$ o espaço tangente da fibra sobre ξ. Para $x \in X$ denota-se por $T^v(\mathbb{F}_\Theta Q)_x = (\pi^v)^{-1}(x)$ o fibrado tangente da fibra sobre x. Cada $q \in Q$ pode ser visto tanto como uma aplicação $q : \mathbb{F}_\Theta \to (\mathbb{F}_\Theta Q)_x$ do fibrado associado $\mathbb{F}Q \to X$, quanto como uma aplicação $q : T(\mathbb{F}_\Theta) \to T^v(\mathbb{F}_\Theta Q)_x$ do fibrado associado $T^v(\mathbb{F}_\Theta Q) \to X$, onde $x = \pi_X(q) \in X$. Ficará claro do contexto qual das duas interpretações se está usando.

A partir de uma decomposição de Iwasawa $Q = R(AN(\lambda_0))$ do fibrado Q (cf. seção 3.1), onde $R \subset Q$ é uma K-redução e λ_0 uma câmara de G, mune-se o fibrado vetorial $T^v(\mathbb{F}_\Theta Q)$ com uma métrica Riemanniana especial $\langle \cdot, \cdot \rangle_\xi$, $\xi \in \mathbb{F}_\Theta Q$, dada da seguinte maneira. Na fibra típica fixa-se o ponto base

$$b_0 := \mathfrak{p}(\lambda_0)_\Theta, \tag{4.70}$$

e considera-se a métrica K-invariante dada em (A.46). Então $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é definida declarando-se que cada $r \in R$ é uma isometria quando vista como aplicação $r : T(\mathbb{F}_\Theta)_b \to T^v(\mathbb{F}_\Theta Q)_{r \cdot b}$. Mais precisamente define-se

$$\langle r \cdot w,\, r \cdot w' \rangle_{r \cdot b} := B_\theta(w, w')_b, \tag{4.71}$$

onde $w,\, w' \in T(\mathbb{F}_\Theta)_b$ são arbitrários. Essa métrica está bem definida pela K-invariância de B_θ e dá origem a uma norma $|\cdot|_\xi$ no fibrado vetorial $T^v(\mathbb{F}_\Theta Q) \to \mathbb{F}_\Theta Q$, $\xi \in \mathbb{F}_\Theta Q$.

Para cada $t \in \mathbb{T}$ a restrição do fluxo a uma fibra $\sigma_t : Q_x \to Q_{t \cdot x}$ é uma aplicação diferenciável, desse modo o fluxo σ_t se levanta para um fluxo linear $D^v\sigma_t$ no fibrado vetorial $T^v(\mathbb{F}_\Theta Q) \to \mathbb{F}_\Theta Q$ que é dado pela diferencial de σ_t nas fibras. Esse fluxo linear $D^v\sigma_t$ é chamado de fluxo linearizado fibra-a-fibra, e é dado localmente da seguinte maneira. Seja

$\xi \in \mathbb{F}Q$ sobre x. Então $\sigma_t(\xi)$ está sobre $x' := t \cdot x$. Ao redor de x e x' tomam-se respectivamente seções locais $\chi_1 : U_1 \to R$ e $\chi_2 : U_1 \to R$ da K-redução R de Q, elas determinam o cociclo local $\rho(t, z)$ com valores em G dado por (cf. Exemplo 1.3)

$$\sigma_t(\chi_1(z)) = \chi_2(t \cdot z)\rho(t, z), \tag{4.72}$$

que está definido se $z \in U_1$, $t \cdot z \in U_2$. Tomando-se

$$g_t := \rho(t, x) \in G, \qquad \xi = \chi_1(x) \cdot b, \quad \text{com } b \in \mathbb{F}_\Theta, \tag{4.73}$$

tem-se que

$$\sigma_t(\xi) = \sigma_t(\chi_1(x)) \cdot b = \chi_2(t \cdot z) \cdot g_t b. \tag{4.74}$$

Seja $v \in T(\mathbb{F}_\Theta Q)_\xi$ sobre ξ. Então,

$$v = \chi_1(x) \cdot w, \quad \text{com } w \in T(\mathbb{F}_\Theta)_b, \tag{4.75}$$

de modo que

$$D^v\sigma_t(v) = \sigma_t(\chi_1(x)) \cdot w = \chi_2(t \cdot z) \cdot (\mathrm{d}g_t)_b w. \tag{4.76}$$

Como as seções χ_1 e χ_2 tomam valores em R de (4.71) segue que

$$\|D^v\sigma_t\|_{t\cdot\xi} = \|(\mathrm{d}g_t)_b\|_\theta, \tag{4.77}$$

onde $\|\cdot\|_*$ denota a norma de operador linear da respectiva métrica.

4.5.2 A redução dinâmica de Q

Seja uma decomposição de Iwasawa $G = K(AN(\lambda_0))$ do grupo estrutural G de Q. Seja $H_\sigma \in \mathfrak{a}$ característico para σ_t, i.e. $\Theta(H_\sigma) = \Theta(\sigma)$. Uma vez que σ_t é um fluxo e a base X é compacta, o Teorema B.16 fornece as seções globais ζ^+, ζ^- e ζ de seus respectivos fibrados, e suas respectivas aplicações equivariantes f^+, f^- e f.

Proposição 4.22 *Tem-se que a seção ζ é σ_t-equivariante e a aplicação equivariante associada $f : Q \to \mathbb{F}_{\Theta(\sigma)} \times \mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}$ é σ_t-invariante. Isto é, $\zeta(t \cdot x) = t \cdot \zeta(x)$ e $f(t \cdot q) = f(q)$, onde $x \in X$, $q \in Q$ e $t \in \mathbb{T}$.*

Demonstração: A segunda afirmação decorre da primeira. De fato, uma vez que $\zeta(\pi(q)) = q \cdot f(q)$, para $t \in \mathbb{T}$ e $q \in Q$ tem-se que

$$(t \cdot q) \cdot f(t \cdot q) = \zeta(\pi(t \cdot q)) = t \cdot \zeta(\pi(q)) = (t \cdot q) \cdot f(q). \tag{4.78}$$

Como f toma valores na fibra típica $\mathbb{O}_{\Theta(\sigma)}$ e como $t \cdot q \in Q$ determina um homemorfismo entre essa fibra típica e a fibra $(\mathbb{O}_{\Theta(\sigma)}Q)_{t \cdot x}$, segue de (4.78) que $f(t \cdot q) = f(q)$, como desejado.

Para a primeira afirmação tem-se da Equação (B.27) que a seção ζ é σ_t-equivariante se, e somente se, ambas as seções ζ^+, ζ^- são σ_t-equivariantes. Pela Equação (B.23) e pela invariância de $\mathcal{M}_\Theta^+$ tem-se que $t \cdot \zeta^+(x)$ está na fibra de $\mathcal{M}_\Theta^+$ sobre $t \cdot x$, mas novamente pela Equação (B.23) esta fibra se reduz ao ponto $\zeta^+(t \cdot x)$, o que prova que $\zeta^+(t \cdot x) = t \cdot \zeta^+(x)$. A equivariância de ζ^- segue por argumentos inteiramente análogos. ∎

Considera-se do Teorema B.16 o espaço G-homogêneo $\mathbb{O}_{\Theta(\sigma)}$ com ponto base $o(\lambda_0)$ cuja isotropia em G é $Z(H_\sigma(\lambda_0))$. Fixa-se o ponto base $b_0 := \mathfrak{p}(\lambda_0)_{\Theta(\sigma)}$ de $\mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}$. Pelo item (ii) da Proposição A.3 a aplicação equivariante $f : Q \to \mathbb{O}_{\Theta(\sigma)}$ define uma $Z(H_\sigma(\lambda_0))$-redução localmente trivial de Q dada por

$$Q_{\Theta(\sigma)} := f^{-1}(o(\lambda_0)), \tag{4.79}$$

que é a chamada *redução dinâmica* de Q com respeito ao fluxo σ_t.

Proposição 4.23 *O subfibrado $Q_{\Theta(\sigma)}$ é σ_t-invariante, isto é, se $q \in Q_{\Theta(\sigma)}$ então $\sigma_t(q) \in Q_{\Theta(\sigma)}$, $t \in \mathbb{T}$. O atrator $\mathcal{M}_{\Theta(\sigma)}^+$ no fibrado flag de tipo parabólico $\mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}Q$ pode ser descrito da seguinte maneira*

$$\mathcal{M}_{\Theta(\sigma)}^+ = \{q \cdot b_0 : \, q \in Q_{\Theta(\sigma)}\}. \tag{4.80}$$

Demonstração: Pela σ_t-invariância de f dada na Proposição 4.22 é imediato que $Q_{\Theta(\sigma)}$ é σ_t-invariante. Para a segunda afirmação seja $q \in Q_{\Theta(\sigma)}$. Da definição (4.79) de $Q_{\Theta(\sigma)}$ e do item (iii) do Teorema B.16 segue que

$$\big(\zeta^+(\pi(q)), \, \zeta^-(\pi(q))\big) = \zeta(\pi(q)) = q \cdot f(q) = q \cdot o(\lambda_0) = (q \cdot \mathfrak{p}_\Theta(\lambda_0), \, q \cdot \mathfrak{p}_{\Theta^*}(\lambda_0)). \tag{4.81}$$

Assim de (B.23) segue que

$$\zeta^+(\pi(q)) = q \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0)_\Theta = q \cdot b_0 = \left(\mathcal{M}^+_{\Theta(\sigma)}\right)_{\pi_X(q)}. \tag{4.82}$$

Como $q \in Q$ é arbitrário isso prova (4.80). ∎

Obtém-se agora uma $K_{\Theta(\sigma)}$-redução localmente trivial $R_{\Theta(\sigma)}$ de $Q_{\Theta(\sigma)}$. De fato, considera-se a decomposição de Iwasawa (A.32) do centralizador $Z(H_\sigma(\lambda_0))$. Uma vez que a parte $(AN(\Theta(\sigma)))(\lambda_0)$ é vetorial, segue da Proposição A.4 que existe uma tal $K_{\Theta(\sigma)}$-redução. Uma vez que $R_{\Theta(\sigma)}$ é uma $K_{\Theta(\sigma)}$-redução de $Q_{\Theta(\sigma)} \subset Q$ com $K_{\Theta(\sigma)} \subset K$, segue da Proposição A.5 que existe uma K-redução R de Q tal que

$$R_{\Theta(\sigma)} \subset R. \tag{4.83}$$

Assim pode-se obter uma decomposição de Iwasawa $Q = R(AN(\lambda_0))$ de Q (cf. seção 3.1) que é adaptada à redução dinâmica $Q_{\Theta(\sigma)}$ no sentido em que $R_{\Theta(\sigma)} \subset R$.

4.5.3 Contração dos vetores tangentes às fibras do atrator

Nessa seção fixa-se a redução dinâmica $Q_{\Theta(\sigma)}$ da seção anterior e fixa-se uma decomposição de Iwasawa $Q = R(AN(\lambda_0))$ de Q (cf. seção 3.1) que é adaptada à redução $Q_{\Theta(\sigma)}$ no sentido em que $R_{\Theta(\sigma)} \subset R$. Com essas escolhas de decomposição de Iwasawa de Q fixa-se no fibrado vetorial $T^v(\mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}Q) \to \mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}Q$ a métrica (4.71) que vem da redução R.

A seguir estuda-se o comportamento da norma de $D^v\sigma_t$ sobre o atrator $\mathcal{M}^+_{\Theta(\sigma)}$ para se obter que, no fibrado flag de tipo parabólico, o fluxo linearizado $D^v\sigma_t$ contrai os vetores tangentes às fibras do atrator.

Lema 4.24 *Para $\xi \in \mathcal{M}^+_{\Theta(\sigma)}$ tem-se*

$$\lim_{t\to\infty} \|D^v\sigma_t\|_{t\cdot\xi} = 0. \tag{4.84}$$

Demonstração: Seja $\Theta := \Theta(\sigma)$. Seja $t_k \in \mathbb{T}$ uma sequência arbitrária com $t_k \to \infty$. Uma vez que $\mathcal{M}^+_\Theta$ é compacto e invariante tomando subsequências pode-se assumir que

$t_k \cdot \xi \to \xi' \in \mathcal{M}_\Theta^+$. Sejam x e x' as projeções em X de ξ e ξ' respectivamente. Repete-se a obtenção do cociclo local em (4.72), considerando-se no entanto seções locais $\chi_1 : U_1 \to R_\Theta$ e $\chi_2 : U_2 \to R_\Theta$ da K_Θ-redução R_Θ em (4.83). Uma vez que a $Z(H_\sigma(\lambda_0))$-redução Q_Θ é σ_t-invariante, segue que o cociclo local $\rho(t,z)$ em (4.72) toma valores no subgrupo $Z(H_\sigma(\lambda_0))$. Para k suficientemente grande, tem-se que $t_k \cdot x \in U_2$ de modo que $g_k := \rho(t_k, z) \in Z(H_\sigma(\lambda_0))$ está bem definido. Uma vez que $\chi_1(x) \in Q_\Theta$ e $\xi \in (\mathcal{M}_\Theta^+)_x$, segue de (4.80) que $\xi = \chi_1(x) \cdot b_0$. De $R_\Theta \subset R$ e de (4.77) segue então que

$$\|D^v \sigma_{t_k}\|_{t_k \cdot \xi} = \|(dg_k)_{b_0}\|_\theta, \tag{4.85}$$

para k suficientemente grande.

Prova-se agora que a sequência g_k acima construída tem a seguinte propriedade: existe uma vizinhança U de b_0 na fibra típica tal que

$$g_k b \to b_0 \quad \text{para todo } b \in U. \tag{4.86}$$

Uma vez que $\mathcal{M}_\Theta^+$ é componente atratora existe uma vizinhança W de $\mathcal{M}_\Theta^+$ em $\mathbb{F}_\Theta Q$ tal que $\omega(W) = \mathcal{M}_\Theta^+$. Seja $U := \chi_1(x)^{-1}(W_x)$ vizinhança de b_0. Para cada $b \in U$ seja $\eta := \chi_1(x) b \in W_x$. De (4.74) segue que

$$\sigma_{t_k}(\eta) = \chi_2(t_k \cdot x) \cdot g_k b. \tag{4.87}$$

Toma-se uma subsequência de $g_k b$. Existe subsequência dos correspondentes t_k tal que $\sigma_{t_k}(\eta) \to \eta'$. Como $\eta \in W_x$ e $t_k \cdot x \to x'$ segue que $\eta' \in (\mathcal{M}_\Theta^+)_{x'}$. De (4.80) segue então que $\eta' = \xi' = \chi_2(x') b_0$, logo de (4.87) tem-se que

$$g_k b = \chi_2(t_k \cdot x)^{-1} \sigma_{t_k}(\eta) \to \chi_2(x')^{-1} \xi' = b_0. \tag{4.88}$$

Isso mostra que toda subsequência de $g_k b$ possui subsequência que converge para b_0, o que fornece que a sequência $g_k b$ converge para b_0. Como $b \in U$ é arbitrário isso prova (4.86).

