

DISTRIBUIÇÃO EXATA DA ESTATÍSTICA DE RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA PARA TESTAR

$$H_0 : \Sigma = I$$

EM POPULAÇÕES NORMAIS MULTIVARIADAS COMPLEXAS

Este exemplar corresponde a redação final da
tese devidamente corrigida e defendida pelo
Sr. **Cirilo Alvarez Rojas** e aprovada pela
Comissão Julgadora.

Campinas, 5 de dezembro de 1989

Prof. Dr. Pushpa Narayan, Rathie

P/ Orientador

R. C. L. M. Moran
Coordenador
Sub CPG Estatística

Dissertação apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Ciência da
Computação, como requisito parcial
para a obtenção do título de Mestre em
Estatística.

Dedicatória

Dedico o presente trabalho a toda juventude do interior de meu país (Perú) que pela grande distância dos centros educacionais e outros fatores não podem alcançar níveis de educação superior.

A minha família, em especial a minha filha Patricia e à Hermínia.

Agradecimentos

O autor expressa seu agradecimento ao Prof. Dr. Pushpa Narayan Rathie, orientador do presente trabalho, pela confiança, apoio e orientação constante.

A Fernando Roncal Pajares, Licenciado em Ciências da Computação em UNMSM., aluno de Pós-Graduação de Ciências da Computação do IMECC-UNICAMP, por seu apoio e orientação na parte computacional.

ÍNDICE

Resumo	i
Introdução	ii
Capítulo 1. Conceitos de Matrizes Complexas e Ferramentas Matemáticas ...	1
1.1. Introdução	1
1.2. Definição da Matriz Complexa	1
1.3. Definição da Matriz Transposta Conjugada: Propriedades	2
1.4. Traço de uma Matriz: Propriedades	2
1.5. Matriz Unitária	2
1.6. Matriz Hermitiana	2
1.7. Função Gamma	3
1.8. Expansão de $\log \Gamma(z + a)$	3
1.9. Polinômios e Números de Bernoulli	4
Teorema de Nair	
Teorema de Cauchy	
1.10. Transformada e Transformada Inversa de Mellin	7
1.11. Potência de Séries de Potências	8
1.12. Integral	13
 Capítulo 2. Distribuição Multivariada Complexa, Estimadores de Máxima	
Verossimilhança e Distribuição Wishart Complexa	14
2.1. Introdução	14
2.1.1. Distribuição Normal Complexa	14
2.2. Estimadores de Máxima Verossimilhança do Vetor de Médias Θ e da Matriz	
Hermitiana Σ	15
2.3. Distribuição de Wishart Complexa	19

Capítulo 3. Teste de Hipótese de $H_0 : \Sigma = I$	20
3.1. Introdução	20
3.1.1. Estatística de Razão de Verossimilhança λ	20
3.1.2. h -ésimo Momento do Critério de Razão de Verossimilhança λ	21
Capítulo 4. Distribuições Exatas da Estatística de Verossimilhança λ	24
4.1. Introdução	24
4.1.1. Distribuição de λ como uma Série de Distribuições Chi-quadrados	24
4.1.2. Distribuição de λ como uma Série Logarítmica	32
4.1.3. Distribuição de λ como uma Série Beta Incompleta	37
Determinação dos Coeficientes C_j	39
Capítulo 5. Cálculo Computacional	42
5.1. Introdução	42
5.1.1. Função de Distribuição de Série de Distribuições Chi-quadrados	42
5.2. Programa Computacional	49
Tabela I	50
Tabela II	51
Tabela III	52
BIBLIOGRAFIA	53
ANEXO	57

RESUMO

O objetivo do presente trabalho é a determinação da distribuição exata do critério de razão de verossimilhança para testar a hipótese $H_0 : \Sigma = I$ contra $H_1 : \Sigma \neq I$ em populações normais multivariadas complexas.

A distribuição da estatística de razão de verossimilhança determina-se em forma de série de densidade chi-quadrado, série logarítmica e série beta incompleta.

Faz-se cálculo computacional para determinar os valores de λ correspondente a níveis de $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10, 0.90, 0.95$ e 0.99 para 2, 3 e 4 variáveis e vários tamanhos de amostras, especificamente para amostras pequenas.

INTRODUÇÃO

O estudo de variáveis aleatórias normais multivariadas complexas tem seu início, do ponto de vista estatístico, com o trabalho de Wooding (1956), que derivou pela primeira vez a distribuição normal multivariada complexa de um tipo especial frequentemente encontrado em estudos de análises de ruídos aleatórios. Trabalhando nesta linha, Turin (1960) desenvolveu a função característica de formas quadráticas hermitianas nestas variáveis. Goodman (1963) analisou alguns aspectos da distribuição normal multivariada complexa, em particular a analogia da distribuição Wishart e de correlações múltiplas e parciais. Outro autor, James (1964), estudou as distribuições de matrizes aleatórias e raízes características derivadas de amostras normais multivariadas tanto reais como complexas com a ajuda de polinômios zonais. Khatri, em diversos trabalhos (1965, 1965a, 1970) desenvolve a distribuição da raiz característica maior e menor sob a hipótese nula do teste que a matriz hermitiana, Σ , é uma matriz real; deriva a fórmula assintótica para certos procedimentos de testes de verossimilhança, determina a estatística da raiz característica máxima para mostrar que a matriz de covariância hermitiana é real, obtém as distribuições da maior i -ésima raiz característica para três matrizes em problemas concernentes ao modelo MANOVA, coeficientes de correlação canônica e de covariância e finalmente deriva os momentos dos traços de duas matrizes para os problemas antes mencionados. Giri (1965, 1972) considerando dois problemas de testes de hipótese acerca do vetor de parâmetros de médias e independência de grupos de variáveis aleatórias determinou os testes do critério de razão de verossimilhança e analisou propriedades destas estatísticas. Srivastava (1965) derivou a distribuição de Wishart complexa mediante um método direto e simplificado sem utilizar as funções características e transformadas de Fourier como o fez Goodman. Pillai e Nagarsenker (1971) determinaram os momentos ge-

rais do critério de teste de razão de verossimilhança para testar a hipótese de esfericidade tanto para o caso de variáveis aleatórias normais multivariadas reais como complexas para matrizes de covariâncias arbitrárias dando as distribuições correspondentes da estatística de critério de verossimilhança em termos da função G . Pillai e Jouris (1971) desenvolveram os momentos gerais das raízes características do teste de hipóteses para testar a hipótese de igualdade de duas matrizes de covariâncias hermitianas do modelo MANOVA e em coeficientes de correlação canônica. As funções de densidade das estatísticas foram expressadas em termos da função G . Nagarsenker e Das (1975) obtiveram a distribuição exata sob a hipótese nula da estatística de critério de razão de verossimilhança para testar a hipótese de esfericidade em distribuições normais multivariadas complexas e apresentaram estas distribuições em forma de séries de densidade de chi-quadrados e séries betas e calcularam pontos percentuais para $p = 3, 4, 5$ e 6 a 5% e 1% de nível de significância. Krishniah (1976) examinou aproximações para distribuições de estatísticas de razões de verossimilhança para testar as hipóteses de certas estruturas de matrizes de covariâncias de populações normais multivariadas complexas, discute algumas aplicações destas distribuições para inferências em séries temporais múltiplos.

A partir de 1976 parece não existir avanço do trabalho com variáveis aleatórias normais complexas e em particular não existe trabalho sobre a distribuição exata da estatística de critério de verossimilhança para testar a hipótese de que uma matriz de covariância hermitiana é igual à matriz identidade no caso de populações normais multivariadas complexas. Em consequência o presente trabalho tem como objetivo a obtenção da distribuição exata da estatística de critério de razão de verossimilhança para testar a hipótese de que uma matriz de covariância hermitiana Σ , é igual à matriz de identidade I em distribuições normais multivariadas complexas.

A distribuição exata sob a hipótese nula da estatística será apresentada como:

- a) Séries de densidade chi-quadrados
- b) Séries logarítmicas
- c) Séries betas incompletas.

A pesquisa do presente trabalho se completa com a determinação de uma tabela de pontos percentuais para $s = 2, 3, 4$ para níveis de significância de 0.01, 0.05 e 0.10, 0.90, 0.95 e 0.99 e vários valores de tamanhos de amostras.

No decorrer do trabalho utilizam-se conceitos referentes a variáveis aleatórias complexas e matrizes hermitianas (ver Giri (1977) e Srivastava e Khatri (1979)); teorema de resíduos, séries de Maclaurin, Séries de potências, expansão da função $\Gamma(x + a)$; ver Riordan (1968), Rainville (1960), Box (1949) e Nair (1940).

Alguns conceitos que são necessários no desenvolvimento do trabalho podem ser vistos no livro de Anderson (1984).

Ferramentas matemáticas muito utilizados na determinação da distribuição exata de critério de testes de razão de verossimilhança tem sido a transformada e a transformada inversa de Mellin. Vários pesquisadores utilizaram esta técnica na determinação da distribuição exata do critério de vários testes (ver Mathai (1970, 1971), Mathai e Rathie (1970, 1971)). No presente trabalho a transformada de Mellin e sua transformada inversa são também utilizados.

O presente trabalho consta de cinco capítulos. No primeiro capítulo resumimos conceitos matemáticos e estatísticos que serão necessários no desenvolvimento do tema. No segundo capítulo apresentamos a distribuição multivariada normal complexa e a derivação das estimativas dos parâmetro Θ e Σ . Finaliza-se este capítulo apresentando a distribuição Wishart complexa. O terceiro capítulo compreende a derivação da estatística do critério

de razão de verossimilhança e a determinação de seu h -ésimo momento sob a hipótese nula. No quarto capítulo, que consta de três seções desenvolve-se a distribuição exata da estatística inicialmente como séries de densidade chi-quadrado, em seguida como séries logarítmicas e finalmente como séries betas incompletas. No quinto capítulo explicitamos as relações matemáticas, de forma mais detalhada, para uso computacional e damos o programa para o cálculo dos pontos percentuais de série chi-quadrado usando a linguagem de programação turbo pascal.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS DE MATRIZES COMPLEXAS E FERRAMENTAS DE MATEMÁTICA

1.1 INTRODUÇÃO:

Neste capítulo resumimos ferramentas matemáticas que são necessárias no desenvolvimento da presente pesquisa e também auxiliam à melhor compreensão do trabalho. Compreende alguns teoremas sobre matrizes hermitianas, polinômios de Bernoulli, função gamma, teorema de resíduos de Cauchy, teorema de Nair, séries de potência e outros.

1.2 DEFINIÇÃO.

Uma matriz quadrada $A : n \times n$ complexa é aquela cujos elementos são número complexos, isto é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

ou

$$A = (a_{ij}) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$a_{ij} \in C$ e C é o campo dos números complexos.

1.3 DEFINIÇÃO: A transposta conjugada de uma matriz complexa A é definida por

$$A^* = \overline{A'} ; \quad \overline{A}: \text{ conjugada de } A \quad (1.2)$$

PROPRIEDADES:

$$(A^*)^* = A \quad (1.3)$$

$$(A + B)^* = A^* + B^* \quad (1.4)$$

$$(AB)^* = B^*A^*, \quad (1.5)$$

sempre que o produto AB está definido.

1.4 TRAÇO DE UMA MATRIZ: O traço de uma matriz quadrada A define-se como

$$Tr.A = \sum_{i=1}^s a_{ii} \quad (1.6)$$

PROPRIEDADES:

$$Tr.(A + B) = Tr.A + Tr.B \quad (1.7)$$

$$Tr.AB = Tr.BA \quad (1.8)$$

1.5 MATRIZ UNITÁRIA: Uma matriz quadrada complexa U se chama matriz unitária se

$$UU^* = I \quad (1.9)$$

1.6 MATRIZ HERMITIANA: Uma matriz quadrada complexa A , se chama matriz hermitiana se

$$A = A^* \quad (1.10)$$

LEMA 1.1. Se A é uma matriz hermitiana $s \times s$, então existe uma matriz U de ordem $s \times s$ tal que

$$U^*AU = D(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \quad (1.11)$$

onde λ_i ($i = 1, 2, \dots, s$) são as raízes características da matriz A e $D(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ é uma matriz diagonal.

LEMA 1.2. Uma matriz hermitiana é definida positiva se todas suas raízes características são positivas.

LEMA 1.3. Toda matriz hermitiana definida positiva A , é unicamente expressável como $A = BB^*$ onde B é uma matriz hermitiana definida positiva.

1.7 FUNÇÃO GAMMA: Uma das definições da função gamma usando a forma integral de Euler, é

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.12)$$

onde $Re(z)$ é a parte real de z e $Re(z) > 0$

A função gamma pode ser também expressa em forma de série tal como

$$\Gamma(z) = \sqrt{(2\pi)} z^{z+1/2} e^{-z} [1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \dots] \quad (1.13)$$

a expressão anterior converge, para $z > 1$.

1.8 EXPANSÃO DE $\log \Gamma(z + a)$: Barnes (1899) generalizou o teorema de Stirling e mostrou que para todo real ou complexo, o $\log \Gamma(z + a)$ pode ser expandido em uma série assintótica como segue :

$$\log \Gamma(z + a) = \frac{1}{2} \log(2\pi) + (z + a - \frac{1}{2}) \log z - z$$

$$+ \sum_{r=1}^m \frac{(-1)^{r+1} B_{r+1}(a)}{r(r+1)z^r} + R_{m+1}(z) \quad (1.14)$$

$|\arg z| \leq \pi - \epsilon$, $\epsilon > 0$ onde o resto $R_m(z)$ satisfaz $|R_m(z)| \leq \frac{\theta}{|z|^m}$, θ é uma constante independente de z , e $B_r(a)$ é o polinômio de Bernoulli de grau r e de ordem 1.

1.9 POLINÔMIOS E NÚMEROS DE BERNOULLI

Os polinômios generalizados de Bernoulli $B_r^{(a)}(x)$ são definidos pela seguinte fórmula:

$$\frac{t^a e^{xt}}{(e^t - 1)^a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k B_k^{(a)}(x)}{k!}, \quad (1.15)$$

$$|t| < 2\pi$$

A partir da equação anterior pode-se obter o polinômio de Bernoulli de grau K e de ordem 1 fazendo $a = 1$, isto é

$$B_k(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_j x^{k-j} \quad (1.16)$$

onde B_j são os números de Bernoulli (existem tabelas que apresentam muitos destes números). Aqui dá-se alguns que serão utilizados nos cálculos computacionais

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \\ B_1 &= -\frac{1}{2} \\ B_2 &= \frac{1}{6} \\ B_4 &= -\frac{1}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_6 &= \frac{1}{42} \\
B_8 &= -\frac{1}{30} \\
B_{10} &= \frac{5}{66} \\
B_{12} &= -\frac{691}{2730} \\
B_{14} &= \frac{7}{6} \\
B_{16} &= -\frac{3617}{510}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

$$B_{2j+1} = 0 \quad \text{para todo } j \geq 1.$$

Utilizando a relação (1.16) desenvolve-se os primeiros 16 polinômios de Bernoulli como segue:

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1 \\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x \\
B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42} \\
B_7(x) &= x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x \\
B_8(x) &= x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30} \\
B_9(x) &= x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 6x^7 - \frac{21}{5}x^5 + 2x^3 - \frac{3}{10}x \\
B_{10}(x) &= x^{10} - 5x^9 + \frac{15}{2}x^8 - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{66}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}
B_{11}(x) &= x^{11} - \frac{11}{2}x^{10} + \frac{55}{6}x^9 - 11x^7 + 11x^5 - \frac{11}{2}x^3 + \frac{5}{6}x \\
B_{12}(x) &= x^{12} - 6x^{11} + 11x^{10} - \frac{33}{2}x^8 + 22x^6 - \frac{33}{2}x^4 + 5x^2 - \frac{691}{2730} \\
B_{13}(x) &= x^{13} - \frac{13}{2}x^{12} + 13x^{11} - \frac{143}{6}x^9 + \frac{286}{7}x^7 - \frac{429}{10}x^5 + \frac{65}{3}x^3 - \frac{691}{120}x \\
B_{14}(x) &= x^{14} - 7x^{13} + \frac{91}{6}x^{12} - \frac{1001}{30}x^{10} + \frac{143}{2}x^8 - \frac{1001}{10}x^6 + \frac{455}{6}x^4 - \frac{691}{30}x^2 + \frac{7}{6} \\
B_{15}(x) &= x^{15} - \frac{15}{2}x^{14} + \frac{35}{2}x^{13} - \frac{91}{2}x^{11} + \frac{715}{6}x^9 - \frac{429}{2}x^7 + \frac{455}{2}x^5 - \frac{691}{6}x^3 + \frac{35}{2}x \\
B_{16}(x) &= \frac{1}{510}(510x^{16} - 4080x^{15} + 10200x^{14} - 30940x^{12} + 97240x^{10} - 218790x^8 \\
&\quad + 309400x^6 - 234940x^4 + 71400x^2 - 3617)
\end{aligned}$$

TEOREMA DE NAIR (1940): Seja

$$\varphi(t) = \int x^t f(x) dx$$

função momento de uma variável X com função de densidade $f(x)$.

$$\text{Se} \quad \varphi(t) = O(t^{-k})$$

quando $Re(t) \rightarrow \infty$ (real de t) , $\varphi(t)$ pode ser expandido como uma série fatorial da forma:

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(t + \alpha)}{\Gamma(t + k + n + \alpha)} \quad (1.19)$$

a constante α é não negativa e pode ser escolhido adequadamente para que a série seja convergente.

