

Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
Departamento de Matemática.

Funções Simétricas e Combinatória.

Autor: Robson da Silva¹
Mestrado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. José Plínio de O. Santos

Co-orientador: Prof. Dr. Márcio A. F. Rosa

¹Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

FUNÇÕES SIMÉTRICAS E COMBINATÓRIA

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Robson da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 2 de abril de 2007



Prof. Dr. José Plínio de O. Santos
Orientador



Prof. Dr. Márcio Antônio F. Rosa
Co-orientador

Banca examinadora

Prof. Dr. José Plínio de O. Santos
Prof. Dr. Edson Agustini
Prof. Dr. Carlile Campos Lavor

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Silva, Robson da
Si38f Funções simétricas e combinatória / Robson da Silva -- Campinas, [S.P.
:s.n.], 2007.

Orientador : José Plínio de Oliveira Santos; Márcio Antonio de Faria Rosa
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Funções simétricas. 2. Problemas de enumeração combinatória. 3.
Partições (Matemática). I. Santos, José Plínio de Oliveira. II. Rosa, Márcio
Antonio de Faria. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Symmetric functions and combinatorics.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Symmetric functions. 2. Combinatorial enumeration
problems. 3. Partitions (Mathematics).

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Edson Agustini (UFU)
Prof. Dr. Carlile Campos Lavor (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 14/02/2007

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 14 de março de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS



Prof. (a). Dr (a). EDSON AGUSTINI



Prof. (a). Dr (a). CARLILE CAMPOS LAVOR

Agradecimentos

Quero agradecer a todos aqueles que colaboraram para a elaboração deste trabalho. Em particular aos professores José Plínio de O. Santos (com quem tenho a honra de trabalhar desde maio de 2002 em projetos de pesquisa) e Márcio A. F. Rosa (importante parceiro nos estudos). Fica minha gratidão a minha companheira Ana Cláudia da Silva Moreira (dedicada estudante da pós-graduação em Matemática) por estar sempre ao meu lado em todos os momentos desde que iniciei o mestrado e aos meus pais Joel Bezerra da Silva e Marta de Oliveira Silva que, apesar de não terem concluído o ensino fundamental, deram-me todo o apoio possível quando decidi parar de trabalhar e entrar numa universidade pública. Quero agradecer também ao meu colega pós-graduando Rodrigo Silva Lima por toda ajuda com as figuras desta dissertação.

A elaboração desta dissertação não seria possível sem a ajuda inestimável daqueles que, seguindo não apenas seus interesses particulares, dedicaram algum tempo de suas vidas ao combate pela manutenção e ampliação das universidades públicas, gratuitas e de qualidade para todos. Dedico, pois, o presente trabalho a estes.

Resumo

Este trabalho está dividido em duas partes. Na primeira, apresentamos as funções simétricas: o espaço vetorial das funções simétricas sobre os números racionais, algumas bases, um produto escalar e as chamadas funções (simétricas) de Schur. Na segunda parte, exibimos algumas das muitas aplicações desta teoria: no estudo dos caracteres das representações do grupo simétrico; nas partições planas; na enumeração de permutações; na enumeração sob a ação de grupos.

Abstract

This work is divided in two parts. In the first one, we present the symmetric functions: the symmetric functions vector space over the field of the rational numbers, some bases, an inner product and the so called Schur (symmetric) functions. In the second part, we present some of the many applications of this theory: in the study of the characters of the symmetric group's representations; in the plane partitions; in permutation enumeration; in the enumeration under group action.

Introdução

Um polinômio simétrico, algo visto em qualquer curso de Teoria Algébrica dos Números, é, como bem sabemos, um polinômio com a seguinte propriedade: qualquer permutações de suas variáveis não altera o mesmo. Essa é a idéia intuitiva que usamos ao longo do presente trabalho. No entanto, ela é limitada, pois freqüentemente estamos interessados em problemas que envolvem infinitas variáveis. Faz-se necessária, pois, uma definição mais ampla. Por isso, iniciamos apresentando tal definição ao final da Seção 1.2, após justificar por que podemos trabalhar com infinitas variáveis e não nos preocupar se os resultados valem ou não para o caso finito.

Dada a definição do que entendemos por uma função simétrica, passamos ao estudo de alguns conjuntos de tais funções. Ao longo da Seção 1.3 verificamos que esses conjuntos, na verdade, formam bases para o espaço vetorial das funções simétricas sobre o corpo \mathbb{Q} . Ao final desta seção apresentamos matrizes de mudança entre estas bases.

Para fazer todo o estudo do parágrafo anterior, precisamos de algumas informações sobre partições de um inteiro positivo. Na Seção 1.1, fazemos uma abordagem sobre o tema que é superficial porém suficiente aos nossos propósitos.

Ainda na Seção 1.3, apresentamos um produto escalar definido no espaço vetorial das funções simétricas. Veremos também as chamadas *Funções de Schur* que serão de grande utilidade ao longo do Capítulo 2.

Ao final de 1.3, temos uma coleção de funções que não são simétricas (as chamadas *funções quase-simétricas*), embora tenham a aparência de tais funções. Como veremos, essas funções podem tornar-se simétricas se impusermos algumas restrições.

Essencialmente é disto que se ocupa a primeira parte deste trabalho, que chamamos de Capítulo 1. Na segunda parte, Capítulo 2, apresentamos algumas das aplicações das funções simétricas que conseguimos reunir.

Antes de apresentar essas aplicações, definimos o algoritmo RSK (Seção 2.2) usando a teoria desenvolvida na primeira parte (Capítulo 1). A Seção 2.3 traz nossa primeira aplicação, qual seja, o estudo dos caracteres das representações do grupo simétrico S_n .

Em seguida, outras três aplicações são apresentadas, respectivamente, nas Seções 2.4, 2.5 e 2.6. A primeira trata do estudo das partições planas (das quais as partições definidas em 1.1 são um caso particular) via funções simétricas. Depois, aplicamos a teoria estudada para enumerarmos certos tipos de permutações. Por fim, abordamos a Enumeração Sob a Ação de Grupos, ou Teoria de Pólya, por meio das funções simétricas.

É importante observar que a escassez de material sobre as funções simétricas foi um fator limitante na elaboração deste trabalho. A não existência de um texto sobre o assunto no Brasil foi uma motivação a mais para a escolha desse tópico.

Sumário

Agradecimentos	vii
Resumo	ix
Introdução	xi
1 Funções Simétricas	1
1.1 Partição de um Inteiro Não-negativo	2
1.2 A Álgebra das Funções Simétricas	5
1.3 Algumas Bases para Λ	8
1.3.1 Função Simétrica Monomial	8
1.3.2 Função Simétrica Elementar	9
1.3.3 Função Simétrica (Homogênea) Completa	17
1.3.4 Função Simétrica Soma de Potências	22
1.3.5 Produto escalar e ortogonalidade	29
1.3.6 Função de Schur	32
1.3.7 Matrizes de Transição	48
1.3.8 A Regra de Murnaghan-Nakayama	51
1.3.9 Funções Quase-simétricas	57
2 Funções Simétricas em Combinatória	67

2.1	Especializações	68
2.2	O Algoritmo <i>RSK</i>	74
2.3	Os Caracteres do Grupo Simétrico	88
2.4	Partições Planas e Funções Simétricas	95
2.5	Enumeração de Permutações via Funções Simétricas	108
2.6	Funções Simétricas e a Enumeração Sob a Ação de Grupos	117
Referências Bibliográficas		123

Capítulo 1

Funções Simétricas

Antes de introduzir as funções simétricas, suas propriedades e alguns resultados, relembremos um pouco sobre partições. A seção seguinte é uma breve recordação sobre o tema, porém suficiente aos nossos objetivos.

Na Seção 1.2, estudaremos a álgebra das funções simétricas a partir da idéia intuitiva de um polinômio simétrico em finitas variáveis e com coeficientes em \mathbb{Q} . Vamos também justificar por que podemos trabalhar com infinitas variáveis e, depois, apresentar nossa definição de uma função simétrica.

Na última seção deste capítulo, estaremos interessados em encontrar bases para o espaço vetorial das funções simétricas sobre \mathbb{Q} . Ao final, em 1.3.7, temos uma tabela que mostra as matrizes de transição entre algumas destas bases, bem como algumas propriedades das mesmas.

Em 1.3.9, apresentamos um conjunto de funções (que denominamos quase-simétricas) que não são necessariamente simétricas, embora guardem semelhança com aquelas que chamamos simétricas. Veremos que, sob certas condições, algumas podem tornar-se simétricas.

1.1 Partição de um Inteiro Não-negativo

Uma partição λ de um inteiro não-negativo n é uma seqüência $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^k$ tal que $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$ e $\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$. Vamos assumir que as seqüências $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ e $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, 0, \dots)$ representam uma mesma partição λ . Denotaremos por $Par(n)$ o conjunto de todas as partições de n , com $Par(0) = \{(0, 0, \dots)\}$. Além disso, definimos o conjunto Par de todas as partições por $Par = \bigcup_{n \geq 0} Par(n)$.

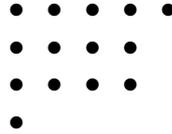
Para simplificar a notação, muitos autores utilizam a representação $(\lambda_1 \cdots \lambda_k)$, ou simplesmente $\lambda_1 \cdots \lambda_k$, para a partição $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{N}^k$ de um inteiro não negativo n . Vejamos alguns exemplos:

$$\begin{aligned} Par(1) &= \{1\} \\ Par(2) &= \{2, 11\} \\ &\vdots \\ Par(5) &= \{5, 41, 32, 311, 221, 2111, 11111\} \end{aligned}$$

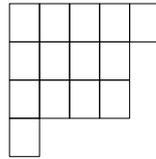
Se $\lambda \in Par(n)$, denota-se $\lambda \vdash n$ ou $|\lambda| = n$. Utilizaremos a notação $\lambda \vdash n$, embora nem todas as referências que consultamos estejam de acordo com nossa escolha. Denotamos $l(\lambda)$ o tamanho (comprimento) de λ , isto é, o número de λ_i não-nulos em λ . Escrevemos $m_i = m_i(\lambda) = |\{j : \lambda_j = i\}|$ para o número de partes de λ iguais a i e, assim, denotamos $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots r^{m_r})$ para dizer que exatamente m_i partes de λ são iguais a i .

Por exemplo, $l(41) = 2$, $m_1(41) = 1$, $m_2(41) = 0$, $m_3(41) = 0$, $m_4(41) = 1$. Assim, $41 = (1^1 2^0 3^0 4^1)$.

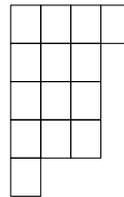
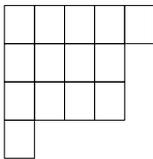
O Diagrama de Ferrers de uma partição λ é formalmente definido como o conjunto de todos os pontos $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ tais que $1 \leq j \leq \lambda_i$. Traçamos tal diagrama de forma análoga à construção de uma matriz: a coordenada i para as linhas e j para as colunas. Por exemplo, o diagrama da partição 5441 do número 14 é:



Usaremos quadrados no lugar dos pontos nos diagramas, essa escolha ficará evidente ao longo do texto. Chamaremos o diagrama assim obtido de *Diagrama de Young da Partição*; sendo assim, para a partição 5441 obtemos o seguinte diagrama:



A partição conjugada $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots)$ de λ é definida pela condição de que seu diagrama é o transposto do diagrama de λ ⁽¹⁾, isto é, o diagrama de λ' é obtido pela reflexão do diagrama de λ em torno de sua diagonal principal, como a transposta de matrizes. Ou, equivalentemente, $m_i(\lambda') = \lambda_i - \lambda_{i+1}$. Notemos que $\lambda'_1 = l(\lambda)$ e $\lambda_1 = l(\lambda')$. É claro que $\lambda'' = \lambda$. Por exemplo, a partição conjugada de (5441) é (43331), pois seus respectivos diagramas são:



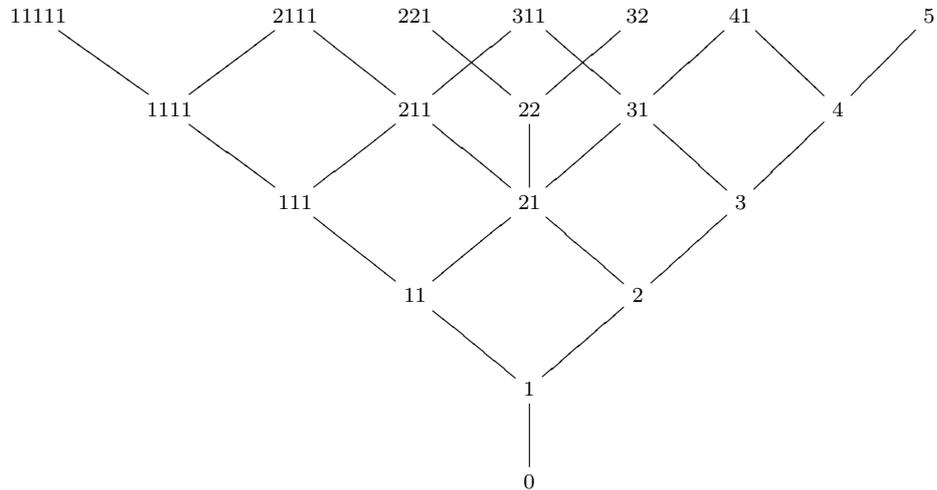
Três relações de ordem parciais no conjunto das partições serão importantes na abordagem sobre funções simétricas que desenvolvemos ao longo desse texto.

¹notemos que a cada partição podemos associar um único diagrama e vice-versa.

Primeiramente definimos a relação de ordem parcial $\mu \subseteq \lambda$ para quaisquer $\mu, \lambda \in Par$ se $\mu_i \leq \lambda_i, \forall i$. Se identificamos as partições com seus diagramas, esta relação de ordem parcial \subseteq é simplesmente verificar se o diagrama de μ está contido no diagrama de λ .

Por exemplo, se $\mu = (1, 1)$ e $\lambda = (2)$, então $\mu \not\subseteq \lambda$, pois $\mu_2 = 1 > 0 = \lambda_2$. Também $\lambda \not\subseteq \mu$, pois $\lambda_1 = 2 > 1 = \mu_1$. Se $\mu = (1, 1)$ e $\lambda = (2, 1)$, então $\mu \subseteq \lambda$, basta observar os diagramas de μ e λ .

O conjunto Par com a ordem parcial \subseteq é chamado *Reticulado de Young*. A figura abaixo mostra os primeiros seis níveis do Reticulado de Young.



Nossa segunda relação de ordem parcial é definida apenas em $Par(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e é chamada *ordem de dominância* ou *ordem natural* e é denotada por \leq . Se $\mu, \lambda \in Par(n)$, definimos $\mu \leq \lambda$ se $\sum_{j=1}^i \mu_j \leq \sum_{j=1}^i \lambda_j$, para cada $i \geq 1$. Por exemplo, $(111) \leq (21)$. Essa relação de ordem não é total. De fato, (3111) e (222) não são comparáveis.

Nossa terceira relação de ordem parcial, também em $Par(n)$, é chamada *ordem lexicográfica reversa* e denotada \geq^R . Dadas $\mu, \lambda \in Par(n)$, definimos $\lambda \geq^R \mu$ se

$\mu = \lambda$ ou se, para algum i , $\mu_1 = \lambda_1, \dots, \mu_{i-1} = \lambda_{i-1}$ e $\lambda_i > \mu_i$. Essa relação de ordem é total. Se $n = 6$, por exemplo, temos $6 \geq^R 51 \geq^R 42 \geq^R 411 \geq^R 33 \geq^R 321 \geq^R 3111 \geq^R 222 \geq^R 2211 \geq^R 21111 \geq^R 111111$. Na ordem de dominância, as partições 33 e 411 bem como 3111 e 222 não poderiam ser comparadas.

Para finalizar esta seção, lembremos que o posto de uma partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ denotado por $posto(\lambda)$ é definido como o maior inteiro i para o qual $\lambda_i \geq i$. Por exemplo: $posto(33) = 2, posto(411) = 1$ e $posto(3211) = 2$.

1.2 A Álgebra das Funções Simétricas

Consideremos o anel $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_k]$ dos polinômios em k variáveis e coeficientes no anel comutativo com unidade \mathbb{Q} . O grupo simétrico S_k age neste anel permutando as variáveis. Um polinômio é dito simétrico se é invariante sobre esta ação, ou seja, se é invariante sob qualquer permutação de suas k variáveis. O anel dos polinômios simétricos em k variáveis é representado por $\Lambda_k = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda_k^n$, onde Λ_k^n é o conjunto dos *polinômios simétricos homogêneos de grau n* com o polinômio nulo; a palavra *homogêneo* significa que cada termo $x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$ tem o mesmo grau $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n$.

Se $f, g \in \Lambda_k^n$ e $a, b \in \mathbb{Q}$, claramente $af + bg \in \Lambda_k^n$. Logo, Λ_k^n é um \mathbb{Q} -módulo, ou lembrando que \mathbb{Q} é um corpo, Λ_k^n é um espaço vetorial sobre \mathbb{Q} , bem como Λ_k .

Para cada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^k$, denotamos por x^α o monômio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$. Seja $\lambda \in Par$ uma partição tal que $l(\lambda) \leq k$. O polinômio $m_\lambda(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\alpha} x^\alpha$ cuja soma é feita sobre todas as permutações α (das entradas) de $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, nem todos $\lambda_j \neq 0$, é claramente simétrico. Por exemplo: se $\lambda = 41$ e $k = 2$, então $m_{41}(x_1, x_2) = x_1^4 x_2^1 + x_1^1 x_2^4$. Isso nos dá o seguinte resultado.

Proposição 1.2.1. $\{m_\lambda : \lambda \in Par(n), l(\lambda) \leq k\}$ é uma base para Λ_k^n .

Demonstração. Seja $f = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \in \Lambda_k^n$ um polinômio simétrico homogêneo de grau n . Seja λ a única partição de n associada a α (como $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ é tal que $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = n$, podemos formar uma partição de n colocando em ordem não-crescente os α_i). É claro que o termo $c_{\lambda} x^{\lambda}$ aparece no somatório $\sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}$. Como f é um polinômio simétrico, $c_{\beta} = c_{\lambda}$ para qualquer permutação β de $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ e, além disso, $c_{\lambda} x^{\beta}$ aparece em $\sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}$ para toda permutação β de λ .

Agora, agrupando os monômios cujos coeficientes líderes são c_{λ} , obtemos $f = \sum_{\lambda \vdash n} c_{\lambda} m_{\lambda}$. Daí, $\{m_{\lambda} : \lambda \vdash n, l(\lambda) \leq k\}$ gera Λ_k^n .

Se $Par(n) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$, e $a_1 m_{\lambda_1} + \dots + a_l m_{\lambda_l} = 0$, então $a_1 = \dots = a_l = 0$, pois cada monômio $a_i x^{\alpha_i}$, onde α_i é uma permutação de λ_i , aparece em apenas um termo da soma $a_1 m_{\lambda_1} + \dots + a_l m_{\lambda_l}$ e, quando fazemos a igualdade polinomial $a_1 m_{\lambda_1} + \dots + a_l m_{\lambda_l} = 0$, devemos ter $a_i = 0, \forall i$. Logo, $\{m_{\lambda} : \lambda \in Par(n), l(\lambda) \leq k\}$ é linearmente independente.

Portanto, $\{m_{\lambda} : \lambda \in Par(n), l(\lambda) \leq k\}$ é uma base para Λ_k^n . □

Se $k < n$, o monômio x^{λ} não está definido para $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$ de n . Podemos remover esta restrição tornando infinito o número de variáveis, conforme detalhado abaixo.

Seja $m \geq k$ e consideremos o homomorfismo $\rho : \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m] \longrightarrow \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_k]$ tal que

$$\rho(x_i) = \begin{cases} x_i, & \text{se } 1 \leq i \leq k \\ 0, & \text{se } k+1 \leq i \leq m \end{cases}.$$

Restringindo ρ a Λ_m ganhamos o homomorfismo $\rho_{m,k} : \Lambda_m \longrightarrow \Lambda_k$, cujo efeito na base $\{m_{\lambda}\}$ é:

$$\rho_{m,k}(m_{\lambda}(x_1, \dots, x_m)) = \begin{cases} m_{\lambda}(x_1, \dots, x_k), & \text{se } l(\lambda) \leq k \\ 0, & \text{se } l(\lambda) > k \end{cases}.$$

Logo, $\rho_{m,k}$ é sobrejetivo. Restringindo $\rho_{m,k}$ a Λ_m^n temos o homomorfismo $\rho_{m,k}^n : \Lambda_m^n \longrightarrow \Lambda_k^n, \forall n \geq 0$ e $m \geq k$, os quais são sempre sobrejetivos e são bijetivos se $m \geq k \geq n$. De fato: sendo f uma combinação linear dos $m_\lambda(x_1, \dots, x_k)$, então $f = 0$, pois $\rho_{m,k}^n(m_\lambda(x_1, \dots, x_k)) = 0$ se $l(\lambda) > k$, o que não é possível porque $l(\lambda) \leq n \leq k$, então $\rho_{m,k}^n(f) = 0$ implica $f = 0$.

Seja Λ^n o espaço de todas as seqüências $f = (f_k)_{k \geq 0}$, onde $f_k = f_k(x_1, \dots, x_k)$ é um polinômio simétrico homogêneo de grau n nas variáveis x_1, \dots, x_k e

$$f_m(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = f_k(x_1, \dots, x_k)$$

se $m \geq k$. Como $\rho_{m,k}^n$ é um isomorfismo para $m \geq k \geq n$, então a projeção definida por $\rho_k^n : \Lambda^n \longrightarrow \Lambda_k^n$ tal que $\rho_k^n(f) = f_k$, é um isomorfismo para $\forall k \geq n$ (a idéia é fazer $m \rightarrow \infty$ e identificar Λ^n com Λ_m^n) e, portanto, Λ^n tem uma base que consiste dos polinômios simétricos $m_\lambda, \forall \lambda \vdash n$, tais que $\rho_k^n(m_\lambda) = m_\lambda(x_1, \dots, x_k)$, para $k \geq n$. Logo, Λ^n é um espaço vetorial sobre \mathbb{Q} cuja dimensão é $p(n)$, o número de partições de n .

Seja $\Lambda = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n$. Logo, Λ é um espaço vetorial sobre \mathbb{Q} com base $\{m_\lambda : \lambda \in Par\}$. Para cada $k \geq 0$, $\rho_k = \bigoplus_{n \geq 0} \rho_k^n : \Lambda \longrightarrow \Lambda_k$ é um homomorfismo sobrejetivo e ρ_k é um isomorfismo se $n \leq k$. Assim, ao invés de trabalharmos com k variáveis, o homomorfismo sobrejetor ρ_k nos garante que podemos trabalhar com infinitas variáveis.⁽²⁾

Daqui em diante trabalharemos com infinitas variáveis identificando $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ com $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots)$.

Feitas estas considerações, finalizaremos esta seção com as duas definições a seguir.

Definição 1.2.1. *Sejam $x = \{x_1, x_2, \dots\}$ um conjunto de variáveis e $n \in \mathbb{N}$. Uma*

²e assim, funções simétricas em finitas variáveis tornam-se um caso particular do estudo que apresentamos neste texto.

função simétrica homogênea de grau n sobre \mathbb{Q} é uma série de potências

$$f(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}$$

sendo: (a) $\alpha \in \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots) : \alpha_i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = n\}$ ⁽³⁾; (b) $c_{\alpha} \in \mathbb{Q}$; (c) x^{α} representa o monômio $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$; (d) $f(x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, \dots) = f(x_1, x_2, \dots)$, para qualquer permutação ω dos inteiros positivos.

Por exemplo, a função $f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\alpha \in \text{Comp}(2)} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 + \sum_{i < j} x_i x_j$

é claramente simétrica segundo a definição acima.

Definição 1.2.2. $\Lambda = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \Lambda^n$ é dita a álgebras das funções simétricas sobre \mathbb{Q} , onde Λ^n é o espaço vetorial, sobre \mathbb{Q} , de todas as funções simétricas de grau n .

A partir dessas definições, o que antes chamávamos polinômios simétricos recebem o nome de *funções simétricas* (embora na verdade sejam séries de potências), pois historicamente é essa a denominação que recebem.

1.3 Algumas Bases para Λ

Nesta seção exibiremos algumas bases para o espaço vetorial Λ das funções simétricas sobre o corpo \mathbb{Q} e procuraremos matrizes de transição entre estas. Iniciamos redefinindo a base de Λ da seção anterior, agora em infinitas variáveis.

1.3.1 Função Simétrica Monomial

Definição 1.3.1. Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \vdash n$. Uma função simétrica monomial $m_{\lambda}(x) \in \Lambda^n$ é definida por

$$m_{\lambda}(x) = \sum_{\alpha} x^{\alpha}$$

³este conjunto é chamado de *conjunto das composições de n* e representado por $\text{Comp}(n)$.

onde α percorre o conjunto de todas as permutações $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ das entradas de $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ e $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$.

Exemplos:

$$\begin{aligned} m_0 &= 1 \\ m_1 &= \sum_i x_i \\ m_2 &= \sum_i x_i^2 \\ m_{11} &= \sum_{i < j} x_i x_j \end{aligned}$$

A Proposição 1.2.1 da seção anterior estabelece que $\{m_\lambda : \lambda \vdash n, l(\lambda) \leq k\}$ é uma base para Λ_k^n . Agora, pelas considerações que fizemos sobre trabalhar com infinitas variáveis, temos que $\{m_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma base para Λ^n e $\dim(\Lambda^n) = p(n)$; conseqüentemente, $\{m_\lambda : \lambda \in Par\}$ é uma base para $\Lambda = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n$. Esta é nossa primeira base para Λ . Na seção seguinte apresentamos outras.

1.3.2 Função Simétrica Elementar

Definição 1.3.2. *Seja $\lambda \in Par$. A função simétrica elementar e_λ é definida pelas fórmulas:*

$$\begin{aligned} e_0 &= 1 \\ e_n &= \sum_{i_1 < \dots < i_n} x_{i_1} \dots x_{i_n}, n \geq 1 \\ e_\lambda &= e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in Par \end{aligned}$$

Exemplo: se $\lambda = (2, 1, 0, 0, \dots)$ então $e_{21} = e_2 e_1 = \sum_{i < j} x_i x_j \sum_k x_k = 3m_{111} + m_{21}$

As funções simétricas elementares possuem uma função geradora bastante conhecida, a saber

$$E(t) = \sum_{n \geq 0} e_n t^n = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t).$$

O teorema a seguir estabelece que a \mathbb{Q} -álgebra Λ é gerada por $\{e_1, e_2, \dots\}$. De fato, este conjunto é uma base para Λ .

Teorema 1.3.1. $\Lambda = \mathbb{Q}[e_1, e_2, \dots]$ e e_1, e_2, \dots são algebricamente independentes.

Demonstração. Como $\Lambda = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n$, cada elemento de Λ pode ser escrita como uma soma de funções simétricas homogêneas de diferentes graus. Então, para mostrar que $\Lambda = \mathbb{Q}[e_1, e_2, \dots]$ é suficiente provar que qualquer função simétrica homogênea pode ser expressada como um polinômio nas funções simétricas elementares com coeficientes em \mathbb{Q} .

Seja $f(x_1, x_2, \dots) \in \Lambda^m$ uma função simétrica homogênea de grau m . Utilizando a ordem lexicográfica no conjunto das partições de m , dizemos que o monômio $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots$ é maior do que $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots$ se existir $s \geq 1$ tal que $k_1 = l_1, \dots, k_s = l_s$ e $k_{s+1} > l_{s+1}$. Seja $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots$ o maior monômio em f com coeficiente não-nulo. Como f é simétrica, essa função contém todos os monômios obtidos de $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots$ pela permutação de k_1, k_2, \dots

Consideremos agora o maior monômio na função simétrica $e_1^{d_1} e_2^{d_2} \dots$, $d_i \geq 0$, com apenas uma quantidade finita de d_i não-nulos. Observemos que se M_1 e M_2 são monômios ambos de grau n e N é um monômio de grau r , se $M_1 > M_2$, então $NM_1 > NM_2$. Logo, se $N_1 > N_2$ então $M_1 N_1 > M_2 N_2$. É claro que o maior monômio em e_n é $x_1 x_2 \dots x_n$. Daí, segue que o maior monômio em $e_1^{d_1} e_2^{d_2} \dots$ é $x_1^{d_1+d_2+\dots} x_2^{d_2+d_3+\dots} \dots$.

Assim, o maior monômio em $e_1^{k_1-k_2} e_2^{k_2-k_3} \dots$ é $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots$ que é o mesmo que em f . Então, se a é o coeficiente de $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots$ em f , o maior monômio em $f_1 = f - a e_1^{k_1-k_2} e_2^{k_2-k_3} \dots$ é menor do que aquele de f . Podemos repetir esse processo com f_1 . Como existe um número finito de monômios de grau m (os possíveis $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, com $\alpha_i \in \mathbb{N}$, tais que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = m$), então um número finito de aplicações desse processo produz uma representação de f como um polinômio em e_1, e_2, \dots

Verifiquemos que e_1, e_2, \dots são algebricamente independentes. Suponhamos que $\sum_d a_{d_1 d_2 \dots} e_1^{d_1} e_2^{d_2} \dots = 0$, onde a soma é feita sobre um conjunto finito de distintos $d = (d_1, d_2, \dots), d_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$, com apenas uma quantidade finita de d_i não-nulos. Se esta relação não é trivial, temos $a_{d_1 d_2 \dots} \neq 0$ para algum d . Para qualquer d definimos $k = (k_1, k_2, \dots)$ por $k_i = d_i + d_{i+1} + \dots$. Então, o grau de $e_1^{d_1} e_2^{d_2} \dots$ nas variáveis x_1, x_2, \dots é $m = \sum_{i=1}^{\infty} k_i = \sum_{i=1}^{\infty} i d_i$ e o maior monômio deste grau que ocorre em $e_1^{d_1} e_2^{d_2} \dots$ é $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots$. Se $d' = (d'_1, d'_2, \dots)$ e $k'_i = d'_i + d'_{i+1} + \dots = k_i$, então $d'_i = d_i$. Logo, monômios distintos $e_1^{d_1} e_2^{d_2} \dots$ nas variáveis e_1, e_2, \dots têm maiores monômios distintos nas variáveis x_i que ocorrem neles.

Escolhemos entre os d tais que $a_{d_1 d_2 \dots} \neq 0$ algum tal que $m = \sum_{i=1}^{\infty} k_i$ é maximal e o maior monômio $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots$ é maximal. Então, expressando nossa relação nos e_i em termos de x_i , temos o termo $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots$ apenas uma vez e com coeficiente não-nulo $a_{d_1 d_2 \dots}$, o que contraria a independência algébrica de x_1, x_2, \dots . Portanto, e_1, e_2, \dots são algebricamente independentes. \square

Dado $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ uma composição de n , isto é, $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = n$, estamos interessados em encontrar o coeficiente de x^α em e_λ , onde $\lambda \vdash n$. A proposição seguinte nos dá esse coeficiente. Antes, no entanto, uma definição.

Definição 1.3.3. *Seja $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ uma matriz com $a_{ij} \in \mathbb{Z}, \forall i, j$. Definimos $r_i = \sum_j a_{ij}$ e $c_j = \sum_i a_{ij}$ e também os seguintes vetores:*

$$r(A) = (r_1, r_2, \dots)$$

$$c(A) = (c_1, c_2, \dots)$$

Definimos também uma $(0,1)$ -matriz como sendo uma matriz cujas entradas são 0 ou 1.

Proposição 1.3.1. *Sejam $\lambda \vdash n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots), \alpha_i \geq 0$, com $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = n$. O coeficiente $M_{\lambda\alpha}$ de x^α em e_λ , isto é, $e_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} M_{\lambda\mu} m_\mu$, é igual ao número de $(0,1)$ -matrizes $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ satisfazendo $r(A) = \lambda$ e $c(A) = \alpha$.*

Demonstração. Consideremos a matriz

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Para obter um termo de e_λ , da primeira linha escolhemos λ_1 entradas, da segunda, λ_2 e assim por diante, de modo que o produto das entradas escolhidas seja $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots$. Se trocamos as entradas escolhidas por 1 e as demais por 0, obtemos uma matriz A com $r(A) = \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ e $c(A) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$. O número de possibilidades de escolher as entradas é $M_{\lambda\alpha}$, que é a quantidade de vezes que o monômio x^α aparece em e_λ . Inversamente, qualquer tal matriz A corresponde a um termo de e_λ . \square

Para ilustrar o que fizemos, vejamos alguns exemplos. Tomemos $n = 5, \lambda = (1, 1, 1, 1, 1)$ e $\alpha = (4, 1)$. Nesse caso, uma possibilidade para A é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Consideremos agora o caso $n = 5, \lambda = (2, 2, 1)$ e $\alpha = (4, 1)$. Nesse caso, $x^\alpha = x_1^4 x_2$, porém, escolhendo as entradas de X de acordo com $\lambda = (2, 2, 1)$ não vamos obter x_1^4 , donde $M_{(2,2,1)(4,1)} = 0$.

A tabela a seguir nos dá alguns $M_{\lambda\alpha}$. Como e_λ é uma função simétrica, basta considerarmos α como partição de n também, pois se $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots$ é um termo de e_λ , então x^γ também o é, onde γ é a partição de n obtida a partir de α colocando $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ em ordem não-crescente e, além disso, x^α e x^γ devem ter o mesmo coeficiente $M_{\lambda\alpha}$.

e_1	$= m_1$
e_{11}	$= m_2 + 2m_{11}$
e_2	$= m_{11}$
e_{111}	$= m_3 + 3m_{21} + 6m_{111}$
e_{21}	$= m_{21} + 3m_{111}$
e_3	$= m_{111}$
e_{1111}	$= m_4 + 4m_{31} + 6m_{22} + 12m_{211} + 24m_{1111}$
e_{211}	$= m_{31} + 2m_{22} + 5m_{211} + 12m_{1111}$
e_{22}	$= m_{22} + 2m_{211} + 6m_{1111}$
e_{31}	$= m_{211} + 4m_{1111}$
e_4	$= m_{1111}$
e_{11111}	$= m_5 + 5m_{41} + 10m_{32} + 20m_{311} + 30m_{221} + 60m_{2111} + 120m_{11111}$
e_{2111}	$= m_{41} + 3m_{32} + 7m_{311} + 12m_{221} + 27m_{2111} + 60m_{11111}$
e_{221}	$= m_{32} + 2m_{311} + 5m_{221} + 12m_{2111} + 30m_{11111}$
e_{311}	$= m_{311} + 2m_{221} + 7m_{2111} + 20m_{11111}$
e_{32}	$= m_{221} + 3m_{2111} + 10m_{11111}$
e_{41}	$= m_{2111} + 5m_{11111}$
e_5	$= m_{11111}$

O coeficiente $M_{\lambda\alpha}$ tem a seguinte interpretação combinatória. Temos n bolas ao todo, com λ_i destas marcadas com i e também caixas numeradas $1, 2, 3, \dots$

Então $M_{\lambda\alpha}$ é o número de possibilidades de se colocar as bolas nas caixas observando: (a) nenhuma caixa contém mais do que uma bola marcada com i e (b) a caixa i contém exatamente α_i bolas.