Seja $\varphi_\Theta : \mathfrak{n}_\Theta^- \to \mathbb{F}_\Theta$ a carta dada em (A.44). Toma-se $U' := \varphi_\Theta^{-1}(U)$ vizinhança da origem de $\mathfrak{n}_\Theta^-$. Uma vez que $g_k \in Z(H_\sigma(\lambda_0))$ fixa b_0, de (4.86) tem-se, para cada $Y \in U'$, que

$$g_k \exp(Y) b_0 = \exp(\mathrm{Ad}(g_k) Y) b_0 = \varphi_\Theta(\mathrm{Ad}(g_k) Y) \to b_0 = \varphi_\Theta(0). \tag{4.89}$$

Como φ_Θ é uma carta local, $\mathrm{Ad}(g_k)$ é linear e U' é uma vizinhança da origem isso implica que

$$\mathrm{Ad}(g_k)Y \to 0 \quad \text{para todo } Y \in \mathfrak{n}_\Theta^-. \tag{4.90}$$

Como $\mathfrak{n}_\Theta^-$ é de dimensão finita isso implica facilmente (ou usando o princípio da limitação uniforme de operadores lineares) que

$$\|\mathrm{Ad}(g_k)\|_\theta \to 0, \tag{4.91}$$

na norma de operadores.

Usando-se (4.85), (A.47) e (4.91), segue que $\|D^v\sigma_{t_k}\|_{t_k\cdot\xi} \to 0$. Como $t_k \to \infty$ é arbitrária, isso prova (4.84). ∎

Pelo Lema de uniformidade de Fenichel (veja [5], Lema 5.2.7, p. 154) aplicado ao fibrado vetorial obtido pela restrição de $T^v(\mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}Q) \to \mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}Q$ sobre $\mathcal{M}^+_{\Theta(\sigma)}$ tem-se a seguinte consequência do lema anterior.

Corolário 4.25 *Existem $\mu > 0$ e $C \in \mathbb{R}$ tais que para toda $\xi \in \mathcal{M}^+_{\Theta(\sigma)}$ tem-se*

$$\log \|D^v\sigma_t\|_{t\cdot\xi} \leq -t\mu + C \quad \textit{para } t \geq 0. \tag{4.92}$$

Observa-se que esse resultado vale qualquer que seja a norma $|\cdot|$ tomada no fibrado vetorial $T^v(\mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}Q) \to \mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}Q$. De fato, uma vez que base X de Q é compacta tem-se que a base $\mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}Q$ desse fibrado vetorial é compacta, logo quaisquer duas normas nesse fibrado vetorial são equivalentes. É imediato que o enunciado do resultado acima é o mesmo para uma norma equivalente: a constante C muda e a constante positiva μ é a mesma. A métrica (4.71), no entanto, é especialmente adaptada ao problema e por isso ela é a métrica usada nas demonstrações.

4.5.4 A localização

Teorema 4.26 *Fixa-se $\mu > 0$ a constante do Corolário 4.25. Para todo expoente de Lyapunov vetorial $\lambda \in \mathfrak{a}$ do atrator $\mathcal{M}^+$ tem-se que*

$$\alpha(\lambda) \geq \mu, \quad \textit{para } \alpha \in \Pi^+ - \langle\Theta(\sigma)\rangle, \tag{4.93}$$

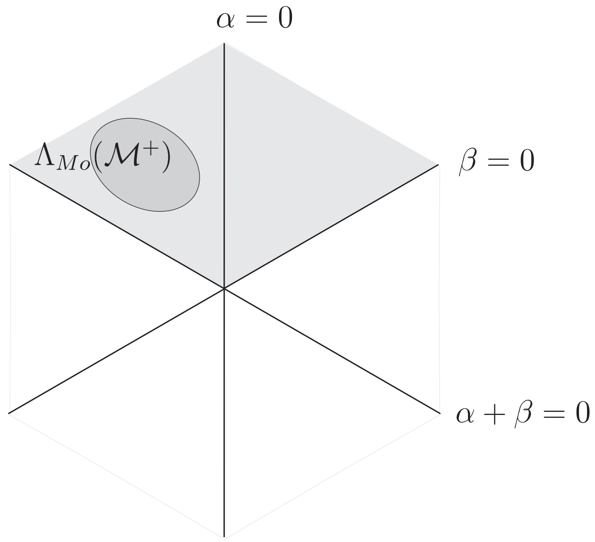

Figura 4.3: Ilustração do Teorema 4.26 com $\Theta(\sigma) = \{\alpha\}$.

Demonstração: Seja $\Theta := \Theta(\sigma)$. Fixam-se os objetos dados no primeiro parágrafo da seção 4.5.3: a redução dinâmica $Q_{\Theta(\sigma)}$, uma decomposição de Iwasawa $Q = R(AN(\lambda_0))$ de Q que é adaptada à redução Q_Θ no sentido em que $R_{\Theta(\sigma)} \subset R$, o fibrado $T^v(\mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}Q) \to \mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}Q$ com a métrica (4.71) que vem da K-redução R.

De (4.7) segue que $\Lambda_{Ly}(\mathcal{M}^+) = \Lambda^R_{Ly}(\mathcal{M}^+, a^R)$. Seja $\widehat{\xi} \in \mathcal{M}^+$ tal que

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} a^R(t, \widehat{\xi}). \tag{4.94}$$

Afirma-se que existe $r_0 \in R_\Theta$ tal que

$$\widehat{\xi} = r_0 \cdot \mathfrak{p}(\lambda_0). \tag{4.95}$$

De fato, seja $x := \pi_X(\widehat{\xi})$ e seja $r' \in R_\Theta$ acima de x. Como K age transitivamente em $\mathbb{F}$ existe $k \in K$ tal que $\widehat{\xi} = r' \cdot k\mathfrak{p}(\lambda_0)$. A projeção de $\widehat{\xi}$ em $\mathbb{F}_\Theta Q$ é dada por $\xi := r' \cdot k\mathfrak{p}_\Theta(\lambda_0) = r' \cdot kb_0$. Uma vez que $\widehat{\xi} \in \mathcal{M}^+$ do item (5) do Teorema B.14 segue que sua projeção satisfaz $\xi \in \mathcal{M}^+_\Theta$. Assim de (4.80) segue que

$$\xi = r' \cdot kb_0 = r' \cdot b_0, \tag{4.96}$$

de onde se conclui que $k \in K_\Theta$. Pondo $r_0 = r'k \in R_\Theta$ obtém-se então (4.95).

Seja $t_k \to +\infty$ uma sequência em $\mathbb{T}$, uma vez que $\mathcal{M}^+$ é compacto e invariante tomando subsequências pode-se assumir que $\sigma_{t_k}(\widehat{\xi}) \to \widehat{\xi}' \in \mathcal{M}^+$, então $t_k \cdot x \to x' \in X$. Repete-se a obtenção do cociclo local $\rho(t,z) \in Z(H_\sigma(\lambda_0))$ do primeiro parágrafo da prova do Lema 4.24, considerando-se agora seções locais $\chi_1 : U_1 \to R_\Theta$ e $\chi_2 : U_1 \to R_\Theta$ tais que

$$\chi_1(x) = r_0. \tag{4.97}$$

Para k suficientemente grande, tem-se que $t_k \cdot x \in U_2$ de modo que $g_k := \rho(t_k, z) \in Z(H_\sigma(\lambda_0))$ está bem definido. Usa-se a decomposição de Iwasawa de $Z(H_\sigma(\lambda_0))$ em (A.32) para se decompor

$$g_k = u_k h_k n_k, \quad u_k \in K_\Theta,\, h_k \in A(\lambda_0),\, n_k \in (N(\Theta)(\lambda_0)). \tag{4.98}$$

Seja $H_k \in \mathfrak{a}$ canônico tal que $H_k(\lambda_0) := \log h_k$. Da escolha de r_0 em (4.95) e da Equação (4.5), segue que

$$a^R(t_k, \widehat{\xi}) = \log A(g_k) = H_k. \tag{4.99}$$

Assim de (4.94) segue que

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k} H_k. \tag{4.100}$$

Considera-se agora o fibrado $T^v(\mathbb{F}_\Theta Q) \to \mathbb{F}_\Theta Q$. De (4.77) e do Corolário 4.25 segue que existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\log \|(\mathrm{d}g_k)_{b_0}\|_\theta = \log \|D^v \sigma_{t_k}\|_{t_k\cdot\xi} \leq -t_k\mu + C. \tag{4.101}$$

Usa-se a Proposição A.7 para se obter que

$$(dg_k)_{b_0} = (\mathrm{d}u_k)_{b_0} \circ (\mathrm{d}h_k)_{b_0}, \tag{4.102}$$

onde $(\mathrm{d}u_k)_{b_0}$ é isometria de B_Θ e $(\mathrm{d}h_k)_{b_0} = \mathrm{Ad}(h_k)|_{\mathfrak{n}_\Theta^-}$ é simétrica em relação a B_Θ. Segue daí que

$$\|(\mathrm{d}g_k)_{b_0}\|_\theta = \|\mathrm{Ad}(h_k)_{\mathfrak{n}_\Theta^-}\|_\theta. \tag{4.103}$$

Uma vez que $\mathrm{Ad}(h_k)_{\mathfrak{n}_\Theta^-}$ é simétrica em relação a B_Θ sua norma $\|(\mathrm{d}h_k)_{b_0}\|_\theta$ é o seu maior autovalor. Como os autovalores de $\mathrm{Ad}(h_k)$ em $\mathfrak{n}_\Theta^-$ são da forma $\exp(-\alpha(H_k))$, com $\alpha \in$

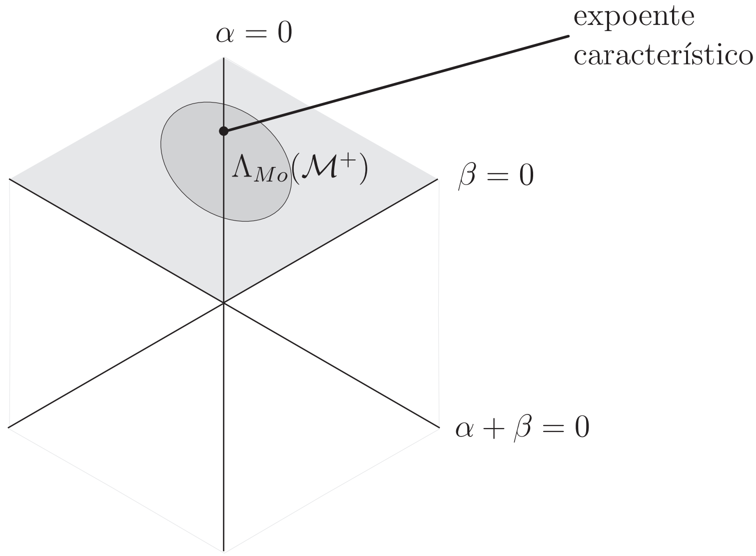

Figura 4.4: Ilustração do Teorema 4.27 com $\Theta(\sigma) = \{\alpha\}$.

$\Pi^+ - \langle\Theta\rangle$, segue de (4.101) que

$$\alpha(H_k) \geq -\log \|(\mathrm{d}h_k)_{b_0}\|_\theta = -\log \|(\mathrm{d}g_k)_{b_0}\|_\theta \geq t_k\mu - C, \quad \text{para } \alpha \in \Pi^+ - \langle\Theta\rangle. \quad (4.104)$$

Usando (4.100) e tomando o limite segue (4.93), o que prova o resultado. ∎

O resultado anterior está ilustrado na figura 4.3. Juntando esse resultado com resultados de outras seções do presente capítulo, obtém-se finalmente o seguinte resultado, que está ilustrado na figura 4.4.

Teorema 4.27 *Se σ_t é um fluxo de automorfismos de Q e a base X de Q é compacta então*

$$\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}^+) \subset \mathrm{int}\left(W(\sigma)\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+\right). \quad (4.105)$$

Assim todo expoente de Morse $\lambda \in \Lambda_{Mo}(\mathcal{M}^+)$, em particular todo expoente de Lyapunov λ de $\mathcal{M}^+$, satisfaz $\Theta(\lambda) \subset \Theta(\sigma)$. Além disso existe um expoente de Morse λ_σ de $\mathcal{M}^+$ que é característico, i.e., satisfaz $\Theta(\lambda_\sigma) = \Theta(\sigma)$.

Demonstração: Para a primeira afirmação, suponha por contradição que $\Lambda_{Mo}(\mathcal{M}^+)$ toca a fronteira do cone $(W(\sigma)\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+)$. Do Teorema 4.21 segue que existe um expoente de Lyapunov de $\mathcal{M}^+$ num hiperplano de uma raíz fora de $\langle\Theta(\sigma)\rangle$. O Teorema anterior fornece então a contradição.

A segunda afirmação é imediata da primeira afirmação e da caracterização do cone dada na Proposição 4.15.

Para a última afirmação, o Teorema 4.19 fornece um expoente de Morse λ_σ de $\mathcal{M}^+$ que satisfaz $\Theta(\lambda_\sigma) \supset \Theta(\sigma)$. Da segunda afirmação tem-se que $\Theta(\lambda_\sigma) \subset \Theta(\sigma)$ de onde segue que $\Theta(\lambda_\sigma) = \Theta(\sigma)$. ∎

Observa-se que o Teorema 4.27 é um melhoramento do Teorema 4.19, este último é um resultado mais geral que funciona para semifluxos, fornece uma localização mais grosseira dos espectros de todas as componentes $\mathcal{M}(w)$, $w \in W$, e fornece um expoente quase-característico em $\mathcal{M}^+$. O Teorema 4.27 melhora a localização do espectro de $\mathcal{M}^+$ excluindo a fronteira do cone, o que fornece de imediato que o expoente quase-característico dado pelo Teorema 4.19 é de fato característico (cf. Figura 4.4).

O Teorema 4.27 pode ser visto como uma maneira indireta de se calcular o tipo parabólico de um semifluxo por meio do cálculo dos expoentes de Morse (cf. Figura 4.5). O próximo resultado é uma instância disso.

Proposição 4.28 *Seja σ_t um fluxo de automorfismos de $Q \to X$ com base X compacta. Então σ_t é transitivo por cadeias em $\mathbb{F}Q$ se, e somente se, $0 \in \Lambda_{Mo}(\mathcal{M}^+)$.*

Demonstração: Do Teorema B.14 segue que σ_t é transitivo por cadeias em $\mathbb{F}Q$ se, e somente se, para todo $w \in W$, $\mathcal{M}(w) = \mathcal{M}^+$, logo se, e somente se, $\Theta(\sigma) = \Sigma$.

Seja então σ_t transitivo por cadeias em $\mathbb{F}Q$ e seja um expoente característico $\lambda_\sigma \in \Lambda_{Mo}(\mathcal{M}^+)$ cuja existência é dada pelo Teorema 4.27. Como $\Theta(\lambda_\sigma) = \Theta(\sigma) = \Sigma$ segue que $\lambda_\sigma = 0$.