Nota: O símbolo “ O ” entende-se como segue : sejam duas funções $f(z)$ e $g(z)$ de uma variável complexa Z , onde $g(z) \neq 0$, para todo Z numa região R do plano complexo, e sejam z e z_0 pontos em R . Se existe um número k independente de z tal que

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq k ,$$

para todo z em R , então diz-se (Luke, 1969) que

$$f(z) = O(g(z)) \quad (1.20)$$

quando $z \rightarrow z_0$ em R .

LEMA 1.4. Se z_0 é pólo de uma função f de ordem m , então o resíduo de f em z_0 é dado por:

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \right\}$$

Demonstração: Ver Stewart, 1987.

TEOREMA DE RESÍDUOS DE CAUCHY: Seja G um domínio e C uma curva simples contida em G . Se f é diferenciável em G , exceto para um número de pontos $z_1, \dots, z_n$ no interior de C , então

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{r=1}^n Res(f, z_r)$$

onde $i = \sqrt{(-1)}$.

1.10 TRANSFORMADA E TRANSFORMADA INVERSA DE MELLIN:

Se t é uma variável complexa e $f(x)$ é uma função da variável real x , definido para $x \geq 0$, tal que

$$F_t(f(x)) = \int_0^\infty x^{t-1} f(x) dx \quad , \quad Re(t) > 0 \quad (1.21)$$

existe, então a função F é chamada a transformada integral de Mellin de $f(x)$. Reciprocamente, se a transformada de Mellin existe e é uma função analítica da variável complexa t para $c_1 \leq \operatorname{Re}(t) \leq c_2$, onde c_1 e c_2 são reais, então a inversão da integral

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{w-i\beta}^{w+i\beta} x^{-t} F_t(f(x)) dt \quad (1.22)$$

avaliado ao longo de qualquer linha $c_1 \leq \operatorname{Re}(t) = w \leq c_2$ converge para a função $f(x)$ independentemente de w [M.D.Springer, 1979]. Portanto, a inversão da integral de Mellin (1.22) pode ser escrito na forma mais conveniente como :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-t} F_t(f(x)) dt \quad (1.23)$$

Observação: Se $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade tem-se :

$$E(X^t) = F_{t+1}(f(x)) = \int_0^\infty x^t f(x) dx \quad (1.24)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-(t+1)} E(X^t) dt \quad (1.25)$$

1.11 POTÊNCIAS DE SÉRIES DE POTÊNCIAS.

Seja a série de potência

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r ; \quad a_0 = 1 \quad (1.26)$$

Temos a seguinte relação para a p -ésima potência de (1.26) (ver Riordan [1968]),

$$(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^p = \sum_{n=0}^{\infty} A_{p,n} x^n \quad (1.27)$$

onde

$$A_{p,n} = A_{p,n}(a_1, a_2, \dots) = \sum_{\Pi(n)} \binom{p}{k} \frac{k!}{k_1! \dots k_n!} a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} \quad (1.28)$$

tal que verificam-se as seguintes condições

$$k = \sum_{i=1}^n k_i \quad (1.29)$$

$$n = \sum_{i=1}^n i k_i \quad (1.30)$$

$\Pi(n)$: denota as partições de n e a somatória $\sum_{\Pi(n)}$ é feita sobre todas as partições de n que cumprem as condições citadas.

Casos particulares de $A_{p,n}$ dados por Riordan são :

$$A_{p,0} = 1 \quad \forall p \geq 0 \quad (1.31)$$

$$A_{0,n} = 0 \quad \forall n \geq 1 \quad (1.32)$$

$$A_{p,1} = p a_1 \quad (1.33)$$

$$A_{p,2} = p a_2 + \binom{p}{2} a_1^2 \quad (1.34)$$

$$A_{p,3} = p a_3 + \binom{p}{2} 2 a_2 a_1 + \binom{p}{3} a_1^3 \quad (1.35)$$

$$A_{p,4} = p a_4 + \binom{p}{2} (2 a_3 a_1 + a_2^2) + \binom{p}{3} 3 a_2 a_1^2 + \binom{p}{4} a_1^4 \quad (1.36)$$

e a relação de recorrência é dada por :

$$A_{p,n}(a_1, a_2, \dots) = A_{p-1,n} + \sum_{i=1}^n a_i A_{p-1,n-i} \quad (1.37)$$

LEMA 1.5.

$$\left(\sum_{r=0}^m a_r x^r \right)^p = \sum_{n=0}^{mp} A_{p,n} x^n \quad (1.38)$$

Prova: Por indução

i) Provemos para $p = 1$; devemos mostrar que

$$\left(\sum_{r=0}^m a_r x^r \right)^1 = \sum_{n=0}^m A_{1,n} x^n$$

desenvolvendo tem-se

$$\left(\sum_{r=0}^m a_r x^r \right)^1 = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m \quad (*)$$

utilizando a relação de recorrência, equação (1.37), segue-se que lado direito de $(*)$ é

$$\begin{aligned} 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m &= A_{1,0} + A_{1,1}x + A_{1,2}x^2 + \cdots + A_{1,m}x^m \\ &= \sum_{n=0}^m A_{1,n} x^n \end{aligned}$$

ii) Suponhamos que a fórmula cumpre-se para $p = h$, isto é

$$\left(\sum_{r=0}^m a_r x^r \right)^h = \sum_{n=0}^{mh} A_{h,n} x^n$$

iii) provemos para $p = h + 1$ desenvolvendo tem-se

$$\left(\sum_{r=0}^m a_r x^r \right)^{h+1} = (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m)^h (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m)$$

utilizando o resultado i) no primeiro fator do lado direito da igualdade anterior e efetuando as operações indicadas resulta :

$$= \sum_{n=0}^{mh} A_{h,n} x^n + a_1 \sum_{n=0}^{mh} A_{h,n} x^{n+1} + \cdots + a_m \sum_{n=0}^{mh} A_{h,n} x^{m+n}$$

agora desenvolvendo cada somatória e agrupando termos semelhantes obtém-se :

$$= A_{h,0} + (A_{h,1} + a_1 A_{h,0})x + \cdots + a_m A_{h,mh} x^{m(h+1)} \quad (* *)$$

novamente, utilizando a relação de recorrência no lado direito de $(**)$ resulta :

$$\begin{aligned}
&= A_{h+1,0} + A_{h+1,1}x + A_{h+1,2}x^2 + \cdots + A_{h+1,m(h+1)}x^{m(h+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{m(h+1)} A_{h+1,n}x^n
\end{aligned}$$

pelos passos (i), (ii) e (iii) fica demonstrado o lema .

Estabelecemos dois lemas cuja demonstração pode-se encontrar em Rainville [1960].

LEMA 1.6.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n-k) \quad (1.39)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n B(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B(k, n+k) \quad (1.40)$$

LEMA 1.7.

Caso Exponencial Série Finita:

$$\exp\left(\sum_{r=1}^m Q_r t^{-r}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} Q_1^j A_{j,n-j}\right) t^{-n} ; 0 \leq n \leq (m-1)j \quad (1.41)$$

onde $A_{j,n-j} = A_{j,n-j}(Q_2 Q_1^{-1}, Q_3 Q_1^{-1}, \dots, Q_m Q_1^{-1})$ é dado pela relação (1.28)

Caso Exponencial Série Infinita:

$$\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} Q_r t^{-r}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} Q_1^j A_{j,n-j}\right) t^{-n} \quad (1.42)$$

Prova: Caso Finito

$$\begin{aligned}
\exp\left(\sum_{r=1}^m Q_r t^{-r}\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\sum_{r=1}^m Q_r t^{-r}\right)^j \text{ (utilizando série de Maclaurin)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} [Q_1 t^{-1} (1 + Q_2 Q_1^{-1} t^{-1} + \dots + Q_m Q_1^{-1} t^{-(m-1)})]^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} Q_1^j t^{-j} \left[\sum_{r=0}^{m-1} (Q_{r+1} Q_1^{-1}) t^{-r} \right]^j
\end{aligned}$$

agora aplicando o lema (1.5) à expressão do colchete elevado à j -ésima potência do lado direito da relação anterior resulta

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{(m-1)j} \frac{1}{j!} Q_1^j A_{j,n} t^{-(j+n)} \quad (*)$$

Como

$$\sum_{n=0}^{(m-1)j} \frac{1}{j!} Q_1^j A_{j,n} t^{-(j+n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{j!} Q_1^j A_{j,n} t^{-(j+n)}$$

com $A_{j,n} \equiv 0$, $\forall n > (m-1)j$

o (*) fica portanto :

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{j!} Q_1^j A_{j,n} t^{-(j+n)}$$

onde $A_{j,n} \equiv 0$, $\forall n > (m-1)j$.

Agora utilizando a equação (1.39) resulta que

$$\exp\left(\sum_{r=1}^m Q_r t^{-r}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} Q_1^j A_{j,n-j} \right) t^{-n} ; \quad 0 \leq n \leq mj$$

Para o caso infinito a demonstração é análogo ao caso finito, assim tem-se

$$\begin{aligned}\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} Q_r t^{-r}\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\sum_{r=1}^{\infty} Q_r t^{-r}\right)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} Q_1^j t^{-j} (1 + Q_2 Q_1^{-1} t^{-1} + \dots)^j\end{aligned}$$

aplicando a relação (1.27) à expressão anterior tem-se

$$\begin{aligned}\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} Q_r t^{-r}\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} Q_1^j t^{-j} \sum_{n=0}^{\infty} A_{j,n} t^{-n} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{j!} Q_1^j A_{j,n} t^{-(j+n)}\end{aligned}$$

utilizando (1.39) a demonstração desejada resulta

$$\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} Q_r t^{-r}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} Q_1^j A_{j,n-j}\right) t^{-n}$$

onde

$$A_{j,n-j} = A_{j,n-j}(Q_2 Q_1^{-1}, Q_3 Q_1^{-1}, \dots),$$

está definido em (1.28).

1.12 INTEGRAL

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{-s} \Gamma(a+s) ds}{\Gamma(s+a+m)} = \frac{1}{\Gamma(m)} x^a (1-x)^{m-1}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.43)$$

Ver Titchmarsh [1948].

CAPÍTULO 2

DISTRIBUIÇÃO MULTIVARIADA NORMAL COMPLEXA, ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA DOS PARÂMETROS Θ E Σ E A DISTRIBUIÇÃO WISHART COMPLEXA

2.1 INTRODUÇÃO:

Neste capítulo resume - se os conceitos da distribuição normal complexa, determina -se os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros e finalmente apresenta - se a distribuição Wishart complexa. Estes conceitos são fundamentais para o capítulo seguinte pelo que é necessário desenvolver os termos acima citados completamente.

2.1.1 DISTRIBUIÇÃO NORMAL COMPLEXA:

Antes de definir formalmente a distribuição normal complexa, definimos em forma breve o que se entende por variável aleatória normal complexa.

Uma variável aleatória normal complexa é da forma $Z = X + iY$, onde X e Y estão distribuídas como uma variável bivariada normal real.

Um vetor aleatório normal complexo de ordem s

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_s \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

onde $Z_j = X_j + iY_j$, $i = \sqrt{-1}$ é uma s -upla de variáveis aleatórias normais complexas

$(Z_1, \dots, Z_s)$, tais que o vetor aleatório real de ordem $2s$, consistindo das $X_j, j = 1, \dots, s$ e os $Y_j, j = 1, \dots, s$ de $Z_1, \dots, Z_s$ tem distribuição normal multivariada real de $2s$ variáveis.

Seja Z um vetor aleatório normal complexo definido em (2.1) com $E(Z) = \Theta$, onde

$$E(Z) = \begin{pmatrix} E(Z_1) \\ \vdots \\ E(Z_s) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

A matriz de covariância hermitiana definida positiva Σ é dada por:

$$\Sigma = E[(Z - \Theta)(Z - \Theta)^*] \quad (2.3)$$

onde

$$(Z - \Theta)^* = \overline{(Z - \Theta)}'$$

é tranposta conjugada.

A função de densidade de probabilidade do vetor aleatório Z é definido por

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f(z_1, \dots, z_s) \\ &= \pi^{-s} |\Sigma|^{-1} e^{-(Z - \Theta)^* \Sigma^{-1} (Z - \Theta)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

denotaremos a densidade (2.4) como $n_c(z|\Theta, \Sigma)$ e a função de distribuição acumulada como $N_c(\Theta, \Sigma)$.

2.2 ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA DO VETOR DE MÉDIAS Θ E DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA HERMITIANA Σ .

