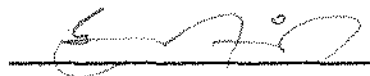


COMPARAÇÕES PARELHADAS MULTIVARIADAS
UMA APLICAÇÃO DO MÉTODO
DE OTIMIZAÇÃO ALEATÓRIA

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. AIPORÊ RODRIGUES DE MORAES e aprovada pela comissão Julgadora.

Campinas, 07 de outubro de 1987.

Prof. Dr.



Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em ESTATÍSTICA.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

À ENEIDA,
Vitória e Jordano Bruno,
companheiros de aventura.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor e Orientador José Antonio Cordeiro, pela orientação, competência, amizade e por todo conhecimento que me proporcionou nesses meses de convivência.

Aos pais Alceu e Enedina e a minha irmã Marizete por terem segurado as "pontas" nas horas difíceis.

Ao professor Luis K. Hotta pelo esclarecimento de dúvidas e por sua dedicação.

Ao pessoal da Secretaria de Pós-Graduação do IMECC, Isabel, Jô, Luiz, Cidinha e Júlio, pela amizade e pelo apoio acadêmico, em especial à Isabel pelo trabalho de datilografia.

Ao CNPq, FAPESP e UNICAMP pelo apoio financeiro.

A Antonio Sérgio Ando, pelo apoio computacional.

A Cláudio Sérgio de Ros Carvalho e Ricardo de Paola pela solução das dúvidas com respeito ao sistema operacional do VAX.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO 1: COMPARAÇÕES PARELHADAS E O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO ALEATÓRIA.....	1
1.1. Aplicações.....	1
1.2. O Modelo Básico para Comparações Parelhadas.....	2
1.3. O Modelo Multivariado para Comparações Parelhadas....	5
1.4. O Método de Otimização Aleatória (MOA).....	6
CAPÍTULO 2: APROXIMAÇÃO DE 2ª ORDEM DE BAHADUR E O MODELO DE DAVIDSON E BRADLEY.....	9
2.1. O Modelo de Bahadur.....	9
2.2. O Modelo Davidson e Bradley.....	13
2.3. A Aproximação de m-ésima ordem ($1 \leq m \leq n$).....	16
2.4. Relação entre a Distribuição de 2ª ordem e o Modelo de Davidson e Bradley.....	18
2.5. A Função de Verossimilhança.....	21
2.6. Testes de Hipóteses.....	23
2.7. Adequabilidade do Modelo.....	25
2.8. O Desenvolvimento de uma Função de Regressão para Comparações Parelhadas Multivariadas.....	28
2.9. A Regressão sob o Modelo de Bahadur.....	30
CAPÍTULO 3: O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO ALEATÓRIA. UMA DERIVAÇÃO E APLICAÇÃO NO MODELO DAVIDSON E BRADLEY.....	32

3.1. O Modelo, suas restrições e os problemas compu- tacionais.....	32
3.2. Método de Otimização Aleatória, uma variação do Método C.....	34
3.3. Um Critério de Parada para o MOA.....	36
CAPÍTULO 4: O EXEMPLO DO PUDIM DE CHOCOLATE.....	38
CAPÍTULO 5: DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E CONCLUSÃO.....	43
 APÊNDICE I. TABELAS DAS SEQUÊNCIAS DE EXECUÇÕES COM OS RESULTADOS DAS ESTIMATIVAS DE MÁXIMA VEROS- SIMILHANÇA SEGUNDO O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO ALEATÓRIA DERIVADO DO MÉTODO C	
 APÊNDICE II. PROGRAMAS COMPUTACIONAIS FEITOS PARA REA- LIZAÇÃO DESTE TRABALHO	

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar o modelo de comparações parelhadas multivariadas proposto por Davidson e Bradley (1969), mostrando os testes de hipóteses desenvolvidos para os parâmetros de preferências supondo a igualdade entre os mesmos, para os parâmetros de medida de as sociação entre os atributos e também para a adequabilidade de ajuste do modelo. Estes testes de hipóteses foram construídos utilizando a estatística da razão de verossimilhança.

Proporemos e discutiremos um método de otimização aleatória (M.O.A.) derivado do método C (Dorea, 1983) para estimarmos os parâmetros citados acima, assim como um critério de parada que nos possibilite identificar regiões de máximos locais e a região de máximo global.

Finalmente, apresentaremos um exemplo numérico utilizando os dados usados por Davidson e Bradley para comparação de nossos resultados.

CAPÍTULO 1

COMPARAÇÕES PARELHADAS E O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO ALEATÓRIA

O método de comparações parelhadas proporciona uma técnica experimental simples, com uma literatura rica em desenvolvimento de modelos estocásticos.

