Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Unicidade de Soluções Fracas das Equações de Navier-Stokes para Fluidos Compressíveis

por

Ariane Piovezan Entringer

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos

Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES e da FAPESP (Processo n° 2007/01726-4).

UNICIDADE DE SOLUÇÕES FRACAS DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES PARA FLUIDOS COMPRESSÍVEIS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Ariane Piovezan Entringer** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 05 de junho de 2009

Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos
Orientador

Banca Examinadora:

1 Marcelo Martins dos Santos

2 José Luiz Boldrini

3 José Ruidival Soares dos Santos Filho

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **MESTRE em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Crisllene Queiroz Custódio – CRB8 / 7966

Entringer, Ariane Piovezan

En87u Unicidade de soluções fracas das equações de Navier-Stokes para fluidos compressíveis / Ariane Piovezan Entringer -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : Marcelo Martins dos Santos

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Navier-Stokes, Equações de. 2. Unicidade. 3. Solução fraca. 4. Fluidos compressíveis. I. Santos, Marcelo Martins dos. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

(cqc/imecc)

Título em inglês: Uniqueness of weak solutions of the Navier-Stokes equations of compressible flow.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Navier-Stokes equations. 2. Uniqueness. 3. Weak solution. 4. Compressible flow.

Área de concentração: Análise

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. José Luiz Boldrini (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho (DM-UFSCar)

Data da defesa: 05/06/2009

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 05 de junho de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS

Prof. (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Prof. (a). Dr (a). JOSÉ RUIDIVAL SOARES DOS SANTOS FILHO

Aos meus pais, Rita e João e
à minha irmã, Aline.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por todas as portas que Ele abriu, por mais esta conquista e por Ele estar sempre presente na minha vida.

Aos meus pais, João e Rita, pela educação que me deram, pelo carinho, compreensão e incentivo em todos os momentos.

À minha irmã, Aline, pela amizade, pelo carinho e pelo apoio.

Ao meu noivo, Bruno, pelo amor, pela compreensão, pelo apoio e pelo incentivo desde o inicio do mestrado.

Ao meu orientador, Prof. Marcelo Martins dos Santos, pelo trabalho de orientação, pelas dúvidas tiradas e pela paciência.

Ao Prof. David Hoff, autor do artigo [7], por auxiliar em algumas questões referente ao trabalho proposto e pela atenção.

Aos professores do IMECC/ UNICAMP e aos professores do DMA/ UFV, em especial ao Prof. Olímpio H. Miyagaki e à Profa. Marinês Guerreiro por me orientarem na graduação, pela disponibilidade e, acima de tudo, pela amizade.

Aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação do IMECC/ UNICAMP pelos serviços prestados e pelas palavras de incentivo.

A todos os amigos que fiz na UFV durante a graduação e também aos amigos que fiz na UNICAMP durante o mestrado.

Aos velhos amigos, que raramente vejo, mas quando nos encontramos a alegria e as conversas são como antes.

À CAPES e à FAPESP pelo apoio financeiro.

Finalmente, agradeço a todos aqueles que estiveram comigo durante estes dois anos e que, direta ou indiretamente, contribuiram e fizeram parte desta conquista.

"... o que proporciona o máximo prazer não é o conhecimento e, sim, a aprendizagem; não é a posse, mas a aquisição; não é a presença, mas o ato de atingir a meta."

Carl Friedrich Gauss

Resumo

Este trabalho consiste de uma exposição detalhada do resultado provado no artigo *Uniqueness of Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations of Multidimensional, Compressible Flow* de D. Hoff (SIAM J. Math. Anal - 2006) sobre a unicidade de solução fraca e a dependência contínua da solução fraca nos dados iniciais para as equações de Navier-Stokes para fluidos compressíveis

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ (\rho u^j)_t + \operatorname{div}(\rho u^j u) + P(\rho)_{x^j} = \mu \Delta u^j + \lambda \operatorname{div} u_{x^j} + \rho f^j \end{cases}$$

para $x \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ e $t > 0$, com dado inicial

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0),$$

onde ρ e $u = (u^1, ..., u^n)$ são funções de x e t, representando a densidade e a velocidade do fluxo, respectivamente, $P = P(\rho)$ é a pressão, f é uma força externa dada e $\mu > 0$ e $\lambda \geq 0$ são constantes de viscosidade.

Abstract

This dissertation is concerned with a detailed exposition of the result proved in the article *Uniqueness of Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations of Multidimensional, Compressible Flow* of D. Hoff (SIAM J. Math. Anal - 2006) about uniqueness and continuous dependence on initial data of weak solutions of the Navier-Stokes equations of compressible flow

$$\begin{cases} \rho_t + \mathrm{div}\,(\rho u) = 0 \\ (\rho u^j)_t + \mathrm{div}\,(\rho u^j u) + P(\rho)_{x^j} = \mu\Delta u^j + \lambda \mathrm{div}\, u_{x^j} + \rho f^j \end{cases}$$

for $x \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ e $t > 0$, with initial data

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0),$$

where ρ and $u = (u^1, ..., u^n)$ are functions of x and t representing flow density and velocity, respectively; $P = P(\rho)$ is the pressure, f is a given external force, $\mu > 0$ and $\lambda \geq 0$ are constant viscosities.

ÍNDICE

Introdução

As equações de Navier-Stokes são muito importantes, pois descrevem a física de muitos fenômenos de interesse acadêmico e prático. Elas descrevem o movimento de fluidos, como líquidos e gazes e podem ser utilizadas para modelar fenômenos meteorológicos, movimentos de correntes oceânicas e fluxo da água (ou outro fluido) em uma tubulação. Estas equações são utilizadas na criação de aviões e automóveis, no estudo do fluxo sanguíneo, na análise dos efeitos da poluição, entre outras aplicações.

Estas equações são também de grande interesse em seu sentido puramente matemático. Estas equações formam um sistema de equações diferenciais acopladas e poderia, em teoria, ser resolvido para um dado problema de fluxo, utilizando métodos de cálculo. Mas, na prática, estas equações são muito difíceis de se resolver analiticamente. Surpreende-nos o fato de que sobre estas equações com tantas aplicações práticas e cotidianas não se conhecem propriedades básicas, como por exemplo a existência de solução suave global para as equações para fluidos incompressíveis para o caso tridimensional, o que hoje ainda é um problema em aberto.

Embora estas equações vem sendo estudadas desde o século XIX, a sua compreensão ainda é pequena. No entanto, muitos matemáticos vem trabalhando na tentativa de obter soluções suaves para tais equações e a estudar a unicidade e a regularidade para elas.

Neste trabalho vamos estudar os resultados provados por David Hoff no artigo [7] os quais garantem a unicidade de solução fraca e a dependência contínua nos dados iniciais para as equações de Navier-Stokes para fluidos compressíveis

$$\begin{cases} \rho_t + \text{div}\,(\rho u) = 0 \\ (\rho u^j)_t + \text{div}\,(\rho u^j u) + P(\rho)_{x^j} = \mu \Delta u^j + \lambda \text{div}\, u_{x^j} + \rho f^j \end{cases}$$

para $x \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ e $t > 0$, com dado inicial

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0),$$

onde ρ e $u = (u^1, ..., u^n)$ são funções de x e t, representando a densidade e a velocidade do fluxo, respectivamente, $P = P(\rho)$ é a pressão, f é uma força externa dada e $\mu > 0$ e $\lambda \geq 0$ são constantes de viscosidade.

Para tanto dividimos esta Dissertação em três capítulos.

No Capítulo 1 apresentaremos conceitos e resultados que são fundamentais para este trabalho. Este capítulo abordará a definição e resultados sobre regularização de uma função, teoria de distribuição, espaços de Sobolev e suas propriedades, aproximação de funções de Sobolev por funções suaves, alguns resultados sobre as Desigualdades de Sobolev e mais alguns resultados gerais que serão necessários nos capítulos seguintes.

No Capítulo 2 introduziremos alguns conceitos físicos e faremos a dedução das equações de Navier-Stokes para fluidos compressíveis com a quais estamos trabalhando, para maior entendimento das mesmas e também de sua interpretação física.

No Capítulo 3 veremos propriedades das trajetória das partículas $X(y, t, s)$ e resultados sobre as soluções fracas para as equações de Navier-Stokes descritas acima. Estudaremos um resultado que nos mostra a dependência contínua nos dados iniciais, outro sobre a conservação de massa do fluido e por fim, veremos o resultado principal, onde compararemos duas soluções fracas para mostrar a unicidade de solução fraca para as equações de Navies-Stokes citadas acima.

CAPÍTULO 1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo apresentaremos conceitos e resultados sobre funções que são pré-requisitos para este trabalho. Veremos aqui fatos sobre regularização de uma função, teoria de distribuição, aproximação por funções suaves, espaços de Sobolev e Desigualdades de Sobolev. Toda esta teoria será usada como ferramenta para o capítulo 3. A referência principal para este capítulo é o livro de William P. Ziemer [20]. Usamos também outras referências, como exemplo, [15] e [11].

1.1 Regularização

Seja φ uma função de valores reais, não-negativos em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1, \quad supt \;\; \varphi \subset \bar{B}(0,1).$$

Um exemplo de uma função com estas propriedades é

$$\varphi(x) = \begin{cases} C\, exp\left(\dfrac{-1}{1-|x^2|}\right), se|x| < 1 \\ 0, |x| \geq 1 \end{cases},$$

onde C é escolhido de forma que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$.

Definição 1.1 *Dado $\varepsilon > 0$ definimos $\varphi_\varepsilon(x) \equiv \varepsilon^{-n}\varphi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$. φ_ε é chamada de regularizador (ou mollifier). Temos que φ_ε pertence a C_0^∞ e supt $\varphi_\varepsilon \subset \bar{B}(0,\varepsilon)$.*

A convolução

$$u_\varepsilon(x) \equiv \varphi_\varepsilon * u(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)dy,$$

definida para funções u tais que a integral do lado direito tenha sentido, é chamada de regularização de u.

Antes de enunciarmos um resultado importante sobre regularização, daremos uma definição que será necessária para o teorema que se segue.

Definição 1.2 *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de Lebesgue de f se* $\fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy \to 0$, *quando* $r \to 0$.

Observação 1.1 *Se f é contínua em x, então x é um ponto de Lebesgue de f. De fato, dado $\eta > 0$, temos que existe $\delta > 0$ tal que $|u(y) - u(x)| < \eta$ sempre que $|y - x| < \delta$. Tomemos $r < \delta$. Temos então,*

$$\fint_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|dy < \eta \fint_{B(x,r)} dy = \eta.$$

Teorema 1.1

(i) Se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, então para todo $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $D^\alpha(\varphi_\varepsilon * u) = (D^\alpha\varphi_\varepsilon) * u$ para cada multi-índice α.

(ii) Se x for um ponto de Lebesgue de u então $u_\varepsilon(x) \to u(x)$. Se u for contínua então u_ε converge uniformemente a u em subconjuntos compactos do $\mathbb{R}^n$.

(iii) Se $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, então $u_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\|u_\varepsilon\|_p \leq \|u\|_p$, e $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_p = 0$.

Demonstração:

(i) Seja α um multi-índice, temos que, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ e, $D^\alpha u(x) = D^{\alpha_1}_{x_1} D^{\alpha_2}_{x_2} ... D^{\alpha_n}_{x_n} u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1}_{x_1} ... \partial^{\alpha_n}_{x_n}}$.

Consideremos então $|\alpha| = 1$. Se $|\alpha| > 1$ podemos proceder por indução. Se $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$ notemos que

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(x + he_i) - u_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} [\varphi_\varepsilon(x + he_i - y) - \varphi_\varepsilon(x - y)]\, u(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^h \frac{d}{dt}[\varphi_\varepsilon(x + te_i - y)]dt\, u(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^h \nabla\varphi_\varepsilon(x - y + te_i) \cdot e_i u(y)\, dt\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^h D_i\varphi_\varepsilon(x - y + te_i)u(y)\, dt\, dy,
\end{aligned}$$

onde $D_i \equiv D^{e_i}$.

Pelo Teorema de Fubini, podemos trocar a ordem de integração, obtendo

$$u_\varepsilon(x+he_i) - u_\varepsilon(x) = \int_0^h \int_{\mathbb{R}^n} D_i\varphi_\varepsilon(x-y+te_i)u(y)\,dy\,dt,$$

donde

$$\frac{u_\varepsilon(x+he_i) - u_\varepsilon(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h \int_{\mathbb{R}^n} D_i\varphi_\varepsilon(x-y+te_i)u(y)\,dy\,dt.$$

Como o integrando é uma função contínua em relação a t, aplicando o limite quando $h \to 0$ em ambos os lados da igualdade, obtemos o resultado desejado, pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

(ii) Temos que,
$$\begin{aligned}|u_\varepsilon(x) - u(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)dy - u(x)\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)dy - u(x)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(x-y)dy\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)|u(y)-u(x)|dy \\ &\leq \sup_{B(x,1)} \varphi\, \varepsilon^{-n}\int_{B(x,\varepsilon)} |u(y)-u(x)|dy\end{aligned}$$

Como x é ponto de Lebesgue de u, $\fint_{B(x,\varepsilon)} |u(y)-u(x)|dy \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$. Portanto, $u_\varepsilon(x) \to u(x)$.

Agora, se u é contínua e x pertence a um compacto K, dado $\eta > 0$, existe $\delta > 0$, possivelmente dependente de K mas independente de x, tal que $|u(y) - u(x)| < \eta$ sempre que $|y-x| < \delta$. Logo, tomando $\varepsilon < \delta$, pelas estimativas acima, obtemos

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq \sup_{B(x,1)} \varphi\, C\eta,$$

para todo $x \in K$, onde C é uma constante. Portanto u_ε converge uniformemente para u em K.

(iii) Tomando q o expoente conjugado de p (isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) e aplicando a desigualdade de Hölder, temos:

$$\begin{aligned}|u_\varepsilon(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)dy\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}u(y)dy\right|. \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)dy\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Como $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)dy = 1$, segue-se que

$$|u_\varepsilon|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p dy.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p dy\, dx$$

e pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p dx\, dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^p \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y) dx\, dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^p dy.\end{aligned}$$

Logo,

$$u_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ e } \|u_\varepsilon\|_p \leq \|u\|_p. \tag{1.1}$$

Além disso, dado $\eta > 0$, como $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $C_0(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, existe $v \in C_0(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|u - v\|_p < \eta. \tag{1.2}$$

Como v tem suporte compacto, por (ii) temos

$$\|v - v_\varepsilon\|_p < \eta,$$

para ε suficientemente pequeno. E, por (1.1) e (1.2), temos

$$\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_p \leq \|u - v\|_p \leq \eta.$$

Assim,

$$\|u - u_\varepsilon\|_p \leq \|u - v\|_p + \|v - v_\varepsilon\|_p + \|v_\varepsilon - u_\varepsilon\|_p < 3\eta,$$

ou seja,

$$\|u_\varepsilon - u\|_p \to 0, \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

■

1.2 Distribuições

Apresentaremos nesta seção uma breve revisão de conceitos elementares da teoria de distribuições que serão utilizados mais adiante.

Definição 1.3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. O espaço $\mathcal{D}(\Omega)$ é o conjunto de todas as funções $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ munido com a topologia cuja convergência é, uma sequência $\{\varphi_i\}$ converge a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se, e somente se,*

(i) existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $supt\ \varphi_i \subset K$ para todo i, e

(ii) $\lim_{i\to\infty} D^\alpha \varphi_i = D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para cada multi-índice α.

$\mathcal{D}(\Omega)$ denomina-se o espaço das funções teste em Ω. Denomina-se distribuição em Ω a toda forma linear contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$. Ou seja, uma distribuição em Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}^n$ linear e contínuo em Ω. O espaço das distribuições em Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Em outras palavras, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é o dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$ munido da topologia definida acima.

Notemos que dizer que T é contínua em Ω significa dizer que se $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a zero em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\varphi_i)$ converge a zero quando $i \to \infty$.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ está naturalmente munido com a topologia fraca-estrela, logo dizemos que $T_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ converge a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se, e somente se, $T_i(\varphi) \to T(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.4 *Uma distribuição T em Ω aberto é dita positiva se $T(\varphi) \geq 0$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Um resultado da teoria das distribuições afirma que qualquer distribuição positiva é uma medida de Radon (veja e.g. Teorema da Representação de Riez em [10]). Mas, nem toda distribuição é uma medida de Radon.

Por exemplo, consideremos a distribuição $T(\varphi) = \varphi'(0)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Suponhamos que T fosse uma medida de Radon μ em $\mathbb{R}$, isto é,

$$T(\varphi) = \int \varphi d\mu, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Então tomando, por exemplo, a sequência $\varphi_i(x) = \varphi(ix)x$ em que φ é uma dada função em $C_0^\infty((-2,2))$ tal que $|\varphi| \leq 1$ e $\varphi = 1$ em $(-1,1)$, teríamos a contradição

$$1 = \varphi_i'(0) = \int \varphi_i d\mu \leq \frac{2}{i}\, \mu((-2,2)) \to 0.$$

Outro fato importante sobre as distribuições é o comportamento local. Se duas distribuições T e S em Ω são tais que para todo $x \in \Omega$ existe uma vizinhança U de x tal que $T(\varphi) = S(\varphi)$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ com suporte em U, então $T = S$.

Seja T uma distribuição num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. A derivada parcial D_iT de T, $i = 1, \cdots, n$ é definida por

$$D_iT(\varphi) = -T(D_i\varphi), \ \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Temos que D_iT é uma distribuição pois $D_i\varphi_k \to D_i\varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ se $\varphi_k \to \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Veja a motivação para esta definição na Seção 1.3 abaixo.

Como as funções teste φ são suaves, as derivadas parciais são independentes da ordem de derivação:

$$D_iD_j\varphi = D_jD_i\varphi.$$

E esta mesma relação é satisfeita para as distribuições:

$$D_iD_jT = D_jD_iT.$$

De fato, $(D_iD_jT)(\varphi) = -(D_jT)(D_i\varphi) = -(-T(D_jD_i\varphi)) = T(D_iD_j\varphi)$

Mais geralmente, define-se

$$D^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\varphi),$$

para qualquer multi-índice α.

Se $f \in C^\infty$, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tem-se $f\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e se $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ isto implica $\lim\limits_{n\to\infty} f\varphi_n = 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Quando T é uma distribuição sobre Ω, define-se o produto $f\varphi$ como a forma linear definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$(fT)\varphi = T(f\varphi), \ \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue-se que $f\varphi$ é uma distribuição sobre Ω.

1.3 Espaços de Sobolev

Nesta seção definiremos Espaços de Sobolev e veremos algumas propriedades destes espaços. Iniciaremos introduzindo o conceito de derivada fraca, mas antes vamos a sua motivação.

Considere uma dada função $u \in C^1(\Omega)$. Se $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos pela fórmula de integração por partes que,

$$\int_\Omega u\phi_{x_i}\,dx = -\int_\Omega u_{x_i}\phi\,dx, \quad i = 1, ..., n \tag{1.3}$$

O termo de fronteira se anula pois ϕ tem suporte compacto em Ω e então ϕ se anula perto de $\partial\Omega$.

Para o caso geral, se k é um inteiro positivo e $u \in C^k(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ um multi-índice de ordem $|\alpha| = k$ então, aplicando a fórmula (1.3) k vezes obtemos

$$\int_\Omega u\, D^\alpha\phi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha u\,\phi\, dx. \tag{1.4}$$

Analisemos a equação (1.4), válida para $u \in C^k(\Omega)$. Será que esta equação continua verdadeira se u não for k vezes continuamente diferenciável? Olhando para a equação vemos que o lado esquerdo faz sentido se u for apenas localmente integrável; o problema está no lado direito, que não faz sentido se u não for C^k. Então fazemos a seguinte pergunta: existe uma função v localmente integrável, para a qual a equação (1.4) seja válida, com v no lugar de $D^\alpha u$? Esta questão nos motiva para a seguinte definição:

Definição 1.5 *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Para um dado multi-índice α, uma função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é chamada de α-ésima derivada fraca de u se*

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u D^\alpha\varphi dx,$$

$\forall\ \varphi \in C_0^\infty$. v também é chamada de derivada generalizada de u e denotamos $v = D^\alpha u$.

Compare esta definição com a definição de derivada de distribuição na Seção anterior. Na verdade, $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ com a identificação $u \equiv T_u$, onde $T_u(\varphi) := \int_\Omega u\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Dizemos que a α-ésima derivada fraca de u é uma medida se existe uma medida de Borel regular com sinal, $\mu \in \Omega$ tal que

$$\int_\Omega \varphi d\mu = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u D^\alpha\varphi dx, \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definição 1.6 *Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, \infty]$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p} \equiv W^{k,p}(\Omega)$ por*

$$W^{k,p} = L^p(\Omega) \cap \{u : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \le k\}.$$

Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, definimos sua norma por

$$||u||_{k,p} \equiv ||u||_{k,p;\Omega} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ se\ 1 \leq p < \infty$$

e

$$||u||_{k,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega}\ ess |D^\alpha u|.$$

Teorema 1.2 *Para cada $k = 1, 2, ...,$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Vamos, primeiro, verificar que $||u||_{k,p;\Omega}$ é uma norma. Temos que, pela definição de $|| \cdot ||_{k,p;\Omega}$,

$$||\lambda u||_{k,p;\Omega} = |\lambda| ||u||_{k,p;\Omega}$$

$$||u||_{k,p;\Omega} = 0, \text{ se, e só se, } u = 0 \text{ q.t.p.}$$

Agora, considere $u,\ v \in W^{k,p}(\Omega)$. Se $1 \leq p \leq \infty$, pela desigualdade de Minkowski, temos:

$$\begin{aligned} ||u + v||_{k,p;\Omega} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u + D^\alpha v||^p_{p;\Omega} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \left(||D^\alpha u||_{p;\Omega} + ||D^\alpha v||_{p;\Omega} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u||^p_{p;\Omega} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha v||^p_{p;\Omega} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= ||u||_{k,p;\Omega} + ||v||_{k,p;\Omega}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar agora, que $W^{k,p}(\Omega)$ é completo. Seja $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $W^{k,p}(\Omega)$. Então, para cada $|\alpha| \leq k$, $\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ é completo, existem funções $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ tais que

$$D^\alpha u_m \to u_\alpha \text{ em } L^p(\Omega),$$

para cada $|\alpha| \leq k$. Em particular,

$$u_m \to u_{(0,0,\dots,0)} =: u \text{ em } L^p(\Omega).$$

Resta então mostrarmos que $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e $D^\alpha u = u_\alpha$ ($|\alpha| \leq k$). Seja $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned} \int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx &= \lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m D^\alpha \phi \, dx \\ &= \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_m \, \phi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \phi \, dx. \end{aligned}$$

Logo, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e $D^\alpha u = u_\alpha$ ($|\alpha| \leq k$). Além disso, como $D^\alpha u_m \to D^\alpha u$ em $L^p(\Omega)$, $\forall\ |\alpha| \leq k$, temos que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$. ■

Definição 1.7 *O fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$ é o espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$.*

Ou seja, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe uma sequência de funções $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

Definição 1.8 *Denotaremos por $BV(\Omega)$ o espaço das funções integráveis cujas derivadas parciais são medidas (com sinal) de variação finita, ou seja,*

$$BV(\Omega) = L^1(\Omega) \cap \{u; D^\alpha u \text{ é uma medida}, \ |D^\alpha u(\Omega)| < \infty, |\alpha| = 1\}.$$

A norma em $BV(\Omega)$ é definida por

$$||u||_{BV(\Omega)} = ||u||_{1;\Omega} + \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|(\Omega).$$

Observe que se $u \in W^{k,p}(\Omega) \cup BV(\Omega)$ então u é determinada a menos de um conjunto de medida nula. Desta forma, dizemos que u é contínua, limitada, etc, se existir uma função $\bar{u}$ tal que $\bar{u} = u$ em quase todo ponto (q.t.p.) e $\bar{u}$ é contínua, limitada, etc, respectivamente.

Teorema 1.3 *Suponha $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Então o regularizador de u, u_ε, satisfaz*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} ||u_\varepsilon - u||_{k,p;\Omega'} = 0$$

para qualquer $\Omega' \subset\subset \Omega$. No caso em que $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\lim_{\varepsilon\to 0} ||u_\varepsilon - u||_{k,p} = 0$ (onde $||\cdot||_{k,p} \equiv ||\cdot||_{k,p,\mathbb{R}^n}$).

Demonstração: Como $\Omega' \subset\subset \Omega$, temos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\varepsilon_0 < dist\,(\Omega', \partial\Omega)$. Assim, para

$\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\begin{aligned}
D^\alpha u_\varepsilon(x) &= D_x^\alpha\left(\int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy\right)\\
&= \int_\Omega D_x^\alpha[\varphi_\varepsilon(x-y)u(y)]dy\\
&= \varepsilon^{-n}\int_\Omega D_x^\alpha\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)dy\\
&= (-1)^{|\alpha|}\varepsilon^{-n}\int_\Omega D_y^\alpha\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)dy\\
&= \varepsilon^{-n}\int_\Omega \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)D^\alpha u(y)dy\\
&= \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y)D^\alpha u(y)dy\\
&= (D^\alpha u)_\varepsilon, \forall\;\; x\in\Omega'.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon - u\|_{k,p;\Omega'} &= \left(\int_{\Omega'}\sum_{|\alpha|\le k}|D^\alpha(u_\varepsilon-u)(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\int_{\Omega'}\sum_{|\alpha|\le k}|D^\alpha u_\varepsilon(x)-D^\alpha u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\int_{\Omega'}\sum_{|\alpha|\le k}|(D^\alpha u)_\varepsilon(x)-D^\alpha u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Como $u \in W^{k,p}(\Omega)$ temos que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$. Logo, pelo Teorema (1.1) (iii), pág. 4, temos que $\|(D^\alpha u)_\varepsilon - D^\alpha u\|_p \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$. Portanto, $\|u_\varepsilon - u\|_{k,p;\Omega'} \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$.

Notemos que para $\Omega = \mathbb{R}^n$, podemos tomar acima $\Omega' = \mathbb{R}^n$ e qualquer $\varepsilon > 0$.

■

Observação 1.2 *Na demonstração acima provamos que, dado $\Omega' \subset\subset \Omega$, $D^\alpha u_\varepsilon = (D^\alpha u)_\varepsilon$ em Ω', para ε suficientemente pequeno, e no caso em que $\Omega = \mathbb{R}^n$, $D^\alpha u_\varepsilon = (D^\alpha u)_\varepsilon$ para qualquer $\varepsilon > 0$.*

Como a definição de função de Sobolev requer que sua derivada distribucional pertença ao espaço $L^p(\Omega)$ é natural esperar que a função tenha alguma propriedade clássica de diferenciabilidade. O próximo resultado nos garante que suas derivadas parciais clássicas existem quase sempre. Isto é, existe uma função $\bar{u}$ tal que $\bar{u} = u$ em quase todo ponto e as derivadas parciais de $\bar{u} = u$ existem quase sempre.

Teorema 1.4 *Seja $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Então $u \in W^{1,p}(\Omega)$, se, e somente se, u possui um representante $\bar{u}$ que é absolutamente contínuo em quase todo segmento de reta em Ω paralelo aos eixos coordenados e tal que as derivadas parciais pertencem a $L^p(\Omega)$.*

A demonstração deste resultado será omitida, mas pode ser encontrada em [20], pág. 44.