Sejam $Z_1, \dots, Z_N$, N vetores amostrais de uma população multivariada normal complexa, isto é, cada um dos vetores Z_α tem uma distribuição multivariada normal

complexa de S variáveis, $Z_\alpha \sim N_c(\Theta, \Sigma)$; $\alpha = 1, 2, \dots, N$ nesta condição a função de verossimilhança é definida por :

$$\begin{aligned} L(\Theta, \Sigma) &= \prod_{\alpha=1}^N n(Z_\alpha | \Theta, \Sigma) \\ &= \pi^{-SN} |\Sigma|^{-N} \exp \left(- \sum_{\alpha=1}^N (Z_\alpha - \Theta)^* \Sigma^{-1} (Z_\alpha - \Theta) \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Na função de verossimilhança, os vetores $Z_1, \dots, Z_N$ são fixados nos valores amostrais e L é função apenas de Θ e Σ . Para encontrar as estimativas de máxima verossimilhança de Θ e Σ expressa-se (2.5) na seguinte forma :

Seja o vetor média amostral definido por

$$\bar{Z} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N Z_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N z_{1\alpha} \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N z_{s\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_s \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

onde $Z_\alpha = (z_{1\alpha}, \dots, z_{s\alpha})'$ e

$$\bar{z}_j = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N z_{j\alpha},$$

$j = 1, 2, \dots, s$, e seja a matriz de soma de quadrados e produtos cruzados dos desvios relativas à média amostral definido por:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\alpha=1}^N (Z_\alpha - \bar{Z})(Z_\alpha - \bar{Z})^* \\ &= \left[\sum_{\alpha=1}^N (z_{j\alpha} - \bar{z}_j)(z_{r\alpha} - \bar{z}_r)^* \right] ; r, j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Usaremos o seguinte lema:

LEMA 2.2.1. Sejam $Z_1, \dots, Z_N$, N vetores (de s -componentes cada um) e seja $\bar{Z}$ definido por (2.6) . Então para qualquer vetor b cumpre-se

$$\sum_{\alpha=1}^N (Z_\alpha - b)(Z_\alpha - b)^* = \sum_{\alpha=1}^N (Z_\alpha - \bar{Z})(Z_\alpha - \bar{Z})^* + N(\bar{Z} - b)(\bar{Z} - b)^* \quad (2.8)$$

Prova :

$$\sum_{\alpha=1}^N (Z_\alpha - b)(Z_\alpha - b)^* = \sum_{\alpha=1}^N \left[(Z_\alpha - \bar{Z}) + (\bar{Z} - b) \right] \left[(Z_\alpha - \bar{Z}) + (\bar{Z} - b) \right]^*$$

fazendo as operações indicadas no lado direito na igualdade anterior tem-se

$$\begin{aligned} &= \sum_{\alpha=1}^N (Z_\alpha - \bar{Z})(Z_\alpha - \bar{Z})^* + \left[\sum_{\alpha=1}^N (Z_\alpha - \bar{Z}) \right] (\bar{Z} - b)^* \\ &+ (\bar{Z} - b) \left[\sum_{\alpha=1}^N (Z_\alpha - \bar{Z}) \right] + N(\bar{Z} - b)(\bar{Z} - b)^* \end{aligned}$$

nesta expressão, os termos segundo e terceiro são zero, pois

$$\sum_{\alpha=1}^N (Z_\alpha - \bar{Z}) = \sum_{\alpha=1}^N Z_\alpha - N\bar{Z} = \bar{Z}N - N\bar{Z} = 0$$

portanto o lema fica demonstrado .

Quando se faz $b = \Theta$, obtem-se

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N (Z_\alpha - \Theta)(Z_\alpha - \Theta)^* &= \sum_{\alpha=1}^N (Z_\alpha - \bar{Z})(Z_\alpha - \bar{Z})^* + N(\bar{Z} - \Theta)(\bar{Z} - \Theta)^* \\ &= A + N(\bar{Z} - \Theta)(\bar{Z} - \Theta)^* \end{aligned} \quad (2.9)$$

Usando (2.9) e as propriedades do traço de uma matriz, equações (1.7) e (1.8) temos

$$\sum_{\alpha=1}^N (Z_\alpha - \Theta)^* \Sigma^{-1} (Z_\alpha - \Theta) = tr. \sum_{\alpha=1}^N (Z_\alpha - \Theta)^* \Sigma^{-1} (Z_\alpha - \Theta) \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
&= \text{tr.} \sum_{\alpha=1}^N \Sigma^{-1} (Z_{\alpha} - \Theta)(Z_{\alpha} - \Theta)^* \\
&= \text{tr.} \Sigma^{-1} \sum_{\alpha=1}^N (Z_{\alpha} - \Theta)(Z_{\alpha} - \Theta)^* \\
&= \text{tr.} \Sigma^{-1} [A + N(\bar{Z} - \Theta)(\bar{Z} - \Theta)^*] \\
&= \text{tr.} [\Sigma^{-1} A + N \Sigma^{-1} (\bar{Z} - \Theta)(\bar{Z} - \Theta)^*] \\
&= \text{tr.} \Sigma^{-1} A + N \text{tr.} \Sigma^{-1} (\bar{Z} - \Theta)(\bar{Z} - \Theta)^* \\
&= \text{tr.} \Sigma^{-1} A + N \text{tr.} (\bar{Z} - \Theta)^* \Sigma^{-1} (\bar{Z} - \Theta) \\
&= \text{tr.} \Sigma^{-1} A + N(\bar{Z} - \Theta)^* \Sigma^{-1} (\bar{Z} - \Theta)
\end{aligned}$$

logo a função de verossimilhança definido em (2.5) pode-se escrever como

$$L(\Theta, \Sigma) = \Pi^{-SN} |\Sigma|^{-N} \exp \left(-\text{tr.} \Sigma^{-1} A - N(\bar{Z} - \Theta)^* \Sigma^{-1} (\bar{Z} - \Theta) \right) \quad (2.11)$$

como Σ é uma matriz hermitiana definida positiva, Σ^{-1} é também definida positiva, $N(\bar{Z} - \Theta)^* \Sigma^{-1} (\bar{Z} - \Theta) \geq 0$ e este produto é igual a zero se e somente se $\Theta = \bar{Z}$

TEOREMA 2.2.1. Considere N vetores aleatórios complexos independentes e identicamente distribuídos como s -variáveis aleatórias normais complexas, Z_{α} , $\alpha = 1, 2, \dots, N$ com função de densidade de probabilidade dado pela equação (2.4). Então os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\Theta}, \hat{\Sigma}$ de Θ, Σ respectivamente são dados por :

$$\hat{\Theta} = \bar{Z} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N Z_{\alpha} \quad (2.12)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{A}{N} \quad (2.13)$$

onde A está definido em (2.7). Para a demonstração deste teorema ver Giri [1965].

2.3 DISTRIBUIÇÃO WISHART COMPLEXA.

A distribuição Wishart complexa foi desenvolvida por Goodman [1963], Srivastava [1965a], utilizando um método diferente, também determinou esta distribuição .

TEOREMA 2.3.1. Sejam $U_1, \dots, U_n$ independentemente distribuídos, cada um segundo normal multivariada complexa $N_c(0, \Sigma)$. Então a função de densidade de probabilidade de $A = \sum_{\alpha=1}^n U_\alpha U_\alpha^*$ é definido por

$$f(A) = \frac{|A|^{n-s} e^{-tr.\Sigma^{-1}A}}{\pi^{\frac{1}{2}s(s-1)} |\Sigma|^n \prod_{\alpha=1}^s \Gamma(n+1-\alpha)} \quad (2.14)$$

onde A é uma matriz definida positiva .

COROLARIO 2.3.1. Sejam $Z_1, \dots, Z_N$ N vetores (s -dimencionais) independentemente distribuídos, segundo normal multivariada complexa, $Z_\alpha \sim N_c(\Theta, \Sigma)$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Então a função de densidade de probabilidade de $A = \sum_{\alpha=1}^N (Z_\alpha - \bar{Z})(Z_\alpha - \bar{Z})^*$ é definida por:

$$f(A) = \frac{|A|^{N-1-s} e^{-tr.\Sigma^{-1}A}}{\pi^{\frac{1}{2}s(s-1)} |\Sigma|^{N-1} \prod_{\alpha=1}^s \Gamma(N-\alpha)} \quad (2.15)$$

Notação: Se A tem densidade de probabilidade definida por (2.14) anota-se $A \sim W_c(A|\Sigma, n)$, onde $n = N - 1$.

CAPÍTULO 3

TESTE DA HIPÓTESE QUE UMA MATRIZ DE COVARIÂNCIA HERMITIANA Σ É IGUAL À MATRIZ IDENTIDADE I .

3.1 INTRODUÇÃO:

Com os conceitos definidos no capítulo anterior determina-se a estatística da razão de verossimilhança para testar a hipótese que a matriz de covariância hermitiana Σ é igual à matriz I

3.1.1 ESTATÍSTICA DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA

Dada uma amostra aleatória $z_1, \dots, z_N$ de uma população normal multivariada complexa, com média Θ e a matriz de covariância hermitiana Σ definida positiva; o critério de razão de verossimilhança para testar a hipótese $H_0 : \Sigma = I$ contra a alternativa $H_1 : \Sigma \neq I$ é definido por :

$$\lambda_1 = \frac{\max_{\Theta} L(\Theta, I)}{\max_{\Theta, \Sigma} L(\Theta, \Sigma)} \quad (3.1)$$

onde a função de verossimilhança é

$$L(\Theta, \Sigma) = \pi^{-SN} |\Sigma|^{-N} e^{-tr. \Sigma^{-1} A - N(\bar{Z} - \Theta)^* \Sigma^{-1} (\bar{Z} - \Theta)}. \quad (3.2)$$

Logo utilizando o teorema (2.2.1) resulta que:

$$\max_{\Theta} L(\Theta, I) = \pi^{-SN} e^{-tr. A} \quad (3.3)$$

$$\max_{\Theta, \Sigma} L(\Theta, \Sigma) = \pi^{-SN} N^{SN} |A|^{-N} e^{-NS}. \quad (3.4)$$

Usando as equações (3.3) e (3.4) em (3.1) obtém-se

$$\lambda_1 = \left(\frac{e}{N}\right)^{SN} |A|^N e^{-tr.A} \quad (3.5)$$

onde

$$A = \sum_{\alpha=1}^N (Z_\alpha - \bar{Z})(Z_\alpha - \bar{Z})^*.$$

Suguira e Nago [1968] demonstraram que o teste de critério de verossimilhança λ_1 é viciado, mas o teste de razão de verossimilhança modificado, baseado em

$$\lambda = \left(\frac{e}{n}\right)^{nS} |A|^n e^{-tr.A}; \quad (3.6)$$

com $n = N - 1$ é não viciado e varia no intervalo $0 \leq \lambda \leq 1$.

3.1.2 h -ÉSIMO MOMENTO DO CRITÉRIO DE VEROSSIMILHANÇA MODIFICADO λ .

Determina-se o h -ésimo momento de λ , usando o fato que A tem distribuição Wishart complexa. Calcula-se

$$\begin{aligned} E(\lambda^h) &= \int \dots \int \left[\left(\frac{e}{n}\right)^{sn} |A|^n e^{-tr.A} \right]^h W_c(A/\Sigma, n) dA \\ &= \left(\frac{e}{n}\right)^{snh} \int \dots \int |A|^{nh} e^{-Tr.Ah} W_c(A/\Sigma, n) dA \end{aligned} \quad (3.7)$$

Utilizando(2.14) tem-se

$$|A|^{nh} e^{-tr.Ah} W_c(A/\Sigma, n) = \frac{|A|^{nh} e^{-tr.Ah} |A|^{n-s} e^{-tr.\Sigma^{-1}A}}{\pi^{\frac{1}{2}s(s-1)} |\Sigma|^n \prod_{\alpha=1}^s \Gamma(n+1-\alpha)} \quad (3.8)$$

$$n = N - 1.$$

Logo a expressão (3.7) resulta

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{e}{n}\right)^{nsh} \int \cdots \int \frac{|A|^{n(h+1)-s} e^{-tr.(Ih+\Sigma^{-1})A}}{\pi^{\frac{1}{2}s(s-1)} |\Sigma|^n \prod_{\alpha=1}^s \Gamma(n+1-\alpha)} dA \\
&= \left(\frac{e}{n}\right)^{nsh} \frac{1}{|\Sigma|^n \prod_{\alpha=1}^s \Gamma(n+1-\alpha)} \\
&\quad \int \cdots \int \frac{|A|^{n(h+1)-s} e^{-tr.(Ih+\Sigma^{-1})A}}{\pi^{\frac{1}{2}s(s-1)}} dA. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Agora multiplicando no integrando de (3.9) por

$$\frac{|(Ih + \Sigma^{-1})^{-1}|^{n(h+1)} \prod_{\alpha=1}^s \Gamma[n(h+1) + 1 - \alpha]}{|(Ih + \Sigma^{-1})^{-1}|^{n(h+1)} \prod_{\alpha=1}^s \Gamma[n(h+1) + 1 - \alpha]}$$

e fazendo simplificações algébricas a equação (3.9) resulta

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{e}{n}\right)^{nsh} \frac{|(Ih + \Sigma^{-1})^{-1}|^{n(h+1)} \prod_{\alpha=1}^s \Gamma[n(h+1) + 1 - \alpha]}{|\Sigma|^n \prod_{\alpha=1}^s \Gamma(n+1-\alpha)} \\
&\quad \int \cdots \int \frac{|A|^{n(h+1)-s} e^{-tr.(Ih+\Sigma^{-1})A}}{\pi^{\frac{1}{2}s(s-1)} |(Ih + \Sigma^{-1})^{-1}|^{n(h+1)} \prod_{\alpha=1}^s \Gamma[n(h+1) + 1 - \alpha]} dA \tag{3.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{e}{n}\right)^{nsh} \frac{|(Ih + \Sigma^{-1})^{-1}|^{n(h+1)} \prod_{\alpha=1}^s \Gamma[n(h+1) + 1 - \alpha]}{|\Sigma|^n \prod_{\alpha=1}^s \Gamma(n+1-\alpha)} \\
&\quad \int \cdots \int W_c(A/(\Sigma^{-1} + Ih)^{-1}, n(h+1)) dA. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Como a integral múltipla acima é igual a um, isto é

$$\int \cdots \int W_c(A/(\Sigma^{-1} + Ih)^{-1}, n(h+1)) \, dA = 1$$

a equação (3.11) resulta

$$= \left(\frac{e}{n}\right)^{snh} \frac{|(Ih + \Sigma^{-1})^{-1}|^{n(h+1)} \prod_{\alpha=1}^s \Gamma[n(h+1) + 1 - \alpha]}{\pi^{\frac{1}{2}s(s-1)} |\Sigma|^n \prod_{\alpha=1}^s \Gamma(n+1 - \alpha)}. \quad (3.12)$$

De onde fazendo as operações algébricas utilizando as propriedades do determinante, o h -ésimo momento de λ resulta :

$$E(\lambda^h) = \left(\frac{e}{n}\right)^{nsh} \frac{|\Sigma|^{nh}}{|I + \Sigma|^{n(h+1)}} \frac{\prod_{\alpha=1}^s \Gamma(n(h+1) + 1 - \alpha)}{\prod_{\alpha=1}^s \Gamma(n+1 - \alpha)} \quad (3.13)$$

Quando a hipótese é verdadeira, isto é $\Sigma = I$, o h -ésimo momento fica

$$E(\lambda^h) = \left(\frac{e}{n}\right)^{nsh} (1+h)^{-ns(h+1)} \frac{\prod_{\alpha=1}^s \Gamma(n(h+1) + 1 - \alpha)}{\prod_{\alpha=1}^s \Gamma(n+1 - \alpha)} \quad (3.14)$$

CAPÍTULO 4

DISTRIBUIÇÕES EXATAS DA ESTATÍSTICA DE RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA λ .

4.1 INTRODUÇÃO.

Baseado nos conceitos estabelecidos nos capítulos anteriores , obtém-se as distribuições exatas da estatística de razão de verossimilhança como série de distribuições chi-quadradas, séries logarítmicas e séries betas incompletas; os detalhes estão justificados nas correspondentes subseções .

4.1.1 DISTRIBUIÇÃO DE λ COMO UMA SÉRIE CHI-QUADRADA.

Obtém-se aqui a distribuição de λ em forma de série de distribuições chi-quadrados. Para isto faz-se a seguinte transformação

$$L = -2 \log \lambda \tag{4.1}$$

onde $0 < \lambda \leq 1$ e $0 \leq L < \infty$.