Essa simples interpretação combinatória de $M_{\lambda\alpha}$ é um exemplo de como podemos aplicar funções simétricas para resolver problemas em combinatória. Ao longo do texto teremos outras aplicações. Agora apresentamos um corolário da Proposição 1.3.1.

Corolário 1.3.1. *Sejam $\lambda, \mu \vdash n$, então $M_{\lambda\mu} = M_{\mu\lambda}$, isto é, a matriz de transição entre as bases $\{m_\lambda : \lambda \vdash n\}$ e $\{e_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é simétrica.*

Demonstração. Seja A uma $(0, 1)$ -matriz associada a $M_{\lambda\mu}$. Então, $r(A) = \lambda$ e $c(A) = \mu$ se, e somente se, A^t satisfaz $r(A^t) = \mu$ e $c(A^t) = \lambda$. Logo, o número de $(0, 1)$ -matrizes associadas a $M_{\lambda\mu}$ é igual ao obtido a partir de $M_{\mu\lambda}$, donde $M_{\lambda\mu} = M_{\mu\lambda}$. \square

A Proposição 1.3.1 tem uma formulação equivalente em termos de funções geradoras, que ao longo desse trabalho serão da forma $z = \sum_{\lambda \in Par} c_\lambda \mu_\lambda$ onde $\{\mu_\lambda\}$ é alguma base para Λ e $c_\lambda \in R$, sendo $\lambda \in Par$ e R um anel comutativo com unidade (em nosso caso $R = \mathbb{Q}$). Uma classe de funções geradoras que freqüentemente ocorre tem $R = \Lambda(y)$ como o anel dos coeficientes, isto é, funções simétricas em um novo conjunto de variáveis $y = (y_1, y_2, \dots)$. Por exemplo, a função geradora da próxima proposição, $z = \sum_{\lambda \in Par} m_\lambda(x) e_\lambda(y)$, é da forma $\sum_{\lambda \in Par} c_\lambda \mu_\lambda$, com $\mu_\lambda = m_\lambda(x) \in \Lambda(x)$ e $c_\lambda = e_\lambda(y) \in \Lambda(y) = R$.

Proposição 1.3.2. *Temos*

$$\prod_{i,j} (1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda, \mu \in Par} M_{\lambda\mu} m_\lambda(x) m_\mu(y) = \sum_{\lambda \in Par} m_\lambda(x) e_\lambda(y).$$

Demonstração. É suficiente considerar λ e μ partições de um mesmo inteiro não-negativo, caso contrário $M_{\lambda\mu} = 0$, pois se $\lambda \vdash m$ e $\mu \vdash n$, com $m \neq n$, então como

a caixa i deve conter exatamente μ_i bolas, o total de bolas nestas caixas será n , mas faltarão bolas quando $m < n$ e sobrarão bolas quando $m > n$.

Um monômio $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \cdots = x^\alpha y^\beta$ que aparece em $\prod_{i,j} (1 + x_i y_j)$ é obtido pela escolha de uma $(0, 1)$ -matriz $A = (a_{ij})$ com finitas entradas iguais a 1 satisfazendo

$$\begin{aligned} \prod_{i,j} (x_i y_j)^{a_{ij}} &= \prod_j x_1^{a_{1j}} y_j^{a_{1j}} x_2^{a_{2j}} y_j^{a_{2j}} \cdots \\ &= x_1^{a_{11}+a_{12}+\cdots} y_1^{a_{11}+a_{21}+\cdots} x_2^{a_{21}+a_{22}+\cdots} y_2^{a_{12}+a_{22}+\cdots} \cdots = x^\alpha y^\beta. \end{aligned}$$

Por exemplo: para obter o termo $x_1 x_2 \cdots x_n y_1 y_2 \cdots y_n$, tomamos $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$ e $a_{ij} = 0$ nos demais casos. Já para obter $x_1^2 x_2^2 \cdots x_n y_1 y_2^3 y_3 \cdots y_n$ podemos tomar $a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{32} = a_{23} = 1$, $a_{ii} = 1$, $4 \leq i \leq n$ e $a_{ij} = 0$ nos outros casos.

Mas, $\prod_{i,j} (x_i y_j)^{a_{ij}} = x^{r(A)} y^{c(A)}$, donde o coeficiente de $x^\alpha y^\beta$ no produto $\prod (1 + x_i y_j)$ é o número de $(0, 1)$ -matrizes A que satisfazem $r(A) = \alpha$ e $c(A) = \beta$. Logo,

$$\begin{aligned} \prod_{i,j} (1 + x_i y_j) &= \sum_{\lambda, \mu \in Par} M_{\lambda\mu} m_\lambda(x) m_\mu(y) = \\ &= \sum_{\lambda \in Par} m_\lambda(x) \sum_{\lambda \in Par} M_{\lambda\mu} m_\mu(y) = \sum_{\lambda \in Par} m_\lambda(x) e_\lambda(y). \end{aligned}$$

□

Notemos que o Corolário 1.3.1 é imediato da Proposição 1.3.2: o produto $\prod (1 + x_i y_j)$ é invariante quando trocamos x_i por y_j .

O teorema seguinte é conhecido como o *Teorema Fundamental das Funções Simétricas*. Esse teorema é, na verdade, equivalente ao Teorema 1.3.1 e sua demonstração mais curta.

Teorema 1.3.2. *Sejam $\lambda, \mu \in \text{Par}(n)$. Então, $M_{\lambda\mu} = 0$ a menos que $\mu \leq \lambda'$, enquanto que $M_{\lambda\lambda'} = 1$ e o conjunto $\{e_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma base para Λ^n (donde $\{e_\lambda : \lambda \in \text{Par}\}$ é uma base para Λ).*

Demonstração. Suponhamos que $M_{\lambda\mu} \neq 0$, então pela Proposição 1.3.1, existe uma $(0, 1)$ -matriz $A = (a_{ij})$ com $r(A) = \lambda$ e $c(A) = \mu$. Seja $A' = (a'_{ij})$ a matriz tal que $r(A') = \lambda$ e com $a'_{ij} = 1$ apenas para $1 \leq j \leq \lambda_i$.

Um exemplo para ilustrar A' : se $\lambda = 211$ e $\mu = 22$, então uma possibilidade para A é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{donde } A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Voltemos à demonstração. Para cada i , o número de entradas iguais a 1 nas primeiras i colunas de A' não é menor do que o número de entradas iguais a 1 nas primeiras i colunas de A . Logo, pela definição de ordem de dominância da Seção 1.1, temos $c(A') \geq c(A) = \mu$. Mas $c(A') = \lambda'$, donde $\lambda' \geq \mu$ como queríamos.

Pela construção de A' , temos que as entradas que recebem 1 situam-se “a esquerda”, ou seja, em cada linha iniciam a partir da primeira coluna e a soma das entradas das linhas i tem que ser λ_i . Decorre disso que há somente uma possibilidade para A' , donde $M_{\lambda\lambda'} = 1$.

Seja $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{p(n)}$ uma ordenação de $\text{Par}(n)$, compatível com a ordem de dominância. Então, a matriz $(M_{\lambda\mu})$ cujas linhas satisfazem a ordem $\lambda^1, \lambda^2, \dots$ e as colunas a ordem $\lambda^{1'}, \lambda^{2'}, \dots$, isto é, $(M_{\lambda\mu}) = (M_{\lambda^i(\lambda^j)'})_{ij}$, é triangular superior com 1 em todas as entradas da diagonal principal.

Vejamos um exemplo de matriz $(M_{\lambda\mu})$ para o caso $n = 4$: ordenamos $\text{Par}(4)$

fazendo $\lambda_1 = 1111, \lambda_2 = 211, \lambda_3 = 22, \lambda_4 = 31, \lambda_5 = 4$, pois $4 \geq 31 \geq 22 \geq 211 \geq 1111$, então $\lambda'_1 = 4, \lambda'_2 = 31, \lambda'_3 = 22, \lambda'_4 = 211, \lambda'_5 = 1111$ e

$$(M_{\lambda\mu}) = \begin{pmatrix} M_{1111,4} & M_{1111,31} & M_{1111,22} & M_{1111,211} & M_{1111,1111} \\ M_{211,4} & M_{211,31} & M_{211,22} & M_{211,211} & M_{211,1111} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{4,4} & M_{4,31} & M_{4,22} & M_{4,211} & M_{4,1111} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 12 & 24 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 12 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Então, $(M_{\lambda\mu})$ é invertível e, pela Proposição 1.3.1, $\{e_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma base para Λ^n . □

Notemos que este teorema nos dá um meio muito mais prático que auxilia na construção da tabela anterior com os coeficientes $M_{\lambda\mu}$.

Passamos agora a um outro conjunto de funções simétricas que, como veremos, resulta numa outra base para Λ . Iniciamos com uma definição.

1.3.3 Função Simétrica (Homogênea) Completa

Definição 1.3.4. *As Funções Simétricas Homogêneas Completas⁽⁴⁾ $h_\lambda, \lambda \in Par$, são definidas pelas fórmulas:*

$$h_0 = 1 \\ h_n = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}, n \geq 1 \\ h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in Par$$

⁴ou simplesmente, como preferem alguns autores, a exemplo da referência [4], Funções Simétricas Completas.

Exemplo: se $\lambda = (2, 1, 0, 0, \dots)$ então $h_{21} = h_2 h_1 = \sum_{i \leq j} x_i x_j \sum_k x_k = 3m_{111} + 2m_{21} + m_3$

Obersevemos que h_n é uma soma de monômios de mesmo grau n , daí o termo *homogêneo*. As funções simétricas h_λ são, em certo sentido, duais às funções simétricas elementares e_μ . Isso ficará evidente mais adiante. A seguir temos o análogo à Proposição 1.3.1 para h_λ .

Proposição 1.3.3. *Sejam $\lambda \vdash n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, $\alpha_i \geq 0$, com $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = n$. Então, o coeficiente $N_{\lambda\alpha}$ de x^α em h_λ , ou seja, $h_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} N_{\lambda\mu} m_\mu$, é igual ao número de \mathbb{N} -matrizes (matrizes cujas entradas são números naturais) $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ que satisfazem $r(A) = \lambda$ e $c(A) = \alpha$.*

Demonstração. Um termo x^α de $h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots$ é obtido escolhendo um monômio $x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \dots$ de cada h_{λ_i} tal que $\prod_i (x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \dots) = x^\alpha$.

Um exemplo para ilustrar: $n = 3$, $\lambda = (21)$ e $\alpha = (12)$; neste caso, $x^\alpha = x_1 x_2^2$ e há 2 possibilidades de escolha, lembrando que $h_{21} = h_2 h_1$: (a) $x_1 x_2$ em h_2 e x_2 em h_1 ou (b) x_2^2 em h_2 e x_1 em h_1 . Logo, $N_{(21)(12)} = 2$. Voltemos à demonstração.

Isso é o mesmo que escolher $A = (a_{ij})$ como uma \mathbb{N} -matriz satisfazendo $r(A) = \lambda$ e $c(A) = \alpha$, analogamente à demonstração da Proposição 1.3.1. \square

Um exemplo para clarificar o último parágrafo da demonstração acima: $n = 3$, $\lambda = (21)$ e $\alpha = (12)$; aqui as possibilidades para A são $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donde $N_{(21)(12)} = 2$.

Assim como $M_{\lambda\mu}$, $N_{\lambda\mu}$ tem uma interpretação combinatória. Suponhamos que temos n bolas no total, sendo λ_i destas marcadas com i . Também dispomos de caixas numeradas $1, 2, 3, \dots$. Então, $N_{\lambda\mu}$ é o número de possibilidades de se colocar

as bolas nas caixas de modo que a caixa i tenha exatamente μ_i bolas.⁽⁵⁾

No exemplo acima, $n = 3, \lambda = (21)$ e $\alpha = (12)$, temos duas caixas e três bolas (duas com número 2 e uma com número 1). Temos duas possibilidades de configuração: (a) uma bola 2 na caixa 1 e, na caixa 2, uma bola 1 e uma bola 2; (b) uma bola 1 na caixa 1 e duas bolas 2 na caixa 2.

A tabela abaixo mostra alguns $N_{\lambda\mu}$.

h_1	$= m_1$
h_{11}	$= 2m_{11} + m_2$
h_2	$= m_{11} + m_2$
h_{111}	$= 6m_{111} + 3m_{21} + m_3$
h_{21}	$= 3m_{111} + 2m_{21} + m_3$
h_3	$= m_{111} + m_{21} + m_3$
h_{1111}	$= 24m_{1111} + 12m_{211} + 6m_{22} + 4m_{31} + m_4$
h_{211}	$= 12m_{1111} + 7m_{211} + 4m_{22} + 3m_{31} + m_4$
h_{22}	$= 6m_{1111} + 4m_{211} + 3m_{22} + 2m_{31} + m_4$
h_{31}	$= 4m_{1111} + 3m_{211} + 2m_{22} + 2m_{31} + m_4$
h_4	$= m_{1111} + m_{211} + m_{22} + m_{31} + m_4$
h_{11111}	$= 120m_{11111} + 60m_{2111} + 30m_{221} + 20m_{311} + 10m_{32} + 5m_{41} + m_5$
h_{2111}	$= 60m_{11111} + 33m_{2111} + 18m_{221} + 13m_{311} + 7m_{32} + 4m_{41} + m_5$
h_{221}	$= 30m_{11111} + 18m_{2111} + 11m_{221} + 8m_{311} + 5m_{32} + 3m_{41} + m_5$
h_{311}	$= 20m_{11111} + 13m_{2111} + 8m_{221} + 7m_{311} + 4m_{32} + 3m_{41} + m_5$
h_{32}	$= 10m_{11111} + 7m_{2111} + 5m_{221} + 4m_{311} + 3m_{32} + 2m_{41} + m_5$
h_{41}	$= 5m_{11111} + 4m_{2111} + 3m_{221} + 3m_{311} + 2m_{32} + 2m_{41} + m_5$
h_5	$= m_{11111} + m_{2111} + m_{221} + m_{311} + m_{32} + m_{41} + m_5$

⁵Notemos que na interpretação combinatória de $M_{\lambda\mu}$ não permitíamos repetições de bolas com mesmo número numa caixa, restrição esta ausente na interpretação de $N_{\lambda\mu}$. Do ponto de vista combinatório isso já representa uma certa dualidade entre e_λ e h_λ .

Na demonstração do Teorema 1.3.2 afirmamos que $\{e_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma base de Λ^n partindo do fato de que a matriz $(M_{\lambda\mu})$ é triangular superior e, portanto, invertível. Agora, não podemos afirmar o mesmo sobre $\{h_\lambda : \lambda \vdash n\}$, pois a matriz $(N_{\lambda\mu})$ ⁽⁶⁾ é invertível, mas esta propriedade não é facilmente verificada. No entanto, a independência linear de $\{h_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma consequência imediata do próximo teorema.

Antes de enunciar o teorema seguinte, é importante observar o que segue. Como $\Lambda = \mathbb{Q}[e_1, e_2, \dots]$, analogamente aos operadores lineares da álgebra linear, um endomorfismo $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$ é unicamente determinado pelos seus valores $f(e_n), n \geq 1$ e, inversamente, qualquer escolha de $f(e_n) \in \Lambda, n \geq 1$, determina um endomorfismo. Definimos o endomorfismo $\omega : \Lambda \rightarrow \Lambda$ por $\omega(e_n) = h_n, n \geq 1$. É claro que $\omega(e_\lambda) = h_\lambda$, pois todo homomorfismo preserva a multiplicação.⁽⁷⁾

Teorema 1.3.3. *O endomorfismo ω é uma involução, isto é, $\omega^2 = id$ (o endomorfismo identidade), ou, equivalentemente, $\omega(h_n) = e_n$ (donde $\omega(h_\lambda) = e_\lambda, \forall \lambda \vdash n$).*

Demonstração. Consideremos as séries de potências $H(t) = \sum_{n \geq 0} h_n t^n$ e $E(t) = \sum_{n \geq 0} e_n t^n$. Desenvolvendo o produto $\prod_{n \geq 1} (1 + x_n t)$ obtemos $E(t) = \sum_{n \geq 0} e_n t^n = \prod_{n \geq 1} (1 + x_n t)$ e, como $(1 - x_n t)^{-1} = \sum_{i \geq 0} x_n^i t^i$, então $\prod_{n \geq 1} (1 - x_n t)^{-1} = \sum_{n \geq 0} h_n t^n = H(t)$.

Daí, $H(t)E(-t) = 1$. Igualando os coeficientes de t^n nesta igualdade obtemos $0 = \sum_{i=0}^n (-1)^i e_i h_{n-i} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} h_i e_{n-i} = (-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^i h_i e_{n-i}, n \geq 1$. Inversa-

⁶essa matriz é construída da mesma forma que $(M_{\lambda\mu})$.

⁷Poderíamos ter neste parágrafo trabalhado diretamente com operadores lineares sobre o espaço vetorial Λ , consideram-se, no entanto, endomorfismos porque, em geral, ao invés de escolher o anel \mathbb{Q} , escolhe-se um anel qualquer R comutativo, com unidade que não necessariamente é corpo e, nesse caso, teríamos o R -módulo Λ .

mente, se $\sum_{i=0}^n (-1)^i u_i h_{n-i} = 0, \forall n \geq 1$, para certos $u_i \in \Lambda$, com $u_0 = 1$, então $u_i = e_i$, pois $0 = \sum_{i=0}^n (-1)^i (u_i - e_i) h_{n-i}$.

Agora, aplicando ω à igualdade $0 = \sum_{i=0}^n (-1)^i e_i h_{n-i} = (-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^i h_i e_{n-i}$ obtemos $0 = \sum_{i=0}^n (-1)^i h_i \omega(h_{n-i}) = (-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^i \omega(h_i) h_{n-i}$ e, portanto, $\omega(h_i) = e_i$. \square

Como consequência deste teorema temos nos próximos corolários o que estamos procurando.

Corolário 1.3.2. *O conjunto $\{h_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma base para Λ^n (daí $\{h_\lambda : \lambda \in \text{Par}\}$ é uma base para Λ). Equivalentemente, h_1, h_2, \dots são algebricamente independentes e geram Λ como \mathbb{Q} -álgebra, isto é, $\Lambda = \mathbb{Q}[h_1, h_2, \dots]$.*

Demonstração. O Teorema 1.3.3 mostrou que o endomorfismo $\omega : \Lambda \rightarrow \Lambda$ definido por $\omega(e_n) = h_n$ e, portanto, $\omega(e_\lambda) = h_\lambda$, é invertível, pois $\omega^{-1} = \omega$. Logo, é um automorfismo de Λ e, como $\{e_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma base de Λ^n , segue que $\{h_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é, também, uma base para Λ^n . \square

Corolário 1.3.3. *Seja $N_{\lambda\mu}$ como definido na Proposição 1.3.3. Então, $N_{\mu\lambda} = N_{\lambda\mu}$, ou seja, a matriz de mudança da base $\{m_\lambda : \lambda \vdash n\}$ para $\{h_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é simétrica.*

Demonstração. A demonstração é análoga àquela do Corolário 1.3.1 \square

Antes de partir para o estudo de um outro conjunto de funções simétricas, apresentaremos um resultado que será útil mais adiante e cuja demonstração também omitimos por ser análoga àquela da Proposição 1.3.2.

Proposição 1.3.4. *Valem as igualdades:*

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda, \mu} N_{\lambda\mu} m_\lambda(x) m_\mu(y) = \sum_{\lambda} m_\lambda(x) h_\lambda(y), \quad \lambda, \mu \in Par.$$

1.3.4 Função Simétrica Soma de Potências

Definição 1.3.5. *As funções simétricas soma de potências são definidas por:*

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 \\ p_n &= \sum_i x_i^n, \quad n \geq 1 \\ p_\lambda &= p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in Par. \end{aligned}$$

Exemplo: se $\lambda = (2, 1, 0, 0, \dots)$ então $p_{21} = p_2 p_1 = \sum_i x_i^2 \sum_j x_j = m_3 + m_{21}$

Proposição 1.3.5. *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$, onde $l = l(\lambda)$, e $p_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} R_{\lambda\mu} m_\mu$. Sejam $\mu \vdash n$ e $k = l(\mu)$. Então $R_{\lambda\mu}$ é igual ao número de partições ordenadas $\pi = (B_1, \dots, B_k)$ do conjunto $[l] = \{1, 2, \dots, l\}$ tais que $\mu_j = \sum_{i \in B_j} \lambda_i, 1 \leq j \leq k$.*

Demonstração. O coeficiente $R_{\lambda\mu}$ é o número de $x^\mu = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots$ em $p_\lambda = \left(\sum_i x_i^{\lambda_1} \right) \left(\sum_i x_i^{\lambda_2} \right) \cdots$. Para obter o monômio x^μ na expressão deste produto, escolhamos um termo $x_{i_j}^{\lambda_j}$ em cada fator $\sum_i x_i^{\lambda_j}$ tal que $\prod_j x_{i_j}^{\lambda_j} = x^\mu$. Seja $B_r = \{j : i_j = r\}$. Então, (B_1, \dots, B_k) é uma partição ordenada de $[l]$ que satisfaz $\mu_j = \sum_{i \in B_j} \lambda_i$. De fato, como $\prod_j x_{i_j}^{\lambda_j} = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots$, para obter $x_i^{\mu_i}$ tomamos os j tais que $i_j = i$ e $\mu_i = \sum_j \lambda_j$. Além disso, $B_m \cap B_n = \emptyset$ se $m \neq n$, pois se tivéssemos $j \in B_m \cap B_n$, então $i_j = m = n$, contradição.

Portanto, B_1, \dots, B_k é uma partição ordenada de $[l]$ e, inversamente, qualquer tal partição nos dá um termo de x^μ . \square

O corolário a seguir, análogo ao Teorema 1.3.2, mostra que $\{p_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma base para Λ^n .

Corolário 1.3.4. $R_{\lambda\mu} = 0$ a menos que $\lambda \leq \mu$, enquanto $R_{\lambda\lambda} = \prod_i m_i(\lambda)!$, onde $m_i(\lambda) = |\{j : \lambda_j = i\}|$ e $\lambda = (1^{m_1(\lambda)} 2^{m_2(\lambda)} \dots)$. O conjunto $\{p_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma base para Λ^n (logo, $\{p_\lambda : \lambda \in \text{Par}\}$ é uma base para Λ). Equivalentemente, p_1, p_2, \dots são algebricamente independentes e geram Λ como \mathbb{Q} -álgebra, isto é, $\Lambda = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$.

Demonstração. Se $R_{\lambda\mu} \neq 0$, pela proposição anterior, existe partição ordenada $\pi = (B_1, \dots, B_k)$ do conjunto $[l] = [l(\lambda)]$ que satisfaz $\mu_j = \sum_{i \in B_j} \lambda_i$, $1 \leq j \leq k$. Dado $1 \leq r \leq l$, sejam B_{i_1}, \dots, B_{i_s} blocos distintos de π contendo ao menos um dos números $1, 2, \dots, r$ cada. De $\mu_j = \sum_{i \in B_j} \lambda_i$, $1 \leq j \leq k$, temos $\mu_{i_1} + \dots + \mu_{i_s} \geq \lambda_1 + \dots + \lambda_r$. Mas $\mu_1 + \dots + \mu_r \geq \mu_{i_1} + \dots + \mu_{i_s}$, pois $r \geq s$ e $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$, donde $\mu \geq \lambda$, como queríamos.

Se $\lambda = \mu$, cada bloco B_i contém um único elemento $\{j\}$, ou simplesmente, j . Então, B_1, \dots, B_{m_1} pode ser qualquer ordenação de $1, \dots, m_1$. Logo, $B_{m_1+1}, \dots, B_{m_1+m_2}$ pode ser qualquer ordenação de $m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2$ e assim por diante. Isso nos dá um total de $R_{\lambda\lambda} = m_1(\lambda)! m_2(\lambda)! \dots$ possibilidades para π .

O fato de $\{p_\lambda : \lambda \vdash n\}$ ser uma base para Λ^n ($\Lambda = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$) segue pelas mesmas razões da demonstração do Teorema 1.3.2. \square

A seguir vamos investigar o efeito de aplicar a involução $\omega : \Lambda \rightarrow \Lambda$ em p_λ . Para tanto, uma abordagem por meio de função geradora é apresentada.

Para qualquer partição $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots) \vdash n$, definimos $z_\lambda = 1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2! \dots$. Por exemplo, $z_{442111} = 1^3 3! 2^1 1! 4^2 2! = 384$.

Se $w \in S_n$, seu *tipo cíclico* é a partição $(\rho_1, \rho_2, \dots) \vdash n$ tal que os comprimentos dos ciclos de w em sua decomposição em ciclos disjuntos são ρ_1, ρ_2, \dots . A seguir

temos um lema que nos dá o número de permutações $\omega \in S_n$ de um tipo fixo $\rho = (1^{m_1}2^{m_2}\dots)$.

Lema 1.3.1. *O número de permutações $w \in S_n$ do tipo (c_1, \dots, c_n) é igual a*

$$\frac{n!}{1^{c_1}c_1!2^{c_2}c_2!\dots n^{c_n}c_n!}.$$

Demonstração. Seja $\pi \in S_n$. Podemos obter a partir de π uma representação em ciclos disjuntos tal que os primeiros c_1 ciclos tenham comprimento 1, os c_2 ciclos seguintes tenham comprimento 2, e assim por diante, colocando, da esquerda para a direita, parênteses nas entradas de π de modo a obter c_i ciclos de comprimento i . Isso produz a decomposição em ciclos disjuntos de uma permutação π' de tipo (c_1, \dots, c_n) e define uma aplicação $\Phi : S_n \rightarrow S_n^c$, onde S_n^c é o conjunto de todas $\sigma \in S_n$ de tipo $c = (c_1, \dots, c_n)$. Dado, $\sigma \in S_n^c$, existem $1^{c_1}c_1!2^{c_2}c_2!\dots n^{c_n}c_n!$ possibilidades de escrever σ na notação de ciclos disjuntos tais que os comprimentos dos ciclos são não-decrescentes da esquerda para a direita. De fato, ordenamos os ciclos de comprimento i em $c_i!$ maneiras e escolhemos o primeiro elemento de cada um destes ciclos de i maneiras. Estas escolhas são todas independentes, o que estabelece nossa afirmação.

Logo, para cada $\sigma \in S_n^c$ temos $|\Phi^{-1}(\sigma)| = 1^{c_1}c_1!2^{c_2}c_2!\dots n^{c_n}c_n!$ e, como $|S_n| = n!$, o número de $\pi \in S_n$ do tipo (c_1, \dots, c_n) é igual a

$$\frac{n!}{1^{c_1}c_1!2^{c_2}c_2!\dots n^{c_n}c_n!}.$$

□

Pelo lema acima, se $\rho = (1^{m_1}2^{m_2}\dots)$, então

$$|\{w \in S_n : \rho(w) = \rho\}| = \frac{n!}{1^{m_1}m_1!2^{m_2}m_2!\dots} = \frac{n!}{z_\rho} = n!z_\rho^{-1}. \quad (1.1)$$

O conjunto $\{v \in S_n : \rho(v) = \rho\}$ é a classe de conjugação K_w que contém w . Para qualquer grupo finito G , a ordem $|K_w|$ é igual a $[G : C(w)]$, o índice do centralizador $C(w)$ em G . Assim, temos estabelecido a proposição seguinte.

Proposição 1.3.6. *Seja $\lambda \vdash n$. Então z_λ é igual ao número de permutações $v \in S_n$ que comutam com w_λ de tipo cíclico λ .*

Para uma partição $\lambda = (1^{m_1}2^{m_2}\dots) \vdash n$, observemos o que segue. Se n é um inteiro ímpar, então λ tem uma quantidade ímpar de partes ímpares, donde $m_1 + m_3 + \dots$ é ímpar. Então:

(i) se $m_2 + m_4 + \dots$ for par, segue que $l(\lambda) = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$ é ímpar.

Logo, $n - l(\lambda)$ é par.

(ii) se $m_2 + m_4 + \dots$ for ímpar, então $l(\lambda) = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$ é par, donde $n - l(\lambda)$ é ímpar.

Analogamente, se n é par, $m_1 + m_3 + \dots$ é par. Logo,

(iii) se $m_2 + m_4 + \dots$ for par, segue que $l(\lambda) = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$ é par e, então, $n - l(\lambda)$ é par.

(iv) se $m_2 + m_4 + \dots$ for ímpar, então $l(\lambda) = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$ é ímpar, donde $n - l(\lambda)$ é ímpar.

Logo, $(-1)^{m_2+m_4+\dots} = (-1)^{n-l(\lambda)}$. Definimos

$$\epsilon_\lambda = (-1)^{m_2+m_4+\dots} = (-1)^{n-l(\lambda)}.$$

Assim, para $w \in S_n$, $\epsilon_{\rho(w)}$ é +1 se w for uma permutação par, isto é, se w for o produto de um número par de transposições, e -1 caso contrário. Então, a aplicação $\Psi : S_n \longrightarrow \{\pm 1\}$ tal que $\Psi(w) = \epsilon_{\rho(w)}$ é o homomorfismo “sinal”.

Depois dessas considerações, temos a proposição seguinte que expressa $\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}$ e $\prod_{i,j} (1 + x_i y_j)$ em função de $p_\lambda(x)$ e $p_\lambda(y)$.

Proposição 1.3.7. *Valem as igualdades:*

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} p_n(x) p_n(y) \right) = \sum_{\lambda} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y).$$

$$\prod_{i,j} (1 + x_i y_j) = \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (-1)^{n-1} p_n(x) p_n(y) \right) = \sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} \epsilon_{\lambda} p_{\lambda}(x) p_{\lambda}(y).$$

Demonstração. Lembrando que a integração de $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ resulta em

$$\log((1-x)^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n, \text{ segue que } \log \left(\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} \right) = \sum_{i,j} \log((1 - x_i y_j)^{-1}) =$$

$$\sum_{i,j} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} x_i^n y_j^n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\sum_i x_i^n \right) \left(\sum_j y_j^n \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} p_n(x) p_n(y). \text{ Isso estabelece}$$

nossa primeira igualdade. A segunda igualdade da primeira linha decorre dos resultados que constam na Seção 5.1 da referência [8], tomando $f(n) = p_n(x) p_n(y)$ e $x = 1$, donde $h(n) = \sum_{w \in S_n} p_{\rho(w)}(x) p_{\rho(w)}(y) = \sum_{\lambda \vdash n} c_{\lambda} p_{\rho(w)}(x) p_{\rho(w)}(y)$, sendo $c_{\lambda} = |\{w \in S_n : \rho(w) = \lambda\}|$, e lembrando do que foi feito anteriormente que $c_{\lambda} = n! z_{\lambda}^{-1}$.

A demonstração das demais igualdades é análoga. \square

Agora é imediata a verificação do efeito de aplicar ω em p_{λ} e é disso que trata a proposição seguinte.

Proposição 1.3.8. *Seja $\lambda \vdash n$. Então*

$$\omega p_{\lambda} = \epsilon_{\lambda} p_{\lambda}.$$

Em outras palavras, p_{λ} é um autovetor associado ao autovalor ϵ_{λ} .

Demonstração. Vamos olhar para ω agindo nas funções simétricas nas variáveis $y = (y_1, y_2, \dots)$, enquanto $x = (x_1, x_2, \dots)$ serão consideradas escalares. Então:

$$\begin{aligned} \omega \left(\sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda}(x) p_{\lambda}(y) \right) &= \omega \left(\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} \right) \stackrel{a}{=} \sum_{\nu} m_{\nu}(x) \omega(h_{\nu}(y)) \stackrel{b}{=} \\ &= \sum_{\nu} m_{\nu}(x) e_{\nu}(y) \stackrel{c}{=} \prod_{i,j} (1 + x_i y_j) \stackrel{d}{=} \sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} \epsilon_{\lambda} p_{\lambda}(x) p_{\lambda}(y), \end{aligned}$$

onde as igualdades decorrem de: (a) Proposição 1.3.4; (b) Teorema 1.3.3; (c) Proposição 1.3.2; (d) Proposição 1.3.7.

Como $\{p_\lambda(x)\}$ é linearmente independente, os coeficientes de $p_\lambda(x)$ na primeira e na última somas são iguais, isto é, $\omega(p_\lambda(y)) = \epsilon_\lambda p_\lambda(y)$. \square

Notemos em particular que $\omega p_n = (-1)^{n-1} p_n$, ou $\omega p_n(x) = -p_n(-x)$. Além disso, restringindo ω ao espaço vetorial Λ^n cuja dimensão é $p(n)$, como $\{p_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é um conjunto linearmente independente, pela proposição acima, o polinômio característico (normalizado para ser mônico) da transformação linear $\omega : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^n$ é dado por $(x-1)^{\alpha(n)}(x+1)^{\beta(n)}$, onde $\alpha(n)$ e $\beta(n)$ são, respectivamente, os números de partições de n em um número par e ímpar de partes pares.

Concluimos esta seção apresentando um resultado que expressa h_n e e_n em termos de p_λ .

Proposição 1.3.9. *Temos que*

$$h_n = \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} p_\lambda$$

$$e_n = \sum_{\lambda \vdash n} \epsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda$$

Demonstração. Substituindo $y = (t, 0, 0, \dots)$ em

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y),$$

e observando que

$$\begin{aligned}
\sum_{r \geq 1} p_r t^{r-1} &= \sum_{i \geq 1} \sum_{r \geq 1} x_i^r t^{r-1} \\
&= \sum_{i \geq 1} \frac{x_i}{1 - x_i t} \\
&= \sum_{i \geq 1} \frac{d}{dt} \log \left(\frac{1}{1 - x_i t} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \log \left(\prod_{i \geq 1} (1 - x_i t)^{-1} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \log(H(t)) \\
&= H'(t)/H(t),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
H(t) &= \exp \left(\sum_{r \geq 1} p_r \frac{t^r}{r} \right) \\
&= \prod_{r \geq 1} \exp \left(p_r \frac{t^r}{r} \right) \\
&= \prod_{r \geq 1} \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(p_r t^r)^{m_r}}{r^{m_r} m_r!} \\
&= \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ n \geq 1}} z_\lambda^{-1} p_\lambda t^n,
\end{aligned}$$

segue que $\prod_i (1 - x_i t)^{-1} = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ n \geq 1}} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) t^n$, mas $\prod_i (1 - x_i t)^{-1} = \sum_{k \geq 0} h_k t^k$, conforme

demonstração do Teorema 1.3.3. Logo, $h_n = \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} p_\lambda$.