Reciprocamente supõe-se que $0 \in \Lambda_{Mo}(\mathcal{M}^+)$. Então do Teorema 4.27 e da Proposição 4.15 segue que

$$0 \in \operatorname{int}\left(W(\sigma)\mathrm{cl}\mathfrak{a}^+\right) = \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) > 0, \alpha \in \Pi^+ - \langle\Theta(\sigma)\rangle\}, \tag{4.106}$$

o que, claramente, só pode ocorrer se $\Pi^+ - \langle\Theta(\sigma)\rangle = \varnothing$. Isso fornece que $\Theta(\sigma) = \Sigma$. ∎

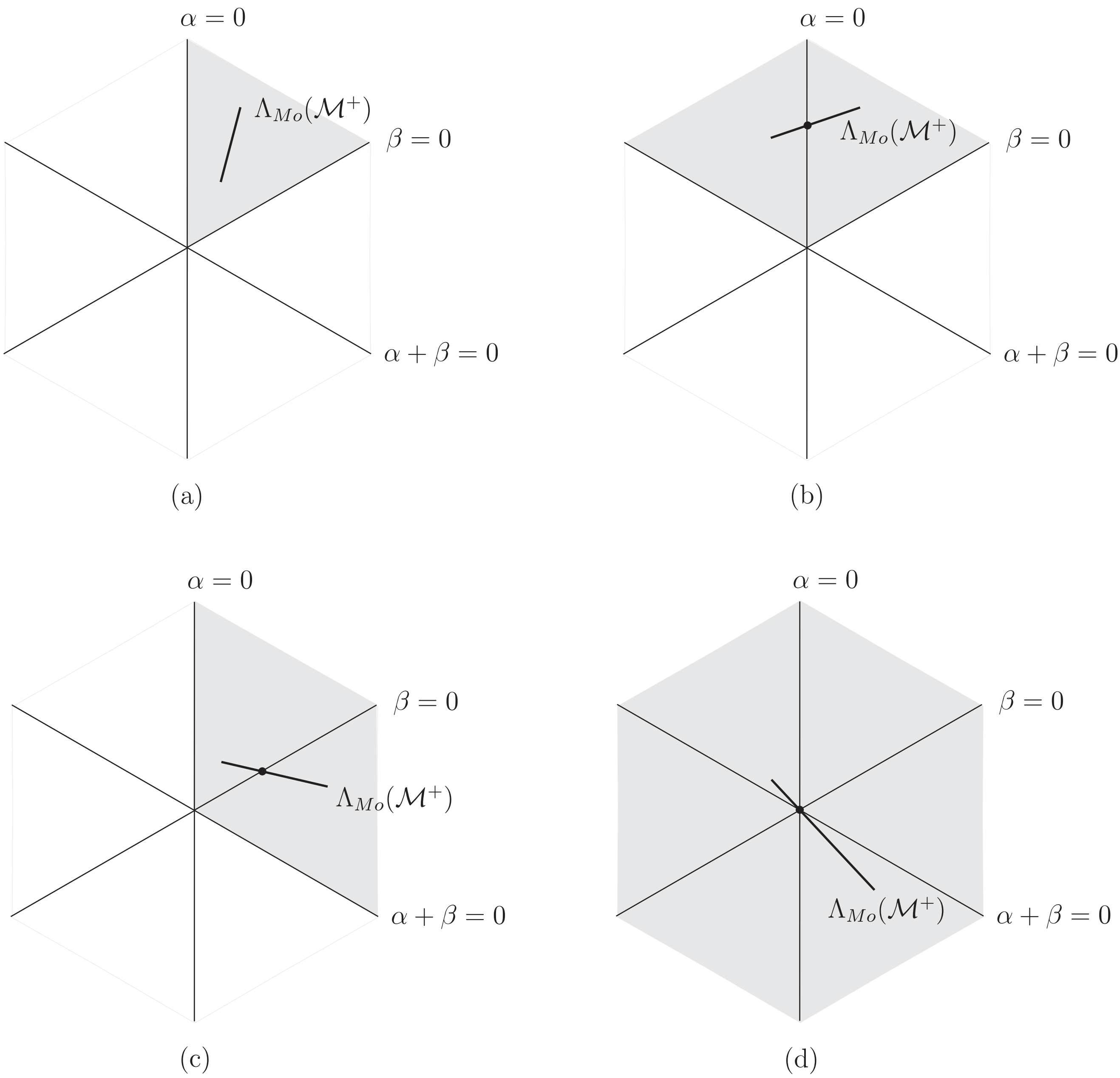

Figura 4.5: Todas as possibilidades para o tipo parabólico de um fluxo σ quando $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(3, \mathbb{R})$. No item (a) $\Theta(\sigma) = \varnothing$, no item (b) $\Theta(\sigma) = \{\alpha\}$, no item (c) $\Theta(\sigma) = \{\beta\}$ e no item (d) $\Theta(\sigma) = \{\alpha, \beta\}$. Nesse último caso o fluxo é recorrente por cadeias em $\mathbb{F}Q$.

4.6 Desenvolvimentos futuros

A seguir listam-se brevemente possíveis desenvolvimentos futuros dos resultados da tese e possíveis aplicações.

1) Agora que se tem um quadro satisfatório do comportamento assintótico radial e esférico de um semifluxo de endomorfismos tentar descrever formas canônicas para o semifluxo.

2) Procurar resultados que relacionem o espectro de Morse vetorial intrínseco, logo o tipo parabólico, com a estabilidade do semifluxo. Resultados de [4, 5] fornecem que o espectro de Morse escalar de fluxos lineares é semi-contínuo superiormente com respeito a perturbações adequadas, em outras palavras ele pode diminuir abruptamente, mas não pode crescer abruptamente. Se um resultado desse tipo for provado para o espectro de Morse vetorial intrínseco isso forneceria que o tipo parabólico do semifluxo é semi-contínuo superiormente com respeito a perturbações adequadas, isto é: $\Theta(\sigma)$ pode diminuir, mas não pode aumentar quando σ é adequadamente perturbado. Resultados de [16] relacionam o espectro de Morse escalar de um difeomorfismo de uma variedade compacta com a estabilidade estrutural desse difeomorfismo. Que informações novas o espectro de Morse vetorial intrínseco pode trazer a essa situação?

3) Relacionar o espectro de Morse vetorial intrínseco com outros espectros clássicos como o espectro de Floquet, espectro topológico, espectro de dicotomia exponencial (cf. [5]).

4) Estender para as outras componentes $\mathcal{M}(w)$ de Morse os resultados obtidos para $\mathcal{M}^+$ ao final do Capítulo 4. Isso esclareceria se o espectro das outras componentes contém informações que não estão contidas no espectro da componente atratora (cf. Exemplo 4.20). Além disso, a extensão da Proposição 4.23 para outras componentes permitiria descrever todas as componentes de Morse $\mathcal{M}(w)$ como espécies de subfibrados flag do fibrado flag maximal $\mathbb{F}Q$. Isso permitiria lidar melhor com essas outras componentes de Morse e possivelmente obter resultados mais precisos sobre seu espectro.

5) Usar os resultados dessa tese em situações concretas onde se pode calcular o espectro

de Morse vetorial intrínseco. Uma situação adequada é de uma equação linear de coeficientes periódicos, pois nesse caso se dispõe da teoria dos expoentes Floquet (cf. [2]). Uma outra situação adequada é a de sistemas de controle (cf. [5]). Uma situação adequada bem simples, mas que ainda não foi inteiramente explorada, é a iteração de uma matriz invertível $g \in G$ no flag maximal de G (no Exemplo 4.20 trata-se o caso particular em que g é um elemento diagonalizável de G). Nesse caso o tipo parabólico do fluxo de tempo discreto gerado por g é dado pela matriz diagonal cujas entradas são as partes reais dos autovalores de g [27].

Apêndice A

Preliminares

A.1 Teoria de Conley

Aqui são lembradas as definições e resultados de recorrência e transitividade por cadeias introduzidos em [19]. Eles se aplicam a semifluxos em espaços topológicos e estão baseados na escolha de uma família pré-fixada de coberturas abertas do espaço. Esta seção é uma adaptação da seção 2 de [20], que generaliza pars semifluxos em espaços topológicos a teoria de recorrência por cadeias desenvolvida em [7].

Um semifluxo num espaço topológico X é uma aplicação contínua $\sigma : \mathbb{T} \times X \to X$, onde $\mathbb{T} = \mathbb{Z}^+$ ou $\mathbb{R}^+$, tal que (i) $\sigma_0 = \mathrm{id}_X$ e (ii) $\sigma_{t+s} = \sigma_t \circ \sigma_s$, para todos $s, t \in \mathbb{T}$. As aplicações σ_t, $t \in \mathbb{T}$, são contínuas, mas não se supõe que elas são invertíveis.

Dado um subconjunto $Y \subset X$ e $t \in \mathbb{T}$ escreve-se $Y_t^+ = \bigcup_{s \geq t} \sigma_s(Y)$ e $Y_t^- = \bigcup_{s \geq t} \sigma_s^{-1}(Y)$. Escreve-se também $Y_+^t = \bigcup_{0 \leq s \leq t} \sigma_s(Y)$ e $Y_-^t = \bigcup_{0 \leq s \leq t} \sigma_s^{-1}(Y)$. Em particular, a órbita progressiva de Y sob o semifluxo é dada por Y_0^+, e a órbita regressiva é dada por Y_0^-.

O conjunto ω-limite do subconjunto $Y \subset X$ é definido da maneira usual como $\omega(Y) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \mathrm{cl}\left(Y_t^+\right)$, e o conjunto ω^*-limite de Y como $\omega^*(Y) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \mathrm{cl}\left(Y_t^-\right)$.

Se $x \in X$ escreve-se por simplicidade $x_t^+ = \{x\}_t^+$, $x_t^- = \{x\}_t^-$, $x_+^t = \{x\}_+^t$ e $x_-^t = \{x\}_-^t$. Uma sequência $\Lambda = (x_k)$ em X é x-regressiva se $x_0 = x$ e $\sigma_1(x_k) = x_{k-1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Define-se a Λ-órbita regressiva de x como

$$\Lambda(x)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{s\in[0,1]}\sigma_s(x_k).$$

Um subconjunto $A\subset X$ é invariante se $\sigma_t(A)=A$ e é regressivamente invariante se $\sigma_t^{-1}(A)=A$, para todo $t\in\mathbb{T}$. (Observa-se que em ambos os casos exige-se a igualdade entre os conjuntos.) Um conjunto invariante A é chamado de atrator se existe uma vizinhança U de A tal que $\omega(U)=A$. Reciprocamente, um conjunto invariante $R\subset X$ é chamado de repulsor se existe uma vizinhança V de R tal que $\omega^*(V)=R$. Um repulsor é também regressivamente invariante (cf. Proposição 3.4 de [17]).

Seja X um espaço topológico e $\mathcal{O}$ uma família de coerturas abertas de X. Para $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathcal{O}$ escreve-se $\mathcal{V}\leq\mathcal{U}$ se para cada aberto $V\in\mathcal{V}$, existe um aberto $U\in\mathcal{U}$ tal que $V\subset U$. Escreve-se $\mathcal{V}\leq\frac{1}{2}\mathcal{U}$ se para cada par $V,V'\in\mathcal{V}$ tais que $V\cap V'\neq\varnothing$, existe $U\in\mathcal{U}$ tal que $V\cup V'\subset U$. Por exemplo se X é um espaço métrico e para $\varepsilon>0$ define-se $\mathcal{U}_\varepsilon$ como a cobertura de X por todas as bolas abertas de raio ε, tem-se que $\mathcal{V}\leq\frac{1}{2}\mathcal{U}_\varepsilon$ sempre que $\mathcal{V}\leq\mathcal{U}_{\frac{1}{2}\varepsilon}$.

Dada uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X e um subconjunto compacto $K\subset X$ escreve-se

$$[\mathcal{U},K]=\{U\in\mathcal{U}:K\cap U\neq\varnothing\}.$$

Se $N\subset X$ é um aberto com $K\subset N$ diz-se que $\mathcal{U}$ é K-subordinado à N se, para cada $U'\in[\mathcal{U},K]$ tem-se que $U'\subset N$.

Definição A.1 *A família $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de X é dita* admissível *se*

(i) para cada $\mathcal{U}\in\mathcal{O}$ existe $\mathcal{V}\in\mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V}\leq\frac{1}{2}\mathcal{U}$.

(ii) Seja $N\subset X$ um aberto e $K\subset N$ um compacto. Então existe $\mathcal{U}\in\mathcal{O}$ que é K-subordinado à N.

Exemplos de famílias admissíveis são: (i) A família $\mathcal{O}_b(X)$ de coberturas de X por bolas de raio ε, $\varepsilon>0$, quando X é um espaço métrico; (ii) a família $\mathcal{O}(X)$ de todas as coberturas abertas de X quando X é um espaço paracompacto; (iii) a família $\mathcal{O}_f(X)$ de todas as coberturas finitas de X quando X é um espaço compacto Hausdorff.

Sejam $x, y \in X$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $T \in \mathbb{T}$. Uma $(\mathcal{U}, T)$-cadeia de x à y é uma sequência de pontos $\{x = x_1, \ldots, x_{n+1} = y\} \subset X$, uma sequência de tempos $\{T_1, \ldots, T_n\} \subset \mathbb{T}$ e uma sequência de abertos $\{U_1, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ tais que $T_i \geq T$ e $\sigma_{T_i}(x_i), x_{i+1} \in U_i$, para todos $i = 1, \ldots, n$.

Seja um subconjunto $Y \subset X$. Denota-se por $\Omega(Y,\mathcal{U}, T)$ o conjunto dos pontos finais de todas as $(\mathcal{U}, T)$-cadeias que têm ponto inicial em Y. Denota-se por $\Omega^*(x,\mathcal{U}, T)$ o conjunto de todos os pontos iniciais de $(\mathcal{U}, T)$-cadeias que têm x como ponto final. Tem-se então que

$$\Omega^*(x,\mathcal{U}, T) = \{y \in X : x \in \Omega(y,\mathcal{U}, T)\}.$$

Se $\mathcal{O}$ é uma família de coberturas abertas de X e $Y \subset X$ escreve-se

$$\Omega_{\mathcal{O}}(Y) = \bigcap \{\Omega(Y,\mathcal{U}, T) : \mathcal{U} \in \mathcal{O}, T \in \mathbb{T}\}.$$

Para $x \in X$ escreve-se $\Omega_{\mathcal{O}}(x) = \Omega_{\mathcal{O}}(\{x\})$ e define-se a relação $x \preceq_{\mathcal{O}} y$ se $y \in \Omega_{\mathcal{O}}(x)$. Se a família $\mathcal{O}$ é admissível então $\preceq_{\mathcal{O}}$ é uma relação transitiva, fechada e σ_t-invariante (Proposição 3.3 de [19]), i.e., $\preceq_{\mathcal{O}}$ é fechado como subconjunto de $X \times X$, além disso $\sigma_t(x) \preceq_{\mathcal{O}} \sigma_s(x)$ se $x \preceq_{\mathcal{O}} y$, para todos $s, t \in \mathbb{T}$. Para cada $Y \subset X$ o conjunto $\Omega_{\mathcal{O}}(Y)$ também é invariante.