Interesse em comparações parelhadas surge naturalmente através de competições de várias espécies, pela simplicidade experimental de comparações sensoriais de artigos ou alimentos, através de propriedades combinadas associadas com construção de planejamentos experimentais ou combinação de jogos.

O método de comparações parelhadas foi introduzido inicialmente por Zermelo (1929) no contexto de jogos de xadrez. Suponha que existam t tratamentos (ou objetos, ou animais) T_1, T_2, \dots, T_t para comparação e que o experimento é limitado para planejamento nas comparações qualitativas entre pares de tratamentos. Nós assumiremos que, para cada $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, t$, temos $n_{ij} = n_{ji}$ comparações de T_i com T_j , T_i sendo preferido f_{ij} vezes, T_j preferido $f_{ji} = n_{ij} - f_{ij}$ vezes.

1.1. Aplicações

É interessante citarmos algumas aplicações do método de comparações parelhadas.

Nagakami (1961) exibiu dados multivariados sobre: sabor, odor, cor e preferências globais para três produtos farmacêuticos para crianças e suas mães; análise univariada foi feita. A análise sensorial nos permite uma gama de aplicações do método de comparações parelhadas, comparando produtos de uma mesma espécie provenientes de marcas diferentes, possibi

lita determinar a superioridade de uma marca em relação às outras, avaliando, por exemplo, a importância relativa da textura, sabor, odor e aparência na aceitabilidade do produto. Davidson e Bradley (1969) aplicaram este método em conjunto de dados obtidos em um experimento na qual cada elemento pertencente à amostra foi questionado para testar seis marcas de um tipo específico de pudim. No total existiam dois tipos de pudim, chocolate e baunilha, e seis marcas (tratamentos), A, B, C, D, E, F. Cada pessoa entrevistada expressa entre outras perguntas, sua preferência entre duas marcas específicas de um determinado pudim que lhe foi oferecido com as seguintes características (vetor de preferências): (1) gosto ou sabor; (2) cor; (3) doçura; (4) textura; (5) aparência; (6) solvência; (7) qualidade global.

No nosso trabalho faremos uma aplicação usando o pudim de chocolate, fazendo um estudo amplo do modelo proposto, utilizando o método de otimização aleatória na estimação dos parâmetros do modelo. Um exemplo que podemos propor é a comparação de perfis de políticos que pleiteiam um determinado cargo público. Suponhamos que existam 5 candidatos interessados, A, B, C, D, E (tratamentos). É selecionada uma amostra onde cada elemento expressa sua preferência entre dois candidatos, onde cada par comparado possui as seguintes características: (1) oratória; (2) honestidade; (3) habilidade política; (4) carisma.

1.2. Um Modelo Básico para Comparações Parelhadas

Zermelo (1929), Bradley e Terry (1952 a); Terry, Bradley e Davis (1952) propuseram um modelo básico para comparações parelhadas. Cada frequência f_{ij} é selecionada como sendo binomialmente distribuída com probabilidade π_{ij} , indepen

dente das outras frequências. Parâmetros $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_t$, $\pi_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, t$, são associados aos tratamentos, T_1, T_2, \dots, T_t . É postulado que esses parâmetros representam as probabilidades relativas de seleção com π_{ij} sendo estruturado como

$$P(X_i > X_j) = \pi_{ij} = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j}, \quad i \neq j = 1, 2, \dots, t \quad (1.2.1)$$

com $\sum \pi_i = 1$ e $\pi_{ij} + \pi_{ji} = 1$, onde o par (X_i, X_j) representa as respostas associadas ao par de tratamentos (T_i, T_j) . O modelo (1.1.1) impõe em sua estrutura a existência de $(t-1)$ funções de parâmetros independentes.

Estimação de máxima-verossimilhança e teste de razão de verossimilhança foram desenvolvidos. A componente binomial da função de verossimilhança para as n_{ij} comparações de T_i e T_j é dado por:

$$\binom{n_{ij}}{f_{ij}} \left(\frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j} \right)^{f_{ij}} \left(\frac{\pi_j}{\pi_i + \pi_j} \right)^{f_{ji}} = \frac{\pi_i^{f_{ij}} \pi_j^{f_{ji}}}{(\pi_i + \pi_j)^{n_{ij}}} \binom{n_{ij}}{f_{ij}} \quad (1.2.2)$$

com $f_{ij} + f_{ji} = n_{ij}$, onde f_{ij} é o número de seleções do tratamento T_i , empates, ou não seleções não são permitidos no modelo básico. A função de máxima-verossimilhança é dada por

$$L \propto \frac{\prod_i \pi_i^{f_i}}{\prod_{i < j} (\pi_i + \pi_j)^{n_{ij}}} \quad (1.2.3)$$

$f_i = \sum_{j \neq i} f_{ij}$ é o número total de seleções de T_i .