Aplicando ω em h_n , temos $e_n = \omega(h_n) = \omega \left(\sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} p_\lambda \right) = \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} \omega(p_\lambda) = \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} \epsilon_\lambda p_\lambda$. □

1.3.5 Produto escalar e ortogonalidade

Nesta seção, vamos introduzir um produto escalar em Λ , ou seja, uma forma bilinear $\Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{Q}$, que denotaremos \langle, \rangle . Lembremos que se $\{u_i\}$ e $\{v_j\}$ são bases de um espaço vetorial V , um produto escalar em V fica completamente determinado pelos valores $\langle u_i, v_j \rangle$. Dizemos que as bases $\{u_i\}$ e $\{v_j\}$ são duais se $\langle u_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ (o delta de Kronecker).

Definimos um produto escalar em Λ exigindo que $\{m_\lambda\}$ e $\{h_\mu\}$ sejam bases duais, ou seja,

$$\langle m_\lambda, h_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}, \forall \lambda, \mu \in Par.$$

Essa exigência em relação às bases $\{m_\lambda\}$ e $\{h_\mu\}$ na definição do produto escalar ficará clara ao longo desta seção nos resultados que apresentamos a seguir.

Proposição 1.3.10. *O produto escalar $\langle, \rangle : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{Q}$ é simétrico.*

Demonstração. Pela bilinearidade, é suficiente provar que $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ para bases $\{f\}$ e $\{g\}$ de Λ .

Tomemos $\{f\} = \{g\} = \{h_\lambda\}$, então $\langle h_\lambda, h_\mu \rangle = \left\langle \sum_v N_{\lambda v} m_v, h_\mu \right\rangle = N_{\lambda\mu} = N_{\mu\lambda} = \langle h_\mu, h_\lambda \rangle$. \square

O lema seguinte é uma ferramenta importante para a verificação de ortogonalidade em certas classes de funções simétricas.

Lema 1.3.2. *Sejam $\{u_\lambda\}$ e $\{v_\lambda\}$ bases de Λ tais que $u_\lambda, v_\lambda \in \Lambda^n, \forall \lambda \vdash n$. Então, $\{u_\lambda\}$ e $\{v_\lambda\}$ são bases duais se, e somente se,*

$$\sum_\lambda u_\lambda(x)v_\lambda(x) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}.$$

Demonstração. Sejam $m_\lambda = \sum_\rho \zeta_{\lambda\rho} u_\rho$ e $h_\mu = \sum_v \eta_{\mu v} v_v$. Então, $\delta_{\lambda\mu} = \langle m_\lambda, h_\mu \rangle = \sum_{\rho,v} \zeta_{\lambda\rho} \eta_{\mu v} \langle u_\rho, v_v \rangle$.

Para cada $n \geq 0$ fixo, pensamos em $\zeta = (\zeta_{\lambda\rho})$ e $\eta = (\eta_{\mu\nu})$ como matrizes indexadas por $Par(n)$ e seja A a matriz dada por $A_{\rho\nu} = \langle u_\rho, v_\nu \rangle$. Então a igualdade anterior resulta em $I = \zeta A \eta^t$. Logo,

$$\begin{aligned} \{u_\lambda\} \text{ e } \{v_\lambda\} \text{ são bases duais} &\iff A = I \\ &\iff I = \zeta \eta^t \\ &\iff I = \zeta^t \eta \\ &\iff \delta_{\rho\nu} = \sum_\lambda \zeta_{\lambda\rho} \eta_{\lambda\nu}. \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.3.4, temos

$$\begin{aligned} \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} &= \sum_\lambda m_\lambda(x) h_\lambda(y) = \\ &= \sum_\lambda \left(\sum_\rho \zeta_{\lambda\rho} u_\rho(x) \right) \left(\sum_\nu \eta_{\lambda\nu} v_\nu(y) \right) = \sum_{\rho,\nu} \left(\sum_\lambda \zeta_{\lambda\rho} \eta_{\lambda\nu} \right) u_\rho(x) v_\nu(y). \end{aligned}$$

Se $\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y)$, então $\sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y) = \sum_{\rho,\nu} \left(\sum_\lambda \zeta_{\lambda\rho} \eta_{\lambda\nu} \right) u_\rho(x) v_\nu(y)$, donde $\delta_{\rho\nu} = \sum_\lambda \zeta_{\lambda\rho} \eta_{\lambda\nu}$ e, então, $\{u_\lambda\}$ e $\{v_\lambda\}$ são bases duais de Λ .

Se $\{u_\lambda\}$ e $\{v_\lambda\}$ são bases duais, então $\delta_{\rho\nu} = \sum_\lambda \zeta_{\lambda\rho} \eta_{\lambda\nu}$. Logo, $\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\rho,\nu} \left(\sum_\lambda \zeta_{\lambda\rho} \eta_{\lambda\nu} \right) u_\rho(x) v_\nu(y) = \sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y)$. \square

A proposição seguinte estabelece que $\{p_\lambda\}$ é uma base ortogonal de Λ .

Proposição 1.3.11. *Temos $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda\mu}$ (e, portanto, $\{p_\lambda\}$ é uma base ortogonal de Λ).*

Demonstração. Pelo lema anterior e pela Proposição 1.3.7, temos que $\{p_\lambda\}$ e $\left\{ \begin{smallmatrix} p_\mu \\ z_\mu \end{smallmatrix} \right\}$ são bases duais de Λ . Logo, $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda\mu}$. \square

Observamos que $\langle p_\lambda, p_\lambda \rangle = z_\lambda \neq 1$. Logo, a base $\{p_\lambda\}$ não é ortonormal. A norma $\|p_\lambda\| = \langle p_\lambda, p_\lambda \rangle = \sqrt{z_\lambda}$ não é, em geral, um número racional. Daí, $\left\{ \frac{p_\lambda}{\|p_\lambda\|} \right\}$ forma uma base ortonormal de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ (o espaço vetorial das funções simétricas sobre \mathbb{R}).

Na próxima seção veremos uma base de Λ que é ortonormal e, mais do que isso, cada elemento desta base expresso como combinação linear dos elementos de $\{m_\lambda\}$ tem coeficientes inteiros.

Para finalizar esta seção, temos um corolário da última proposição e mais uma proposição.

Corolário 1.3.5. $\langle f, f \rangle \geq 0, \forall f \in \Lambda$ e $\langle f, f \rangle = 0$ se, e somente se, $f = 0$.

Demonstração. Escrevendo $f = \sum_{\lambda} c_{\lambda} p_{\lambda}$, então

$$\langle f, f \rangle = \sum_{\lambda} c_{\lambda}^2 z_{\lambda}.$$

Como $z_{\lambda} > 0$, o resultado segue. □

Proposição 1.3.12. A involução $\omega : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ é uma isometria, isto é,

$$\langle \omega f, \omega g \rangle = \langle f, g \rangle, \forall f, g \in \Lambda.$$

Demonstração. Como o produto escalar é bilinear, basta considerar $f = p_{\lambda}$ e $g = p_{\lambda}$. Então, pela Proposição anterior, $\langle p_{\lambda}, p_{\lambda} \rangle = z_{\lambda} \delta_{\lambda\lambda} = z_{\lambda}$ e, pela Proposição 1.3.8, $\langle \omega p_{\lambda}, \omega p_{\lambda} \rangle = \langle \epsilon_{\lambda} p_{\lambda}, \epsilon_{\lambda} p_{\lambda} \rangle = \epsilon_{\lambda} \epsilon_{\lambda} \langle p_{\lambda}, p_{\lambda} \rangle = \epsilon_{\lambda} \epsilon_{\lambda} z_{\lambda} \delta_{\lambda\lambda} = \epsilon_{\lambda}^2 z_{\lambda} = z_{\lambda}$, pois $\epsilon_{\lambda} = \pm 1$. □

A seção seguinte define a função simétrica chamada *Função de Schur*. Faremos duas abordagens dessas funções: uma combinatória e outra clássica.

1.3.6 Função de Schur

A Função de Schur, denotada por s_λ , para uma partição λ , não tem uma definição tão simples quanto m_λ , e_λ , h_λ ou p_λ . Encontra-se s_λ definida de muitas maneiras (equivalentes). Primeiramente apresentamos s_λ em termos de m_λ (definição combinatória) e, depois, via sua definição clássica, isto é, aquela que envolve o quociente de determinantes e que esta última implica na primeira.

A seguir, apresentamos alguns fatos sobre *Tabela de Young Semi-Simples*, pois estes são os principais objetos combinatórios associados às funções de Schur e serão bastante utilizadas ao longo deste texto.

Seja $\lambda \vdash n$. Uma *Tabela de Young Semi-Simples (TYSS)* de forma λ é uma matriz $T = (T_{ij})$ de inteiros positivos de forma λ , isto é, $1 \leq i \leq l(\lambda)$ e $1 \leq j \leq \lambda_i$, cujas entradas em cada linha são não-decrescentes e em cada coluna são estritamente crescentes. O comprimento de uma TYSS é seu número de entradas.

Um exemplo de uma TYSS de forma $(6, 5, 3, 3)$ é:

1	1	1	3	4	4
2	4	4	5	5	
5	5	7			
6	9	9			

Denotaremos $sh(T) = \lambda$ para indicar que T é uma TYSS de forma λ . Logo, o comprimento de T é igual a $|sh(T)|$.

Podemos pensar numa TYSS de forma λ como sendo um diagrama de Young de λ no qual os quadrados são preenchidos com os inteiros positivos. Por exemplo, nossa TYSS acima resulta em

1	1	1	3	4	4
2	4	4	5	5	
5	5	7			
6	9	9			

Dizemos que T tem tipo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, denotando $\alpha = \text{tipo}(T)$, se T tem $\alpha_i = \alpha_i(T)$ entradas (ou partes) iguais a i . A nossa TYSS acima tem tipo $(3, 1, 1, 4, 4, 1, 1, 0, 2)$. Para cada TYSS T de tipo α escrevemos $x^T = x_1^{\alpha_1(T)} x_2^{\alpha_2(T)} \dots$. A TYSS do nosso exemplo resulta em $x^T = x_1^3 x_2 x_3 x_4^4 x_5^4 x_6 x_7 x_8^2$.

Se λ e μ são partições tais que $\mu \subseteq \lambda$ (ou seja, $\mu_i \leq \lambda_i, \forall i$), definimos uma *Tabela de Young Semi-Simples de forma diagonal* λ/μ (ou simplesmente *forma diagonal* λ/μ) como um diagrama diagonal $T = (T_{ij})$ de inteiros positivos tais que $1 \leq i \leq l(\lambda)$ e $\mu_i < j \leq \lambda_i$, que é não-decrescente em cada linha e estritamente crescente em cada coluna. Um exemplo de uma TYSS de forma $(6, 5, 3, 3)/(3, 1)$ é:

			3	4	4
		1	4	7	7
	2	2	6		
3	8	8			

O *peso* de uma TYSS é a seqüência $\pi = (\theta^1, \dots, \theta^r)$, onde $\theta^i = \lambda_i - \mu_i$.

Definimos um Diagrama de Young de forma $\lambda/\mu, \mu \subseteq \lambda$, retirando-se do diagrama de λ os quadrados referentes ao diagrama de μ . Então uma TYSS de forma λ/μ pode ser vista como um Diagrama de Young de forma λ/μ cujos quadrados são preenchidos com os inteiros positivos de modo que cada linha seja não-decrescente e cada coluna seja crescente. No nosso exemplo, a TYSS de forma $(6, 5, 3, 3)/(3, 1)$ pode ser representada por:

			3	4	4
		1	4	7	7
	2	2	6		
3	8	8			

As definições de $\text{tipo}(T)$ e x^T são idênticas àquelas de uma TYSS dadas anteriormente. A seguir temos a definição de $s_{\lambda/\mu}$ e s_λ (Função de Schur).

Definição 1.3.6. *Sejam $\lambda, \mu \in \text{Par}$ tais que $\mu \subset \lambda$. A Função de Schur diagonal $s_{\lambda/\mu} = s_{\lambda/\mu}(x)$ de forma λ/μ nas variáveis $x = (x_1, x_2, \dots)$ é a série de potências*

$$s_{\lambda/\mu}(x) = \sum_T x^T$$

onde T percorre todos as TYSS de forma λ/μ . Se $\mu = \emptyset$, chamamos $s_\lambda(x)$ de Função de Schur de forma λ .

Por exemplo, as TYSS de forma $(2, 1)$ com maior entrada no máximo 3 são:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & & 1 & 2 & & 1 & 1 & & 1 & 3 & & 2 & 2 & & 2 & 3 & & 1 & 2 & & 1 & 3 \\ 2 & & & 2 & & & 3 & & & 3 & & & 3 & & & 3 & & & 3 & & 2 & & & \end{array}$$

Então, $s_{21}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + 2x_1x_2x_3 = m_{21}(x_1, x_2, x_3) + 2m_{111}(x_1, x_2, x_3)$. Logo, como o maior número de variáveis distintas que aparece em s_{21} é 3, temos $s_{21} = m_{21} + 2m_{111}$.

Ainda não sabemos se, em geral, $s_{\lambda/\mu}$ é de fato uma função simétrica. É disto que se ocupa o teorema seguinte.

Teorema 1.3.4. *Sejam $\lambda, \mu \in \text{Par}$ tais que $\mu \subset \lambda$. Então, a Função de Schur diagonal $s_{\lambda/\mu}$ é simétrica.*

Demonstração. É suficiente mostrar que $s_{\lambda/\mu}$ é invariante sob a mudança de x_i por x_{i+1} , pois toda permutação se escreve como o produto de transposições e se queremos trocar i por j , basta fazer as transposições i e $i + 1$, depois i e $i + 2$, ..., i e $j - 1$ e, por fim, i por j .

Sejam $|\lambda/\mu| = n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ uma composição de n , neste caso, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = n$. Seja $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \alpha_{i+2}, \dots)$. Se $\mathcal{I}_{\lambda/\mu, \alpha}$ é o conjunto de todas as TYSS de forma λ/μ e tipo α , então procuremos uma bijeção $\varphi : \mathcal{I}_{\lambda/\mu, \alpha} \rightarrow \mathcal{I}_{\lambda/\mu, \tilde{\alpha}}$.

Seja $T \in \mathcal{I}_{\lambda/\mu, \alpha}$. Consideremos as partes de T iguais a i ou $i + 1$. Estas partes podem não ocorrer em algumas colunas de T , enquanto outras colunas poderão

conter ambas. Estas colunas vamos ignorar, pois a troca de i por $i + 1$ não altera a função neste caso. As demais partes iguais a i ou $i + 1$ ocorrem sozinhas em cada coluna e consistem de linhas com certo número r de i 's seguido de s $i + 1$'s.

Por exemplo, em T pode aparecer:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & & & i \\
 i & & i & \underbrace{i \ i}_{r=2} & \underbrace{i+1 \ i+1 \ i+1 \ i+1}_{s=4} & & & & & & i+1 \\
 i+1 & & i+1 & & & & & & & &
 \end{array}$$

Neste exemplo, $r = 2$ e $s = 4$. Em cada tal linha trocamos os r i 's e s $i + 1$'s por s i 's e r $i + 1$'s para obter:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & & & i \\
 i & & i & \underbrace{i \ i \ i \ i}_{s=4} & \underbrace{i+1 \ i+1}_{r=2} & & & & & & i+1 \\
 i+1 & & i+1 & & & & & & & &
 \end{array}$$

Logo, o resultado desta troca, que denotamos $\varphi(T)$, está em $\mathcal{I}_{\lambda/\mu, \tilde{\alpha}}$ e, portanto, φ estabelece a bijeção desejada. □

Definição 1.3.7. *Se $\lambda \vdash n$ e α é uma composição de n , então $K_{\lambda\alpha}$ denota o número de TYSS de forma λ e tipo α . $K_{\lambda\alpha}$ é chamado de Número de Kostka. Mais geralmente, definimos o Número de Kostka diagonal $K_{\lambda/v, \alpha}$ como o número de TYSS de forma diagonal λ/v e tipo α .*

Por exemplo, $K_{21/1, (1,1)} = 2$, pois nos quadrados da primeira e segunda linhas podemos ter 1 ou 2 e $K_{21/1, (1,2)} = 0$ porque o diagrama de $21/1$ possui apenas 2 quadrados e, então, não comporta um 1 e dois 2.

O número $K_{\lambda\alpha}$ tem um papel importante na teoria das funções simétricas. C. Kostka foi quem primeiro considerou a expansão de s_λ em termos de m_μ e por isso $K_{\lambda\alpha}$ recebe seu nome. Pela Definição 1.3.6, temos

$$s_\lambda = \sum_{\alpha} K_{\lambda\alpha} x^\alpha,$$

soma feita sobre todas as composições α de n . Além disso, pela definição de m_μ , segue que:

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} K_{\lambda\mu} m_\mu \quad \text{e}$$

$$s_{\lambda/v} = \sum_{\mu \vdash n} K_{\lambda/v, \mu} m_\mu.$$

Não se conhece uma fórmula para $K_{\lambda/v, \mu}$ ou $K_{\lambda\mu}$ em geral. Para certos λ, v e μ , uma fórmula pode ser dada. No próximo capítulo, vamos dar uma fórmula para $K_{\lambda(1^n)}$. Agora, vamos considerar o significado combinatório do número $K_{\lambda(1^n)}$, também denotado por f^λ .

Por definição, f^λ é o número de maneiras de inserir os inteiros $1, 2, \dots, n$ na forma $\lambda \vdash n$, cada número aparecendo sozinho, tal que cada linha e coluna são crescentes. Tal diagrama assim obtido é chamada de *Tabela de Young Simples* (TYS). Por exemplo, os YYS de forma $(3, 2)$, para $n = 5$, são:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 5 & 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & & 3 & 5 & & 3 & 4 & & 2 & 5 & & 2 & 4 & \end{array}$$

então $f^{(3,2)} = 5$. A proposição seguinte nos dá uma outra interpretação combinatória de f^λ .

Proposição 1.3.13. *Seja $\lambda \in \text{Par}$. Então o número f^λ conta a quantidade de seqüências $\emptyset = \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^n = \lambda$ de partições (identificadas com seus respectivos*

diagramas) tais que λ^i é obtida de λ^{i-1} pela adição de um quadrado no diagrama de λ^{i-1} .

Demonstração. Inserimos i no quadrado adicionado ao diagrama de λ^{i-1} para obter λ^i e, assim, um TYS de forma λ . \square

Para ilustrar esse resultado e sua demonstração, vejamos o caso $\lambda = (3, 2)$:

$$\begin{aligned} \emptyset &\subset 1 \subset 2 \subset 3 \subset 31 \subset 32 \\ \emptyset &\subset 1 \subset 2 \subset 21 \subset 31 \subset 32 \\ \emptyset &\subset 1 \subset 2 \subset 21 \subset 22 \subset 32 \\ \emptyset &\subset 1 \subset 11 \subset 21 \subset 31 \subset 32 \\ \emptyset &\subset 1 \subset 11 \subset 21 \subset 22 \subset 32 \end{aligned}$$

Em alguns casos, quando trabalhamos com Funções de Schur e números de Kostka $K_{\lambda\alpha}$, é conveniente utilizar uma *TYSS reversa de forma diagonal* λ/μ que é um diagrama de inteiros positivos da forma λ/μ que é não-crescente em cada linha e decrescente em cada coluna. O tipo de uma TYSS reversa é definido exatamente como aquele de uma TYSS regular.

Por exemplo: o diagrama abaixo é uma TYSS reversa de forma $(6, 5, 3, 3)/(3, 1)$ e tipo $(2, 2, 1, 0, 3, 2, 2, 1)$.

$$\begin{array}{cccc} & & 6 & 5 & 5 \\ & & 8 & 5 & 2 & 2 \\ & 7 & 7 & 3 & & \\ 6 & 1 & 1 & & & \end{array}$$

Definimos $\widehat{K}_{\lambda/\mu, \alpha}$ como o número de TYSS reversas de forma λ/μ e tipo α . A proposição seguinte mostra que em alguns casos não há diferença em considerar TYSS ou TYSS reversa.

Proposição 1.3.14. *Sejam $|\lambda/\mu| = n$ e α uma composição de n . Então, $\widehat{K}_{\lambda/\mu, \alpha} = K_{\lambda/\mu, \alpha}$.*

Demonstração. Seja T uma TYSS reversa de forma λ/μ e tipo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$. Seja k a maior parte (entrada) de T . Consideremos a transformação $T_{ij} \xrightarrow{\sigma} k + 1 - T_{ij}$. Então $\widehat{K}_{\lambda/\mu, \alpha} = K_{\lambda/\mu, \bar{\alpha}}$, onde $\bar{\alpha} = (\alpha_k, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_1, 0, 0, \dots)$. De fato, como T tem tipo $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, 0, 0, \dots)$, o inteiro j aparece α_j vezes em T , donde o número de vezes que j aparece em $\sigma(T)$ é igual ao número de vezes que $k + 1 - j$ aparece em T . Pela demonstração do Teorema 1.3.4, temos $K_{\lambda/\mu, \bar{\alpha}} = K_{\lambda/\mu, \alpha}$. \square

Vamos agora estabelecer, como conseqüência da proposição a seguir, que $\{s_\lambda\}$ forma uma \mathbb{Q} -base para Λ .

Proposição 1.3.15. *Suponhamos $\lambda, \mu \in \text{Par}(n)$ tais que $K_{\lambda\mu} \neq 0$. Então $\mu \leq \lambda$ (ordem de dominância) e $K_{\lambda\lambda} = 1$.*

Demonstração. Como $K_{\lambda\mu} \neq 0$, por definição, existe alguma TYSS T de forma λ e tipo μ . Suponhamos que uma entrada $T_{ij} = k$ apareça abaixo da k -ésima linha (ou seja, $i > k$). Então, $1 \leq T_{1j} < T_{2j} < \dots < T_{ij} = k$ para $i > k$, o que é impossível porque $i = |\{T_{1j}, T_{2j}, \dots, T_{ij}\}| \leq k$, isto é, $i \leq k$, o que seria uma contradição. Logo, $1, 2, \dots, k$ aparecem nas primeiras k linhas, donde $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$, como queríamos. Além disso, se $\mu = \lambda$, então $T_{ij} = i, \forall (i, j)$. Logo, $K_{\lambda\lambda} = 1$. \square

Corolário 1.3.6. $\{s_\lambda : \lambda \in \text{Par}(n)\}$ é uma base para Λ^n (conseqüentemente $\{s_\lambda : \lambda \in \text{Par}\}$ é uma base para Λ).

Demonstração. Pela proposição anterior, $(K_{\lambda\mu})$ (que é a matriz que expressa s_λ 's em termos de m_μ 's) é uma matriz triangular inferior cujas entradas na diagonal principal são todas iguais a 1. Logo, $(K_{\lambda\mu})$ é invertível. Portanto, pela Proposição 1.2.1, $\{s_\lambda : \lambda \in \text{Par}(n)\}$ é uma base para Λ^n . \square

Temos a seguir uma tabela que contém alguns coeficientes $K_{\lambda\mu}$.

s_1	=	m_1
s_{11}	=	m_{11}
s_2	=	$m_{11} + m_2$
s_{111}	=	m_{111}
s_{21}	=	$2m_{111} + m_{21}$
s_3	=	$m_{111} + m_{21} + m_3$
s_{1111}	=	m_{1111}
s_{211}	=	$3m_{1111} + m_{211}$
s_{22}	=	$2m_{1111} + m_{211} + m_{22}$
s_{31}	=	$3m_{1111} + 2m_{211} + m_{22} + m_{31}$
s_4	=	$m_{1111} + m_{211} + m_{22} + m_{31} + m_4$
s_{11111}	=	m_{11111}
s_{2111}	=	$4m_{11111} + m_{2111}$
s_{221}	=	$5m_{11111} + 2m_{2111} + m_{221}$
s_{311}	=	$6m_{11111} + 3m_{2111} + m_{221} + m_{311}$
s_{32}	=	$5m_{11111} + 3m_{2111} + 2m_{221} + m_{311} + m_{32}$
s_{41}	=	$4m_{11111} + 3m_{2111} + 2m_{221} + 2m_{311} + m_{32} + m_{41}$
s_5	=	$m_{11111} + m_{2111} + m_{221} + m_{311} + m_{32} + m_{41} + m_5$

A seguir, apresentamos a definição clássica da Função de Schur s_λ e algumas conseqüências. Veremos, por exemplo, que a partir dessa definição pode-se obter a definição combinatória de $s_{\lambda/\mu}$ já mencionada.

Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ um conjunto finito de variáveis e $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ um

monômio e consideremos o polinômio a_α dado por:

$$a_\alpha = a_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \sum_{w \in S_n} \epsilon(w) w(x^\alpha), \text{ onde } w(x^\alpha) = x_1^{\alpha_{w(1)}} \cdots x_n^{\alpha_{w(n)}}$$

e $\epsilon(w) = \pm 1$, dependendo do sinal da permutação w (é 1 se w for uma permutação par e -1 se for ímpar). Este polinômio satisfaz $w(a_\alpha) = \epsilon(w)a_\alpha, \forall w \in S_n$. Além disso, $a_\alpha = 0$ se $\alpha_i = \alpha_j$ para algum $i \neq j$. Logo, vamos assumir que $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n \geq 0$ e vamos escrever $\alpha = \lambda + \delta$, sendo $\lambda \in Par$ tal que $l(\lambda) \leq n$ e $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$. Então:

$$a_\alpha = a_{\lambda+\delta} = \sum_{w \in S_n} \epsilon(w) w(x^{\lambda+\delta}),$$

que podemos escrever como

$$a_{\lambda+\delta} = \det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_1^{\lambda_2+n-2} & \cdots & x_1^{\lambda_n} \\ x_2^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_2+n-2} & \cdots & x_2^{\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{\lambda_1+n-1} & x_n^{\lambda_2+n-2} & \cdots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix}.$$

Podemos mostrar por indução, ou cálculo direto, que $x_i - x_j, 1 \leq i < j \leq n$, divide $a_{\lambda+\delta}$ em $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ e, portanto, $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) = \det(x_i^{n-j})_{1 \leq i, j \leq n} = a_\delta$ também divide $a_{\lambda+\delta}$. Além disso, $a_{\lambda+\delta}/a_\delta$ é simétrico. De fato, seja $w \in S_n$, então $w = w_1 \cdots w_k$, onde w_i são transposições e quando aplicamos w_i no determinante $a_{\lambda+\delta}$, trocamos duas linhas e ganhamos um sinal negativo, mas $w_i(a_\delta) = -a_\delta$, donde $w(a_{\lambda+\delta}/a_\delta) = a_{\lambda+\delta}/a_\delta \in \Lambda_n$.

Definição 1.3.8. A Função de Schur s_λ nas variáveis x_1, \dots, x_n correspondente à partição $\lambda, l(\lambda) \leq n$, é dada por

$$s_\lambda = a_{\lambda+\delta}/a_\delta$$

Os polinômios $a_{\lambda+\delta}$ tais que $\lambda \in Par$ e $l(\lambda) \leq n$, formam uma base do espaço vetorial \mathcal{A}_n dos polinômios anti-simétricos nas variáveis x_1, \dots, x_n sobre \mathbb{Q} . A multiplicação por a_δ é um isomorfismo de Λ_n para \mathcal{A}_n . Segue que $\{s_\lambda : l(\lambda) \leq n\}$ forma uma \mathbb{Q} -base para Λ_n .

Verifiquemos o efeito de aumentar o número de variáveis. Se $m \geq n$, então $a_\alpha(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = a_\alpha(x_1, \dots, x_n)$.⁽⁸⁾ Então, $\rho_{m,n}(s_\lambda(x_1, \dots, x_m)) = s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$.⁽⁹⁾ Logo, para cada partição λ , os polinômios $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ com $n \rightarrow \infty$, definem um único elemento $s_\lambda \in \Lambda^{|\lambda|}$. Daí, $\{s_\lambda : \lambda \in Par\}$ forma uma base para Λ .

O corolário da proposição a seguir expressa s_λ como polinômio em e_r e h_r . Para $1 \leq k \leq n$, seja $e_n^{(k)}$ a função simétrica elementar nas variáveis $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ e M a matriz $n \times n$ dada por

$$M = \left((-1)^{n-i} e_{n-i}^{(k)} \right)_{1 \leq i, k \leq n}.$$

Proposição 1.3.16. *Sejam $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $A_\alpha = (x_j^{\alpha_i})$ e $H_\alpha = (h_{\alpha_i - n + j})$ $n \times n$ matrizes. Então $A_\alpha = H_\alpha M$.*

Demonstração. Seja $E^{(k)}(t) = \sum_{r=0}^{n-1} e_r^{(k)} t^r = \prod_{i \neq k} (1 + x_i t)$. Logo, $H(t)E^{(k)}(-t) = (1 - x_k t)^{-1}$.

Extraindo o coeficiente de t^{α_i} obtemos $\sum_{j=1}^n h_{\alpha_i - n + j} (-1)^{n-j} e_{n-j}^{(k)} = x_k^{\alpha_i}$. Portanto, $H_\alpha M = A_\alpha$. □

Corolário 1.3.7. *Valem as igualdades*

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad n \geq l(\lambda) \text{ e}$$

$$s_\lambda = \det(e_{\lambda'_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq m}, \quad m \geq l(\lambda').$$

⁸identificamos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, \dots, 0)$

⁹ $\rho_{m,n}$ foi definido em 1.2

Demonstração. Da proposição anterior, $a_\alpha = \det(A_\alpha) = \det(H_\alpha)\det(M)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$. Em particular, $\det(M) = a_\delta$, pois $\det(H_\delta) = 1$. Logo, $a_\alpha = a_\delta \det(H_\alpha)$ ou, equivalentemente, $a_\alpha = a_\delta \sum_{w \in S_n} \epsilon(w) h_{\alpha-w(\delta)}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$. Tomando $\alpha = \lambda + \delta$ obtemos $a_\alpha/a_\delta = a_{\lambda+\delta}/a_\delta = s_\lambda = \det(H_\alpha) = \det(h_{\lambda_i-i+j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Por um resultado devido a Aitken [1], temos que $\det(h_{\lambda_i-\mu_i-i+j})_{1 \leq i,j \leq n} = \det(e_{\lambda'_i-\mu'_i-i+j})_{1 \leq i,j \leq m}$, onde $l(\lambda), l(\mu) \leq n$ e $l(\lambda'), l(\mu') \leq m$. Então, tomando $\mu = \emptyset$, $\det(e_{\lambda'_i-i+j})_{1 \leq i,j \leq m} = \det(h_{\lambda_i-i+j})_{1 \leq i,j \leq n} = s_\lambda$. \square

Como consequência deste corolário, obtemos $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}$, $\forall \lambda \in Par$ e $s_{(n)} = h_n$, donde $s_{(1^n)} = \omega(s_{(n)}) = \omega(h_n) = e_n$.

Já temos duas expansões do produto $\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}$, a saber:

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y) e$$

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} h_\lambda(x) m_\lambda(y) = \sum_{\lambda} h_\lambda(y) m_\lambda(x).$$

A seguir temos uma terceira expansão, desta vez em termos de s_λ .

Proposição 1.3.17. *Temos*

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda \in Par} s_\lambda(x) s_\lambda(y).$$

Demonstração. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$.

Como $\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} h_\lambda(x) m_\lambda(y) = \sum_{\alpha} h_\alpha(x) y^\alpha$ (admitindo $h_r = 0$ se $r < 0$), onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ com α_i inteiro positivo e $\sum \alpha_i < \infty$, então, multiplicando por $a_\delta(y) = \sum_{w \in S_n} \epsilon(w) w(y^\delta)$, temos

$$a_\delta(y) \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{w, \alpha} \epsilon(w) h_\alpha(x) y^{\alpha+w(\delta)},$$

Agora, multiplicando por $a_\delta(x)$ e usando o fato $a_\delta(x) \sum_{w \in S_n} \epsilon(w) h_{\beta-w(\delta)}(x) = a_\beta(x)$ (demonstração do corolário anterior), obtemos

$$\begin{aligned} a_\delta(x) a_\delta(y) \prod_{i,j}^n (1 - x_i y_j)^{-1} &= a_\delta(x) \sum_{w, \alpha} \epsilon(w) h_\alpha(x) y^{\alpha+w(\delta)} \\ &= a_\delta(x) \sum_{w, \beta} \epsilon(w) h_{\beta-w(\delta)}(x) y^\beta = \sum_{\beta} a_\beta(x) y^\beta, \end{aligned}$$

onde β percorre todas as n -uplas de inteiros positivos.

Como $a_{w(\beta)} = \epsilon(w) a_\beta$, podemos reescrever esta última soma como $\sum_{\beta} a_\beta(x) y^\beta = \sum_{\gamma} \sum_w a_\gamma(x) \epsilon(w) w(y^\gamma) = \sum_{\gamma} a_\gamma(x) a_\gamma(y)$, onde $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_n \geq 0$.

Logo, $a_\delta(x) a_\delta(y) \prod_{i,j}^n (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\gamma} a_\gamma(x) a_\gamma(y) = \sum_{\lambda} a_{\lambda+\delta}(x) a_{\lambda+\delta}(y)$. Agora, como $a_\delta \neq 0$ e $a_\delta(y) \neq 0$, segue que

$$\prod_{i,j}^n (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_\lambda(y).$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ temos o resultado:

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_\lambda(y).$$

□

Observações:

1. Na seção anterior, estabelecemos que duas bases $\{u_\lambda\}$ e $\{v_\lambda\}$ de Λ são duais (ortonormais) se $\sum_{\lambda} u_\lambda(x) v_\lambda(x) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}$. Então, pela proposição que acabamos de demonstrar, $\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$, ou seja, $\{s_\lambda : \lambda \in Par\}$ é uma base ortonormal para Λ .

2. Da demonstração da Proposição 1.3.8, sabemos que $\omega \left(\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} \right) = \prod_{i,j} (1 + x_i y_j)$. Então, $\prod_{i,j} (1 + x_i y_j) = \omega \left(\sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y) \right) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) s_{\lambda'}(y)$, onde ω age apenas sobre $y = (y_1, y_2, \dots)$.