Define-se a relação $x \sim_{\mathcal{O}} y$ se $x \preceq_{\mathcal{O}} y$ e $y \preceq_{\mathcal{O}} x$. Então $x \in X$ é dito $\mathcal{O}$-recorrente por cadeias se $x \sim_{\mathcal{O}} x$. Denota-se por $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ o conjunto de todos os pontos $\mathcal{O}$-recorrentes por cadeias. É imediato que a restrição de $\sim_{\mathcal{O}}$ à $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ é uma relação de equivalência. Uma classe de equivalência de $\sim_{\mathcal{O}}$ é chamada de *componente $\mathcal{O}$-transitiva por cadeias*, ou abreviadamente por *componente transitiva*.

Supõe-se agora que X é um espaço compacto Hausdorff. Nesse caso os conjuntos recorrentes por cadeias e também os conjuntos $\Omega_{\mathcal{O}}(Y)$, $Y \subset X$, independem da família admissível $\mathcal{O}$ (cf. [19], Teorema 3.4). Uma coleção finita de subconjuntos $\{M_1, \ldots, M_n\}$ de X define uma decomposição de Morse se, e somente se existe uma sequência estritamente crescente de atratores

$$\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = X$$

tais que $M_i = A_i \cap A_{i-1}^*$, para $i = 1, \ldots, n$, onde A^* denota o repulsor complementar a um atrator A. No caso em que X é compacto Hausdorff a existência de uma decomposição de Morse mais fina para o semifluxo é equivalente à finitude do número de componentes transitivas (cf. Teorema 3.15 de [19]).

A.2 Fibrados principais e associados

Esta seção é uma adaptação da seção 3.1 de [20]. Com respeito a fibrados segue-se a notação e terminologia de Kobayashi-Nomizu [15]. Todos os fibrados considerados e construídos nessa tese são localmente triviais com grupo estrutural G topológico e base paracompacta X.

Seja um fibrado principal localmente trivial $\pi_X : Q \to X$ com grupo estrutural G. A base X é um espaço topológico e G é um grupo topológico agindo em Q pela direita. Essa ação é denotada por $(q, a) \in Q \times G \mapsto qa \in Q$. Denota-se a fibra sobre $x \in X$ por Q_x e a fibra por $q \in Q$ por Q_q. A trivialidade local de Q implica que a projeção π_X é uma aplicação aberta. Nas construções feitas aqui, as cartas locais de um fibrado principal $\psi_i : \pi_X^{-1}(U_i) \to U_i \times G$ serão sempre equivariantes: $\psi_i(qa) = \psi_i(q)a$, $a \in G$. Frequentemente uma trivialização local é realizada por uma seção local $\chi : U \to Q$, $U \subset X$. Neste caso um atlas de Q é dado por uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de X e seções locais $\chi_i : U_i \to Q$. Se $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ então

$$\chi_i(x) = \chi_j(x)\, a_{ij}(x)$$

onde $a_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ são as assim chamadas *funções de transição*. Quando é possível reduzir o fibrado principal $\pi_X : Q \to X$ para um subfibrado $P \to X$, $P \subset Q$, com grupo estrutural $H \subset G$, então é possível escolher as trivilizações de Q de modo que as funções de transição a_{ij} tomem valores em H (cf. Proposição A.6 mais adiante.)

Um espaço topológico F é um espaço homogêneo de G se G age continuamente, transitivamente e abertamente em F, i.e., para cada $u \in F$ a aplicação $G \to F$, $g \mapsto gu$ é uma sobrejeção contínua e aberta. Constrói-se um fibrado associado a Q com fibra típica F denotado por

$$E = FQ := Q \times_G F \to X,$$

da seguinte maneira. O espaço total E é o quociente $Q \times F/\sim$ onde $\sim$ é a relação de equivalência $(p, v) \sim (q, w)$ se, e só se $q = pa$ e $w = a^{-1}v$, $a \in G$. Denota-se a classe de equivalência de (q, v) por $q \cdot v \in E$. Se $\Psi = (U_i, \chi_i)_{i \in I}$ é um atlas de $Q \to X$ então as aplicações $\psi_i : \pi_X^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ dadas por

$$\psi_i\left(\chi_i\left(x\right) a \cdot v\right) = (x, av)$$

são trivializações locais de $E \to X$. A família $(U_i, \psi_i)_{i \in A}$ é então um atlas de $E \to X$. Os dois casos extremos de fibrados associados são $Q = Q \times_G G$, com G agindo à esquerda em G por multiplicação, e $X = Q \times_G \{*\}$, com G agindo trivialmente no conjunto unitário $\{*\}$. Seja $\pi_E : E \to X$ a projeção do fibrado associado. Seja $A \subset E$ e $x \in X$, denota-se por

$$A_x := A \cap \pi_E^{-1}(x)$$

a fibra de A sobre x, em particular $E_x := \pi_E^{-1}(x)$. Fixado $q \in Q$ a aplicação

$$v \in F \mapsto q \cdot v \in E_{\pi_X(q)}$$

é um homemorfismo. Uma vez que F é um espaço G-homogêneo, fixado $v \in F$ a aplicação

$$q \in Q \mapsto q \cdot v \in E$$

é uma sobrejeção contínua aberta.

A.2.1 Reduções de fibrados principais

Definição A.2 *Seja F um espaço G-homogêneo com ponto base $u_0 \in F$. Uma* seção local da ação de G em $u_0 \in F$ *é uma aplicação contínua $\varphi : U \to G$, onde U é uma vizinhança de u_0 em F, que satisfaz*

$$\varphi(u)u_0 = u, \quad \textit{logo} \quad \varphi(u)^{-1}u = u_0, \tag{A.1}$$

para todo $u \in U$. Diz-se que um subgrupo H de G possui seção local se a ação de G no espaço G-homogêneo G/H possui seção local em $u_0 := H \in G/H$.

Assume-se que todos os espaços G-homogêneos F e todos os subgrupos H de G considerados nessa tese possuem seção local.

No caso em que G é um grupo de Lie todo espaço homogêneo F de G e todo subgrupo fechado H de G possui uma tal seção local: ela é construída no processo de demonstração do Teorema do Subgrupo Fechado de Cartan (cf. Cap.1, §7.5 p.33 de [28]).

Se Q é G-principal e F G-homogêneo uma aplicação $f : Q \to F$ é dita *equivariante* se

$$f(qg) = g^{-1}f(q), \quad q \in Q,\, g \in G. \tag{A.2}$$

Proposição A.3 *Sejam $Q \to X$ um fibrado G-principal, F um espaço G-homogêneo com ponto base $u_0 \in F$ e H a isotropia de u_0 em G. As seguintes afirmações são equivalentes.*

i) Q possui uma H-redução $R \subset Q$.

ii) Existe uma aplicação contínua e equivariante $f : Q \to F$ tal que a imagem inversa

$$R := f^{-1}(u_0) \tag{A.3}$$

fornece a H-redução de Q do item (i).

iii) Existe uma seção global contínua $\chi : X \to Q \times_G F$ do fibrado associado à Q com fibra típica F tal que

$$R := \{q \in Q :\ \chi(\pi_X(q)) = q \cdot u_0\} \tag{A.4}$$

fornece a H-redução de Q do item (i).

Demonstração: A equivalência entre (i) e (iii) é dada pelo Teorema 5.6, Cap.1, p.57 de [15]. A demonstração desse Teorema lá contida estabelece também a equivalência entre (i) e (ii), a menos da continuidade da aplicação f e da trivialidade local da H-redução dada por $f^{-1}(u_0)$. Estas últimas condições podem ser facilmente estabelecidas usando-se uma seção local da ação de G em $u_0 \in F$, que existe por hipótese.

∎

Proposição A.4 *Seja $Q \to X$ um fibrado G-principal, e $K \subset G$ um subgrupo fechado tal que o quociente G/K é homemorfo a um $\mathbb{R}^n$. Então Q admite uma K-redução $R \subset Q$. Em particular, se G é homemorfo a um $\mathbb{R}^n$ então Q é um fibrado G-principal trivial.*

Demonstração: Consideram-se o espaço G-homogêneo $F := G/K$ com ponto base $u_0 := K \in G/K$ e o fibrado associado $E := Q \times_G F$. Como por hipótese a fibra típica $F = G/K$ é homemorfa a um $\mathbb{R}^n$ o Teorema 5.7, Cap.1, p.58 de [15], fornece uma seção global contínua $\chi : X \to E$. Como a isotropia de u_0 em G é K, pelo item (iii) da Proposição A.3 essa seção dá origem a uma K-redução R de G.

No caso em que G é homemorfo a um $\mathbb{R}^n$ toma-se $K := \{1\}$ compacto em G. Da argumentação anterior se obtém $E = Q \times_G G = Q$ e uma seção global contínua $\chi : X \to Q$, o que mostra que Q é trivial. ∎

Proposição A.5 *Seja $Q \to X$ um fibrado G-principal, $Q' \subset Q$ uma G'-redução de Q, $G \subset G'$. Sejam $H' \subset G'$, $H \subset G$ subgrupos fechados em seus respectivos grupos tais que $H' \subset H$. Se existe uma H'-redução R' de Q' então existe uma H-redução R de Q que contém R' e, como conjunto, é dada por $R = R'H$.*

Demonstração: Consideram-se o espaço G'-homogêneo $F' = G'/H'$ com ponto base $u_0' := H' \in G'/H'$ e o espaço G-homogêneo $F = G/H$ com ponto base $u_0 := H \in G/H$. Consideram-se em seguida os respectivos fibrados associados $E' := Q' \times_{G'} F'$ e $E := Q \times_G F$. Se existe uma H'-redução R' de Q' então pelo item (iii) Proposição A.3 existe seção global contínua $\chi' : X \to E'$ tal que

$$R' = \{q' \in Q' : \chi'(\pi_X(q')) = q' \cdot u_0'\} \tag{A.5}$$

As inclusões dadas no enunciado induzem a aplicação $i : E' \to E$ dada por

$$i(q' \cdot u_0') := q' \cdot u_0, \quad q' \in Q', \tag{A.6}$$

que está bem definida, logo é contínua, uma vez que a isotropia H' de u_0' está contida na isotropia H de u_0. Tem-se que

$$\pi_X(i(q' \cdot u_0')) = \pi_X(q' \cdot u_0) = \pi_X(q') = \pi_X(q' \cdot u_0'), \quad q' \in Q'. \tag{A.7}$$

A aplicação contínua $\chi : X \to E$ dada por $\chi := i \circ \chi'$ fornece então uma seção global contínua do fibrado E'. De fato, de (A.7) segue que

$$\pi_X(\chi(x)) = \pi_X(i(\chi'(x))) = \pi_X(\chi'(x)) = x, \tag{A.8}$$

uma vez que χ' é seção. Pelo item (iii) Proposição A.3 segue que o subconjunto $R \subset Q$ dado em (A.4) fornece uma H-redução de Q. Afirma-se que $R'H = R$. De fato, seja $q' \in R'$ com $\pi_X(q') = x$, $h \in H$. Então $\pi_X(q'h) = x$. De (A.5) segue que $\chi'(x) = q' \cdot u_0'$. Agora pela definição de χ e i tem-se que

$$\chi(x) = i(\chi'(x)) = i(q' \cdot u_0') = q' \cdot u_0 = q' \cdot hu_0 = (q'h) \cdot u_0. \tag{A.9}$$

De (A.4) isso mostra que $q'h \in R$. Como $q' \in Q'$ é arbitrário isso prova que $R'H \subset R$ e, em particular $R' \subset R$. Reciprocamente seja $r \in R$, como $R' \subset R$ existe $r' \in R'$ com $\pi_X(r') = \pi_X(r)$ de sorte que $r = r'h$, $h \in H$, uma vez que R é H-principal. Como $r \in R$ é arbitrário isso prova que $R \subset R'H$, o que estabelece que $R = R'H$. ∎

A próxima Proposição define o conceito de cartas de um fibrado adaptadas a uma redução (esse resultado segue das Proposições 5.2 e 5.3, p.52 de [15]).

Proposição A.6 *Se Q admite uma K-redução $R \subset Q$ então Q admite cartas locais $\psi_i : \pi_X^{-1}(U_i) \to U_i \times G$, onde os abertos U_i cobrem X, tais que*

i) as funções de transição das cartas $\{\psi_i\}$ tomam valores em K,

ii) cada ψ_i é um homeomorfismo de $\pi_X^{-1}(U_i) \cap R$ em $U_i \times K$ de modo que, restringindo-se adequadamente o domínio e contra-domínio, essas cartas fornecem cartas locais para a redução R.

Tal coleção de cartas se chama cartas de Q adaptadas a redução R.

A.2.2 Endomorfismos locais de fibrados

Denota-se por $\mathrm{End}_\ell(Q)$ o conjunto de aplicações locais contínuas φ de Q para Q que comutam a ação à direita de G, desse modo tem-se que $\mathrm{dom}\varphi = \pi_X^{-1}(U)$, U aberto em X. Segue imediatamente que $\mathrm{End}_\ell(Q)$ é um semigrupo local agindo em Q (cf. Definição B.1).

Para se obter expressões locais de endomorfismos de Q procede-se da seguinte maneira. Seja $\{\psi_i\}_{i\in I}$ um atlas de Q. Cada carta local $\psi_i : \pi_X^{-1}(U_i) \to U_i \times G$ de Q é tal que $\psi_i(q) = (\pi_X(q), g_i(q))$, onde $g_i : \pi_X^{-1}(U_i) \to G$ é uma aplicação contínua que satisfaz $g_i(qa) = g_i(q)a$, $a \in G$. Essa carta local define a seção local $\chi_i : U_i \to Q$, $\chi_i(x) := (\psi_i)^{-1}(x, 1)$ de modo que $(\psi_i)^{-1}(x, a) = \chi_i(x)a$, $a \in G$. Seja $\varphi \in \mathrm{End}_\ell(Q)$ tal que $x \in U_i \cap \pi_X(\mathrm{dom}\varphi)$, e $\varphi(x) \in U_j$, $i, j \in I$. Então

$$\varphi(\chi_i(x)) = \chi_j(\varphi(x))\varphi_{ij}^G(x),$$

de modo que

$$\psi_j \circ \varphi \circ (\psi_i)^{-1}(x, a) = \psi_j(\varphi(\chi_i(x)))a = (\varphi(x), \varphi_{ij}^G(x)a).$$

Isso mostra que

$$\varphi_{ij}^G(x) = g_j(\varphi(\chi_i(x)),$$

define $\varphi_{ij}^G : U_i \to G$ contínua. Se $i = j$ denota-se $\varphi_i^G := \varphi_{ii}^G$.