A partir de (4.1) obtemos a função característica de L como segue :

$$\begin{aligned} \varphi_L(t) &= E(e^{itL}) \\ &= E(e^{-2it \log \lambda}) \\ &= E(\lambda^{-2it}). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Fazendo $h = -2it$ em (3.14) temos

$$\varphi_L(t) = \left(\frac{e}{n}\right)^{-2nsit} (1 - 2it)^{-(1-2it)ns} \frac{\prod_{\alpha=1}^s \Gamma[n(1 - 2it) + 1 - \alpha]}{\prod_{\alpha=1}^s \Gamma[n + 1 - \alpha]}. \quad (4.3)$$

Tomando o logaritmo natural em ambos membros da equação (4.3) segue-se

$$\begin{aligned} \log \varphi_L(t) &= -2nsit \log\left(\frac{e}{n}\right) - (1 - 2it)ns \log(1 - 2it) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^s \log \Gamma[n(1 - 2it) + 1 - \alpha] - \sum_{\alpha=1}^s \log \Gamma[n + 1 - \alpha]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Aplicando a expansão do logaritmo da função gamma dada por (1.14), para o

$$\log \Gamma[n(1 - 2it) + 1 - \alpha]$$

resulta :

$$\begin{aligned} \log \Gamma[n(1 - 2it) + 1 - \alpha] &= \frac{1}{2} \log(2\pi) + \log n(1 - 2it)[n(1 - 2it) \\ &+ \frac{1}{2} - \alpha] - n(1 - 2it) + \sum_{r=1}^m \frac{(-1)^{r+1} B_{r+1}(1 - \alpha)}{r(r+1)} [n(1 - 2it)]^{-r} + R_{m+1}[n(1 - 2it)] \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $B_r(1 - \alpha)$ é o polinômio de Bernoulli de grau r e de ordem 1 definido em (1.16) e $R_m(\cdot)$ é o resto definido por :

$$R_{m+1}[n(1 - 2it)] = \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1} B_{r+1}(1 - 2it)}{r(r+1)} [n(1 - 2it)]^{-r} \quad (4.6)$$

tal que

$$|R_{m+1}[n(1 - 2it)]| \leq \frac{\Theta}{|[n(1 - 2it)]^{m+1}|},$$

e Θ é uma constante independente de $n(1 - 2it)$. Agora aplicando a somatória em ambos lados da equação (4.5) tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^s \log \Gamma[(1 - 2it) + 1 - \alpha] &= \frac{s}{2} \log(2\pi) + \left(\sum_{\alpha=1}^s [n(1 - 2it) + \frac{1}{2} - \alpha] \right) \\ \log n(1 - 2it) - (1 - 2it)ns &+ \sum_{r=1}^m \frac{(-1)^{r+1} \sum_{\alpha=1}^s B_{r+1}(1 - \alpha)}{r(r+1)} \\ [n(1 - 2it)]^{-r} &+ sR_{m+1}[n(1 - 2it)]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Notando que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha}^s [n(1 - 2it) + \frac{1}{2} - \alpha] \log n(1 - 2it) &= (1 - 2it)ns \log n \\ (1 - 2it)ns \log(1 - 2it) - \frac{s^2}{2} \log n - \frac{s^2}{2} \log(1 - 2it) \end{aligned} \quad (4.8)$$

e escrevendo esta igualdade no segundo termo do lado direito da equação (4.7) tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^s \log \Gamma[n(1 - 2it) + (1 - \alpha)] &= \frac{s}{2} \log(2\pi) + (1 - 2it)ns \log n \\ + (1 - 2it)ns \log(1 - 2it) - \frac{s^2}{2} \log n - \frac{s^2}{2} \log(1 - 2it) \\ - (1 - 2it)ns &+ \sum_{r=0}^m \frac{(-1)^{r+1} \sum_{\alpha=1}^s B_{r+1}(1 - \alpha)}{r(r+1)} [n(1 - 2it)]^{-r} \\ + sR_{m+1}[n(1 - 2it)]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Agrupando o segundo e o sexto termos no lado direito de (4.9) resulta

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^s \log \Gamma[n(1-2it) - (1+\alpha)] &= \frac{s}{2} \log(2\pi) + (1-2it)ns \log\left(\frac{n}{e}\right) + \\ & (1-2it)ns \log(1-2it) - \frac{s^2}{2} \log n - \frac{s^2}{2} \log(1-2it) \\ & + \sum_{r=1}^m \frac{(-1)^{r+1} \sum_{\alpha=1}^s B_{r+1}(1-\alpha)}{r(r+1)} [n(1-2it)]^{-r} + sR_{m+1}[n(1-2it)]. \end{aligned}$$

Escrevendo esta igualdade em lugar do terceiro termo do lado direito da expressão (4.4) e fazendo simplificações algébricas tem-se

$$\begin{aligned} \log \varphi_L(t) &= \frac{s}{2} \log(2\pi) + ns \log\left(\frac{n}{e}\right) - \frac{s^2}{2} \log n(1-2it) \\ & + \sum_{r=1}^m \frac{(-1)^{r+1} \sum_{\alpha=1}^s B_{r+1}(1-\alpha)}{r(r+1)} [n(1-2it)]^{-r} - \sum_{\alpha=1}^s \log \Gamma[n+1-\alpha] \\ & sR_{m+1}[n(1-2it)]. \end{aligned} \tag{4.10}$$

A partir da equação acima, utilizando as propriedades da função logaritmo, a função característica $\varphi_L(t)$ fica

$$\begin{aligned} \varphi_L(t) &= (2\pi)^{\frac{s}{2}} \left(\frac{n}{e}\right)^{ns} \left[\prod_{\alpha=1}^s \Gamma(n+1-\alpha) \right]^{-1} [n(1-2it)]^{-\frac{s^2}{2}} \\ & \exp\left(\sum_{r=1}^m Q_r [n(1-2it)]^{-r} + sR_{m+1}[n(1-2it)] \right) \end{aligned} \tag{4.11}$$

onde

$$Q_r = \frac{(-1)^{r+1} \sum_{\alpha=1}^s B_{r+1}(1-\alpha)}{r(r+1)} \quad ; \quad r = 1, 2, \dots \tag{4.12}$$

Fazendo $\nu = \frac{s^2}{2}$ e utilizando o lema (1.7), equação (1.41) para

$$\exp\left(\sum_{r=1}^m Q_r [n(1-2it)]^{-r}\right)$$

a função característica resulta

$$\varphi_L(t) = K_1(s, n) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{(j+\nu)} B_j (1-2it)^{-(j+\nu)} + s R'_{m+1}(n, t) \quad (4.13)$$

onde

$$K_1(s, n) = (2\pi)^{\frac{s}{2}} \left(\frac{n}{e}\right)^{ns} \left[\prod_{\alpha=1}^s \Gamma(n+1-\alpha) \right]^{-1} \quad (4.14)$$

$$\nu = \frac{s^2}{2}$$

$$R'_{m+1}(n, t) = K_1(s, n) \sum_{j=0}^{\infty} B_j \left(\frac{1}{n}\right)^{(j+\nu)} (1-2it)^{-(j+\nu)} \left[\exp(s R_{m+1}(\cdot)) - 1 \right] \quad (4.15)$$

e os coeficientes B_j são definidos por :

$$B_j = \sum_{r=1}^j \frac{1}{r!} Q_1^r A_{r, j-r} ; j = 1, 2, \dots \quad (4.16)$$

onde

$$A_{r, j-r} = A_{r, j-r}(Q_2 Q_1^{-1}, \dots, Q_m Q_1^{-1})$$

está definido em (1.28) e Q_r na equação (4.12) .

A função de densidade de probabilidade de L obtém-se a partir da equação (4.13) utilizando o teorema de inversão da integral de Fourier, pois a função característica determina unicamente a função de distribuição e portanto a função de densidade de probabilidade. Logo tem-se

$$f(L) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_L(t) \exp(-itL) dt \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(s, n) \sum_{j=0}^{\infty} B_j \left(\frac{1}{n}\right)^{j+\nu} (1-2it)^{-(j+\nu)} \exp(-itL) dt \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R'_{m+1}(n, t) \exp(-itL) dt
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
&= K_1(s, n) \sum_{j=0}^{\infty} B_j \left(\frac{1}{n}\right)^{j+\nu} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1-2it)^{-(j+\nu)} e^{-itL} dt \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R'_{m+1}(n, t) \exp(-itL) dt
\end{aligned} \tag{4.19}$$

onde $R'_{m+1}(n, t)$ está definido em (4.15).

Seja W uma variável aleatória com função característica $(1-2it)^{-(j+\nu)}$. Então W é distribuído como uma variável chi-quadrada com $2(j+\nu)$ graus de liberdade, isto é, $W \sim \chi_{2(j+\nu)}^2$. Portanto pelo teorema de unicidade da função característica sabe-se que a função de distribuição de W é unicamente determinada pela função característica, e daqui a função de densidade de probabilidade de W é

$$g_{2(j+\nu)}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1-2it)^{-(j+\nu)} \exp\left(-\frac{1}{2}w\right) dt \tag{4.20}$$

$$g_{2(j+\nu)}(w) = \frac{w^{j+\nu-1} \exp\left(-\frac{1}{2}w\right)}{2^{j+\nu} \Gamma(j+\nu)} ; \quad 0 \leq w < \infty. \tag{4.21}$$

Utilizando a equação (4.21) em (4.19) resulta que

$$f(L) = K_1(s, n) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{j+\nu} B_j g_{2(j+\nu)}(L) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R'_{m+1}(n, t) \exp(-itL) dt \tag{4.22}$$

o que se pode escrever em uma forma concisa como segue

$$f(L) = K_1(s, n) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{j+\nu} B_j g_{2(j+\nu)}(L) + R''_{m+1}(n, L) ; 0 \leq L < \infty \quad (4.23)$$

onde

$$R''_{m+1}(n, L) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R'_{m+1}(n, t) \exp(-itL) dt. \quad (4.24)$$

Por definição a função de distribuição de L é :

$$F(L) = p[l \leq L] = \int_0^L f(l) dl$$

onde $f(l)$ é dado por (4.23), logo

$$\begin{aligned} F(L) &= K_1(s, n) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{j+\nu} B_j \int_0^L g_{2(j+\nu)}(l) dl + \int_0^L R''_{m+1}(n, l) dl \\ &= K_1(s, n) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{j+\nu} B_j G_{2(j+\nu)}(L) + R_{m+1}(n) \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde

$$\begin{aligned} G_{2(j+\nu)}(L) &= \int_0^L g_{2(j+\nu)}(l) dl \\ R_{m+1}(n) &= \int_0^L R''_{m+1}(n, l) dl \end{aligned} \quad (4.26)$$

e $R''_{m+1}(n, l)$ é dado por (4.24).

Assim a partir de (4.25) observa-se que L tem distribuição de série de distribuições chi-quadradas.

Quando $n \rightarrow \infty$, L tem distribuição assintótica χ^2 com s^2 graus de liberdade. Isto pode-se observar como segue: a partir de (4.23) sem considerar o termo resto tem-se

$$f(L) = K_1(s, n) \left(\frac{1}{n}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} B_j \left(\frac{1}{n}\right)^j g_{2(j+\nu)}(L) \quad (4.27)$$

Estabelecemos primeiro o seguinte lema:

Lema 4.1.1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_1(s, n) \left(\frac{1}{n}\right)^\nu = 1$$

Prova: Tomando em conta a equação (4.14) e sabendo que $\nu = \frac{s^2}{2}$ tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_1(s, n) \left(\frac{1}{n}\right)^\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \prod_{\alpha=1}^s (2\pi) \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}s} \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \right\}$$

Agora utilizando a fórmula de aproximação de Stirling para a função gamma ($\Gamma(z) \sim e^{-z} z^{z-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}}$) temos

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\alpha=1}^s n^{-\frac{1}{2}s - \frac{1}{2} + \alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\alpha=1}^s \frac{e^{1-\alpha}}{(1 + \frac{1-\alpha}{n})^n (1 + \frac{1-\alpha}{n})^{\frac{1}{2}-\alpha}} \\ &= 1 \quad (\text{depois de realizar as operações indicadas}) \end{aligned}$$

portanto o Lema 4.1.1 fica demonstrado.

Logo em (4.27) tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_1(s, n) \left(\frac{1}{n}\right)^\nu \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} B_j \left(\frac{1}{n}\right)^j g_{2(j+\nu)}(L).$$

Utilizando o Lema 4.1.1 o anterior resulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} (B_0 g_{2(\nu)}(L) + B_1 \left(\frac{1}{n}\right) g_{2(1+\nu)}(L) + \dots)$$

$$= g_{2\nu}(L) ; (B_0 = 1)$$

$$= g_{s^2}(L).$$

4.1.2 DISTRIBUIÇÃO DE λ COMO UMA SÉRIE LOGARÍTMICA.

Em seguida obtém-se a distribuição de λ como uma série logarítmica . Neste caso faz-se a seguinte transformação :

$$L = \lambda^{\frac{1}{n}} ; \quad 0 < L < 1. \quad (4.28)$$

A partir (4.28) determina-se a transformada de Mellin de L como segue

$$E(L^h) = E(\lambda^{\frac{h}{n}}). \quad (4.29)$$

Fazendo $h = \frac{h}{n}$ em (3.14) a $E(\lambda^{\frac{1}{n}})$ resulta

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{e}{n}\right)^{ns(\frac{h}{n})} \left(1 + \frac{h}{n}\right)^{-ns(1+\frac{h}{n})} \frac{\prod_{\alpha=1}^s \Gamma[n(1 + \frac{h}{n}) + 1 - \alpha]}{\prod_{\alpha=1}^s \Gamma[n + 1 - \alpha]} \\ E(L^h) &= \left(\frac{e}{n}\right)^{sh} \left(1 + \frac{h}{n}\right)^{-ns(1+\frac{h}{n})} \frac{\prod_{\alpha=1}^s \Gamma[n(1 + \frac{h}{n}) + 1 - \alpha]}{\prod_{\alpha=1}^s \Gamma[n + 1 - \alpha]} \end{aligned}$$

Como a transformada de Mellin existe pode-se obter a função de densidade de L utilizando a transformada inversa de Mellin equação (1.23) o que resulta

$$f(L) = \left[\prod_{\alpha=1}^s \Gamma(n + 1 - \alpha) \right]^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} L^{-(h+1)} \left(\frac{e}{n}\right)^{sh} \left(1 + \frac{h}{n}\right)^{-ns(1+\frac{h}{n})}$$

(4.30)

$$\prod_{\alpha=1}^s \Gamma(h+n+1-\alpha)dh.$$

Fazendo a seguinte mudança de variável $t = n + h$ tem-se

$$1 + \frac{h}{n} = \frac{t}{n} \quad (4.31)$$

$$h + 1 = t - n + 1 \quad (4.32)$$

e, depois de realizar as mudanças respectivas e simplificações algébricas à expressão (4.30) resulta que :

$$\begin{aligned} f(L) &= \left[\prod_{\alpha=1}^s \Gamma(n+1-\alpha) \right]^{-1} \left(\frac{e}{n} \right)^{-ns} L^{(n-1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L^{-t} \left(\frac{e}{t} \right)^{st} \prod_{\alpha=1}^s \Gamma(t+1-\alpha) dt \\ &= K_2(s, n) L^{(n-1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L^{-t} c(t) dt. \end{aligned} \quad (4.33)$$

na equação (4.33) tem-se $c = n$ e que

$$K_2(s, n) = \left[\prod_{\alpha=1}^s \Gamma(n+1-\alpha) \right]^{-1} \left(\frac{e}{n} \right)^{-ns} \quad (4.34)$$

$$c(t) = \left(\frac{e}{t} \right)^{st} \prod_{\alpha=1}^s \Gamma(t+1-\alpha). \quad (4.35)$$

Agora tomando logaritmo natural a ambos lados da equação (4.35) tem-se

$$\log c(t) = st - st \log t + \sum_{\alpha=1}^s \log \Gamma(t+1-\alpha). \quad (4.36)$$

Aplicando (1.14) para o $\log \Gamma(t+1-\alpha)$ e simplificando obtém-se

$$\begin{aligned} \log \Gamma(t+1-\alpha) &= \frac{1}{2} \log(2\pi) + \left(t + \frac{1}{2} - \alpha\right) \log t - t \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1} B_{r+1} (1-\alpha)}{r(r+1)} t^{-r}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Aplicando a somatória à equação acima resulta

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^s \log \Gamma(t+1-\alpha) &= \frac{s}{2} \log(2\pi) + st \log t - \frac{s^2}{2} \log t - st \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1} \sum_{\alpha=1}^s B_{r+1}(1-\alpha)}{r(r+1)} t^{-r}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Escrevendo esta última igualdade na equação (4.36) obtém-se

$$\log c(t) = \frac{s}{2} \log(2\pi) - \frac{s^2}{2} \log t + \sum_{r=1}^{\infty} Q_r t^{-r} \quad (4.39)$$

onde

$$Q_r = \frac{(-1)^{r+1} \sum_{\alpha=1}^s B_{r+1}(1-\alpha)}{r(r+1)} \quad ; \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.40)$$

e $B_r(\cdot)$ é o polinômio de Bernoulli de grau r e de ordem 1.