Tomando o coeficiente de $x^{\mu} y^{\nu}$ em ambos os lados de $\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda \in Par} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y)$, temos o seguinte resultado.

Corolário 1.3.8. *Sejam $\mu, \nu \vdash n$. Então,*

$$\sum_{\lambda \vdash n} K_{\lambda\mu} K_{\lambda\nu} = N_{\mu\nu} = \langle h_{\mu}, h_{\nu} \rangle,$$

onde $K_{\lambda\mu}$ e $K_{\lambda\nu}$ denotam Números de Kotska e $N_{\mu\nu}$ é o número de \mathbb{N} -matrizes A tais que $r(A) = \mu$ e $c(A) = \nu$.

A seguir apresentamos a definição clássica da Função de Schur diagonal $s_{\lambda/\mu}$. Essa definição é consequência natural de algo bem conhecido em álgebra linear: $f \in \Lambda$ é unicamente determinada pelo produto escalar com s_{λ} , ou seja,

$$f = \sum_{\lambda} \langle f, s_{\lambda} \rangle s_{\lambda},$$

pois $\{s_{\lambda} : \lambda \in Par\}$ é uma base ortonormal de Λ .

Definição 1.3.9. *Sejam $\lambda, \mu \in Par$. Definimos a função simétrica $s_{\lambda/\mu}$ por*

$$\langle s_{\lambda/\mu}, s_{\nu} \rangle = \langle s_{\lambda}, s_{\mu} s_{\nu} \rangle, \forall \nu \in Par.$$

$s_{\lambda/\mu}$ é chamada de Função de Schur Diagonal.

Uma definição equivalente de $s_{\lambda/\mu}$ é a seguinte. Se $c_{\mu\nu}^{\lambda}$ são inteiros que satisfazem

$$s_{\mu} s_{\nu} = \sum_{\lambda} c_{\mu\nu}^{\lambda} s_{\lambda},$$

então definimos

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_v c_{\mu v}^\lambda s_v.$$

Os inteiros $c_{\mu v}^\lambda$ são chamados *Coefficientes de Littlewood-Richardson*.⁽¹⁰⁾ A proposição a seguir generaliza o Corolário 1.3.7.

Proposição 1.3.18. *Valem as igualdades:*

$$s_{\lambda/\mu} = \det(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j})_{1 \leq i, j \leq n}, n \geq l(\lambda), \quad (11)$$

$$s_{\lambda/\mu} = \det(e_{\lambda'_i - \mu'_j - i + j})_{1 \leq i, j \leq m}, m \geq l(\lambda').$$

Demonstração. Vamos mostrar a primeira igualdade, pois a segunda se obtém da primeira analogamente ao que fizemos na demonstração do Corolário 1.3.7.

Sejam $x = (x_1, x_2, \dots)$ e $y = (y_1, y_2, \dots)$. Logo, se $c_{\mu v}^\lambda = \langle s_\lambda, s_\mu s_v \rangle$, então $s_\mu s_v = \sum_\lambda c_{\mu v}^\lambda s_\lambda$, $s_{\lambda/\mu} = \sum_v c_{\mu v}^\lambda s_v$ e

$$\sum_\lambda s_{\lambda/\mu}(x) s_\lambda(y) = \sum_{\lambda, v} c_{\mu v}^\lambda s_v(x) s_\lambda(y) = \sum_v s_v(x) s_\mu(y) s_v(y)$$

e, então,

$$\sum_\lambda s_{\lambda/\mu}(x) s_\lambda(y) = s_\mu(y) \sum_v h_v(x) m_v(y),$$

pois $\sum_v h_v(x) m_v(y) = \prod_{i, j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_v s_v(x) s_v(y)$.

Suponhamos agora $y = (y_1, \dots, y_n)$. Então, restringimos as somas acima às partições λ e v tais que $l(\lambda), l(v) \leq n$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_\lambda s_{\lambda/\mu}(x) a_{\lambda+\delta}(y) &= \sum_v h_v(x) m_v(y) a_{\mu+\delta}(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} h_\alpha(x) y^\alpha a_{\mu+\delta}(y) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} h_\alpha(x) \sum_{w \in \mathcal{S}_n} y^{\alpha+w(\mu+\delta)} \quad (\text{sendo } h_\alpha(x) = 0 \text{ se } \alpha \text{ possui algum } \alpha_i < 0). \end{aligned}$$

¹⁰A referência [8] em seu apêndice traz uma abordagem mais profunda de $c_{\mu v}^\lambda$ e da regra de Littlewood-Richardson para determiná-los.

¹¹Esta igualdade é conhecida como a *Identidade de Jacobi-Trudi*

Extraindo o coeficiente de $y^{\lambda+\delta}$, nesta última soma obtemos:

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{w \in S_n} \epsilon(w) h_{\lambda+\delta-w(\lambda+\delta)} = \det (h_{\lambda_i-\mu_j-i+j})_{1 \leq i, j \leq n}, n \geq l(\lambda).$$

□

Corolário 1.3.9. $\omega(s_{\lambda/\mu}) = s_{\lambda'/\mu'}$.

Muito do que foi abordado até aqui pode ser obtido a partir do *Algoritmo RSK* (que veremos no capítulo seguinte) a exemplo do que é feito na Seção 7.12 da referência [8]. Para finalizar esta Seção, vamos mostrar que a definição clássica das Funções de Schur implica na definição combinatória como havíamos prometido.

Sejam $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$ e $z = (z_1, z_2, \dots)$ três conjuntos de variáveis independentes. Como $s_\mu s_\nu = \sum_\lambda c_{\mu\nu}^\lambda s_\lambda$ e $s_{\lambda/\mu} = \sum_\nu c_{\mu\nu}^\lambda s_\nu$, temos

$$\begin{aligned} & \sum_\mu \sum_\lambda s_{\lambda/\mu}(x) s_\lambda(z) s_\mu(y) = \sum_\mu \sum_{\lambda, \nu} c_{\mu\nu}^\lambda s_\nu(x) s_\lambda(z) s_\mu(y) = \\ & = \sum_\mu \sum_\nu s_\nu(x) s_\mu(z) s_\nu(z) s_\mu(y) = \sum_\mu s_\mu(y) s_\mu(z) \sum_\nu s_\nu(x) s_\nu(z) = \\ & = \prod_{j,k} (1 - y_j z_k)^{-1} \prod_{i,k} (1 - x_i z_k)^{-1} = \sum_\lambda s_\lambda(x, y) s_\lambda(z), \end{aligned}$$

onde $(x, y) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$. Segue que

$$s_\lambda(x, y) = \sum_\mu s_{\lambda/\mu}(x) s_\mu(y) = \sum_{\mu, \nu} c_{\mu\nu}^\lambda s_\mu(y) s_\nu(x).$$

De forma mais geral temos a seguinte proposição.

Proposição 1.3.19. *Temos*

$$s_{\lambda/\mu}(x, y) = \sum_\nu s_{\lambda/\nu}(x) s_{\nu/\mu}(y),$$

onde a soma é feita sob todas as partições ν tais que $\lambda \supset \nu \supset \mu$.

Demonstração. Temos

$$\sum_{\mu} s_{\lambda/\mu}(x, y) s_{\mu}(z) = s_{\lambda}(x, y, z) = \sum_{\nu} s_{\lambda/\nu}(x) s_{\nu}(y, z) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} s_{\lambda/\nu}(x) s_{\nu/\mu}(y) s_{\mu}(z).$$

Logo, comparando o coeficiente de $s_{\mu}(z)$ na igualdade, temos

$$s_{\lambda/\mu}(x, y) = \sum_{\nu} s_{\lambda/\nu}(x) s_{\nu/\mu}(y).$$

□

A fórmula da proposição anterior pode ser generalizada: sejam $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ n conjuntos de variáveis independentes e λ, μ partições, então

$$s_{\lambda/\mu}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = \sum_{(v)} \prod_{i=1}^n s_{v^{(i)}/v^{(i-1)}}(x^{(i)}), \quad (1.2)$$

cujas soma é feita sob todas as seqüências $(v) = (v^{(0)}, v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$ de partições tais que $v^{(0)} = \mu, v^{(n)} = \lambda$ e $v^{(0)} \subset v^{(1)} \subset \dots \subset v^{(n)}$.

A Proposição 1.3.18 nos diz que $s_{\lambda/\mu}(x) = 0$ a menos que $\lambda_i \geq \mu_i$, isto é, a menos que $\lambda \supset \mu$, pois se $\lambda_r < \mu_r$, para algum r , temos $\lambda_i \leq \lambda_r < \mu_r \leq \mu_j, 1 \leq j \leq r \leq i \leq n$ e $\lambda_i - \mu_j - i + j < 0$ e, conseqüentemente, a matriz $(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j})$ tem um bloco $(n - r + 1) \times r$ cujas entradas são todas 0 e, portanto, seu determinante é nulo.

Vejam os resultados da igualdade (1.2) quando cada $x^{(i)}$ consiste de uma única variável x_i . Pela discussão do parágrafo acima, para uma única variável x , $s_{\lambda/\mu}(x) = 0$ a menos que o diagrama de λ/μ seja uma linha horizontal e, neste caso, $s_{\lambda/\mu}(x) = x^{|\lambda/\mu|}$. Assim, cada produto no somatório de (1.2) é um monômio $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, onde $\alpha_i = |v^{(i)}/v^{(i-1)}|$ e, portanto, temos $s_{\lambda/\mu}(x_1, \dots, x_n)$ expresso como uma soma de monômios x^{α} , um monômio para cada TYSS T de forma λ/μ . Daí, obtemos

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_T x^T,$$

como queríamos.

1.3.7 Matrizes de Transição

Nesta seção, vamos obter as matrizes de transição entre as bases $m = \{m_\lambda\}$, $e = \{e_\lambda\}$, $h = \{h_\lambda\}$ e $s = \{s_\lambda\}$ a partir de duas matrizes que veremos a seguir, a saber, a matriz de transição entre as bases m e s e a matriz J que descrevemos mais a frente.

As matrizes aqui são indexadas nas linhas e colunas por partições de um inteiro positivo n . Para tanto, vamos usar a ordem lexicográfica reversa no conjunto $Par(n)$. Por exemplo, para $n = 4$, $Par(4) = \{4, 31, 22, 211, 1111\}$ e uma matriz $(M_{\lambda\mu})$ indexada por $\lambda, \mu \in Par(4)$, é da forma:

$$\begin{pmatrix} M_{1111,1111} & M_{1111,211} & M_{1111,22} & M_{1111,31} & M_{1111,4} \\ M_{211,1111} & M_{211,211} & M_{211,22} & M_{211,31} & M_{211,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{4,1111} & M_{4,211} & M_{4,22} & M_{4,31} & M_{4,4} \end{pmatrix},$$

pois $4 \geq^R 31 \geq^R 22 \geq^R 211 \geq^R 1111$.

Lembremos que uma matriz $(M_{\lambda\mu}) \in M_{p(n)}(\mathbb{Z})$ indexada por partições de n é dita triangular superior se $M_{\lambda\mu} = 0$ a menos que $\lambda \leq^R \mu$, e estritamente unitriangular se, além disso, $M_{\lambda\lambda} = 1$. Da mesma forma, define-se matriz estritamente triangular inferior e estritamente unitriangular inferior.

Seja U_n o conjunto das matrizes triangulares (superiores e inferiores) e U'_n o das estritamente unitriangulares (superiores e inferiores).

Proposição 1.3.20. U_n e U'_n são grupos com respeito a multiplicação matricial.

Demonstração. Suponhamos $M, N \in U_n$. Então $(MN)_{\lambda\mu} = \sum_v M_{\lambda v} N_{v\mu}$ é zero a menos que exista uma partição v tal que $\mu \geq^R v \geq^R \lambda$, isto é, a menos que $\mu \geq^R \lambda$. Pela mesma razão, $(MN)_{\lambda\lambda} = M_{\lambda\lambda} N_{\lambda\lambda} = 1$. Logo, $MN \in U_n$.

Seja $M \in U_n$. A igualdade $\sum_{\mu} M_{\lambda\mu} x_{\mu} = y_{\lambda}$ é equivalente a $\sum_{\mu} (M^{-1})_{\lambda\mu} y_{\mu} = x_{\lambda}$. Para um λ fixo, a primeira igualdade para y_v , onde $v \geq \lambda$, envolve apenas x_{μ} para $v \leq \mu$, logo, para $\mu \geq \lambda$. Então, o mesmo é válido para a segunda igualdade, donde $(M^{-1})_{\lambda\mu} = 0$ a menos que $\mu \leq \lambda$. Daí, $M^{-1} \in U_n$.

A demonstração para U'_n é análoga. □

Vamos denotar por J a *matriz transposição* dada por

$$J_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1, & \text{se } \lambda' = \mu \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por exemplo, se $n = 3$, então $Par(3) = \{3, 21, 111\}$, $3 >^R 21 >^R 111$ e

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que a matriz J é sempre simétrica, pois $\lambda' = \mu$ se, e somente se, $\lambda = \mu'$.

Proposição 1.3.21. *M é triangular superior (respectivamente unitriangular superior) se, e somente se, JMJ é triangular inferior (respectivamente unitriangular inferior).*

Demonstração. Se $N = MJM$, então $N_{\lambda\mu} = M_{\lambda'\mu'}$. Como $\mu' \geq^R \lambda'$ se, e somente se, $\lambda \geq^R \mu$, então o resultado segue. □

Se $u = \{u_{\lambda}\}$ e $v = \{v_{\lambda}\}$ são bases de Λ^n , cada qual indexada por partições de n , denotamos por $M(u, v)$ a matriz $(M_{\lambda\mu})$ dos coeficientes de:

$$u_{\lambda} = \sum_{\mu} M_{\lambda\mu} v_{\mu};$$

Essa é uma matriz não-singular com entradas inteiras.

Definição 1.3.10. $M(u, v)$ é chamada de matriz de transição da base u para a base v .

A seguir, temos quatro propriedades de $M(u, v)$ que nos serão úteis. Sejam $u = \{u_\lambda\}$, $v = \{v_\lambda\}$ e $w = \{w_\lambda\}$ bases de Λ^n . Então:

$$(a) \quad M(u, v)M(v, w) = M(u, w);$$

$$(b) \quad M(u, v) = M(v, u)^{-1}.$$

Se $u' = \{u'_\lambda\}$ e $v' = \{v'_\lambda\}$ são bases duais a u e v , respectivamente, então:

$$(c) \quad M(u', v') = M(v, u)^t = M(u, v)^*, \text{ onde } * \text{ denota a transposta inversa.};$$

$$(d) \quad M(\omega u, \omega v) = M(u, v), \omega : \Lambda \longrightarrow \Lambda \text{ é a involução definida em 1.3.3.}$$

As igualdades (a) e (b) e em (c) decorrem da álgebra linear enquanto que (d) é uma consequência de: $\omega(u_\lambda) = \omega\left(\sum_{\mu} M_{\lambda\mu} v_\mu\right) = \sum_{\mu} M_{\lambda\mu} \omega(v_\mu)$.

Seja $K = M(s, m)$. Consideremos as bases de Λ : $m = \{m_\lambda\}$, $e = \{e_\lambda\}$, $h = \{h_\lambda\}$ e $s = \{s_\lambda\}$. Vamos mostrar que todas as matrizes de transição entre qualquer par destas bases é obtida a partir de J e K .

Como $\langle m_\lambda, h_\lambda \rangle = \delta_{\lambda\mu}$ e $\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$, m e h são duais e s é auto-dual. Logo, $M(s, h) = K^*$, pela parte (c) da observação.

Em vista da propriedade (d) da observação acima, temos

$$M(s, e) = M(\omega(s), \omega(e)) = M(\omega(s), h) = M(\omega(s), s)M(s, h) = JK^*,$$

pois em vista do Corolário 1.3.9 temos que $J = M(\omega(s), s)$.

Observemos que $\sum_{\mu} J_{\lambda\mu} J_{\nu\mu} = 1$ se, e somente se, $\lambda' = \mu$.

Utilizando (a) e (b) da observação obtemos as demais matrizes. A tabela a seguir nos dá as respectivas matrizes de transição:

	e	h	m	s
e	I	$K^t JK^*$	$K^t JK$	$K^t J$
h	$K^t JK^*$	I	$K^t K$	K^t
m	$K^{-1} JK^*$	$K^{-1} K^*$	I	K^{-1}
s	JK^*	K^*	K	I

Lembremos que $K = (K_{\lambda\mu})$ é uma matriz triangular superior, onde $K_{\lambda\mu}$ é o Número de Kostka, conforme Definição 1.3.7. Assim, considerando a tabela acima, finalizamos esta seção com as seguintes observações:

1. $M(s, h)$ e $M(h, s)$ são do tipo unitriangular inferior;
2. $M(s, m)$ e $M(m, s)$ são do tipo unitriangular superior;
3. $M(e, m)$ é simétrica;
4. $M(h, m)$ é simétrica;
5. $M(e, h) = M(h, e)$;
6. $M(h, s) = M(s, m)^t$.

1.3.8 A Regra de Murnaghan-Nakayama

Até agora, temos expressado as Funções de Schur em termos de m_λ , h_λ e e_λ . Nesta seção, vamos considerar p_λ . Começamos com algumas definições.

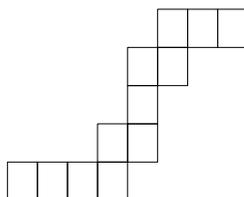
Definição 1.3.11. *Sejam $\lambda, \mu \in \text{Par}$ com $\mu \subset \lambda$. Dizemos que o diagrama de Young de λ/μ é conexo se seu interior, visto como a união dos quadrados sólidos que o constituem, for conexo.*

Exemplo: $\lambda/\mu = 21/1$ não é conexo, pois seu diagrama é:



Definição 1.3.12. Uma faixa com fronteira é um diagrama de Young conexo no qual não aparecem quatro quadrados com um vértice em comum.

Exemplo: $\lambda/\mu = 86554/5443$ é uma faixa com fronteira, pois:



Notemos que dados inteiros a_1, \dots, a_k , existe uma única faixa com fronteira λ/μ (a menos de transformações) com a_i quadrados na linha i , isto é, $a_i = \lambda_i - \mu_i$. Logo, o número de faixas com fronteira de tamanho n (a menos de transformações) é 2^{n-1} , que é o número de composições de n . De fato: se k inteiros aparecem na composição de α , chamamos α uma k -composição. Se $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ é uma k -composição α de n definimos um subconjunto $\theta(\alpha)$ de $[n-1] = \{1, 2, \dots, n-1\}$ com $k-1$ elementos por $\theta(\alpha) = \{a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}\}$. Isso nos dá uma bijeção entre todas as k -composições de n e os subconjuntos de $[n-1]$ com $k-1$ elementos. Logo, existem $\binom{n-1}{k-1}$ k -composições de n . Daí,

$$|Comp(n)| = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

Dada uma faixa com fronteira B , chamamos o número de linhas de B menos 1 de altura de B e denotamos por $alt(B)$.

De posse dessas definições e observações, temos um teorema que relaciona faixas com fronteira e funções simétricas.

Teorema 1.3.5. *Para qualquer $\mu \in \text{Par}$ e $r \in \mathbb{N}$ temos*

$$s_\mu p_r = \sum_{\lambda} (-1)^{\text{alt}(\lambda/\mu)} s_\lambda, \quad (1.3)$$

onde λ percorre o conjunto de todas as partições $\lambda \supset \mu$ para as quais λ/μ é uma faixa com fronteira de tamanho r .

Demonstração. Sejam $n \geq l(\mu)$ e $\delta = (n-1, n-2, \dots, 0)$ e consideremos todas as funções desta demonstração nas variáveis x_1, \dots, x_n . Na igualdade $a_\alpha = a_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \sum_{w \in S_n} \epsilon(w) w(x^\alpha)$ coloquemos $\alpha = \mu + \delta$ e multiplicamos por

$$p_r = \sum_{j=1}^n x_j^r. \text{ Obtemos com isso,}$$

$$a_{\mu+\delta} p_r = \sum_{w \in S_n} \epsilon(w) w(x^{\mu+\delta}) \sum_{j=1}^n x_j^r = \sum_{j=1}^n \sum_{w \in S_n} \epsilon(w) w(x^{\mu+\delta}) x_j^r = \sum_{j=1}^n a_{\mu+\delta+r\gamma_j}, \quad (1.4)$$

onde γ_j é a seqüência com 1 na j -ésima posição e 0 nas demais.

Colocamos a seqüência $\mu + \delta + r\gamma_j$ em ordem não-crescente. Se a seqüência resultante tem dois termos iguais, então estes termos contribuirão com 0 para a igualdade (1.4). Caso não possua dois termos iguais, existirão $p \leq q$ para os quais:

$$\mu_{p-1} + n - p + 1 > \mu_q + n - q + r > \mu_p + n - p,$$

e neste caso, $a_{\mu+\delta+r\gamma_j} = (-1)^{q-p} a_{\lambda+\delta}$, onde λ é a partição $\lambda = (\mu_1, \dots, \mu_{p-1}, \mu_q + p - q + r, \mu_p + 1, \dots, \mu_{q-1} + 1, \mu_{q+1}, \dots, \mu_n)$.

Tal partição é exatamente aquela para a qual λ/μ é uma faixa com fronteira B de tamanho r e $\text{alt}(B) = q - p$. Logo,

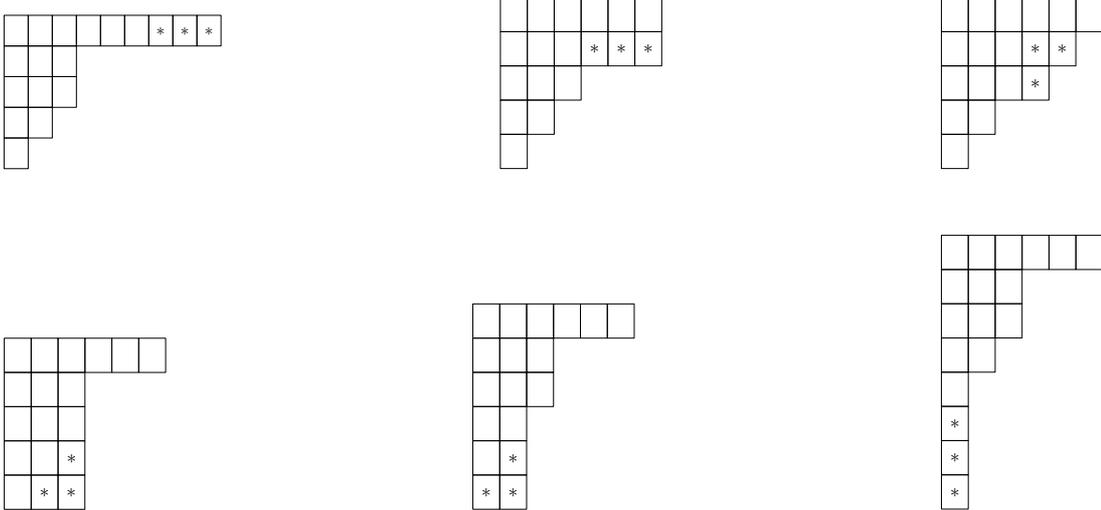
$$a_{\mu+\delta} p_r = \sum_r (-1)^{\text{alt}(\lambda/\mu)} a_{\lambda+\delta}.$$

Agora, dividindo por a_δ e fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos (1.3). □

A seguir, temos dois exemplos de como adicionar faixas com fronteira a alguma partição dada.

Exemplos:

(a) Seja $\mu = 63321$. Uma faixa com fronteira de tamanho 3 pode ser adicionada a μ das seguintes maneiras:



Logo, $s_{63321}p_3 = s_{93321} + s_{66321} - s_{65421} - s_{63333} - s_{633222} + s_{63321111}$.

(b) Seja $\delta = (n - 1, n - 2, \dots, 0)$. Existem apenas duas faixas com fronteira de tamanho 2 que podem ser adicionadas a δ e, então:

$$s_{\delta}p_2 = s_{(n+1, n-2, n-3, \dots, 1)} - s_{(n-1, n-2, \dots, 2, 1, 1, 1)}.$$

A seguir, temos uma definição que relacionando tabelas (TYSS) e faixas com fronteira.

Definição 1.3.13. *Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ uma composição de n . Definimos uma TYSS faixa com fronteira de forma λ/μ (sendo $|\lambda/\mu| = n$) e tipo α como o resultado da inserção de inteiros positivos no diagrama de λ/μ de modo que:*

- (a) cada linha e coluna é não-decrescente;
- (b) o inteiro i aparece α_i vezes;
- (c) o conjunto dos quadrados ocupados por i forma uma faixa com fronteira.

Exemplo: O diagrama abaixo é uma tabela faixa com fronteira de forma 7555 e tipo (5, 2, 3, 0, 5, 7).

1	1	1	1	6	6	6
1	2	2	5	6		
3	3	5	5	6		
3	5	5	6	6		

Definimos também a altura da TYSS faixa com fronteira T como

$$alt(T) = alt(B_1) + \dots + alt(B_k),$$

onde B_1, \dots, B_k são as faixas com fronteira que aparecem em T .

No exemplo acima, $alt(T) = 1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 7$.

Se, no Teorema 1.3.5, multiplicarmos s_μ por $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \dots$, então vamos obter o seguinte resultado.

Teorema 1.3.6. *Temos*

$$s_\mu p_\alpha = \sum_{\lambda} \mathcal{X}^{\lambda/\mu}(\alpha) s_\lambda,$$

onde $\mathcal{X}^{\lambda/\mu}(\alpha) = \sum_T (-1)^{alt(T)}$, soma feita sobre todas as TYSS faixa com fronteira de forma λ/μ e tipo α .

Agora, podemos expressar $s_{\lambda/\mu}$ em termos das funções simétricas soma de potências. É disso que se ocupa o corolário abaixo cujo resultado é conhecido como a *Regra de Murnaghan-Nakayama*.

Corolário 1.3.10. *Temos*

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_v z_v^{-1} \mathcal{X}^{\lambda/\mu}(v) p_v.$$

Demonstração. Do Teorema 1.3.6, temos que $\mathcal{X}^{\lambda/\mu}(v) = \langle s_\mu p_v, s_\lambda \rangle = \langle p_v, s_{\lambda/\mu} \rangle$ e, pela Proposição 1.3.11, $\langle p_v, p_\mu \rangle = z_v \delta_{v\mu}$. Logo, como $\left\langle \sum_\gamma z_\gamma^{-1} \mathcal{X}^{\lambda/\mu}(\gamma) p_\gamma, p_v \right\rangle = \sum_\gamma z_\gamma^{-1} \mathcal{X}^{\lambda/\mu}(\gamma) \langle p_\gamma, p_v \rangle = \mathcal{X}^{\lambda/\mu}(v) = \langle s_{\lambda/\mu}, p_v \rangle$, o resultado segue. \square

A seguir temos um outro corolário do Teorema 1.3.6 obtido tomando $\mu = \emptyset$ no Teorema 1.3.5.

Corolário 1.3.11. *Temos:*

$$p_\alpha = \sum_\lambda \mathcal{X}^\lambda(\alpha) s_\lambda.$$

A proposição seguinte nos mostra que as propriedades de ortogonalidade das bases $\{s_\lambda\}$ e $\{p_\lambda\}$ implicam em relações de ortogonalidade para os coeficientes $\mathcal{X}^\lambda(\mu)$.

Proposição 1.3.22. *Para μ e λ fixos, temos:*

$$(a) \sum_\lambda \mathcal{X}^\lambda(\mu) \mathcal{X}^\lambda(v) = z_\mu \delta_{\mu v}$$

$$(b) \sum_v z_v^{-1} \mathcal{X}^\lambda(v) \mathcal{X}^\mu(v) = \delta_{\lambda\mu}$$

Demonstração. (a) Pelo Corolário 1.3.11, $p_\mu = \sum_\lambda \mathcal{X}^\lambda(\mu) s_\lambda$ e $p_v = \sum_\gamma \mathcal{X}^\gamma(v) s_\gamma$.

Logo,

$$z_\mu \delta_{\mu v} = \langle p_\mu, p_v \rangle = \left\langle \sum_\lambda \mathcal{X}^\lambda(\mu) s_\lambda, \sum_\gamma \mathcal{X}^\gamma(v) s_\gamma \right\rangle = \sum_{\lambda, \gamma} \mathcal{X}^\lambda(\mu) \mathcal{X}^\gamma(v) \langle s_\lambda, s_\gamma \rangle = \sum_\lambda \mathcal{X}^\lambda(\mu) \mathcal{X}^\lambda(v).$$

(b) Pelo Corolário 1.3.10, $s_\lambda = \sum_v z_v^{-1} \mathcal{X}^\lambda(v) p_v$ e $s_\mu = \sum_\gamma z_\gamma^{-1} \mathcal{X}^\mu(\gamma) p_\gamma$. Logo,

$$\delta_{\lambda\mu} = \langle s_\mu, s_\lambda \rangle = \sum_{v, \gamma} z_v^{-1} z_\gamma^{-1} \mathcal{X}^\lambda(v) \mathcal{X}^\mu(\gamma) \langle p_\gamma, p_v \rangle = \sum_{v, \gamma} z_v^{-1} z_\gamma^{-1} \mathcal{X}^\lambda(v) \mathcal{X}^\mu(\gamma) z_\gamma \delta_{\gamma v} = \sum_v z_v^{-1} \mathcal{X}^\lambda(v) \mathcal{X}^\lambda(v).$$

□

Finalizamos esta seção com uma consideração sobre o coeficiente $\mathcal{X}^\lambda(v)$ que será melhor estudado no próximo capítulo.

Os coeficientes $\mathcal{X}^\lambda(v)$ para $\lambda, v \vdash n$ tem uma interpretação algébrica importante. Eles são os caracteres irredutíveis do grupo simétrico S_n , ou seja, os caracteres irredutíveis \mathcal{X}^λ de S_n são indexados de uma maneira natural por partições $\lambda \vdash n$ e $\mathcal{X}^\lambda(v)$ é o valor de \mathcal{X}^λ num elemento $w \in S_n$ de tipo cíclico v .⁽¹²⁾

Assim, a Proposição 1.3.22 estabelece as relações de ortogonalidade satisfeitas pelos caracteres irredutíveis de S_n .

1.3.9 Funções Quase-simétricas

Nesta seção estamos interessados em expandir s_λ em termos não de uma base de Λ , mas de uma base do espaço \mathcal{Q} das funções quase-simétricas que vamos definir abaixo. Esta expansão tem muitas aplicações em combinatória.

Definição 1.3.14. *Uma função quase-simétrica nas variáveis x_1, x_2, \dots com coeficientes em \mathbb{Q} , é uma série de potências $f = f(x) \in \mathbb{Q}[[x_1, x_2, \dots]]$ de grau limitado tal que para quaisquer a_1, \dots, a_k inteiros positivos temos*

$$[x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_k}^{a_k}]f = [x_{j_1}^{a_1} \cdots x_{j_k}^{a_k}]f,$$

sempre que $i_1 < \cdots < i_k$ e $j_1 < \cdots < j_k$, onde $[x^\alpha]f$ é o coeficiente de x^α em f .

Por exemplo, a função $f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k$ é quase-simétrica. Observe-mos que toda função simétrica é quase-simétrica, mas o contrário não é verdade: $\sum_{i < j} x_i^2 x_j$ é quase-simétrica mas não é simétrica.

¹²isto será verificado mais adiante.

Denotamos por \mathcal{Q}^n o conjunto de todas as funções quase-simétricas homogêneas de grau n .⁽¹³⁾ É claro que \mathcal{Q}^n é um espaço vetorial sobre \mathbb{Q} .

Seja $Comp(n)$ o conjunto das composições de n . Para $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in Comp(n)$ definimos a função quase-simétrica monomial M_α por:

$$M_\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_k}^{\alpha_k}.$$

Se $f \in \mathcal{Q}^n$, então $f = \sum_{\alpha \in Comp(n)} ([x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}]f)M_\alpha$, pois cada monômio x^α em f tem o mesmo coeficiente $[x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}]f$. Logo, $\{M_\alpha : \alpha \in Comp(n)\}$ é uma base para \mathcal{Q}^n e $\dim \mathcal{Q}^n = |Comp(n)| = 2^{n-1}$.

Sejam $f \in \mathcal{Q}^m$ e $g \in \mathcal{Q}^n$. Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in Comp(m)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l) \in Comp(n)$, então $\alpha + \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l) \in Comp(m+n)$ e $[x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_k}^{\alpha_k} x_{j_1}^{\beta_1} \cdots x_{j_l}^{\beta_l}]fg = [x_{r_1}^{\alpha_1} \cdots x_{r_k}^{\alpha_k} x_{s_1}^{\beta_1} \cdots x_{s_l}^{\beta_l}]fg$, pois $[x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_k}^{\alpha_k}]f = [x_{r_1}^{\alpha_1} \cdots x_{r_k}^{\alpha_k}]f$ e $[x_{j_1}^{\beta_1} \cdots x_{j_l}^{\beta_l}]g = [x_{s_1}^{\beta_1} \cdots x_{s_l}^{\beta_l}]g$. Daí resulta que $fg \in \mathcal{Q}^{m+n}$ e, então, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^0 \oplus \mathcal{Q}^1 \oplus \dots$ é chamada de *álgebra (ou anel) das funções quase-simétricas sobre \mathbb{Q}* .

Antes de prosseguir, façamos algumas considerações sobre as composições $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ de n . Vimos anteriormente que podemos estabelecer uma bijeção entre as composições α de n e subconjuntos de $[n-1]$. Associamos o conjunto $S_\alpha = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}\}$ com a composição α e a composição $co(S) = (s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_2, \dots, n - s_{k-1})$ com o conjunto $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}\}$, sendo $s_i < s_j$ se $i < j$ e $s_i \in [n-1]$. Logo, $co(S_\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k) = \alpha$ e $S_{co(S)} = (s_1, s_2, \dots, s_{k-1}) = S$.

A partir dessas considerações, podemos definir um outro conjunto de funções quase-simétricas: para $\alpha \in Comp(n)$, definimos a *função quase-simétrica fundamental* por

$$L_\alpha = \sum_{\substack{i_1 \leq \dots \leq i_n \\ i_j < i_{j+1} \text{ se } j \in S_\alpha}} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}.$$

¹³o termo *homogênea* refere-se novamente aos monômios

A proposição a seguir mostra que $\{L_\alpha : \alpha \in \text{Comp}(n)\}$ também é uma base para \mathcal{Q}^n .