Seja $P \subset Q$ uma H-redução de Q e seja $\rho \in \mathrm{End}_\ell(P)$. Então ρ se estende unicamente a um endomorfismo local de Q da seguinte maneira. Para $q \in Q$ existe $a \in G$ tal que $qa \in P$, define-se então $\rho(q) = \rho(qa)a^{-1}$. Se $qa, qa' \in P$ então existe $h \in H$ tal que $qa' = qah$ de modo que $a' = ah$. Mas como ρ comuta com a ação à direita de H em P segue que $\rho(qa')a'^{-1} = \rho(qa)ha'^{-1} = \rho(qa)a$, o que mostra que a extensão está bem definida. Usando-se cartas locais de Q adaptadas a redução P é fácil ver que essa extensão é contínua. Segue dessas considerações que se pode considerar $\mathrm{End}_\ell(P) \subset \mathrm{End}_\ell(Q)$ como um subsemigrupo do semigrupo local $\mathrm{End}_\ell(Q)$. De fato, não é difícil mostrar que

$$\mathrm{End}_\ell(P) = \{\varphi \in \mathrm{End}_\ell(Q) : \varphi(P \cap \mathrm{dom}(\varphi)) \subset P\}. \tag{A.10}$$

Seja $E = Q \times_G F$ um fibrado associado de Q com projeção $\pi_E : E \to X$. Um endomorfismo local $\varphi \in \mathrm{End}_\ell(Q)$ define um endomorfismo local de E da seguinte maneira

$$\varphi_E(q \cdot v) := \varphi(q) \cdot v, \quad q \in Q,\, v \in F.$$

É imediato que $\mathrm{dom}\varphi_E = \pi_E^{-1}(U)$, onde $U = \pi_X(\mathrm{dom}\varphi)$. A aplicação φ_E é chamado de endomorfismo local de E induzido por φ. Denota-se por $\mathrm{End}_\ell(E)$ o conjunto de todos os endomorfismos locais de E que são induzidos por endomorfismos locais de Q. Em particular tem-se que $\mathrm{End}_\ell(X)$ é o conjunto de todas aplicações locais contínuas de X em X. A aplicação φ_E de E também será denotada por φ, fica claro do argumento se φ está agindo em Q ou em E.

A.3 Teoria de Lie semi-simples

O objetivo dessa seção é fixar a notação e os resultados básicos de grupos e a álgebras de Lie semi-simples e suas variedades flag que são usados nessa tese. As referências aqui são [26], dos Apêndices A, B e Seções 3.1 e 3.2 de P1 e de [12]. Os resultados dessas referências são usados livremente: na maioria das vezes não se faz menção explícita ao resultado utilizado.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples real e não-compacta. A representação adjunta da álgebra de Lie é dada por $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{ad}(X) = [X, \cdot]$ e sua forma de Cartan-Killing é dada pela forma bilinear de $\mathfrak{g}$ definida por $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))$, que é não-degenerada. Denota-se por $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ o grupo de automorfismos de $\mathfrak{g}$ e por $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ o grupo de automorfismos internos de $\mathfrak{g}$, tem-se que $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})_0$, a componente conexa da identidade de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de $\mathfrak{g}$. Denota-se por $\mathrm{Int}(\mathfrak{h}) \subset \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ o grupo dos automorfismos internos de $\mathfrak{g}$ gerado por exponenciais de adjuntas de elementos de $\mathfrak{h}$. Denota-se por $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ o centralizador de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$. Tem-se que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ age em $\mathfrak{g}^*$ pela ação adjunta que, para $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, é denotada por $\varphi^*\alpha(X) = \alpha(\varphi^{-1}X)$.

Seja G um grupo de Lie semi-simples, isto é, G é um grupo de Lie conexo com centro finito e com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ semi-simples. A representação adjunta do grupo de Lie é dada por $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{d}(C_g)_1$, onde C_g é o automorfismo de G dado pela conjugação $x \in G \mapsto gxg^{-1}$. Sejam $\exp : \mathfrak{g} \to G$ a aplicação exponencial do grupo de Lie G, $e : \mathrm{gl}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$ a aplicação exponencial do grupo de Lie linear $\mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$. Para $X \in \mathfrak{g}$ e para $g \in G$ tem-se que

$$\mathrm{Ad}(\exp(X)) = e^{\mathrm{ad}(X)}, \qquad g\exp(X)g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)X). \tag{A.11}$$

Tem-se que $\mathrm{Ad}(G) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Tem-se que G age em $\mathfrak{g}$ pela ação adjunta, que, para $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$, é denotada por $gX = \mathrm{Ad}(g)X$.

A.3.1 Decomposições de Cartan e de Iwasawa

Uma involução de Cartan de $\mathfrak{g}$ é dada por um automorfismo θ de $\mathfrak{g}$ que satisfaz $\theta^2 = 1$ e tal que a forma bilinear de $\mathfrak{g}$ dada por

$$B_\theta(X, Y) = \langle X, \theta Y \rangle \tag{A.12}$$

é positiva-definida em $\mathfrak{g}$. Tem-se que existe uma única involução de Cartan em $\mathfrak{g}$ a menos de conjugação por $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Fixada uma involução de Cartan θ tem-se que $\mathfrak{g}$ se decompõe como $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, onde $\mathfrak{k}$ é o autoespaço de θ do autovalor $+1$ e $\mathfrak{s}$ é o autoespaço de θ do autovalor -1, essa é a decomposição de Cartan da álgebra $\mathfrak{g}$ com respeito a θ. Tem-se que $\mathfrak{k}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ e que o subespaço $\mathfrak{s}$ satisfaz $[\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$ e $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{k}$. Além disso, para $X \in \mathfrak{k}$ tem-se que $\mathrm{ad}(X)$ é B_θ-antisimétrica e para $Y \in \mathfrak{s}$ tem-se que $\mathrm{ad}(Y)$ é B_θ-simétrica. Seja K o subgrupo conexo de G com álgebra de Lie $\mathfrak{k}$. Tem-se que K é subgrupo compacto maximal de G. Além disso tem-se que a aplicação

$$K \times \mathfrak{s} \to G, \quad (k, X) \mapsto k \exp(X), \tag{A.13}$$

é um difeomorfismo de $K \times \mathfrak{s}$ com G, essa é a chamada decomposição de Cartan do grupo G. Sempre que se falar em conceitos métricos em $\mathfrak{g}$ ou em subespaços de $\mathfrak{g}$ deve-se ter em mente o produto interno B_θ.

Um abeliano maximal de $\mathfrak{g}$ com respeito a involução de Cartan θ é dado por uma subálgebra abeliana $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$. Tem-se que existe um único abeliano maximal em $\mathfrak{g}$ a menos de conjugação por $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Uma vez que $\mathfrak{a}$ é abeliano segue que as adjuntas de $H \in \mathfrak{a}$ podem ser simultaneamente diagonalizadas. Para cada funcional $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ define-se

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{a}\}. \tag{A.14}$$

Segue que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ que se decompõe como $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, onde $\mathfrak{m}$ é o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{k}$. Um funcional não-nulo $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ tal que $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ é chamado de raiz de $(\mathfrak{a}, \theta)$, nesse caso

$\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ é chamado do espaço de raízes de $\mathfrak{a}$ correspondente à α. Seja $\Pi = \Pi(\theta, \mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}^*$ o conjunto dessas raízes. Tem-se que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum \{\mathfrak{g}_\alpha : \alpha \in \Pi\}, \tag{A.15}$$

essa é decomposição de $\mathfrak{g}$ em espaços de raízes com respeito a $(\theta, \mathfrak{a})$. Essa decomposição diagonaliza simultaneamente as adjuntas de $\mathfrak{a}$. Tem-se que existe uma única decomposição em espaços de raízes de $\mathfrak{g}$ a menos de conjugação por $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Segue em particular dessa decomposição que o conjunto de raízes Π é finito. Dada uma raiz $\alpha \in \Pi$ o hiperplano da raíz α é o subespaço de codimensão 1 de $\mathfrak{a}$ dado por $\alpha = 0$, isto é, dado por

$$\{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) = \langle H, H_\alpha \rangle = 0\}. \tag{A.16}$$

Uma câmara de Weyl de $(\theta, \mathfrak{a})$ é uma componente conexa a^+ do conjunto

$$\{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) \neq 0 \text{ para todos } \alpha \in \Pi(\theta, \mathfrak{a})\}. \tag{A.17}$$

As raízes positivas com respeito a $\mathfrak{a}^+$ são dadas por $\Pi^+ := \{\alpha \in \Pi : \alpha|_{\mathfrak{a}^+} > 0\}$ e as raízes negativas dadas por $\Pi^- := -\Pi^+$. Existe um subconjunto l.i. $\Sigma \subset \Pi^+$ tais que todas as raízes em Π^+ (resp. Π^-) são combinações de raízes em Σ com coeficientes inteiros positivos (resp. negativos). Σ é o conjunto de raízes simples determinadas por $\mathfrak{a}^+$. Em particular tem-se que $\Pi = \Pi^+ \cup \Pi^-$ união disjunta. Dado um subconjunto de raízes simples $\Theta \subset \Sigma$ denota-se por $\langle\Theta\rangle$ as raízes Π que são combinações lineares de raízes em Θ e denota-se por $\langle\Theta\rangle^+ := \langle\Theta\rangle \cap \Pi^+$. Para $H \in \mathfrak{a}$ denota-se por $\Theta(H)$ o conjunto das raízes simples que anulam H.

O grupo de Weyl das raízes $\Pi = \Pi(\theta, \mathfrak{a})$ é um grupo finito de reflexões de $\mathfrak{a}$ que é dado da seguinte maneira. A cada raíz $\alpha \in \Pi$ corresponde uma coraiz $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ tal que $\alpha(H) = B_\theta(H, H_\alpha)$, para todo $H \in \mathfrak{a}$, e a correspondente reflexão ortogonal $r_\alpha : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ em relação à H_α. O grupo de Weyl $W = W(\theta, \mathfrak{a})$ é o grupo gerado pelas reflexões r_α, $\alpha \in \Pi$. Tem-se que W age transitivamente e livremente no conjunto das câmaras de Weyl de $(\theta, \mathfrak{a})$. Segue daí que W é um grupo finito. Segue daí também que dada uma câmara de Weyl $\mathfrak{a}^+$ e o conjunto de raízes simples correspondentes Σ tem-se que existe um único elemento $w^- \in W$ que satisfaz $(w^-)^*\Sigma = -\Sigma$, esse elemento é chamado involução principal de W com respeito a Σ. Uma maneira de se obter o grupo de Weyl a partir do grupo G é considerar M^* o normalizador em K da subálgebra $\mathfrak{a}$ e M o centralizador em K de $\mathfrak{a}$. Tem-se então que

$$W = \{\mathrm{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}} : k \in M^*\}, \tag{A.18}$$

e que W é isomorfo ao quociente M^*/M. Tem-se que existe um único grupo de Weyl de $(\theta, \mathfrak{a})$ a menos de conjugação por $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$.

A uma escolha de câmara de Weyl $\mathfrak{a}^+$ corresponde a subálgebra nilpotente

$$\mathfrak{n}^+ := \sum\{\mathfrak{g}_\alpha : \alpha \in \Pi^+\}. \tag{A.19}$$

Tem-se que $\mathfrak{a}$ normaliza $\mathfrak{n}^+$ e que $\mathfrak{g}$ se decompõe como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+, \tag{A.20}$$

essa é a decomposição de Iwasawa da álgebra $\mathfrak{g}$ com respeito a $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$. Tem-se que existe uma única decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{g}$ a menos de conjugação por $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Sejam A e N os subgrupos conexos de G com álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{n}^+$ respectivamente. Tem-se que A normaliza N, que A, N e AN são subgrupos fechados de G e que $\exp : \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \to AN$ é um difeomorfismo. Além disso

$$K \times A \times N \to G, \quad (k, h, n) \mapsto khn, \tag{A.21}$$

é um difeomorfismo de $K \times A \times N$ com G, essa é a chamada decomposição de Iwasawa do grupo G. Tem-se que existe uma única decomposição de Iwasawa de G a menos de conjugação.

A.3.2 Subgrupos parabólicos, flags e centralizadores

Fixa-se $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ e Σ o conjunto de raízes simples correspondente à $\mathfrak{a}^+$. A um subconjunto $\Theta \subset \Sigma$ correspondem as subálgebras nilpotentes dadas por

$$\mathfrak{n}^+(\Theta) := \sum\{\mathfrak{g}_\alpha : \alpha \in \langle\Theta\rangle^+\}, \tag{A.22}$$

$$\mathfrak{n}^-(\Theta) := \sum\{\mathfrak{g}_{-\alpha} : \alpha \in \langle\Theta\rangle^+\}. \tag{A.23}$$

A subálgebra parabólica minimal é dada por

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+, \tag{A.24}$$

e subálgebra parabólica de tipo Θ é dada por

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta). \tag{A.25}$$

Em particular tem-se $\mathfrak{p}_\varnothing = \mathfrak{p}$. Para cada $\Theta \subset \Sigma$ existe uma única subálgebra parabólica de tipo Θ a menos de conjugação por $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Seja $\mathfrak{a}(\Theta)$ o abeliano gerado pelas coraízes H_α, $\alpha \in \Theta$. Seja $\mathfrak{a}_\Theta$ o complemento ortogonal de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em $\mathfrak{a}$. Seja $\mathfrak{k}_\Theta$ o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em $\mathfrak{k}$. Tem-se que

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \tag{A.26}$$

essa é a decomposição de Iwasawa da subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_\Theta$. O subgrupo parabólico de G de tipo Θ, denotado por P_Θ, é o normalizador em G da subálgebra $\mathfrak{p}_\Theta$. Seja K_Θ o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em K. Tem-se que a decomposição de Iwasawa de P_Θ é dada por

$$P_\Theta = K_\Theta AN. \tag{A.27}$$

Além disso, P_Θ é seu próprio normalizador em G e álgebra de Lie de P_Θ é $\mathfrak{p}_\Theta$. Denota-se $P_\varnothing =: P$, esse é o subgrupo parabólico minimal de G. Tem-se que $K_\varnothing = M$, o normalizador de $\mathfrak{a}$ em K. Segue daí que a decomposição de Iwasawa do parabólico minimal é dada por

$$P = MAN. \tag{A.28}$$

Por último vale observar que K_Θ, logo P_Θ, pode ser desconexo e que a estrutura de componentes conexas de K_Θ é dada por

$$K_\Theta = (K_\Theta)_0 M. \tag{A.29}$$

A variedade flag de $\mathfrak{g}$ de tipo $\Theta \subset \Sigma$ é dada pela órbita

$$\mathbb{F}_\Theta := \mathrm{Int}(\mathfrak{g})\mathfrak{p}_\Theta \tag{A.30}$$

Uma vez que $\mathrm{Ad}(G) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ e que o normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ em G é P_Θ segue que a aplicação $g \in G \mapsto g\mathfrak{p}_\Theta$ fornece um difeomorfismo G-equivariante entre o espaço homogêneo G/P_Θ e $\mathbb{F}_\Theta$. Em particular isso mostra que o espaço G-homogêneo G/P_Θ depende apenas da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Denota-se $\mathbb{F}_\varnothing =: \mathbb{F}$, esse é o chamado flag maximal de $\mathfrak{g}$. O flag $\mathbb{F}_\Theta$ também é chamado de flag parcial de $\mathfrak{g}$ de tipo Θ. Tem-se a seguinte fibração G-equivariante entre o flag maximal $\mathbb{F}$ e o flag parcial $\mathbb{F}_\Theta$ de tipo Θ

$$\pi_\Theta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\Theta, \qquad \pi_\Theta(g\mathfrak{p}) = g\mathfrak{p}_\Theta, \quad (g \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})). \tag{A.31}$$

Para $X \in \mathfrak{g}$ denota-se por $Z(X)$ o centralizador de X em G. Seja $N(\Theta)$ o subgrupo conexo de G com álgebra de Lie $\mathfrak{n}^+(\Theta)$. Tem-se que para $H \in \mathfrak{a}$ o centralizador $Z(H)$ tem decomposição de Iwasawa

$$Z(H) = K_{\Theta(H)} A N(\Theta(H)). \tag{A.32}$$

A.3.3 Rotulação por câmaras e objetos canônicos

Nessa seção são usados resultados da Seção 3.1 de [17]. Uma câmara de G é dada por $\lambda := \exp(\mathfrak{a}^+)$ onde a câmara de Weyl $\mathfrak{a}^+$ vem de uma escolha de involução de cartan θ, de um abeliano maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ e de uma câmara $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$. Denota-se por $\mathcal{C}(G)$ o conjunto das câmaras de G. Tem-se então que G age transitivamente em suas câmaras.