Usando as propriedades do logaritmo a expressão (4.39) fica na forma seguinte

$$c(t) = (2\pi)^{\frac{s}{2}} t^{-\frac{s^2}{2}} \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} Q_r t^{-r}\right) \quad (4.41)$$

Agora aplicado o lema (1.7), equação (1.42) para $\exp(\sum_{r=1}^{\infty} Q_r t^{-r})$ a relação (4.41) resulta

$$c(t) = (2\pi)^{\frac{s}{2}} t^{-\frac{s^2}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} B_j t^{-j} \quad (4.42)$$

onde

$$B_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j = 0 \\ \sum_{r=1}^j \frac{1}{r!} Q_1^r A_{r,j-r} & \text{se } j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

com $A_{r,j-r}$ definido em (1.28). Usando (4.42) a função de densidade de L resulta

$$f(L) = K_2(s, n) (2\pi)^{\frac{s}{2}} L^{(n-1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L^{-t} \sum_{j=0}^{\infty} B_j t^{-(j+\nu)} dt \quad (4.43)$$

onde

$$\nu = \frac{s^2}{2}$$

No que segue avalia-se a integral

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L^{-t} \sum_{j=0}^{\infty} B_j t^{-(j+\nu)} dt \quad ; \quad B_0 = 1 \quad (4.44)$$

considerando que ν é um inteiro positivo ; neste caso aplica-se o teorema de resíduo de Cauchy. Para isto observe que (4.44) é equivalente a:

$$I = \sum_{j=0}^{\infty} B_j \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L^{-t} t^{-(j+\nu)} dt. \quad (4.45)$$

Como o integrando em (4.45) tem pólo de ordem $(j + \nu)$ em $t_0 = 0$, utiliza-se o Lema (1.4) para determinar o resíduo, isto é

$$Res(f_j, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(j + \nu - 1)!} \frac{d^{(j+\nu-1)}}{dt^{(j+\nu-1)}} \left(t^{j+\nu} L^{-t} B_j t^{-(j+\nu)} \right) \right] \quad (4.46)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{B_j}{(j + \nu - 1)!} \frac{d^{(j+\nu-1)}}{dt^{(j+\nu-1)}} L^{-t} \right]$$

$$= \frac{B_j}{\Gamma(j + \nu)} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^{(j+\nu-1)}}{dt^{(j+\nu-1)}} L^{-t}$$

$$= \frac{B_j}{\Gamma(j + \nu)} (-\log L)^{j+\nu-1} . \quad (4.47)$$

Logo usando (4.47) e o Teorema de Cauchy (4.44) resulta:

$$I = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{\Gamma(j + \nu)} (-\log L)^{j+\nu-1} . \quad (4.48)$$

Escrevendo esta igualdade em (4.43), a função de densidade de L , segue que

$$f(L) = K_2(s, n)(2\pi)^{\frac{s}{2}} L^{(n-1)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{\Gamma(j+\nu)} (-\log L)^{j+\nu-1} \quad ; \quad 0 < L < 1. \quad (4.49)$$

A função de distribuição de L é obtida a partir de (4.49) como segue

$$\begin{aligned} F(L) &= p[l \leq L] = \int_0^L f(l) dl \\ &= K_2(s, n)(2\pi)^{\frac{s}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} B_j I_{j+\nu-1, n-1}(L) \quad ; \quad B_0 = 1 \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde

$$I_{j+\nu-1, n-1}(L) = \frac{1}{\Gamma(j+\nu)} \int_0^L l^{n-1} (-\log l)^{j+\nu-1} dl. \quad (4.51)$$

Como $I_{j+\nu-1, n-1}(L)$ é a função de $\log L$, e $F(L)$ em (4.50) é uma função de $I_{j+\nu-1, n-1}$, se deduz que a função de distribuição de L , $F(L)$ é uma função de série logarítmica .

Integrando por partes o lado direito de (4.51) resulta

$$I_{j+\nu-1, n-1}(L) = \frac{1}{n} \left[\frac{(-\log L)^{j+\nu-1} L^n}{\Gamma(j+\nu)} + I_{j+\nu-2, n-1}(L) \right] \quad (4.52)$$

e

$$I_{0, n-1}(L) = \frac{1}{2} L^n \quad (4.53)$$

pelo que observa-se que (4.51) satisfaz as relações de recorrência (4.52) e (4.53). Observe-se também que a relação (4.50) é válida unicamente quando ν é um inteiro positivo.

4.1.3 DISTRIBUIÇÃO DE λ COM UMA SÉRIE BETA

A distribuição de λ é uma série Beta, quando $\nu = \frac{s^2}{2}$ que aparece na densidade de L em (4.43) não é um número inteiro positivo.

A equação da função de probabilidade de L é

$$f(L) = K_2(s, n)(2\pi)^{\frac{s}{2}} L^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L^{-t} \sum_{j=0}^{\infty} B_j t^{-(j+\nu)} dt \quad (4.54)$$

Para avaliar a integral

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L^{-t} \sum_{j=0}^{\infty} B_j t^{-(j+\nu)} dt \quad (4.55)$$

utiliza-se o teorema de Nair. Assim pode-se escrever $\Phi(t)$ em uma série fatorial como segue

$$\Phi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j t^{-(j+\nu)} = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t+j+\nu+a)} \quad (4.56)$$

onde “ a ” é uma constante positiva arbitrária que se escolhe de maneira que a série seja convergente. Escrevendo esta última expressão no integrando de (4.55) tem-se

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_j L^{-t} \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t+j+\nu+a)} dt \quad (4.57)$$

e como a série fatorial converge uniformemente na metade superior do plano complexo (ver [Doetsch, pag. 135–36]) pode-se intercambiar a integral e a somatória e a integração

termo a termo é válida, isto é

$$I = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L^{-t} \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t+j+\nu+a)} dt. \quad (4.58)$$

Utilizando (1.43), com $m = j + \nu$ a integral acima resulta

$$I = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \frac{1}{\Gamma(j+\nu)} L^a (1-L)^{j+\nu-1}; 0 \leq L \leq 1 \quad (4.59)$$

escrevendo esta igualdade na equação (4.54), a função de densidade de probabilidade de L resulta

$$f(L) = K_2(s, n) (2\pi)^{\frac{s}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} C_j \frac{L^{n+a-1} (1-L)^{j+\nu-1}}{\Gamma(j+\nu)}; 0 \leq L \leq 1. \quad (4.60)$$

A partir da equação (4.60), a função de distribuição de L fica :

$$F(L) = K_2(s, n) (2\pi)^{\frac{s}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} C_j \frac{I_L(n+a-1, j+\nu-1)}{\Gamma(j+\nu)} \quad (4.61)$$

onde

$$I_L(n+a-1, j+\nu-1)$$

é a função beta incompleta definida por :

$$I_L(n+a-1, j+\nu-1) = \int_0^L l^{n+a-1} (1-l)^{j+\nu-1} dl \quad (4.62)$$

Em seguida determina-se os coeficientes C_j que aparecem na função de distribuição de L

DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES C_j

Os coeficientes C_j determinam-se explicitamente como segue

$$\log \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t+j+\nu+a)} = \log \Gamma(t+a) - \log \Gamma(t+j+\nu+a) \quad (4.63)$$

Agora aplicando a expansão da função gamma, equação (1.14) a cada termo do lado direito da equação acima e depois de realizar as operações indicadas resulta que

$$\begin{aligned} \log \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t+j+\nu+a)} &= -(j+\nu) \log t + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{r(r+1)} [B_{r+1}(a) \\ &\quad - B_{r+1}(j+\nu+a)] t^{-r} \end{aligned} \quad (4.64)$$

definindo

$$R_{j,r} = \frac{(-1)^{r+1}}{r(r+1)} [B_{r+1}(a) - B_{r+1}(j+\nu+a)] \quad , \quad j = 0, 1, \dots \quad , \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.65)$$

onde B_r é o polinômio de Bernoulli, a relação (4.64) com a definição acima pode-se escrever como:

$$\begin{aligned} \log \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t+j+\nu+a)} &= -(j+\nu) \log t + \sum_{r=1}^{\infty} R_{j,r} t^{-r} \\ &= \log t^{-(j+\nu)} + \sum_{r=1}^{\infty} R_{j,r} t^{-r} \\ &= \log t^{-(j+\nu)} \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} R_{j,r} t^{-r}\right). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Logo

$$\frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t+j+\nu+a)} = t^{-(j+\nu)} \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} R_{j,r} t^{-r}\right). \quad (4.67)$$

Utilizando o lema (1.7), equação (1.42), para

$$\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} R_{j,r} t^{-r}\right).$$

A relação (4.67) fica:

$$\frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t+j+\nu+a)} = t^{-(j+\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \frac{1}{(k-r)!} R_{j,1}^{k-r} A_{k-r,r} t^{-k} \quad (4.68)$$

onde

$$A_{k-r,r} = A_{k-r,r}(R_{j,2} R_{j,1}^{-1}, R_{j,3} R_{j,1}^{-1}, \dots) \quad (4.69)$$

é definido em capítulo (1) equação (1.28) e os $R_{j,r}$ em (4.65) .

Definindo

$$\begin{aligned} D_{j,k} &= \sum_{r=0}^k \frac{1}{(k-r)!} R_{j,1}^{k-r} A_{k-r,r} \\ k &= 0, 1, \dots \\ j &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (4.70)$$

A expressão (4.68) resulta

$$\frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t+j+\nu+a)} = t^{-(j+\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} D_{j,k} t^{-k} \quad (4.71)$$

Então

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} C_j \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t+j+\nu+a)} &= \sum_{j=0}^{\infty} C_j t^{-(j+\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} D_{j,k} t^{-k} \\ &= t^{-\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_j D_{j,k} t^{-(j+k)}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Logo aplicando o lema (1.6) para a somatória dupla no lado direito de (4.72) resulta que

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t+j+\nu+a)} = t^{-\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j C_{j-k} D_{j-k,k} t^{-j}. \quad (4.73)$$

Em seguida a partir de (4.56), tem-se

$$t^{-\nu} \sum_{j=0}^{\infty} B_j t^{-j} = t^{-\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j C_{j-k} D_{j-k,k} t^{-j} \quad (4.74)$$

onde, igualando coeficientes resulta

$$B_j = \sum_{k=0}^j C_{j-k} D_{j-k,k} \quad j = 0, 1, \dots \quad (4.75)$$

$$C_0 = 1 \quad D_{j,0} = 1 \quad \forall j$$

A partir de (4.75) obtém-se os coeficientes C_j , pois os B_j são conhecidos e D_{pq} é definido em (4.70).

CAPÍTULO 5

CÁLCULO COMPUTACIONAL

5.1 INTRODUÇÃO

Explicitamos neste capítulo as relações matemáticas a serem avaliadas computacionalmente mediante a linguagem de Programação Turbo pascal . As relações matemáticas para este fim referem-se a distribuição Séries de distribuições chi-quadrados.

O programa computacional é preparado para avaliar a função de distribuição de série de distribuições chi-quadrado e os pontos percentuais desta distribuição.

5.1.1 FUNÇÃO SÉRIE CHI-QUADRADO

A partir do capítulo 4, subseção 4.1 sabe-se que a função de distribuição L em série de distribuições chi-quadrados resulta :

$$F(L) = K_1(s, n) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{j+\nu} B_j G_{2(j+n)}(L) \quad ; 0 \leq L < \infty \quad (5.1)$$

onde

$$G_{2(j+\nu)}(L) = \int_0^L \frac{l^{j+\nu-1} \exp(-\frac{l}{2})}{2^{j+\nu} \Gamma(j+\nu)} dl \quad (5.2)$$

Dos capítulos 3 e 4 sabe-se que

$$\lambda = \left(\frac{e}{n}\right)^{ns} |A|^n \exp(-tr.A) \quad n = N - 1 \quad (5.3)$$

$$L = -2 \log \lambda \quad ; \quad 0 < \lambda \leq 1 \quad (5.4)$$

Utilizando a técnica de transformação de variáveis determina-se a função de distribuição de λ como segue:

A função de densidade de probabilidade de λ é dada por

$$\begin{aligned} h_{(j+\nu)}(\lambda) &= g_{2(j+\nu)}(L) \left| \frac{dl}{d\lambda} \right| \\ &= \frac{(-\log \lambda)^{j+\nu-1}}{\Gamma(j+\nu)} ; 0 < \lambda \leq 1 \end{aligned} \quad (5.5)$$

a função de distribuição de λ é dada por :

$$H(j, \nu, \lambda) = \int_0^\lambda \frac{(-\log y)^{j+\nu-1}}{\Gamma(j+\nu)} dy \quad (5.6)$$

A substituição de $Z = -\log y$ em (5.6) resulta:

$$\begin{aligned} H(j, \nu, \lambda) &= \frac{1}{\Gamma(j+\nu)} \int_{-\log \lambda}^{\infty} Z^{j+\nu-1} \exp(-Z) dZ \\ &= \frac{1}{\Gamma(j+\nu)} \left[\int_0^{\infty} Z^{j+\nu-1} \exp(-Z) dZ - \int_0^{-\log \lambda} Z^{j+\nu-1} \exp(-Z) dZ \right] \\ &= 1 - \frac{1}{\Gamma(j+\nu)} \int_0^{-\log \lambda} Z^{j+\nu-1} \exp(-Z) dt \end{aligned} \quad (5.7)$$

O segundo termo na equação (5.7) é uma função gamma incompleta, mas para fins computacionais, escreve-se $\exp(-Z)$ do integrando de (5.7) em série de Maclaurin, e fazendo simplificações algébricas resulta :

$$H(j, \nu, \lambda) = 1 - \frac{1}{\Gamma(j+\nu)} \int_0^{-\log \lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k Z^{(j+\nu+k-1)}}{k!} dZ. \quad (5.8)$$

Intercambiando a somatória e a integral, e integrando termo a termo a relação acima resulta finalmente :

$$H(j, \nu, \lambda) = 1 - \frac{1}{\Gamma(j + \nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-\log \lambda)^{(j+\nu+k)}}{k!(j + \nu + k)}. \quad (5.9)$$

Como $\nu = \frac{s^2}{2}$, a expressão (5.9) pode-se escrever em termos de s, j e λ como segue :

$$H(j, s, \lambda) = 1 - \frac{1}{\Gamma(j + \frac{s^2}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-\log \lambda)^{(j+\frac{s^2}{2}+k)}}{k!(j + \frac{s^2}{2} + k)} \quad (5.10)$$

A série na expressão acima para fins de processo computacional se fez com 40 termos.