É fácil ver que se $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ então $\|u(x+h) - u(x)\|_p \to 0$ quando $h \to 0$. Um resultado similar nos dá uma caracterização para $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.5 *Seja $1 < p < \infty$. Então $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\left(\int \left|\frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = |h|^{-1}\|u(x+h) - u(x)\|_p$$

mantém-se limitado para todo $h \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} = \frac{1}{|h|}\int_0^{|h|} Du\left(x + t\frac{h}{|h|}\right) \cdot \frac{h}{|h|}\, dt.$$

Logo,

$$\left|\frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}\right|^p = \frac{1}{|h|^p}\left|\int_0^{|h|} Du\left(x + t\frac{h}{|h|}\right) \cdot \frac{h}{|h|}\, dt\right|^p.$$

Como a função $f(x) = x^p$ é convexa e $Du \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pela desigualdade de Jensen, temos

$$\left|\frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}\right|^p \leq \frac{1}{|h|}\int_0^{|h|} \left|Du\left(x + t\frac{h}{|h|}\right)\right|^p dt.$$

Assim, denotando $u(x+h) = u_h(x)$, temos:

$$\begin{aligned} \|u_h - u\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(x+h) - u(x)|^p\, dx \\ &\leq |h|^p \frac{1}{|h|}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{|h|} \left|Du\left(x + t\frac{h}{|h|}\right)\right|^p dt\, dx \end{aligned}$$

Pelo teorema de Tonelli,

$$\begin{aligned} \|u_h - u\|_p^p &\leq |h|^p \frac{1}{|h|} \int_0^{|h|} \int_{\mathbb{R}^n} \left| Du\left(x + t\frac{h}{|h|}\right)\right|^p dx\, dt \\ &= |h|^p \frac{1}{|h|} \int_0^{|h|} \|Du\|_p^p dt \\ &= (|h|\|Du\|_p)^p. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|u_h - u\|_p \leq |h|\|Du\|_p.$$

Para $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, tomamos uma sequência (u_k) em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_k \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. É fácil ver que $(u_k)_h \to u_h$. De fato, $\|(u_k)_h - u_h\|_{p;\mathbb{R}^n} = \|u_k - u\|_{p;\mathbb{R}^n}$. Logo, como pelo passo anterior temos que $\|(u_k)_h - u_k\|_p \leq |h|\|Du_k\|_p$, passando ao limite quando $k \to \infty$, obtemos que $\|u_h - u\|_p \leq |h|\|Du\|_p$.

($\Leftarrow$) Seja $\{e_i\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Por hipótese, a sequência $\left\{\dfrac{u(x + e_i/k) - u(x)}{1/k}\right\}$ é limitada em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Então, existe uma subsequência desta sequência e existe $u_i \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\frac{u(x + e_i/k) - u(x)}{1/k} \to u_i,$$

fracamente em $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $k \to \infty$. Assim, para $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u_i \varphi\, dx &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{u(x + e_i/k) - u(x)}{1/k}\right] \varphi(x)\, dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x + e_i/k)}{1/k} \varphi(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)\varphi(x)}{1/k}\, dx\right] \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y = x + \frac{e_i}{k}$, na primeira integral, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u_i \varphi\, dx &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(y)\varphi(y - e_i/k)}{1/k}\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)\varphi(x)}{1/k}\, dx\right] \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \left[\frac{\varphi(x - e_i/k) - \varphi(x)}{1/k}\right] dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} u(x) D_i \varphi(x)\, dx. \end{aligned}$$

Logo, $D_i u = u_i$ no sentido das distribuições. Portanto, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. ■

Consideremos agora, a questão se a composição de funções, $f \circ u$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $u \in W^{1,p}(\Omega)$

resulta numa função também em $W^{1,p}(\Omega)$. Uma questão análoga para funções reais de uma variável real é se a composta de funções absolutamente contínuas é uma função absolutamente contínua. A resposta a esta questão é em geral negativa, já que a composta de funções de variação limitada pode não ser uma função de variação limitada. Para o caso de funções de variáveis reais temos que $f \circ g$ é absolutamente contínua se, e somente se, $f' \circ g \cdot g'$ é integrável (Teorema de Vallée Poisson). Um resultado análogo é válido para funções em espaços de Sobolev, mas o resultado seguinte é de demonstração mais simples e cobre a maioria das aplicações.

Teorema 1.6 *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitziana e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$. Se $f \circ u \in L^p(\Omega)$ então $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e*

$$D(f \circ u)(x) = f'[u(x)]Du(x),$$

para quase todo $x \in \Omega$.

A demonstração será omitida, mas pode ser consultada em [20], pág. 48.

O Teorema acima envolve a questão delicada da existência da derivada de f. Podemos ver em textos básicos de Análise na Reta que toda função Lipschitziana tem derivada em quase todo ponto. A fórmula dada no Teorema é evidentemente a Regra da Cadeia clássica no caso em que f é uma função suave e nos pontos x tais que f tem derivada em $u(x)$. Mais geralmente, toda função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitziana tem derivada em quase todo ponto e podemos fazer "mudança de variável Lipschitziana" no $\mathbb{R}^n$. Mais precisamente, temos a Seção seguinte.

1.4 Mudança de Variáveis para Funções de Sobolev

Veremos nesta seção, um resultado sobre mudança de variáveis para funções em espaços de Sobolev. Para este propósito, antes de enunciarmos o teorema sobre mudança de variáveis, vamos definir funções bi-Lipschitziana e enunciar um resultado importante, que afirma que uma função Lipschitziana $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em quase todo ponto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.9 *Seja $T : \Omega \to \Omega'$. Dizemos que T é uma função bi-Lipschitziana, se existir uma constante M tal que*

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &\leq M|x - y|, \ \forall x, y, \in \Omega, \\ |T^{-1}(x') - T^{-1}(y')| &\leq M|x' - y'|, \ \forall x', y', \in \Omega'. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Teorema 1.7 (Teorema de Rademacher) *Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é Lipschitziana, então T é diferenciável em quase todo ponto de $\mathbb{R}^n$, isto é, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe uma aplicação linear $dT(x)$ tal que*

$$\lim_{y\to 0} \frac{|T(x+y) - T(x) - dT(x)\cdot y|}{|y|} = 0.$$

De maneira equivalente,

Teorema 1.8 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é Lipschitziana, então para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe um vetor $Df(x)$ do $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x+y) - f(x) - Df(x)\cdot y}{|y|} = 0.$$

A demonstração deste teorema pode ser consultada em [20], pág. 50.

Observamos que a fórmula de mudança de variáveis

$$\int_E f \circ T JT \, dx = \int_{T(E)} f dx\,,$$

onde f é uma função mensurável e $E \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto mensurável, vale para funções $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que são injetivas e Lipschitzianas, onde $JT \equiv |detT(x)|$ é o jacobiano de T. Podemos consultar a demonstração deste fato em [12]. Além disso, o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é invariante por transformações bi-Lipschitzianas e vale a Regra da Cadeia. Mais precisamente temos o seguinte Teorema:

Teorema 1.9 *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função bi-Lipschitziana. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$, então $v = u \circ T \in W^{1,p}(V)$, $V \equiv T^{-1}(\Omega)$, e*

$$Du[T(x)] \cdot dT(x,\xi) = Dv(x)\cdot \xi$$

para quase todo $x \in \Omega$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, onde $dT(x,\xi) = dT(x)\cdot\xi$.

A demonstração deste resultado encontra-se em [20], pág. 52.

1.5 Aproximando Funções de Sobolev por Funções Suaves

No Teorema 1.3, pág. 11, vimos que para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ existe uma sequência de funções em $C^\infty(\Omega)$, $\{u_\varepsilon\}$, tal que $u_\varepsilon \to u$ em $W^{1,p}(\Omega')$, para $\Omega' \subset\subset \Omega$. O próximo resultado mostra que uma aproximação similar existe para todo o Ω e não apenas em subconjuntos compactos de Ω. Mas antes veremos uma resultado canônico que garante a existência de uma partição da unidade C^∞ para uma cobertura aberta.

Lema 1.1 *Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{G}$ uma coleção de conjuntos abertos $\mathcal{U}$ tais que $E \subset \{\cup\mathcal{U} : \mathcal{U} \in \mathcal{G}\}$. Então existe uma família $\mathcal{F}$ de funções não-negativas $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq f \leq 1$ e*

(i) para cada $f \in \mathcal{F}$ existe $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$ tal que supt $f \subset \mathcal{U}$;

(ii) se $K \subset E$ é compacto, então supt $f \cap K \neq \emptyset$ apenas para um número finito de $f \in \mathcal{F}$;

(iii) $\sum_{f\in\mathcal{F}} f(x) = 1$, para cada $x \in E$.

Teorema 1.10 *Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço $C^\infty(\Omega) \cap \{u : \|u\|_{k,p;\Omega} < \infty\}$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Sejam Ω_i subconjuntos de Ω tais que $\Omega_i \subset\subset \Omega_{i+1}$ e $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i = \Omega$. Pelo Lema 1.1, existe uma partição da unidade, $\mathcal{F}$, de Ω subordinada à cobertura $\{\Omega_{i+1} - \bar{\Omega}_{i-1}\}$, $i \in \mathbb{N}$, onde Ω_0 e Ω_{-1} são vazios.

Se denotarmos por f_i a soma do número finito de $f \in \mathcal{F}$ com *supt* $f \subset \Omega_{i+1} - \bar{\Omega}_{i-1}$ então $f_i \in C_0^\infty(\Omega_{i+1} - \bar{\Omega}_{i-1})$ e $\sum_{i=1}^{\infty} f_i = 1$ em Ω.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, pelo Teorema 1.3, para $u \in W^{k,p}(\Omega)$, existe $\varepsilon_i > 0$ tal que

$$\begin{aligned} supt\ ((f_i u)_{\varepsilon_i}) &\subset \Omega_{i+1} - \bar{\Omega}_{i-1} \\ \|(f_i u)_{\varepsilon_i} - f_i u\|_{k,p;\Omega} &< \varepsilon 2^{-i} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Denotando $v_i = (f_i u)_{\varepsilon_i}$ temos, de (1.6), que apenas um número finito de v_i não se anula em Ω', onde $\Omega' \subset\subset \Omega$, e além disso, $v = \sum_{i=1}^{\infty} v_i$ pertence a $C^\infty(\Omega)$. Para $x \in \Omega_i$, temos

$$u(x) = \sum_{j=1}^{k_i} f_j(x)u(x),$$

$$v(x) = \sum_{j=1}^{k_i} (f_j u)_{\varepsilon_j}(x)$$

onde k_i depende de i. Então,

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{k,p;\Omega_i} &= \|\sum_{j=1}^{k_i} f_j u - \sum_{j=1}^{k_i} (f_j u)_{\varepsilon_j}\|_{k,p;\Omega_i} \\ &\leq \sum_{j=1}^{k_i} \|(f_j u)_{\varepsilon_j} - f_j u\|_{k,p;\Omega} < \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\varepsilon}{2^j} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Temos que, $\|u - v\|_{k,p;\Omega_i} = \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\int_\Omega |D^\alpha (u - v)|^p \cdot \chi_{\Omega_i} dx \right)^{1/2}$. Assim, pelo Teorema da Convergência Monótona, concluimos que $\|u - v\|_{k,p;\Omega} \leq \varepsilon$.

■

1.6 Desigualdades de Sobolev

Apresentaremos agora resultados que mostram a relação entre os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ e certos espaços clássicos de funções em $\mathbb{R}^n$. Estas relações são características de imersões dos espaços de Sobolev e são principalmente estas que os fazem tão úteis no estudo de EDP's.

Teorema 1.11 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$ um domínio . Existe uma constante $C = C(n, p)$ tal que*

- *se $n > p$, $p \geq 1$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então*

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p};\Omega} \leq C\|Du\|_{p;\Omega}.$$

- *se $p > n$ e Ω é limitado, então $u \in C(\overline{\Omega})$ e*

$$\sup_\Omega |u| \leq C|\Omega|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \|Du\|_{p;\Omega}.$$

Motivação: Antes de demonstrarmos o Teorema, vamos mostrar que se

$$\|u\|_{q;\Omega} \leq C\|Du\|_{p;\Omega}, \tag{1.7}$$

para $1 \leq p < n$, $C > 0$ constante , $1 \leq q < \infty$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então q não é arbitrário, ou seja tem uma forma específica.

Sejam $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u \neq 0$ q.t.p., e $\lambda > 0$ escalar e definamos

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x), \quad x \in \Omega.$$

Aplicando (1.7) para u_λ, temos

$$||u_\lambda||_{q;\Omega} \leq C||Du||_{p;\Omega}. \tag{1.8}$$

Como

$$||u_\lambda||_q^q = \int_\Omega |u_\lambda|^q dx = \int_\Omega |u(\lambda x)|^q dx = \frac{1}{\lambda^n}\int_\Omega |u(y)|^q dy = \frac{1}{\lambda^n}||u||_q^q$$

e

$$||Du_\lambda||_p^p = \lambda^p \int_\Omega ||Du(\lambda x)|^p dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n}\int_\Omega |Du(y)|^p dy = \frac{\lambda^p}{\lambda^n}||Du||_p^p,$$

temos de (1.8), que

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}}||u||_q \leq C\frac{\lambda}{\lambda^{\frac{n}{p}}}||Du||_p,$$

o que nos dá,

$$||u||_q \leq \lambda^{1-\frac{n}{p}-\frac{n}{q}}||Du||_p. \tag{1.9}$$

Agora, se $1-\frac{n}{p}-\frac{n}{q}\neq 0$, obtemos uma contradição. De fato, se $1-\frac{n}{p}-\frac{n}{q}>0$ e fizermos $\lambda\to 0$ obtemos $u\equiv 0$ q.t.p.. Por outro lado, de $1-\frac{n}{p}-\frac{n}{q}<0$ e fizermos $\lambda\to\infty$ obtemos $u\equiv 0$ q.t.p.

Logo, $1-\frac{n}{p}-\frac{n}{q}=0$, e então $q=\dfrac{np}{n-p}$.

Definição 1.10 *Se $1\leq p<n$, o conjugado de Sobolev de p é $p^*=\dfrac{np}{n-p}$.*

Demonstração do Teorema 1.11:

Consideremos primeiro, $p=1$ e $u\in C_0^\infty$. Como u tem suporte compacto, para cada $i=1,\cdots,n$ e $x\in\Omega$, temos

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)dy_i,$$

daí,

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_{-\infty}^{x_i} |u_{x_i}(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)|dy_i \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)|dy_i. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)|dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Escrevendo abreviadamente as integrais acima como $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dy_i$, integrando em relação a x_1, obtemos

$$\int\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_1=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_1.$$

Assim, daí e da desigualdade acima, aplicando a Desigualdade de Hölder generalizada com $p_1=p_2=\cdots=p_{n-1}=n-1$, temos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1 &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_1\\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dy_idx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Tonelli,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Agora, integrando em relação a x_2, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1dx_2 &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]dx_2\\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n}I_i^{\frac{1}{n-1}}dx_2,\end{aligned}$$

onde $I_1=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dy_1$ e $I_i=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1dy_i,\quad i=3,\cdots,n.$

Aplicando a Desigualdade de Hölder e o Teorema de Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1\,dx_2 &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1\,dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|I_i^{\frac{1}{n-1}}|^{n-1}dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1\,dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dy_1\,dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\\ &\quad \prod_{i=3}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1\,dx_2\,dy_i\end{aligned}$$

Procedendo desta maneira, integrando em relação a cada variável, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^{\frac{n}{n-1}} dx &\leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 \cdots dy_i \cdots dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \|Du\|_1^{\frac{n}{n-1}} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Temos então,

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \|Du\|_1, \tag{1.11}$$

e o resultado está provado para $p = 1$.

Considere $1 < p < n$ e seja $v = |u|^\gamma$, $\gamma > 1$ a ser determinado. Substituindo v em (1.11) e usando a Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega |u|^{\frac{n\gamma}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \int_\Omega |D(|u|^\gamma)| dx = \gamma \int_\Omega |u|^{\gamma-1} |Du| dx \\ &\leq \gamma \left(\int_\Omega |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Escolhemos então γ de tal modo que

$$\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1},$$

ou seja, $\gamma = \dfrac{p(n-1)}{n-p} > 1$, e portanto $\dfrac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\dfrac{p}{p-1} = \dfrac{np}{n-p} = p^*$.

Assim, podemos estimar (1.12) da seguinte forma:

$$\left(\int_\Omega |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p}} = \left(\int_\Omega |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq p\frac{n-1}{n-p} \|Du\|_{p;\Omega},$$

o que nos dá

$$\|u\|_{p^*;\Omega} \leq C(n,p) \|Du\|_{p;\Omega}.$$

Agora assuma $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e seja (u_k) uma sequência de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Aplicando o resultado a $u_k - u_l$, obtemos

$$\|u_k - u_l\|_{p^*;\Omega} \leq \|D(u_k - u_l)\|_{p;\Omega} \leq C\|u_k - u_l\|_{W_0^{1,p}(\Omega)},$$

o que prova que (u_k) é uma sequência de Cauchy em $L^{p^*}(\Omega)$ e portanto $u_k \to u$ em $L^{p^*}(\Omega)$. Daí, seque que, a desigualdade é válida para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Agora, consideremos o caso em que $p > n$ e Ω é limitado. Para simplificar os cálculos assumamos primeiramente o caso em que a medida de Lebesgue $|\Omega| = 1$ e definamos

$$v = \frac{|u|}{||Du||_{p;\Omega}},$$

de modo que

$$\sup_{\Omega} |v| = \frac{1}{||Du||_{p;\Omega}} \sup_{\Omega} |u|.$$

Devemos então mostrar que

$$\sup_{\Omega} |v| \leq C,$$

para alguma constante $C > 0$, $C = C(n, p)$. Mostraremos que $\lim\limits_{q\to\infty} ||v||_{q;\Omega} \leq C$. Temos que, para qualquer $\gamma > 1$,

$$\begin{aligned} ||v^{\gamma}||_{\frac{n}{n-1};\Omega} \leq ||D(v^{\gamma})||_{1;\Omega} &= \gamma ||v^{\gamma-1} Dv||_1 \\ &\leq \gamma ||v^{\gamma-1}||_{\frac{p}{p-1}} ||Dv||_p \\ &= \gamma ||v^{\gamma-1}||_{\frac{p}{p-1}}. \end{aligned}$$

Como, $||v^{\gamma}||_{\frac{n}{n-1}} = ||v||^{\gamma}_{\frac{\gamma n}{n-1}}$, temos

$$||v||_{\frac{\gamma n}{n-1}} \leq \gamma^{\frac{1}{\gamma}} ||v^{\gamma-1}||^{\frac{1}{\gamma}}_{\frac{p}{p-1}} = \gamma^{\frac{1}{\gamma}} ||v||^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}_{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} \leq \gamma^{\frac{1}{\gamma}} ||v||^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}_{\gamma\frac{p}{p-1}}.$$

Agora, tomemos $\delta = \dfrac{\frac{n}{n-1}}{\frac{p}{p-1}} > 1$ e substituímos γ por δ^j para $j = 1, 2, \cdots$. Assim,

$$||v||_{\delta^j \frac{n}{n-1}} \leq \delta^{\frac{j}{\delta^j}} ||v||^{1-\frac{1}{\delta^j}}_{\delta^j \frac{p}{p-1}} = \delta^{\frac{j}{\delta^j}} ||v||^{1-\frac{1}{\delta^j}}_{\delta^{j-1}\frac{n}{n-1}}.$$

Iterando, começando com $j = 1$, segue que

$$
\begin{aligned}
\|v\|_{\delta^k} \leq \|v\|_{\delta^k \frac{n}{n-1}} &\leq \delta^{\sum_{j=1}^{k} \frac{j}{\delta^j}} \|v\|_{\frac{n}{n-1}}^{\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{\delta^j}\right)} \\
&\leq \delta^{\sum_{j=1}^{k} \frac{j}{\delta^j}} \|Dv\|_{1}^{\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{\delta^j}\right)} \\
&\leq \delta^{\sum_{j=1}^{k} \frac{j}{\delta^j}} \left(|\Omega|^{\frac{p-1}{p}} \|Dv\|_p\right)^{\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{\delta^j}\right)} \\
&= \delta^{\sum_{j=1}^{k} \frac{j}{\delta^j}}
\end{aligned}
$$

Agora, calculando o limite quando $k \to \infty$, temos

$$\lim_{k\to\infty} \|v\|_{\delta^k} \leq \lim_{k\to\infty} \delta^{\sum_{j=1}^{k} \frac{j}{\delta^j}} = C(n,p).$$

Portanto, $\|v\|_{\infty;\Omega} = \lim\limits_{q\to\infty} \|v\|_{q;\Omega} \leq C(n,p)$ (ver Observação 1.3 abaixo).

Para eliminar a restrição $|\Omega| = 1$ consideremos a mudança de variável $\begin{array}{rl} T : \Omega' & \to \Omega. \\ x & \mapsto |\Omega|^{\frac{1}{n}} x \end{array}$

Como,

$$\|Du\|_p = \left(\int_\Omega |Du|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\Omega'} |D(u) \circ T|^p |\det T|\, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

temos

$$\|Du\|_{p;\Omega} = \left(\int_{\Omega'} |D(u \circ T)|^p |\Omega|^{-\frac{p}{n}} |\Omega|\, dx\right)^{\frac{1}{p}} = |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}} \|D(u\circ T)\|_{p;\Omega'}.$$

Logo, pelo caso anterior de $|\Omega| = 1$, concluímos que

$$\sup_\Omega |u| = \sup_{\Omega'} |u \circ T| \leq C\|D(u \circ T)\|_{p;\Omega'} = C|\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \|Du\|_{p;\Omega}.$$

Agora, mostremos que $u \in C(\overline{\Omega})$. Seja $(u_m) \subset C(\overline{\Omega})$ sequência de Cauchy em $W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_m \to u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que $\|u_m - u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \varepsilon$, para todo $m, k \geq n_0$. Ou seja, $\|u_m - u_k\|_p + \|Du_m - Du_k\|_p < \varepsilon$, para todo $m, k \geq n_0$. Mas, como

$$\sup_\Omega |u_m - u_k| \leq C_{n,p} \|u_m - u_k\|_p,$$

onde $C_{n,p}$ é uma constante que depende de n e p, e pelo resultado que acabamos de provar vale

$$\sup_\Omega |u_m - u_k| \leq C(n,p)|\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \|Du_m - Du_k\|_p,$$

para todo $m, k > 0$, concluímos que

$$\sup_{\Omega} |u_m - u_k| \leq C_{n,p}\, \varepsilon, \ \forall\, m, k \geq n_0.$$

Logo, (u_m) é sequência de Cauchy em $C(\overline{\Omega})$. E, portanto, a função limite u também está em $C(\overline{\Omega})$.

■

Observação 1.3 *Na demonstração do Teorema anterior usamos o fato que se* Ω *tem medida finita, então*

$$\|v\|_{\infty;\Omega} = \lim_{q\to\infty} \|v\|_{q;\Omega}.$$

Mais precisamente, se existe uma sequência $q_1 < q_2 < \cdots \to \infty$ *tal que* $(\|v\|_{q_j;\Omega})_{j\in\mathbb{N}}$ *é limitada então* $v \in L^\infty(\Omega)$ *e*

$$\|v\|_{\infty;\Omega} = \lim_{q\to\infty} \|v\|_{q;\Omega}.$$

Com efeito, no caso em que $|\Omega| = 1$, pela Desigualdade de Hölder é fácil ver que a função $q \mapsto \|v\|_{q;\Omega}$, $q \in [1, \infty)$, é não decrescente. Logo, tendo uma sequência $(\|v\|_{q_j;\Omega})_{j\in\mathbb{N}}$ limitada, essa função também é limitada, e assim, tem um limite $l = \lim\limits_{q\to\infty} \|v\|_{q;\Omega}$. Para ver que $v \in L^\infty(\Omega)$ e $\|v\|_{\infty;\Omega} \leq l$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, usamos a Desigualdade de Chebyshev para obtermos

$$\Big|[|u| > l + \varepsilon]\Big| \leq (l + \varepsilon)^{-q} \|v\|^q_{q;\Omega} \leq \left(\frac{l}{l + \varepsilon}\right)^q$$

donde, fazendo $q \to \infty$, obtemos $\Big|[|u| > l + \varepsilon]\Big| = 0$. Então $\Big|[|u| > l]\Big| = 0$, isto é, $|u| \geq l$ q.t.p. Por outro lado, é óbvio que $\|u\|_{q;\Omega} \leq \|u\|_{\infty;\Omega}$ para todo $q \in [1, \infty)$. Portanto, $\|u\|_{\infty;\Omega} = l$. O caso $1 < |\Omega| < \infty$ reduz-se ao caso $|\Omega| = 1$ com a mudança de variável $T(x) = |\Omega|^{1/n} x$.

Observação 1.4 *A primeira desigualdade do Teorema anterior é chamada de Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev. Uma versão da segunda é provada na demonstração do Teorema 1.13 (Desigualdade de Morey) dado adiante; cf.* (1.15).

Observação 1.5 *Notemos que, da expressão* (1.10),

$$\|u\|^n_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Usando a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, obtemos o nosso primeiro resultado de imersão contínua:

Teorema 1.12 (Teorema de Imersão de Sobolev) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Se $1 \leq p < n$, então*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

Observação 1.6 *Denotamos por $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ o fato que $W_0^{1,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^{p^*}(\Omega)$.*

Corolário 1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Se $1 \leq p < n$, então*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para todo $p \leq q \leq p^*$.

Demonstração: Por definição, vale a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, e pelo Teorema 1.12 vale a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$. Agora, como uma consequência imediata da Desigualdade de Hölder, temos a propriedade de interpolação dos espaços L^p

$$L^p(\Omega) \cap L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

e

$$||u||_q \leq ||u||_p^{\lambda} \, ||u||_{p^*}^{1-\lambda},$$

para todo $p < q < p^*$, onde λ é definido por $\dfrac{1}{q} = \dfrac{\lambda}{p} + \dfrac{1-\lambda}{p^*}$. Portanto,

$$||u||_q \leq C \, ||u||_{1,p}^{\lambda+1-\lambda} = C \, ||u||_{1,p}.$$

■

Teorema 1.13 (Desigualdade de Morrey) *Seja $n < p \leq \infty$. Então existe uma constante $C = C(n, p)$ tal que*

$$||u||_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, onde $\gamma = 1 - \dfrac{n}{p}$.

Demonstração: Primeiro, escolhemos uma bola $B(x,r)$ em $\mathbb{R}^n$. E mostremos que, existe uma constante C que depende apenas de n tal que

$$⨍_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|dy \leq C \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}dy. \tag{1.13}$$

Para provar esta desigualdade, fixemos um ponto $w \in \partial B(0,1)$. Então, para $0 < s < r$, temos

$$\begin{aligned} |u(x+sw) - u(x)| &= \left| \int_0^s \frac{d}{dt} u(x+tw)dt \right| \\ &= \int_0^s Du(x+tw) \cdot wdt \\ &\leq \int_0^s |Du(x+tw)|dt. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw) - u(x)|dS &\leq \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} |Du(x+tw)|dS\,dt \\ &= \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} |Du(x+tw)| \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}} dS\,dt. \end{aligned}$$

Seja $y = x + tw$, de forma que $t = |x-y|$. Assim, passando para coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw) - u(x)|dS &\leq \int_{B(x,s)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy \\ &\leq \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy. \end{aligned}$$

Multiplicando por s^{n-1} e integrando de 0 a r em relação a s, temos

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|dy \leq \frac{r^n}{n} \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy,$$

e a desigualdade está provada.

Agora fixemos $x \in \mathbb{R}^n$ e apliquemos a desigualdade (1.13) como segue,

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \fint_{B(x,1)} |u(x)-u(y)|dy + \fint_{B(x,1)} |u(y)|dy \\ &\leq C\int_{B(x,1)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy + C\|u\|_{p;B(x,1)} \\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,1)} \frac{dy}{|x-y|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}} + C\|u\|_{p;\mathbb{R}^n} \\ &\leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Nesta ultima estimativa, temos que $\int_{B(x,1)} \frac{dy}{|x-y|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} < \infty$ pois, como $p > n$ decorre que $(n-1)\dfrac{p}{p-1} < n$.

Como x é arbitrário, a desigualdade (1.14) implica que

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |u| \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.15}$$

Agora, escolhendo dois pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e escrevendo $r := |x-y|$ e $W := B(x,r) \cap B(y,r)$, temos

$$|u(x)-u(y)| \leq \fint_W |u(x)-u(z)|dz + \fint_W |u(y)-u(z)|dz. \tag{1.16}$$

Mas, usando a desigualdade (1.13), temos

$$\begin{aligned} \fint_W |u(x)-u(z)|dz &\leq C\fint_{B(x,r)} |u(x)-u(z)|dz \\ &\leq C\left(\int_{B(x,r)} |Du|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,r)} \frac{dz}{|x-z|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq C\left(r^{n-(n-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \|Du\|_{p;\mathbb{R}^n} \\ &= Cr^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_{p;\mathbb{R}^n}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Analogamente,

$$\fint_W |u(y)-u(z)|dz \leq Cr^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_{p;\mathbb{R}^n}.$$

Assim, substituindo esta estimativa e (1.17) em (1.16), obtemos

$$|u(x)-u(y)| \leq Cr^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_{p;\mathbb{R}^n} = C|x-y|^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_{p;\mathbb{R}^n}.$$

Portanto,

$$[u]_{C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\neq y}\left\{\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{n}{p}}}\right\} \leq C\|Du\|_{p;\mathbb{R}^n}.$$

Desta desigualdade e de (1.13) temos a desigualdade desejada.