Proposição 1.3.23. *Para $\alpha \in \text{Comp}(n)$ temos*

$$L_\alpha = \sum_{S_\alpha \subseteq T \subseteq [n-1]} M_{\text{co}(T)};$$

$$M_\alpha = \sum_{S_\alpha \subseteq T \subseteq [n-1]} (-1)^{|T-S_\alpha|} L_{\text{co}(T)}.$$

Conseqüentemente, $\{L_\alpha : \alpha \in \text{Comp}(n)\}$ é uma base para \mathcal{Q}^n .

Demonstração. Notemos que $x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_{k-1}}^{\alpha_{k-1}} x_{i_k}^{n-(\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1})}$, $\forall i_1 < \cdots < i_k$ aparece em L_α : basta tomar $x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_{\alpha_1}}$, $x_{i_{\alpha_1+1}} = \cdots = x_{i_{\alpha_1+\alpha_2}}$, \dots , $x_{i_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-2}+1}} = \cdots = x_{i_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}}}$ e $x_{i_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}+1}} = \cdots = x_{i_{n-(\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1})}}$. Logo, agrupando estes monômios obtemos M_α . Por outro lado, $M_\alpha = M_{\text{co}(S_\alpha)}$.

Observemos que os monômios acima são aqueles que possuem a menor quantidade de variáveis em L_α . Olhemos agora para os monômios que possuem $k+1$ variáveis cujo grau da “nova” variável é t . Há três possibilidades para t :

- $t < \alpha_1$
- $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i < t < \alpha_1 + \cdots + \alpha_{i+1}$ para algum i
- $t > \alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1}$

Por exemplo, supondo $t < \alpha_1$ em L_α e agrupando o monômios do forma $x_{i_1}^t x_{i_2}^{\alpha_1-t} x_{i_3}^{\alpha_2} \cdots x_{i_k}^{\alpha_{k-1}} x_{i_{k+1}}^{n-(\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1})}$, $i_1 < \cdots < i_{k+1}$. A soma de todos estes monômios resulta em $M_{(t, \alpha_1-t, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, n-(\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}))}$.

Por outro lado, tomando $T = \{t, \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, n - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1})\}$.

A igualdade $M_\alpha = \sum_{S_\alpha \subseteq T \subseteq [n-1]} (-1)^{|T-S_\alpha|} L_{\text{co}(T)}$, decorre do Teorema 2.1.1 da referência [1].

□

A proposição a seguir estabelece as condições sob as quais uma função quase-simétrica é uma função simétrica.

Proposição 1.3.24. *Seja $f = \sum_{\alpha \in \text{Comp}(n)} c_\alpha M_\alpha \in \mathcal{Q}^n$. Então, $f \in \Lambda^n$ se, e somente se, para quaisquer $\alpha, \beta \in \text{Comp}(n)$ com as mesmas entradas (ou seja, α e β são formadas pelos mesmos números), tivermos $c_\alpha = c_\beta$.*

Demonstração. Seja \mathcal{R}^n o subespaço de \mathcal{Q}^n que consiste de todas $f = \sum_{\alpha \in \text{Comp}(n)} c_\alpha M_\alpha$ que satisfazem as condições do enunciado, ou seja, tais que $c_\alpha = c_\beta$ se α e β são composições de n com entradas iguais.

Seja $\lambda \vdash n$. Definimos $R_\lambda = \sum_{\alpha} M_\alpha$, onde α percorre todas as permutações distintas das entradas de λ . Logo, $\{R_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é uma base para \mathcal{R}^n . Daí, $\dim \mathcal{R}^n = p(n)$ que é o número de partições de n . Por outro lado, $R_\lambda = m_\lambda \in \Lambda^n$, donde $\mathcal{R}^n \subseteq \Lambda^n$. Como $\dim \Lambda^n = p(n) = \dim \mathcal{R}^n$, então $\mathcal{R}^n = \Lambda^n$. \square

De agora em diante até o final desta seção, vamos considerar a conexão entre funções quase-simétricas e a teoria das P -partições.⁽¹⁴⁾ Como consequência, apresentamos $s_{\lambda/\mu}$ em termos de funções quase-simétricas.

Se X é um conjunto finito e $f : X \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, vamos denotar x^f por:

$$x^f = \prod_{t \in X} x_{f(t)} = \prod_{i \geq 1} x_i^{|f^{-1}(i)|}.$$

Definição 1.3.15. *Sejam $\pi = \pi_1 \cdots \pi_n \in S_n$, C uma cadeia (um conjunto totalmente ordenado) e $f : [n] \rightarrow C$. Dizemos que f é π -inversamente-compatível se:*

$$f(\pi_1) \leq f(\pi_2) \leq \cdots \leq f(\pi_n)$$

$$f(\pi_i) < f(\pi_{i+1}) \text{ se } \pi_i > \pi_{i+1}.$$

¹⁴Para uma melhor compreensão sobre P -partições sugerimos a referência [7].

Lema 1.3.3. *Sejam $\pi \in S_n$ e S_π^r o conjunto de todas as funções π -inversamente-compatíveis $f : [n] \rightarrow \mathbb{N}$. Então,*

$$\sum_{f \in S_\pi^r} x^f = L_{co(\pi)}(x).$$

Demonstração. Conseqüência imediata da comparação entre as definições de L_α e π -inversamente-compatível. \square

Seja P um conjunto parcialmente ordenado com n elementos. Uma aplicação $\sigma : P \rightarrow \mathbb{N}$ preserva ordem se, para $i \leq j$, $\sigma(i) \leq \sigma(j)$ e inverte ordem se $\sigma(i) \geq \sigma(j)$. Com isso, lembremos a seguinte definição.

Definição 1.3.16. (a) *Uma P -partição de n é uma aplicação $\sigma : P \rightarrow \mathbb{N}$ que inverte a ordem tal que $\sum_{i \in P} \sigma(i) = n$.*

(b) *Uma P -partição inversa de n é uma aplicação $\sigma : P \rightarrow \mathbb{N}$ que preserva ordem tal que $\sum_{i \in P} \sigma(i) = n$.*

Se $\mathcal{A}^r(P)$ denota o conjunto das P -partições inversas, definimos uma outra função quase-simétrica por:

$$K_P(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}^r(P)} x^\sigma.$$

Essa função de fato é quase-simétrica, pois se $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ e $x_{j_1} \cdots x_{j_k}$ são monômios que aparecem em $K_P(x)$, então tomando $\sigma : P \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\sigma(i_\alpha) = j_\alpha$, temos $x_{j_1} \cdots x_{j_k} = x_{\sigma(i_1)} \cdots x_{\sigma(i_k)}$, donde $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ e $x_{j_1} \cdots x_{j_k}$ têm o mesmo coeficiente em $K_P(x)$.

Notemos que para cada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \text{Comp}(n)$, $K_P(x)$ nos dá o número de P -partições inversas com α_i partes iguais a i (contando as $\sigma \in \mathcal{A}^r(P)$ tais que $x^\sigma = x^\alpha$).

Até aqui, consideramos P munido com a relação de ordem parcial natural (se $i \leq j$ em P , então $i \leq j$ em \mathbb{Z}). De uma maneira mais geral, definimos uma bijeção

$\theta : P \longrightarrow [n]$ e, assim, podemos pensar em P com a ordem parcial de $[n]$ pela identificação de $t \in P$ com $\theta(t) \in [n]$. Isto é conveniente ao que vamos fazer de agora em diante porque evitamos trabalhar em $[n]$ com duas ordens deferentes. Com isso temos a seguinte definição.

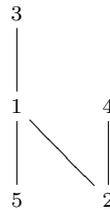
Definição 1.3.17. *Uma (P, θ) -partição inversa é uma aplicação $\sigma : P \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que:*

- (i) se $s \leq t$ em P , então $\sigma(s) \leq \sigma(t)$ (σ preserva ordem);
- (ii) se $s < t$ em P e $\theta(s) > \theta(t)$, então $\sigma(s) < \sigma(t)$.

Notemos que se θ preserva ordem, então uma (P, θ) -partição inversa é uma P -partição inversa. Por outro lado, se θ inverte a ordem, então uma (P, θ) -partição inversa $\sigma : P \longrightarrow \mathbb{N}$ é uma P -partição inversa estrita (ou seja, se $i < j$ em P então $\sigma(i) < \sigma(j)$ em \mathbb{N}).

A seguir apresentamos um teorema do qual decorre um corolário que vai ajudar a expressar $s_{\lambda/\mu}$ em termos de funções quase-simétricas. Antes de enunciá-lo, vamos definir um conjunto importante: seja $\mathcal{L}(P, \theta)$ o conjunto de todas as permutações $\pi = \pi_1 \cdots \pi_n \in S_n$ tais que $\omega : P \longrightarrow [n]$ definida por $\omega(\theta^{-1}(\pi_i)) = i$ é uma extensão linear de P .⁽¹⁵⁾

Exemplo: se (P, θ) é dada por



então, $\theta^{-1}(3) > \theta^{-1}(1) > \theta^{-1}(5), \theta^{-1}(2) < \theta^{-1}(4), \theta^{-1}(2) < \theta^{-1}(1) < \theta^{-1}(3)$.

¹⁵Lembremos: se $|P| = n$, uma extensão linear de P é uma bijeção $\sigma : P \longrightarrow \mathbf{n}$ que preserva ordem, onde \mathbf{n} é o conjunto $[n]$ munido com a relação de ordem usual em \mathbb{N} (que é uma relação de ordem total).

Logo, $\mathcal{L}(P, \theta) = \{52143, 52413, 25143, 25413, 24513, 52134, 25134\}$, o que pode ser conferido na tabela seguinte:

	52143	52413	25143	25413	24513	52134	25134
$\omega(\theta^{-1}(5))$	1	1	2	2	3	1	2
$\omega(\theta^{-1}(2))$	2	2	1	1	1	2	1
$\omega(\theta^{-1}(1))$	3	4	3	4	4	3	3
$\omega(\theta^{-1}(4))$	4	3	4	3	2	5	5
$\omega(\theta^{-1}(3))$	5	5	5	5	5	4	4

Teorema 1.3.7. *Seja $\mathcal{A}^r(P, \theta)$ o conjunto de todas as (P, θ) -partições inversas. Então:*

$$\mathcal{A}^r(P, \theta) = \bigcup_{\pi \in \mathcal{L}(P, \theta)} S_{\pi}^r. \text{ }^{(16)}$$

Demonstração. Se $\pi \in \mathcal{L}(P, \theta)$, então qualquer função π -inversamente compatível $\sigma : P \rightarrow \mathbb{N}$ é uma (P, θ) -partição inversa, pois $\sigma(\pi_1) \leq \sigma(\pi_2) \leq \dots \leq \sigma(\pi_n)$ e $\sigma(\pi_i) < \sigma(\pi_{i+1})$ se $\pi_i > \pi_{i+1}$, donde olhando para π_i como imagem por θ de algum elemento de P , temos

(i) se $\pi_i \leq \pi_{i+1}$, então $\sigma(\pi_i) \leq \sigma(\pi_{i+1})$;

(ii) se $\pi_i > \pi_{i+1}$, então $\sigma(\pi_i) < \sigma(\pi_{i+1})$.

Resulta, pois, que $\bigcup_{\pi \in \mathcal{L}(P, \theta)} S_{\pi}^r \subseteq \mathcal{A}^r(P, \theta)$. Por outro lado, se $\pi \notin \mathcal{L}(P, \theta)$, então existem $i < j$ tais que $\theta^{-1}(\pi_i) > \theta^{-1}(\pi_j)$. Então, para algum $i \leq k < j$ temos $\theta^{-1}(\pi_k) > \theta^{-1}(\pi_{k+1})$, donde fazendo a identificação de $t \in P$ com $\theta(t)$, temos $\pi_k > \pi_{k+1}$. Se $\sigma : P \rightarrow \mathbb{N}$ é uma função π -inversamente compatível, então $\sigma(\pi_i) \leq \dots \leq \sigma(\pi_k) < \sigma(\pi_{k+1}) \leq \dots \leq \sigma(\pi_j)$. Logo, $\sigma \notin \mathcal{A}^r(P, \theta)$, pois $\theta^{-1}(\pi_{k+1}) < \theta^{-1}(\pi_k)$ em P , $\theta(\theta^{-1}(\pi_{k+1})) > \theta(\theta^{-1}(\pi_k))$, mas $\sigma(\pi_{k+1}) > \sigma(\pi_k)$. Isso nos mostra que $\mathcal{A}^r(P, \theta) \subseteq \bigcup_{\pi \in \mathcal{L}(P, \theta)} S_{\pi}^r$. \square

¹⁶ $\dot{\cup}$ representa união disjunta.

De maneira análoga à definição de $K_\rho(x)$, definimos $K_{\rho,\theta}(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}^r(P,\theta)} x^\sigma$ e verifica-se que $K_{\rho,\theta}(x)$ é uma função quase-simétrica.

Corolário 1.3.12. *Temos*

$$K_{\rho,\theta} = \sum_{\pi \in \mathcal{L}^r(P,\theta)} L_{co(\pi)}.$$

Demonstração. Pelo Lema 1.3.3, $L_{co(\pi)}(x) = \sum_{f \in S_\pi^r} x^f$. Logo, fazendo $\mathcal{B} = \bigcup_{\pi \in \mathcal{L}(P,\theta)} S_\pi^r$, segue que

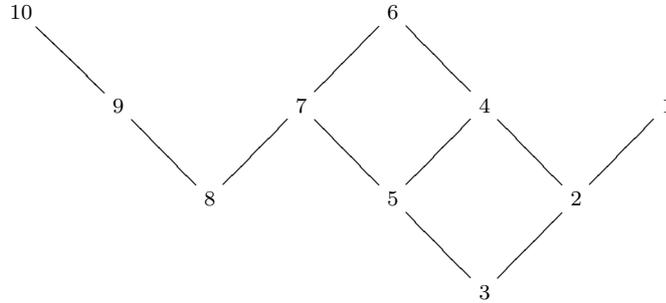
$$K_{\rho,\theta}(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}^r(P,\theta)} x^\sigma = \sum_{\sigma \in \mathcal{B}} x^\sigma = \sum_{\pi \in \mathcal{L}(P,\theta)} \sum_{\sigma \in S_\pi^r} x^\sigma = \sum_{\pi \in \mathcal{L}(P,\theta)} L_{co(\pi)}(x).$$

□

Definimos agora $P_{\lambda/\mu}$ como sendo o conjunto cujos elementos são os quadrados (i, j) do diagrama de λ/μ , com $|\lambda/\mu| = n$, parcialmente ordenados componente a componente. Definimos também $\theta_{\lambda/\mu} : P_{\lambda/\mu} \rightarrow [n]$ da seguinte maneira: considerando o diagrama de λ/μ e supondo que suas entradas em cada coluna j são $\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{k_j j}$, identificamos essas entradas com os números $1, \dots, n$ fazendo $\alpha_{11} = 1, \alpha_{21} = 2, \dots, \alpha_{k_1 1} = k_1, \alpha_{12} = k_1 + 1, \alpha_{22} = k_1 + 2, \dots, \alpha_{k_2 2} = k_1 + k_2, \alpha_{13} = k_1 + k_2 + 1, \dots, \alpha_{k_l l} = k_1 + \dots + k_l$, sendo l o número de colunas; em seguida ordenamos o conjunto $\{\alpha_{11}, \dots, \alpha_{k_l l}\}$ de modo a preservar a ordem parcial de $P_{\lambda/\mu}$.

Por exemplo: $\lambda/\mu = 5331/2$. Abaixo temos o diagrama de λ/μ e o diagrama que mostra a ordem parcial obtida para $\{\alpha_{11}, \dots, \alpha_{k_l l}\} = [n]$:

			8	9	10
	3	5	7		
	2	4	6		
	1				



Notemos que a partir da definição de $\theta_{\lambda/\mu}$ temos estabelecido uma bijeção entre as $(P_{\lambda/\mu}, \theta_{\lambda/\mu})$ -partições inversas e as TYSS. Logo,

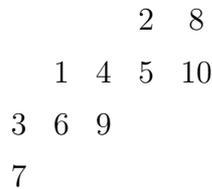
$$s_{\lambda/\mu} = K_{P_{\lambda/\mu}, \theta_{\lambda/\mu}} = \sum_{\pi \in \mathcal{L}(P_{\lambda/\mu}, \theta_{\lambda/\mu})} L_{co(\pi)}.$$

Assim, obtemos a expressão de $s_{\lambda/\mu}$ em termos das funções quase-simétricas fundamentais. Vamos procurar agora expressar $s_{\lambda/\mu}$ não em termos de $\mathcal{L}(P_{\lambda/\mu}, \theta_{\lambda/\mu})$, mas de TYS de forma λ/μ .

É claro que uma extensão linear $\omega : P_{\lambda/\mu} \rightarrow [n]$ corresponde a um TYS T_ω de forma λ/μ . Por outro lado, já sabemos que ω corresponde a uma permutação $\pi_\omega \in \mathcal{L}(P_{\lambda/\mu}, \theta_{\lambda/\mu})$.

Definição 1.3.18. *Um descendente de uma TYS T é um conjunto formado por inteiros i (que aparecem em T) tais que $i + 1$ aparece em T numa linha inferior à aquela na qual i aparece. Denotamos por $D(T)$ o conjunto de todos os descendentes de T .*

Exemplo: para o TYS T



temos $D(T) = \{2, 5, 6, 8\}$. A seguir apresentamos um lema do qual decorre o resultado que estamos esperando: $s_{\lambda/\mu}$ em termos de TYS da forma λ/μ .

Lema 1.3.4. *Seja $\omega : P_{\lambda/\mu} \longrightarrow [n]$ uma extensão linear. Então $D(T_\omega) = D(\pi_\omega)$.*⁽¹⁷⁾

Demonstração. Sejam $1 \leq i \leq n - 1$ e $s = (a, b)$ o quadrado de T_ω que contém i . O quadrado de T_ω , $s' = (a', b')$, que contém $i + 1$ satisfaz uma das seguintes possibilidades:

(a) $a' \leq a$ e $b' > b$;

(b) $a' > a$ e $b' \leq b$;

No caso (a), $i \notin D(T_\omega)$ e $\theta_{\lambda/\mu}(s') > \theta_{\lambda/\mu}(s)$, donde $i \notin D(\pi_\omega)$, pois se $\pi_\omega = a_1 \cdots a_n$ e se tivéssemos $i \in D(\pi_\omega)$, então $a_i > a_{i+1}$ e $i = \omega\left(\theta_{\lambda/\mu}^{-1}(a_i)\right) > \omega\left(\theta_{\lambda/\mu}^{-1}(a_{i+1})\right) = i + 1$, absurdo.

No caso (b), $i \in D(T_\omega)$ e $\theta_{\lambda/\mu}(s') < \theta_{\lambda/\mu}(s)$, donde $i \notin D(\pi_\omega)$, pois se tivéssemos $i \in D(\pi_\omega)$, então $a_{i+1} > a_i$ e, portanto, $i + 1 = \omega\left(\theta_{\lambda/\mu}^{-1}(a_{i+1})\right) < \omega\left(\theta_{\lambda/\mu}^{-1}(a_i)\right) = i$, um absurdo. \square

Combinando esse lema com o Corolário 1.3.12, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.3.8. *Temos*

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_T L_{co(T)},$$

onde T percorre todos as TYS de forma λ/μ .

Exemplo: os cinco TYS de forma $\lambda/\mu = 32/1$, com os descendentes em negrito são:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & 4 & 1 & \mathbf{2} & \mathbf{2} & 4 & 2 & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 4 \end{array}$$

então $s_{32/1} = L_{13} + 2L_{22} + L_{31} + L_{121}$.

¹⁷ $D(\pi_\omega) = \{i : a_i > a_{i+1}\}$, sendo $\pi_\omega = (a_1, \dots, a_n) \in S_n$.

Capítulo 2

Funções Simétricas em Combinatória

Neste capítulo, como sugere seu título, vamos abordar algumas das aplicações de funções simétricas em combinatória (enumerativa). Apresentamos, na seção seguinte, o conceito de especialização e alguns exemplos. São ferramentas que nos serão úteis mais adiante.

Na seção 2.2, apresentamos o algoritmo RSK que será empregado em quase tudo o que vamos fazer nas demais seções (exceto na Seção 2.3). Também nesta seção, vamos rerepresentar alguns resultados, já estabelecidos no capítulo anterior, por meio do referido algoritmo.

Podemos aplicar as funções simétricas no estudo dos caracteres do grupo simétrico S_n e é disto que se ocupa a Seção 2.3. Vamos apresentar alguns resultados bastante conhecidos da representação de grupos, ou melhor, do estudo dos caracteres destas representações, via funções simétricas.

Na Seção 2.4, abordamos as partições planas a partir do que fizemos até o momento; enquanto que na Seção 2.5, estamos interessados em enumerar, via funções simétricas, certos tipos de permutações.

A última seção deste capítulo traz uma reformulação de alguns resultados básicos da, assim chamada, Teoria de Pólya (enumeração sob a ação de grupos) via funções simétricas.

2.1 Especializações

Em algumas aplicações, precisamos apenas de informações parciais sobre uma função simétrica f , como um coeficiente ou valor num ponto. Conseguimos isso via especializações que definimos a seguir.

Definição 2.1.1. *Seja \mathcal{R} uma \mathbb{Q} -álgebra comutativa com unidade. Uma especialização do anel Λ é um homomorfismo $\varphi : \Lambda \longrightarrow \mathcal{R}$.*

Talvez o exemplo mais comum de um tal homomorfismo seja aquele que faz a substituição de x_i por $a_i \in \mathcal{R}$, quando essa substituição estiver bem-definida, é claro.

Seja Λ_n o conjunto das $f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ tal que f é simétrica. Definimos $r_n : \Lambda \longrightarrow \Lambda_n$ por $r_n(f) = f(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Esta especialização é chamada *redução do número de variáveis*. A proposição a seguir estuda o comportamento das bases $\{m_\lambda\}$, $\{p_\lambda\}$, $\{e_\lambda\}$, $\{h_\lambda\}$ e da involução ω sob r_n .

Proposição 2.1.1. *Seja $Par_n = \{\lambda \in Par : l(\lambda) \leq n\}$. Então:*

(a) *os conjuntos $\{r_n(m_\lambda) : \lambda \in Par_n\}$, $\{r_n(p_\lambda) : \lambda' \in Par_n\}$, $\{r_n(h_\lambda) : \lambda' \in Par_n\}$ e $\{r_n(e_\lambda) : \lambda' \in Par_n\}$ são bases de Λ_n sobre \mathbb{Q} . Além disso, se $\lambda \notin Par_n$, então $r_n(m_\lambda) = r_n(e_{\lambda'}) = 0$.*

(b) *em Λ_n , fazendo a identificação de $f \in \Lambda$ com $r_n(f)$ e definindo $\omega_n : \Lambda_n \longrightarrow \Lambda_n$ por $\omega_n(e_\lambda) = h_\lambda$ para $\lambda' \in Par_n$, então ω_n é um automorfismo, uma involução e $\omega_n(p_\lambda) = \epsilon_\lambda p_\lambda$, para $\lambda' \in Par_n$.*

Demonstração. (a) Já sabemos que $\{m_\lambda : \lambda \vdash n\}$ é linearmente independente. Por outro lado, se $f \in \Lambda_n$, então para cada monômio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ de f , temos

que $\sum_{\sigma \in S_n} x_1^{\sigma(\alpha_1)} \cdots x_n^{\sigma(\alpha_n)}$ também aparece em f . Mas $r_n(m_\lambda) = r_n\left(\sum_{\beta} x^\beta\right) = \sum_{(\beta_1, \dots, \beta_n)} x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$, onde $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ percorre as permutações de λ , pois $l(\lambda) \leq n$. Logo, $f = \sum_{\lambda \in Par_n} a_\lambda r_n(m_\lambda)$, onde $a_\lambda \in \mathbb{Q}$. Segue que $\{r_n(m_\lambda) : \lambda \in Par_n\}$ é uma base para Λ_n sobre \mathbb{Q} .

Sejam $\lambda' \in Par_n$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que $\lambda \vdash m$. Pela Proposição 1.3.1, temos $e_\lambda = \sum_{\mu \vdash m} M_{\lambda\mu} m_\mu$, donde $r_n(e_\lambda) = \sum_{\mu \vdash m} M_{\lambda\mu} r_n(m_\mu) = \sum_{\lambda' \geq \mu \vdash m} M_{\lambda\mu} r_n(m_\mu)$, pois $M_{\lambda\mu} = 0$, exceto quando $\lambda' \geq \mu$ e, neste caso, $r_n(m_\mu) \neq 0$, pois $l(\mu) \leq l(\lambda') \leq n$. Logo, a matriz $(M_{\lambda\mu})$ tal que $\lambda' \in Par_n$ continua com a propriedade de ser triangular superior com 1 nas entradas da diagonal principal⁽¹⁾ e, portanto, $\{r_n(e_\lambda) : \lambda' \in Par_n\}$ é uma base de Λ_n .

Como vimos anteriormente, $p_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} R_{\lambda\mu} m_\mu$, sendo $R_{\lambda\mu} = 0$ a menos que $\lambda \leq \mu$, enquanto $R_{\lambda\lambda} = \prod_i m_i(\lambda)!$. Assim, por considerações análogas às aquelas feitas no parágrafo anterior, podemos mostrar que $\{r_n(p_\lambda) : \lambda' \in Par_n\}$ é uma base de Λ_n sobre \mathbb{Q} .

Lembremos que $e_m = \sum_{i_1 < \dots < i_m} x_{i_1} \cdots x_{i_m}$ e que $\omega(e_m) = h_m$. Logo,

$$r_n(e_m) = \begin{cases} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_m}, & \text{se } m \leq n \\ 0, & \text{se } m > n \end{cases}$$

$$\omega(r_n(e_m)) = \begin{cases} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_m}, & \text{se } m \leq n \\ 0, & \text{se } m > n \end{cases}$$

¹ver demonstração do Teorema 1.3.2

Além disso,

$$r_n(\omega(e_m)) = r_n(h_m) = \begin{cases} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_m}, & \text{se } m \leq n \\ 0, & \text{se } m > n \end{cases}$$

Temos, pois, $r_n(h_m) = r_n(\omega(e_m)) = \omega(r_n(e_m))$. Logo, $r_n(h_\lambda) = r_n(\omega(e_\lambda)) = \omega(r_n(e_\lambda))$ e, portanto, $\{r_n(h_\lambda) : \lambda' \in Par_n\}$ é uma base de Λ_n , pois $\omega : \Lambda \rightarrow \Lambda$ é automorfismo.

(b) Basta considerar a restrição de $\omega : \Lambda \rightarrow \Lambda$ a Λ_n , ou seja, $\omega_n = \omega|_{\Lambda_n}$. Fazemos isto escrevendo

$$\omega_n(r_n(e_m)) = \omega(e_m(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)) = h_m(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots) = r_n(h_m).$$

Assim, os resultados seguem pelo Teorema 1.3.3 e pela Proposição 1.3.8. □

Uma outra importante substituição $ps_n : \Lambda \rightarrow \mathbb{Q}[q]$ é definida por:

$$ps_n(f) = f(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, 0, 0, \dots)$$

e é chamada *especialização principal de ordem n de f*. Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos a chamada *especialização estável de f*:

$$ps(f) = f(1, q, q^2, \dots).$$

Uma outra especialização $ps_n^1 : \Lambda \rightarrow \mathbb{Q}$ é obtida de ps_n colocando $q = 1$, ou seja,

$$ps_n^1(f) = f(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ vezes}}, 0, 0, \dots).$$

A proposição a seguir nos mostra o resultado de aplicar ps_n , ps e ps_n^1 em m_λ , p_λ , h_λ e e_λ .

Proposição 2.1.2. *Seja $\lambda \in \text{Par}$. Então,*

	ps_n	ps	ps_n^1
m_λ	?	?	$\binom{n}{l(\lambda)} \binom{l(\lambda)}{m_1(\lambda), m_2(\lambda), \dots}$
p_λ	$\prod_{i=1}^l \frac{1 - q^{n\lambda_i}}{1 - q^{\lambda_i}}$	$\prod_{i=1}^l \frac{1}{1 - q^{\lambda_i}}$	$n^{l(\lambda)}$
e_λ	$\prod_i q^{\binom{\lambda_i}{2}} \binom{n}{\lambda_i}$	$\prod_i \frac{q^{\binom{\lambda_i}{2}}}{(1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^{\lambda_i})}$	$\prod_i \binom{n}{\lambda_i}$
h_λ	$\prod_i \binom{n + \lambda_i - 1}{\lambda_i}$	$\prod_i \frac{1}{(1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^{\lambda_i})}$	$\prod_i \binom{n}{\lambda_i}$

As interrogações nesta tabela indicam que não temos uma fórmula simples para $ps_n(m_\lambda)$ e $ps(m_\lambda)$. O coeficiente multimonomial $\binom{n}{a_1, a_2, \dots}$ representa o número de possibilidades de se dispor n bolas em m caixas de modo que a caixa i contenha exatamente a_i bolas.

Demonstração. Todas as entradas desta tabela são obtidas por operações algébricas ou por considerações combinatoriais. Façamos o caso ps_n^1 para ilustrar.

Suponhamos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$. Como ps_n^1 é homomorfismo, então $ps_n^1(e_\lambda) = \prod_i ps_n^1(e_{\lambda_i})$. Calculemos $ps_n^1(e_{\lambda_i})$:

$$ps_n^1(e_{\lambda_i}) = ps_n^1 \left(\sum_{j_1 < \dots < j_{\lambda_i}} x_{j_1} \cdots x_{j_{\lambda_i}} \right) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{\lambda_i} \leq n} 1 = \binom{n}{\lambda_i},$$

pois $\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{\lambda_i} \leq n} 1$ nos dá exatamente o número de possibilidades de se escolher λ_i números entre n possíveis. □

Agora, apresentamos uma outra especialização que não é obtida simplesmente pela substituição das variáveis x_i . Esta recebe o nome de *especialização exponen-*

cial $ex : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Q}[t]$ e é definida por:

$$ex(p_n) = t\delta_{1n}, \quad \delta_{1n} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } n > 1 \end{cases}.$$

Notemos que, sendo $\{p_n\}$ algebricamente independente e $\Lambda = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$, então qualquer homomorfismo $\varphi : \Lambda \longrightarrow \mathcal{R}$ é determinado pelos valores $\varphi(p_n)$;

A proposição a seguir, mostra o efeito de ex aplicada a $m_\lambda, p_\lambda, h_\lambda$ e e_λ .

Proposição 2.1.3. *Temos*

(a) Se $f = \sum_{\lambda} c_{\lambda} m_{\lambda}$, então $ex(f) = \sum_{n \geq 0} [x_1 \cdots x_n] f \frac{t^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} c_{(1^n)} \frac{t^n}{n!}$, onde $[x_1 \cdots x_n] f$ é o coeficiente de $x_1 \cdots x_n$ em f ;

(b)

$$ex(m_{\lambda}) = \begin{cases} \frac{t^n}{n!}, & \text{se } \lambda = (1^n) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$ex(p_{\lambda}) = \begin{cases} t^n, & \text{se } \lambda = (1^n) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$ex(h_{\lambda}) = ex(e_{\lambda}) = \frac{t^{|\lambda|}}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots}.$$

Demonstração. (a) Como $[x_1 \cdots x_n] f$ é linear em f , basta mostrar a igualdade para $f = p_{\lambda}$, pois $\{p_{\lambda} : \lambda \in Par\}$ é uma base de Λ .

Seja, pois, $p_{\lambda} = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots = \sum_i x_i^{\lambda_1} \sum_i x_i^{\lambda_2} \cdots$. Logo, $[x_1 \cdots x_n] P_{\lambda} \neq 0$ se, e somente se, $\lambda_i = 1, \forall i$. É claro que se $\lambda \neq (1^n)$, então $ex(p_{\lambda}) = 0$ e $[x_1 \cdots x_n] P_{\lambda} = 0, \forall n$. Vamos analisar o caso $\lambda = (1^n)$. Neste caso, $ex(p_{\lambda}) = ex(p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots) = \prod_i ex(p_{\lambda_i}) = \prod_i t\delta_{1\lambda_i} = t^n$. Por outro lado,

$$\sum_{m \geq 0} [x_1 \cdots x_m] p_{\lambda} \frac{t^m}{m!} = \sum_{m \geq 0} [x_1 \cdots x_m] \left(\sum_i x_i \right)^n \frac{t^m}{m!} = [x_1 \cdots x_n] \left(\sum_i x_i \right)^n \frac{t^n}{n!},$$

mas como $p_1^n = \left(\sum_i x_i\right)^n$, $[x_1 \cdots x_n] \left(\sum_i x_i\right)^n = n!$, pois $x_1 \cdots x_n$ aparece em $\left(\sum_i x_i\right)^n$ $n!$ vezes porque $x_1 \cdots x_n = x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$, $\forall \sigma \in S_n$. Logo, $\sum_{m \geq 0} [x_1 \cdots x_m] p_\lambda \frac{t^m}{m!} = t^n$. Isso prova (a).

(b) Conseqüência imediata de (a) combinado com a Proposição 1.3.9. Para provar a igualdade $ex(e_\lambda) = \frac{t^{|\lambda|}}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots}$, por exemplo, lembremos que $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots$ e que $e_{\lambda_i} = \sum_{\mu \vdash \lambda_i} \epsilon_\mu z_\mu^{-1} p_\mu$, donde $ex(p_\lambda) = \prod_i ex(e_{\lambda_i})$ e $ex(e_{\lambda_i}) = \sum_{\mu \vdash \lambda_i} \epsilon_\mu z_\mu^{-1} ex(p_\mu) = \epsilon_{(1^n)} z_{(1^{\lambda_i})}^{-1} t^{\lambda_i} = \frac{t^{\lambda_i}}{\lambda_i!}$, pois $\epsilon_{(1^{\lambda_i})} = 1 e z_{(1^{\lambda_i})}^{-1} = \frac{1}{1^{\lambda_i} \lambda_i!}$. \square

Vamos aplicar esta proposição para encontrar uma expressão para $f^{\lambda/\mu}$ (o número de TYS da forma λ/μ). Pela proposição acima, se $f \in \Lambda$, então

$$ex(f) = \sum_{n \geq 0} [x_1 \cdots x_n] f \frac{t^n}{n!}.$$

Seja $ex_1(f) = ex(f)_{t=1}$. Se $|\lambda/\mu| = N$, é claro que $ex_1(s_{\lambda/\mu}) = \frac{f^{\lambda/\mu}}{N!}$, pois $f^{\lambda/\mu} = [x_1 \cdots x_N] s_{\lambda/\mu}$.