Utilizando (5.1), a função de distribuição de λ é dada por :

$$F(\lambda) = K_1(s, n) \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{s^2}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} B_j \left(\frac{1}{n}\right)^j H(j, s, \lambda) \quad (5.11)$$

Como $n = N - 1$ o fator $K_1(s, n) \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{s^2}{2}}$ é igual a:

$$\begin{aligned} K(s, n) &= K_1(s, N - 1) \left(\frac{1}{N - 1}\right)^{\frac{s^2}{2}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\exp(N - 1)}\right)^s \prod_{\alpha=1}^s \frac{(N - 1)^{(N-1-\frac{\alpha}{2})}}{(N - 1 - \alpha)!} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Os coeficientes B_j aparecem definidos na seção (4.1) equação (4.16) como segue :

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \quad j = 0 \\ B_j &= \sum_{r=1}^j \frac{1}{r!} Q_1^r A_{r,j-r} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde

$$A_{r,j-r} = A_{r,j-r}(Q_2 Q_1^{-1}, Q_3 Q_1^{-1}, \dots, Q_m Q_1^{-1}) \quad (5.14)$$

A equação (5.14), pode-se escrever em forma simplificada como segue:

$$A_{r,j-r} = A_{r,j-r}(a_1, a_2, \dots, a_m) \quad (5.15)$$

onde

$$a_i = Q_{i+1} Q_1^{-1} \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \quad ; \quad m = 2, 3, \dots$$

Desenvolve-se em seguida a relação (5.13) para $j = 0, 1, 2, \dots, 15$

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \\ B_1 &= \frac{1}{1!} Q_1 A_{1,0} \\ B_2 &= \frac{1}{1!} Q_1 A_{1,1} + \frac{1}{2!} Q_1^2 A_{2,0} \\ B_3 &= \frac{1}{1!} Q_1 A_{1,2} + \frac{1}{2!} Q_1^2 A_{2,1} + \frac{1}{3!} Q_1^3 A_{3,0} \\ B_4 &= \frac{1}{1!} Q_1 A_{1,3} + \frac{1}{2!} Q_1^2 A_{2,2} + \frac{1}{3!} Q_1^3 A_{3,1} + \frac{1}{4!} Q_1^4 A_{4,0} \\ B_5 &= \frac{1}{1!} Q_1 A_{1,4} + \frac{1}{2!} Q_1^2 A_{2,3} + \frac{1}{3!} Q_1^3 A_{3,2} + \frac{1}{4!} Q_1^4 A_{4,1} + \frac{1}{5!} Q_1^5 A_{5,0} \\ B_6 &= \frac{1}{1!} Q_1 A_{1,5} + \frac{1}{2!} Q_1^2 A_{2,4} + \frac{1}{3!} Q_1^3 A_{3,3} + \frac{1}{4!} Q_1^4 A_{4,2} + \frac{1}{5!} Q_1^5 A_{5,1} + \frac{1}{6!} Q_1^6 A_{6,0} \\ B_7 &= \frac{1}{1!} Q_1 A_{1,6} + \frac{1}{2!} Q_1^2 A_{2,5} + \frac{1}{3!} Q_1^3 A_{3,4} + \frac{1}{4!} Q_1^4 A_{4,3} + \frac{1}{5!} Q_1^5 A_{5,2} + \frac{1}{6!} Q_1^6 A_{6,1} \\ &\quad + \frac{1}{7!} Q_1^7 A_{7,0} \\ B_8 &= \frac{1}{1!} Q_1 A_{1,7} + \frac{1}{2!} Q_1^2 A_{2,6} + \frac{1}{3!} Q_1^3 A_{3,5} + \frac{1}{4!} Q_1^4 A_{4,4} + \frac{1}{5!} Q_1^5 A_{5,3} + \frac{1}{6!} Q_1^6 A_{6,2} \\ &\quad + \frac{1}{7!} Q_1^7 A_{7,1} + \frac{1}{8!} Q_1^8 A_{8,0} \\ B_9 &= \frac{1}{1!} Q_1 A_{1,8} + \frac{1}{2!} Q_1^2 A_{2,7} + \frac{1}{3!} Q_1^3 A_{3,6} + \frac{1}{4!} Q_1^4 A_{4,5} + \frac{1}{5!} Q_1^5 A_{5,4} + \frac{1}{6!} Q_1^6 A_{6,3} \\ &\quad + \frac{1}{7!} Q_1^7 A_{7,2} + \frac{1}{8!} Q_1^8 A_{8,1} + \frac{1}{9!} Q_1^9 A_{9,0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{10} &= \frac{1}{1!}Q_1A_{1,9} + \frac{1}{2!}Q_1^2A_{2,8} + \frac{1}{3!}Q_1^3A_{3,7} + \frac{1}{4!}Q_1^4A_{4,6} + \frac{1}{5!}Q_1^5A_{5,5} \\
&\quad + \frac{1}{6!}Q_1^6A_{6,4} + \frac{1}{7!}Q_1^7A_{7,3} + \frac{1}{8!}Q_1^8A_{8,2} + \frac{1}{9!}Q_1^9A_{9,1} + \frac{1}{10!}Q_1^{10}A_{10,0} \\
B_{11} &= \frac{1}{1!}Q_1A_{1,10} + \frac{1}{2!}Q_1^2A_{2,9} + \frac{1}{3!}Q_1^3A_{3,8} + \frac{1}{4!}Q_1^4A_{4,7} + \frac{1}{5!}Q_1^5A_{5,6} \\
&\quad + \frac{1}{6!}Q_1^6A_{6,5} + \frac{1}{7!}Q_1^7A_{7,4} + \frac{1}{8!}Q_1^8A_{8,3} + \frac{1}{9!}Q_1^9A_{9,2} + \frac{1}{10!}Q_1^{10}A_{10,1} \\
&\quad + \frac{1}{11!}Q_1^{11}A_{11,0} \\
B_{12} &= \frac{1}{1!}Q_1A_{1,11} + \frac{1}{2!}Q_1^2A_{2,10} + \frac{1}{3!}Q_1^3A_{3,9} + \frac{1}{4!}Q_1^4A_{4,8} + \frac{1}{5!}Q_1^5A_{5,7} \\
&\quad + \frac{1}{6!}Q_1^6A_{6,6} + \frac{1}{7!}Q_1^7A_{7,5} + \frac{1}{8!}Q_1^8A_{8,4} + \frac{1}{9!}Q_1^9A_{9,3} + \frac{1}{10!}Q_1^{10}A_{10,2} \\
&\quad + \frac{1}{11!}Q_1^{11}A_{11,1} + \frac{1}{12!}Q_1^{12}A_{12,0} \\
B_{13} &= \frac{1}{1!}Q_1A_{1,12} + \frac{1}{2!}Q_1^2A_{2,11} + \frac{1}{3!}Q_1^3A_{3,10} + \frac{1}{4!}Q_1^4A_{4,9} + \frac{1}{5!}Q_1^5A_{5,8} \\
&\quad + \frac{1}{6!}Q_1^6A_{6,7} + \frac{1}{7!}Q_1^7A_{7,6} + \frac{1}{8!}Q_1^8A_{8,5} + \frac{1}{9!}Q_1^9A_{9,4} + \frac{1}{10!}Q_1^{10}A_{10,3} \\
&\quad + \frac{1}{11!}Q_1^{11}A_{11,2} + \frac{1}{12!}Q_1^{12}A_{12,1} + \frac{1}{13!}Q_1^{13}A_{13,0} \\
B_{14} &= \frac{1}{1!}Q_1A_{1,13} + \frac{1}{2!}Q_1^2A_{2,12} + \frac{1}{3!}Q_1^3A_{3,11} + \frac{1}{4!}Q_1^4A_{4,10} + \frac{1}{5!}Q_1^5A_{5,9} \\
&\quad + \frac{1}{6!}Q_1^6A_{6,8} + \frac{1}{7!}Q_1^7A_{7,7} + \frac{1}{8!}Q_1^8A_{8,6} + \frac{1}{9!}Q_1^9A_{9,5} + \frac{1}{10!}Q_1^{10}A_{10,4} \\
&\quad + \frac{1}{11!}Q_1^{11}A_{11,3} + \frac{1}{12!}Q_1^{12}A_{12,2} + \frac{1}{13!}Q_1^{13}A_{13,1} + \frac{1}{14!}Q_1^{14}A_{14,0} \\
B_{15} &= \frac{1}{1!}Q_1A_{1,14} + \frac{1}{2!}Q_1^2A_{2,13} + \frac{1}{3!}Q_1^3A_{3,12} + \frac{1}{4!}Q_1^4A_{4,11} + \frac{1}{5!}Q_1^5A_{5,10} \\
&\quad + \frac{1}{6!}Q_1^6A_{6,9} + \frac{1}{7!}Q_1^7A_{7,8} + \frac{1}{8!}Q_1^8A_{8,7} + \frac{1}{9!}Q_1^9A_{9,6} + \frac{1}{10!}Q_1^{10}A_{10,5} \\
&\quad + \frac{1}{11!}Q_1^{11}A_{11,4} + \frac{1}{12!}Q_1^{12}A_{12,3} + \frac{1}{13!}Q_1^{13}A_{13,2} + \frac{1}{14!}Q_1^{14}A_{14,1} \\
&\quad + \frac{1}{15!}Q_1^{15}A_{15,0}
\end{aligned}$$

O sistema anterior escreve-se numa forma mais adequada para propósitos computacionais, como explica-se a seguir: O coeficiente B_2 é função de B_1 e Q_2 ; B_3 é função

de B_1, B_2 e Q_3 e assim sucessivamente. Para este propósito primeiramente escreve-se o sistema acima apenas em função dos Q 's utilizando as propriedades de $A_{r,j}$ e a relação de recorrência estabelecidas em (1.2.11). Por exemplo tem-se as seguintes relações

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1 \\
B_1 &= Q_1 \\
B_2 &= \frac{1}{2}Q_1^2 + Q_2 \\
B_3 &= Q_1Q_2 + \frac{1}{6}Q_1^3 + Q_3 \\
B_4 &= \frac{1}{2}Q_1^2Q_2 + Q_1Q_3 + \frac{1}{2}Q_2^2 + \frac{1}{24}Q_1^4 + Q_4 \\
B_5 &= \frac{1}{6}Q_1^3Q_2 + \frac{1}{2}Q_1Q_2^2 + \frac{1}{2}Q_1^2Q_3 + Q_3Q_2 + Q_1Q_4 + \frac{1}{120}Q_1^5 + Q_5
\end{aligned}$$

Agora escrevendo B_2 em função de B_1 e Q_2 tem-se :

$$B_2 = \frac{1}{2}Q_1^2 + Q_2 = \frac{1}{2}Q_1B_1 + Q_2. \quad (5.16)$$

Como $B_1 = Q_1$ a expressão acima resulta que :

$$B_2 = \frac{1}{2}Q_1B_1 + Q_2 \quad (5.17)$$

Para B_3 tem-se

$$\begin{aligned}
B_3 &= Q_1Q_2 + \frac{1}{6}Q_1^3 + Q_3 \\
&= \frac{1}{3}Q_1\left(\frac{1}{2}Q_1^2 + Q_2\right) + \frac{2}{3}Q_1Q_2 + Q_3 \\
B_3 &= \frac{1}{3}Q_1B_2 + \frac{2}{3}Q_2B_1 + Q_3
\end{aligned} \quad (5.18)$$

Para B_4

$$\begin{aligned}
B_4 &= \frac{1}{2}Q_2Q_1^2 + Q_3Q_1 + \frac{1}{2}Q_2^2 + \frac{1}{24}Q_1^4 + Q_4 \\
&= \frac{1}{4}Q_1(Q_2Q_1 + \frac{1}{6}Q_1^3 + Q_3) + \frac{2}{4}Q_2(\frac{1}{2}Q_1 + Q_2) + \frac{3}{4}Q_3Q_1 + Q_4 \\
B_4 &= \frac{1}{4}Q_1B_3 + \frac{2}{4}Q_2B_2 + \frac{3}{4}Q_3B_1 + Q_4
\end{aligned} \quad (5.19)$$

que em resumo implica :

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1 \\
B_1 &= Q_1 \\
B_2 &= \frac{1}{2}Q_1B_1 + Q_2 \\
B_3 &= \frac{1}{3}Q_1B_2 + \frac{2}{3}Q_2B_1 + Q_3 \\
B_4 &= \frac{1}{4}Q_1B_3 + \frac{2}{4}Q_2B_2 + \frac{3}{4}Q_3B_1 + Q_4
\end{aligned}$$

A partir deste fato conjectura-se o seguinte resultado :

CONJECTURA.

$$B_j = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j-1} i Q_i B_{j-i} + Q_j & j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.20)$$

Os coeficientes Q'_j s que aparecem em (5.20) são dados pela relação seguinte:

$$Q_r = \frac{\sum_{\alpha=1}^s B_{r+1}(1-\alpha)}{r(r+1)} \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.21)$$

agora pela propriedade dos polinômios de Bernoulli tem-se ;

$$B_{r+1}(1-\alpha) = (-1)^{r+1} B_{r+1}(\alpha) \quad (5.22)$$

Assim escrevendo (5.22) em (5.21) resulta que :

$$Q_r = \frac{\sum_{\alpha=1}^s B_{r+1}(\alpha)}{r(r+1)} \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.23)$$

onde os $B_{r+1}(\alpha)$ são os polinômios de Bernoulli que estão definidos no capítulo (2).

Das equações (5.9), (5.12), (5.20) e (5.21) a função de distribuição a ser avaliada fica:

$$F(\lambda, S, N) = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\exp(N-1)} \right)^S \prod_{\alpha=1}^S \frac{(N-1)^{N-1-\frac{S}{2}}}{(N-1-\alpha)!}$$

(5.24)

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{B_j}{(N-1)^j} \right) H(j, S, \lambda)$$

5.2 PROGRAMA COMPUTACIONAL.

Para avaliar a função que aparece na equação (5.24) considerou-se penas 16 termos da série, ficando portanto

$$F(\lambda, S, N) = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\exp(N-1)} \right)^S \prod_{\alpha=1}^S \frac{(N-1)^{(N-1-\frac{S}{2})}}{(N-1-\alpha)!}$$

$$\sum_{j=0}^{15} \left(\frac{B_j}{(N-1)^j} \right) H(j, S, \lambda) \quad (5.25)$$

O programa computacional para o cálculo numérico da expressão acima considerando valores de N, S inteiros positivos tal que $N \geq S + 1$ e $0 \leq \lambda \leq 1$ se fez em linguagem de programação TURBO PASCAL versão 5.0 . Este programa consiste de 22 funções ou subprogramas tal como aparece no anexo .

Utilizando este programa determinou-se as tabelas 1, 2 e 3 para $S = 2, 3$ e 4, onde S é o número de variáveis e N o tamanho de amostra.

Tabela I – Valores de λ para níveis de significância α ($P(x \leq \lambda) = \alpha$)

$$S = 2$$

$N \backslash \alpha$	0.01	0.05	0.10	0.90	0.95	0.99
3	0.00002166	0.00055552	0.00230284	0.45389099	0.59074707	0.80319824
4	0.00017919	0.00221806	0.00680294	0.51104126	0.63878174	0.82929688
5	0.00035324	0.00349751	0.00977325	0.53378601	0.65750732	0.83929443
6	0.00049295	0.00438976	0.01172714	0.54607239	0.66752930	0.84458008
7	0.00060091	0.00503120	0.01308975	0.55377808	0.67378540	0.84787598
8	0.00068531	0.00551071	0.01408920	0.55906372	0.67806396	0.85010986
9	0.00075245	0.00588112	0.01485214	0.56291504	0.68117676	0.85173340
10	0.00080700	0.00617561	0.01545258	0.56585083	0.68353882	0.85296631
11	0.00085201	0.00641499	0.01593742	0.56815796	0.68540039	0.85393066
12	0.00088978	0.00661316	0.01633682	0.57002563	0.68689575	0.85471191
13	0.00092182	0.00678024	0.01667175	0.57156067	0.68813477	0.85534668
14	0.00094948	0.00692253	0.01695633	0.57285156	0.68916626	0.85588379
15	0.00097351	0.00704536	0.01720123	0.57394714	0.69005127	0.85634766
16	0.00099449	0.00715256	0.01741409	0.57489014	0.69080811	0.85673828
17	0.00101318	0.00733032	0.01776619	0.57571411	0.69146729	0.85708008
18	0.00102959	0.00733032	0.01776619	0.57643433	0.69204102	0.85737305
19	0.00104446	0.00740471	0.01791234	0.57707214	0.69255371	0.85764160
20	0.00105782	0.00747147	0.01804543	0.57764282	0.69301147	0.85787354
30	0.00114250	0.00789108	0.01886902	0.58112717	0.69580078	0.85931396
40	0.00118504	0.00809822	0.01927338	0.58279883	0.69713593	0.86000061
50	0.00121040	0.00822182	0.01951332	0.58377838	0.69791794	0.86041260
60	0.00122757	0.00830383	0.01967239	0.58442307	0.69843292	0.86067200

S = número de variáveis; N = número de observações.