■

Como consequência direta deste Teorema e da completude do espaço $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, temos o seguinte resultado:

Corolário 1.2 *Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > n$ então $u \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, onde $\gamma = 1 - \dfrac{n}{p}$.*

Teorema 1.14 *Dado Ω um aberto qualquer do $\mathbb{R}^n$ existe uma constante $C = C(n, \Omega, p)$ tal que*

- *se $kp < n$, $p \geq 1$ e $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ então*

$$\|u\|_{p_k^*;\Omega} \leq C\|u\|_{k;p;\Omega},$$

  onde $p_k^* = \dfrac{np}{n-kp}$.

- *se $kp > n$ e $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ então $u \in C(\overline{\Omega})$ e*

$$\sup_{\Omega}|u| \leq C|K|^{\frac{1}{p'}}\sum_{|\alpha=0|}^{k-1}(diam\, K)^{|\alpha|}\frac{1}{\alpha!}\|D^\alpha u\|_{p;K} + (diam\, K)^k\frac{1}{(k-1)!}\left(k-\frac{n}{p}\right)^{-1}\|D^k u\|_{p;K},$$

  onde $K = supt\ u$.

A demonstração deste Teorema será omitida, mas pode ser consultada em [20], pág. 59.

Corolário 1.3 *Se $1 \leq p < \infty$, $kp < n$ e $p \leq q \leq \frac{np}{n-kp}$ então*

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: O resultado é uma consequência dos seguintes fatos: $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, Teorema 1.14 e interpolação (veja a demonstração do Corolário 1.1).

■

O Teorema 1.14 nos mostra que o Espaço de Sobolev $W_0^{k,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^{p^*}(\Omega)$, onde $p^* = \dfrac{np}{n-kp}$ se $kp < n$. E, no caso em que $kp > n$, o espaço $L^{p^*}(\Omega)$ está continuamente imerso em $C^0(\Omega)$. Veremos agora, que a imersão possui uma propriedade de compacidade. Antes disso, vamos a uma definição:

Definição 1.11 *Dizemos que um espaço vetorial normado E está compactamente imerso em um espaço vetorial normado F quando toda sequência limitada em $(E, \|\cdot\|_E)$ possui uma subsequência convergente em $(F, \|\cdot\|_F)$.*

Denotaremos a imersão compacta de um espaço vetorial normado E em um espaço vetorial normado F por

$$E \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow F.$$

Teorema 1.15 (Teorema de Rellich-Kondrakhov) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Temos que,*

- *se $kp < n$ e $p \geq 1$, então $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow L^q(\Omega)$, onde $q < \dfrac{np}{n-kp}$;*
- *se $kp > n + mp$, então $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow C^m(\overline{\Omega})$.*

A demonstração deste Teorema será omitida, e pode ser consultada em [20], pág. 62.

Vamos agora mostrar que $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ está imerso continuamente em $L^q(\mathbb{R}^n)$, para todo $q \in [p, \infty)$, no caso em que $p = n$.

Teorema 1.16 *Seja $q \in [n, \infty)$. Então existe uma constante $C(n,q) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,q)\|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Pela Observação 1.5, pág. 24, temos que

$$\|u\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/n},$$

para toda $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$.

Seja $\rho > 1$ e $\psi = |u|^{\rho-1}u$ com $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Assim, a desigualdade acima para ψ resulta

$$\|u\|^{\rho}_{L^{\rho n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq \rho \prod_{i=1}^{n} \|\, |u|^{\rho-1} D_i u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/n}.$$

Logo, se $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\rho-1}|D_i u| = \|u\|^{\rho-1}_{L^{(\rho-1)q}(\mathbb{R}^n)} \|D_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Combinando as duas ultimas desigualdades, obtemos:

$$||u||^{\rho}_{\rho n/(n-1)} \leq \rho ||u||^{\rho-1}_{(\rho-1)q} \prod_{i=1}^{n} ||D_i u||^{1/n}_{p}.$$

Fazendo $p = n$, e então $q = n/(n-1)$, nesta ultima desigualdade e notando que a média geométrica é menor ou igual à média aritmética, obtemos:

$$||u||^{\rho}_{\rho n/(n-1)} \leq \frac{\rho}{n} ||u||^{\rho-1}_{(\rho-1)n/(n-1)} \sum_{i=1}^{n} ||D_i u||_n. \tag{1.18}$$

Assim, aplicando a desigualdade $ab \leq \dfrac{a^{\rho}}{\rho} + \dfrac{b^{\rho(\rho-1)}}{\rho(\rho-1)}$, temos

$$||u||_{\rho n/(n-1)} \leq \frac{\rho-1}{\rho} ||u||_{(\rho-1)n/(n-1)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ||D_i u||_n. \tag{1.19}$$

O que implica na seguinte desigualdade:

$$||u||_{(n+k)n/(n-1)} \leq \frac{n-1}{n+k} ||u||_n + \frac{(k+1)(2n+k)}{2n(n+k)} \sum_{i=1}^{n} ||D_i u||_n, \ \forall k = 0, 1, 2, \cdots$$

Esta desigualdade é provada por indução em k. Com efeito, fazendo $\rho = n$ em (1.18) resulta (1.19) com $k = 0$. Suponha (1.19) verdadeira para $k \geq 1$ e considere $k + 1$. Fazendo $\rho = n + k + 1$ em (1.18) e usando a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} ||u||_{(n+k+1)n/(n-1)} &\leq \frac{n+k}{n+k+1} \left[\frac{n-1}{n+k} ||u||_n + \frac{(k+1)(2n+k)}{2n(n+k)} \sum_{i=1}^{n} ||D_i u||_n \right] \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ||D_i u||_n \\ &= \frac{n-1}{n+k+1} ||u||_n + \frac{(k+2)(2n+k+1)}{2n(n+k+1)} \sum_{i=1}^{n} ||D_i u||_n, \end{aligned} \tag{1.20}$$

que é a desigualdade (1.19) com $k + 1$.

Seja $q \in [n, \infty)$, então existe $k = 0, 1, \cdots$ tal que $n \leq q \leq \frac{(n+k)n}{n-1}$. Pela Desigualdade de Interpolação, temos

$$||u||_q \leq \theta ||u||_n + (1-\theta) ||u||_{(n+k)n/(n-1)}, \tag{1.21}$$

onde $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{n} + \frac{1-\theta}{(n+k)n/(n-1)}$ e $0 \leq \theta \leq 1$. De (1.19) e (1.21) obtemos a desigualdade do lema. ■

Observação 1.7 *Como* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *é denso em* $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$*, o resultado vale para* $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$*.*

1.7 Mais Alguns Resultados Úteis

Nesta seção apresentaremos mais alguns resultados necessários para a discussão do assunto principal deste trabalho no Capítulo 3.

O próximo resultado é uma ferramenta para obter estimativas em equações diferenciais.

Lema 1.2 (Lema de Gronwall) *Sejam* $T > 0$ *e* $A,\ B \geq 0$*, constantes. Sejam* $\varphi,\ \lambda \in L^1((0,T))$, $\varphi \geq 0$, $\lambda \geq 0$ *tais que*

$$\varphi(t) \leq A + B \int_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds,$$

para quase todo $t \in (0,T)$*. Então*

$$\varphi(t) \leq Ae^{B\int_0^t \lambda(s)ds},$$

para todo $t \in (0,T)$*.*

Demonstração: Seja $\psi(t) = A + B \displaystyle\int_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds$. Temos que ψ é diferenciável em quase todo ponto. Assim,

$$\psi'(t) = \lambda(t)\varphi(t) \leq \lambda(t)\psi(t),$$

para quase todo $t \in (0,T)$. Logo,

$$\psi'(t) - \lambda(t)\psi(t) \leq 0.$$

E então,

$$[\psi'(t) - \lambda(t)\psi(t)]\, e^{-B\int_0^t \lambda(s)ds} \leq 0.$$

O que nos dá,

$$\frac{d}{dt}\left(\psi(t)e^{-B\int_0^t \lambda(s)ds}\right) \leq 0.$$

Logo $f(t) = \psi(t)e^{-B\int_0^t \lambda(s)ds}$ é uma função decrescente. Temos então, $f(t) \leq f(0)$, para todo $t \in (0,T)$. O que implica,

$$\psi(t)e^{-B\int_0^t \lambda(s)ds} \leq A.$$

Logo,

$$\psi(t) \leq Ae^{B\int_0^t \lambda(s)ds}$$

■

Corolário 1.4 *Sejam φ e ψ duas funções integráveis não-negativas em $[0, T]$ tais que para $\alpha \geq 0$ satisfazem*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_t^T \psi(s)\varphi(s)\, ds, \quad t \in [0, T] \; q.t.p.$$

Então

$$\varphi(t) \leq \alpha\, e^{\int_t^T \psi(s)\, ds} \; q.t.p.$$

Demonstração: Substituindo $\tau = T - s$ em $\varphi(t) \leq \alpha + \displaystyle\int_t^T \psi(s)\varphi(s)\, ds$, temos

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_0^{T-t} \psi(T-\tau)\varphi(T-\tau)\, d\tau.$$

O que é equivalente a:

$$\varphi(T-t) \leq \alpha + \int_{T-t}^{T} \psi(\sigma)\varphi(\sigma)\, d\sigma.$$

Agora, substituindo $s = T - \sigma$, obtemos

$$\varphi(T-t) \leq \alpha + \int_0^{t} \psi(T-s)\varphi(T-s)\, ds.$$

Pelo Lema de Gronwall 3.2, temos o resultado desejado. ∎

Teorema 1.17 *Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, então para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$ e todo $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $|h| < dist\,(\Omega', \partial\Omega)$,*

$$||u_h - u||_p \leq ||\nabla u||_p |h|. \tag{1.22}$$

Demonstração: Suponhamos primeiramente $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $p < \infty$. Sejam $x, h \in \mathbb{R}^n$ e considere

$$v(t) = u(x + th) \;\; t \in \mathbb{R}^n.$$

Temos que,

$$v'(t) = h \cdot \nabla u(x + th).$$

Logo,

$$u(x+h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)\, dt = \int_0^1 h \cdot \nabla u(x+th)\, dt.$$

O que implica,

$$|u_h(x) - u(x)|^p \quad \leq \quad |h|^p \int_0^1 |\nabla u(x+th))|^p \, dt.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} |u_h(x) - u(x)|^p \, dx &\leq |h|^p \int_{\Omega'} dx \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p \, dt. \\
&= |h|^p \int_0^1 dt \int_{\Omega'} |\nabla u(x+th)| dx \\
&= |h|^p \int_0^1 dt \int_{\Omega'+th} |\nabla u(y)| dy.
\end{aligned}$$

Fixando $h < dist(\Omega', \partial\Omega)$, existe um aberto $\Omega'' \subset\subset \Omega$ tal que $\Omega' + th \subset \Omega''$ para todo $t \in [0,1]$. Logo,

$$||u_h - u||_p^p \leq |h|^p \int_{\Omega''} |\nabla u(y)|^p \, dy.$$

Suponhamos agora, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p < \infty$. Como $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{1,p}(\Omega)$, existe uma sequência (u_k) em $C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ e $\nabla u_k \to \nabla u$ em $L^p(\Omega)$.

Aplicando (1.22) a u_k,

$$||u_{h_k} - u_k||_p \leq ||\nabla u_k||_p |h|. \tag{1.23}$$

calculando o limite quando $k \to \infty$ obtemos

$$||u_h - u||_p \leq ||\nabla u||_p |h|, \tag{1.24}$$

para $1 \leq p < \infty$. Para $p = \infty$, basta usar o resultado para $p < \infty$ e usar a Observação 1.3. ■

Observação 1.8 *Se $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ então, dada uma função arbitrária $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para qualquer $p \in (n, \infty)$, logo segue-se do Teorema 1.2, pág. 10 (ou Corolário 1.2, pág. 28) que u tem um representante contínuo. O Teorema 1.17 nos diz que este representante é localmente Lipschitz contínuo. No caso de Ω ser convexo, o resultado é global:*

Corolário 1.5 *Se $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, onde Ω é um aberto convexo, então*

$$|u(x) - u(y)| \leq ||\nabla u||_\infty |x - y|, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Demonstração: Dados $x, y \in \Omega$, como Ω é convexo, temos que o segmento $[x, y] \equiv \{x + t(y - x);\ 0 \le t \le 1\} \subset \Omega$. Seja $\delta < dist([x, y], \partial\Omega)$, $\delta > 0$, e $t_j = 0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ uma partição de $[0, 1]$ tal que $t_j - t_{j-1} < \delta$. Pondo $y_j = x + t_j(y - x)$, $j = 0, 1, \cdots, N$, temos $y_j \in B_\delta(y_{j-1}) \subset\subset \Omega$, $j = 1, 2, \cdots, N$. Logo, pelo Teorema 1.17, obtemos

$$|u(u_j) - u(y_{j-1})| \le \|\nabla u\|_\infty |y_j - y_{j-1}| = \|\nabla u\|_\infty |t_j - t_{j-1}||y - x|,$$

donde

$$|u(y) - u(x)| = |\sum_{j=0}^{N} u(y_j) - u(y_{j-1})| \le \sum_{j=0}^{N} \|\nabla u\|_\infty |t_j - t_{j-1}||y - x| = \|\nabla u\|_\infty |y - x|.$$

■

Teorema 1.18 (Desigualdade de Young para Convoluções) *Sejam* $p,\ q,\ r \in [1, \infty]$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. *Então*

$$\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

Para a demonstração, veja por exemplo, [10].

Observação 1.9 *Se* $f, g \in H^1(\mathbb{R}^n)$ *então* $\int f_{x_j} g_{x_k} = \int f_{x_k} g_{x_j}$.

Demonstração: Consideremos primeiro $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pela fórmula de integração por partes temos

$$\int f_{x_j} g_{x_k} dx = -\int f_{x_j x_k} g dx = \int f_{x_k} g_{x_j} dx. \tag{1.25}$$

Agora, tome $f, g \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Temos que $f = \lim_{i\to\infty} f_i$ e $g = \lim_{i\to\infty} g_i$, onde $\{f_i\}, \{g_i\}$ são sequências de funções em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Temos que (1.25) é verificada para cada $f_i, g_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $i \in \mathbb{N}$. Logo, temos

$$\int f_{x_j} g_{x_k} dx = \lim_{i\to\infty} \int f_{i_{x_j}} g_{i_{x_k}} dx = \lim_{i\to\infty} \int f_{i_{x_k}} g_{i_{x_j}} dx = \int f_{x_k} g_{x_j} dx.$$

■

CAPÍTULO 2

Dedução das Equações de Navier-Stokes

Neste capítulo faremos uma breve exposição sobre a dedução das equações de Navier-Stokes para fluidos compressíveis

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ (\rho u^j)_t + \operatorname{div}(\rho u^j u) + P(\rho)_{x^j} = \mu \Delta u^j + \lambda (\operatorname{div} u)_{x^j} + \rho f^j. \end{cases} \tag{2.1}$$

onde ρ e $u = (u^1, ..., u^n)$ são funções de x e t, representando a densidade e a velocidade do fluxo, respectivamente, $P = P(\rho)$ é a pressão, f é uma força externa dada e $\mu > 0$ e $\lambda \geq 0$ são constantes de viscosidade.

Estas equações são obtidas a partir das leis clássicas da Física de conservação de massa e de momento (a segunda lei de Newton). A primeira das equações acima, também conhecida como equação de continuidade, modela a conservação de massa e a segunda, a conservação de momento. A nossas referências principais para este capítulo são [18] e [1].

2.1 Introduzindo Conceitos Físicos e o Teorema do Transporte

Nesta seção introduziremos alguns conceitos com sua interpretação física para melhor entendimento das Equações de Navier-Stokes.

Seja $[0, T) \subset \mathbb{R}$ o intervalo de tempo no qual acompanhamos o movimento de uma porção de fluido e seja $\Omega_t \subset \mathbb{R}^n$ a posição desta porção no instante t. Temos duas maneiras de descrever o movimento do fluido. A primeira, chamada de *descrição Lagrangeana*, descreve o movimento de cada partícula do fluido individualmente. A trajetória das partículas pode ser descrita por uma equação

$$x = \phi(a, t),$$

onde a é a posição da partícula no instante $t = 0$, i.e., $a = \phi(a, 0)$ e $\phi : (0, T) \to \mathbb{R}^n$ é a chamada *função fluxo*; $x = \phi(a, t)$ é a posição da partícula que no instante $t = 0$ estava na posição a. As coordenadas dos pontos de Ω_0 são chamadas de *coordenadas materiais* . A outra descrição do movimento do fluido é a chamada *descrição Euleriana* e é baseada na determinação da velocidade $u(x, t)$ da partícula do fluido que passa pelo ponto x no tempo t. As componentes do vetor x são chamadas de *coordenadas espaciais*.

A relação entre as duas descrições é a seguinte

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(a, t),$$

onde $x = \phi(a, t)$.

Supondo que o campo u é diferenciável, em relação às variáveis x e t, aplicando a Regra da Cadeia, temos que a aceleração da partícula passando pelo ponto $x = (x^1, \cdots, x^n)$ no tempo t é dada por

$$\mathrm{a}(x, t) = \partial_t u(x, t) + \sum_{j=1}^{n} u_j(x, t)\partial_{x_j} u(x, t).$$

Omitindo as variáveis (x, t) e introduzindo a notação

$$\frac{D}{Dt} = u.\nabla + \partial_t, \tag{2.2}$$

onde $u \cdot \nabla$ é o operador $u^1\partial_{x_1} + \cdots + u^n\partial_{x_n}$, a aceleração pode então ser reescrita na forma

$$\mathrm{a} = \partial_t u + (u \cdot \nabla)u = \frac{Du}{Dt}.$$

O operador $\dfrac{D}{Dt}$ é chamado de *derivada material* e muitas vezes é denotado usando-se um ponto sobre a função, ou seja, $\dot{u} \equiv Du/Dt$.

Vamos supor nesta seção que o campo é de classe C^1 em $\Omega \times [0, T)$, onde Ω denota um domínio onde o fluido se movimenta, i.e. Ω é tal que $\Omega_t \subset \Omega$ para todo $t \in [0, T)$. Suporemos também que Ω é um aberto do $\mathbb{R}^n$ com uma fronteira suave, ou pelo menos tão regular que possamos aplicar o Teorema da Divergência.

A seguir enunciaremos um teorema, conhecido como Teorema do Transporte, que é usado de maneira fundamental para obter as equações (2.1), e daremos uma idéia da sua demonstração. Os campos no próximo Capítulo serão menos regulares do que C^1, mas a idéia da demonstração que daremos a seguir apresenta alguns elementos usados no Capítulo 3 de uma forma mais sofisticada, como por exemplo trajetórias de partículas e mudança de variável pelo fluxo do campo.

Seja $f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função que representa alguma quantidade física transportada pelas partículas do fluido.

Teorema 2.1 (Teorema do Transporte) *Supondo que u e f são funções em $C^1(\Omega \times [0, T))$, vale a seguinte regra de derivação:*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(x,t)dx = \int_{\Omega_t}\left[\frac{D}{Dt}f(x,t) + (div\, u)f\right]dx, \tag{2.3}$$

para todo $t \in [0, T)$.

Demonstração: Fazendo a mudança de variável $x = \phi(a, t)$ na integral do lado esquerdo de (2.3), temos

$$\int_{\Omega_t} f(x,t)dx \quad = \quad \int_{\Omega_0} f(\phi(a,t),t)|J\phi(a,t)|da, \tag{2.4}$$

onde $J\phi(a, t)$ é o determinante Jacobiano de $\phi(\cdot, t)$ no ponto $a \in \Omega_0$.

$J\phi(a, t)$ nunca se anula (justificaremos este fato no final da demonstração) e, como o Jacobiano é contínuo e $J\phi(a, 0) = 1$ para todo $a \in \Omega_0$ temos que o determinante J é sempre positivo, logo, podemos retirar o módulo no integrando do lado direito de (2.4).

A integral que resultou da mudança de variáveis tem domínio de integração independente do tempo, e podemos portanto trocar a ordem de derivação e integração. Temos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(x,t)dx &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_0} f(\phi(a,t),t)J\phi(a,t)da \\ &= \int_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial t}f(\phi(a,t),t)J\phi(a,t)da \;+\; \int_{\Omega_0} f(\phi(a,t),t)\frac{\partial}{\partial t}J\phi(a,t)da \end{aligned} \tag{2.5}$$

Trataremos logo da primeira integral do lado direito da igualdade acima. A derivada na integral é a derivada de f calculada ao longo de uma trajetória. Aparece então a derivada material que definimos anteriormente.

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} f(\phi(a,t),t) J\phi(a,t) da &= \int_{\Omega_0} \frac{D}{Dt} f(\phi(a,t),t) J\phi(a,t) da \\ &= \int_{\Omega_t} \frac{D}{Dt} f(x,t) dx. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Vamos agora tratar a última integral de (2.5). Usando que o determinante é uma função multilinear e que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \phi^i}{\partial a^i} = \frac{\partial}{\partial a^i}\frac{\partial \phi^i}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial a^i}[u^i(\phi(a,t),t)] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u^i}{\partial x^k}\frac{\partial \phi^k(a,t)}{\partial a^i},\end{aligned}$$

onde ϕ^i e a^i, $i = 1, \cdots, n$ denotam as coordenadas de ϕ e a, respectivamente, obtemos que

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \phi^1}{\partial a^1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \phi^1}{\partial a^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi^n}{\partial a^1} & \cdots & \frac{\partial \phi^n}{\partial a^n} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial a^1} & \cdots & \frac{\partial \phi^1}{\partial a^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \phi^n}{\partial a^1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \phi^n}{\partial y^n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^k}\frac{\partial \phi^k}{\partial a^1} & \cdots & \frac{\partial u^1}{\partial x^k}\frac{\partial \phi^k}{\partial a^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi^n}{\partial a^1} & \cdots & \frac{\partial \phi^n}{\partial a^n} \end{vmatrix} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial a^1} & \cdots & \frac{\partial \phi^1}{\partial a^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial u^n}{\partial x^k}\frac{\partial \phi^k}{\partial a^1} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial x^k}\frac{\partial \phi^k}{\partial y^n} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\partial J}{\partial t} &= \frac{\partial u^1}{\partial x^1} J + \cdots + \frac{\partial u^n}{\partial x^n} J \\ &= J \operatorname{div} u.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} f(\phi(a,t),t)\frac{\partial J}{\partial t}\phi(a,t)da &= \int_{\Omega_0} f(\phi(a,t),t)J\phi(a,t)\text{div } u(\phi(a,t),t)da \\ &= \int_{\Omega_t} f(x,t)\text{div } u(x,t)dx,\end{aligned}$$

o que demonstra (2.3).

Vamos agora justificar que $J\phi(a,t)$ nunca se anula. Como $\phi(a,0) = a$ e $\dfrac{\partial J}{\partial t} = J\text{div}u$, temos que J é solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}J\phi(a,t) = J \text{ div } u \\ J\phi(a,0) = 1. \end{cases}$$

Logo, resolvendo este PVI,

$$J\phi(x,t) = e^{\int_0^t \text{div } u(x,\tau)d\tau}, \quad x = \phi(a,t),$$

donde $J\phi(a,t) \neq 0$ para todo $(a,t) \in \Omega_0 \times [0,T)$.

■

2.2 Leis de Conservação e as Equações de Navier-Stokes

A seguir, introduziremos a formulação matemática das seguintes Leis da Física: A lei de conservação de massa, também conhecida como equação de continuidade e a lei de conservação do momento. E, por fim, chegaremos às Equações de Navier-Stokes com as quais estamos trabalhando.

A densidade de massa de um fluido é, por definição, uma função

$$\rho : \Omega \times [0,T) \to [0,\infty)$$

tal que ρ determina a massa $m(\Omega_t)$ da porção de fluido que ocupa uma região Ω_t no instante t da seguinte forma:

$$m(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \rho(x,t)dx.$$

A conservação de massa é dada pela equação

$$\int_{\Omega_0} \rho(x,0)dx = \int_{\Omega_t} \rho(x,t)dx,$$

válida para todo $t \in [0,T)$, onde Ω_0 é arbitrário. (Lembramos que Ω_t é a imagem de Ω_0 por $\phi(\cdot, t)$)

Assumindo que ρ tem derivadas contínuas, e aplicando o Teorema do Transporte 2.3, temos:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho(x,t)dx = \int_{\Omega_t} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } u\right)(x,t)dx. \tag{2.7}$$

Sendo Ω_t um domínio arbitrário, segue-se o integrando da última integral em (2.7) é identicamente nulo, ou seja,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } u = 0 \tag{2.8}$$

A equação (2.8) é a forma diferencial da lei de conservação de massa e é conhecida como a *equação da conservação da massa* ou *equação da continuidade*, pois ela expressa o fato de que o fluxo é um meio contínuo.

Usando a definição de derivada material (2.2) e a identidade

$$\text{div } (fu) = \nabla f.u + \text{div } u,$$

a equação (2.8) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } (\rho u) = 0.$$

Agora, estudaremos a lei de conservação do momento. Para isso, consideremos $\rho \in C^1(\Omega \times [0,T))$ e $u \in C^1(\Omega \times [0,T))$. O momento linear de uma porção de fluido que ocupa, no instante t, a região Ω_t é dada pela integral

$$\int_{\Omega_t} \rho(x,t)u(x,t)dx.$$

Pela segunda lei de Newton, a derivada em relação ao tempo desta quantidade é igual à força total atuando em Ω_t. Esta é igual à soma das forças externas que atuam no fluido (e.g. gravidade) e das forças internas, exercidas sobre Ω_t pelo restante do fluido. Denotando por f_{ext} a densidade de forças externas e por f_{int} a densidade de forças internas,temos:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho(x,t)u(x,t)dx = \int_{\Omega_t} f_{ext} + f_{int}dx.$$

Pelo teorema do transporte,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\rho(x,t)u(x,t)dx = \int_{\Omega_t}\frac{D}{Dt}(\rho u)(x,t) + (\text{div } u)(\rho u)(x,t)dx$$

Assim,

$$\int_{\Omega_t}\frac{D}{Dt}(\rho u)(x,t) + (\text{div } u)(\rho u)(x,t)dx = \int_{\Omega_t} f_{ext} + f_{int}dx,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega_t}\frac{D}{Dt}(\rho u^j)(x,t) + (\text{div } u)(\rho u^j)(x,t)dx = \int_{\Omega_t} f^j_{ext} + f^j_{int}dx, \quad j = 1,2,...,n,$$

onde o índice superior j indica as coordenadas dos vetores.

Logo,

$$\frac{D}{Dt}(\rho u^j) + (\text{div } u)(\rho u^j) = f^j_{ext} + f^j_{int}, \quad j = 1,2,...,n$$

Substituindo a fórmula da derivada material, temos:

$$u.\nabla(\rho u^j) + (\rho u^j)_t + \rho u^j(\text{div } u) = f^j_{ext} + f^j_{int}.$$

Como

$$\text{div}(\rho u^j u) = u.\nabla(\rho u^j) + \rho u^j \text{div } u,$$

obtemos:

$$(\rho u^j)_t + \text{div}(\rho u^j u) = f^j_{ext} + f^j_{int}. \tag{2.9}$$

Vamos escrever $f_{ext} = \rho f$ e vamos supor que o fluxo seja viscoso, com duas constantes de viscosidade, λ e μ e que a força interna seja da forma $f^j_{int} = \mu\Delta u^j + \lambda(\text{div } u)_{x_j} - P(\rho)_{x_j}$, onde $P(\rho)$ é uma função da densidade que mede a pressão do fluido. Assim, obtemos o seguinte sistema de equações - as equações de Navier-Stokes - que descrevem a evolução das variáveis densidade e velocidade do fluido:

$$\begin{cases} (\rho u^j)_t + \text{div}(\rho u^j v) + P(\rho)_{x_j} = \mu\Delta u^j + \lambda(\text{div } u)_{x_j} + \rho f^j, \\ \rho_t + \text{div}(\rho u) = 0. \end{cases}$$

A fórmula para as forças internas que tomamos como hipótese acima é uma forte restrição sobre o tipo de fluido que estamos considerando e pode ser deduzida por considerações físicas que omitimos aqui.