Após algumas simplificações, a maximização de $\ln L$ sujeito a restrição $\sum \pi_i = 1$ nos conduz às equações de verossimilhança

$$\frac{f_i}{p_i} - \sum_{j: i \neq j} \frac{n_{ij}}{(p_i + p_j)} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, t \quad (1.2.4)$$

onde p_i é o estimador de π_i .

A solução das equações (1.1.4) são obtidas iterativamente. Se $p_i^{(K)}$ é a K-ésima aproximação para p_i , com

$$p_i^{(K)} = \frac{p_i^{*(K)}}{\sum_i p_i^{*(K)}}$$

e

$$p_i^{*(K)} = \frac{f_i}{\sum_{j: i \neq j} \frac{n_{ij}}{(p_i^{(K-1)} + p_j^{(K-1)})}}$$

A iteração se inicia com $p_i^{(0)}$, às vezes $p_i^{(0)} = 1/t$.

O teste proposto de maior importância foi o da seleção de igualdade entre tratamentos:

$$H_0: \pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_t = 1/t$$

contra a alternativa

$$H_1: \pi_i \neq \pi_j, \text{ para algum } i \neq j = 1, 2, \dots, t,$$

sendo a estatística da razão de verossimilhança dada por

$$-2 \ln \lambda = 2 N \ln 2 - 2 B_1, \text{ onde } N = \sum_{i < j} n_{ij} \quad (1.2.5)$$

e

$$B_1 = \sum_{i < j} n_{ij} \ln (p_i + p_j) - \sum_i f_i \ln p_i \quad (1.2.6)$$

Para n_{ij} grande, $-2 \ln \lambda$ tem distribuição χ^2 (Qui-quadrado) central com $(t-1)$ graus de liberdade (g.l.), sob H_0 .

Rejeitamos a hipótese nula (H_0) se $-2 \ln \lambda > \chi^2_{(t-1), \alpha}$, onde $\chi^2_{(t-1), \alpha}$ é o quantil de ordem $(1-\alpha)$ da distribuição Qui-quadrado com $(t-1)$ g.l.

1.3. O Modelo Multivariado para Comparações Parelhadas

Davidson e Bradley (1969, 1970) propuseram um modelo para comparações parelhadas multivariadas, uma extensão possível do modelo básico univariado. Suponha que T_i e T_j são comparados e que uma resposta nesta comparação é dada pelo vetor $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_p)$, onde \mathbf{s} é observado com p atributos. Definamos $s_\alpha = i$ se T_i é selecionado no atributo α , $s_\alpha = j$ se T_j é selecionado no atributo α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$. O modelo dá as probabilidades das respostas

$$p(\mathbf{s}/i, j) = p^{(1)}(\mathbf{s}/i, j) \cdot h(\mathbf{s}/i, j) \quad (1.3.1)$$

com

$$p^{(1)}(\mathbf{s}/i, j) = \prod_{\alpha=1}^p \frac{\pi_{s_\alpha}(\alpha)}{(\pi_i(\alpha) + \pi_j(\alpha))} \quad (1.3.2)$$

e

$$h(\mathbf{s}/i, j) = 1 + \sum_{\alpha > \beta} \delta(s_\alpha, s_\beta) \rho_{\alpha\beta} \left(\frac{\pi_i(\alpha)}{\pi_j(\alpha)} \right)^{-1/2\delta(i, s_\alpha)} \cdot \left(\frac{\pi_i(\beta)}{\pi_j(\beta)} \right)^{-1/2\delta(i, s_\beta)} \quad (1.3.3)$$

para todo s , $i < j$, $i, j = 1, 2, \dots, t$, onde $\pi_i(\alpha)$ é o parâmetro associado ao tratamento T_i no atributo α

$$\sum_i \pi_i(\alpha) = 1; \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

$\rho_{\alpha\beta}$ é o parâmetro de medida de associação para os atributos α e β , $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p$, e $\delta(.,.) = 1$ ou -1 quando os argumentos são iguais ou desiguais, respectivamente. Note que $\rho = 0$ implica independência das respostas sobre os atributos, onde ρ é o vetor dos elementos $\rho_{\alpha\beta}$. A função $h(s/i, j)$ em (1.3.1) é sujeita a reserva, não assegurando aqui que $p(s/i, j)$ seja uma distribuição de probabilidade. Este problema será discutido detalhadamente no próximo capítulo e também serão desenvolvidos testes de hipóteses para os parâmetros deste modelo.