Tabela II – Valores de λ para níveis de significância α ($P(x \leq \lambda) = \alpha$)

$S = 3$

$N \backslash \alpha$	0.01	0.05	0.10	0.90	0.95	0.99
4	0.00000318	0.00000363	0.00000507	0.03842712	0.07923096	
5	0.00000363	0.00000738	0.00003523	0.05943039	0.10624084	0.25182617
6	0.00000402	0.00001970	0.00008499	0.07283096	0.12416351	0.27199463
7	0.00000444	0.00003422	0.00013556	0.08173401	0.13588257	0.28644287
8	0.00000490	0.00004819	0.00018133	0.08804153	0.14408020	0.29671509
9	0.00000541	0.00006086	0.00022128	0.09273407	0.15012268	0.30427490
10	0.00000598	0.00007210	0.00025579	0.09635818	0.15475189	0.31003540
11	0.00000658	0.00008201	0.00028564	0.09923935	0.15841431	0.31457397
12	0.00000718	0.00009074	0.00031155	0.10158493	0.16137848	0.31822632
13	0.00000778	0.00009846	0.00033419	0.10353226	0.16383240	0.32122070
14	0.00000835	0.00010532	0.00035410	0.10517334	0.16589355	0.32374512
15	0.00000889	0.00011142	0.00037170	0.10657410	0.16764923	0.32588013
16	0.00000940	0.00011690	0.00038737	0.10778671	0.16916321	0.32771973
17	0.00000986	0.00012182	0.00040140	0.10884415	0.17048248	0.32931763
18	0.00001030	0.00012627	0.00041402	0.10977524	0.17164062	0.33071411
19	0.00001070	0.00013033	0.00042545	0.11060196	0.17266785	0.33194946
20	0.00001107	0.00013401	0.00043581	0.11133942	0.17358765	0.33305054
30	0.00001364	0.00015837	0.00050346	0.11589432	0.17921829	0.33978271
40	0.00001505	0.00017117	0.00053850	0.11809570	0.18192673	0.34298706
50	0.00001594	0.00017905	0.00055988	0.11939430	0.18351746	0.34487915
60	0.00001654	0.00018437	0.00057428	0.12025070	0.18456650	0.34609985

S = número de variáveis; N = número de observações.

Tabela III – Valores de λ para níveis de significância α ($P(x \leq \lambda) = \alpha$)

$$S = 4$$

$N \backslash \alpha$	0.01	0.05	0.10	0.90	0.95	0.99
5	0.0000000109	0.0000000116	0.0000000214	0.00105380		
6	0.0000000119	0.0000000127	0.0000000617	0.00142651	0.00397339	0.02647656
7	0.0000000128	0.0000000208	0.0000001408	0.00223199	0.00554639	0.02492578
8	0.0000000137	0.0000000556	0.0000003314	0.00295825	0.00696606	0.02775000
9	0.0000000145	0.0000001040	0.0000005743	0.00357800	0.00815356	0.03047656
10	0.0000000155	0.0000001610	0.0000008434	0.00410315	0.00914331	0.03283203
11	0.0000000166	0.0000002233	0.0000011208	0.00454944	0.00997388	0.03482813
12	0.0000000179	0.0000002849	0.0000013956	0.00493152	0.01067725	0.03651953
13	0.0000000193	0.0000003469	0.0000016613	0.00526123	0.01127930	0.03796094
14	0.0000000210	0.0000004072	0.0000019146	0.00554810	0.01179883	0.03919922
15	0.0000000229	0.0000004650	0.0000021539	0.00579944	0.01225195	0.04027344
16	0.0000000249	0.0000005202	0.0000023790	0.00602148	0.01264990	0.04121094
17	0.0000000270	0.0000005724	0.0000025901	0.00621887	0.01300146	0.04203418
18	0.0000000293	0.0000006218	0.0000027877	0.00639526	0.01331494	0.04276562
19	0.0000000315	0.0000006683	0.0000029727	0.00655408	0.01359619	0.04341406
20	0.0000000337	0.0000007122	0.0000031458	0.00669751	0.01384912	0.04400000
30	0.0000000522	0.0000010364	0.0000043937	0.00761807	0.01545715	0.04765320
40	0.0000000643	0.0000012301	0.0000051195	0.00808484	0.01626205	0.04944611
50	0.0000000724	0.0000013571	0.0000055887	0.00836658	0.01674461	0.05051422
60	0.0000000782	0.0000014462	0.0000059158	0.00855494	0.01706600	0.05121994

S = número de variáveis; N = número de observações.

Bibliografia

- [1] Anderson, T.W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. Second Edition. John Wiley, New York.
- [2] Box, G.E.P. (1949). A general distribution theory for a class of likelihood criteria. *Biometrika*, 36, 317–346.
- [3] Consul, P.C. (1966). On some inverse Mellin integral transforms, *Bull. Classe Sciences*, 52, 547–561.
- [4] Doetsch, G. (1971). *Guide to the applications of the Laplace and z -transformations*. Van Nostrand-Reinhold, New York.
- [5] Erdélyi, A. (1953). *Higher Transcendental Functions*. Vol. I, Mc Graw-Hill, New York.
- [6] Farrell H. (1985). *Multivariate Calculation*. Springer-Verlag, New York.
- [7] Giri, N. (1965). On the complex analogues of T^2 and R^2 tests. *Ann. Math. Statist.* 36, 664–670.
- [8] Giri, N. (1972). On testing problems concerning mean of multivariate complex Gaussian distribution. *Ann. Inst. Statist. Math.* 24, 245–250.

- [9] Goodman, N.R. (1963). Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution. *Ann. Math. Statist.* 34, 152–177.
- [10] Khatri, C.G. (1965). Classical statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution. *Ann. Math. Statist.* 36, 98–144.
- [11] Khatri, C.G. (1965a). A test reality of a covariance matrix in certain complex Gaussian distributions. *Ann. Math. Statist.* 36, 115–119.
- [12] Khatri, C.G. (1970). On the moments of traces of two matrices in three situations for complex multivariate normal populations. *Sankhya* Ser. A32, 65–80.
- [13] Krishnaiah, P.R., Lee, J.C. and Chang, T.C. (1976). The distribution of the likelihood ratio statistics for tests of certain covariance structures of complex multivariate normal populations. *Biometrika* 63, 3, 543–549.
- [14] Luke, Y.L. (1969). *The Special Functions and their Approximations*, Vol. I. Academic Press, New York.
- [15] Manual de Referências do Turbo PASCAL. Versão 5.0.
- [16] Mathai, A.M. (1970). *Applications of Generalized Special Functions in Statistics*. Monograph. Indian Statistical Institute and McGill University.
- [17] Mathai, A.M. (1971). An expansion of Meijer's G -function in the logarithmic case with applications. *Math. Nachr.* 48, 129–139.
- [18] Mathai, A.M. and Rathie, P.N. (1970). An expansion of Meijer's G -function and its application to statistical distributions. *Acad. Roy. Belg. Sci.* (5), 1073–1084.

- [19] Mathai, A.M. and Rathie, P.N. (1971). The exact distributions of Wilk's criterion. *Ann. Math. Statist.*, 42, 1010–1019.
- [20] Nagarsenker, B.N. and Pillai, K.C.S. (1973). Distribution of the likelihood ratio for testing a hypothesis specifying a covariance matrix. *Biometrika* 60, 359–364.
- [21] Nagarsenker, B.N. and Das, M.M. (1975). Exact distribution of sphericity criterion in the complex case and its percentage points. *Communications in Statistics* 4, 363–374.
- [22] Nair, U.S. (1938). The application of the moment function in the study of distribution laws in statistics. *Biometrika* 30, 274–294.
- [23] Nair, U.S. (1940). The application of factorial series in the study of distribution laws in statistics. *Sankhyá*, 5, 175.
- [24] Pillai, K.C.S. and Nagarsenker, B.N. (1971). On the distribution of the sphericity test criterion in classical and complex normal populations having unknown covariance matrices. *Ann. Math. Statist.* 42, 764–767.
- [25] Rainville, C. D. (1960). *Special Functions*. Bronx Chelsa.
- [26] Rathie, P.N. (1989). On a Generalization of the H Function and its Applications.
- [27] Rathie, P.N. (1989). Generalized Hypergeometric Functions and Exact Distributions. *Amer. J. Math. and Manag. Sci.* 9, (a ser publicado).
- [28] Riordan, J., (1968). *Combinatorial Identities*. John Wiley & Sons, Inc. New York.
- [29] Sneddon, I.N. (1972). *The use of Integral transforms*, McGraw–Hill.
- [30] Springer, M. D. (1979). *The Algebra of Randon Variables*. New York, Wiley.

- [31] Srivastava, M.S. (1965). On the complex Wishart distribution. *Ann. Math. Statist.* 36, 313–315.
- [32] Stewart, I. (1987). *Complex Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [33] Titchmarsh, E.C. (1948). *Introduction to the Theory of Fourier Integral*, Oxford University Press, London.
- [34] Wahba, G. (1968). On the distributions of some statistics useful in the analysis of jointly stationary time series. *Ann. Math. Statist.* 39, 1849–1862.
- [35] Wahba, G. (1971). Some tests of independence for stationary multivariate time series. *J. Roy Statist. Soc. Ser. B* 33, 153–166.
- [36] Wooding, R.A. (1956). The multivariate distribution of complex normal variables. *Biometrika*, 43, 212–215.

ANEXO

```

(*)-----*)
(*) PROGRAM :   SERIECHI                               *)
(*) DATE    :   JULY, 1989                             *)
(*) LOCAL   :   TMECC - UNICAMP                         *)
(*) AUTHOR  :   CIRILO ALVAREZ ROJAS                    *)
(*) COMPUTATIONAL ASSISTANT :   FERNANDO RONCAL PAJARES  *)
(*)-----*)

```

```

PROGRAM SERIECHI (INPUT,OUTPUT);

```

```

(*) OPCAO DE IMPRESAO *)

```

```

    uses printer;

```

```

VAR

```

```

    (*) DEFINICAO DE VARIAVEIS *)

```

```

    P,F,R,QQ,L: DOUBLE;
    R1,R2,R3,R4,R5,P1,P2: DOUBLE;
    CI,I,J,JJF,N,NN,SS,A : integer;
    Q : ARRAY[1..15] OF DOUBLE;
    LL : ARRAY[1..21] OF DOUBLE;
    BB : ARRAY[0..15] OF EXTENDED;
    LL1MAX : ARRAY[1..30] OF DOUBLE;
    LL1MIN : ARRAY[1..30] OF DOUBLE;
    LL2MAX : ARRAY[1..30] OF DOUBLE;
    LL2MIN : ARRAY[1..30] OF DOUBLE;
    LL3MAX : ARRAY[1..30] OF DOUBLE;
    LL3MIN : ARRAY[1..30] OF DOUBLE;
    YXY : ARRAY[1..6] OF DOUBLE;
    X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7,X8,V1,V2,V3 : DOUBLE;
    X9,X10,X11,X12,X13,X14 : EXTENDED;
    SALIDA : TEXT;

```

```

(*) FUNCAO QUE CALCULA O FATORIAL DE UM NUMERO *)

```

```

FUNCTION FAT(X: LONGINT): DOUBLE;
VAR

```

```

    I: LONGINT;
    TEM : DOUBLE;
BEGIN

```

```

    IF X = 0 THEN
        FAT := 1

```

```

    ELSE

```

```

        BEGIN

```

```

            TEM := 1;

```

```

            FOR I := 1 TO X DO

```

```

                TEM := TEM*I;

```

```

            FAT := TEM;

```

```

        END;

```

```

END;

```

C* FUNCAO QUE CALCULA OS POLINOMIOS DE BERNOULLI *

```

FUNCTION BERNO (M: INTEGER; X : REAL) : DOUBLE;
BEGIN

```

```

    CASE M OF

```

```

        2: BERNO := (1/6)*(1-6*X+6*X*X);

```

```

        3: BERNO := (1/2)*(X-3*X*X+2*EXP(3*LN(X)));

```

```

        4: BERNO := (1/30)*( -1+30*(X*X)-60*EXP(3*LN(X))+30*EXP(4*LN(X)));

```

```

        5: BERNO := (1/6)*( -X+10*EXP(3*LN(X))-15*EXP(4*LN(X))
            +6*EXP(5*LN(X)));

```

```

        6: BERNO := (1/42)*(1-21*(X*X)+105*EXP(4*LN(X))-126*EXP(5*LN(X))
            +42*EXP(6*LN(X)));

```

7: BERNO := (1/6)*(X-7*EXP(3*LNC(X))+21*EXP(5*LNC(X))-21*EXP(6*LNC(X))+6*EXP(7*LNC(X)));

8: BERNO := (1/30)*(C-1+20*(X*X)-70*EXP(4*LNC(X))+140*EXP(6*LNC(X))-120*EXP(7*LNC(X))+30*EXP(8*LNC(X)));

9: BERNO := (1/10)*(C-3*X+20*EXP(3*LNC(X))-42*EXP(5*LNC(X))+60*EXP(7*LNC(X))-45*EXP(8*LNC(X))+10*EXP(9*LNC(X)));

10: BERNO := (1/66)*(C-99*(X*X)+330*EXP(4*LNC(X))-462*EXP(6*LNC(X))+495*EXP(8*LNC(X))-330*EXP(9*LNC(X))+66*EXP(10*LNC(X)));

11: BERNO := (1/6)*(C-5*X-33*EXP(3*LNC(X))+66*EXP(5*LNC(X))-66*EXP(7*LNC(X))+55*EXP(9*LNC(X))-33*EXP(10*LNC(X))+6*EXP(11*LNC(X)));

12: BERNO := (1/2730)*(C-691+13650*(X*X)-45045*EXP(4*LNC(X))+60060*EXP(6*LNC(X))-45045*EXP(8*LNC(X))+30030*EXP(10*LNC(X))-16380*EXP(11*LNC(X))+2730*EXP(12*LNC(X)));

13: BERNO := (1/210)*(C-691*X+4550*EXP(3*LNC(X))-9009*EXP(5*LNC(X))+8580*EXP(7*LNC(X))-5005*EXP(9*LNC(X))+2730*EXP(11*LNC(X))-1365*EXP(12*LNC(X))+210*EXP(13*LNC(X)));

14: BERNO := (1/30)*(C-35-691*(X*X)+2275*EXP(4*LNC(X))-3003*EXP(6*LNC(X))+2145*EXP(8*LNC(X))-1001*EXP(10*LNC(X))+455*EXP(12*LNC(X))-210*EXP(13*LNC(X))+30*EXP(14*LNC(X)));

15: BERNO := (1/6)*(C-105*X-691*EXP(3*LNC(X))+1365*EXP(5*LNC(X))-1287*EXP(7*LNC(X))+715*EXP(9*LNC(X))-273*EXP(11*LNC(X))+105*EXP(13*LNC(X))-45*EXP(14*LNC(X))+6*EXP(15*LNC(X)));