CAPÍTULO 3

Unicidade de solução fraca para as Equações de Navier-Stokes

Neste capítulo apresentaremos os resultados que são objetivos para este trabalho, utilizando as ferramentas que foram apresentadas nos capítulos anteriores.

3.1 Solução Fraca e Enunciado do Resultado Principal

Neste trabalho estamos interessados na classe de soluções fracas construídas por D. Hoff numa série de artigos ([6], [4], [5], [3]). Para uma descrição de várias propriedades destas soluções, v. a última parte da seção 1 de [7], mais precisamente, pág. 1747 a 1750, e o Teorema 2.1 e Corolário 2.2 de [8].

Dado $T > 0$, qualquer, uma *solução fraca* em $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ do sistema (2.1) é obtida da maneira usual, multiplicando as equações por funções testes e integrando formalmente por partes, ou seja, é um par de funções (ρ, u) com propriedades de integrabilidade adequadas tais que as equações

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho\varphi dx\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^n} (\rho\varphi_t + \rho u \cdot \nabla\varphi)\, dxdt \quad \text{e} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^n} \rho_0 u_0 \cdot \psi(\cdot, 0) dx &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [\rho u \cdot (\psi_t + \nabla\psi u) + (P(\rho) - \tilde{P})\text{div}\, \psi \\ &\quad -\mu \nabla u^j \cdot \nabla \psi^j - \lambda(\text{div}\, u)(\text{div}\, \psi) + \rho f \cdot \psi]\, dxdt \end{aligned} \tag{3.2}$$

são satisfeitas para funções testes suaves φ, ψ com suporte compacto em $\mathbb{R}^n \times [0,T)$, sendo $0 \le t_1 \le t_2 \le T$ arbitrários e $\rho(\cdot,0) \equiv \rho_0$.

Sejam $\tilde{\rho}$ uma constante positiva e $\tilde{P} = P(\tilde{\rho})$, um ponto referencial da pressão. As soluções fracas de D. Hoff satisfazem pelos menos as seguintes propriedades[1]:

$$\rho - \tilde{\rho} \text{ é uma função limitada de } [0,T] \text{ em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^n), \tag{3.3}$$

$$\rho(\cdot,t) \ge 0 \text{ q.t.p. para cada t} \in [0,T] \text{ (onde } \rho(\cdot,0) \equiv \rho_0 > 0\text{) e;} \tag{3.4}$$

$$\rho_0 u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n); \ \ \rho u,\ P(\rho) - \tilde{P},\ \nabla u,\ \rho f \in L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)); \tag{3.5}$$

$$\rho |u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n \times (0,T)). \tag{3.6}$$

Com (ρ, u) satisfazendo (3.3)-(3.6), as funções testes φ, ψ podem ser tomadas na classe das funções que são Lipschitzianas em $\mathbb{R}^n \times [0,T)$ com suporte compacto e tal que ψ, ψ_t, $\nabla\psi \in L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ e $\nabla\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T))$. A seguir descreveremos as propriedades adicionais que serão usadas para obter a unicidade de solução.

Para o enunciado do resultado principal, o Teorema 3.1 abaixo, precisaremos destacar duas quantidades que têm um papel relevante nas soluções que serão consideradas. Estas aparecem quando reescrevemos a equação do momento, a segunda equação de (2.1), formalmente (ou para soluções suaves) na forma

$$\begin{aligned} \rho \dot{u}^j &= [(\mu+\lambda)\operatorname{div} u - P(\rho) + P(\tilde{\rho})]_{x_j} + \mu(u^j_{x_k} - u^k_{x_j})_{x_k} + \rho f^j \\ &\equiv F_{x_j} + \mu\omega^{j,k}_{x_k} + \rho f^j, \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde

$$\omega^{j,k} := u^j_{x_k} - u^k_{x_j}$$

e

$$F := (\mu+\lambda)\operatorname{div} u - P(\rho) + P(\tilde{\rho}).$$

Em alguns textos F é denominada “effective viscous flux” e ω é a matrix de vorticidade. Sempre usaremos a notação de índices repetidos para significar uma soma, como por exemplo,
$\omega^{j,k}_{x_k} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{j,k}_{x_k}$.

[1] Para a existência de soluções fracas nestas condições veja e.g. a última parte da seção 1 de [7], mais precisamente, pág. 1747 a 1750, e o Teorema 2.1 e Corolário 2.2 de [8].

Mostraremos a unicidade de solução fraca para as Equações de Navier-Stokes para fluidos compressíveis (2.1), na classe que passamos a descrever. Sejam (ρ_0, u_0), $(\bar{\rho}_0, \bar{u}_0)$, f e $\bar{f}$ dados, e (ρ, u) e $(\bar{\rho}, \bar{u})$ soluções fracas de (2.1) satisfazendo, além de (3.3)-(3.6), as seguintes condições:

$$u,\ \bar{u} \in C(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap L^1((0,T), W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty_{loc}((0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^n)); \tag{3.8}$$

$$\rho - \tilde{\rho},\ \bar{\rho} - \tilde{\rho},\ u,\ \bar{u},\ f,\ \bar{f} \in L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)); \tag{3.9}$$

uma das soluções, (ρ, u), é tal que

$$\rho,\ \rho^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \ \text{ e} \tag{3.10}$$

e

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dxdt < \infty \tag{3.11}$$

para algum $r > n$, e a outra solução, $(\bar{\rho}, \bar{u})$, satisfaz

$$\int_0^T [||\bar{u}(\cdot,t)||_\infty^2 + t||\nabla\bar{u}(\cdot,t)||_\infty^2 + t||\nabla\bar{F}||_2^2 + (t||\nabla\bar{F}||_4^2)^a]dt < \infty, \tag{3.12}$$

$$\int_0^T [||\bar{u}(\cdot,t)||_\infty^2 + t||\nabla\bar{u}(\cdot,t)||_\infty^2 + t||\nabla\bar{\omega}||_2^2 + (t||\nabla\bar{\omega}||_4^2)^a]dt < \infty, \tag{3.13}$$

onde $\bar{F}$ e $\bar{\omega}$ são definidas em (3.7), os gradientes são em relação a x, e $a = \frac{2}{3}$ para $n = 2$ e $a = \frac{4}{5}$ para $n = 3$. Supomos ainda, que

$$\bar{f} \in L^1((0,T); L^{2q}(\mathbb{R}^n)) \tag{3.14}$$

para algum $q \in [1, \infty]$. Finalmente, assumimos que

$$\rho_0 - \bar{\rho}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{3.15}$$

e

$$\rho_0 - \bar{\rho}_0 \in (L^2 \cap L^{2p})(\mathbb{R}^n), \quad A_0 := \frac{\bar{\rho}_0}{\rho_0} \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{3.16}$$

onde p é o conjugado de q.

Visto as hipóteses para as soluções das Equações de Navier-Stokes, enunciaremos o resultado principal deste trabalho, no qual as soluções (ρ, u) e $(\bar{\rho}, \bar{u})$ são comparadas e a unicidade de solução fraca é obtida. Porém, antes é necessário destacar um dos pontos cruciais na análise de D. Hoff [7] que é a comparação das soluções sendo uma delas composta com a sua coordenada Lagrangeana. Mais precisamente, seja S a aplicação dada por

$$S(x,t) = \overline{X}(X(x,0,t),t,0), \tag{3.17}$$

onde X e $\overline{X}$ são, respectivamente, os fluxos de u e $\bar{u}$ (veja Seção 3.2). Em vez do procedimento padrão de subtrair as equações satisfeitas por (ρ, u) e $(\bar{\rho}, \bar{u})$ e estimar $u - \bar{u}$, tomamos as equações satisfeitas por u e $w(x,t) := \bar{u}(S(x,t),t)$ e estimamos $u - w$. Isto torna possível as estimativas dos vários termos de "erros", chegando a (3.18) abaixo. Da forma padrão seria necessário mais regularidade nas soluções, como observa D. Hoff [7], p. 1742.

No decorrer da demonstração do Teorema abaixo fez-se necessário algumas modificações em relação ao artigo original, sendo as duas mais importantes as seguintes: a regularização u^δ do campo u na solução da equação adjunta (3.39) foi modificada para $\eta^\delta * (\rho u)^\delta / \rho^\delta$, a fim de termos a equação de conservação de massa verificada para u^δ; as contas finais - do tipo "Gronwall" - para estimarmos $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u - \bar{u} \circ S|^2 dx\, dt$ em todo o intervalo $[0,T]$ a partir de subintervalos estão mais detalhadas aqui na dissertação e feitas de uma maneira mais clara. Para estes dois pontos contamos com a colaboração de D. Hoff, que nos sugeriu por email essas modificações.

Teorema 3.1 *Dados k, M, T, constantes positivas, $P(\rho) = k\rho$, $r > n$, onde $n = 2, 3$, existe uma constante $C = C(k, M, T, r)$ tal que se (ρ, u) e $(\bar{\rho}, \bar{u})$ são soluções fracas de (2.1) satisfazendo (3.4) - (3.9), com (ρ, u) satisfazendo (3.10) e (3.11) e $(\bar{\rho}, \bar{u})$ satisfazendo (3.12) e (3.14), e além disso, (3.16) é satisfeita, e se todas as normas referidas são limitadas por M, então*

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u - \bar{u}|^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}} + \sup_{0 \le t \le T} \|(\rho - \bar{\rho})(\cdot, t)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^n)} \\ &\qquad \le C \left[\|\rho_0 - \bar{\rho}_0\|_{L^2 \cap L^{2p}} + \|\rho_0 u_0 - \bar{\rho}_0 \bar{u}_0\|^{L^2} + \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |f - \bar{f} \circ S|^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \right], \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde $S(x,t)$ é definida em (3.17).

Se $\int_0^T t \|\nabla \bar{f}(\cdot, t)\|_{L^\infty} dt \le M$, então $\bar{f} \circ S$ pode ser substituído por $\bar{f}$ em (3.18) e vale a unicidade. Além disso, este resultado ainda vale sem restringirmos a função pressão P se

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\nabla\left(\frac{P(\rho(\cdot,t))-P(\bar{\rho}(\cdot,t))}{\rho(\cdot,t)-\bar{\rho}(\cdot,t)}\right)\right\|_{L^{\alpha}}<\infty, \tag{3.19}$$

onde $\alpha > 2$ *quando* $n = 2$ *e* $\alpha = 3$ *quando* $n = 3$. *Neste caso a constante C depende também de* α *e do valor do* sup *acima.*

Observe que temos a unicidade de solução fraca na segunda parte do Teorema, onde acrescentamos a condição $\int_0^T t\|\nabla \bar{f}(\cdot,t)\|_{L^\infty}dt \leq M$ e podemos substituir $\bar{f}\circ S$ por $\bar{f}$ em (3.18). Observe também que esta nova estimativa (com $\bar{f}$ no lugar de $\bar{f}\circ S$) nos dá mais do que a unicidade de solução, nos dá a estabilidade de soluções no sentido de que soluções com dados iniciais próximos permanecem próximas para todo tempo $t \in [0,T]$.

3.2 Estrutura Lagrangeana

Discutiremos, nesta seção, resultados e propriedades sobre as trajetórias das partículas $X(y,t,s)$, com um campo de velocidade u satisfazendo (3.8), que serão necessárias na demonstração do Teorema 3.1.

Lema 3.1 *Seja u satisfazendo (3.8). Então existe uma única função* $X \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T]^2)$ *satisfazendo*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t}(y,t,s) = u(X(y,t,s),t) \\ X(y,s,s) = y, \end{cases} \tag{3.20}$$

$X(\cdot,t,s)$ *é uniformemente Lipschitziana em* $\mathbb{R}^n$ *para* $(t,s) \in [0,T]^2$*, isto é, existe uma constante C tal que*

$$\left\|\frac{\partial X}{\partial y}(\cdot,t,s)\right\|_{\infty} \leq C,$$

para todo $(t,s) \in [0,T]^2$.

Além disso, dado $\tau > 0$ *existe uma constante* $C = C(\tau)$ *tal que*

$$\left|\frac{\partial X}{\partial t}(y,t,s)\right| \leq C(\tau)$$

para todo $(y, s) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$ *e quase todo* $t \in (\tau, T)$*, e*

$$\left|\frac{\partial X}{\partial s}(y, t, s)\right| \leq C(\tau)$$

para todo $(y, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$ *e quase todo* $s \in (\tau, T)$*.*

Demonstração: Seja, primeiramente, $s > 0$. Como $u \in C(\mathbb{R}^n \times (0, T])$, temos pelo Teorema de Peano, que o PVI (3.20) possui uma solução, definida em algum intervalo I contendo s. Como $u \in L^1((0, T), L^\infty(\mathbb{R}^n))$, podemos provar que qualquer solução de (3.20) é uma função uniformemente contínua, logo, podemos tomar $I = [0, T]$.

Agora, se $s = 0$, tomemos uma sequência (s_n) de termos positivos tal que $s_n \to 0$. Denotemos por φ_n uma solução de (3.20) com $s = s_n$ e com ponto inicial y. Usando o Corolário 1.5, pág. 33, notemos que,

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| &= \left|\int_{s_n}^t u(\varphi_n(\tau), \tau)\, d\tau - \int_{s_m}^t u(\varphi_m(\tau), \tau)\, d\tau\right| \\
&\leq \left|\int_{s_n}^t \|\nabla u(\cdot, \tau)\|_\infty |\varphi_n(\tau) - \varphi_m(\tau)|\, d\tau\right| + \left|\int_{s_n}^{s_m} u(\varphi_m(\tau), \tau) d\tau\right| \\
&\leq \left|\int_{s_n}^t \|\nabla u(\cdot, \tau)\|_\infty |\varphi_n(\tau) - \varphi_m(\tau)|\, d\tau\right| + \left|\int_{s_n}^{s_m} \|u(\cdot, \tau)\|_\infty d\tau\right|.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Lema de Gronwall 3.2, temos

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| &\leq \left|\int_{s_n}^{s_m} \|u(\cdot, \tau)\|_\infty d\tau\right| e^{\left|\int_{s_n}^t \|\nabla u(\cdot, \tau)\|_\infty\, d\tau\right|} \\
&\leq \left|\int_{s_n}^{s_m} \|u(\cdot, \tau)\|_\infty d\tau\right| e^{\left|\int_0^T \|\nabla u(\cdot, \tau)\|_\infty\, d\tau\right|} \\
&\leq \left|\int_{s_n}^{s_m} \|u(\cdot, \tau)\|_\infty d\tau\right| e^{\|\nabla u\|_{L^1((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^n))}}.
\end{aligned}$$

Portanto, (φ_n) é uma sequência de Cauchy em $C([0, T])$ com a norma do supremo. Seja φ o limite desta sequência em $C([0, T])$. Tomando o limite quando $n \to \infty$ na equação

$$\varphi_n(t) = y + \int_{s_n}^t u(\varphi_n(\tau), \tau)\, d\tau,$$

podemos provar que

$$\varphi(t) = y + \int_0^t u(\varphi(\tau), \tau)\, d\tau.$$

logo, φ é solução de (3.20) com $s = 0$.

Mostraremos agora a unicidade de solução. Para isto, suponhamos que o PVI (3.20) possua duas soluções, X^1 e X^2. Considere $W = X^2 - X^1$. Temos então, que W é solução do seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t}(y,t,s) = u(X^2(y,t,s),t) - u(X^1(y,t,s),t) \\ W(y,s,s) = 0. \end{cases} \tag{3.21}$$

Assim,

$$W(y,t,s) = \int_s^t \frac{\partial W}{\partial t}(y,\tau,s)d\tau.$$

E então,

$$\begin{aligned} ||W(y,t,s)|| &= \left|\int_s^t \left|\frac{\partial W}{\partial t}(y,\tau,s)\right| d\tau\right| \\ &= \left|\int_s^t \left|u(X^2(y,\tau,s),\tau) - u(X^1(y,\tau,s),\tau)\right| d\tau\right| \\ &\leq \left|\int_s^t ||\nabla u(\cdot,\tau)||_\infty ||X^2(y,\tau,s) - X^1(y,\tau,s)|| d\tau\right| \\ &= \left|\int_s^t |||\nabla u(\cdot,\tau)||_\infty ||W(y,\tau,s)|| d\tau\right|. \end{aligned}$$

Na penúltima desigualdade usamos novamente o Corolário 1.5, pág.33. Agora, pelo Teorema de Gronwall, temos

$$||W(y,t,s|| \leq 0, \ \forall\, t \in (0,T).$$

Logo, $X^1 = X^2$, e o PVI (3.20) tem única solução.

A seguir vejamos que X é uniformemente Lipschitziana em $\mathbb{R}^n$ para $(t,s) \in [0,T]^2$. Temos que,

$$X(y_i,t,s) = y_i + \int_s^t u(X(y_i,\tau,s),\tau)d\tau, \quad i = 1,2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |X(y_2,t,s) - X(y_1,t,s)| &\leq |y_2 - y_1| + \int_s^t \left[u(X(y_2,\tau,s),\tau) - u(X(y_1,\tau,s),\tau)\right] d\tau \\ &\leq |y_2 - y_1| + \int_s^t ||\nabla u||_\infty |X(y_2,\tau,s) - X(y_1,\tau,s)|\, d\tau. \end{aligned}$$

Na ultima desigualdade usamos o Corolário 1.5. Agora, pelo Lema de Gronwall,

$$|X(y_2,t,s) - X(y_1,t,s)| \leq C|y_2 - y_1|, \ \forall\, (t,s) \in (0,T)^2,$$

com $C = e^{\int_0^T \|\nabla u(\cdot,t)\|_\infty dt}$. Notemos que $C < \infty$ devido a condição (3.8). Portanto, $X(\cdot, t, s)$ é Lipschitziana em $\mathbb{R}^n$, uniformemente em relação a $(t, s) \in ([0, T]^2$, e temos a primeira desigualdade do Lema.

Fazendo uma estimativa análoga, podemos mostrar que

$$|X(y, t, s) - X(y_1, t_1, s_1)| \leq C\left(|y_1 - y_2| + \left|\int_{s_1}^{s_2} \|u(\cdot, \tau)\|_\infty d\tau\right| + \left|\int_{t_1}^{t} \|u(\cdot, \tau)\|_\infty d\tau\right|\right),$$

logo temos que $X \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T]^2)$, tendo em vista as condições em (3.8).

Passamos agora, para a demonstração das duas outras desigualdades.

Em relação a $\dfrac{\partial X}{\partial t}$, temos:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial X}{\partial t}(y, t, s)\right| &= \|u(X(y, t, s), t)\| \\
&\leq \|u(\cdot, t)\|_{\infty;\mathbb{R}^n} \\
&= \sup_{\tau \leq t \leq T} \text{ess}\|u(\cdot, t)\|_{\infty;\mathbb{R}^n} = C(\tau),
\end{aligned}$$

para quase todo $t \in (\tau, T)$, pois $u \in L^\infty_{loc}((0, T); L^\infty(\mathbb{R}^n))$.

Vejamos o que temos em relação a $\dfrac{\partial X}{\partial s}$. Da equação

$$X(y, t, s) = y + \int_s^t u(X(y, \tau, s), \tau) d\tau,$$

para $(y, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$ e $s_1, s_2 \geq \tau$, temos:

$$\begin{aligned}
|X(y, t, s_2) - X(y, t, s_1)| &\leq \left|\int_{s_1}^{s_2} u(X(y, \tau, s_2), \tau)\, d\tau\right| + \left|\int_{s_1}^{t} [u(X(y, \tau, s_2), \tau) - u(X(y, \tau, s_1), \tau)]\, d\tau\right| \\
&\leq |s_2 - s_1| \sup_{s \in [\tau, T]} \text{ess}\|u(\cdot, s)\|_{\infty;\mathbb{R}^n} + \left|\int_{s_1}^{t} \|u(\cdot, s)\|_{\infty;\mathbb{R}^n} |X(y, \tau, s_2) - X(y, \tau, s_1)| d\tau\right|.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Lema de Gronwall

$$|X(y, t, s_2) - X(y, t, s_1)| \leq |s_2 - s_1| \sup_{s \in [\tau, T]} \text{ess}\|u(\cdot, s)\|_{\infty;\mathbb{R}^n} e^{\|\nabla u\|_{L^1((0,T);L^\infty(\mathbb{R}^n))}},$$

donde $X(y, t, \cdot)$ é Lipschitziana e

$$\left|\frac{\partial X}{\partial s}\right| \leq C(\tau),$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$ e quase todo $s \in [\tau, T]$.

■

Lema 3.2 *Sejam u satisfazendo (3.8) e ρ satisfazendo (3.4). Assuma que ρu seja localmente integrável em $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ e que a forma fraca (3.1) da equação da massa é verificada. Se E_{t_0} é um conjunto mensurável limitado de $\mathbb{R}^n$ e $E_t = \{X(y,t,t_0) : y \in E_{t_0}\}$, então*

$$\int_{E_t} \rho(x,t)\, dx = \int_{E_{t_0}} \rho(y,t_0)\, dy, \tag{3.22}$$

e,

$$\rho(X(\cdot,t,t_0),t)|det\nabla_y X(\cdot,t,t_0)| = \rho(\cdot,t_0) \tag{3.23}$$

para quase todo ponto de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Para provar a equação de conservação de massa, (3.22), aplicaremos (3.1) para a solução $\varphi^{\eta,\delta}$ do sistema

$$\begin{cases} \varphi_t^{\eta,\delta} + \nabla\varphi^{\eta,\delta}\cdot u^\delta = 0 \\ \varphi^{\eta,\delta}(\cdot,t_0) = \chi^\eta_{E_{t_0}}, \end{cases} \tag{3.24}$$

onde u^δ e $\chi^\eta_{E_{t_0}}$ são aproximações suaves ou mollifier de u e da função característica de E_{t_0}, respectivamente. Porém, antes disto faremos algumas estimativas que serão usadas para este fim.

Podemos estender u a todo o $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, pondo $u(x,t) = 0$, se $t \notin [0,T]$. Temos que, $u^\delta = u * \theta_\delta$, onde θ_δ é a aproximação suave da identidade em $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, e podemos tomar θ_δ da forma de variáveis separadas $\theta_\delta(x,t) = \psi_\delta(x)\xi_\delta(t)$, onde ψ_δ e ξ_δ são aproximações suaves da identidade em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}$, respectivamente.

Mostraremos agora que $||u^\delta||_{L^1((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^n))} \leq ||u||_{L^1((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^n))}$. Para tanto, usaremos as seguintes aplicações da Desigualdade de Young para Convoluções:

$$||f*g||_{L^1} \leq ||f||_{L^1}||g||_{L^1},$$

$$||f*g||_{L^\infty} \leq ||f||_{L^\infty}||g||_{L^1}.$$

Temos que,

$$\begin{aligned} u^\delta(x,t) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y,t-t')\theta_\delta(y,t')\, dydt' \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(u(\cdot,t-t')*\theta_\delta(\cdot,t')\right)(x)\, dt'. \end{aligned}$$

Então,

$$
\begin{aligned}
|u^\delta(x,t)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |(u(\cdot,t-t') * \theta_\delta(\cdot,t'))(x)|dt' \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} ||u(\cdot,t-t')||_{L^\infty} ||\theta_\delta(\cdot,t')||_{L^1} dt',
\end{aligned}
$$

o que implica,

$$
\begin{aligned}
||u^\delta(\cdot,t)||_{L^\infty} &\leq \int_{\mathbb{R}} ||u(\cdot,t-t')||_{L^\infty} ||\theta_\delta(\cdot,t')||_{L^1} dt' \\
&= ||u(\cdot,t-t')||_{L^\infty} * ||\theta_\delta(\cdot,t')||_{L^1}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\int_0^T ||u^\delta(\cdot,t)||_{L^\infty}\, dt &\leq ||\, ||u^\delta(\cdot,\cdot)||_{L^\infty}||_{L^1(\mathbb{R})} \\
&\leq ||\, ||u^\delta(\cdot,\cdot)||_{L^\infty}||_{L^1(\mathbb{R})} ||\theta_\delta||_{L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})} \\
&= \int_{\mathbb{R}} ||u(\cdot,t)||_{L^\infty}\, dt \\
&= \int_0^T ||u(\cdot,t)||_{L^\infty}\, dt,
\end{aligned}
$$

e obtemos o que desejamos.

Consequentemente, como $\nabla u^\delta = \nabla u * \theta_\delta$, temos também,

$$
||\nabla u^\delta||_{L^1((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^n))} \leq ||\nabla u||_{L^1((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^n))}.
$$

Portanto,

$$
||u^\delta||_{L^1((0,T),W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))} \leq ||u||_{L^1((0,T),W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))}
$$

Afirmamos que $X^\delta(y,t,s) \to X(y,t,s)$ quando $\delta \to 0$, para quaisquer $y \in \mathbb{R}^n$ e $t, s \in [0,T]$. De fato,

$$
\begin{aligned}
|X^\delta(y,t,s) - X(y,t,s)| &\leq \left| \int_s^t |u^\delta(X^\delta(y,t',s),t') - u(X(y,t',s),t')|\, dt' \right| \\
&\leq \left| \int_s^t |u^\delta(X^\delta(y,t',s),t') - u^\delta(X(y,t',s),t')|\, dt' \right| \\
&+ \left| \int_s^t |u^\delta(X(y,t',s),t') - u(X(y,t',s),t')|\, dt' \right| \\
&\leq \left| \int_s^t \|\nabla u^\delta(.,t')\|_\infty |X^\delta(y,t',s) - X(y,t',s)|\, dt' \right| \\
&+ \left| \int_s^t |u^\delta(X(y,t',s),t') - u(X(y,t',s),t')|\, dt' \right| \\
&\leq \left| \int_s^t \|\nabla u(.,t')\|_\infty |X^\delta(y,t',s) - X(y,t',s)|\, dt' \right| \\
&+ \left| \int_s^t |u^\delta(X(y,t',s),t') - u(X(y,t',s),t')|\, dt' \right|.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema de Gronwall , pág. 53,

$$
|X^\delta(y,t,s) - X(y,t,s)| \leq \left| \int_s^t |u^\delta(X(y,t',s),t') - u(X(y,t',s),t')|\, dt' \right| e^{\int_0^T \|\nabla u(.,t'\|_\infty dt'}.
$$

Como $u \in C(\mathbb{R}^n \times (0,T])$, temos que $u^\delta(x,t) \to u(x,t)$, quando $\delta \to 0$, $\forall t > 0$. Além disso, $|u^\delta(X(y,t',s),t') - u(X(y,t',s),t')| \leq 2\|u(.,t)\|_\infty$ e $u \in L^1((0,T); W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))$. Logo, aplicando o teorema da convergência dominada, obtemos o resultado desejado.

Temos também que a função $t' \mapsto \varphi^{\eta,\delta}(X^\delta(y,t',t),t')$, $t' \geq 0$, é constante pois sua derivada é $\varphi_t^{\eta,\delta} + u^\delta \nabla \varphi^{\eta,\delta} = 0$. Assim, $\varphi^{\eta,\delta}(y,t) = E_{t_0}^\eta(X^\delta(y,t_0,t))$.