1.4. O Método de Otimização Aleatória (MOA)

O método de otimização aleatória foi proposto inicialmente por Rastrigin (1963). Desde então, vários algoritmos modificados tem sido desenvolvidos e aplicados em problemas atuais.

Métodos de otimização aleatória podem ser aplicados em problemas onde a diferenciabilidade da função de interesse não é assumida. Por outro lado, o ponto fraco do método de otimização aleatória é que não é necessariamente superior a outro método quando se compara a rapidez de convergência.

O problema consiste (Dorea, 1983) em maximizar (minimizar) uma função $f(\mathbf{x})$; $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, sujeito a $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, onde $f(\mathbf{x})$ e $g_i(\mathbf{x})$ são funções contínuas reais. \mathbb{R}^n é o espaço Euclidiano n -dimensional. Nosso problema é encontrar o máximo global $f(\hat{\mathbf{x}})$

$$f(\hat{x}) \geq f(x), \text{ para todo } x \in X \quad (1.4.1)$$

$$X = \{x: g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$$

É assumido que existe algum número r , tal que

$$\|x\| \leq r, \text{ para todo } x \in X, \quad (1.4.2)$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma Euclídiana usual.

No método de otimização aleatória descrito a seguir nós usaremos a distribuição uniforme definida em X , cuja densidade de probabilidade $u(\cdot)$ é dada por:

$$u(x) = \begin{cases} 1/m(x), & \text{se } x \in X. \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $m(\cdot)$ denota a medida de Lebesgue sobre R^n . Nós assumiremos que $m(X) > 0$. De (1.4.2) nós temos $m(X) < m\{x: \|x\| \leq r\} < \infty$.

O método que usaremos neste trabalho é uma derivação do método (C) proposto por Dorea (1983), que é:

Método (C). Sejam os vetores aleatórios $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots$, definidos por:

Passo 1. $Y^{(1)} = \eta^{(0)}$, onde $\eta^{(0)}$ é distribuído uniformemente sobre X .

Passo $K+1$. Tendo escolhido $Y^{(K)}$, seja $Y^{(K+1)}$ definido por:

$$(a_1) \quad Y^{(K+1)} = Y^{(K)} + \eta^{(K)}, \text{ se } f(Y^{(K)} + \eta^{(K)}) > f(Y^{(K)}),$$

$$(a_2) \quad Y^{(K+1)} = Y^{(K)}, \text{ caso contrário,}$$

onde a densidade condicional de $\eta^{(K)}$ dado $Y^{(K)}$, é uniforme sobre $X - x$, que é

$$u_{\eta^{(K)}/Y^{(K)}}(y/x) = \begin{cases} \frac{1}{m(x)} & \text{se } Y \in X-x \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A convergência deste método e o número de passos esperados na execução do mesmo são dados pelo seguinte teorema:

Teorema: Sejam $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots$ definidos pelo método acima. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(Y^{(n)} \in R_\epsilon) = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(Y^{(n)}) = f(\hat{x}), \text{ quase certamente, e}$$

$$E(T_u) = m(X)/m(R_\epsilon), \text{ onde } T_u = \min\{K: Y^{(K)} \in R_\epsilon\}$$

e $R_\epsilon = \{x: x \in X \text{ e } |f(x) - f(\hat{x})| < \epsilon\}$, $\epsilon > 0$ e $E(.)$ denota a esperança matemática.

Este teorema está demonstrado em Dorea (1983), garantindo a convergência da função f para o ponto de máximo global com probabilidade 1.

CAPÍTULO 2

A APROXIMAÇÃO DE 2ª ORDEM DE BAHADUR E O MODELO DE DAVIDSON E BRADLEY

Seja um conjunto de n itens dicotômicos com modelo de resposta $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde $x_i = 1$ se a resposta para o i -ésimo item é "afirmativa", e $x_i = 0$ caso contrário ($i = 1, 2, \dots, n$). Seja $p(x_1, \dots, x_n) = p(\mathbf{x})$ a distribuição de probabilidade conjunta de respostas em uma dada população.

Seja $p_{[1]}$ a distribuição conjunta dos x_i quando os mesmos são independentes, com as mesmas probabilidades marginais quando sob a distribuição p dada, suponha que nós representaremos $p = p_{[1]} \cdot f$, f fator de correção. Uma expressão explícita para o fator de correção f , em termos das n probabilidades marginais e $2^n - n - 1$ parâmetros de correlação será obtida a seguir. Esta expressão para f sugere certo modelo formal de dependência, o qual definiremos e discutiremos abaixo.