16: BERNO := (1/510)*(C-3617+71400*SQR(X)-234940*EXP(4*LNC(X))+309400*EXP(6*LNC(X))-218790*EXP(8*LNC(X))

```

+ 57240*EXPC10*LNCX)) - 30940*EXPC12*LNCX))
+ 10200*EXPC14*LNCX)) - 4080*EXPC15*LNCX))
+ 510*EXPC16*LNCX));

```

```

END;

```

```

END;

```

```

(* PROCEDIMENTO QUE CALCULA O VETOR Q *)

```

```

PROCEDURE CALQQCM:INTEGER);

```

```

VAR

```

```

  I : integer;

```

```

  P : longint;

```

```

  SUMA: double;

```

```

BEGIN

```

```

  FOR P := 1 TO 15 DO

```

```

    BEGIN

```

```

      SUMA := 0.0;

```

```

      FOR I := 1 TO M DO

```

```

        BEGIN

```

```

          SUMA := SUMA + BERNOC(P+1,I);

```

```

          Q[P] := SUMA/(P*(P+1));

```

```

        END;

```

```

      END;

```

```

END;

```

```

(* FUNCOES QUE GENERAO OS COEFICIENTES BJ *)

```

```

FUNCTION BOCI:INTEGER):DOUBLE;

```

```

BEGIN

```

```

  BO := 1;

```

```

END;

```

```
FUNCTION B1(I:INTEGER): DOUBLE;
```

```
BEGIN
```

```
    B1 := Q[1];
```

```
END;
```

```
FUNCTION B2(I:INTEGER): DOUBLE;
```

```
BEGIN
```

```
    X1 := B1(I);
```

```
    B2 := (1/2)*X1*Q[1] + Q[2];
```

```
END;
```

```
FUNCTION B3(I:INTEGER): DOUBLE;
```

```
BEGIN
```

```
    X1 := B1(I);
```

```
    X2 := B2(I);
```

```
    B3 := (1/3)*X2*Q[1] + (2/3)*X1*Q[2] + Q[3];
```

```
END;
```

```
FUNCTION B4(I:INTEGER) : DOUBLE;
```

```
BEGIN
```

```
    X3 := B3(I);
```

```
    X2 := B2(I);
```

```
    X1 := B1(I);
```

```
    B4 := (1/4)*X3*Q[1] + (2/4)*X2*Q[2] + (3/4)*X1*Q[3] + Q[4];
```

```
END;
```

```
FUNCTION B5(I:INTEGER) : DOUBLE;
```

```
BEGIN
```

```
    X4 := B4(I);
```

```
    X3 := B3(I);
```

```
    X2 := B2(I);
```

```
    X1 := B1(I);
```

```
    B5 := (1/5)*X4*Q[1]      + (2/5)*X3*Q[2] + (3/5)*X2*Q[3]  
          + (4/5)*X1*Q[4]    + Q[5];
```

```
END;
```

```

FUNCTION B6(I:INTEGER) : DOUBLE;
BEGIN
    X5 := B5(I);
    X4 := B4(I);
    X3 := B3(I);
    X2 := B2(I);
    X1 := B1(I);
    B6 := (1/6)*X5*Q[1] + (2/6)*X4*Q[2] + (3/6)*X3*Q[3]
          + (4/6)*X2*Q[4] + (5/6)*X1*Q[5] + Q[6];
END;

```

```

FUNCTION B7(I:INTEGER) : DOUBLE;
BEGIN
    X6 := B6(I);
    X5 := B5(I);
    X4 := B4(I);
    X3 := B3(I);
    X2 := B1(I);
    B7 := (1/7)*Q[1]*X6 + (2/7)*Q[2]*X5 + (3/7)*Q[3]*X4
          + (4/7)*Q[4]*X3 + (5/7)*Q[5]*X2 + (6/7)*Q[6]*X1
          + Q[7];
END;

```

```

FUNCTION B8(I:INTEGER) : DOUBLE;
BEGIN
    X7 := B7(I);
    X6 := B6(I);
    X5 := B5(I);
    X4 := B4(I);
    X3 := B3(I);
    X2 := B2(I);
    X1 := B1(I);
    B8 := (1/8)*Q[1]*X7 + (2/8)*Q[2]*X6 + (3/8)*Q[3]*X5
          + (4/8)*Q[4]*X4 + (5/8)*Q[5]*X3 + (6/8)*Q[6]*X2

```

+ (7/8)*Q[7]*X1 + Q[8];

END;

FUNCTION B9C1:INTEGER0 : EXTENDED;

BEGIN

X8 := B8C1;

X7 := B7C1;

X6 := B6C1;

X5 := B5C1;

X4 := B4C1;

X3 := B3C1;

X2 := B2C1;

X1 := B1C1;

B9 := (1/9)*Q[1]*X8 + (2/9)*Q[2]*X7 + (3/9)*Q[3]*X6
+ (4/9)*Q[4]*X5 + (5/9)*Q[5]*X4 + (6/9)*Q[6]*X3
+ (7/9)*Q[7]*X2 + (8/9)*Q[8]*X1 + Q[9];

END;

FUNCTION B10C1:INTEGER0 : EXTENDED;

BEGIN

X9 := B9C1;

X8 := B8C1;

X7 := B7C1;

X6 := B6C1;

X5 := B5C1;

X4 := B4C1;

X3 := B3C1;

X2 := B2C1;

X1 := B1C1;

B10 := (1/10)*Q[1]*X9 + (2/10)*Q[2]*X8 + (3/10)*Q[3]*X7
+ (4/10)*Q[4]*X6 + (5/10)*Q[5]*X5 + (6/10)*Q[6]*X4
+ (7/10)*Q[7]*X3 + (8/10)*Q[8]*X2 + (9/10)*Q[9]*X1
+ Q[10];

END;

```
FUNCTION B11C1:INTEGER0 : EXTENDED;
```

```
BEGIN
```

```
    X10 := B10C1;
```

```
    X9 := B9C1;
```

```
    X8 := B8C1;
```

```
    X7 := B7C1;
```

```
    X6 := B6C1;
```

```
    X5 := B5C1;
```

```
    X4 := B4C1;
```

```
    X3 := B3C1;
```

```
    X2 := B2C1;
```

```
    X1 := B1C1;
```

```
    B11 := (1/11)*Q[1]*X10 + (2/11)*Q[2]*X9 + (3/11)*Q[3]*X8  
           + (4/11)*Q[4]*X7 + (5/11)*Q[5]*X6 + (6/11)*Q[6]*X5  
           + (7/11)*Q[7]*X4 + (8/11)*Q[8]*X3 + (9/11)*Q[9]*X2  
           + (10/11)*Q[10]*X1 + Q[11];
```

```
END;
```

```
FUNCTION B12C1:INTEGER0 : EXTENDED;
```

```
BEGIN
```

```
    X11 := B11C1;
```

```
    X10 := B10C1;
```

```
    X9 := B9C1;
```

```
    X8 := B8C1;
```

```
    X7 := B7C1;
```

```
    X6 := B6C1;
```

```
    X5 := B5C1;
```

```
    X4 := B4C1;
```

```
    X3 := B3C1;
```

```
    X2 := B2C1;
```

```
    X1 := B1C1;
```

```
    B12 := (1/12)*Q[1]*X11 + (2/12)*Q[2]*X10 + (3/12)*Q[3]*X9  
           + (4/12)*Q[4]*X8 + (5/12)*Q[5]*X7 + (6/12)*Q[6]*X6  
           + (7/12)*Q[7]*X5 + (8/12)*Q[8]*X4 + (9/12)*Q[9]*X3
```

```

        + (10/12)*Q[10]*X2 + (11/12)*Q[11]*X1 + Q[12];
END;

FUNCTION B13(I:INTEGER) : EXTENDED;
BEGIN
    X12 := B12(I);
    X11 := B11(I);
    X10 := B10(I);
    X9  := B9(I);
    X8  := B8(I);
    X7  := B7(I);
    X6  := B6(I);
    X5  := B5(I);
    X4  := B4(I);
    X3  := B3(I);
    X2  := B2(I);
    X1  := B1(I);
    B13 := (1/13)*Q[1]*X12 + (2/13)*Q[2]*X11 + (3/13)*Q[3]*X10
           + (4/13)*Q[4]*X9  + (5/13)*Q[5]*X8  + (6/13)*Q[6]*X7
           + (7/13)*Q[7]*X6  + (8/13)*Q[8]*X5  + (9/13)*Q[9]*X4
           + (10/13)*Q[10]*X3 + (11/13)*Q[11]*X2 + (12/13)*Q[12]*X1
           + Q[13];
END;

FUNCTION B14(I:INTEGER) : EXTENDED;
BEGIN
    X13 := B13(I);
    X12 := B12(I);
    X11 := B11(I);
    X10 := B10(I);
    X9  := B9(I);
    X8  := B8(I);
    X7  := B7(I);
    X6  := B6(I);
    X5  := B5(I);

```

```

X4 := B4C1D;
X3 := B3C1D;
X2 := B2C1D;
X1 := B1C1D;
B14 := (1/14)*Q[1]*X13 + (2/14)*Q[2]*X12 + (3/14)*Q[3]*X11
      + (4/14)*Q[4]*X10 + (5/14)*Q[5]*X9 + (6/14)*Q[6]*X8
      + (7/14)*Q[7]*X7 + (8/14)*Q[8]*X6 + (9/14)*Q[9]*X5
      + (10/14)*Q[10]*X4 + (11/14)*Q[11]*X3 + (12/14)*Q[12]*X2
      + (13/14)*Q[13]*X1 + Q[14];
END;
FUNCTION B15C1:INTEGER) : EXTENDED;
BEGIN
X14 := B14C1D;
X13 := B13C1D;
X12 := B12C1D;
X11 := B11C1D;
X10 := B10C1D;
X9 := B9C1D;
X8 := B8C1D;
X7 := B7C1D;
X6 := B6C1D;
X5 := B5C1D;
X4 := B4C1D;
X3 := B3C1D;
X2 := B2C1D;
X1 := B1C1D;
B15 := (1/15)*Q[1]*X14 + (2/15)*Q[2]*X13 + (3/15)*Q[3]*X12
      + (4/15)*Q[4]*X11 + (5/15)*Q[5]*X10 + (6/15)*Q[6]*X9
      + (7/15)*Q[7]*X8 + (8/15)*Q[8]*X7 + (9/15)*Q[9]*X6
      + (10/15)*Q[10]*X5 + (11/15)*Q[11]*X4 + (12/15)*Q[12]*X3
      + (13/15)*Q[13]*X2 + (14/15)*Q[14]*X1 + Q[15];
END;

```

(* FUNCAO QUE INVOKA A FUNCAO DE CALCULO DO BJ *)

```
FUNCTION BCJ (INTEGER): DOUBLE;
```

```
BEGIN
```

```
  CASE J OF
```

```
    0: B := B0 (1);
```

```
    1: B := B1 (1);
```

```
    2: B := B2 (1);
```

```
    3: B := B3 (1);
```

```
    4: B := B4 (1);
```

```
    5: B := B5 (1);
```

```
    6: B := B6 (1);
```

```
    7: B := B7 (1);
```

```
    8: B := B8 (1);
```

```
    9: B := B9 (1);
```

```
   10: B := B10 (1);
```

```
   11: B := B11 (1);
```

```
   12: B := B12 (1);
```

```
   13: B := B13 (1);
```

```
   14: B := B14 (1);
```

```
   15: B := B15 (1);
```

```
  END;
```

```
END;
```

```
(* PROCEDIMENTO QUE CALCULA O VETOR B *)
```

```
PROCEDURE CALBB;
```

```
VAR
```

```
  I : integer;
```

```
BEGIN
```

```
  FOR J := 0 TO 15 DO
```

```
    BB (J) := BCJ;
```

```
END;
```

```
(* FUNCAO QUE CALCULA GAMMA DE UM NUMERO REAL *)
```

```
FUNCTION TATCC(double) : DOUBLE;
```

```

VAR
  P1,P2,P3 : double;
BEGIN
  P1 := EXP((C-1/20)*LN(C));
  P2 := EXP(-C);
  P3 := ( 1 + (1/(12*C)) + (1/(288*C*C)) - (139/(51840*C*C*C))
        - (571/(2488320*C*C*C*C)) );
  TAT := P1*P2*P3*SQRT(2*3.141592654);
END;

```

(* FUNCAO QUE CALCULA A DISTRIBUCAO DE LAMBDA *)

```

FUNCTION HC(J,S: INTEGER; L: double) : DOUBLE;

```

```

VAR
  K : INTEGER;
  T,C,R,P1,R2,R3,R4 : double;
BEGIN
  C := J + (S*S)/2;
  T := (1/TAT(C));
  R := 0.0;
  FOR K := 0 TO 40 DO
    BEGIN
      R3 := C + K ;
      IF K = 0 THEN
        R1 := 1
      ELSE
        R1 := R1*(C-1);
      R2 := EXP(R3*LN(-LN(L)));
      R4 := FACT(K);
      R := R + ((R1*R2)/(R4*R3));
    end;
  H := 1 - T*R ;
END;

```

(* FUNCAO QUE CALCULA A PROBABILIDADE ACUMULATIVA PARA *)

```

C* LAMBDA, N, S                                     *)
FUNCTION FFCN,S : INTEGER; LAMDA: DOUBLED: double;
BEGIN
    QQ := EXPC(S*LNC SQRT(2*3.141592654)/EXP(N - 100);
    P := 1;
C* Calculo de cada F para cada S                    *)

    FOR A := 1 TO S DO
        BEGIN
            P1 := EXP(CN-1-S/2)*LNC(N - 100);
            P2 := FFCN-A-10;
            P := P*(P1/P2);
        END;
    R := 0.0;
    FOR J := 0 TO 15 DO
        BEGIN
            P1 := BB [J];
            R2 := EXPCJ*LNC(N - 100);
            R5 := R1/R2;
            R3 := HCF,S,LAMDA;
            R := R + R5*R3;
        END;
    FF := QQ*P*R;
END;

C* FUNCAO QUE CALCULA O VALOR DE LAMBDA PARA UMA *)
C* PROBABILIDADE ESPECIFICA                        *)
FUNCTION INVERSACNNN,SSS: INTEGER; MAX,MIN,YY: DOUBLED: double;
VAR
    AUXMEDIA,ERROR,ayuda : DOUBLE;
BEGIN
    AUXMEDIA := (MAX + MIN )/2;
    ajuda := FFCNNN,SSS,AUXMEDIA;

```

```

ERROR := YY - ayuda;
WHILE ABSCEERROR > 1.0E-6 DO
BEGIN
    IF ERROR < 0.0 THEN
        MAX := AUXMEDIA;
    IF ERROR > 0.0 THEN
        MIN := AUXMEDIA;
    AUXMEDIA := (MAX + MIN)/2;
    ajuda := FFCNNN,SSS,AUXMEDIA;
    ERROR := YY - ajuda;
END;
INVERSA := AUXMEDIA;
END;

```

(* M O D U L O P R I N C I P A L *)

```

BEGIN
    (* INICIALIZACAO DE VARIAVEIS *)

    SS := 2;
    FOR CI := 1 TO 15 DO
        Q(CI) := 0.0;
    LL1MAX(SS + 1) := 0.5;
    LL1MIN(SS + 1) := 0.4;
    LL2MAX(SS + 1) := 0.6;
    LL2MIN(SS + 1) := 0.5;
    LL3MAX(SS + 1) := 0.9;
    LL3MIN(SS + 1) := 0.8;
    FOR NN := SS + 2 TO 30 DO
        BEGIN
            LL1MAX(NN) := 0.6;
            LL1MIN(NN) := 0.5;

```