Vamos mostrar agora, que $|\nabla \varphi^{\eta,\delta}| \leq C(\eta)$, onde $C(\eta)$ é uma constante que depende de η e não depende de δ. Temos que,

$$
\nabla \varphi^{\eta,\delta} = \nabla E_{t_0}^\eta(X^\delta(y,t_0,t)) \cdot \nabla X^\delta(y,t_0,t).
$$

Note que E_{t_0} é limitado, logo $E_{t_0}^\eta$ tem suporte compacto e

$$
|\nabla E_{t_0}^\eta(X^\delta(y,t_0,t))| \leq \|\nabla E_{t_0}^\eta\|_\infty.
$$

E também, como $\dfrac{\partial}{\partial t'} X^\delta(y,t',t) = u^\delta(X^\delta(y,t',y),t')$, temos que

$$\frac{\partial}{\partial t'}\nabla X^{\delta}(y,t',t) = \nabla u^{\delta}(X^{\delta}(y,t',y),t')\cdot\nabla_y X^{\delta}(y,t',t).$$

Assim,

$$\int_t^{t'}\frac{\partial}{\partial s}\nabla X^{\delta}(y,s,t)\,ds \;=\; \int_t^{t'}\nabla u^{\delta}(X^{\delta}(y,s,t),s)\cdot\nabla_y X^{\delta}(y,s,t)\,ds,$$

o que implica,

$$\nabla X^{\delta}(y,t',t) - \nabla X^{\delta}(y,t,t) \;=\; \int_t^{t'}\nabla u^{\delta}(X^{\delta}(y,s,t),s)\cdot\nabla_y X^{\delta}(y,s,t)$$

Logo,

$$|\nabla X^{\delta}(y,t',t)| \leq 1 + \left|\int_t^{t'}\|\nabla u^{\delta}(\cdot,s)\|_\infty|\nabla_y X^{\delta}(y,s,t)|\,ds\right|.$$

Pelo lema de Gronwall,

$$|\nabla X^{\delta}(y,t',t)| \leq e^{\left|\int_t^{t'}\|\nabla u^{\delta}(\cdot,s)\|_\infty ds\right|}.$$

Logo,

$$|\nabla\varphi^{\eta,\delta}| \leq \|\nabla E^{\eta}_{t_0}\|_\infty\, e^{\left|\int_t^{t'}\|\nabla u^{\delta}(\cdot,s)\|_\infty ds\right|} \leq \|\nabla E^{\eta}_{t_0}\|_\infty\, e^{\left|\int_t^{t'}\|\nabla u(\cdot,s)\|_\infty ds\right|} \leq C(\eta).$$

Temos também que $X(X(y,t,s),s,t) = y$, para quaisquer $y \in \mathbb{R}^n$ e $s,t \in [0,T]$. De fato, seja $\varphi(t') = X(X(y,t,s),t',t)$, $t' \in [0,T]$. Temos:

$$\varphi'(t') = X_{t'}(X(y,t,s),t',t) = u(X(X(y,t,s),t',t).$$

Assim, φ é solução do PVI

$$\begin{cases} \varphi'(t') = u(\varphi(t'),t') \\ \varphi|_{t'=t} = X(y,t,s). \end{cases} \tag{3.25}$$

Como $\psi(t') = X(y,t',s)$ também é solução do PVI (3.25), temos pela unicidade de solução que $\varphi(t') = X(y,t',s)$, para todo $t' \in [0,T]$. Em particular, tomando $t' = s$, obtemos que

$$X(X(y,t,s),s,t) = X(y,s,s) = y. \tag{3.26}$$

Verifiquemos agora que $\lim\limits_{\eta\to 0}\lim\limits_{\delta\to 0}\varphi^{\eta,\delta}(y,t) = \chi_{E_t}(y)$. Temos que,

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\varphi^{\eta,\delta}(y,t) &= \lim_{\delta\to 0}E^{\eta}_{t_0}(X^{\delta}(y,t_0,t))\\ &= E^{\eta}_{t_0}(X(y,t_0,t)).\end{aligned}$$

Temos também,

$$\begin{aligned}\lim_{\eta\to 0}E^{\eta}_{t_0}(X(y,t_0,t)) &= \chi_{E_{t_0}}(X(y,t_0,t))\\ &= \chi_{X(\cdot,t_0,t)^{-1}(E_{t_0})}.\end{aligned}$$

E, $X(\cdot,t_0,t)^{-1}(E_{t_0}) = E_t$, por (3.26). Portanto, temos o que queríamos.

Mostremos ainda que *supt* $\varphi^{\eta,\delta}(\cdot,t)\subset \overline{E_{t_0}+B_{\eta+\|u\|_{L^1((0,T);L^\infty(\mathbb{R}^n))}}(0)}$. Como,

$$X^{\delta}(y,t_0,t) = y+\int_{t_0}^{t}u^{\delta}(X^{\delta}(y,t',t),t')dt'. \tag{3.27}$$

Temos que,

$$\begin{aligned}|X^{\delta}(y,t_0,t)-y| &\le \left|\int_{t_0}^{t}\|u^{\delta}(\cdot,t')\|_{\infty}\,dt'\right|\\ &\le \int_0^T\|u^{\delta}(\cdot,t')\|_{\infty}\,dt'\\ &= \|u^{\delta}\|_{L^1((0,T);L^\infty(\mathbb{R}^n))}\\ &= \|u\|_{L^1((0,T);L^\infty(\mathbb{R}^n))}.\end{aligned}\tag{3.28}$$

Seja $y\notin \overline{E_{t_0}+B_{\eta+\|u\|_{L^1((0,T);L^\infty(\mathbb{R}^n))}}(0)}$. Então,

$$dist(y,E_{t_0}+B_{\eta})\ge \|u\|_{L^1((0,T);L^\infty(\mathbb{R}^n))}.$$

Daí e de (3.28), temos que se $y\notin \overline{E_{t_0}+B_{\eta+\|u\|_{L^1((0,T);L^\infty(\mathbb{R}^n))}}(0)}$ então

$$X^{\delta}(y,t_0,t)\notin \overline{E_{t_0}+B_{\eta}}.$$

Logo, $\varphi^{\eta,\delta}(y,t) = E^{\eta}_{t_0}(X^{\delta}(y,t_0,t)) = 0$, para todo $y\notin \overline{E_{t_0}+B_{\eta+\|u\|_{L^1((0,T);L^\infty(\mathbb{R}^n))}}(0)}$, visto que $suppE^{\eta}_{t_0}\subset \overline{E_{t_0}+B_{\eta}}$.

Finalmente, aplicando (3.1) para $\varphi^{\eta,\delta}$, obtemos

$$\int \varphi^{\eta,\delta}(y,t)\rho(y,t)dy - \int \varphi^{\eta,\delta}(y,t_0)\rho(y,t_0)dy = \int_{t_0}^{t}\int \rho\varphi_t^{\eta,\delta} + \rho u\cdot\nabla\varphi^{\eta,\delta}\ dydt'$$

e vamos tomar os limites quando $\delta,\eta \to 0$, para obtermos (3.22).

Calcularemos primeiro o limite quando $\delta \to 0$ e em seguida calcularemos o limite com $\eta \to 0$. Podemos aplicar o teorema da convergência dominada pois as funções são uniformemente limitadas e têm suporte num compacto independente de η e δ. Temos que,

$$\begin{aligned}\lim_{\eta\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int \varphi^{\eta,\delta}(y,t)\rho(y,t)dy &= \int \lim_{\eta\to 0}\lim_{\delta\to 0}\varphi^{\eta,\delta}(y,t)\rho(y,t)dy\\ &= \int \lim_{\eta\to 0} E_{t_0}^{\eta}(X(y,t_0,t))\rho(y,t)dy\\ &= \int \chi_{E_t}(y)\rho(y,t)dy.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\lim_{\eta\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int \varphi^{\eta,\delta}(y,t_0)\rho(y,t_0)dy = \int \chi_{E_{t_0}}(y)\rho(y,t_0)dy.$$

Por outro lado,

$$\lim_{\eta\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{t_0}^{t}\int \rho\varphi_t^{\eta,\delta} + \rho u\cdot\nabla\varphi^{\eta,\delta}\ dydt' \;=\; \lim_{\eta\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{t_0}^{t}\int \rho(u-u^{\delta})\cdot\nabla\varphi^{\eta,\delta}\ dydt' = 0,$$

onde na ultima igualdade usamos que $|\nabla\varphi^{\eta,\delta}| \le C(\eta)$ e $u^{\delta} \to u$.

Assim,

$$\int \chi_{E_t}(y)\rho(y,t)dy - \int \chi_{E_{t_0}}(y)\rho(y,t_0)dy = 0.$$

Portanto,

$$\int_{E_t}\rho(y,t)dy = \int_{E_{t_0}}\rho(y,t_0)dy.$$

Vamos agora, provar (3.23). Usando a mudança de variável Lipschitziana y“ = ”$X(y,t,t_0)$ (v. Lema 3.1 e (3.17), pág. 46, temos que

$$\begin{aligned}\int_{E_{t_0}}\rho(y,t_0)dy &= \int_{E_t}\rho(y,t)dy\\ &= \int_{E_{t_0}}\rho(X(y,t,t_0),t)|\det\nabla_y X(y,t,t_0)|dy.\end{aligned}$$

Como isto é válido para todo E_{t_0}, conjunto mensurável limitado, obtemos:

$$\rho(X(\cdot,t,t_0),t)|det\nabla_y X(\cdot,t,t_0)| = \rho(\cdot,t_0), \quad \text{q.t.p.}$$

■

Lema 3.3 *Suponhamos que (ρ,u) e $(\bar\rho,\bar u)$ satisfaçam os Lemas (3.1) e (3.2). Sejam X e $\overline{X}$ satisfazendo o Lema (3.1), e definamos*

$$\begin{cases} S(x,t) = \overline{X}(X(x,0,t),t,0), \\ S^{-1}(x,t) = X(\overline{X}(x,0,t),t,0). \end{cases} \tag{3.29}$$

Então

(a) $S^{\pm1}$ *é contínua em* $\mathbb{R}^n\times[0,T]$*, Lipschitziana em* $\mathbb{R}^n\times[\tau,T]$ *para todo* $\tau>0$*, e* $S^{\pm1}(\cdot,t)$ *é uniformemente Lipschitziana em* $\mathbb{R}^n\times[0,T]$*, isto é, existe uma constante C tal que*

$$\|\nabla S^{\pm1}(\cdot,t)\|_\infty \le C, \quad t\in[0,T];$$

(b) $(S_t+\nabla S\, u)(x,t) = \bar u(S(x,t),t)$ *q.t.p. em* $\mathbb{R}^n\times(0,T)$*;*

(c) $\bar\rho(S(x,t),t)\rho_0(X(x,0,t))\ \det\nabla S(x,t) = \rho(x,t)\bar\rho_0(X(x,0,t))$ *q.t.p. em* $\mathbb{R}^n\times(0,T)$;

(d) Se $u,\bar u\in L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))$*, então existe uma constante C tal que*

$$\int |x-S(x,t)|^2\,dx \le Ct\int_0^t\int |u(x,s)-\bar u(S(x,s),s)|^2\,dxds,$$
$$\int |x-S^{-1}(x,t)|^2\,dx \le Ct\int_0^t\int |u(S^{-1}(x,s),s)-\bar u(x,s)|^2\,dxds.$$

Demonstração: (a) Como $X,\overline{X}\in C(\mathbb{R}^n\times[0,T]^2)$, temos que $S^{\pm1}$ é contínua em $\mathbb{R}^n\times[0,T]$. Além disso, pela Regra da Cadeia e omitindo a dependência nas variáveis, temos

$$\nabla S = \nabla\overline{X}\cdot\nabla X, \quad \text{q.t.p.},$$

logo, pelo Lema 3.1, obtemos

$$\|\nabla S\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,T])} \le \|\nabla\overline{X}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,T])}\|\nabla X\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,T])} \le C. \tag{3.30}$$

Mais detalhadamente, temos que $X(x,t,s) = (X^1(x,t,s),\dots,X^n(x,t,s))$, $\overline{X}(x,t,s) = (\overline{X}^1(x,t,s),\dots,\overline{X}^n(x,t,s))$ e $S(x,t) = \overline{X}(X(x,0,t)t,0) = (\overline{X}^1(X(x,0,t),t,0),\dots,\overline{X}^n(X(x,0,t),t,0))$. Omitindo as variáveis e abusando da notação, escrevemos $S = (\overline{X}^1 \circ X,\dots,\overline{X}^n \circ X)$. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(\overline{X}^i \circ X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overline{X}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial X^k}{\partial x^j}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\overline{X}^i \circ X) &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overline{X}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial X^k}{\partial x^1},\dots,\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overline{X}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial X^k}{\partial x^n} \right)\\ &= \left(\nabla\overline{X}^i \cdot \frac{\partial X}{\partial x^1},\dots,\nabla\overline{X}^i \cdot \frac{\partial X}{\partial x^n} \right)\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial x}(\overline{X}^i \circ X)\right|^2 &= \sum_{k=1}^{n} \left|\nabla\overline{X}^i \cdot \frac{\partial X}{\partial x^k}\right|^2\\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |\nabla\overline{X}^i| \left|\frac{\partial X}{\partial x^k}\right|^2.\end{aligned}$$

Como $|\nabla\overline{X}^i| \leq |\nabla\overline{X}|$ e $\left|\frac{\partial X}{\partial x_i}\right| \leq |\nabla X|$, e pelo Lema 3.1 $\left|\frac{\partial X}{\partial x}(\cdot,t,s)\right| \leq C$, temos que

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(\overline{X}^i \circ X)\right|^2 \leq C.$$

Mas, $|\nabla S|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial}{\partial x}(\overline{X}^i \circ X)\right|^2$. Logo. existe uma constante C tal que $\| \nabla S \|_\infty \leq C$.

Analogamente,

$$\partial_t S = \nabla\overline{X} \cdot \partial_s X + \partial_t \overline{X}$$

e

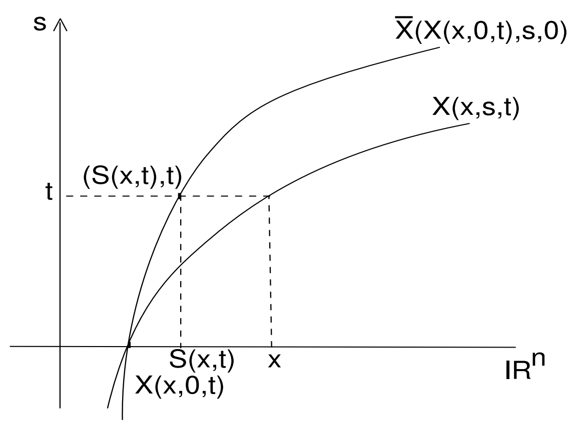
$$\|\partial_t S\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[\tau,T])} \leq C(\tau), \tag{3.31}$$

onde usamos o Lema 3.1. De (3.30) e (3.31), temos que S é Lipschitziana em $\mathbb{R}^n \times [\tau,T]$, para qualquer $\tau > 0$. Da mesma maneira vale o mesmo resultado para S^{-1}.

A desigualdade (3.30) mostra que $S(\cdot,t)$ é Lipschitziana em $\mathbb{R}^n$, uniformemente em relação a $t \in [0,T]$, e analogamente para S^{-1}.

(b) Temos, por definição, $\overline{X}(X(x,0,t),t,0) = S(x,t)$. Assim, $S(X(y,t,0),t) = \overline{X}(y,t,0)$. Como S é localmente Lipschitziana em $\mathbb{R}^n \times [0,T]$, pelo Teorema 1.8, pág. 16, S é diferenciável em quase todo pontos de $\mathbb{R}^n \times [0,T]$. Daí, e usando também o Teorema 1.6, pág. 15, na versão com a função "interna" suave (neste caso, a função X) obtemos

$$S_t(X(y,t,0),t) + \nabla S(X(y,t,0),t) \cdot \frac{\partial X}{\partial t}(y,t,0) = \frac{\partial \overline{X}}{\partial t}(y,t,0), \text{ q.t.p. } \mathbb{R}^n \times (0,T).$$



Logo,

$$(S_t + \nabla S \cdot u)(X(y,t,0),t) = \bar{u}(\overline{X}(y,t,0),t) = \bar{u}(S(X(y,t,0),t)), \text{ q.t.p. } \mathbb{R}^n \times (0,T).$$

(c) Usando que a aplicação $(y,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) \mapsto (X(y,t,0),t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$ é um homeomorfismo bi-Lipschitziano (em particular, transforma conjuntos de medida nula em conjunto de medida nula. A sua inversa é a aplicação $(x,t) \mapsto (X(y,t,0),t)$.) podemos substituir $(X(y,t,0),t)$ na última desigualdade por (x,t), q.t.p. em $\mathbb{R}^n \times (0,T)$. Derivando $S(X(y,t,0),t) = \overline{X}(y,t,0)$ em relação á primeira variável temos

$$\nabla S(X(y,t,0),t) \cdot \nabla_y X(y,t,0) = \nabla_y \overline{X}(y,t,0), \quad \text{q.t.p.}$$

Então,

$$\det(\nabla S(X(y,t,0),t) \cdot \det \nabla_y X(y,t,0) = \det \nabla_y \overline{X}(y,t,0).$$

Multiplicando ambos os lados desta equação por $\rho(X(y,t,0),t)\overline{\rho}(\overline{X}(y,t,0),t)$:

$$\begin{aligned}&\rho(X(y,t,0),t) \det \nabla_y X(y,t,0) \overline{\rho}(\overline{X}(y,t,0),t) \det \nabla S(X(y,t,0),t)\\ &= \rho(X(y,t,0),t)\overline{\rho}(\overline{X}(y,t,0),t) \det \nabla_y \overline{X}(y,t,0)\end{aligned}$$

Daí, pelo Lema (3.2), temos

$$\rho(y,0)\bar{\rho}(\overline{X}(y,t,0),t)\det\nabla S(X(y,t,0),t) = \bar{\rho}(y,0)\rho(X(y,t,0),t).$$

Logo,

$$\bar{\rho}(\overline{X}(y,t,0),t)\rho_0(y)\det\nabla S(X(y,t,0),t) = \rho(X(y,t,0),t)\bar{\rho}_0(y).$$

Fazendo $x = X(y,t,0)$, temos que $y = X(x,0,t)$ e $S(x,t) = S(X(y,t,0),t) = \overline{X}(y,t,0)$. Daí,

$$\bar{\rho}(S(x,t),t)\rho_0(X(x,0,t))\det\nabla S(x,t) = \rho(x,t)\bar{\rho}_0(X(x,0,t)) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^n\times(0,T),$$

como queríamos.

(d) Substituindo $x = X(y,t,0)$ na integral $\displaystyle\int |x - S(x,t)|^2\,dx$ e usando o Lema 3.1, temos

$$\begin{aligned}
\int |x - S(x,t)|^2\,dx &= \int |X(y,t,0) - \overline{X}(y,t,0)|^2 |\nabla X(y,t,0)|\,dy \\
&\leq C\int |X(y,t,0) - \overline{X}(y,t,0)|^2\,dy \\
&= C\int \left|\int_0^t [u(X(y,s,0),s) - \bar{u}(\overline{X}(y,s,0),s)]\,ds\right|^2 dy \\
&= C\int \left|\frac{1}{t}\int_0^t t[u(X(y,s,0),s) - \bar{u}(\overline{X}(y,s,0),s)]\,ds\right|^2 dy.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Jensen, obtemos

$$\begin{aligned}
\int |x - S(x,t)|^2\,dx &\leq C\int \frac{1}{t}\int_0^t t^2 |u(X(y,s,0),s) - \bar{u}(\overline{X}(y,s,0),s)|^2\,dsdy \\
&= Ct\int\int_0^t |u(X(y,s,0),s) - \bar{u}(\overline{X}(y,s,0),s)|^2\,dsdy \\
&= Ct\int\int_0^t |u(x,s) - \bar{u}(S(x,s),s)|^2 |\nabla X(x,s,0)|\,dsdx \\
&\leq Ct\int_0^t \tilde{C}\int |u(x,s) - \bar{u}(S(x,s),s)|^2\,dxds \\
&= Ct\int_0^t\int |u(x,s) - \bar{u}(S(x,s),s)|^2\,dxds.
\end{aligned}$$

Trocando X por $\overline{X}$ acima, obtemos a segunda desigualdade em (d).

■

Observação 3.1 *Das definições de $S^{\pm 1}$ e do Lema 3.3, para cada $t \in [0, T]$ fixado, as aplicações $S^{\pm 1}(\cdot, t)$ são bi-Lipschitzianas do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$, e uma é a inversa da outra.*

3.3 Resultado Principal

Demonstração do Teorema 3.1:

Sejam (ρ, u) e $(\bar{\rho}, \bar{u})$ duas soluções de (2.1) nas condições do enunciado do Teorema e defina as funções $X, \overline{X}$ e S como em (3.20) e (3.29).

Começaremos derivando a forma fraca da equação satisfeita por $u - \bar{u} \circ S$, onde fazemos um abuso de notação e escrevemos $u(S(x,t), t) = \bar{u} \circ S(x,t)$. Para isto, tomaremos funções teste $\overline{\psi}$ em (3.2) da forma $\overline{\psi} = \psi \circ S^{-1}$, onde, como indicamos acima, $\psi \circ S^{-1}(x,t) \equiv \psi(S^{-1}(x,t), t)$.

Vejamos que se ψ satisfaz as condições mínimas descritas acima para ser uma função teste em (3.2), então $\overline{\psi}$ também satisfaz essas condições. De fato, $\overline{\psi}$ é localmente Lipschitziana em $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ pois ψ e S^{-1} são localmente Lipschitziana em $\mathbb{R}^n \times (0, T)$.

Além disso, $\overline{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^n \times (0, T))$, pois

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{\psi}(x,t)|^2 dxdt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(S(x,t), t)|^2 dxdt.$$

Assim, substituindo $y = S(x,t)$, temos $dy = |JS|dx$, onde $JS = \det \nabla S$, e como S^{-1} é a inversa de S, $dx = |JS^{-1}|dy$, e então

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{\psi}(x,t)|^2 dxdt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(y,t)|^2 |JS^{-1}|^2 dydt.$$

Como a aplicação $\det(\cdot)$ é multilinear, temos que existe c tal que $|\det(L_1, \cdots, L_n)| \leq c \prod_{i=1}^{n} |L_i|$, onde $(L_1, \cdots, L_n)$ denota uma matriz formada pelas linhas $L_1, \cdots, L_n$, a norma $|L_i|$ é a norma da soma, $i = 1, \cdots, n$. Logo, $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{\psi}(x,t)|^2 dxdt \leq c \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(y,t)|^2 \prod_{i=1}^{n+1} |L_i(y,t)|^2 dydt$. Como, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ e $|L_i| \leq |\nabla S^{-1}| \leq C$ então $\overline{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$. Temos também, que $\overline{\psi}_t \in L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$, pois $\overline{\psi}_t = \nabla\psi(S^{-1}(x,t), t) \cdot S_t^{-1}(x,t) + \psi_t(S^{-1}(x,t), t)$, $\psi_t \in L^2$, $\nabla\psi \in L^\infty$ e, vejamos que $S_t^{-1} \in L^2$: Da equação $\overline{X}(y,t,s) = y + \int_s^t \bar{u}(\overline{X}(y,\tau,s), \tau) d\tau$, obtemos $\overline{X}_s = -u(y,s) + \int \nabla\bar{u}(\overline{X}(y,\tau,s), \tau) \frac{\partial \overline{X}}{\partial s} d\tau$ q.t.p.. Logo, usando a Desigualdade de Gronwall, vem que $|\overline{X}_s(y,s)| \leq C|\bar{u}(y,s)|$, $C = exp\left(\int_0^T \|\nabla\bar{u}(\cdot,t)\|_\infty dt\right)$. Daí e de (3.7), concluímos que $\overline{X}_s \in L^2$. Agora, pela definição de S^{-1}, $S_t^{-1} = \nabla X \cdot \overline{X}_s + u \circ X$ onde $u \circ X(x,t) \equiv u(X(x,t),t)$, logo, $S_t^{-1} \in L^2$, visto que $\nabla X \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T))$, pelo Lema 3.1, e $u \circ X \in L^2$, por (3.7) e também pelo Lema 3.1.

Vamos mostrar agora que $\nabla\overline{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$. Temos que $\nabla\overline{\psi} = \nabla\psi \cdot \nabla S^{-1}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\overline{\psi}|^2 dxdt &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\psi(x,t)|^2 |\nabla S^{-1}(x,t)|^2 dxdt \\
&\leq \int_0^t \|\nabla S^{-1}(\cdot,t)\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\psi(x,t)|^2 dxdt \\
&\leq C^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\psi(x,t)|^2 dxdt < \infty.
\end{aligned}$$

Mostremos ainda que $\nabla\overline{\psi} \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T))$.
Temos que

$$\|\nabla\overline{\psi}(\cdot,t)\|_\infty = \|\nabla\psi(\cdot,t)\|_\infty \|\nabla S^{-1}(\cdot,t)\|_\infty.$$

Como

$$\|\nabla\psi(\cdot,t)\|_\infty \leq \|\nabla\psi\|_\infty, \quad \nabla\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T))$$

e

$$\|\nabla S^{-1}(\cdot,t)\|_\infty \leq C,$$

pelo Lema 3.3 (item (a)), concluímos que $\nabla\overline{\psi} \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T))$.

Finalmente, se ψ tem suporte compacto em $\mathbb{R}^n \times (0,T]$ então $\overline{\psi}$ também tem, pois se ψ se anula fora do compacto $K \times [a,b] \subset \mathbb{R}^n \times (0,T]$ então $\overline{\psi}$ se anula fora de $\tilde{K} \times [a,b]$ para algum compacto $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^n$. Com efeito, de forma análoga ao que fizemos na demonstração do Lema 3.2 (v. (3.28)), tomando $\tilde{K}$ suficientemente grande, podemos mostrar que $dist(S^{-1}(x,t), \tilde{K}) > 0$ para $x \notin \tilde{K}$ e $t \in [a,b]$.

De (3.2), temos

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^n} \bar{\rho}_0(x)\bar{u}_0(x) \cdot \overline{\psi}(x,0)dx &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [\bar{\rho}\bar{u} \cdot (\overline{\psi}_t + \nabla\overline{\psi}\bar{u}) + (P(\bar{\rho}) - \tilde{P})\text{div}\overline{\psi} \\
&\quad -\mu\nabla\bar{u}^j \cdot \nabla\overline{\psi}^j - \lambda\text{div}\bar{u}\text{div}\overline{\psi} + \bar{\rho}\bar{f} \cdot \overline{\psi}]dxdt.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Fazendo $x = S(y,t)$ e usando o Lema 3.3, pág. 57, obtemos:

$$(\overline{\psi}_t + \nabla\overline{\psi}\bar{u}) \circ S = \psi_t + \nabla\psi \cdot S_t^{-1} + \nabla\psi\nabla S^{-1}(S_t + \nabla S\, u) = \psi_t + \nabla\psi u$$

(onde usamos que $S^{-1}(S(x,t),t) = x$, donde $\nabla S^{-1}\nabla S = I$ e $S_t^{-1} + \nabla S^{-1}\nabla S = 0$) e

$$\bar{\rho} \circ S \ \rho_0 \ \det \nabla S = \rho\bar{\rho}_0, \text{ q.t.p.},$$

o que implica

$$(\bar{\rho} \circ S)|\det \nabla S| = A_0\rho, \tag{3.33}$$

onde

$$A_0(x,t) = \bar{\rho}_0(X(x,0,t))/\rho_0(X(x,0,t)). \tag{3.34}$$

Lembre que ρ_0 é estritamente positivo por (3.4).