Corolário 2.1.1. *Seja $|\lambda/\mu| = N$ e $l(\lambda) \leq n$. Então,*

$$f^{\lambda/\mu} = N! \det \left[\left(\frac{1}{(\lambda_i - \mu_j - i + j)!} \right)_{i,j=1}^n \right].$$

Demonstração. Aplicando ex_1 à Identidade de Jacobi-Trudi⁽²⁾, obtemos $\frac{f^{\lambda/\mu}}{N!} = ex_1(s_{\lambda/\mu}) = ex_1 \left(\det \left[(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j})_{i,j=1}^n \right] \right)$ e, como ex_1 é homomorfismo e $ex_1(h_m) =$

² $s_{\lambda/\mu} = \det \left[(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j})_{i,j=1}^n \right]$.

$$\frac{1}{m!}, \text{ então } \frac{f^{\lambda/\mu}}{N!} = \det \left[\left(\frac{1}{(\lambda_i - \mu_j - i + j)!} \right)_{i,j=1}^n \right]. \quad \square$$

Com este resultado encerramos esta seção. Estudaremos agora o algoritmo *RSK* que, mais adiante, possibilitará algumas aplicações de funções simétricas em combinatória.

2.2 O Algoritmo *RSK*

Nesta seção, vamos desenvolver apenas as propriedades mais importantes do algoritmo *RSK* que nos permitam apresentar provas combinatoriais de alguns resultados fundamentais das Funções de Schur.

A operação básica do algoritmo *RSK* consiste em inserir um inteiro positivo k numa linha de uma TYSS não-diagonal $P = (P_{ij})$ da seguinte maneira: seja r o maior inteiro tal que $P_{1,r-1} \leq k$ (se $P_{11} > k$, tomamos $r = 1$). Se P_{1r} não existe, (ou seja, se P tem $r - 1$ colunas), então simplesmente inserimos k ao final de primeira linha. O algoritmo pára e a TYSS resultante é denotado por $P \leftarrow k$. Se P tem ao menos r colunas, P_{1r} existe, então trocamos P_{1r} por k . O elemento $k' = P_{1r}$ deverá ser inserido na segunda linha usando o mesmo processo. Continuamos até que um elemento seja inserido ao final de uma linha (talvez o primeiro elemento de uma nova linha). O resultado denotamos por $P \leftarrow k$.

Vejamos um exemplo para clarificar. Seja

$$P = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 5 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 6 & 6 & 8 & \\ 4 & 4 & 6 & 8 & & & \\ 6 & 7 & & & & & \\ 8 & 9 & & & & & \end{array}$$

O diagrama abaixo é $P \leftarrow 4$. Os elementos inseridos estão em negrito. O conjunto das posições desses elementos inseridos é chamado *caminho de inserção* e de-

notado por $\mathcal{I}(P \leftarrow 4)$. No nosso exemplo, $\mathcal{I}(P \leftarrow 4) = \{(1, 5), (2, 4), (3, 4), (4, 3)\}$:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 5 & 6 \\
 & 2 & 3 & 3 & 5 & 6 & 8 & \\
 P \leftarrow 4 = & 4 & 4 & 6 & 6 & & & \\
 & 6 & 7 & 8 & & & & \\
 & 8 & 9 & & & & &
 \end{array}$$

O lema a seguir apresenta duas propriedades dos caminhos de inserção que são úteis na demonstração de algumas propriedades do algoritmo *RSK*.

Lema 2.2.1. *Temos*

(a) *quando inserimos k em uma TYSS P , se $(r, s), (r + 1, t) \in \mathcal{I}(P \leftarrow k)$, então $t \leq s$;*

(b) *sejam P uma TYSS e $j \leq k$. Se $(r, s) \in \mathcal{I}(P \leftarrow j)$ e $(r, t) \in \mathcal{I}((P \leftarrow j) \leftarrow k)$, então $s < t$. Além disso, $|\mathcal{I}((P \leftarrow j) \leftarrow k)| \leq |\mathcal{I}(P \leftarrow j)|$.*

Demonstração. (a) Seja $(r, s) \in \mathcal{I}(P \leftarrow k)$. Temos duas possibilidades: $P_{r+1,s} > P_{rs}$ (pois P é estritamente crescente nas colunas) ou não existe a entrada $(r + 1, s)$ de P . No primeiro caso, P_{rs} não pode ser inserido na linha $r + 1$ à direita da coluna s sem violar o fato de que as linhas de $P \leftarrow k$ são não-decrescentes, pois P_{rs} estaria à direita de $P_{r+1,s}$ na mesma linha. O segundo caso é trivial: se $(r + 1, t) \in \mathcal{I}(P \leftarrow k)$, então $t \leq s$.

(b) Como uma TYSS tem suas linhas não-decrescentes, então k deve ser inserido à direita de onde j foi inserido. Além disso, o elemento que j tira do lugar na primeira linha deve ser menor do que ou igual a aquele que k retira do lugar nesta linha. Agora, indutivamente, verifica-se que $\mathcal{I}(P \leftarrow j)$ está à esquerda de $\mathcal{I}((P \leftarrow j) \leftarrow k)$.

O número b correspondente ao elemento de $\mathcal{I}(P \leftarrow j)$ de maior coordenada nas linhas, é inserido ao final de sua linha. Pelo que acabamos de provar, se

$\mathcal{I}((P \leftarrow j) \leftarrow k)$ tem um elemento c nesta linha, então ele está à direita de b em $(P \leftarrow j) \leftarrow k$. Então c é inserido no final da linha, o que termina o processo de inserção. Daí, $\mathcal{I}((P \leftarrow j) \leftarrow k)$ não tem elemento abaixo dos elementos de $\mathcal{I}(P \leftarrow j)$. Logo, $|\mathcal{I}((P \leftarrow j) \leftarrow k)| \leq |\mathcal{I}(P \leftarrow j)|$. \square

Corolário 2.2.1. *Se P é uma TYSS e $k \geq 0$, então $P \leftarrow k$ é uma TYSS.*

Demonstração. É claro que as linhas de $P \leftarrow k$ são não-decrescentes. Um inteiro a pode tirar do lugar apenas um b tal que $a < b$. Pelo lema anterior, b não se move para a direita da coluna na qual estava quando inserido na linha de baixo. Logo, b é inserido abaixo de um inteiro estritamente menor do que b . Portanto, $P \leftarrow k$ é uma TYSS. \square

Antes de enunciar o próximo resultado, vamos estabelecer algumas definições que nos serão úteis.

Seja $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ uma matriz com $a_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e tal que apenas uma quantidade finita de suas entradas são não-nulas. Essa matriz A é chamada uma \mathbb{N} -matriz de suporte finito. Podemos pensar em A como uma $(m \times n)$ -matriz finita ou uma matriz infinita fazendo $a_{ij} = 0$ para $i > m$ e $j > n$.

Associamos com A uma matriz de duas linhas W_A , denominada *permutação generalizada*, definida por:

$$W_A = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_m \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_m \end{pmatrix},$$

onde:

- (a) $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m$;
- (b) se $i_r = i_s$ e $r \leq s$, então $j_r \leq j_s$;
- (c) para cada par (i, j) , existem exatamente a_{ij} inteiros r para os quais $(i_r, j_r) = (i, j)$.

Notemos que A determina uma única matriz W_A e, inversamente, cada tal matriz W_A corresponde a uma única matriz A .

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ corresponde a } W_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Associamos com A (ou W_A) um par de TYSS de mesma forma da seguinte maneira. Seja W_A a matriz permutação generalizada associada a A . Começamos com $(P(0), Q(0)) = (\emptyset, \emptyset)$. Se $t < m$ e $(P(t), Q(t))$ estão definidos, fazemos

(a) $P(t+1) = P(t) \leftarrow j_{t+1}$;

(b) $Q(t+1)$ obtido de $Q(t)$ pela inserção de i_{t+1} (deixando todas as partes de $Q(t)$ inalteradas) tal que $P(t+1)$ e $Q(t+1)$ tenham a mesma forma.

O processo acaba em $(P(m), Q(m))$ e definimos $(P, Q) = (P(m), Q(m))^{(3)}$. Denotamos esta correspondência por $A \xrightarrow{RSK} (P, Q)$ e denominamos *Algoritmo RSK*.

Um exemplo para ilustrar: sejam A e W_A dadas pelo exemplo anterior. As TYSS $(P(1), Q(1)), \dots, (P(7), Q(7)) = (P, Q)$ são:

i	P(i)	Q(i)
1	1	1
2	1 3	1 1
3	1 3 3	1 1 1
4	1 2 3 3	1 1 1 2
5	1 2 2 3 3	1 1 1 2 2
6	1 1 2 2 3 3	1 1 1 2 2 3
7	1 1 2 2 2 3 3	1 1 1 3 2 2 3

³Pelo Corolário 2.2.1, P é uma TYSS e, como veremos na demonstração do teorema a seguir, Q também o é.

O teorema a seguir estabelece o principal resultado sobre o algoritmo RSK.

Teorema 2.2.1. *O algoritmo RSK é uma bijeção entre as \mathbb{N} -matrizes $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ de suporte finito e o conjunto dos pares ordenados (P, Q) de TYSS da mesma forma. Nesta correspondência:*

$$j \text{ ocorre em } P \text{ exatamente } \sum_i a_{ij} \text{ vezes} \quad (2.1)$$

$$i \text{ ocorre em } Q \text{ exatamente } \sum_j a_{ij} \text{ vezes} \quad (2.2)$$

Demonstração. Seja $A \xrightarrow{RSK} (P, Q)$. Pelo Corolário 2.2.1, P é uma TYSS. Pela definição do algoritmo RSK, P e Q têm a mesma forma e (2.1) e (2.2) valem. Então, precisamos provar que (a) Q é uma TYSS e que (b) o algoritmo RSK é uma bijeção, isto é, dado (P, Q) podemos recuperar A .

(a) Primeiramente notemos que como os elementos de Q são inseridos em ordem não-decrescente, segue que as linhas e colunas de Q são não-decrescentes. Resta verificar que as colunas de Q são estritamente crescentes, ou seja, dois elementos iguais da primeira linha de W_A não podem estar numa mesma coluna de Q . Se $i_k = i_{k+1}$ na primeira linha de W_A , sabemos que $j_k \leq j_{k+1}$. Logo, pelo Lema 2.2.1 (b), o caminho de inserção de j_{k+1} está estritamente à direita do caminho de j_k e nunca estará abaixo do maior elemento do caminho de inserção de j_k . Assim, os maiores elementos de dois caminhos de inserção estão em colunas diferentes. Portanto, as colunas de Q são estritamente crescentes.⁽⁴⁾

(b) Sejam $(P, Q) = (P(m), Q(m))$ e Q_{rs} a ocorrência mais à direita da maior entrada de Q (onde Q_{rs} é um elemento da linha r e coluna s). Como elementos iguais de Q são inseridos da esquerda para a direita, temos $Q_{rs} = i_m, Q(m-1) = Q(m) \setminus Q_{rs}$ ($Q(m)$ sem o elemento Q_{rs}), e que P_{rs} foi o último elemento de P a ser

⁴Esta argumentação estabelece uma importante propriedade do algoritmo RSK: elementos iguais de Q são inseridos da esquerda para a direita.

colocado no lugar após a inserção de j_m em $P(m-1)$. Assim, podemos facilmente inverter o processo de inserção $P(m-1) \leftarrow j_m$. O elemento P_{rs} foi substituído pelo elemento $P_{r-1,t}$ mais à direita da linha $r-1$ de P que é menor do que P_{rs} . Logo, removemos P_{rs} de P , trocamos $P_{r-1,t}$ com P_{rs} e continuamos trocando o elemento mais à direita da linha $r-2$ de P que é menor do que $P_{r-1,t}$ com $P_{r-1,t}$ e assim por diante. Eventualmente algum elemento j_m é removido da primeira linha de P .

Temos, com este processo, reencontrado (i_m, j_m) e $(P(m-1), Q(m-1))$ unicamente. Agora, iterando esse processo, podemos redescobrir W_A . Logo, o algoritmo RSK é injetivo.

Para provar a sobrejetividade, precisamos mostrar que aplicando o processo descrito acima a um par arbitrário (P, Q) de TYSS de mesma forma, sempre resulta numa matriz W_A válida (permutação generalizada)

$$W_A = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ j_1 & \cdots & j_m \end{pmatrix}.$$

É claro que $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m$. Resta mostrar que se $i_k = i_{k+1}$, então $j_k \leq j_{k+1}$. Sejam $i_k = Q_{rs}$ e $i_{k+1} = Q_{uv}$, donde $r \geq u$ e $s < v$. Quando aplicamos o processo descrito acima a P_{uv} , este ocupa o final da linha u . Logo, seu *caminho de inserção inverso* passa pela linha u estritamente à esquerda da coluna v . Assim, na linha u o caminho de inserção inverso de P_{rs} está estritamente à esquerda daquele de P_{uv} . Indutivamente, argumentando inversamente ao Lema 2.2.1 (b), mostra-se que todo o caminho de inserção inverso de P_{rs} está estritamente à esquerda daquele de P_{uv} . Em particular, antes de remover i_{k+1} , os dois elementos j_k e j_{k+1} aparecem na primeira linha com j_k à esquerda de j_{k+1} . Logo, $j_k \leq j_{k+1}$ como queríamos. \square

Notemos que quando A é uma *matriz permutação*, isto é, uma $n \times n$ $(0, 1)$ -matriz com exatamente uma entrada 1 em cada linha e coluna, então W_A tem

em sua primeira linha as entradas $1, 2, \dots, n$ e na segunda linha uma permutação w dos números $1, 2, \dots, n$; permutação esta que identificamos com A . Logo, aplicando o algoritmo RSK em A obtemos um par (P, Q) de TYS de mesma forma. Inversamente, se P e Q são TYS de mesma forma, então a matriz A que satisfaz $A \xrightarrow{RSK} (P, Q)$ é uma permutação.

Temos estabelecido, pois, que o algoritmo RSK é uma bijeção entre o grupo simétrico S_n e $\{(P, Q) : P, Q \text{ são TYS de mesma forma } \lambda \vdash n\}$. Em particular, temos

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$$

Dada a matriz W_A , cujas linhas têm comprimento n , podemos obter uma permutação \tilde{W}_A como segue. Trocamos a primeira linha i_1, \dots, i_n de W_A por $1, 2, \dots, n$. Suponhamos que a segunda linha de W_A tem c_i i 's, da esquerda para a direita. Então trocamos os 1's na segunda linha, da esquerda para a direita, por $1, 2, \dots, c_1$; os 2's, da esquerda para a direita, por $c_1 + 1, c_1 + 2, \dots, c_1 + c_2$ e assim por diante até a segunda linha tornar-se uma permutação de $1, 2, \dots, n$. Denotamos o resultado por \tilde{W}_A .

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \implies W_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \tilde{W}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 9 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Lema 2.2.2. *Sejam*

$$W_A = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \text{ e } \tilde{W}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tilde{j}_1 & \tilde{j}_2 & \cdots & \tilde{j}_n \end{pmatrix}.$$

Suponhamos que $\tilde{W}_A \xrightarrow{RSK} (\tilde{P}, \tilde{Q})$. Seja (P, Q) o par de TYSS obtidas de \tilde{P} e

\tilde{Q} pela substituição de k por i_k em \tilde{Q} e \tilde{j}_k por j_k em \tilde{P} . Então $W_A \xrightarrow{RSK} (P, Q)$.⁽⁵⁾

Demonstração. Suponhamos que j é inserido em algum estágio do algoritmo RSK na posição k de uma linha. Se j foi substituído por um número maior $j + \epsilon$, menor do que qualquer elemento da linha que é maior do que j , então $j + \epsilon$ deve ter sido inserido também na k -ésima posição. Daí, temos que o processo de inserção dos elementos j_1, j_2, \dots, j_n imita aquele de $\tilde{j}_1, \tilde{j}_2, \dots, \tilde{j}_n$, o que conclui a demonstração. \square

Vamos rerepresentar o resultado da Proposição 1.3.17, mas como consequência do algoritmo RSK. Esse resultado é conhecido como *Identidade de Cauchy*.

Proposição 2.2.1. *Temos*

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda \in Par} s_\lambda(x) s_\lambda(y). \quad (2.3)$$

Demonstração. Escrevemos

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \prod_{i,j} \left(\sum_{a_{ij} \geq 0} (x_i y_j)^{a_{ij}} \right). \quad (2.4)$$

Um termo $x^\alpha y^\beta$ nesta expressão é obtido escolhendo uma \mathbb{N} -matriz $A^t = (a_{ij})^t$ de suporte finito com $r(A) = \alpha$ e $c(A) = \beta$. Logo, o coeficiente de $x^\alpha y^\beta$ em (2.3) é o número $N_{\alpha\beta}$ de \mathbb{N} -matriz A com $r(A) = \alpha$ e $c(A) = \beta$.

Por outro lado, o coeficiente de $x^\alpha y^\beta$ em $\sum_{\lambda \in Par} s_\lambda(x) s_\lambda(y)$ é o número de pares (P, Q) de TYSS de mesma forma tal que $tipo(P) = \alpha$ e $tipo(Q) = \beta$.

Portanto, como o algoritmo RSK estabelece uma bijeção entre as matrizes A e os pares de tabelas (P, Q) , o resultado segue. \square

Corolário 2.2.2. *Temos*

$$h_1^n = \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda s_\lambda.$$

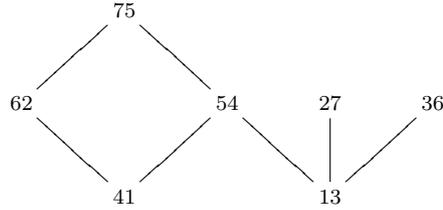
⁵isto é, a operação $W_A \mapsto \tilde{W}_A$ “comuta” com o algoritmo RSK

Demonstração. Basta tomar o coeficiente de $x_1x_2\cdots x_n$ em ambos os lados de (2.3). □

Adiante, veremos a propriedade mais importante de simetria do algoritmo RSK. Antes, apresentamos um conjunto parcialmente ordenado e dois lemas que serão de grande utilidade mais a frente.

Dada $W_A = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \\ v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, associada com A , onde os u_i e os v_i são distintos, definimos o conjunto parcialmente ordenado $I = I(A) = I\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$ como segue. Os vértices de I são as colunas de $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Por conveniência denotaremos uma coluna $\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}$ por ab . Definimos $ab < cd$ em I se $a < c$ e $b < d$.

Exemplo: seja $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Então I é representado por:



O lema a seguir é uma consequência imediata da definição de I .

Lema 2.2.3. *A aplicação $\varphi : I(A) \longrightarrow I(A^t)$ definida por $\varphi(ab) = ba$ é um isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados.*

Dado $I = I(A)$, definimos I_1 como o conjunto dos elementos minimais de I , I_2 como o conjunto dos elementos minimais de $I - I_1$, I_3 como o conjunto dos elementos minimais de $I - (I_1 \cup I_2)$ e assim por diante. No exemplo anterior, temos $I_1 = \{13, 41\}$, $I_2 = \{27, 36, 54, 62\}$, $I_3 = \{75\}$. Notemos que como I_i é uma anticheia em I , isto é, quaisquer dois elementos distintos de I_i são incomparáveis, podemos identificar (discriminar) seus elementos por:

$$(u_{i1}, v_{i1}), (u_{i2}, v_{i2}), \dots, (u_{in_i}, v_{in_i}), \quad (2.5)$$

onde $n_i = |I_i|$, de modo que

$$\begin{aligned} u_{i1} &< u_{i2} < \dots < u_{in_i} \\ v_{i1} &> v_{i2} > \dots > v_{in_i}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

De posse desses conjuntos $I_i \subset I$ temos o segundo lema que anunciamos anteriormente.

Lema 2.2.4. *Sejam I_1, \dots, I_d as anti-cadeias não-vazias definidas acima com a identificação $I_i = \{(u_{i1}, v_{i1}), (u_{i2}, v_{i2}), \dots, (u_{in_i}, v_{in_i})\}$, $i = 1, 2, \dots, d$. Seja $A \xrightarrow{RSK} (P, Q)$. Então a primeira linha de P é $v_{1n_1}v_{2n_2} \cdots v_{dn_d}$, enquanto a primeira linha de Q é $u_{11}u_{21} \cdots u_{d1}$. Além disso, se $(u_k, v_k) \in I_i$, então v_k é inserido na i -ésima coluna da primeira linha de $P(k-1)$ no algoritmo RSK.*

Demonstração. A demonstração é por indução em n . O caso $n = 1$ é trivial. Suponhamos que o resultado vale para $n-1$ e sejam

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Seja $(P(n-1), Q(n-1))$ o par de TYSS obtidas após a inserção de v_1, \dots, v_{n-1} e seja $I'_i = I_i(\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}})$, $1 \leq i \leq e$ (sendo $e = d-1$ ou $e = d$), dada por $(\tilde{u}_{i1}, \tilde{v}_{i1}), \dots, (\tilde{u}_{im_i}, \tilde{v}_{im_i})$, onde $\tilde{u}_{i1} < \dots < \tilde{u}_{im_i}$ e $\tilde{v}_{i1} > \dots > \tilde{v}_{im_i}$. Pela hipótese indutiva, a primeira linha de $P(n-1)$ é $\tilde{v}_{1m_1}\tilde{v}_{2m_2} \cdots \tilde{v}_{em_e}$, enquanto a primeira linha de Q é $\tilde{u}_{11}\tilde{u}_{21} \cdots \tilde{u}_{e1}$. Agora, inserimos v_n em $P(n-1)$. Se $\tilde{v}_{im_i} > v_n$, então $I'_i \cup (u_n, v_n)$ é uma anti-cadeia de $I(\frac{u}{v})$. Logo, $(u_n, v_n) \in I_i(\frac{u}{v})$ se i é o último índice para o qual $\tilde{v}_{im_i} > v_n$.

Se não existe um tal i , então (u_n, v_n) é o único elemento da anti-cadeia $I_d\binom{u}{v}$ de $I\binom{u}{v}$. Daí, v_n é inserido na i -ésima coluna de $P(n-1)$, como desejávamos. Inserimos uma nova i -ésima coluna exatamente quando $v_n = v_{d_1}$ e, neste caso, $u_n = u_{d_1}$, então u_n é inserido na i -ésima coluna da primeira linha de $Q(n-1)$. \square

A seguir temos o teorema que estabelece a propriedade simétrica mais importante do algoritmo RSK.

Teorema 2.2.2. *Seja A uma \mathbb{N} -matriz de suporte finito e suponhamos que $A \xrightarrow{RSK} (P, Q)$. Então $A^t \xrightarrow{RSK} (Q, P)$.*

Demonstração. Se $I_i\binom{u}{v}$ é a anti-cadeia dada por (2.5) tal que (2.6) é satisfeita, então pelo Lema 2.2.3, $I_i\binom{u}{v}$ é:

$$(v_{im_i}, u_{im_i}), \dots, (v_{i2}, u_{i2}), (v_{i1}, u_{i1}),$$

onde

$$\begin{aligned} v_{im_i} &< \dots < v_{i2} < v_{i1} \\ u_{im_i} &> \dots > u_{i2} > u_{i1}. \end{aligned}$$

Então, pelo Lema 2.2.4, se $A^t \xrightarrow{RSK} (P', Q')$, a primeira linha de P' é $u_{11}u_{21} \cdots u_{d1}$ e a primeira linha de Q' é $v_{1m_1}v_{2m_2} \cdots v_{dm_d}$. Logo, o Lema 2.2.4, assegura que as primeiras linhas de P' e Q' coincidem com as primeiras linhas de Q e P , respectivamente.

Aplicando o algoritmo RSK a $\binom{u}{v}$, o elemento v_{ij} , $1 \leq j < m_i$, é deslocado para a segunda linha de P “antes” do elemento v_{rs} , $1 \leq s < m_r$ se, e somente se, $u_{i,j+1} < u_{r,s+1}$. Denotemos por \bar{P} e \bar{Q} , respectivamente, P e Q sem suas primeiras linhas. Logo,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_{12} & \cdots & u_{1m_1} & u_{22} & \cdots & u_{2m_2} & \cdots & u_{d2} & \cdots & u_{dm_d} \\ v_{11} & \cdots & v_{1,m_1-1} & v_{21} & \cdots & v_{2,m_2-1} & \cdots & v_{d1} & \cdots & v_{d,m_d-1} \end{pmatrix}_o \xrightarrow{RSK} (\bar{P}, \bar{Q}),$$

onde $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ indica que colocamos as colunas de $\begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}$ em ordem estritamente crescente pela ordem lexicográfica.

Similarmente, seja (\bar{P}', \bar{Q}') a representação de P' e Q' , respectivamente, com suas primeiras linhas removidas. Argumentando em $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ como fizemos para

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, obtemos

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_{1m_1-1} & \cdots & v_{11} & v_{2,m_2-1} & \cdots & v_{21} & \cdots & v_{d,m_d-1} & \cdots & v_{d1} \\ u_{1m_1} & \cdots & u_{12} & u_{2m_2} & \cdots & u_{22} & \cdots & u_{dm_d} & \cdots & u_{d2} \end{pmatrix} \xrightarrow{RSK} (\bar{P}', \bar{Q}').$$

Mas, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b' \\ a' \end{pmatrix}$, donde por indução em n (número de linhas) temos $(\bar{P}', \bar{Q}') = (\bar{Q}', \bar{P}')$. \square

A seguir apresentamos algumas conseqüências deste último teorema.

Corolário 2.2.3. *Sejam A uma \mathbb{N} -matriz de suporte finito e $A \xrightarrow{RSK} (P, Q)$. Então, A é simétrica ($A = A^t$) se, e somente se, $P = Q$.*

Demonstração. Imediato, pois $A^t \xrightarrow{RSK} (Q, P)$. \square

Corolário 2.2.4. *Sejam $A = A^t$, $A \xrightarrow{RSK} (P, P)$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, onde $\alpha_i \in \mathbb{N}$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty$. Então, a aplicação $A \mapsto P$ estabelece uma bijeção entre as \mathbb{N} -matrizes simétricas com $r(A) = \alpha$ e as TYSS de tipo α .*

Demonstração. Segue diretamente pelo Teorema 2.2.1 e o corolário anterior. \square

Corolário 2.2.5. *Temos*

$$\frac{1}{\prod_i (1 - x_i) \prod_{i < j} (1 - x_i x_j)} = \sum_{\lambda \in Par} s_{\lambda}(x).$$

Corolário 2.2.6. *Temos*

$$\sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda = |\{w \in S_n : w^2 = 1\}|. \text{ (o número de involuções de } S_n)$$

Demonstração. Sejam $w \in S_n$ e $w \xrightarrow{RSK} (P, Q)$, onde P e Q são TYS de mesma forma $\lambda \vdash n$. A matriz permutação correspondente a w é simétrica se, e somente se, $w^2 = 1$. Agora, aplicando o Teorema 2.2.2, $w^2 = 1$ se, e somente se, $P = Q$ e o resultado segue. \square

Finalizamos esta seção apresentando o *algoritmo RSK dual*, representado por $A \xrightarrow{RSK^*} (P, Q)$, que trabalha exatamente como o algoritmo RSK, exceto por ser A uma $(0, 1)$ -matriz de suporte finito e que um elemento i desloca um elemento mais à esquerda que é maior do que ou igual a i e não o elemento mais à esquerda que é maior do que i (como acontece no algoritmo RSK).

Vejamos um exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \implies W_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Então $(P(1), Q(1)), \dots, (P(7), Q(7))$, com $(P, Q) = (P(7), Q(7))$, obtidos pelo algoritmo RSK* são:

P(i)	Q(i)
1	1
1 3	1 1
1 2 3	1 1 2
1 2 1 3	1 1 2 3
1 2 3 1 3	1 1 3 2 3
1 2 3 1 3 3	1 1 3 2 4 3
1 2 3 1 2 3 3	1 1 3 2 4 3 5

O teorema a seguir tem demonstração análoga à aquela do Teorema 2.2.1.

Teorema 2.2.3. *O algoritmo RSK^* é uma bijeção entre as $(0,1)$ -matrizes de suporte finito e os pares (P, Q) tais que P^t (o transposto de P) e Q são TYSS com a mesma forma. Além disso, $c(A) = \text{tipo}(P)$ e $r(A) = \text{tipo}(Q)$.*

Do mesmo modo que obtivemos a Identidade de Cauchy (Proposição 2.2.1) a partir do Teorema 2.2.1, a proposição seguinte estabelece a *Identidade de Cauchy dual* como consequência do Teorema 2.2.3.

Proposição 2.2.2. *Temos*

$$\prod_{i,j} (1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda \in Par} s_\lambda(x) s_{\lambda'}(y).$$

Devido às Proposições 2.2.1 e 2.2.2, temos que o algoritmo RSK está relacionado com $\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}$ bem como o algoritmo RSK^* está relacionado com $\prod_{i,j} (1 + x_i y_j)$. Daí, o motivo de se dizer que os algoritmos RSK e RSK^* são duais.

Na seção seguinte estaremos interessados no estudo da aplicação de funções simétricas no grupo simétrico S_n para analisar seus caracteres.

2.3 Os Caracteres do Grupo Simétrico

Nesta seção vamos usar um pouco do que vimos sobre funções simétricas com o objetivo de mostrar que as funções \mathcal{X}^λ , apresentadas na Seção 1.3.8, são os caracteres irredutíveis do grupo simétrico S_n (onde $\mathcal{X}^\lambda(\mu)$ é interpretado como $\mathcal{X}^\lambda(w)$ quando $w \in S_n$ tem tipo cíclico μ).

Denotamos por CF^n o conjunto de todas as funções de classe (isto é, funções $f : S_n \rightarrow \mathbb{Q}$ ⁽⁶⁾ que são constantes nas classes de conjugação de S_n). Lembremos que CF^n é um espaço vetorial sobre \mathbb{Q} com um produto escalar definido por:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{w \in S_n} f(w)g(w).$$

Vamos denotar por $\langle \phi, \gamma \rangle$ o produto escalar $\langle f, g \rangle$ quando ϕ e γ forem representações de S_n com caracteres f e g , respectivamente. Esse abuso de notação vai simplificar nossas expressões.

Antes de enunciar os primeiros resultados, vamos relembrar alguns fatos sobre representação permutacional. Se X é um conjunto finito e G um grupo finito, a ação de G em X é um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow S_X$ e se $s \in X$ e $w \in G$ escrevemos $w \cdot s$ para representar $\varphi(w)(s)$. Este homomorfismo pode ser estendido por linearidade a uma ação sobre $\mathbb{C}X$ (o espaço vetorial complexo com base X). Logo, φ pode ser visto como uma representação (linear) $\varphi : G \rightarrow GL(\mathbb{C}X)$. O caracter desta representação é dado por

$$\mathcal{X}^\varphi(w) = \text{tr}(\varphi(w)) = |\text{Fix}(w)| = |\{s \in X : w \cdot s = s\}|.$$

⁶De maneira mais geral poderíamos trabalhar com \mathbb{C} no lugar de \mathbb{Q} , mas escolhemos o corpo \mathbb{Q} por ser suficiente aos nossos propósitos e por simplicidade também.

A ação $\varphi : G \longrightarrow S_X$ é dita transitiva se para quaisquer $s, t \in X$, existe $w \in G$ tal que $w \cdot s = t$. Se H é um subgrupo de G , então G age no conjunto G/H das classes laterais à esquerda por $w \cdot vH = wvH$. Toda ação transitiva de G é equivalente a uma ação nas classes à esquerda de algum subgrupo H . Além disso, tal ação é equivalente a $ind_H^G 1_H$ (a indução da representação trivial 1_H de H para G). Vamos denotar $ind_H^G 1_H$ por 1_H^G . Assim, o Lema de Burside (que veremos mais a diante), é equivalente a

$$\langle 1_H^G, 1_G \rangle = |\{\text{órbitas de } G \text{ agindo em } G/H\}|.$$

Lembremos que $\langle 1_H^G, 1_G \rangle$ é a multiplicidade da representação trivial 1_G de G em 1_H^G , ou seja,

$$\langle 1_H^G, 1_G \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{w \in G} |Fix(w)|,$$

sendo $Fix(w)$ referente a ação de G em G/H .

Vamos agora procurar por subgrupos H de S_n que nos permitam obter todos os caracteres irredutíveis de S_n como combinação linear dos caracteres das representações $1_H^{S_n}$. Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathbb{N}^l$ e $\alpha_1 + \dots + \alpha_l = n$, definimos o subgrupo $S_\alpha \subset S_n$ por

$$S_\alpha = S_{\alpha_1} \times S_{\alpha_2} \times \dots \times S_{\alpha_l},$$

onde S_{α_1} permuta $1, 2, \dots, \alpha_1$, S_{α_2} permuta $\alpha_1 + 1, \alpha_1 + 2, \dots, \alpha_1 + \alpha_2$ e assim por diante. Logo, se α e β diferem apenas por uma permutação de suas coordenadas, então S_α e S_β são conjugados e as representações $1_{S_\alpha}^{S_n}$ e $1_{S_\beta}^{S_n}$ são equivalentes, donde seus caracteres são iguais. Em particular, existe uma única $\lambda \vdash n$ tal que S_α e S_λ são conjugadas.

Nossa principal ferramenta para demonstrar os resultados que virão é a transformação linear $ch : CF^n \longrightarrow \Lambda^n$ chamada *Apliação Característica de Frobenius*: se $f \in CF^n$, definimos

$$ch(f) = \frac{1}{n!} \sum_{w \in S_n} f(w) p_{\rho(w)} = \sum_{\mu} z_{\mu}^{-1} f(\mu) p_{\mu},$$

onde $f(\mu)$ denota $f(w)$ para qualquer w de tipo $\rho(w) = \mu$. Equivalentemente, definindo $\Psi(w) = p_{\rho(w)}$ temos

$$ch(f) = \langle f, \Psi \rangle_{\Lambda} \text{ (sendo este produto escalar definido em } \Lambda \text{)}.$$

Por exemplo, se f_{μ} é a função de classe definida por

$$f_{\mu}(w) = \begin{cases} 1, & \text{se } \rho(w) = \mu \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

então $ch(f_{\mu}) = z_{\mu}^{-1}p_{\mu}$.

Se $\varphi : S_n \rightarrow GL(V)$ é uma representação de S_n com caracter \mathcal{X} , em alguns momentos vamos abusar da notação e escrever $ch(\varphi)$ ou $ch(V)$ no lugar de $ch(\mathcal{X})$.