Os objetos de $\mathfrak{g}$ e de G construídos nas seções anteriores dependem da escolha de $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$. Mas ocorre que, a posteriori, a maioria desses objetos depende apenas da escolha de câmara $\mathfrak{a}^+$ ou, equivalentemente, da câmara $\lambda \in \mathcal{C}(G)$ (cf. Lema 3.1 p.46 de [17]). A dependência desses objetos na câmara λ aparece na notação por meio da justaposição do símbolo (λ) à sua notação usual. Desse modo os objetos que dependem apenas de câmaras são: as raízes $\Pi(\lambda)$, as raízes positivas $\Pi^+(\lambda)$ e negativas $\Pi^-(\lambda)$, as raízes simples $\Sigma(\lambda)$, o subgrupo parabólico $P(\lambda)$ e os fatores de sua decomposição de Iwasawa $M(\lambda)$, $A(\lambda)$, $N(\lambda)$, a subálgebra parabólica $\mathfrak{p}(\lambda)$ e os fatores de sua decomposição de Iwasawa $\mathfrak{m}(\lambda)$, $\mathfrak{a}(\lambda)$, $\mathfrak{n}(\lambda)$, o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle(\lambda)$ de $\mathfrak{a}(\lambda)$, o grupo de Weyl $W(\lambda)$ de $\mathfrak{a}(\lambda)$. O grupo G age nas câmaras $\mathcal{C}(G)$ por conjugação de modo que esses objetos se comportam da seguinte maneira na conjugação: $P(g\lambda g^{-1}) = gP(\lambda)g^{-1}$, $\mathfrak{p}(g\lambda g^{-1}) = g\mathfrak{p}(\lambda)$, $\Pi(g\lambda g^{-1}) = \mathrm{Ad}(g)^*\Pi(\lambda)$, $W(g\lambda g^{-1}) = \mathrm{Ad}(g)W(\lambda)\mathrm{Ad}(g)^{-1}$, etc.

Usando-se essa dependência nas câmaras pode-se introduzir uma subálgebra abeliana abstrata $\mathfrak{a}$ tal que, para cada câmara $\lambda \in \mathcal{C}(G)$ tem-se um isomorfismo $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}(\lambda)$ denotado por (Proposição 3.3 p.48 de [17])

$$H \in \mathfrak{a} \mapsto H(\lambda) \in \mathfrak{a}(\lambda). \tag{A.33}$$

Essa subálgebra $\mathfrak{a}$ é chamada de subálgebra abeliana maximal canônica de $\mathfrak{g}$. Procedendo da mesma maneira introduzem-se os seguintes objetos canônicos de $\mathfrak{g}$ e G: um produto interno canônico $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathfrak{a}$, um sistema de raízes canônico Π, raízes positivas Π^+ e negativas Π^- canônicas, raízes simples canônicas Σ, o grupo de Weyl canônico W e um subgrupo abeliano maximal canônico A (Proposições 3.2, 3.3 e Teorema 3.4 de [17]). A característica comum desses objetos canônicos $\mathcal{O}$ é que para cada câmara $\lambda \in \mathcal{C}(G)$ tem-se um isomorfismo $\mathcal{O} \to \mathcal{O}(\lambda)$ denotado por

$$o \in \mathcal{O} \mapsto o(\lambda) \in \mathcal{O}(\lambda). \tag{A.34}$$

A importância desses objetos canônicos é que eles podem ser usados para rotular objetos de $\mathfrak{g}$ sem que se precise fixar de antemão uma escolha $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$. O grupo de Weyl canônico W age nas câmaras $\mathcal{C}(G)$ à direita da seguinte maneira. Cada $w \in W$, $\lambda \in \mathcal{C}(G)$ define-se

$$\lambda^w := w(\lambda)\lambda w(\lambda)^{-1}, \tag{A.35}$$

uma vez que $w(\lambda)$ age por conjugação em $A(\lambda)$ e $\lambda \subset A(\lambda)$ segue que isso está bem definido. Para w, $s \in W$ tem-se que

$$\begin{aligned}
(\lambda^w)^s &= \\
&= s(\lambda^w)(\lambda^w)s(\lambda^w)^{-1} \\
&= \{s(w(\lambda)\lambda w(\lambda)^{-1})\}\{w(\lambda)\lambda w(\lambda)^{-1}\}\{s(w(\lambda)\lambda w(\lambda)^{-1}))^{-1}\} \\
&= w(\lambda)s(\lambda)\lambda s(\lambda)^{-1}w(\lambda)^{-1} \\
&= ws(\lambda)\lambda ws(\lambda)^{-1} \\
&= \lambda^{ws}.
\end{aligned}$$

Isso que mostra que a ação (A.35) de W em $\mathcal{C}(G)$ é uma ação à direita. Além disso para $w \in W$ e $g \in G$ tem-se que

$$\begin{aligned}(g\lambda g^{-1})^w &= \\ &= w(g\lambda g^{-1})g\lambda g^{-1}w(g\lambda g^{-1})^{-1} = \\ &= [gw(\lambda)g^{-1}]g\lambda g^{-1}[gw(\lambda)^{-1}g^{-1}] = \\ &= gw(\lambda)\lambda w(\lambda)^{-1}g^{-1} = \\ &= g(\lambda^w)g^{-1}.\end{aligned}$$

Isso que mostra que a ação a esquerda de G e a ação à direita de W em $\mathcal{C}(G)$ comutam. Seja uma câmara $\lambda \in \mathcal{C}(G)$. Se $\Theta \subset \Sigma$, denota-se por $\Theta(\lambda) \subset \Sigma(\lambda)$ a imagem de Θ pelo isomorfismo $\Sigma \to \Sigma(\lambda)$ dado em (A.34). Define-se

$$\mathfrak{p}(\lambda)_\Theta := \mathfrak{p}(\lambda)_{\Theta(\lambda)}. \tag{A.36}$$

Para $w \in W$ define-se

$$\mathfrak{p}_w(\lambda)_\Theta := \mathfrak{p}(\lambda^w)_\Theta. \tag{A.37}$$

Tem-se então do visto acima que

$$\mathfrak{p}_w(g\lambda g^{-1})_\Theta = \mathfrak{p}(g\lambda^w g^{-1})_\Theta = g\mathfrak{p}(\lambda^w)_\Theta = g\mathfrak{p}_w(\lambda)_\Theta. \tag{A.38}$$

Sejam $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathcal{C}(G)$ tais que

$$\mathfrak{p}(\lambda_0) = \mathfrak{p}(\lambda_1). \tag{A.39}$$

Uma vez que G age transitivamente em suas câmaras segue que $\lambda_0 = g\lambda_1 g^{-1}$ para algum $g \in G$. Assim $\mathfrak{p}(\lambda_0) = g\mathfrak{p}(\lambda_1) = g\mathfrak{p}(\lambda_0)$, de onde segue que $g \in P(\lambda_0)$. Seja $g = mhn \in MAN(\lambda_0)$ a decomposição de Iwasawa (A.28) de g. Uma vez que $MA(\lambda_0)$ normaliza λ_0 segue que

$$\lambda_1 = g^{-1}\lambda_0 g = n^{-1}\lambda_0 n, \quad N(\lambda_1) = n^{-1}N(\lambda_0)n = N(\lambda_0), \tag{A.40}$$

onde $n \in N(\lambda_0)$.

A.3.4 A carta local de $\mathbb{F}_\Theta$

Nessa seção introduz-se uma carta local do flag $\mathbb{F}_\Theta$ de G, $\Theta \subset \Sigma$, que possui certas propriedades especiais. Fixa-se uma decomposição de Iwasawa $G = K(AN(\lambda_0))$ de G, onde λ_0 é uma câmara de G. Fixa-se o ponto base

$$b_0 := \mathfrak{p}(\lambda_0)_\Theta \in \mathbb{F}_\Theta. \tag{A.41}$$

À partir de agora, a câmara λ_0 está subentendida quando se faça referência a algum objeto de G que depende de câmaras. Define-se a subálgebra nilpotente

$$\mathfrak{n}_\Theta^- := \sum\{g_{-\alpha} :\ \alpha \in \Pi^+ - \langle\Theta\rangle\}. \tag{A.42}$$

Desse modo $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^-$. A carta canônica de G/P_Θ em P_Θ é dada por (cf. Teorema II.4.3, Cap. II p.123 de [12])

$$\widetilde{Y} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{p}_\Theta \mapsto \exp(Y)P_\Theta, \quad Y \in \mathfrak{g}, \tag{A.43}$$

onde $\widetilde{Y}$ denota a imagem de $Y \in \mathfrak{g}$ no quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_\Theta$, e onde $\exp(\cdot)$ é a aplicação exponencial de G. O difeomorfismo canônico entre G/P_Θ e $\mathbb{F}_\Theta$ é dado por $gP_\Theta \mapsto gb_0$, $g \in G$. Pelas considerações anteriores pode-se identificar o espaço vetorial quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_\Theta$ com $\mathfrak{n}_\Theta^-$. Define-se então a *carta canônica* de $\mathbb{F}_\Theta$ em $b_0 = \mathfrak{p}(\lambda_0)_\Theta$ por

$$\varphi_\Theta : \mathfrak{n}_\Theta^- \to \mathbb{F}_\Theta, \quad Y \mapsto \exp(Y)b_0. \tag{A.44}$$

Pelas considerações anteriores isso de fato define uma carta local de $\mathbb{F}_\Theta$. Usando-se o difeomorfismo φ_Θ, identifica-se o espaço tangente de $\mathbb{F}_\Theta$ no ponto base b_0 com $\mathfrak{n}_\Theta^-$, de modo que

$$T(\mathbb{F})_{b_0} = \mathfrak{n}_\Theta^-, \quad (\mathrm{d}\varphi_\Theta)_0 : \mathfrak{n}_\Theta^- \to \mathfrak{n}_\Theta^-, \quad (\mathrm{d}\varphi_\Theta)_0 = \mathrm{id}. \tag{A.45}$$

No espaço tangente em b_0, fixa-se o produto interno $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante dado pela restrição da métrica B_θ de $\mathfrak{g}$ dada em (A.12). Como K age transitivamente em $\mathbb{F}_\Theta$ essa métrica em $T(\mathbb{F}_\Theta)_{b_0}$ dá origem à uma métrica K-invariante em $T(\mathbb{F}_\Theta)$ que será denotada por

$$B_\theta(\cdot,\cdot)_b, \quad b \in \mathbb{F}_\Theta. \tag{A.46}$$

Fixa-se $H_\Theta \in \mathfrak{a}$ tal que $\Theta(H_\Theta) = \Theta$. Considera-se o centralizador $Z(H_\Theta(\lambda_0))$ de $H_\Theta(\lambda_0) \in \mathfrak{a}(\lambda_0)$ em G, que possui decomposição de Iwasawa dada em (A.32). Tem-se que $Z(H_\Theta(\lambda_0))$ normaliza $\mathfrak{n}_\Theta^-$ e que $N(\Theta)$ centraliza $\mathfrak{n}_\Theta^-$.

Proposição A.7 *Seja $g \in Z(H_\Theta(\lambda_0))$ agindo como difeomorfismo em $\mathbb{F}_\Theta$. Tem-se que*

$$(dg)_{b_0} = \mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{n}_\Theta^- \to \mathfrak{n}_\Theta^-. \tag{A.47}$$

Se g tem decomposição de Iwasawa $g = uhn$ com $u \in K_\Theta$, $h \in A(\lambda_0)$, $n \in N(\Theta)(\lambda_0)$ então

$$(dg)_{b_0} = (\mathrm{d}u)_{b_0} \circ (\mathrm{d}h)_{b_0} \circ (\mathrm{d}n)_{b_0}, \tag{A.48}$$

onde $(\mathrm{d}u)_{b_0} = \mathrm{Ad}(u)|_{\mathfrak{n}_\Theta^-}$ é B_Θ-isometria, $(\mathrm{d}h)_{b_0} = \mathrm{Ad}(h)|_{\mathfrak{n}_\Theta^-}$ é B_Θ-simétrica e $(\mathrm{d}n)_{b_0} = \mathrm{id}_{\mathfrak{n}_\Theta^-}$.

Demonstração: Para a primeira equação tem-se que $g \in Z(H_\Theta(\lambda_0)) \subset P_\Theta(\lambda_0)$ fixa b_0 de modo que para $Y \in \mathfrak{n}_\Theta^-$ vale

$$g\varphi_\Theta(Y) = g\exp(Y)g^{-1}b_0 = \exp(\mathrm{Ad}(g)Y)b_0 = \varphi_\Theta(\mathrm{Ad}(g)Y). \tag{A.49}$$

Derivando em $Y = 0$ e usando-se a identificação (A.45), obtém-se a primeira equação.

Para a segunda equação, usa-se que cada um dos fatores u, h e n fixam b_0. As afirmações logo após a segunda equação são imediatas das propriedades da decomposição de Iwasawa de $Z(H_\Theta(\lambda_0))$ em (A.32). ∎

A carta local φ_Θ possui mais propriedades especiais que não são enunciadas pois não serão usadas nessa tese (cf. Propos 3.6, p.326 de [8]).

Apêndice B

Tipo parabólico de semigrupos e semifluxos

Neste apêndice recapitulam-se algumas definições e resultados da teoria do tipo parabólico de semigrupos e semifluxos com a preocupação de dar apenas um panorama geral da teoria e enunciar com precisão os resultados que são usados nessa tese. Muito dessa teoria encontra-se espalhada na literatura ([17, 19, 20, 1, 25] e referências aí contidas) mas está sistematizada na tese [17] a qual usamos para referências.