Temos então,

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^n}[\bar{\rho}_0(x)\bar{u}_0(x)\cdot\overline{\psi}(x,0)dx &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}[(A_0\rho)(\bar{u}\circ S)\cdot(\psi_t+\nabla\psi u) \\ &\quad +(P(\bar{\rho})-\tilde{P})\mathrm{div}\overline{\psi}-\mu\nabla\bar{u}^j\cdot\nabla\overline{\psi}^j \\ &\quad -\lambda\mathrm{div}\bar{u}\mathrm{div}\overline{\psi}+(A_0\rho)(\bar{f}\circ S)\cdot\psi]dxdt. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Agora, subtraindo (3.35) da equação fraca satisfeita por (ρ, u), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n}(\bar{\rho}_0\bar{u}_0-\rho_0u_0)\cdot\psi(\cdot,0)dx &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\{[-(A_0\rho)(\bar{u}\circ S)+\rho u]\cdot(\psi_t+\nabla\psi u) \\ &\quad +(P(\rho)-\tilde{P})\mathrm{div}\psi-(P(\bar{\rho})-\tilde{P})\mathrm{div}\overline{\psi}-\mu(\nabla u^j\nabla\psi^j-\nabla\bar{u}^j\nabla\overline{\psi}^j) \\ &\quad -\lambda(\mathrm{div}u\mathrm{div}\psi-\mathrm{div}\bar{u}\mathrm{div}\overline{\psi})+\rho[f\cdot\psi-A_0(\bar{f}\circ S)\cdot\psi]\Big\}dxdt \end{aligned}$$

Fazendo $z = u - \bar{u} \circ S$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n}(\bar{\rho}_0\bar{u}_0-\rho_0u_0)\cdot\psi(\cdot,0)dx &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}[\rho z(\psi_t+\nabla\psi u)+(1-A_0)\rho\,\bar{u}\circ S(\psi_t+\nabla\psi u) \\ &\quad +(P(\rho)-\tilde{P})\mathrm{div}\psi-(P(\bar{\rho})-\tilde{P})\mathrm{div}\overline{\psi} \\ &\quad -\mu(\nabla u^j\nabla\psi^j-\nabla\bar{u}^j\nabla\overline{\psi}^j)-\lambda(\mathrm{div}u\mathrm{div}\psi-\mathrm{div}\bar{u}\mathrm{div}\overline{\psi}) \\ &\quad +\rho(f-\bar{f}\circ S)\cdot\psi]+(1-A_0)\rho(\bar{f}\circ S)\cdot\psi)]dxdt \end{aligned} \tag{3.36}$$

Reescrevendo os três termos do lado direito que envolvem $\bar{\rho}$ e $\bar{u}$ em função de

$$\overline{F}_{x_j} = [(\mu+\lambda)\mathrm{div}\bar{u} - P(\bar{\rho}) + P(\tilde{\rho})]_{x_j} \ \text{ e } \ \overline{\omega}^{j,k}_{x_k} = (\bar{u}^j_{x_k} - \bar{u}^k_{x_j})_{x_k}$$

(veja (3.7)) temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [(\tilde{P} - P(\bar{\rho}))\mathrm{div}\overline{\psi} + \mu\nabla\bar{u}^j \cdot \nabla\overline{\psi}^j + \lambda\mathrm{div}\bar{u}\mathrm{div}\overline{\psi}]dxdt \\
&\qquad = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [((\mu+\lambda)\mathrm{div}\bar{u} - (P(\bar{\rho}) + \tilde{P})\mathrm{div}\overline{\psi} + \mu(\bar{u}^j_{x_k} - \bar{u}^k_{x_j})\overline{\psi}^j_{x_k}]dxdt \\
&\qquad = -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla\overline{F}\cdot\overline{\psi} + \mu\overline{\omega}^{j,k}_{x_k}\overline{\psi}^j)dxdt \\
&\qquad = -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla\overline{F}\cdot\psi + \mu\overline{\omega}^{j,k}_{x_k}\psi^j)dxdt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [\nabla\overline{F}(\overline{\psi} - \psi) + \mu\overline{\omega}^{j,k}_{x_k}(\overline{\psi}^j - \psi^j)] \\
&\qquad = -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla\overline{F}\cdot\psi + \mu\overline{\omega}^{j,k}_{x_k}\psi^j) + E_1 \\
&\qquad = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [(\tilde{P} - P(\bar{\rho}))\mathrm{div}\psi + \mu\nabla\bar{u}^j\cdot\nabla\psi^j + \lambda\mathrm{div}\bar{u}\mathrm{div}\psi] + E_1,
\end{aligned}$$

onde $E_1 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\overline{F}\cdot(\psi - \psi\circ S^{-1}) + \mu\overline{\omega}^{j,k}_{x_k}(\psi^j - \psi^j\circ S^{-1})dxdt$, e para a primeira igualdade usamos que

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{div}\,\bar{u}\mathrm{div}\,\overline{\psi}\,dx &= \int \sum_{j=1}^n (\nabla\bar{u}^j\cdot\nabla\overline{\psi}^j)\,dx - \int \sum_{j,k=1}^n (\bar{u}^j_{x_k} - \bar{u}^k_{x_j})\overline{\psi}^j_{x_k}\,dx, \\
&= \int \sum_{j,k} \bar{u}^k_{x_j}\overline{\psi}^j_{x_k}\,dx.
\end{aligned}$$

ou seja, $\int \sum_{j,k=1}^n \bar{u}^j_{x_j}\overline{\psi}^k_{x_k}\,dx = \int \sum_{j,k=1}^n \bar{u}^k_{x_j}\overline{\psi}^j_{x_k}$(veja a Observação 1.9), pág. 34. Para a última igualdade, tome ψ no lugar de $\overline{\psi}$.

Definindo E_2 por

$$E_2 = \int\int [\rho(f - \bar{f}\circ S)\cdot\psi + (1 - A_0)\rho(\bar{f}\circ S)\cdot\psi],$$

temos de (3.36) que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (\bar{\rho}_0 \bar{u}_0 - \rho_0 u_0) \cdot \psi(\cdot, 0) dx &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \{\rho z(\psi_t + \nabla\psi u) + (1 - A_0)\rho\, \bar{u} \circ S\,(\psi_t + \nabla\psi u) \\
&+ [(\tilde{P} - P(\bar{\rho}))\text{div}\psi \ + \mu\nabla\bar{u}^j\nabla\psi^j + \lambda\text{div}\bar{u}\ \text{div}\psi] \\
&+ [(P(\rho) - \tilde{P})\text{div}\psi - \mu\nabla u^j\nabla\psi^j - \lambda\text{div}u\ \text{div}\psi]\} \\
&+ E_1 + E_2 \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [\rho z(\psi_t + \nabla\psi u) + (1 - A_0)\rho\, \bar{u} \circ S\,(\psi_t + \nabla\psi u) \\
&+ (P(\rho) - P(\bar{\rho}))\text{div}\psi - \mu(\nabla u^j - \nabla\bar{u}^j) \cdot \nabla\psi^j \\
&- \lambda(\text{div}u - \text{div}\bar{u})\text{div}\psi] dxdt + E_1 + E_2. \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

Somando e subtraindo os termos $\mu\nabla(\bar{u} \circ S)^j\nabla\psi^j$ e $\lambda\text{div}(\bar{u} \circ S)\text{div}\psi$ a integral $\int\int [\rho z(\psi_t + \nabla\psi u) - \mu(\nabla u^j - \nabla\bar{u}^j) \cdot \nabla\psi^j - \lambda(\text{div}u - \text{div}\bar{u})\text{div}\psi]$, e em seguida aplicando o teorema da divergência e o método de integração por partes, assumindo que $\psi \in H^2$ (isto será suficiente para o que se segue) obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\int\int [\rho z(\psi_t + \nabla\psi u) - \mu(\nabla u^j - \nabla\bar{u}^j) \cdot \nabla\psi^j - \lambda(\text{div}u - \text{div}\bar{u})\text{div}\psi] \\
&\quad = \int\int [\rho z(\psi_t + \nabla\psi u) - \mu(\nabla u^j - \nabla(\bar{u} \circ S)^j)\nabla\psi^j \\
&\quad + \mu\nabla\bar{u}^j\nabla\psi^j - \lambda(\text{div}u - \text{div}(\bar{u} \circ S))\text{div}\psi + \lambda\text{div}\bar{u}div\psi \\
&\quad - \mu\nabla(\bar{u} \circ S)^j\nabla\psi^j - \lambda\text{div}(\bar{u} \circ S)\text{div}\psi \\
&\quad = \int\int \rho z(\psi_t + \nabla\psi u) + \mu(u - \bar{u} \circ S)\Delta\psi - \mu\bar{u}\Delta\psi \\
&\quad + \lambda(u - \bar{u} \circ S)\nabla\text{div}\psi - \lambda\bar{u}\nabla\text{div}\psi + \mu(\bar{u} \circ S) \cdot \Delta\psi + \lambda(\bar{u} \circ S)\nabla\text{div}\psi \\
&\quad = \int\int \rho z(\psi_t + \nabla\psi u) + \mu z\Delta\psi - \mu\bar{u}\Delta\psi \\
&\quad + \lambda z\nabla\text{div}\psi - \lambda\bar{u}\nabla\text{div}\psi + \mu(\bar{u} \circ S) \cdot \Delta\psi + \lambda(\bar{u} \circ S)\nabla\text{div}\psi \\
&\quad = \int\int z[\rho(\psi_t + \nabla\psi u) + \mu\Delta\psi + \lambda\nabla\text{div}\psi] \\
&\quad - \mu\bar{u}\Delta\psi - \lambda\bar{u}\nabla\text{div}\psi + \mu(\bar{u} \circ S) \cdot \Delta\psi + \lambda(\bar{u} \circ S)\nabla\text{div}\psi \\
&\quad = \int\int z[\rho(\psi_t + \nabla\psi u) + \mu\Delta\psi + \lambda\nabla\text{div}\psi] \\
&\quad + \mu(\bar{u} \circ S - \bar{u}) \cdot \Delta\psi + \lambda(\bar{u} \circ S - \bar{u})\nabla\text{div}\psi.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$\int\int [\rho z(\psi_t + \nabla\psi u) - \mu(\nabla u^j - \nabla\bar{u}^j)\cdot\nabla\psi^j - \lambda(\mathrm{div}u - \mathrm{div}\bar{u})\mathrm{div}\psi] \\ = \int\int z[\rho(\psi_t + \nabla\psi u) + \mu\Delta\psi + \lambda\nabla\mathrm{div}\psi] + E_3,$$

onde $E_3 = \displaystyle\int\int (\bar{u}\circ S - \bar{u})(\mu\Delta\psi + \lambda\nabla\mathrm{div}\psi)$.

Temos, então, de (3.37) que,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(\bar{\rho}_0\bar{u}_0 - \rho_0 u_0)\cdot\psi(\cdot,0)dx &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} z\cdot[\rho(\psi_t + \nabla\psi u) + \mu\Delta\psi + \lambda\nabla\mathrm{div}\psi]dx\,dt \\ &+ \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}[(1-A_0)\rho(\bar{u}\circ S)(\psi_t + \nabla\psi u) + (P(\rho) - P(\bar{\rho}))\mathrm{div}\psi]dx\,dt \\ &+ E_1 + E_2 + E_3.\end{aligned} \tag{3.38}$$

Agora, estendendo ρ e u a $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ de forma que para $t\notin[0,T]$ estas funções sejam constantes, sejam $\rho^\delta = \eta^\delta * \rho$ e $u^\delta = (\eta^\delta * (\rho u))/\rho^\delta$, regularizações suaves em x e t de ρ e u, e consideremos $\psi^\delta : \mathbb{R}^n\times[0,T]\to\mathbb{R}^n$ a solução do sistema

$$\begin{cases}\rho^\delta\left(\psi_t^\delta + \nabla\psi^\delta u^\delta\right) + \mu\Delta\psi^\delta + \lambda\nabla\mathrm{div}\psi^\delta = G \\ \psi^\delta(\cdot,T) = 0,\end{cases} \tag{3.39}$$

para $G\in H^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,T])$, o qual passamos a resolver.

Vamos usar o método clássico da energia e aproximações de Galerkin; ver e.g. o Capítulo 7 de [15].

1° passo - Estimativas a priori. Seja $\psi = \psi^\delta$ uma solução suave de (3.39) tal que $\psi(\cdot,t)\in H^s(\mathbb{R}^n)$, para todo $t\in[0,T]$, com s suficientemente grande. Então obtemos

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^n}[|\psi(x,t)|^2 + |\nabla\psi(x,t)|^2] + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}[|\psi_t + \nabla\psi u^\delta|^2 + D_x^2\psi|^2]dx\,dt \\ \le C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|G|^2 dx\,dt,\end{aligned} \tag{3.40}$$

para alguma constante C, independente de ψ e G.

Com efeito, em primeiro lugar, multiplicando a equação em (3.39) por ψ, obtemos

$$\rho^\delta\frac{1}{2}(|\psi|^2)_t + \frac{1}{2}\rho^\delta\nabla(|\psi|^2)\cdot u^\delta + \mu\psi\cdot\Delta\psi + \lambda\psi\cdot\nabla\mathrm{div}\psi = \psi\cdot G. \tag{3.41}$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
\rho^\delta(|\psi|^2)_t + \rho^\delta \nabla(|\psi|^2)\cdot u^\delta &= (\rho^\delta|\psi|^2)_t + \operatorname{div}(|\psi|^2\rho^\delta u^\delta) - |\psi|^2(\rho^\delta_t + \operatorname{div}(\rho^\delta u^\delta)) \\
&= (\rho^\delta|\psi|^2)_t + \operatorname{div}(|\psi|^2\rho^\delta u^\delta),
\end{aligned}
$$

pois $\rho_t + div(\rho u) = 0$ no sentido fraco e, pela definição de u^δ, temos que $\rho^\delta u^\delta = (\rho u)^\delta$, onde

$$
(\rho u)^\delta \equiv \eta^\delta * (\rho u).
$$

Então integrando (3.41) em $\mathbb{R}^n \times (t, T)$, com $t > 0$, usando que $\rho^\delta \geq c > 0$, e integrando por partes em relação ao $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{c}{2}\int |\psi(x,t)|^2 dx + \int_t^T \int \left[\mu|\nabla\psi|^2 + \lambda(\operatorname{div}\psi)^2\right] dxd\tau \\
&\quad \leq -\int_t^T \int \psi \cdot G dxd\tau \\
&\quad \leq \frac{c}{2}\int_t^T \int |\psi(x,\tau)|^2 dxd\tau + \frac{1}{2c}\int_0^T \int |G|^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{3.42}
$$

Daí, pelo Lema de Gronwall,

$$
\int |\psi(x,t)|^2 dt \leq C\|G\|_2^2, \tag{3.43}
$$

para alguma constante (independente de ψ e G), onde $\|G\|_2 = \|G\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))}$. Usando (3.43) em (3.42), obtemos também que

$$
\|\nabla\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))} \leq C\|G\|_2,
$$

mas a estimativa (3.40) afirma mais fortemente que $\|\nabla\psi\|_{L^\infty((0,T);L^2(\mathbb{R}^n))} \leq C\|G\|_2$. Para obtermos esta estimativa e ao mesmo tempo que a quantidade $\psi_t + \nabla\psi u^\delta$ é limitada, em $L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$, por $C\|G\|_2$, vamos multiplicar a equação em (3.39) pela mesma, a qual passaremos a denotar por $\dot{\psi}$, arrumar os termos adequadamente e usar a Desigualdade de Gronwall. Multiplicando a equação em (3.39) por $\dot{\psi} = \psi_t + \nabla\psi u$, obtemos

$$
\rho^\delta|\dot{\psi}|^2 + \mu\dot{\psi}\cdot\Delta\psi + \lambda\dot{\psi}\cdot\nabla\operatorname{div}\psi = \dot{\psi}\cdot G. \tag{3.44}
$$

Vamos integrar em $\mathbb{R}^n \times (t, T]$, como fizemos anteriormente, mas antes notemos que:

$$\begin{aligned}\int_t^T \int \psi_t \cdot \Delta\psi = \int_t^T \int \psi_t^j \psi^j_{x_k x_k} &= -\int_t^T \int \psi^j_{x_k t} \psi^j_{x_k} \\ &= -\int_t^T \int \frac{1}{2}\partial_t \left(\psi^j_{x_k}\right)^2 = \frac{1}{2} \int |\nabla\psi(x,t)|^2 dx\end{aligned}$$

(onde usamos que $\psi(\cdot, T) = 0 \Rightarrow \nabla\psi(\cdot, T) = 0$);

$$\begin{aligned}\int_t^T \int \psi_t \cdot \nabla \mathrm{div}\psi &= -\int_t^T \int (\mathrm{div}\psi)_t (\mathrm{div}\psi) \\ &= -\int_t^T \int \frac{1}{2}\partial_t (\mathrm{div}\psi)^2 \\ &= \frac{1}{2}\int (\mathrm{div}\psi)^2(x,t) dt;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\int \nabla\psi u \cdot \Delta\psi\right| &= \left|\int \psi^j_{x_l} u^l \psi^j_{x_k x_k}\right| = \left|-\int \left(\psi^j_{x_l x_k} u^l \psi^j_{x_k} + \psi^j_{x_l} u^l_{x_k} \psi^j_{x_k}\right)\right| \\ &= \left|\int \left(u^l \frac{1}{2}\partial_{x_l}\left(\psi^j_{x_k}\right)^2 + \psi^j_{x_l} u^l_{x_k} \psi^j_{x_k}\right)\right| = \left|\int \left(\frac{1}{2} u^l_{x_l}\left(\psi^j_{x_k}\right)^2 - \psi^j_{x_l} u^l_{x_k} \psi^j_{x_k}\right)\right| \\ &\leq \int |\nabla u|\, |\nabla\psi|^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left|\int \nabla\psi u \cdot \nabla \mathrm{div}\psi\right| &= \left|\int \psi^j_{x_l} u^l (\mathrm{div}\psi)_{x_j}\right| \\ &= \left|-\int \left(\psi^j_{x_j x_l} u^l (\mathrm{div}\psi) + \psi^j_{x_l} u^l_{x_j} (\mathrm{div}\psi)\right)\right| \\ &= \left|\int \left((\mathrm{div}\psi)_{x_l} u^l (\mathrm{div}\psi) + \psi^j_{x_l} u^l_{x_j} \psi^k_{x_k}\right)\right| \\ &= \left|\int u^l \frac{1}{2}\, \partial_{x_l} (\mathrm{div}\psi)^2 + \psi^j_{x_l} u^l_{x_j} \psi^k_{x_k}\right| \\ &= \left|\int -\frac{1}{2} u^l_{x_l} (\mathrm{div}\psi)^2 + \psi^j_{x_l} u^l_{x_j} \psi^k_{x_k}\right| \\ &\leq \int |\nabla u|\, |\nabla\psi|^2.\end{aligned}$$

Então, integrando (3.44), vem que

$$c\int_t^T\int|\dot{\psi}|^2+\frac{1}{2}\int\Big(\mu|\nabla\psi(\cdot,t)|^2+\lambda(div\psi)^2(\cdot,t)\Big)$$
$$\leq\frac{c}{2}\int_t^T\int|\dot{\psi}|^2+\frac{1}{2c}\int_t^T\int|G|^2+C\int_t^T\int|\nabla u|\,|\nabla\psi|^2,$$

logo,

$$\frac{c}{2}\int_0^T\int|\dot{\psi}|^2+\frac{\mu}{2}\int|\nabla\psi(\cdot,t)|^2\leq\frac{1}{2c}\|G\|_2^2+C\int_t^T\left(\|\nabla u(\cdot,\tau)\|_{\infty;\mathbb{R}^n}\int|\nabla u(\cdot,\tau)|^2\right)d\tau \tag{3.45}$$

e, em particular,

$$\int|\nabla\psi(\cdot,t)|^2\leq C\|G\|_2^2+C\int_t^T\|\nabla u(\cdot,\tau)\|_{\infty;\mathbb{R}^n}\int|\nabla u(\cdot,\tau)^2d\tau.$$

Daí, usando Gronwall, concluímos que

$$\int|\nabla\psi(\cdot,t)|^2\leq C\|G\|_2^2e^{C\int_t^T\|\nabla u(\cdot,\tau)\|_{\infty;\mathbb{R}^n}}\equiv C\|G\|_2^2. \tag{3.46}$$

De (3.45) e (3.46), obtemos também que

$$\int_0^T\int|\dot{\psi}|^2\leq C\|G\|_2^2. \tag{3.47}$$

Finalmente, desta estimativa e da equação em (3.39), temos que

$$\int_0^T\|\mu\Delta\psi+\lambda\nabla div\psi\|_{2;\mathbb{R}^n}^2dt\leq C\|G\|_2, \tag{3.48}$$

mas o operador $\mu\Delta+\lambda\nabla div$ é elíptico, logo vale

$$\|D^2\psi\|_{2;\mathbb{R}^n}\leq C\|\mu\Delta\psi+\lambda\nabla div\psi\|_{2;\mathbb{R}^n}$$

para alguma constante C dependente somente de n [14]. Portanto,

$$\int_0^T\int|D^2\psi|^2\leq C\|G\|_2$$

e assim concluímos (3.40).

2° passo - Solução aproximada.

Seja $w_j = w_j(x)$, $j = 1, 2, \cdots$, uma base ortonormal do $L^2(\mathbb{R}^n)$ com funções em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Seja $G_m(\cdot, t) := \sum_{j=1}^m (G|w_j)_{L^2} w_j$ (a projeção do L^2 de $G(\cdot, t)$ no subespaço gerado por $w_1, w_2, \cdots, w_m$), $m = 1, 2, \cdots$. Busquemos uma solução $\psi_m(x,t) = \sum_{j=1}^m c_m^j(t) w_j(x)$ da equação aproximada

$$\rho^\delta \left(\psi^\delta_{mt} + \nabla\psi^\delta_m u^\delta\right) + \mu\Delta\psi^\delta_m + \lambda\nabla\text{div}\psi^\delta_m = G_m, \tag{3.49}$$

satisfazendo a condição $\psi_m(\cdot, T) = 0$, onde $c_m^j = c_m^j(t)$, $j = 1, 2, \cdots, m$, são funções suaves a serem determinadas. Vamos escrever $\rho = \rho^\delta$ e $u = u^\delta$. Substituindo $\psi_m(x,t) = c_m^j(t) w_j(x) \equiv \sum_{j=1}^m c_m^j(t) w_j(x)$ em (3.49), dividindo por ρ, e tomando o produto interno no L^2 com w_k, para $k = 1, \cdots, m$, obtemos que c_m^k é solução da edo

$$\begin{aligned} & (c_m^k)' + c_m^j(\nabla w_j u|w_k)_{L^2} + \mu c_m^j(\rho^{-1}\Delta w_j|w_k)_{L^2} + \lambda(\rho^{-1}\nabla\text{div} w_j|w_k)_{L^2} \\ = \; & (G|w_j)_{L^2}(\rho^{-1} w_j|w_k)_{L^2}. \end{aligned}$$

Logo, escrevendo $c_m = (c_m^1, \cdots, c_m^m)$, temos que $c_m = c_m(t)$ deve ser solução do sistema linear de edo's

$$c_m{}' + A_m c_m = b_m \tag{3.50}$$

onde A_m é a matriz com elementos $(\nabla w_j u + \mu\rho^{-1}\Delta w_j + \lambda\rho^{-1}\nabla\text{div} w_j|w_k)_{L^2}$, $j, k = 1, \cdots, m$, e b_m é o vetor com k-ésima coordenada $(G \cdot w_j)(\rho^{-1} w_j) \cdot w_k$. Como ρ e u são funções suaves e $\rho \geq c > 0$, o sistema (3.50) tem uma única solução em $C^\infty([0, T])$ anulando-se em $t = T$. Denotando esta solução por $c_m \equiv (c_m^1, \cdots, c_m^m)$, temos que $\psi_m(x,t) := c_m^j(t) w_j(x)$ é uma solução de (3.49) na classe $C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, e $\psi_m(\cdot, T) = 0$, ou seja, ψ_m é uma solução do problema (3.39) com $G = G_m$.

3° passo - Passagem ao limite.

Pelas estimativas a priori (o 1° passo acima), temos em particular que a sequência $\{\psi_m\}_{m=1}^\infty$ é limitada em $L^2((0, T), H^1(\mathbb{R}^n))$, logo, pelo Teorema de Banach-Alaoglu, existe uma subsequência, a qual também denotaremos por $\{\psi_m\}$, que converge para uma função $\psi \in L^2((0, T), H^1(\mathbb{R}^n))$. Multiplicando (3.49) por uma função teste φ qualquer em $C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, integrando por partes e tomando o limite quando $m \to \infty$, não é difícil ver que ψ é uma solução fraca de (3.39).

4° passo - Regularidade.

Quanto à regularidade, ou seja, que ψ é uma solução suave, notamos primeiramente que das estimativas a priori, temos que ψ_m é uniformemente limitada em $L^2((0,T),H^2(\mathbb{R}^n))$ e, de (3.49) temos que ψ_{mt} é uniformemente limitada em $L^2((0,T),L^2(\mathbb{R}^n))$, logo podemos concluir que ψ_t pertence a este espaço e $\psi \in L^2((0,T),H^2(\mathbb{R}^n))$. A seguir, notamos que $\psi_m t$, ψ_{mx_j}, $j = 1,\cdots,m$, satisfazem equações do mesmo tipo de (3.49). Mais precisamente,

$$\rho\,(\psi_{mtt} + \nabla\psi_{mt}u) + \mu\Delta\psi_{mt} + \lambda\nabla\text{div}\psi_{mt} = G_{m1},$$

onde $G_{m1} := G_{m_k} - \rho_t\psi_{mt} - \nabla\psi_m(\rho u)_t$ e

$$\rho\left(\psi_{mx_jt} + \nabla\psi_{mx_j}u\right) + \mu\Delta\psi_{mx_j} + \lambda\nabla\text{div}\psi_{mx_j} = G_{m(j+1)},$$

onde $G_{m(j+1)} := G_{m_{x_j}} - \rho_{x_j}\psi_m - \nabla\psi_m(\rho u)_{x_j}$. Notemos que pelas estimativas a priori temos que $||G_{mj}||_2 \leq C||G||_{H^1(\mathbb{R}^n\times(0,T))}$. Logo, repetindo o raciocínio anterior com ψ_t e ψ_{x_j} no lugar de ψ, podemos concluir que $\psi_{tt} \in L^2((0,T),L^2(\mathbb{R}^n))$ e $\psi_t, \psi_{x_j} \in L^2((0,T),H^2(\mathbb{R}^n))$. Continuando este processo e usando as imersões de Sobolev, obtemos que $\psi \in H^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T))$, logo, também $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,T])$.

5° passo - Unicidade.

Como a equação (3.39) é linear, a unicidade segue-se imediatamente das estimativas a priori, e.g. de (3.40), se ψ_1 e ψ_2 são duas soluções de (3.39) e $\psi = \psi_1 - \psi_2$, então $\int |\psi(x,t)|^2 dx \leq C||G||_2^2$ com $G = 0$, logo $\psi = 0$, i.e. $\psi_1 = \psi_2$.

Lema 3.4 *Existe uma constante C como descrita no Teorema 3.1 e independente de δ e G tal que a solução ψ^δ de (3.39) satisfaz*

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\mathbb{R}^n}[|\psi^\delta(x,t)|^2 + |\nabla\psi^\delta(x,t)|^2] + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}[|\psi_t^\delta + \nabla\psi^\delta u^\delta|^2 + |D_x^2\psi^\delta|^2]dx\,dt \\ \leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|G|^2 dx\,dt.\end{aligned} \tag{3.51}$$

Demonstração: As estimativas a priori que fizemos acima valem para qualquer solução de (3.39) em $H^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ e vimos também que a solução de (3.39), além de ser única, está neste espaço. Logo, temos (3.51). ■

Observação 3.2 *É possível mostrar a seguinte estimativa adicional [7]: Existe uma constante $C = C(G)$ que depende das derivadas de ordem maior de G mas não depende de δ, tal que*

$$\sup_{0\le t\le T} \|\nabla\psi^{\delta}(\cdot,t)\|_{\infty} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\psi^{\delta}|^r dx\, dt \le C(G), \tag{3.52}$$

onde r satisfaz (3.11).

Agora, escrevendo a equação (3.38) para ψ^{δ} e somando e subtraindo $\rho^{\delta}\psi^{\delta}_t + \nabla\psi^{\delta}(\rho u)^{\delta} + \mu\Delta\psi^{\delta} + \lambda\nabla\mathrm{div}\psi^{\delta} = G$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (\bar\rho_0\bar u_0 - \rho_0 u_0)\psi^{\delta}(\cdot,0)\, dx = {} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} zG dx\, dt \\
& + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} z\Big\{\rho(\psi^{\delta}_t + \nabla\psi^{\delta}u) + \mu\Delta\psi^{\delta} + \lambda\nabla\mathrm{div}\psi^{\delta} \\
& - [\rho^{\delta}(\psi^{\delta}_t + \nabla\psi^{\delta}u^{\delta}) + \mu\Delta\psi^{\delta} + \lambda\nabla\mathrm{div}\psi^{\delta}]\Big\} dx\, dt \\
& + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \Big[(1-A_0)\rho(\bar u\circ S)(\psi^{\delta}_t + \nabla\psi^{\delta}u) + (P(\rho) - P(\bar\rho))\mathrm{div}\psi^{\delta}\Big] dx\, dt \\
& + E_1 + E_2 + E_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} zG dx\, dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} z\Big[(\rho-\rho^{\delta})\psi^{\delta}_t + \nabla\psi^{\delta}(\rho u - \rho^{\delta}u^{\delta})\Big] dx\, dt \\
& + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \Big[(1-A_0)\rho(\bar u\circ S)(\psi^{\delta}_t + \nabla\psi^{\delta}u)\Big] dx\, dt \\
& + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (P(\rho) - P(\bar\rho))\mathrm{div}\psi^{\delta} dx\, dt + E_1 + E_2 + E_3.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\bar\rho_0\bar u_0 - \rho_0 u_0)\psi^{\delta}(\cdot,0)\, dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} zG dx\, dt + E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6, \tag{3.53}$$

onde,

$$\begin{aligned}
E_4 &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} z\Big[(\rho-\rho^{\delta})\psi^{\delta}_t + \nabla\psi^{\delta}(\rho u - \rho^{\delta}u^{\delta})\Big] dx\, dt, \\
E_5 &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \Big[(1-A_0)\rho(\bar u\circ S)(\psi^{\delta}_t + \nabla\psi^{\delta}u)\Big] dx\, dt \quad \text{e} \\
E_6 &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (P(\rho) - P(\bar\rho))\mathrm{div}\psi^{\delta} dx\, dt.
\end{aligned}$$

Vamos reescrever (3.53), isolando de um lado do sinal de igualdade o termo $\displaystyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} z\cdot G dx\,dt$:

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} zG dx\,dt = \int_{\mathbb{R}^n}(\bar{\rho}_0\bar{u}_0-\rho_0u_0)\psi^{\delta}(\cdot,0)\,dx - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5 - E_6 \tag{3.54}$$

Agora, aplicando o Lema 3.4, pág. 71, vamos estimar $E_1,\cdots,E_6$ e o lado esquerdo de (3.53), e então vamos calcular o lim sup quando $\delta\to 0$.