Proposição 2.3.1. *A transformação linear ch é uma isometria, isto é,*

$$\langle f, g \rangle_{CF^n} = \langle ch(f), ch(g) \rangle_{\Lambda^n}.$$

Demonstração. Pela Proposição 1.3.11, temos

$$\begin{aligned} \langle ch(f), ch(g) \rangle &= \left\langle \sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} f(\lambda) p_{\lambda}, \sum_{\mu} z_{\mu}^{-1} g(\mu) p_{\mu} \right\rangle \\ &= \sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} f(\lambda) g(\lambda) \\ &= \sum_{\lambda} \frac{|\{w \in S_n : \rho(w) = \lambda\}|}{n!} f(\lambda) g(\lambda) \\ &= \sum_{w \in S_n} \frac{f(w) g(w)}{n!} \\ &= \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

□

Vamos definir agora um produto de funções de classe. Seja $f \in CF^m$ e $g \in CF^n$. Definimos o produto (ponto-a-ponto) $f \times g \in CF(S_m \times S_n)$ por:

$$(f \times g)(u, v) = f(u)g(v).$$

Lembremos, em particular, que se f e g são os caracteres das representações φ e ψ , então $f \times g$ é o caracter da representação $\varphi \otimes \psi$ de $S_m \times S_n$.

Definimos também o *produto induzido* $f \circ g$ de f e g como sendo a indução de $f \times g$ para S_{m+n} , onde S_m permuta $1, 2, \dots, m$ e S_n permuta $m+1, m+2, \dots, m+n$ como anteriormente. Representamos este produto por:

$$f \circ g = \text{ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}}(f \times g).$$

Seja $CF = CF^0 \oplus CF^1 \oplus \dots$. Estendemos o produto escalar de CF^n para CF fazendo $\langle f, g \rangle = 0$ se $f \in CF^m$ e $g \in CF^n$ com $m \neq n$. Assim, o produto induzido nos caracteres estende-se para CF por bilinearidade.

Como $CF = CF^0 \oplus CF^1 \oplus \dots$, podemos estender a aplicação característica ch para uma transformação linear $ch : CF \rightarrow \Lambda$. Assim, temos o seguinte importante resultado.

Proposição 2.3.2. *A aplicação característica $ch : CF \rightarrow \Lambda$ é um homomorfismo de anéis que é bijetivo, ou seja, ch é bijetivo e $ch(f \circ g) = ch(f)ch(g)$.*

Demonstração. Vamos denotar por $\text{res}_H^G f$ a restrição da função de classe f em G ao subgrupo H de G . Logo, pela Reciprocidade de Frobenius⁽⁷⁾

$$\begin{aligned} ch(f \circ g) &= ch(\text{ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}}(f \times g)) \\ &= \left\langle \text{ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}}(f \times g), \Psi \right\rangle \\ &= \left\langle f \times g, \text{res}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}} \Psi \right\rangle_{S_m \times S_n} \\ &= \frac{1}{m!n!} \sum_{u \in S_m} \sum_{v \in S_n} f(u)g(v)\Psi(uv) \\ &= \frac{1}{m!n!} \sum_{u \in S_m} \sum_{v \in S_n} f(u)g(v)\Psi(u)\Psi(v) \\ &= \langle f, \Psi \rangle_{S_m} \langle g, \Psi \rangle_{S_n} \\ &= ch(f)ch(g) \end{aligned}$$

⁷Reciprocidade de Frobenius: suponhamos \mathcal{X}_ρ e \mathcal{X}_θ , respectivamente, os caracteres de G e H , com H subgrupo de G e f uma função de classe de G e $f_H = f|_H$, então: $\langle f_H, \mathcal{X}_\theta \rangle_H = \langle f, \mathcal{X}_\rho \rangle_G$

Além disso, pela definição de ch e pelo fato de ser $\{p_\mu : \mu \in Par\}$ uma \mathbb{Q} -base de Λ , segue que ch é bijetivo. \square

Como $h_n = \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} p_\lambda$, pela definição de ch , temos $ch(1_{S_n}) = \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} p_\lambda = h_n$.

O corolário a seguir apresenta o resultado da aplicação de ch no caracter η^α da representação $1_{S_\alpha}^{S_n}$.

Corolário 2.3.1. *Temos*

$$ch(1_{S_\alpha}^{S_n}) = h_\alpha.$$

Demonstração. Como $1_{S_\alpha}^{S_n} = 1_{S_{\alpha_1}}^{S_n} \circ 1_{S_{\alpha_2}}^{S_n} \circ \cdots \circ 1_{S_{\alpha_l}}^{S_n}$, pelo teorema anterior, $ch(1_{S_\alpha}^{S_n}) = \prod_{i=1}^l ch(1_{S_{\alpha_i}}^{S_n}) = \prod_{i=1}^l h_{\alpha_i} = h_\alpha$. \square

Seja \mathcal{R}^n o conjunto de todas as funções em S_n que são diferença de dois caracteres. Logo, \mathcal{R}^n tem ordem $p(n)$ ⁽⁸⁾, o número de partições de n , e uma base que consiste dos caracteres irredutíveis de S_n . Esta é a única base ortonormal de \mathcal{R}^n , a menos de sinal e ordem, pois a matriz de transição entre duas tais bases deve ser ortogonal com entradas inteiras e, portanto, uma matriz de permutação (ou seja, uma $(0, 1)$ -matriz $n \times n$ com exatamente um 1 em cada linha e coluna). Seja $\mathcal{R} = \mathcal{R}^0 \oplus \mathcal{R}^1 \oplus \cdots$. Com isso, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.3.3. *A imagem de \mathcal{R} pela aplicação característica ch é $\Lambda_{\mathbb{Z}}$. Conseqüentemente, $ch : \mathcal{R} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{Z}}$ é um isomorfismo de anéis.*

Demonstração. É suficiente mostrar o resultado para combinações lineares com coeficientes inteiros dos caracteres η^α da representação $1_{S_\alpha}^{S_n}$ que são os caracteres

⁸Lembremos que num grupo finito G o número de caracteres irredutíveis linearmente independentes é igual ao número de classes de conjugação. Em particular, para S_n esse número é $p(n)$.

irredutíveis de S_n . Seja $\psi^\lambda = \det(\eta^{\lambda_i - i + j})$, sendo que o produto usado para calcular o determinante é o produto de Jacobi-Trudi (Corolário 1.3.9). Pela Proposição 2.3.2, temos

$$ch(\psi^\lambda) = s_\lambda.$$

Como ch é uma isometria, temos $\langle \psi^\lambda, \psi^\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$. Pelas observações acima, isto significa que as funções de classe ψ^λ são, a menos de sinal, os caracteres irredutíveis de S_n . Logo, $\{\psi^\lambda : \lambda \vdash n\}$ forma uma \mathbb{Z} -base de \mathcal{R}^n e a imagem de \mathcal{R}^n é o \mathbb{Z} -espaço gerado pelas s_λ 's, o qual é exatamente Λ^n , como queríamos, pois a imagem de $\mathcal{R} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{R}^n$ será $\Lambda_{\mathbb{Z}}$. \square

Agora, de posse de tudo isso, podemos apresentar o resultado mais importante desta seção.

Teorema 2.3.1. *Consideremos as \mathcal{X}^λ , onde $\lambda \vdash n$, definidas em 1.3.8, como funções em S_n dadas por $\mathcal{X}^\lambda(w) = \mathcal{X}^\lambda(\mu)$, onde w e μ têm o mesmo tipo cíclico. Então, as funções \mathcal{X}^λ 's são os caracteres irredutíveis do grupo simétrico S_n .*

Demonstração. Pela Regra de Murnaghan-Nakayama (Corolário 1.3.10), temos que

$$ch(\mathcal{X}^\lambda) = \sum_{\mu} z_{\mu}^{-1} \mathcal{X}^\lambda(\mu) p_{\mu} = s_{\lambda}.$$

Como $ch(\psi^\lambda) = s_\lambda$, segue que $\mathcal{X}^\lambda = \psi^\lambda$. Como os ψ^λ 's são, a menos de sinal, os caracteres irredutíveis de S_n , resta determinar quando \mathcal{X}^λ ou $-\mathcal{X}^\lambda$ é um caracter. Mas, $\mathcal{X}^\lambda(1^n) = f^\lambda > 0$, donde \mathcal{X}^λ é um caracter irredutível. \square

Notemos que temos descrito uma maneira natural de indexar os caracteres irredutíveis de S_n por partições de n , enquanto os tipos cíclicos das permutações definem um indexador natural das classes de conjugação de S_n por partições de n . Logo, temos uma bijeção entre classes de conjugação e os caracteres irredutíveis de S_n .

O corolário a seguir mostra que os Coeficientes de Littlewood-Richardson $c_{\mu\nu}^\lambda$ são não-negativos.

Corolário 2.3.2. *Sejam $\mu \vdash m$, $\nu \vdash n$ e $\lambda \vdash m+n$. Então o Coeficiente de Littlewood-Richardson $c_{\mu\nu}^\lambda$ é não-negativo.*

Demonstração. Pelas Proposições 2.3.1 e 2.3.2, temos que

$$c_{\mu\nu}^\lambda = \langle s_\lambda, s_\mu s_\nu \rangle = \langle \mathcal{X}^\lambda, \mathcal{X}^\mu \circ \mathcal{X}^\nu \rangle.$$

Como, pelo teorema anterior, \mathcal{X}^μ e \mathcal{X}^ν são caracteres irredutíveis de S_m e S_n , respectivamente, segue pelas propriedades de caracteres irredutíveis que $\mathcal{X}^\mu \circ \mathcal{X}^\nu$ é um caracter de S_{m+n} . Logo, $\langle \mathcal{X}^\lambda, \mathcal{X}^\mu \circ \mathcal{X}^\nu \rangle \geq 0$. \square

O corolário a seguir apresenta o caracter η^α da representação $1_{S_\alpha}^{S_n}$ em termos dos caracteres irredutíveis. Este resultado é conhecido como *Regra de Young*.

Corolário 2.3.3. *Sejam α uma composição de n e $\lambda \vdash n$. Então, a multiplicidade do caracter irredutível \mathcal{X}^λ no caracter η^α é $K_{\lambda\alpha}$, ou seja,*

$$\langle \eta^\alpha, \mathcal{X}^\lambda \rangle = K_{\lambda\alpha}.$$

Demonstração. Pelo Corolário 2.3.1, temos $ch(\eta^\alpha) = h_\alpha$. Como $h_\alpha = \sum_{\lambda} K_{\lambda\alpha} s_\lambda$ (Seção 1.3) o resultado segue pelo último teorema:

$$\langle \eta^\alpha, \mathcal{X}^\lambda \rangle = \left\langle \sum_{\lambda} K_{\lambda\alpha} s_\lambda, s_\lambda \right\rangle = K_{\lambda\alpha}.$$

\square

Finalizamos esta seção com um exemplo. A *representação regular* de S_n é definida como a ação de S_n nele mesmo pela multiplicação à esquerda. Logo, esta representação é dada por $1_{S_1 \times \dots \times S_1}^{S_n}$, cuja imagem pelo Caracter de Frobenius é

$(h_1)^n$ (Corolário 2.3.1). Pelo Corolário 2.2.2, temos $(h_1)^n = \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda s_\lambda$. Então, a multiplicidade na representação regular da representação irreduzível de S_n cujo caracter é \mathcal{X}^λ é $f^\lambda = \mathcal{X}^\lambda(1^n)$.⁽⁹⁾

2.4 Partições Planas e Funções Simétricas

Esta seção apresenta algumas aplicações enumerativas das funções simétricas. Iniciamos pela generalização das partições de um inteiro positivo, conhecida como *partições planas*.

Uma *partição plana* é uma matriz $\pi = (\pi_{ij})_{i,j \geq 1}$ de inteiros não-negativos tal que π tem suporte finito (apenas uma quantidade finita de entradas são não-nulas) e é não-crescente em cada linha e cada coluna. Se $\sum_{i,j} \pi_{ij} = n$, escrevemos $|\pi| = n$ e chamamos π de partição plana de n .

A seguir apresentamos exemplos de partições planas, onde omitimos as entradas iguais a 0.

$$\begin{array}{rcl}
 n = 0 : & \emptyset \\
 n = 1 : & 1 \\
 n = 2 : & 2 \quad 1 \quad 1 \\
 n = 3 : & 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & 1
 \end{array}$$

Uma partição $\lambda \vdash n$ pode ser vista como uma matriz unidimensional $(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots)$ de inteiros não-negativos com suporte finito e não-crescente, isto é, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$.

⁹Portanto, o Corolário 2.2.2 estabelece para S_n , via funções simétricas, o fato de que a multiplicidade de uma representação irreduzível de um grupo finito na representação regular é igual ao seu grau.

Segue, pois, que as partições planas generalizam para duas dimensões as partições ordinárias. Além disso, as partições planas têm similaridades que saltam aos olhos com as Tabelas de Young Semi-Simples, pois uma TYSS reversa é um tipo particular de partição plana. Devido a essa similaridade é de se esperar que as funções simétricas tenham um papel importante na enumeração das partições planas.

Uma entrada $\pi_{ij} > 0$ de π é chamada de *parte* da partição plana π . A *forma* de π é a partição ordinária λ para a qual π tem λ_i partes não-nulas na i -ésima linha (ou seja, $\pi_{i\lambda_i} > 0$ e $\pi_{i,\lambda_i+1} = 0$). Logo, π tem r linhas se $r = l(\lambda)$ e, similarmente, π tem s colunas se $s = l(\lambda') = \lambda_1$. Vamos escrever $l_1(\pi)$ e $l_2(\pi)$ para os números de linhas e colunas de π , respectivamente. Definimos o *traço* de π de maneira usual: $tr(\pi) = \sum_i \pi_{ii}$.

Por exemplo, a partição plana

$$\pi = \begin{array}{cccccccc} & 7 & 5 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 2 & 1 & 1 & & & \\ 6 & 3 & 2 & 2 & & & & & \end{array}$$

tem forma $(8, 6, 4)$, 18 partes, 3 linhas, 8 colunas e traço 14.

Seja $\mathcal{P}(r, c)$ o conjunto de todas as partições planas com, no máximo, r linhas e, no máximo, c colunas. Por exemplo, $\mathcal{P}(1, c)$ é o conjunto das partições ordinárias e se $\pi \in \mathcal{P}(1, c)$, então $tr(\pi)$ é a maior parte de π .

De posse dessas considerações preliminares, apresentamos o primeiro resultado, e dos principais, desta seção cuja demonstração faz uso do algoritmo RSK.

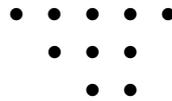
Teorema 2.4.1. *Sejam $r, s \in \mathbb{N}$. Então*

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r,c)} q^{tr(\pi)} x^{|\pi|} = \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^c (1 - qx^{i+j-1})^{-1}.$$

Demonstração. Vamos, primeiramente, descrever como juntar duas partições λ e μ com partes distintas e com o mesmo número de partes de modo a obter uma

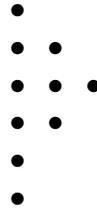
partição $\rho = \rho(\lambda, \mu)$. Traçamos o Diagrama de Ferrers de λ , mas com cada linha deslocada um espaço para a direita do início da linha anterior, chamamos este novo diagrama de *Diagrama de Ferrers Modificado* de λ .

Por exemplo, se $\lambda = (5, 3, 2)$, o Diagrama de Ferrers Modificado de λ é:



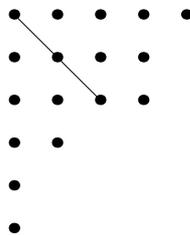
Obtemos também o Diagrama de Ferrers Modificado de μ transposto.

Por exemplo, se $\mu = (6, 3, 1)$, temos



Agora juntamos estes dois diagramas identificando suas diagonais principais.

Para λ e μ acima, por exemplo, temos



Definimos $\rho(\lambda, \mu)$ como a partição cujo Diagrama de Ferrers é o diagrama juntado. Do nosso exemplo,

$$\rho(532, 631) = 544211.$$

A aplicação $(\lambda, \mu) \mapsto \rho(\lambda, \mu)$ é claramente uma bijeção entre os pares de partições (λ, μ) com k partes distintas e as partições ρ de posto k (definido na Seção 1 do primeiro capítulo). Notemos que $|\rho| = |\lambda| + |\mu| - l(\lambda)$.

Agora, vamos estender a bijeção acima aos pares (P, Q) de TYSS reversas de mesma forma. Se λ^i denota a i -ésima coluna de P e μ^i a i -ésima coluna de Q , então, seja $\pi(P, Q)$ a matriz cuja i -ésima coluna é $\rho(\lambda^i, \mu^i)$.

Por exemplo, se

$$P = \begin{array}{cccc} 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \\ 2 & & & \end{array} \quad \text{e } Q = \begin{array}{cccc} 5 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & \\ & & & 1 \end{array},$$

então

$$\pi(P, Q) = \begin{array}{cccc} 4 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & & \\ 2 & & & \\ 2 & & & \end{array}.$$

Assim, $\pi(P, Q)$ é uma partição plana. Trocando cada linha de $\pi(P, Q)$ por sua conjugada, obtemos uma outra partição plana $\pi'(P, Q)$.

Por exemplo, com $\pi(P, Q)$ acima, obtemos

$$\pi'(P, Q) = \begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \end{array} .$$

Segue que a aplicação $(P, Q) \mapsto \pi'(P, Q)$ é uma bijeção entre pares (P, Q) de TYSS reversas de mesma forma e partições planas π' .

Vamos denotar por $diag(\pi')$ a diagonal principal $(\pi'_{11}, \pi'_{22}, \dots)$ de π' , $max(P)$ a maior parte P_{11} da TYSS reversa P . Lembremos que $sh(P)$ denota a forma de P , $sh(P) = sh(Q)$ e

$$|\pi'| = |P| + |Q| - |sh(P)|, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} diag(\pi') &= sh(P) = sh(Q), \text{ donde } tr(\pi') = |sh(P)|, \\ l_1(\pi') &= max(Q), \\ l_2(\pi') &= max(P). \end{aligned}$$

Seja $A = (a_{ij})$ uma \mathbb{N} -matriz de suporte finito. Queremos associar com A um par de TYSS reversas de mesma forma. Fazemos isso com uma variação do algoritmo RSK, onde invertem-se as regras \leq e \geq na definição da inserção na linha. Ou, equivalentemente, se

$$W_A = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \\ v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$$

é a matriz permutação generalizada associada a A , então aplicamos o algoritmo RSK na matriz

$$\begin{pmatrix} -u_n & \cdots & -u_1 \\ -v_n & \cdots & -v_1 \end{pmatrix}$$

e, depois, mudando o sinal para positivo de todas as entradas do par de TYSS. Assim, obtemos um par (P, Q) de TYSS reversas satisfazendo

$$|P| = \sum_{i,j} j a_{ij} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} |Q| &= \sum_{i,j} i a_{ij} \\ \max(P) &= \max(\{j : a_{ij} \neq 0\}) \\ \max(Q) &= \max(\{i : a_{ij} \neq 0\}) \\ |sh(P)| &= |sh(Q)| = \sum_{i,j} a_{ij}. \end{aligned}$$

Segue das Equações (2.7) e (2.8) que se \mathcal{M}_{rc} é o conjunto de todas as \mathbb{N} -matrizes $r \times c$, então

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \mathcal{P}(r,c)} q^{tr(\pi)} x^{|\pi|} &= \sum_{A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{rc}} q^{\left(\sum_{i,j} a_{ij}\right)} x^{\left(\sum_{i,j} (i+j)a_{ij} - \sum_{i,j} a_{ij}\right)} \\ &= \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^c \left(\sum_{a_{ij} \geq 0} q^{a_{ij}} x^{(i+j-1)a_{ij}} \right) = \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^c (1 - qx^{i+j-1})^{-1}. \end{aligned}$$

□

Como caso particular deste teorema temos que:

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(1,c)} q^{tr(\pi)} x^{|\pi|} = \frac{1}{(1 - qx)(1 - qx^2) \cdots (1 - qx^c)}.$$

A seguir temos duas conseqüências deste teorema. Seja $\mathcal{P}(r)$ o conjunto de todas as partições planas com, no máximo, r linhas. Se $q = 1$ e $c \rightarrow \infty$ no teorema anterior, então temos o seguinte resultado sobre a enumeração dos elementos de $\mathcal{P}(r)$.

Corolário 2.4.1. *Seja $r \in \mathbb{N}$. Então*

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r)} x^{|\pi|} = \prod_{i \geq 1} (1 - x^i)^{-\min\{i, r\}}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.4.1, temos

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \mathcal{P}(r)} x^{|\pi|} &= \prod_{i=1}^r \prod_{j \geq 1} (1 - x^{i+j-1})^{-1} \\ &= \underbrace{(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1} \dots (1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1} \dots}_{i=1} \dots \underbrace{(1-x^{r-1})^{-1}(1-x^r)^{-1} \dots}_{i=2} \dots \\ &\quad \underbrace{(1-x^3)^{-1}(1-x^4)^{-1} \dots}_{i=3} \dots \underbrace{(1-x^r)^{-1}(1-x^{r+1})^{-1} \dots}_{i=r} \dots \\ &= (1-x)^{-1}(1-x^2)^{-2}(1-x^3)^{-3} \dots (1-x^r)^{-r}(1-x^{r+1})^{-r}(1-x^{r+2})^{-r} \dots \\ &= \prod_{i \geq 1} (1 - x^i)^{-\min\{i, r\}}. \end{aligned}$$

□

Seja \mathcal{P} o conjunto de todas as partições planas e seja $r \rightarrow \infty$ no corolário anterior. Temos a seguir um resultado importante na teoria das partições planas.

Corolário 2.4.2. *Temos*

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}} x^{|\pi|} = \prod_{i \geq 1} (1 - x^i)^{-i}.$$

O teorema a seguir é visto como uma variação do Teorema 2.4.1 e sua demonstração faz uso do Teorema 2.2.2.⁽¹⁰⁾ Dizemos que uma partição plana $\sigma = (\sigma_{ij})$ é simétrica se $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \forall i, j$. Seja $\mathcal{S}(r)$ o conjunto de todas as partições planas simétricas com, no máximo, r linhas e, portanto, r colunas no máximo.

Teorema 2.4.2. *Seja $r \in \mathbb{N}$. Então*

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}(r)} q^{tr(\sigma)} x^{|\sigma|} = \prod_{i=1}^r (1 - qx^{2i-1})^{-1} \prod_{1 \leq i < j \leq r} (1 - q^2 x^{2(i+j-1)})^{-1}.$$

¹⁰Para uma demonstração alternativa sem o uso do Teorema 2.2.2, veja Seção 7.20 na referência [8].

Demonstração. Seja $\pi'(P, Q)$ a partição plana descrita na demonstração do Teorema 2.4.1. Logo, π' é simétrica se, e somente se, $P = Q$. Além disso, suponhamos que $A \xrightarrow{RSK'} (P, Q)$, onde RSK' é o algoritmo RSK “reverso” descrito na demonstração do Teorema 2.4.1 (sendo P e Q TYSS reversas). Temos que RSK' satisfaz o Teorema 2.2.2 também, isto é, $A \xrightarrow{RSK'} (P, P)$ se, e somente se, $A = A^t$. Seja M'_r o conjunto de todas as $\mathbb{N} -$ matrizes $r \times r$ simétricas. Logo, procedendo como na demonstração do Teorema 2.4.1, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(r)} q^{tr(\sigma)} x^{|\sigma|} &= \sum_{A=(a_{ij}) \in M'_r} q^{\sum a_{ij}} x^{\sum (i+j-1)a_{ij}} \\ &= \sum_A q^{\left(\sum_{i \geq 1} a_{ii} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq r} a_{ij} \right)} x^{\left(\sum_{i \geq 1} (2i-1)a_{ii} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq r} (i+j-1)a_{ij} \right)} \\ &= \prod_{i=1}^r \left(\sum_{a_{ii} \geq 0} q^{a_{ii}} x^{(2i-1)a_{ii}} \right) \prod_{1 \leq i < j \leq r} \left(\sum_{a_{ij} \geq 0} q^{2a_{ij}} x^{2(i+j-1)a_{ij}} \right) \\ &= \prod_{i=1}^r (1 - qx^{2i-1})^{-1} \prod_{1 \leq i < j \leq r} (1 - q^2 x^{2(i+j-1)})^{-1}. \end{aligned}$$

□

Veremos agora alguns resultados que decorrem da restrição do tamanho da maior parte da partição plana $\pi \in \mathcal{P}(r, c)$. Para compreender melhor os significados das restrições do número de linhas, do número de colunas e da maior parte, vamos apresentar o diagrama de uma partição plana, que deve generalizar a noção de Diagrama de Ferrers de uma partição.

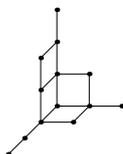
O diagrama $D(\pi)$ de uma partição plana $\pi = (\pi_{ij})$ é o subconjunto de \mathbb{N}^3 definido por

$$D(\pi) = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 : 1 \leq k \leq \pi_{ij}\}.$$

Exemplo: Se

$$\pi = \begin{array}{ccc} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & \\ 1 & & \\ 1 & & \end{array}$$

então $D(\pi)$ é dado por



Observemos que se w é uma permutação dos três eixos coordenados, então w transforma o diagrama $D(\pi)$ de uma partição plana de n no diagrama $w(D(\pi))$ de uma outra partição plana de n . Assim, temos que cada partição plana tem seis partições planas associadas (indexadas por elementos de S_3), obtidas pelos diagramas decorrentes de:

- deixar $D(\pi)$ inalterado;
- conjugar cada linha de $D(\pi)$;
- conjugar cada coluna de $D(\pi)$;
- transpor $D(\pi)$;
- conjugar cada linha de $D(\pi)$ e depois transpor;
- conjugar cada coluna de $D(\pi)$ e depois transpor.

No que segue, vamos identificar π com seu diagrama $D(\pi)$. Notemos que $l_1(\pi)$, $l_2(\pi)$ e $max(\pi)$ permutam entre eles quando aplicamos w em π . Assim, por exemplo, temos que o número de partições planas de n com, no máximo, r linhas e, no máximo, c colunas é igual ao número de partições planas de n com, no máximo, c linhas e maior parte, no máximo, r .

Sejam $r, c, t \in \mathbb{N}$ e definimos a *caixa*

$$B(r, c, t) = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq c, 1 \leq k \leq t\}.$$

Assim, uma partição plana π satisfaz $l_1(\pi) \leq r, l_2(\pi) \leq c$ e $\max(\pi) \leq t$ se, e somente se, o diagrama de π está contido em $B(r, c, t), \pi \subset B(r, c, t)$. Antes de apresentar o próximo resultado, façamos mais algumas definições que nos serão úteis mais adiante.

Dado um Diagrama de Young (Ferrers) λ e um quadrado $u = (i, j) \in \lambda$, definimos $h(u) = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$. Ou seja, $h(u)$ conta o número de quadrados à direita ou abaixo de u em sua coluna e u inclusive. Vamos escrever $h(u)$ dentro do quadrado u . Por exemplo, a partição 4421 tem $h(u)$ dado por

7	5	3	2
6	4	2	1
3	1		
1			

Definimos, também, $c(u)$ de λ em $u = (i, j)$ por

$$c(u) = j - i.$$

Exemplo, $\lambda = 4421$, $c(u)$ é dado por

0	1	2	3
-1	0	1	2
-2	-1		
-3			

De posse dessas observações podemos apresentar o seguinte lema.

Lema 2.4.1. *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in Par$ e $\mu_i = \lambda_i + n - i$. Então,*

$$\prod_{u \in \lambda} [h(u)] = \frac{\prod_{i \geq 1} [\mu_i]!}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} [\mu_i - \mu_j]} \quad (2.9)$$

$$\prod_{u \in \lambda} [n + c(u)] = \prod_{i=1}^n \frac{[\mu_i]!}{[n - i]!}, \quad (2.10)$$

onde $[k] = 1 - q^k$ e $[k]! = [1][2] \cdots [k] = (1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^k)$.

Demonstração. Adicionamos $n - i$ quadrados à i -ésima linha do diagrama de λ , obtendo o diagrama de μ . No quadrado (i, j) inserimos o número $\mu_i - j + 1$. Logo, o conjunto dos números inseridos é $\bigcup_{i \geq 1} \{1, 2, \dots, \mu_i\} = \{\{1, 2, \dots, \mu_1\}, \{1, 2, \dots, \mu_2\}, \dots\}$, ou seja, os expoentes no numerador de (2.9). Para cada $1 \leq i < j \leq n$, escrevemos o número $\mu_i - \mu_j$ no quadrado $(i, \mu_j + 1)$.

Por exemplo, $\lambda = 4421$, então o diagrama de μ (com $\mu_i - \mu_j$ em negrito) é:

7	6	5	4	3	2	1
6	5	4	3	2	1	
3	2	1				
1						

Agora, removendo as colunas $\mu_j + 1$ obtemos novamente o diagrama de λ com $h(u)$ no quadrado u , o que demonstra (2.9).

A demonstração de (2.10) é feita de modo análogo. □

Dado $\lambda \vdash n$, definimos

$$b(\lambda) = \sum_i (i - 1)\lambda_i = \sum_i \binom{\lambda'_i}{2}. \quad (2.11)$$

Notemos que $b(\lambda)$ é a menor soma possível das entradas de uma TYSS (podendo ter 0 como parte) de forma λ obtido unicamente colocando $i - 1$ em todos os quadrados da i -ésima linha de λ . Em particular, para $n \geq l(\lambda)$, temos que $s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = q^{b(\lambda)}v(q)$, sendo $v(q)$ um polinômio em q tal que $v(0) = 1$ e, se $n < l(\lambda)$, $s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = 0$. Com isso temos o seguinte teorema.

Teorema 2.4.3. *Para quaisquer $\lambda \in \text{Par}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = q^{b(\lambda)} \prod_{u \in \lambda} \frac{[n + c(u)]}{[h(u)]}.$$

Demonstração. Se $n < l(\lambda)$ ambos os lados da igualdade são nulos, pois existe $u = (i, j)$ tal que $n + c(u) = n + j - i = 0$ porque $1 \leq i \leq l(\lambda)$. Seja, pois,

$n \geq l(\lambda)$. Como vimos no Capítulo 1, $s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = a_{\lambda+\delta}/a_\delta$, onde $a_{\lambda+\delta} = \det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{i,j=1}^n$ e $a_\delta = \det(x_i^{n-j})_{i,j=1}^n$, donde

$$s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = \frac{\det(q^{(i-1)(\lambda_j+n-j)})_{i,j=1}^n}{\det(q^{(i-1)(n-j)})_{i,j=1}^n}. \quad (2.12)$$

O denominador é igual a $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (q^{(i-1)} - q^{(j-1)})$. Seja

$$a_\delta^* = \det(x_j^{i-1})_{i,j=1}^n.$$

Então $a_\delta^* = (-1)^{\binom{n}{2}} a_\delta$, pois a matriz $(x_j^{i-1})_{i,j=1}^n$ é obtida transpondo $(x_i^{n-j})_{i,j=1}^n$ e depois invertendo a ordem das linhas. Logo, o numerador em (2.12) é $a_\delta^*(q^{\mu_1}, q^{\mu_2}, \dots, q^{\mu_n})$, sendo $\mu_j = \lambda_j + n - j$. Então

$$s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{q^{\mu_i} - q^{\mu_j}}{q^{i-1} - q^{j-1}} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{q^{\mu_j} (q^{\mu_i - \mu_j} - 1)}{q^{(i-1)} (1 - q^{j-i})} \quad (2.13)$$

Pelo lema anterior, usando $\prod_{1 \leq i < j \leq n} [j - i] = \prod_{i=1}^n [n - i]!$, temos

$$s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = \frac{q^{\sum_{i < j} \mu_j} \prod_{i < j} [\mu_i - \mu_j] \prod_{i \geq 1} [\mu_i]!}{q^{\sum_{i < j} (i-1)} \prod_{i < j} [j - i] \prod_{i \geq 1} [\mu_i]!} = q^{b(\lambda)} \prod_{u \in \lambda} \frac{[n + c(u)]}{[h(u)]}.$$

□

Apresentamos a seguir algumas conseqüências deste teorema.

Corolário 2.4.3. *Para qualquer $\lambda \in \text{Par}$ temos*

$$s_\lambda(1, q, q^2, \dots) = \frac{q^{b(\lambda)}}{\prod_{u \in \lambda} [h(u)]}.$$

Demonstração. Basta tomar $n \rightarrow \infty$ no teorema anterior, pois $\prod_{u \in \lambda} (1 - q^{n+c(u)})$ vai para 1 (por (2.10)). \square

Corolário 2.4.4. *Para quaisquer $\lambda \in Par$ e $n \in \mathbb{N}$ temos*

$$s_\lambda(1^n) = \prod_{u \in \lambda} \frac{n + c(u)}{h(u)}. \quad (2.14)$$

Demonstração. Fazendo $q = 1$ no teorema anterior e usando o fato $1 - q^k = (1-q)(1+q+\dots+q^{k-1})$ e cancelando o fator $1-q$ no numerador e no denominador, o resultado segue. \square

O Teorema 2.4.3 estabelece uma função geradora para as partições planas cujas colunas são estritamente decrescentes. Na demonstração do próximo teorema veremos que, se $\lambda = (c^r)$, podemos associar uma função geradora com partições planas de forma (c^r) .

Teorema 2.4.4. *Sejam r, c, t fixos, com $r \leq c$. Então*

$$\sum_{\pi \in B(r,c,t)} q^{|\pi|} = \frac{[t+1][t+2]^2 \cdots [t+r]^r [t+r+1]^r \cdots [t+c]^r [t+c+1]^{r-1} \cdots [t+r+c-1]}{[1][2] \cdots [r]^r [r+1]^r \cdots [c]^r [c+1]^r \cdots [c+r-1]}, \quad (2.15)$$

onde $[i] = 1 - q^i$.

Demonstração. Seja $\lambda = (c^r)$, retangular com r linhas e c colunas. Notemos que assumindo $r \leq c$ não perdemos generalidade, pois poderíamos trocar λ por λ' . Seja $\pi = (\pi_{ij})$ uma partição plana de forma λ cujas colunas são estritamente decrescentes, possivelmente com entradas iguais a 0. Definimos $\pi^* = (\pi_{ij}^*)$ por $\pi_{ij}^* = \pi_{ij} - r + i$. Com isso, cada coluna estritamente decrescente de π torna-se uma coluna não-crescente de π^* .