Nesse apêndice são usados livremente as notações e resultados de Teoria de Lie semi-simples do Apêndice A.3. Seja S um semigrupo local agindo num espaço E (Definição B.1), para se estudar a dinâmica dessa ação é interessante saber em que partes de E o semigrupo S age transitivamente e como S vai de uma parte transitiva à outra. Os conjuntos de controle de S em E (Definição B.3) capturam a transitividade topologicamente interessante da ação de S em E. No caso em que S é um semigrupo aberto de um grupo de Lie semi-simples G existe uma descrição algébrica completa dos conjuntos de controle de S em $\mathbb{F}_\Theta$ que fornece a noção de *tipo parabólico do semigrupo* S (Teorema B.8). Essa descrição algébrica se estende ao caso em que S é um semigrupo local de endomorfismos de um fibrado principal localmente trivial Q com grupo estrutural semi-simples G agindo em seus fibrados flag associados $E = \mathbb{F}_\Theta Q$ (Teorema B.12). Por meio da teoria de semigrupos de sombreamento esses resultados de teoria de semigrupos podem ser aplicados para se obter uma descrição algébrica completa das componentes transitivas por cadeia de um semifluxo de endomorfismos de um fibrado flag, o que fornece a noção de *tipo parabólico desse semifluxo* (Teorema B.14).

B.1 Conjuntos de controle em espaços topológicos

Aqui coletam-se definições e resultados da seção 2.1 de [17].

Definição B.1 *Um semigrupo local S agindo num espaço topológico E é uma família de aplicações contínuas $\varphi : \mathrm{dom}\varphi \to X$, com $\mathrm{dom}\varphi \subset X$ aberto, tal que se $\varphi, \psi \in S$ e $\psi^{-1}(\mathrm{dom}\varphi) \neq \varnothing$ então a composição*

$$\varphi \circ \psi : \psi^{-1}(\mathrm{dom}\varphi) \to X \tag{B.1}$$

também pertence à S. O semigrupo local S age em X por avaliação de aplicações.

Seja S um semigrupo local agindo num espaço E. A *órbita (progressiva) de $x \in E$ por S* é definida por

$$Sx := \bigcup_{\varphi \in S} \varphi(x), \tag{B.2}$$

a *órbita regressiva de $x \in E$ por S* é definida por

$$S^*x := \bigcup_{\varphi \in S} \varphi^{-1}(x) = \{y \in E : x \in Sy\}. \tag{B.3}$$

Segue daí que se T é outro semigrupo local de E tal que $Sx = Tx$ para todo $x \in E$ então automaticamente tem-se que $S^*x = T^*x$ para todo $x \in E$.

Deseja-se estudar noções de transitividade da ação de S em E. Para tal define-se para $x, y \in E$ a relação de ordem dada por

$$x \leq y \text{ se } y \in Sx \text{ ou, equivalentemente se } x \in S^*y, \tag{B.4}$$

é imediato que essa relação é transitiva uma vez que S é um semigrupo. Com ela define-se a relação de *transitividade (estrita)* dada por

$$x \sim y \text{ se } x \leq y \text{ e } y \leq x, \tag{B.5}$$

é imediato que essa última relação é simétrica e transitiva mas não é necessariamente reflexiva. Denota-se a *classe de transitividade (estrita) de* $x \in E$ por

$$[x] := \{y \in E : \, y \sim x\}, \tag{B.6}$$

é imediato que $[x] \neq \varnothing$ se, e somente se $x \sim x$ e que $[x] = Sx \cap S^* x$.

Para se levar em conta a topologia de E nas noções de transitividade de S em E usa-se a topologia das órbitas de S em E. Define-se a relação de *ordem fraca* por

$$x \leq_w y \text{ se } y \in \mathrm{cl}(Sx), \tag{B.7}$$

em outras palavras, se toda vizinhança U de y contém $y' \in U$ tal que $x \leq y'$. Analogamente ao parágrafo anterior essa relação dá origem à relação de *transitividade fraca* $\sim_w$ e à *classes de transitividade fraca* $[x]_w$. Define-se também a relação de *ordem forte* por

$$x \leq_s y \text{ se } x \in \mathrm{int}(S^* y), \tag{B.8}$$

em outras palavras, se x tem uma vizinhança V tal que todo $x' \in V$ satisfaz $x' \leq y$. Mais uma vez, essa relação dá origem à relação de *transitividade forte* $\sim_s$ e à *classes de transitividade forte* $[x]_s$. É imediato que

$$[x]_s \subset [x] \subset [x]_w, \tag{B.9}$$

onde a inclusão pode ser estrita e algumas ou todas classes podem ser vazias.

Proposição B.2 *As relações* $\leq_w$ *e* $\leq_s$ *são transitivas.*

Dentre essas classes de transitividade se dá atenção especial ao seguinte tipo.

Definição B.3 *Diz-se que* $x \in E$ *é* auto-acessível *se* $[x]_s \neq \varnothing$. *Um* conjunto de controle *de* S *em* E *é uma classe fraca* $D = [x]_w$ *de um ponto* x *auto-acessível. O* conjunto de transitividade D_0 *do conjunto de controle* D *é a classe forte* $D_0 = [x]_s$.

Assim cada dois pontos de D são fracamente transitivos e além disso tem-se o seguinte.

Proposição B.4 *Seja D um conjunto de controle.*

i) se $x \in D_0$ e $y \in D$ então $x \leq_s y$.

ii) para todo $y \in D$ auto-acessível tem-se que $D = [y]_w$.

iii) se $x \in D_0$ então $D_0 = [x]$.

iv) D_0 é denso em D.

Define-se uma ordem parcial entre os conjuntos de controle de S em E da seguinte maneira

$$D \preceq D' \text{ se existem } x \in D_0,\ x' \in D_0' \text{ tais que } x \leq x', \tag{B.10}$$

do item (iii) da última Proposição é imediato que isso ocorre se, e somente se $y \leq y'$ para todos $y \in D_0$, $y' \in D_0'$.

Definição B.5 *Um conjunto de controle D é* invariante *se $SD \subset D$, é* regressivamente invariante *se $S^*D \subset D$.*

Pelo item (ii) da última Proposição segue que, sob a ordem dos conjuntos de controle definida acima, os conjuntos invariantes são os elementos maximais e os conjuntos regressivamente invariantes são os elementos minimais, por isso um conjunto de controle invariante também é chamado de *conjunto de controle maximal* e um regressivamente invariante de *minimal*.

Merecem atenção especial ações de semigrupos cujas órbitas são abertas.

Definição B.6 *O semigrupo S é* progressivamente acessível *em E se $\text{int}(Sx) \neq \varnothing$ para todos $x \in E$, é* regressivamente acessível *em E se $\text{int}(S^*x) \neq \varnothing$ para todos $x \in E$. S é dito* acessível *em E se ele é ambos progressivamente e regressivamente acessível em E.*

A idéia geral é que os conjuntos de controle de S em E contém a transitividade topologicamente interessante da ação de S, que essa ação morre nos conjuntos de controle invariantes e nasce nos conjuntos de controle regressivamente invariantes. (Vale notar que na literatura os conjuntos de controle definidos acima também são conhecidos como conjuntos de controle *efetivo*.)

B.2 Conjuntos de controle em flags

Seja S um semigrupo aberto de um grupo de Lie redutível G agindo nos flags $\mathbb{F}_\Theta$ de G, $\Theta \subset \Sigma$. Nesse caso existe uma descrição algébrica completa dos conjuntos de controle de S em $\mathbb{F}_\Theta$ que fornece a noção de *tipo parabólico do semigrupo S*. Essa descrição foi reproduzida ao longo do capítulo 3 de [17] e seus resultados principais são coletados no Teorema a seguir, para enunciá-lo consideram-se os os seguintes objetos de G.

Definição B.7 *As chamadas* câmaras de S *são denotadas por*

$$\mathcal{C}(S) := \{\lambda : \lambda \text{ é uma câmara de } G \text{ tal que } \lambda \cap S \neq \varnothing \}. \tag{B.11}$$

Seja $w \in W$, o chamado conjunto dos pontos fixos de tipo w de S em $\mathbb{F}$ *é o conjunto*

$$\mathrm{fix}_w(S) := \{\mathfrak{p}_w(\lambda) : \lambda \in \mathcal{C}(S)\}. \tag{B.12}$$

Teorema B.8 *Os conjuntos de controle de S no flag maximal $\mathbb{F}$ são dados por conjuntos $\mathbb{A}(w)$, $w \in W$, cujos conjuntos de transitividade são dados por*

$$\mathbb{A}_\Theta(w)_0 = \mathrm{fix}_w(S). \tag{B.13}$$

Tem-se que

1. *O único conjunto de controle maximal é $\mathbb{A}(1)$ e o único minimal é $\mathbb{A}(w^-)$.*

2. *Definindo-se*
$$W(S) := \{w \in W : \mathbb{A}(w) = \mathbb{A}(1)\}, \tag{B.14}$$
tem-se que $W(S)$ é subgrupo parabólico de W de tipo $\Theta(S) \subset \Sigma$.

3. *A rotulação dos conjuntos de controle é tal que* $\mathbb{A}(w) = \mathbb{A}(w')$ *se, e somente se* $W(S)w = W(S)w'$, *além disso a ordem dinâmica dos conjuntos de controle* $\mathbb{A}(w)$ *é a ordem reversa da ordem de Bruhat-Chevalley nas classes laterais* $W(S)\backslash W$.

4. *No flag parcial* $\mathbb{F}_\Theta$ *os conjuntos de controle são dados por conjuntos* $\mathbb{A}_\Theta(w)$, $w \in W$, *cujos conjuntos de transitividade são tais que* $\mathbb{A}_\Theta(w)_0 = \pi_\Theta(\mathbb{A}(w)_0)$, *o único maximal é* $\mathbb{A}_\Theta^+ := \mathbb{A}_\Theta(1)$ *e o único minimal é* $\mathbb{A}_\Theta^- := \mathcal{M}_\Theta(w^-)$, *além disso a rotulação desses conjuntos de controle é tal que* $\mathbb{A}_\Theta(w) = \mathbb{A}_\Theta(w')$ *se, e somente se* $W(S)wW(\Theta) = W(S)w'W(\Theta)$.

Vê-se do Teorema acima que as raízes $\Theta(S)$ codificam toda a informação dinâmica dos conjuntos de controle de S nos flags de G.

Definição B.9 *O* tipo parabólico *do semigrupo* $S \subset G$ *é o conjunto de raízes* $\Theta(S)$ *dado no item (ii) do Teorema anterior. Por um abuso de notação também se chama de tipo parabólico de* S *o subgrupo parabólico* $W(S) = W_{\Theta(S)}$ *dado nesse mesmo item do Teorema anterior.*

Na obtenção desse Teorema em [17] obtém-se vários resultados intermediários que também são de uso independente, a seguir enuncia-se desses resultados intermediários os que são usados na presente tese (os resultados originais são de [25], mas aqui são dadas as referências de onde encontrá-los em [17])

Proposição B.10 *(Lema 3.19 p.59 de [17]) Seja* $g \in S \cap P(\lambda)$ *com decomposição de Iwasawa* $g = mhn \in MAN(\lambda)$, *onde* λ *é uma câmara de* G. *Então existe* $k \in \mathbb{N}$ *e* $\widetilde{n} \in N(\lambda)$ *tais que* $h^k\widetilde{n} \in S$.

Proposição B.11 *(Lema 3.31 p.67 de [17]) Dada uma câmara* λ *de* G *define-se o cone*

$$\Lambda_N(\lambda) := \{H \in \mathfrak{a} : \textit{ existem } t > 0 \textit{ e } n \in N(\lambda) \textit{ tais que } \exp(tH(\lambda)n) \in S\}. \tag{B.15}$$

Se λ *é uma câmara de* S *então existe* $H \in \mathfrak{a}$ *tal que* $H \in \Lambda_N(\lambda)$ *e* $\Theta(H) = \Theta(S)$, *tal* H *é dito* característico para S com respeito a λ.

B.3 Conjuntos de controle em fibrados flag

Seja $S_Q \subset \mathrm{End}_\ell(Q)$ um semigrupo local de endomorfismos de um fibrado principal localmente trivial $\pi : Q \to X$ com grupo estrutural semi-simples G e base paracompacta Hausdorff X. Supõe-se que S_Q é acessível em Q e que sua ação induzida na base X é transitiva. Seja $\mathbb{F}Q$ o fibrado flag de Q de tipo Θ, então S_Q induz em $\mathbb{F}_\Theta Q$ um semigrupo de endomorfismos locais, serão considerados os conjuntos de controle desse semigrupo induzido. A condição de transitividade de S_Q na base permite reduzir o estudo desses conjuntos de controle ao estudo do que ocorre na fibra típica $\mathbb{F}_\Theta$, na qual os conjuntos de controle foram completamente caracterizados na seção anterior. Desse modo se obtém novamente uma descrição algébrica completa dos conjuntos de controle de S_Q em $\mathbb{F}_\Theta Q$ que fornece a noção de *tipo parabólico do semigrupo* S_Q de endomorfismos locais de Q. Essa descrição é reproduzida ao longo capítulo 4 de [17] e seus resultados principais são coletados no Teorema a seguir.

Fixado $q \in Q$ os elementos do semigrupo S_Q que fixam a fibra de q agem nessa fibra do mesmo modo que o seguinte semigrupo do grupo estutural

$$S^q := \{a \in G : \varphi(q) = qa, \, \varphi \in S_Q\}. \tag{B.16}$$

Da acessibilidade de S_Q em Q segue que S^q é um semigrupo aberto de G, denota-se por $\mathbb{A}^q(w)$ o conjunto de controle $\mathbb{A}(w)$ de S^q em $\mathbb{F}$.

Teorema B.12 *Os conjuntos de controle do semigrupo local que S_Q induz no fibrado flag maximal $\mathbb{F}Q$ são dados por conjuntos $\mathbb{D}(w)$, $w \in W$, que se projetam sobre X e cujos conjuntos de transitividade são determinados fibra-a-fibra por*

$$(\mathbb{D}(w)_0)_{\pi(q)} = q \cdot \mathbb{A}^q(w)_0, \quad q \in Q. \tag{B.17}$$

Tem-se que

1. *O único conjunto de controle maximal é $\mathbb{D}(1)$ e o único minimal é $\mathbb{D}(w^-)$.*

2. *Definindo-se*

$$W(S_Q) := \{w \in W : \mathbb{D}(w) = \mathbb{D}(1)\}, \tag{B.18}$$

tem-se que $W(S_Q)$ é subgrupo parabólico de W de tipo $\Theta(S_Q) \subset \Sigma$.