Aplicando a Desigualdade de Hölder e em seguida o Lema 3.4, no termo do lado esquerdo de (3.53), temos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n}(\bar{\rho}_0\bar{u}_0-\rho_0u_0)\cdot\psi^{\delta}(\cdot,0)dx\right| &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\bar{\rho}_0\bar{u}_0-\rho_0u_0|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\psi^{\delta}(\cdot,0)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le C\|\bar{\rho}_0\bar{u}_0-\rho_0u_0\|_2\left(\iint |G|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Agora, somando e subtraindo o termo $(\rho-\rho^{\delta})\nabla\psi^{\delta}u^{\delta}$ no lado direito de E_4, obtemos:

$$\begin{aligned}E_4 &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} z\cdot\left[(\rho-\rho^{\delta})(\psi_t^{\delta}+\nabla\psi^{\delta}u^{\delta})-(\rho-\rho^{\delta})\nabla\psi^{\delta}u^{\delta}+\nabla\psi^{\delta}(\rho u-\rho^{\delta}u^{\delta})\right]dx\,dt\\ &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} z\cdot\left[(\rho-\rho^{\delta})(\psi_t^{\delta}+\nabla\psi^{\delta}u^{\delta})+\rho\nabla\psi^{\delta}(u-u^{\delta})\right]dx\,dt.\end{aligned}$$

Reescrevendo E_4 de forma que $E_4 = I_1 + I_2$, onde $I_1 = \displaystyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} z\cdot(\rho-\rho^{\delta})(\psi_t^{\delta}+\nabla\psi^{\delta}u^{\delta})dx\,dt$ e $I_2 = \displaystyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} z\cdot\rho\nabla\psi^{\delta}(u-u^{\delta})dx\,dt$, vamos estimar I_1 e I_2.

Seja $\varepsilon>0$ e tomemos $0\le\tau\le T$, $\tau=\tau(\varepsilon)$. Reescrevemos I_1 da seguinte forma

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^{\tau}\int z\cdot(\rho-\rho^{\delta})(\psi_t^{\delta}+\nabla\psi^{\delta}u^{\delta})dx\,dt + \int_{\tau}^T\int z\cdot(\rho-\rho^{\delta})(\psi_t^{\delta}+\nabla\psi^{\delta}u^{\delta})dx\,dt\\ &= I_{\tau}+I'_{\tau}.\end{aligned}$$

Por (3.10), $\rho\in L^{\infty}(\mathbb{R}^n\times(0,T))$, logo, $\rho-\rho^{\delta}\in L^{\infty}(\mathbb{R}^n\times(0,T))$. Denotando $\dot{\psi}^{\delta}\equiv\psi_t^{\delta}+\nabla\psi^{\delta}u^{\delta}$, aplicando a Desigualdade de Hölder e o Lema 3.4 em I_{τ}, obtemos

$$
\begin{aligned}
|I_\tau| &\leq ||\rho - \rho^\delta||_\infty \left(\int_0^\tau \int |z|^2 \right)^{1/2} ||\dot{\psi}^\delta||_2 \\
&\leq C \left(\int_0^\tau \int |G|^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^\tau \int |z|^2 \right)^{1/2} \\
&< \varepsilon, \quad \text{se } \tau << 1.
\end{aligned}
$$

Neste ultimo passo usamos o seguinte resultado da Teoria da Medida: Seja $f \in L^1$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que $\int_E |f| < \varepsilon$ sempre que $|E| < \eta$.

Agora, com $\tau(\varepsilon)$ fixo, vamos estimar I'_τ. Como, por (3.8), $u,\ \bar{u} \in L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^n))$, então $z \in L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^n))$. Além disso, usaremos o fato de que, como $\rho - \tilde{\rho} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então $\rho - \rho^\delta \in L^2(\mathbb{R}^n)$. De fato, como $\rho - \rho^\delta = (\rho - \tilde{\rho}) - (\rho^\delta - \tilde{\rho})$ e $\tilde{\rho}^\delta = \tilde{\rho}$, pois $\tilde{\rho}$ é uma constante, temos

$$
\begin{aligned}
||\rho - \rho^\delta||_2 &\leq ||\rho - \tilde{\rho}||_2 + ||(\rho - \tilde{\rho})^\delta||_2 \\
&\leq 2||\rho - \tilde{\rho}||_2 < \infty.
\end{aligned}
$$

Usamos nesta ultima passagem o Teorema 1.1, pág. 4.

Desta forma, temos que

$$
\begin{aligned}
|I'_\tau| &\leq ||z||_{L^\infty((0,\tau),L^\infty(\mathbb{R}^n))} ||\rho - \rho^\delta||_2 ||\dot{\psi}^\delta||_2 \\
&\leq C\, ||z||_{L^\infty((0,\tau),L^\infty(\mathbb{R}^n))} ||\rho - \rho^\delta||_2 \left(\int_0^T \int |G|^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Como $||\rho - \rho^\delta||_2 \to 0$ quando $\delta \to 0$, temos que $I'_\tau \to 0$ quando $\delta \to 0$. Logo, $I_1 \to 0$, quando $\delta \to 0$.

Estimando I_2, temos:

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\leq ||\rho||_\infty ||\nabla \psi^\delta||_\infty \int_0^T \int z \cdot (u - u^\delta) dx\, dt \\
&\leq ||\rho||_\infty ||\nabla \psi^\delta||_\infty ||z||_2 ||u - u^\delta||_2.
\end{aligned}
$$

Temos que $\|u - u^\delta\|_2 \to 0$ quando $\delta \to 0$. De fato, como $u^\delta = \dfrac{(\rho u)^\delta}{\rho^\delta}$, temos:

$$\begin{aligned}
\|u - u^\delta\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int \left| u - \frac{(\rho u)^\delta}{\rho^\delta}\right|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int \left| \frac{\rho^\delta u - (\rho u)^\delta}{\rho^\delta}\right|^2 \\
&\leq C\int_{-\infty}^{\infty}\int \left|\rho^\delta u - (\rho u)^\delta\right|^2 \\
&= C\|\rho^\delta u - (\rho u)^\delta\|_2 \\
&\leq C\|(\rho^\delta - \rho)u\|_2 + \|(\rho u)^\delta - \rho u\|_2.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.1, $\|(\rho u)^\delta - \rho u\|_2 \to 0$ quando $\delta \to 0$. Mostremos que $\|(\rho^\delta - \rho)u\|_2 \to 0$ quando $\delta \to 0$. Note que, $\lim\limits_{\delta\to 0}|(\rho^\delta - \rho)u| = 0$. Queremos então passar o limite pelo sinal de integração. Como $|\rho^\delta - \rho| < C$, pois $\rho^\delta - \rho \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T)$, temos $|\rho^\delta - \rho|^2\,|u|^2 < C|u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n \times (0,T))$, pois por (3.9), $u \in L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$, o que implica que $|u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n \times (0,T))$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada, concluímos que $\|(\rho^\delta - \rho)u\|_2 \to 0$ quando $\delta \to 0$. E, assim, temos que $I_2 \to 0$ quando $\delta \to 0$. Portanto, $E_4 \to 0$, quando $\delta \to 0$.

Antes de continuarmos com as estimativas, notemos que da definição de A_0 em (3.34), temos

$$\begin{aligned}
\|1 - A_0\|_{2p}^{2p} &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |1 - A_0|^{2p}dx\,dt \\
&= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\rho_0(X(x,0,t)) - \bar{\rho}_0(X(x,0,t))|^{2p}}{|\rho_0(X(x,0,t))|^{2p}}\,dx\,dt \\
&\leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |\rho_0(X(x,0,t)) - \bar{\rho}_0(X(x,0,t))|^{2p}dx\,dt
\end{aligned}$$

Substituindo $y = X(x,0,t)$, e sabendo, pelo Lema 3.1, que $\|\nabla X\|_\infty < C$, temos que

$$\begin{aligned}
\|1 - A_0\|_{2p}^{2p} &\leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |\rho_0(y) - \bar{\rho}_0(y)|^{2p}dx\,dt \\
&\leq C\int_0^T \|\rho_0 - \bar{\rho}_0\|_{2p}^{2p}dt \\
&= C\,T\|\rho_0 - \bar{\rho}_0\|_{2p}^{2p},
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\sup_{0\le t\le T} \|1 - A_0(\cdot,t)\|_{2p} \le C\|\rho_0 - \bar\rho_0\|_{2p}. \tag{3.55}$$

Vamos agora estimar E_2. Para isto, usaremos a Desigualdade de Hölder, o Lema 3.4 e (3.55), e reescrevemos E_2 de forma que, $E_2 = I_1 + I_2$, onde $I_1 = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} \rho(f - \bar f\circ S)\cdot\psi^\delta dx\,dt$ e $I_2 = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}(1-A_0)\rho(\bar f\circ S)\cdot\psi^\delta dx\,dt$. Temos que,

$$\begin{aligned}
|I_1| &\le \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |\rho||f - \bar f\circ S||\psi^\delta|dx\,dt\\
&\le C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|f - \bar f\circ S|^2\right)^{1/2}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|\psi^\delta|^2\right)^{1/2}\\
&\le C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|f - \bar f\circ S|^2\right)^{1/2}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|G|^2\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|I_2| &\le \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|1-A_0||\rho||\bar f\circ S||\psi^\delta|dx\,dt\\
&\le C\int_0^T\left[\left(\int\left(|1-A_0||\bar f\circ S|\right)^2\right)^{1/2}\left(\int|\psi^\delta|^2\right)^{1/2}\right]dt\\
&\le C\sup_t\left(\int|\psi^\delta|^2\right)^{1/2}\int_0^T\left[\left(\int|1-A_0|^{2p}\right)^{1/p}\left(\int|\bar f\circ S|^{2q}\right)^{1/q}\right]^{1/2}dt\\
&= C\sup_t\left(\int|\psi^\delta|^2\right)^{1/2}\int_0^T\|1-A_0\|_{2p}\,\|\bar f\circ S(\cdot,t)\|_{2q}\,dt\\
&\le C\left(\iint|G|^2\right)^{1/2}\|\rho_0-\bar\rho_0\|_{2p}\int_0^T\left(\int|\bar f(S(x,t),t)|^{2q}dx\right)^{1/2q}dt.
\end{aligned}$$

Substituindo $y = S(x,t)$ e usando o item (a) do Lema 3.3, pág. 57, temos:

$$\begin{aligned}
|I_2| &\le C\left(\iint|G|^2\right)^{1/2}\|\rho_0-\bar\rho_0\|_{2p}\int_0^T\|\bar f(\cdot,t)\|_{2q},dt\\
&\le C\,\|\rho_0-\bar\rho_0\|_{2p}\left(\iint|G|^2\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

pois, por (3.14) $\bar f\in L^1((0,T),L^{2q}(\mathbb{R}^n))$. Portanto, concluímos que

$$|E_2| \leq C \left[\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |f - \bar{f} \circ S|^2 \right)^{1/2} + ||\rho_0 - \bar{\rho}_0||_{2p} \right] \left(\iint |G|^2 \right)^{1/2} \tag{3.56}$$

Vamos, agora, estimar E_1. Temos que,

$$E_1 = \iint \nabla \overline{F}(\psi^\delta - \psi^\delta \circ S^{-1}) + \mu \overline{\omega}^{j,k}_{x^k}(\psi^{\delta j} - \psi^{\delta j} \circ S^{-1})\, dx\, dt.$$

Reescrevemos E_1 da seguinte forma: $E_1 = I_1 + I_2$, onde $I_1 = \displaystyle\iint \nabla \overline{F}(\psi^\delta - \psi^\delta \circ S^{-1})\, dx\, dt$ e $I_2 = \displaystyle\iint \mu\, \overline{\omega}^{j,k}_{x^k}(\psi^{\delta j} - \psi^{\delta j} \circ S^{-1})\, dx\, dt$. Vamos primeiro, estimar I_1. Temos que,

$$|I_1| \leq \iint |\nabla \overline{F}(x,t)|\, |\psi^\delta(x,t) - \psi^\delta(S^{-1}(x,t),t)|\, dx\, dt.$$

Vamos dividir o intervalo de tempo em pequenos intervalos. Para isto, consideremos J um inteiro positivo suficientemente grande e definimos para cada $t \in [0, T]$, $t_j = jt/J$, para $j = 0, 1, \cdots, J$. Assim, como $\psi^\delta(x,t) - \psi^\delta(S^{-1}(x,t),t) = -\displaystyle\sum_j \psi^\delta(S^{-1}(x,t_{j+1}),t) - \psi^\delta(S^{-1}(x,t_j),t)$, temos:

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \sum_j \iint |\nabla \overline{F}(x,t)|\, |\psi^\delta(S^{-1}(x,t_{j+1}),t) - \psi^\delta(S^{-1}(x,t_j),t)| \\
&= \sum_j \iint |\nabla \overline{F}(x,t)| \Bigg[\int_0^1 \nabla \psi^\delta(\theta S^{-1}(x,t_{j+1}) + (1-\theta)S^{-1}(x,t_j),t) \\
&\quad (S^{-1}(x,t_{j+1}) - S^{-1}(x,t_j))d\theta \Bigg] dx\, dt
\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder e em seguida a Desigualdade de Jensen, temos:

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\leq \sum_j \int_0^T \|S^{-1}(\cdot, t_{j+1} - S^{-1}(\cdot, t_j)\|_2 \left\| \nabla \overline{F}(\cdot, t) \int_0^1 \nabla \psi^\delta(\theta S^{-1}(\cdot, t_{j+1}) + (1-\theta) S^{-1}(\cdot, t_j), t) d\theta \right\|_2 dt \\
&\leq \sum_j \int_0^T \|S^{-1}(\cdot, t_{j+1} - S^{-1}(\cdot, t_j)\|_2 \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \overline{F}(x,t)|^4 \, dx \right)^{1/2} \right. \\
&\quad \left. \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 |\nabla \psi^\delta(\theta S^{-1}(x, t_{j+1}) + (1-\theta) S^{-1}(x, t_j), t)| d\theta \right)^4 dx \right)^{1/2} \right]^{1/2} dt \\
&\leq \sum_j \int_0^T \|S^{-1}(\cdot, t_{j+1}) - S^{-1}(\cdot, t_j)\|_2 \, \|\nabla \overline{F}(\cdot, t)\|_4 \\
&\quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |\nabla \psi^\delta(\theta S^{-1}(x, t_{j+1}) + (1-\theta) S^{-1}(x, t_j), t)|^4 d\theta \, dx \right)^{1/4} dt
\end{aligned} \tag{3.57}
$$

Agora, consideremos a aplicação $x \mapsto S^{-1}(x, t_j)$. Esta aplicação é bi-Lipschitziana em $\mathbb{R}^n$. Assim, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |\nabla \psi^\delta(\theta S^{-1}(x, t_{j+1}) + (1-\theta) S^{-1}(x, t_j), t)|^4 d\theta \, dx \\
&\qquad = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi^\delta(\theta S^{-1}(x, t_{j+1}) + (1-\theta) S^{-1}(x, t_j), t)|^4 dx \, d\theta \\
&\qquad \leq C \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi^\delta(x + \theta T(x), t)|^4 dx \, d\theta \\
&\qquad \leq C \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi^\delta(x, t)|^4 dx \, d\theta \\
&\qquad = C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi^\delta(x, t)|^4 \, dx,
\end{aligned}
$$

onde $T(x) = S^{-1}(S(x, t_j), t_{j+1}) - x$. Agora, de (3.8), de acordo com D. Hoff [7], temos que $\|\nabla T\|_\infty$ é arbitrariamente pequeno quando t_{j+1} esta suficientemente próximo de t_j, ou seja, quando J é suficientemente grande. A aplicação $x \mapsto x + \theta T(x)$ é , então, uma perturbação bi-Lipschitziana da identidade, logo também, uma aplicação bi-Lipschitziana em $\mathbb{R}^n$. Este fato permitiu a mudança de variáveis $y = x + \theta T(x)$, acima.

Assim, a equação (3.57) fica:

$$
|I_1| \leq C \sum_j \int_0^T \|S^{-1}(\cdot, t_{j+1} - S^{-1}(\cdot, t_j)\|_2 \, \|\nabla \overline{F}(\cdot, t)\|_4 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi^\delta(x,t)|^4 \, dx \right)^{1/4} dt. \tag{3.58}
$$

Agora, pelo Lema 3.3 (d), pág. 57, temos

$$
\begin{aligned}
\|S^{-1}(\cdot,t_{j+1})-S^{-1}(\cdot,t_j)\|_2 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n}|x-S^{-1}(x,t_{j+1})|^2dx\right)^{1/2}+\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x-S^{-1}(x,t_j)|^2dx\right)^{1/2}\\
&\leq Ct_{j+1}^{1/2}\left(\int_0^{t_{j+1}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(S^{-1}(x,s),s)-\bar{u}(x,s)|^2dx\,ds\right)^{1/2}\\
&+ Ct_j^{1/2}\left(\int_0^{t_j}\int_{\mathbb{R}^n}|u(S^{-1}(x,s),s)-\bar{u}(x,s)|^2dx\,ds\right)^{1/2}\\
&\leq C\left(t_{j+1}^{1/2}+t_j^{1/2}\right)\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|u(S^{-1}(x,s),s)-\bar{u}(x,s)|^2dx\,ds\right)^{1/2}\\
&\leq C\left(t_{j+1}^{1/2}+t_j^{1/2}\right)\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,s)-\bar{u}(S(x,s),s)|^2dx\,ds\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

Logo, de (3.58) temos:

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\leq C\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\left(\frac{(j+1)^{1/2}+j^{1/2}}{J^{1/2}}\right)t^{1/2}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|z|^2dx\,dt\right)^{1/2}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\psi^\delta(x,t)|^4\,dx\right)^{1/4}dt.\\
&\leq C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|z|^2dx\,dt\right)^{1/2}\int_0^T t^{1/2}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\psi^\delta(x,t)|^4\,dx\right)^{1/4}dt \qquad (3.59)
\end{aligned}
$$

Vamos separar nos casos em que $n=2$ e $n=3$. Primeiro vamos ao caso $n=3$. Note que, pela equação (3.51), do Lema 3.4, pág. 71, $\psi^\delta\in H^2(\mathbb{R}^3)$. Logo, $\nabla\psi^\delta\in H^1(\mathbb{R}^3)$. Pelo Corolário 1.3, pág. 28, $H^1(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^3),\ 2\leq q\leq 6$. Tomando $q=6$, temos pelo Teorema 1.11, pág. 18, que

$$\|\nabla\psi^\delta\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}\leq C\|D_x^2\psi^\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \qquad (3.60)$$

Assim, (3.59) fica:

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\leq C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|z|^2dx\,dt\right)^{1/2}\int_0^T t^{1/2}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi^\delta|\,|\nabla\psi^\delta|^3dx\right)^{1/4}dt\\
&\leq C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|z|^2dx\,dt\right)^{1/2}\int_0^T t^{1/2}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4\left[\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi^\delta|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi^\delta|^6dx\right)^{1/2}\right]^{1/4}dt\\
&= C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|z|^2dx\,dt\right)^{1/2}\int_0^T t^{1/2}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi^\delta|^2dx\right)^{1/8}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi^\delta|^6dx\right)^{3/6}\right]^{1/4}dt\\
&\leq C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|z|^2dx\,dt\right)^{1/2}\int_0^T t^{1/2}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi^\delta|^2dx\right)^{1/8}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^3}|D_x^2\psi^\delta|^2dx\right)^{3/2}\right]^{1/4}dt\\
&\leq C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|z|^2dx\,dt\right)^{1/2}\int_0^T t^{1/2}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi^\delta|^2dx\right)^{1/8}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|D_x^2\psi^\delta|^2dx\right)^{3/8}dt.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 3.4, temos

$$
|I_1| \leq C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|z|^2dx\,dt\right)^{1/2}\left(\iiint|G|^2dx\right)^{1/8}\int_0^T t^{1/2}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4\left(\int_{\mathbb{R}^3}|D_x^2\psi^\delta|^2dx\right)^{3/8}dt. \tag{3.61}
$$

Resta agora estimar $\int_0^T t^{1/2}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4\left(\int_{\mathbb{R}^3}|D_x^2\psi^\delta|^2dx\right)^{3/8}dt$. Para isto, vamos aplicar a Desigualdade de Hölder, e em seguida aplicar o Lema 3.4:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T t^{1/2}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4\left(\int_{\mathbb{R}^3}|D_x^2\psi^\delta|^2dx\right)^{3/8}dt\\
&\qquad\leq\left(\int_0^T t^{4/5}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4^{8/5}\,dt\right)^{5/8}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|D_x^2\psi^\delta|^2dx\,dt\right)^{3/8}\\
&\qquad\leq C\left(\int_0^T t^{4/5}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4^{8/5}\,dt\right)^{5/8}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|G|^2dx\,dt\right)^{3/8}
\end{aligned}
$$

Voltando à (3.61), temos:

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\leq C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|z|^2dx\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|G|^2dx\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T t^{4/5}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4^{8/5}\,dt\right)^{5/8}\\
&\leq \left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|z|^2dx\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|G|^2dx\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T\beta(t)dt\right)^{5/8},
\end{aligned}
$$

onde $\beta(t) = Ct^{4/5}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4^{8/5}$, a qual pertence a $L^1(0,T)$ por (3.12).

Vamos ao caso $n = 2$. Temos, pela equação (3.51) que $\psi^\delta \in H^2(\mathbb{R}^2)$ e então $\nabla\psi^\delta \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Pela desigualdade (1.18), da demonstração do Teorema 1.16, pág. 30 e a Observação 1.7, pág. 31, temos

$$\|\nabla\psi^\delta\|^2_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq \|\nabla\psi^\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|D^2_x\psi^\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Assim de (3.59), temos

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq C\left(\iint |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\int_0^T t^{1/2}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\psi^\delta|^2 dx\right)^{1/4}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|D^2_x\psi^\delta|^2 dx\right)^{1/4} dt\\
&\leq C\left(\iint |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\left(\iint |G|^2 dx\, dt\right)^{1/4}\int_0^T t^{1/2}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4\left(\int_{\mathbb{R}^2}|D^2_x\psi^\delta|^2 dx\right)^{1/4} dt\\
&\leq C\left(\iint |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\left(\iint |G|^2 dx\, dt\right)^{1/4}\left(\int_0^T t^{2/3}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4^{4/3} dt\right)^{3/4}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}|D^2_x\psi^\delta|^2 dx\, dt\right)^{1/4}\\
&\leq C\left(\iint |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\left(\iint |G|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T t^{2/3}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4^{4/3} dt\right)^{3/4}\\
&\leq \left(\iint |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\left(\iint |G|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T \beta(t) dt\right)^{3/4},
\end{aligned}$$

onde $\beta(t) = Ct^{2/3}\|\nabla\overline{F}(\cdot,t)\|_4^{4/3}$, a qual pertence a $L^1(0,T)$ por (3.12).

Vamos agora estimar I_2. Lembremos que $I_2 = \displaystyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\mu\overline{\omega}^{j,k}_{x_k}(\psi^{\delta j} - \psi^{\delta j}\circ S^{-1})dx\, dt$. Temos que,

$$|I_2| \leq |\mu|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|\overline{\omega}^{j,k}_{x_k}|\,|\psi^{\delta j} - \psi^{\delta j}\circ S^{-1}|dx\, dt.$$

Como $|\overline{\omega}^{j,k}_{x_k}| \leq |\nabla\overline{\omega}|$, para cada $j = 1, 2, \cdots, n$, a desigualdade acima implica que:

$$|I_2| \leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\overline{\omega}|\,|\psi^\delta - \psi^\delta\circ S^{-1}|dx\, dt.$$

Para a estimativa de I_2 o raciocínio é o mesmo feito para I_1.

Portanto, temos que

$$|E_1| \leq \left(\iint |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\left(\iint |G|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T \beta(t) dt\right)^{s},$$

onde β depende de n, e $s = 3/4$ quando $n = 2$ e $s = 5/8$ quando $n = 3$. De uma forma mais geral, podemos definir $E_1(t_1, t_2)$ substituindo a integral $\int_0^T$ na definição de E_1 por $\int_{t_1}^{t_2}$ para $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ e da análise feita acima, temos

$$|E_1(t_1,t_2)| \leq \left(\int_0^{t_2}\int |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{t_2}\int |G|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\left(\int_{t_1}^{t_2}\beta(t) dt\right)^{s} \equiv e(t_1,t_2) \qquad (3.62)$$

onde β e s não dependem de G, t_1, t_2.

Vamos, agora, estimar E_6. Primeiro definamos

$$a(x,t) = \int_0^1 P'(\rho(x,t) + \theta(\bar{\rho}(x,t) - \rho(x,t)))d\theta = \frac{P(\rho(x,t)) - P(\bar{\rho}(x,t))}{\rho(x,t) - \bar{\rho}(x,t)}.$$

Para $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e fixando o tempo, temos

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^n} [P(\rho) - P(\bar{\rho})]\varphi dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} a(\rho - \bar{\rho})\varphi dx\right| \\ &\leq \|(\rho - \bar{\rho})(\cdot,t)\|_{H^{-1}} \|a\varphi\|_{H^1} \\ &\leq \|(\rho - \bar{\rho})(\cdot,t)\|_{H^{-1}} (\|a\varphi\|_2 + \|\varphi\nabla a\|_2 + \|a\nabla\varphi\|_2) \\ &\leq C\|(\rho - \bar{\rho})(\cdot,t)\|_{H^{-1}}(\|\varphi\|_{H^1} + \|\varphi\nabla a\|_2). \end{aligned} \tag{3.63}$$

Se P é da forma $P(\rho) = k\rho$, então a é constante e $\nabla a = 0$. Para P mais geral, dividiremos em dois casos: $n = 2$ e $n = 3$.