Por exemplo:

$$\begin{array}{cccccc} 6 & 6 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ \pi = & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \implies \begin{array}{cccccc} & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ \pi^* = & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Assim, π^* é uma partição plana satisfazendo

$$\begin{aligned} l_1(\pi^*) &\leq r, l_2(\pi^*) \leq c \\ \max(\pi^*) &= \max(\pi) - r + 1, \\ |\pi^*| &= |\pi| - \sum_{i,j=1}^r (r-i) = |\pi| - c \sum_{i=1}^r (r-i) = |\pi| - c \binom{r}{2}. \end{aligned}$$

Inversamente, dada tal partição plana π^* , fazendo $\pi_{ij} = \pi_{ij}^* + r - i$, podemos obter π . Logo, pelo Teorema 2.4.3,

$$\sum_{\pi \in B(r,c,t)} q^{|\pi|} = q^{-\binom{r}{2}c} s_{(c^r)}(1, q, \dots, q^{t+r-1}) = q^{b((c^r)) - \binom{r}{2}c} \prod_{u \in (c^r)} \frac{[t+r+c(u)]}{[h(u)]}. \quad (2.16)$$

Por (2.11), temos $b((c^r)) = \binom{r}{2}c$. Além disso, o conjunto formado pelos $h(u)$ de (c^r) é $\{1, 2^2, 3^3, \dots, r^r, (r+1)^r, \dots, c^r, (c+1)^{r-1}, (c+2)^{r-2}, \dots, c+r-1\}$ e o conjunto formado pelos $c(u)$ é obtido do anterior pela subtração de r . Substituindo os valores de $c(u)$ e $h(u)$ em (2.16) o resultado segue. \square

Com este teorema finalizamos esta seção. A seguir, na próxima seção, vamos aplicar as funções simétricas em enumeração de permutações.

2.5 Enumeração de Permutações via Funções Simétricas

Nesta seção, vamos aplicar alguns resultados sobre funções simétricas para enumerar determinados tipos de permutações. Iniciamos estabelecendo um lema sobre o algoritmo RSK que nos será útil.

Lema 2.5.1. *Sejam $w \in S_n$ e $w \xrightarrow{RSK} (P, Q)$. Então $D(P) = D(w^{-1})$ e $D(Q) = D(w)$.*⁽¹¹⁾

¹¹ D é o conjunto descendente: $D(\pi) = \{i : \pi_i > \pi_{i+1}\}, \pi = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_n \in S_n$.

Demonstração. Sejam $(P_0, Q_0), \dots, (P_n, Q_n) = (P, Q)$ os pares sucessivos de Tabelas de Young Semi-Simples obtidas pela aplicação do algoritmo RSK em w . Seja $w = w_1 \cdots w_n$ e suponhamos que para algum $i, w_i > w_{i+1}$. Como observado na demonstração do Teorema 2.2.1, o caminho de inserção de w_{i+1} está à direita daquele de w_i .

Suponhamos que a forma de P_i é obtida daquela de P_{i-1} colocando-se um quadrado na posição (a, b) , donde a entrada (a, b) de Q é igual a i . Quando inserimos w_{i+1} em P_i , se um elemento m é movido para a linha a , então ele deve ocupar a posição $(a, b+1)$ sem mover um outro elemento. Logo, $i+1$, não aparece em Q numa linha menor do que i , então $i \in D(Q)$.

Similarmente, se $w_i > w_{i+1}$ então o caminho de inserção de w_{i+1} não está à direita daquele de w_i . Então um elemento deve ser movido para a linha a , mas não no final e, então, deve mover um elemento para a linha $a+1$. Daí, $i \in D(Q)$, donde $D(w) = D(Q)$.

Pela propriedade de simetria do algoritmo RSK, $w^{-1} \xrightarrow{RSK} (Q, P)$. Logo, pelo que acabamos de provar, $D(w^{-1}) = D(P)$. \square

Recordemos da Seção 1.3.9 a definição de $co(S)$ de um conjunto $S \subseteq [n-1] = \{1, 2, \dots, n-1\}$. Podemos estender a definição de co às permutações $w \in S_n$ colocando $co(w) = co(D(w))$. Similarmente, definimos $co'(w) = co([n-1] - D(w))$. Notemos que $[n-1] - D(w)$ é o conjunto ascendente $A(w)$ de w .

O teorema a seguir é uma conseqüência do lema anterior e estabelece uma expressão de $\prod (1 - x_i y_j) \left(= \sum_{\lambda \vdash n} s_\lambda(x) s_\lambda(y) \right)$ em termos de funções quase-simétricas.

Teorema 2.5.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$\sum_{\lambda \vdash n} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \sum_{w \in S_n} L_{co(w^{-1})}(x) L_{co(w)}(y) \quad (2.17)$$

$$\sum_{\lambda \vdash n} s_\lambda(x) s_{\lambda'}(y) = \sum_{w \in S_n} L_{co(w^{-1})}(x) L_{co'(w)}(y). \quad (2.18)$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.3.8, temos

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \vdash n} s_\lambda(x) s_\lambda(y) &= \sum_{\lambda \vdash n} \left(\sum_{sh(T)=\lambda} L_{co(T)}(x) \right) \left(\sum_{sh(T')=\lambda} L_{co(T')}(y) \right) \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{\substack{sh(T)=\lambda \\ sh(T')=\lambda}} L_{co(T)}(x) L_{co(T')}(y), \end{aligned}$$

onde $sh(T) = \lambda$ significa que a soma é feita sobre todos os TYS de forma λ . Se $w \in S_n$ satisfaz $w \xrightarrow{RSK} (T, T')$, então pelo Lema 2.4.1, $D(w) = T'$ e $D(w^{-1}) = T$.

Logo,

$$\sum_{\lambda \vdash n} \sum_{\substack{sh(T)=\lambda \\ sh(T')=\lambda}} L_{co(T)}(x) L_{co(T')}(y) = \sum_{w \in S_n} L_{co(w^{-1})}(x) L_{co(w)}(y),$$

o que mostra (2.17).

A prova de (2.18) é análoga usando o algoritmo RSK dual. \square

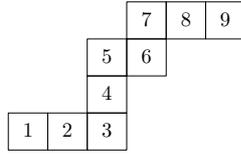
Este teorema “determina” o número de permutações $w \in S_n$ com $D(w^{-1}) = S$ e $D(w) = T$, pois este número é o coeficiente de $L_\alpha(x) L_\beta(y)$ na expressão (2.17), sendo $\alpha = \alpha_S$ e $\beta = \beta_T$ (onde α_S e β_T são as composições correspondentes a S e T). Vamos procurar, no entanto, uma expressão mais explícita (e útil) para este número. Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in Comp(n)$, seja B_α a faixa com fronteira com α_i quadrados na linha $l - i + 1$. Pensando em B_α como uma forma diagonal, então s_{B_α} é uma Função de Schur Diagonal.

Lema 2.5.2. *O conjunto $\mathcal{L}(P_{B_\alpha, \omega_{B_\alpha}})^{(12)}$ consiste de todas as permutações $w \in S_n$ tais que $co(w^{-1}) = \alpha$.*

¹²definido na Seção 1.3.9.

Demonstração. Uma permutação $w \in S_n$ está em $\mathcal{L}(P_{B_\alpha}, \omega_{B_\alpha})$ se, e somente se, $i+1$ sucede i em w (onde $w = w_1 \cdots w_n$) sempre que i e $i+1$ estiverem na mesma linha e $i+1$ precede i em w quando i e $i+1$ estão numa mesma coluna. Logo, $i \in D(w^{-1})$ se, e somente se, i e $i+1$ estão na mesma coluna, o que é equivalente a $i \in S_\alpha$. \square

Exemplo: seja $\alpha = (3, 1, 2, 3) \in \text{Comp}(9)$. A faixa com fronteira correspondente é



Um elemento de $\mathcal{L}(P, Q)$ é $w = 578124963$. Então, $w^{-1} = 459618237$, donde $D(w^{-1}) = \{3, 4, 6\}$ e $co(w^{-1}) = (3, 1, 2, 3) = \alpha$.

Apresentamos a seguir uma série de resultados que decorrem deste lema que resultarão na expressão para o número de permutações $w \in S_n$ tais que $D(w^{-1}) = S$ e $D(W) = T$ que estamos procurando.

Corolário 2.5.1. *Seja $\alpha \in \text{Comp}(n)$. Então*

$$s_{B_\alpha} = \sum_{\substack{w \in S_n \\ \alpha = co(w^{-1})}} L_{co(w)}.$$

Demonstração. É imediato pelo Teorema 1.3.8. \square

Corolário 2.5.2. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Segue que*

$$\sum_{\lambda \vdash n} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \sum_{\alpha \in \text{Comp}(n)} L_\alpha(x) s_{B_\alpha}(y). \quad (2.19)$$

Demonstração. Pelo corolário anterior e pelo Teorema 2.5.1, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in \text{Comp}(n)} L_{\alpha}(x) s_{B_{\alpha}}(y) &= \sum_{\alpha \in \text{Comp}(n)} L_{\alpha}(x) \sum_{\substack{w \in S_n \\ co(w^{-1}) = \alpha}} L_{co(w)}(y) \\
&= \sum_{w \in S_n} L_{co(w^{-1})}(x) L_{co(w)}(y) \\
&= \sum_{\lambda \vdash n} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y).
\end{aligned}$$

□

O próximo corolário apresenta uma fórmula para a expressão de qualquer função simétrica em termos das funções quase-simétricas fundamentais.

Corolário 2.5.3. *Seja $f \in \Lambda^n$, então*

$$f = \sum_{\alpha \in \text{Comp}(n)} \langle f, s_{B_{\alpha}} \rangle L_{\alpha}.$$

Demonstração. Para o caso $f = s_{\lambda}$, tomamos o produto escalar em ambos os lados de (2.19) com $s_{\lambda}(y)$ para obter

$$\begin{aligned}
f = s_{\lambda} = \sum_{\mu \vdash n} s_{\mu}(x) \langle s_{\lambda}(y), s_{\mu}(y) \rangle &= \sum_{\alpha \in \text{Comp}(n)} L_{\alpha}(x) \langle s_{\lambda}(y), s_{B_{\alpha}}(y) \rangle \\
&= \sum_{\alpha \in \text{Comp}(n)} \langle f, s_{B_{\alpha}} \rangle L_{\alpha}.
\end{aligned}$$

Os demais casos seguem por linearidade.

□

O corolário a seguir apresenta uma expansão alternativa de $\sum_{\lambda \vdash n} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y)$ em termos de funções quase-simétricas.

Corolário 2.5.4. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$\sum_{\lambda \vdash n} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y) = \sum_{\alpha, \beta \in \text{Comp}(n)} \langle s_{B_{\alpha}}, s_{B_{\beta}} \rangle L_{\alpha}(x) L_{\beta}(y).$$

Demonstração. Pelo corolário anterior,

$$s_{B_\beta}(y) = \sum_{\alpha \in \text{Comp}(n)} \langle s_{B_\alpha}, s_{B_\beta} \rangle L_\alpha.$$

O resultado segue pela substituição dessa expressão para $s_{B_\beta}(y)$ em (2.19). \square

Agora, escrevendo B_S e B_T no lugar das faixas com fronteira B_{α_S} e B_{α_T} (onde α_S e α_T são as composições correspondentes a S e T) e, comparando o Teorema 2.5.1 com o corolário anterior, temos o resultado desejado a seguir.

Corolário 2.5.5. *Sejam $S, T \subseteq [n-1]$. Então, o número de permutações $w \in S_n$ tais que $D(w^{-1}) = S$ e $D(w) = T$ é igual ao produto escalar $\langle s_{B_S}, s_{B_T} \rangle$.*

De agora até o fim desta seção, vamos discutir uma segunda conexão entre as funções simétricas e a enumeração de permutações. Se $w = w_1 \cdots w_n \in S_n$, seja $v = w_{i_1} \cdots w_{i_k}$ uma subsequência de w , ou seja, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$. Dizemos que v é crescente se $w_{i_1} < w_{i_2} < \cdots < w_{i_k}$ e decrescente se $w_{i_1} > w_{i_2} > \cdots > w_{i_k}$. Vamos denotar por $is(w)$ o comprimento (ou número de termos) da maior subsequência crescente de w e por $r_i(w)$ o inteiro j mais à direita em w tal que a maior subsequência crescente de w , cujo último termo é j , tem comprimento i .

Por exemplo: se $w = 725481963$, então $is(w) = 4$, $r_1(w) = 1$, $r_2(w) = 3$, $r_3(w) = 6$ e $r_4(w) = 9$, sendo $r_i(w)$ indefinido para $i > 4$. Em geral, $1 = r_1(w) < r_2(w) < \cdots < r_{is(w)}(w)$.

Proposição 2.5.1. *Sejam $w \in S_n$, $m = is(w)$ e $w \xrightarrow{RSK} (P, Q)$. Então, a primeira linha de P é igual a $r_1(w), r_2(w), \dots, r_m(w)$.*

Demonstração. Uma subsequência crescente w_{i_1}, \dots, w_{i_k} de w é equivalente a uma cadeia $(i_1, w_{i_1}) < \cdots < (i_k, w_{i_k})$ no conjunto parcialmente ordenado $I(w)$ (definido antes do Lema 2.2.4). Então, a anti-cadeia $I_j(w)$ consiste dos pares (i, w_i) para os

quais a maior subsequência crescente de w terminando em w_i tem comprimento j .

O máximo valor de i para um tal par é, por definição, u_{jn_j} , e o valor correspondente de w_i é v_{jn_j} . Logo, $v_{jn_j} = r_j(w)$ e a demonstração segue pelo Lema 2.2.4. \square

O corolário a seguir, imediato do corolário anterior, estabelece uma interpretação combinatória do comprimento da primeira linha de P quando $w \xrightarrow{RSK} (P, Q)$.

Corolário 2.5.6. *Sejam $w \in S_n$, $w \xrightarrow{RSK} (P, Q)$ e $sh(P) = sh(Q) = \lambda$. Então, $\lambda_1 = is(w)$.*

Corolário 2.5.7. *Seja $g_p(n)$ o número de permutações $w \in S_n$ para as quais $is(w) = p$. Então*

$$g_p(n) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda_1 = p}} (f^\lambda)^2.$$

Demonstração. Existem $(f^\lambda)^2$ pares de TYS de forma λ . Logo, o resultado segue do corolário anterior. \square

Vamos procurar agora uma forma de enumerar as permutações não só com $is(w) = p$, mas, também, com exigência quanto ao comprimento da maior subsequência decrescente.

Se $w \in S_n$, definimos a forma $sh(w)$ de w como a forma do TYS P (ou Q) quando $w \xrightarrow{RSK} (P, Q)$. A seguir, apresentamos um teorema cuja demonstração está num dos apêndices da referência [8] e é longa, razão pela qual não a colocamos neste trabalho.

Teorema 2.5.2. *Sejam $w \in S_n$ e $sh(w) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$. Então, para todo $i \geq 1$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_i$ é igual ao comprimento da maior subsequência de w que pode ser escrita como uma união de i subsequências crescentes.*

Por exemplo: se $w = 247951368$, então a subsequência 24791368 é a união das subsequências crescentes 2479 e 1368. Logo, $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 8$. Como w não pode ser escrita como uma união de duas subsequências crescentes, então $\lambda_1 + \lambda_2 = 8$.

Temos denotado por $T \leftarrow k$ a inserção, nas linhas, de um inteiro k numa TYSS T . Assumindo que todas as entradas de T são distintas e diferentes de k , vamos denotar por $k \rightarrow T$ a inserção de k nas colunas de T . Esta inserção é definida exatamente como a inserção em linha trocando linha por coluna. Equivalentemente, se t denota transposição, então $(k \rightarrow T) = (T^t \leftarrow k)^t$, igualdade que decorre do análise de casos do seguinte lema fundamental.

Lema 2.5.3. *Se $i \neq j$, então*

$$j \rightarrow (T \leftarrow i) = (j \rightarrow T) \leftarrow i.$$

Ou seja, inserção em linha e em coluna comutam.

Lema 2.5.4. *Sejam*

$$\begin{aligned} P(i_1, i_2, \dots, i_n) &= ((i_1 \leftarrow i_2) \leftarrow i_3) \leftarrow \dots \leftarrow i_n \\ \tilde{P}(i_1, i_2, \dots, i_n) &= i_1 \rightarrow \dots \rightarrow (i_{n-2} \rightarrow (i_{n-1} \rightarrow i_n)). \end{aligned}$$

Então,

$$P(i_1, i_2, \dots, i_n) = \tilde{P}(i_1, i_2, \dots, i_n).$$

Demonstração. A prova é por indução em n . O resultado é claro para $n = 1$, pois $P(i_1) = \tilde{P}(i_1) = i_1$. Seja $n \geq 2$ e suponhamos que o resultado vale para $\forall m \leq n$.

Temos

$$\begin{aligned}
P(i_1, \dots, i_{n+1}) &= P(i_1, \dots, i_n) \leftarrow i_{n+1} \\
&= \tilde{P}(i_1, \dots, i_n) \leftarrow i_{n+1} \\
&= [i_1 \rightarrow \tilde{P}(i_2, \dots, i_n)] \leftarrow i_{n+1} \quad (\text{definição de } \tilde{P}) \\
&= i_1 \rightarrow [\tilde{P}(i_2, \dots, i_n) \leftarrow i_{n+1}] \quad (\text{lema anterior}) \\
&= i_1 \rightarrow [P(i_2, \dots, i_n) \leftarrow i_{n+1}] \\
&= i_1 \rightarrow P(i_2, \dots, i_n, i_{n+1}) \quad (\text{definição de } \leftarrow) \\
&= i_1 \rightarrow \tilde{P}(i_2, \dots, i_n, i_{n+1}) \\
&= \tilde{P}(i_1, \dots, i_n, i_{n+1}) \quad (\text{definição de } \rightarrow)
\end{aligned}$$

□

De posse desse lema, apresentamos o teorema a seguir que estabelece uma nova propriedade de simetria do algoritmo RSK.

Teorema 2.5.3. *Sejam $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in S_n$, $w \xrightarrow{RSK} (P, Q)$ e $w^r = w_n \cdots w_2 w_1$. Suponhamos que $w^r \xrightarrow{RSK} (P^*, Q^*)$. Então, $P^* = P^t$. Em particular, $sh(w) = sh(w^r)'$.⁽¹³⁾*

Demonstração. Usando a notação do lema anterior, temos que $P(w_1, \dots, w_n) = P$ e $\tilde{P}(w_1, \dots, w_n)^t = P^*$. Pelo lema anterior, $P^* = P^t$. □

Como uma subsequência decrescente de w torna-se uma subsequência crescente (na ordem inversa) de w^r e vice-versa, o resultado a seguir é uma consequência imediata dos Teoremas 2.5.2 e 2.5.3.

Teorema 2.5.4. *Sejam $w \in S_n$ e $sh(w) = \lambda$. Então, para $\forall i \geq 1$, $\lambda'_1 + \cdots + \lambda'_i$ é igual ao comprimento da maior subsequência de w que pode ser escrita como uma união de i subsequências decrescentes. Em particular, λ'_1 é o comprimento da maior subsequência decrescente de w .*

¹³a descrição de Q^* é mais complexa e é apresentada no apêndice da referência [8]. Para os propósitos deste trabalho, não necessitamos de Q^* e, por isso, vamos omiti-lo.

Estamos agora em condições de estabelecer a segunda conexão entre as funções simétricas e a enumeração de permutações. Este resultado está no corolário a seguir que é uma consequência imediata do teorema anterior e da Proposição 2.5.1. Escrevemos $ds(w)$ para o comprimento da maior subsequência decrescente de w .

Corolário 2.5.8. *Seja $g_{p,q}(n)$ o número de permutações $w \in S_n$ tais que $is(w) = p$ e $ds(w) = q$. Então*

$$g_{p,q}(n) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda_1 = p, \lambda'_1 = q}} (f^\lambda)^2.$$

Finalizamos esta seção com dois exemplos.

(a) Se $w \in S_{pq+1}$, então $is(w) > p$ ou $ds(w) > q$, pois nenhuma partição $\lambda \vdash pq+1$ satisfaz $\lambda_1 \leq p$ e $\lambda'_1 \leq q$ (se assim o fosse, $|\lambda| < pq+1$). Logo, $g_{p,q}(pq+1) = 0$.

(b) Sejam $p, q > n$. Então, existem exatamente $p(n)$ partições $\lambda \vdash (p+q+n-1)$ tais que $\lambda_1 = p$ e $\lambda'_1 = q$, quais sejam, $\lambda = (p, 1 + \mu_1, 1 + \mu_2, \dots, 1 + \mu_{q-1})$, onde $\mu \vdash n$, ou seja, $\lambda = (p, 1 = \mu)$. Então

$$g_{p,q}(p+q+n-1) = \sum_{\mu \vdash n} (f^{(p, 1+\mu)})^2.$$

2.6 Funções Simétricas e a Enumeração Sob a Ação de Grupos

A teoria de enumeração sob a ação de grupos (ou Teoria de Pólya) é um tópico importante em combinatória enumerativa, que normalmente é apresentada sem fazer uso das funções simétricas. Nesta seção, no entanto, vamos abordar esta teoria a partir do que vimos até agora.

Lembremos que a Teoria de Pólya apóia-se numa função geradora $Z_G(x)$ dos tipos cíclicos dos elementos de um subgrupo G de S_R (o grupo simétrico de todas as permutações de um conjunto finito R).

Definição 2.6.1. *Seja K um subgrupo do grupo simétrico S_R . Definimos o indicador cíclico argumentado \tilde{Z}_K de K como sendo a função simétrica*

$$\tilde{Z}_K = \sum_{w \in K} p_{\rho(w)},$$

onde $\rho(w)$ denota o tipo cíclico de w (definido na Seção 1.3). O indicador cíclico Z_K de K é definido por

$$Z_K = \frac{1}{|K|} \sum_{w \in K} p_{\rho(w)}.$$

Notemos que Z_K (ou \tilde{Z}_K) é uma função geradora para os elementos de K de acordo com seu tipo cíclico. Além disso, se $n = |R|$, então Z_K e \tilde{Z}_K são homogêneas de grau n , ou seja, $Z_K, \tilde{Z}_K \in \Lambda^n$.

Na exposição tradicional da Teoria de Pólya, a função simétrica soma de potências p_i é substituída por uma variável t_i . Isto representa apenas uma mudança de ponto de vista, pois as p_i 's são algebricamente independentes (Corolário 1.3.4).

Vejamos agora dois exemplos para ilustrar a definição anterior.

Exemplos:

(a) Sejam R o conjunto de vértices de um quadrado e G o grupo de todas as transformações espaciais do quadrado agindo em R . O elemento identidade tem indicador cíclico p_1^4 . As rotações de 90° ou 270° têm indicador cíclico p_4 . A rotação de 180° tem indicador cíclico p_2^2 . As duas reflexões diagonais têm indicador cíclico $p_1^2 p_2$. Logo,

$$Z_G = \frac{1}{8}(p_1^4 + 2p_4 + 3p_2^2 + 2p_1^2 p_2).$$

Se considerarmos G como o grupo das simetrias rotacionais planas do quadrado, teríamos

$$Z_G = \frac{1}{4}(p_1^4 + 2p_4 + p_2^2).$$

(b) Seja G o grupo S_R de todas as permutações do conjunto de n elementos R , então $G \cong S_n$. Seja $\lambda \vdash n$. Lembremos (igualdade (1.1)) que $n!z_\lambda^{-1}$ é o número de permutações $w \in S_n$ de tipo cíclico λ . Logo, pela Proposição 1.3.9, $Z_G = h_n$.

Sejam $X = \{c_1, c_2, \dots\}$ um conjunto de *cores*, S um conjunto não-vazio e X^S o conjunto de todas as funções $f : S \rightarrow X$. Pensamos em f como uma coloração do conjunto S , com o elemento $s \in S$ recebendo a cor $f(s) \in X$. O *peso* x^f de $f \in X^S$ é definido por

$$x^f = \prod_{i \geq 1} x_i^{|f^{-1}(c_i)|}.$$

(c) Sejam $X = \{preta, branca\}$ e S o conjunto dos vértices de um quadrado, $S = \{a, b, c, d\}$. Tomemos $f : S \rightarrow X$ tal que $f(a) = f(b) = preta$ e $f(c) = f(d) = branca$. Logo, $x^f = x_1^2 x_2^2$.

Assim, x^f é um monômio de grau $n = |S|$ nas variáveis x_1, x_2, \dots , que, para cada i , diz quantos elementos de S são coloridos com c_i .

Existe uma ação natural de $G = S_S$ em X^S : se $w \in G$, $f \in X^S$ e $s \in S$, então

$$(w \cdot f)(s) = f(w \cdot s).$$

Denotamos por X^S/G o conjunto das órbitas desta ação, ou seja, os elementos de X^S/G são as classes de equivalência com respeito à relação $\sim : f \sim g$ se existe $w \in G$ tal que $g = w \cdot f$. Notemos que se $f \sim g$, então $x^f = x^g$. Assim, se $\mathcal{F} \in X^S/G$, definimos $x^{\mathcal{F}}$ como x^f , para qualquer $f \in \mathcal{F}$. As classes de equivalência \mathcal{F} são chamadas *padrões*. O *inventário padrão* de G é a função geradora

$$F_G(x) = \sum_{\mathcal{F} \in X^S/G} x^{\mathcal{F}}.$$

Assim, o coeficiente de um monômio x^α em $F_G(x)$ é o número de órbitas $\mathcal{F} \in X^S/G$ de peso x^α . Como os elementos de X são tratados igualmente, (são cores), segue que $F_G(x)$ é uma função simétrica; mais ainda $F_G(x) \in \Lambda^n$.

Para ilustrar tudo isso, vejamos alguns exemplos:

(d) Sejam S o conjunto dos vértices de um quadrado e G o grupo de suas simetrias espaciais, como no exemplo (a). Duas colorações dos vértices são equivalentes se existir uma simetria do quadrado levando uma coloração na outra. Seja $\lambda \vdash 4$. O coeficiente de m_λ em F_G é o número de colorações não-equivalentes dos vértices usando λ_i i 's, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Utilizando a notação $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ para um quadrado cujos vértices têm cores a, b, c e d , apresentamos abaixo representantes de cada uma destas colorações não-equivalentes (usando as cores 1, 2, 3, 4):

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 3 & 4 & 4 & 3 & 4 & 2 \end{array}$$

Então, $F_G = m_4 + m_{31} + 2m_{22} + 2m_{211} + 3m_{1111}$.

Se G fosse o grupo de simetrias rotacionais do quadrado, teríamos, além daquelas acima, as seguintes colorações não-equivalentes:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{array}$$

e $F_G = m_4 + m_{31} + 2m_{22} + 3m_{211} + 6m_{1111}$.

(e) Sejam G o grupo S_R de todas as permutações do conjunto R de n elementos, como no exemplo (b). Para simplificar vamos assumir $R = [n]$, donde $S_R = S_n$. Duas colorações $f, g \in X^R$ são equivalentes se, e somente se, $\{|f^{-1}(c)| : c \in X\} = \{|g^{-1}(c)| : c \in X\}$. Logo, o coeficiente de qualquer monômio x^α de grau n em F_{S_n} é igual a 1, donde

$$F_{S_n} = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda = h_n.$$

Até aqui, temos definido duas funções simétricas Z_G e F_G associadas com o grupo de permutações G . O indicador de ciclo Z_G é definido em termos das funções simétricas soma de potências, enquanto a função simétrica inventário padrão F_G é definida em termos das funções simétricas monomiais m_λ .

O lema a seguir, chamado Lema de Burnside, é um resultado simples porém fundamental. Ele vai permitir demonstrar o resultado mais importante desta seção, qual seja, $Z_G = F_G$.

Lema 2.6.1. *Sejam Y um conjunto finito e G um subgrupo de S_Y . Para cada $w \in G$ seja*

$$Fix(w) = \{y \in Y : w(y) = y\},$$

onde $|Fix(w)|$ é o número de ciclos de tamanho 1 na permutação w . Seja Y/G o conjunto das órbitas de G . Então,

$$|Y/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{w \in G} |Fix(w)|.$$

Demonstração. Para $y \in Y$, seja $G_y = \{w \in G : w(y) = y\}$, o estabilizador de y . Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{w \in G} |Fix(w)| &= \frac{1}{|G|} \sum_{w \in G} \sum_{\substack{y \in Y \\ w(y)=y}} 1 \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{y \in Y} \sum_{\substack{w \in G \\ w(y)=y}} 1 \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{y \in Y} |G_y|. \end{aligned}$$

Seja $Gy = \{w(y) : w \in G\}$ a órbita de G contendo y . Como duas órbitas são disjuntas ou coincidem, o conjunto formado pelos elementos $w(y)$, $w \in G$, contém cada elemento da órbita Gy o mesmo número de vezes, qual seja, $|G|/|Gy|$ vezes. Logo, y ocorre $|G|/|Gy|$ vezes entre os elementos $w(y)$, donde

$$\frac{|G|}{|Gy|} = |G_y|.$$

$$\text{Assim, } \frac{1}{|G|} \sum_{w \in G} |Fix(w)| = \frac{1}{|G|} \sum_{y \in Y} \frac{|G|}{|Gy|} = \sum_{y \in Y} \frac{1}{|Gy|}.$$

Para uma órbita fixa $\mathcal{O} \in Y/G$, temos $Gy = \mathcal{O}$ se, e somente se, $y \in \mathcal{O}$. Logo, o termo $\frac{1}{|Gy|}$ aparece $|\mathcal{O}|$ vezes na última soma acima. Portanto, esta soma nos dá o número de órbitas $|Y/G|$. \square

Finalizamos esta seção com o resultado prometido anteriormente.

Teorema 2.6.1. *Seja R um conjunto finito. Para qualquer subgrupo G de S_R temos que $Z_G = F_G$.*

Demonstração. Sejam $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in Comp(n)$ e \mathcal{C}_α o conjunto de todas as colorações $f \in X^R$ com a cor c_j sendo usada α_j vezes. O conjunto \mathcal{C}_α é invariante sob a ação de G em X^R . Denotamos por w_α a ação de w em \mathcal{C}_α . Vamos aplicar o lema anterior para encontrar o número de órbitas. Para isso, precisamos encontrar $|Fix(w_\alpha)|$.

Para que $f \in Fix(w_\alpha)$, f deve “colorir” R de modo que: (a) em qualquer ciclo de w , todos os elementos ganham a mesma cor; (b) a cor c_j aparece α_j vezes. Logo,

$$|Fix(w_\alpha)| = [x^\alpha] \prod_j p_j^{m_j(w)} = [x^\alpha] p_{\rho(w)},^{(14)}$$

onde $m_j(w)$ é o número de ciclos de w de comprimento j . Então,

$$p_{\rho(w)}(x) = \sum_\alpha |Fix(w_\alpha)| x^\alpha.$$

Agora, somamos sobre todas as $w \in G$ e dividimos por $|G|$. O lado esquerdo torna-se Z_G , enquanto o lado direito, pelo Lema de Burnside (lema anterior), torna-se F_G . \square

¹⁴lembramos que $[x^\alpha]$ é o coeficiente de x^α em f .

Referências Bibliográficas

- [1] Aitken, A. C.; *Note on Dual Symmetric Functions*. Proc. Edin. Math. Soc., 2(2), 164-7, 1931.
- [2] Goldschmidt, David M.; *Group Characters, Symmetric Functions and Hecke Algebra*. American Mathematical Society, 1993.
- [3] Jacobson, Nathan; *Basic Algebra I, second ediction*. W. H. Freeman and Company, New York, 1985.
- [4] MacDonald, I. G.; *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. Oxford University Press, Oxford, 1979.
- [5] Sagan, Bruce E.; *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions*. Brooks/Cole Publishing Company, California, 1991.
- [6] Serre, Jean-Pierre; *Linear Representation of Finite Groups*. Springer-Verlag, 1977.
- [7] Stanley, Richard P.; *Enumerative Combinatorics, vol 1*, Cambridge University Press, 1997.
- [8] Stanley, Richard P.; *Enumerative Combinatorics, vol 2*, Cambridge University Press, 1999.

Índice Remissivo

- P -partição, 60, 61
 inversa, 61, 63, 65
- π -inversamente compatível, 60, 63
- algoritmo RSK, 74, 75, 77, 78, 80–82,
 84, 87, 108, 116
 dual, 86, 87
 reverso, 102
- aplicação característica, 91
- Aplicação Característica de Frobenius,
 89
- caminho de inserção, 74, 109
 inverso, 79
- caracteres irredutíveis do grupo simétrico,
 57, 89, 92–94
- Coefficientes de Littlewood-Richardson,
 45
- composições de n , 8, 11, 34, 35, 52, 58,
 60, 94
- especialização, 68, 70
 estável, 70
 exponencial, 71
 principal, 70
- faixa com fronteira, 52, 53, 110, 111
 adicionar, 54
 altura da, 52
- função de classe, 88, 91, 93
 produto
 induzido, 91
 ponto-a-ponto, 90
 produto de, 90
- função geradora
 das funções simétricas elementares,
 9
 função quase-simétrica, 57, 58, 60–62,
 64, 109, 112
 fundamental, 58, 65, 112
 homogênea de grau n , 58
 monomial, 58
- função simétrica
 homogênea de grau n , 8
 de Schur, 33
 definição clássica, 39, 40
 de Schur diagonal

- definição clássica, 44
- definição combinatória, 34
- elementar, 9, 18, 41
- homogênea completa, 17
- monomial, 8
- soma de potências, 22, 55, 121
- Identidade de Cauchy, 81, 87
- identidade de Jacobi-Trudi, 45, 93
- indicador cíclico, 118
 - argumentado, 118
- inventário padrão, 119, 121
- involução, 20, 23, 31, 50, 68
- Lema de Burnside, 121
- matriz
 - de transição, 50
 - estritamente unitriangular, 48
 - permutação, 79, 86
 - permutação generalizada, 76, 77
 - transposição, 49
 - triangular superior, 48
- Número de Kostka, 35, 51
- ordem
 - \subseteq , 4
 - de dominância, 4
 - lexicográfica reversa, 4, 48
- partição, 54, 95, 96, 98
 - comprimento de uma, 2
 - conjugada, 3
 - definição de, 2
 - Diagrama de Ferrers
 - Modificado, 97
 - Diagrama de Ferrers da, 2, 102
 - Diagrama de Young, 3, 32
 - de forma λ/μ conexo, 51
 - de forma λ/μ , 33
 - plana, 95, 96, 102, 104
 - diagrama, 102, 103
 - parte da, 96
 - simétrica, 101
 - posto da, 5
 - permutação
 - tipo cíclico da, 23
 - produto escalar, 29
 - Regra de Murnaghan-Nakayama, 55
 - Regra de Young, 94
 - Reticulado de Young, 4
 - Tabela de Young
 - faixa com fronteira de forma λ/μ , 54, 55
 - comprimento da, 32
 - peso da, 33
 - Semi-Simples, 32, 65

de forma diagonal, 33
 reversa de forma diagonal, 37
 Simples, 36, 66
 descendente da, 65
 descendente da, 66
 tipo da, 33
 teorema
 fundamental das funções simétricas,
 15