3. *Para todo $q \in Q$ tem-se que $\Theta(S_Q) = \Theta(S^q)$, onde S^q é o semigrupo do grupo estrutural dado em (B.16).*

4. *A rotulação dos conjuntos de controle é tal que $\mathbb{D}(w) = \mathbb{D}(w')$ se, e somente se $W(S_Q)w = W(S_Q)w'$, além disso a ordem dinâmica dos conjuntos de controle $\mathbb{A}(w)$ é a ordem reversa da ordem de Bruhat-Chevalley nas classes laterais $W(S_Q)\backslash W$.*

5. *No fibrado flag parcial $\mathbb{F}_\Theta Q$ os conjuntos de controle são dados por conjuntos $\mathbb{D}_\Theta(w)$, $w \in W$, cujos conjuntos de transitividade são tais que $\mathbb{D}_\Theta(w)_0 = \pi_\Theta(\mathbb{D}(w)_0)$, o único maximal é $\mathbb{D}_\Theta^+ := \mathbb{D}_\Theta(1)$ e o único minimal é $\mathbb{D}_\Theta^- := \mathcal{M}_\Theta(w^-)$, além disso a rotulação desses conjuntos de controle é tal que $\mathbb{D}_\Theta(w) = \mathbb{D}_\Theta(w')$ se, e somente se $W(S_Q)wW(\Theta) = W(S_Q)w'W(\Theta)$.*

Vê-se da Equação (B.17) do Teorema acima como a situação é reduzida à situação da ação do semigrupo S^q de G na fibra típica de modo que as raízes $\Theta(S_Q) = \Theta(S^q)$ codificam toda a informação dinâmica dos conjuntos de controle de S_Q nos fibrados flag de Q.

Definição B.13 *O* tipo parabólico do semigrupo de endomorfismos locais $S_Q \subset \mathrm{End}_\ell(Q)$ *é o conjunto de raízes $\Theta(S_Q)$ dado no item (ii) do Teorema anterior. Por um abuso de notação também se chama de tipo parabólico de S_Q o subgrupo parabólico $W(S_Q) = W_{\Theta(S_Q)}$ dado nesse mesmo item do Teorema anterior.*

B.4 Conjuntos de transitividade de semifluxos em fibrados flag

Seja σ_t um semifluxo de endomorfismos de um fibrado principal localmente trivial $\pi : Q \to X$ com grupo estrutural semi-simples G e base paracompacta Hausdorff X. Supõe-se que σ_t é transitivo por cadeias em X. Tem-se que σ_t induz um semifluxo no fibrado flag $\mathbb{F}_\Theta Q$, serão considerados as componentes transitivas por cadeia desse semifluxo induzido.

No apêndice A.1 são introduzidas as noções de teoria de Conley para semifluxos em espaços topológicos. Na seção 2.1 do capítulo 2 a teoria de semigrupos de sombreamento é descrita com detalhes para o caso semifluxos em fibrados topológicos. No Teorema 2.13 daquele capítulo é mostrada que todas as hipóteses gerais dessa teoria, logo todos os resultados, valem no caso de fibrados flag. A condição (A) da seção 2.1 e a transitividade por cadeias do semifluxo na base X fornece a acessibilidade e a transitividade dos semigrupos de sombreamento de σ_t em Q. Com isso se está em condições de aplicar os Teoremas 2.1 e B.12 obtendo-se assim uma uma descrição algébrica completa das componentes transitivas por cadeias de σ_t em $\mathbb{F}_\Theta Q$. Essa descrição fornece a noção de *tipo parabólico do semifluxo* σ_t (conceito introduzido em [1]), ela é obtida com detalhes ao longo capítulo 6 de [17] e seus resultados principais são coletados nos dois Teoremas a seguir . Para cada $(\mathcal{U}, \varepsilon, T)$, onde $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(X)$, $\varepsilon > 0$, $T \in \mathbb{T}$, tem-se o semigrupo de sombreamento $S(Q;\mathcal{U}, \varepsilon, T) \subset \mathrm{End}_\ell(Q)$ de σ_t em Q dado em (2.11). Seus conjuntos de controle em $\mathbb{F}Q$ são denotados por $\mathbb{D}_{\mathcal{U},\varepsilon,T}(w)$, $w \in W$. Para $q \in Q$ o semigrupo dado em (B.16) é denotado por $S^q(Q;\mathcal{U}, \varepsilon, T) \subset G$ e seus conjuntos de controle na fibra típica $\mathbb{F}Q$ são denotados por $\mathbb{A}^q_{\mathcal{U},\varepsilon,T}(w)$, $w \in W$.

Teorema B.14 ([1, 20]) *As componentes transtivas por cadeia do semifluxo σ_t induzido no fibrado flag maximal $\mathbb{F}Q$ são dados por conjuntos $\mathcal{M}(w)$, $w \in W$, onde cada $\mathcal{M}(w)$ é dada por*

$$\mathcal{M}(w) = \bigcap_{\mathcal{U},\varepsilon,T} \mathbb{D}_{\mathcal{U},\varepsilon,T}(w)_0, \tag{B.19}$$

cada $\mathcal{M}(w)$ se projeta sobrejetivamente sobre X e é determinado fibra-a-fibra por

$$(\mathcal{M}(w))_{\pi(q)} = q \cdot \left(\bigcap_{\mathcal{U},\varepsilon,T} \mathbb{A}^q_{\mathcal{U},\varepsilon,T}(w)_0 \right), \quad q \in Q. \tag{B.20}$$

Tem-se que

1. *A única componente maximal é $\mathcal{M}^+ := \mathcal{M}(1)$ e a única minimal é $\mathcal{M}^- := \mathcal{M}(w^-)$.*

2. *Definindo-se*

$$W(\sigma) := \{w \in W : \mathcal{M}(w) = \mathcal{M}(1)\}, \tag{B.21}$$

tem-se que $W(\sigma)$ é subgrupo parabólico de W de tipo $\Theta(\sigma) \subset \Sigma$.

3. *Tem-se que*

$$\Theta(\sigma) = \bigcap_{\mathcal{U},\varepsilon,T} \Theta(S(Q;\mathcal{U},\varepsilon,T)) = \bigcap_{\mathcal{U},\varepsilon,T} \Theta(S^q(Q;\mathcal{U},\varepsilon,T)). \tag{B.22}$$

4. *A rotulação das componentes transitivas é tal que $\mathcal{M}(w) = \mathcal{M}(w')$ se, e somente se $W(\sigma)w = W(\sigma)w'$, além disso a ordem dinâmica das componentes transitivas $\mathbb{A}(w)$ é a ordem reversa da ordem de Bruhat-Chevalley nas classes laterais $W(\sigma)\backslash W$.*

5. *No fibrado flag parcial $\mathbb{F}_\Theta Q$ as componentes transitivas são dadas por $\mathcal{M}_\Theta(w) = \pi_\Theta(\mathcal{M}(w))$, $w \in W$, a única componente maximal é $\mathcal{M}_\Theta^+ := \mathcal{M}_\Theta(1)$ e a única minimal é $\mathcal{M}_\Theta^- := \mathcal{M}_\Theta(w^-)$, além disso a rotulação dessas componentes transitivas é tal que $\mathcal{M}_\Theta(w) = \mathcal{M}_\Theta(w')$ se, e somente se $W(\sigma)wW(\Theta) = W(\sigma)w'W(\Theta)$.*

6. *Se a base X é compacta os conjuntos $\mathcal{M}_\Theta(w)$, $w \in W$, fornecem a decomposição de Morse mais fina do semifluxo σ_t induzido em $\mathbb{F}_\Theta Q$.*

Vê-se do Teorema anterior que as raízes $\Theta(\sigma)$ codificam toda a informação dinâmica dos conjuntos de transitividade por cadeias de σ_t nos fibrados flag de Q.

Definição B.15 *O* tipo parabólico do semifluxo de endomorfismos σ_t *é o conjunto de raízes $\Theta(\sigma)$ dado no item (ii) do Teorema anterior. Por um abuso de notação também se chama de tipo parabólico de σ_t o subgrupo parabólico $W(\sigma) = W_{\Theta(\sigma)}$ dado nesse mesmo item do Teorema anterior.*

Seja um conjunto de raízes $\Theta \subset \Sigma$. O *dual* $\Theta^* \subset \Sigma$ de Θ é dado por $\Theta^* := -(w^-)\Theta$, onde w^- é a involução principal de W com respeito ao sistema simples de raízes Σ. Um elemento $H_\sigma \in \mathfrak{a}$ é dito *característico* para o semifluxo σ_t se $\Theta(H_\sigma) = \Theta(\sigma)$. Os fibrado flags $\mathbb{F}_\Theta Q$ de tipo parabólico $\Theta = \Theta(\sigma)$ e de tipo parabólico dual $\Theta = \Theta^*(\sigma)$ possuem as seguintes importantes propriedades dinâmicas (cf. Teorema 6.11 de [17] e observações que o sucedem).

Teorema B.16 *Supõe-se que a base X de Q é compacta. Seja o tipo parabólico $\Theta(\sigma)$ e tipo parabólico dual $\Theta^*(\sigma)$ de σ_t.*

i) Se a componente maximal $\mathcal{M}^+_{\Theta(\sigma)}$ *é regressivamente invariante, então* $\mathcal{M}^+_{\Theta(\sigma)}$ *intercepta cada fibra de* $\mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}Q$ *em um único ponto. Desse modo existe uma seção global contínua* $\zeta^+ : X \to \mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}Q$ *tal que*

$$\{\zeta^+(x)\} = \left(\mathcal{M}^+_{\Theta(\sigma)}\right)_x, \quad (x \in X). \tag{B.23}$$

ii) O mesmo vale para a componente minimal $\mathcal{M}^-_{\Theta^*(\sigma)}$ *no flag de tipo parabólico dual* $\mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}Q$*, trocando-se no enunciado do item (i) o tipo parabólico pelo seu dual e trocando-se os sobrescritos* $+$ *por* $-$*. Aqui não se necessita a hipótese de invariância regressiva.*

iii) Sejam $f^+ : Q \to \mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}$ *e* $f^- : Q \to \mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}$ *as funções equivariantes correspondentes respectivamente as seções globais contínuas* χ^+ *e* χ^- *dos dois itens anteriores. Seja* G *agindo pela ação diagonal em* $\mathbb{F}_{\Theta(\sigma)} \times \mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}$*, seja o ponto base*

$$o(\lambda_0) := (\mathfrak{p}_{\Theta(\sigma)}(\lambda_0), \, \mathfrak{p}_{\Theta^*(\sigma)}(\lambda_0)), \tag{B.24}$$

onde λ_0 *é uma câmara de* G *e seja a* G*-órbita*

$$\mathbb{O}_{\Theta(\sigma)} := G \cdot o(\lambda_0) \subset \mathbb{F}_{\Theta(\sigma)} \times \mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}. \tag{B.25}$$

Então o normalizador de $o(\lambda_0)$ *em* G *é o centralizador* $Z(H_\sigma(\lambda_0))$ *de* $H_\sigma \in \mathfrak{a}$ *característico para* σ*. Além disso, a função equivariante contínua*

$$f(q) := (f^+(q), f^-(q)) \in \mathbb{F}_{\Theta(\sigma)} \times \mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}, \tag{B.26}$$

toma valores em $\mathbb{O}_{\Theta(\sigma)}$ *e tem seção global correspondente dada por*

$$\chi(x) = (\chi^+(x), \chi^-(x)) \in (\mathbb{O}_{\Theta(\sigma)}Q)_x. \tag{B.27}$$

Observa-se que a hipótese do item (i) que pede que $\mathcal{M}_\Theta(\sigma)^+$ seja regressivamente invariante é satisfeita automaticamente quando σ_t é um fluxo de automorfismos de Q.

Bibliografia

[1] C. J. Braga, L. A. B. San Martin, *Chain transitive sets for flows on flag bundles*, Forum Math. (2007).

[2] E. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary diffential equations*, McGraw-Hill, (1955).

[3] F. Colonius, R. Fabbri, R. A. Johnson *Chain Recurrence, Growth Rates and Ergodic Limits*, Ergodic Theory e Dynamical Systems, (to appear).

[4] F. Colonius, W. Kliemann, *The Morse spectrum of linear flows on vector bundles*, Trans. AMS v.348 no.11, (1996).

[5] F. Colonius, W. Kliemann, *The Dynamics of Control*, Birkhäuser, (2000).

[6] F. Colonius, W. Kliemann, *Morse decomposition and spectra on flag bundles*, J. Dynam. Differential Equations v.14 no.14, (2002).

[7] C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., v.38, American Mathematical Society, (1978).

[8] J. J. Duistermat, J. A. C. Kolk, V. S. Varadarajan *Functions, flows and oscilatory integral on flag manifolds and (...)*, Compositio Math. 49, 309-398, (1983).

[9] O. do Rocio, L. A. B. San Martin, *Connected components of open semigroups em semi-simple Lie groups*, Semigroup Forum, Vol.69, 1-29, (2004).

[10] H. Furstenberg, *Noncommuting random products*, Trans. AMS 108 no.3, 377-428, (1963).

[11] Y. Guivarc'h, L. Ji, J. C. Taylor, *Compactifications of Symmetric Spaces*, Springer, (1998).

[12] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, (1978).

[13] R. A. Johnson, K. J. Palmer, and G. R. Sell *Ergodic properties of linear dynamical systems*, SIAM J. Math. Anal. 18, 1-33, (1987).

[14] A. Katok, B. Hasselblat, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Encyclop. of Math. and its Appl. vol.54, (1995).

[15] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry vol.I*, InterScience Publishers, (1963).

[16] G. S. Osipenko, *Symbolic Image, Hyperbolicity, and Structural Stability*, J. Dynam. Differential Equations v.15 nos. 2/3, (2003).

[17] M. Patrão, *Semifluxos em fibrados flag e seus semigrupos de sombreamento*, Tese de doutorado IMECC/UNICAMP, Orientador: Luiz A. B. San Martin, Abril 2006.

[18] M. Patrão, *Morse decompositions of semiflows on Topological Spaces*, J. Dynam. Differential Equations v.19 no.1, (2007).

[19] M. Patrão, L. A. B. San Martin, *Semiflows on topological Spaces: Chain transitivity e Shadowing Semigroups*, J. Dynam. Differential Equations v.19 no.1, (2007).

[20] M. Patrão, L. A. B. San Martin, *Morse decompositions of semiflows on fiber bundles*, Discrete Contin. Dynam. Systems A, 17(3) (2007).

[21] R. R. Phelps, *Lectures on Choquets Theorem*, Van Nostrand Math. Studies no. 7, (1966).

[22] A. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, 2^a edição, Birkhäuser, (2002).

[23] H. L. Royden, *Real Analysis*, 2^a edição, The Macmillan Co., (1968).

[24] P. R. C. Ruffino, L. A. B. San Martin, *Lyapunov exponents for stochastic differential equations on semi-simple Lie groups*, Arch. Math. (Brno) 37 no. 3, 207-231, (2001).

[25] L. A. B. San Martin, *Invariant control sets on flag manifolds*, Math. Control Signals Systems 6 no. 1, 41-61, (1993).

[26] L. A. B. San Martin, *Álgebras de Lie*, Editora da UNICAMP, (1999).

[27] L. C. Seco Ferreira, L. A. B. San Martin *Vector valued Morse exponents and semiflows in flag bundles*, (em preparação).

[28] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton Univ. Press, (1951).