Para $n = 3$, temos de (3.19), que $\nabla a \in L^3$. Usando este fato e também a imersão $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, temos que

$$\begin{aligned} \|\varphi\nabla a\|_2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^2 |\nabla a|^2 dx\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^6\right)^{1/6} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla a|^3\right)^{1/3} \\ &\leq C\|\varphi\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Para $n = 2$, temos de (3.19), que $\nabla a \in L^\alpha$, para $\alpha > 2$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\varphi\nabla a\|_2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi|^2 |\nabla a|^2 dx\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi|^q\right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla a|^\alpha\right)^{1/\alpha} \\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi|^q\right)^{1/q}, \end{aligned}$$

onde $q = 2\alpha/(\alpha - 2)$. Daí, pelo Teorema 1.16, pág. 29,

$$\|\varphi\nabla a\|_2 \leq C\|\varphi\|_{H^1}.$$

Assim, (3.63) fica:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}[P(\rho)-P(\bar\rho)]\varphi dx\right| \le C\|(\rho-\bar\rho)(\cdot,t)\|_{H^{-1}}\|\varphi\|_{H^1}.$$

Logo,

$$\|(P(\rho)-P(\bar\rho))(\cdot,t)\|_{H^{-1}} \le C\|(\rho-\bar\rho)(\cdot,t)\|_{H^{-1}}.$$

E, então,

$$\begin{aligned}
|E_6| &\le \int_0^T \|P(\rho)-P(\bar\rho)\|_{H^{-1}}\ \|\mathrm{div}\ \psi^\delta\|_{H^1}\ dt \\
&\le \int_0^T C\|(\rho-\bar\rho)(\cdot,t)\|_{H^{-1}}\|\mathrm{div}\ \psi^\delta\|_{H^1}\ dt \\
&\le C\int_0^T \|(\rho-\bar\rho)(\cdot,t)\|_{H^{-1}}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\psi^\delta|^2dx\right)^{1/2}+\left(\int_{\mathbb{R}^n}|D_x^2\psi^\delta|^2dx\right)^{1/2}\right]dt \\
&\le C\sup_{0\le t\le T}\|(\rho-\bar\rho)(\cdot,t)\|_{H^{-1}}\int_0^T\left[\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\psi^\delta|^2dx\right)^{1/2}+\left(\int_{\mathbb{R}^n}|D_x^2\psi^\delta|^2dx\right)^{1/2}\right]dt \\
&= CT^{1/2}\sup_{0\le t\le T}\|(\rho-\bar\rho)(\cdot,t)\|_{H^{-1}}\left[\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\psi^\delta|^2dx\,dt\right)^{1/2}+\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|D_x^2\psi^\delta|^2dx\,dt\right)^{1/2}\right] \\
&\le CT^{1/2}\sup_{0\le t\le T}\|(\rho-\bar\rho)(\cdot,t)\|_{H^{-1}}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|G|^2dx\,dt\right)^{1/2}, \qquad (3.64)
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o Lema 3.4, pág. 71.

Agora precisamos estimar $\|(\rho-\bar\rho)(\cdot,t)\|_{H^{-1}}$, para estimar E_6. Consideremos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e fixemos o tempo. Temos que

$$\begin{aligned}
\left|\int(\rho-\bar\rho)\varphi\,dx\right| &= \left|\int\left[\rho\varphi-(\bar\rho\circ S)(\varphi\circ S)|\det\nabla S|\right]dx\right| \\
&= \left|\int\rho(\varphi-A_0(\varphi\circ S))\,dx\right| \\
&\le \int\rho|\varphi-\varphi\circ S|dx+\int\rho|\varphi\circ S|\,|1-A_0|\,dx, \qquad (3.65)
\end{aligned}$$

onde usamos (3.33), pág. 63, na segunda igualdade. Escrevendo

$$I_1=\int\rho(x,t)|\varphi(x,t)-\varphi(S(x,t),t)|dx \text{ e } I_2=\int\rho(x,t)|\varphi(S(x,t),t)|\,|1-A_0(x,t)|\,dx,$$

vamos estimar estas duas integrais separadamente. Para estimar I_1, vamos usar um raciocínio análogo ao utilizado para estimar E_1, ou seja, vamos subdividir o intervalo de tempo em intervalos menores, tomando J um inteiro positivo suficientemente grande e definindo para cada $t \in [0,T]$,

$t_j = jt/J,\ j = 1, \cdots, J$. Temos então,

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x,t)|\varphi(x,t) - \varphi(S(x,t),t)|\,dx \\
&\leq \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x,t)|\varphi(S(x,t_{j+1}),t) - \varphi(S(x,t_j),t)|dx \\
&= \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x,t)\left[\int_0^1 \nabla\varphi(\theta S(x,t_{j+1}) + (1-\theta)S(x,t_j),t)(S(x,t_{j+1}) - S(x,t_j))d\theta\right] dx \\
&\leq \sum_j \|\rho\|_\infty \|S(\cdot,t_{j+1}) - S(\cdot,t_j)\|_2 \left\|\int_0^1 \nabla\varphi(\theta S(x,t_{j+1}) + (1-\theta)S(x,t_j),t)d\theta\right\|_2 \\
&\leq \sum_j \|\rho\|_\infty \|S(\cdot,t_{j+1}) - S(\cdot,t_j)\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1 |\nabla\varphi(\theta S(x,t_{j+1}) + (1-\theta)S(x,t_j),t)|^2 d\theta\,dx\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Consideremos a aplicação $x \mapsto S(x,t_j)$. Esta aplicação é bi-Lipschitziana em $\mathbb{R}^n$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} &|\nabla\varphi(\theta S(x,t_{j+1}) + (1-\theta)S(x,t_j),t)|^2 dx\,d\theta \\
&\leq C\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi(x + \theta T(x),t)|^2 dx\,d\theta \\
&\leq C\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi(x,t)|^2 dx\,d\theta \\
&= C\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi(x,t)|^2 dx,
\end{aligned} \tag{3.66}$$

onde $T(x) = S(S^{-1}(x,t_j),t_{j+1}) - x$. De (3.8), temos que $\|\nabla T\|_\infty$ é arbitrariamente pequeno se t_{j+1} está suficientemente próximo de t_j, ou seja, se J é suficientemente grande. Assim, a aplicação $x \mapsto x + \theta T(x)$ é um-a-um e bi-Lipschitziana em $\mathbb{R}^n$, e podemos fazer a mudança de variáveis $y = x + \theta T(x)$ acima. Assim, temos:

$$|I_1| \leq C\sum_j \|S(\cdot,t_{j+1}) - S(\cdot,t_j)\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{3.67}$$

Como, pelo Lema 3.3, item (d), pág. 57,

$$
\begin{aligned}
\|S(\cdot,t_j)-S(\cdot,t_{j+1})\|_2 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n}|x-S(x,t_j)|^2dx\right)^{1/2}+\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x-S(x,t_{j+1})|^2dx\right)^{1/2}\\
&\leq C{t_j}^{1/2}\left(\int_0^{t_j}\int_{\mathbb{R}^n}|u-\bar{u}\circ S|^2dx\,dt\right)^{1/2}+C{t_{j+1}}^{1/2}\left(\int_0^{t_{j+1}}\int_{\mathbb{R}^n}|u-\bar{u}\circ S|^2dx\,dt\right)^{1/2}\\
&\leq C\left(\frac{j^{1/2}+(j+1)^{1/2}}{J^{1/2}}\right)t^{1/2}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|z|^2dx\,dt\right)^{1/2}\\
&\leq CT^{1/2}\left(\frac{j^{1/2}+(j+1)^{1/2}}{J^{1/2}}\right)\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|z|^2dx\,dt\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

temos:

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\leq CT^{1/2}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|z|^2dx\,dt\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\varphi|^2dx\right)^{1/2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{j^{1/2}+(j+1)^{1/2}}{J^{1/2}}\right)\\
&\leq CT^{1/2}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|z|^2dx\,dt\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\varphi|^2dx\right)^{1/2} \qquad (3.68)
\end{aligned}
$$

Vamos agora, estimar I_2. Temos que

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\leq \int_{\mathbb{R}^n}|\rho(x,t)|\,|\varphi(S(x,t),t)|\,|1-A_0(x,t)|dx\\
&\leq C\|\rho\|_\infty\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(S(x,t),t)|\,|\rho_0(X(x,0,t))-\bar{\rho}_0(X(x,0,t))|dx\\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(S(x,t),t)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\rho_0(X(x,0,t))-\bar{\rho}_0(X(x,0,t))|^2dx\right)^{1/2}\\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x,t)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\rho_0(x)-\bar{\rho}_0(x)|^2dx\right)^{1/2}\\
&\leq C\|\varphi(\cdot,t)\|_2\,\|(\rho_0-\bar{\rho}_0)\|_2.
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos

$$
\sup_{0\leq t\leq T}\|(\rho-\bar{\rho})(\cdot,t)\|_{H^{-1}}\leq C\left[\|\rho_0-\bar{\rho}_0\|_2+T^{1/2}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|z|^2dx\,dt\right)^{1/2}\right]. \qquad (3.69)
$$

Assim, substituindo (3.69) em (3.64), obtemos

$$
|E_6|\leq CT^{1/2}\left[\|\rho_0-\bar{\rho}_0\|_2+\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|z|^2dx\,dt\right)^{1/2}\right]\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|G|^2dx\,dt\right)^{1/2}
$$

Vamos estimar o E_5. Somando e subtraindo $\nabla\psi^\delta u^\delta$, temos:

$$E_5 = \int\int (1 - A_0)\rho(\bar{u} \circ S)[\psi_t^\delta + \nabla\psi^\delta u^\delta + \nabla\psi^\delta(u - u^\delta)]dxdt.$$

Escrevendo E_5 da forma $E_5 = I_1 + I_2$, com $I_1 = \int\int (1 - A_0)\rho(\bar{u} \circ S)(\psi_t^\delta + \nabla\psi^\delta u^\delta)dxdt$ e $I_2 = \int\int (1 - A_0)\rho(\bar{u} \circ S)\nabla\psi^\delta(u - u^\delta)dxdt$, vamos estimar estas duas integrais separadamente. Temos que,

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \int\int \frac{|(\rho_0 - \bar{\rho}_0)(X(x,0,t))|}{|\rho_0(X(x,0,t))|} |\rho|\, |\bar{u} \circ S|\, |\psi_t^\delta + \nabla\psi^\delta u^\delta| dxdt \\
&\leq c^{-1}\|\rho_0 - \bar{\rho}_0\|_2\, \|\rho\|_\infty \int \left(\int \|\bar{u}(\cdot,t)\|^2_{\infty;\mathbb{R}^n}\, |\psi_t^\delta + \nabla\psi^\delta u^\delta|^2 dx \right)^{1/2} dt \\
&\leq c^{-1}C\|\rho_0 - \bar{\rho}_0\|_2 \left(\int_0^T \|\bar{u}(\cdot,t)\|^2_\infty dxdt \right)^{1/2} \left(\int\int |\psi_t^\delta + \nabla\psi^\delta u^\delta|^2 dxdt \right)^{1/2} \\
&\leq c^{-1}CM\|\rho_0 - \bar{\rho}_0\|_2 \left(\int\int |G|^2 dxdt \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

onde usamos que $\rho_0 > c$, $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, a hipótese $\|\bar{u} \circ S\|_2 < M$ e o Lema 3.4, pág. 71.

E, para I_2, temos:

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \int\int \frac{|(\rho_0 - \bar{\rho}_0)(X(x,0,t))|}{|\rho_0(X(x,0,t))|} |\rho|\, |\bar{u} \circ S|\, |\nabla\psi^\delta|\, |u - u^\delta| dxdt \\
&\leq c^{-1}\|\rho_0 - \bar{\rho}_0\|_\infty \|\rho\|_\infty \int_0^T \|\nabla\psi^\delta(\cdot,t)\|_2\, \|\bar{u}(\cdot,t)\|_\infty\, \|u(\cdot,t) - u^\delta(\cdot,t)\|_2\, dt \\
&\leq c^{-1}C\|G\|_2 \left(\int_0^T \|\bar{u}(\cdot,t)\|^2_\infty dt \right)^{1/2} \|u - u^\delta\|_2,
\end{aligned}$$

onde usamos os mesmos argumentos usados na estimativa de I_1. Note que I_2 tende a zero, quando $\delta \to 0$.

Vamos estimar o E_3. Usaremos o mesmo raciocínio de E_1. Vamos dividir o intervalo de tempo em pequenos intervalos. Para isto, consideremos J um inteiro positivo suficientemente grande e definimos para cada $t \in [0, T]$, $t_j = jt/J$, para $j = 0, 1, \cdots, J$. Assim, como $\bar{u}(S(x,t),t) - \bar{u}(x,t) = -\sum_j \bar{u}(S(x,t_j),t) - \bar{u}(S(x,t_{j+1}),t)$, temos:

$$
\begin{aligned}
|E_3| &\leq \sum_{j=0}^{J} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\bar{u}(S(x,t_j),t) - \bar{u}(S(x,t_{j+1}),t)|\, |\mu\Delta\psi^\delta + \lambda\nabla\mathrm{div}\psi^\delta| dx\, dt \\
&= \sum_{j=0}^{J} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\mu\Delta\psi^\delta + \lambda\nabla\mathrm{div}\psi^\delta| \\
&\qquad \left(\int_0^1 \nabla\bar{u}(\theta S(x,t_j) + (1-\theta)S(x,t_{j+1}),t))[S(x,t_j) - S(x,t_{j+1})] d\theta \right) dx\, dt \\
&\leq \sum_{j=0}^{J} \int_0^T \|S(\cdot,t_j) - S(\cdot,t_{j+1})\|_2 \left\| (\mu\Delta\psi^\delta + \lambda\nabla\mathrm{div}\psi^\delta) \int_0^1 \nabla\bar{u}(\theta S(\cdot,t_j) + (1-\theta)S(\cdot,t_{j+1}),t)) d\theta \right\|_2 dt \\
&\leq \sum_{j=0}^{J} \|S(\cdot,t_j) - S(\cdot,t_{j+1})\|_2 \int_0^T \|\nabla\bar{u}(\cdot,t)\|_\infty \, \|\mu\Delta\psi^\delta(\cdot,t) + \lambda\nabla\mathrm{div}\psi^\delta(\cdot,t)\|_2 \, dt. \qquad (3.70)
\end{aligned}
$$

Estimando $\|S(\cdot,t_j) - S(\cdot,t_{j+1})\|_2$, utilizando o Lema 3.3 (d), pág. 57, temos:

$$
\begin{aligned}
\|S(\cdot,t_j) - S(\cdot,t_{j+1})\|_2 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x - S(x,t_j)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x - S(x,t_{j+1})|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq C{t_j}^{1/2} \left(\int_0^{t_j} \int_{\mathbb{R}^n} |u - \bar{u}\circ S|^2 dx\, dt \right)^{1/2} + C{t_{j+1}}^{1/2} \left(\int_0^{t_{j+1}} \int_{\mathbb{R}^n} |u - \bar{u}\circ S|^2 dx\, dt \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\frac{j^{1/2} + (j+1)^{1/2}}{J^{1/2}} \right) t^{1/2} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |z|^2 dx\, dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
|E_3| &\leq C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |z|^2 dx\, dt \right)^{1/2} \int_0^T \|\mu\Delta\psi^\delta(\cdot,t) + \lambda\nabla\mathrm{div}\psi^\delta(\cdot,t)\|_2 \sum_{j=0}^{J} \left(\frac{j^{1/2} + (j+1)^{1/2}}{J^{1/2}} \right) t^{1/2} \|\nabla\bar{u}(\cdot,t)\|_\infty dt \\
&\leq C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |z|^2 dx\, dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|\mu\Delta\psi^\delta(\cdot,t) + \lambda\nabla\mathrm{div}\psi^\delta(\cdot,t)\|_2^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T t\|\nabla\bar{u}(\cdot,t)\|_\infty^2 dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Por (3.12) temos que $\int_0^T t\|\nabla\bar{u}(\cdot,t)\|_\infty^2 dt < \infty$ e, usando 3.48 (v. Lema 3.4, pág. 71), temos

$$
\int_0^T \|\mu\Delta\psi^\delta(\cdot,t) + \lambda\nabla\mathrm{div}\psi^\delta(\cdot,t)\|_2^2 dt \leq C \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |G|^2 dx\, dt.
$$

Logo,

$$
|E_3| \leq C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |z|^2 dx\, dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |G|^2 dx\, dt \right)^{1/2} (\beta(t)dt)^{1/2},
$$

onde $\beta(t) = t\|\nabla\bar{u}(\cdot,t)\|_\infty^2$.

Analogamente ao que fizemos para E_1, podemos definir $E_3(t_1,t_2)$ e obter uma estimativa para $|E_3(t_1,t_2)|$ do tipo (3.62). Substituindo em (3.54) todas as estimativas que fizemos e tomando o $\limsup\limits_{\delta\to 0}$, obtemos:

$$\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} z\cdot G\,dx\,dt\right| \le C\left[M_0\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|G|^2dxdt\right)^{1/2} + e(0,T)\right], \tag{3.71}$$

onde $e(t_1,t_2)$, $0\le t_1<t_2\le T$, é como em (3.62),

$$M_0 = \|\rho_0-\bar\rho_0\|_{L^2\cap L^{2p}} + \|\rho_0u_0-\bar\rho_0\bar u_0\|_2 + \left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|f-\bar f\circ S|^2dxdt\right)^{1/2}$$

e C está, agora, fixado.

Mais precisamente, vimos que

$$\int_0^T\int z\cdot G dx\,dt = \sum_j A_j, \tag{3.72}$$

onde cada A_j é da forma $A_j = \displaystyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} L_j(\psi^\delta)dx\,dt$, com $L_j(\psi^\delta)$ sendo algum operador (linear) em ψ^δ, e satisfaz

$$\limsup_{\delta\to 0}|A_j| \le C\,M_0\left(\int_0^T\int|G|^2dx\,dt\right)^{1/2} \tag{3.73}$$

ou

$$\limsup_{\delta\to 0}\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n}L_j(\psi^\delta)dx\,dt\right| \le Ce(t_1,t_2),\quad \forall\ 0\le t_1<t_2\le T.$$

Observamos que o T aqui e em (3.71) pode ser substituído por qualquer $t\in(0,T]$. (Na definição de M_0 deixamos o T fixado, ou seja, é o T dado no enunciado do Teorema 3.1)

Seja $0=t_0<t_1<\cdots<t_{m-1}<t_m=T$ uma partição de $[0,T]$ tal que $\left(\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}}\beta(t)dt\right)^s\le\dfrac{1}{2C}$ para $k=0,1,\cdots,m$.

Aplicando (3.71) no intervalo de 0 a t_1, e fazendo $G\to z$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^{t_1}\int|z|^2dx\,dt &\le C\,M_0\left(\int_0^{t_1}\int|z|^2dx\,dt\right)^{1/2} + C\left(\int_0^{t_1}\int|z|^2dx\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{t_1}\int|z|^2dx\,dt\right)^{1/2}\frac{1}{2C}\\ &= C\,M_0\left(\int_0^{t_1}\int|z|^2dx\,dt\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\int_0^{t_1}\int|z|^2dx\,dt.\end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\int_0^{t_1}\int |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2} \leq 2CM_0. \tag{3.74}$$

Calculando agora a integral $\int_0^{t_2}\int z\cdot G dx\, dt$, temos:

$$\int_0^{t_2}\int z\cdot G dx\, dt \leq A + B \tag{3.75}$$

onde A satisfaz $\lim_{\delta\to 0}\sup|A| \leq CM_0\left(\int_0^{t_2}\int |G|^2 dxdt\right)^{1/2}$ e
$B = \sum_j \left(\int_0^{t_1}\int L_j(\psi^\delta) dx\, dt + \int_{t_1}^{t_2}\int (L_j\psi^\delta) dx\, dt\right)$, satisfaz

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0}\sup|B| \leq Ce(0,t_1) + Ce(t_1,t_2) &= C\left(\int_0^{t_1}\int |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{t_1}\int |G|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{t_1}\beta(t) dt\right)^{s} \\
&+ C\left(\int_0^{t_2}\int |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{t_2}\int |G|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\left(\int_{t_1}^{t_2}\beta(t) dt\right)^{s} \\
&\leq 2C^2 M_0\left(\int_0^{t_1}\int |G|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\frac{1}{2C} \\
&+ \frac{1}{2}\left(\int_0^{t_2}\int |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{t_2}\int |G|^2 dx\, dt\right)^{1/2} \\
&\leq C\, M_0\left(\int_0^{t_1}\int |G|^2 dx\, dt\right)^{1/2} \\
&+ \frac{1}{2}\left(\int_0^{t_2}\int |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{t_2}\int |G|^2 dx\, dt\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

onde usamos (3.73) e (3.74).

Assim, de (3.75) temos:

$$\left|\int_0^{t_2}\int z\cdot G dx\, dt\right| \leq 2C\, M_0\left(\int_0^{t_2}\int |G|^2 dx\, dt\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\left(\int_0^{t_2}\int |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{t_2}\int |G|^2 dx\, dt\right)^{1/2}.$$

Fazendo $G \to z$, obtemos

$$\int_0^{t_2}\int |z|^2 dx\, dt \leq 2C\, M_0\left(\int_0^{t_2}\int |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\left(\int_0^{t_2}\int |z|^2 dx\, dt\right),$$

o que implica

$$\left(\int_0^{t_2}\int |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2} \leq 4C\ M_0.$$

Desta forma, generalizando para o intervalo de 0 a t_k, temos:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{t_k}\int z\cdot G dx\, dt\right| &\leq CM_0\left(\int_0^{t_k}\int |G|^2 dxdt\right)^{1/2} + C\sum_{r=1}^{k} e(t_{r-1},t_r)\\ &\leq kCM_0\left(\int_0^{t_k}\int |G|^2 dxdt\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\int_0^{t_k}\int |G|^2 dxdt \qquad (3.76)\end{aligned}$$

Fazendo $G \to z$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_0^{t_k}\int |z|^2 dx\, dt \leq kCM_0\left(\int_0^{t_k}\int |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2},$$

o que nos dá

$$\left(\int_0^{t_k}\int |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2} \leq 2kCM_0.$$

Quando $k = m$, obtemos

$$\left(\int_0^{T}\int |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2} \leq 2mCM_0. \qquad (3.77)$$

Portanto, daí e de (3.69), chegamos à estimativa (3.18) com $u - \bar{u}\circ S$ no lugar de $u - \bar{u}$. Como, pelo Lema 3.3 (d), pág. 57 e por (3.12),

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |\bar{u} - \bar{u}\circ S|^2 dx\, dt &\leq \int_0^T \|\nabla\bar{u}(\cdot,t)\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}^n} |x - S(x,t)|^2 dx\, dt\\ &\leq C\int_0^T t\|\nabla\bar{u}(\cdot,t)\|_\infty^2 dt \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |z|^2 dx\, dt\\ &\leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |z|^2 dx\, dt,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|u-\bar{u}\|_2 &\leq \|u - \bar{u}\circ S\|_2 + \|\bar{u} - \bar{u}\circ S\|_2\\ &\leq \left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2} + C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |z|^2 dx\, dt\right)^{1/2},\end{aligned}$$

concluímos (3.18), obtendo assim o resultado desejado. ■

Lista de Símbolos

χ_E	função característica de E
$\mathbb{R}^n$	espaço euclidiano, n-dimencional
x	$x = (x^1, \cdots, x^n)$, um ponto em $\mathbb{R}^n$
$x \cdot y$	produto interno
$\lvert x\rvert$	norma de x
Ω	um aberto do $\mathbb{R}^n$
$\overline{\Omega}$	fecho de Ω
$\partial\Omega$	fronteira de Ω
$supt\, u$	suporte de u
$diam\, E$	diâmetro de E
$dist(E, F)$	distância de E a F
$B(x, r)$	bola de centro em x e raio r
α	$\alpha = (\alpha^1, \cdots, \alpha^n)$, multi-índice
$\lvert\alpha\rvert$	$\lvert\alpha\rvert = \alpha^1 + \cdots + \alpha^n$
x^α	$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$
$\alpha!$	$\alpha! = \alpha^1! \cdots \alpha^n!$
$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$	i-ésima derivada parcial
D^α	$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} = \dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$
$Du = \nabla u$	gradiente de u, $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$
$D^k u$	$D^k u = \{D^\alpha u\}_{\lvert\alpha\rvert=k}$
$C(\Omega)$	espaço das funções contínuas em Ω

$C^k(\Omega)$	$C^k(\Omega) = \{u : D^\alpha u \in C(\Omega)\}_{\|\alpha\|\leq k}$
$C_0^k(\Omega)$	$C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap \{u : spt\, u \subset \Omega$ é compacto$\}$
$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$	$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C(\Omega);\ \sup_{x,y\in\Omega} \frac{\|u(x)-u(y)\|}{\|x-y\|^\alpha} < \infty\right\}$, com $0 < \alpha < 1$
$\|E\|$	medida de Lebesgue de E
$⨍_\Omega f\,dx$	$⨍_\Omega f\,dx = \frac{1}{\|\Omega\|}\int_\Omega f\,dx$
$L^p(\Omega)$	espaço das funções u tais que $\int_\Omega \|u(x)\|^p dx < \infty$
$L^p_{loc}(\Omega)$	$u \in L^p(K)$, para cada compacto $K \subset \Omega$
$\|\|u\|\|_{p;\Omega}$	norma L^p em Ω
p'	expoente conjugado de p, $p' = \frac{p}{p-1}$ se $p > 1$, $p' = \infty$ se $p = 1$
p^*	conjugado de Sobolev de p, $p^* = \frac{np}{n-p}$
$\mathcal{D}(\Omega)$	espaço das funções teste em Ω
φ_ε	regularizador ou mollifier
u_ε	$u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * u$, convolução de u com φ_ε
$W^{k,p}(\Omega)$	espaço de Sobolev em Ω
$W_0^{k,p}(\Omega)$	fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$
$\|\|u\|\|_{k,p;\Omega}$	norma de Sobolev em Ω
$BV(\Omega)$	funções de variação limitada em Ω
$\Omega' \subset\subset \Omega$	$\overline{\Omega'} \subset \Omega$ e $\overline{\Omega'}$ é compacto
$\mathrm{div}\, u$	divergente do campo de vetor u, $\mathrm{div}\, u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^j}$
Δu	Laplaciano de u, $\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial {x^j}^2}$
JT	$JT \equiv \|\det T\|$, Jacobiano de T
$u_h(x)$	$u_h(x) = u(x+h)$
$E \hookrightarrow F$	E continuamente imerso em F
$E \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow F$	E compactamente imerso em F

ÍNDICE REMISSIVO

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] A. Novotný e I. Straskraba. *Introduction to the Mathematical Theory of Compressible Flow.* Oxford University Press, New York, 2004.

[2] David Gilbarg e Neil S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer, 2^a Edição, New York, 1983.

[3] David Hoff. *Compressible Flow in a Half-Space with Navier Boundary Conditions*. J. Math. Fluid Mech, vol 7 (2005), n° 3, p. 315-338.

[4] David Hoff. *Discontinuous Solutions of the Navier-Stokes Equations for Multidimensional Heat-Conducting Fluids*. Arch. Rational Mech. Anal, vol 139 (1997), n° 4, p. 303-354.

[5] David Hoff. *Dynamics of Singularity Surfaces for Compressible, Viscous Flows in two Space Dimensions*. Comm. Pure Appl. Math, vol 55 (2002), n° 11, p. 1365-1707.

[6] David Hoff. *Global Solution of the Navier-Stokes Equations for Multidimensional Compressible Flow with Discontinuous Initial Data*. J. Differential Equations, vol 120 (1995), n°1, p. 215-254.

[7] David Hoff. *Uniqueness of Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations of Multidimensional, Compressible Flow*. SIAM J. Math. Anal , vol 37 (2006), n°6, p. 1742-1760.

[8] David Hoff e M.M. Santos. *Lagrangean Structure and Propagation of Singularities in Multidimensional, Compressible Flow*. Arch. Rational Mech. Anal, vol 188 (2008), n°3, p. 509-543.

[9] Eduard Feireisl. *Dynamics of Viscous Compressible Fluids*. Oxford University Press, New York, 2004.

[10] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley, 2^a Edição, New York, 1999.

[11] Haim Brézis. *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editoral, S.A., Madrid, 1984.

[12] Herbert Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, New York, 1969.

[13] J.Y. Chemin. *Perfect Incompressible Fluids*. Translated from the 1995 French original by Isabelle Gallagher and Dragos Iftimie. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 14. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

[14] J. Nečas. *L'application de L'égalité de Rellich sur les Systèmes Elliptiques du Deuxième Ordre*. J. Math. Pures Appl. 44 (1965) p. 133-147.

[15] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, vol.9. American Mathematical Society, Rhode Island, 1998.

[16] Luis A. Medeiros e M. Milla Miranda. *Espaços de Sobolev, Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos.* UFRJ, Instituto de Matemática. Rio de Janeiro, 2000.

[17] Pierre- Louis Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics.*Vol. 2, Compressible Model. Clarendon Press Oxford, New York, 1998.

[18] Severino Toscano Melo e F. M. Neto. *Mecânica dos Fluidos e Equações Diferenciais*. 18° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA.

[19] Thierry Cazenave e Alain Haraux. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*. Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[20] William P. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions. Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation*. Graduate Texts in Mathematics, 120. Springer-Verlag, New York, 1989.