2.1. O Modelo de Bahadur

Se \mathbf{x} denota o conjunto de todos os pontos $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ seja $p(\mathbf{x})$ uma distribuição de probabilidade definida sobre \mathbf{x} . Desde que existem 2^n pontos em \mathbf{x} , é claro que qualquer descrição paramétrica de distribuições de probabilidades arbitrárias requer em geral $(2^n - 1)$ parâmetros independentes. Uma descrição paramétrica particular é desenvolvida a seguir.

Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, seja

$$\alpha_i = p(x_i = 1) = E_p(x_i) \quad (2.1.1)$$

$0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, onde $E_p(.)$ denota o valor esperado

sob a distribuição p .

Considere a variável padronizada Z_i , onde

$$Z_i = \frac{(x_i - \alpha_i)}{\sqrt{\alpha_i(1-\alpha_i)}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1.2)$$

definamos

$$\begin{aligned} r_{ij} &= E_p(Z_i Z_j) \quad i < j \\ r_{ijk} &= E_p(Z_i Z_j Z_k) \quad i < j < k \\ &\vdots \\ r_{12\dots n} &= E_p(Z_1 \dots Z_n) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Onde nos referiremos aos r_{ij} como sendo os C_2^n parâmetros de correlação de segunda ordem, aos r_{ijk} como sendo C_3^n parâmetros de correlação de terceira ordem, ..., para $r_{1\dots n}$ como a correlação de n -ésima ordem. Os parâmetros de correlação definidos anteriormente são no total $C_2^n + C_3^n + \dots + C_n^n = 2^n - n - 1$. Será mostrado presentemente que, junto com os α_i 's, os parâmetros de correlação determinam a distribuição de probabilidade p .

$p_{[1]}(\mathbf{x})$ denota a distribuição conjunta de probabilidade conjunta dos x_i 's quando (1) os x_i são independentemente distribuídos; (2) eles tem a mesma distribuição p dada. Isto é,

$$p_{[1]}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \alpha_i^{x_i} (1-\alpha_i)^{1-x_i}, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad (2.1.4)$$

$i = 1, 2, \dots, n$; temos então que $p_{[1]}(\mathbf{x}) > 0$ para cada \mathbf{x} . Temos então as seguintes proposições:

Proposição 1: Para cada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ em \mathbf{X} ,

$$p(\mathbf{x}) = p_{[1]}(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) \quad (2.1.5)$$

onde

$$f(\mathbf{x}) = 1 + \sum_{i < j} r_{ij} Z_i Z_j + \sum_{i < j < k} r_{ijk} Z_i Z_j Z_k + \dots + r_{12 \dots n} Z_1 \dots Z_n \quad (2.1.6)$$

Para estabelecer a proposição 1, considere um espaço vetorial V das funções f de valores reais sobre \mathbf{X} . Considere V como um espaço de produto interno, com produto interno

$$\langle f, g \rangle \equiv E_{P[1]} (f, g) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) \cdot p_{[1]}(\mathbf{x}) \quad e$$

norma de f , $\|f\| = (\langle f, g \rangle)^{1/2}$, onde $p_{[1]}$ é definida por (2.1.4). Segue de (2.1.1) e (2.1.2) que o conjunto

$$S = \{1; Z_1, Z_2, \dots, Z_n; Z_1 Z_2, Z_1 Z_3, \dots, Z_{n-1} Z_n; \dots; Z_1 Z_2 \dots Z_n\}$$

de funções sobre \mathbf{X} é ortonormal, isto é $\|f\| = 1$ para cada f em S , e $\langle f, g \rangle = 0$ para f e g em S com $f \neq g$.

Para verificarmos essa proposição, consideremos dois exemplos (simples) para casos particulares.

Exemplo 1. Se $f = g = 1$, temos

$$\langle 1, 1 \rangle = E_{P[1]} (f, g) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} p_{[1]}(\mathbf{x}) = 1$$

Exemplo 2. Para $f = g = Z_1 Z_2$, fica

$$\begin{aligned} \langle Z_1 Z_2, Z_1 Z_2 \rangle &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} (Z_1 Z_2)^2 \prod_{i=1}^n \alpha_i^{x_i} (1-\alpha_i)^{1-x_i} = \\ &= \frac{1}{\alpha_1 (1-\alpha_1) \alpha_2 (1-\alpha_2)} \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} (X_1 - \alpha_1)^2 (X_2 - \alpha_2)^2 \prod_{i=1}^n \alpha_i^{x_i} (1-\alpha_i)^{1-x_i} \\ &= \text{pelo teorema de Fubini} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha_1(1-\alpha_1) \alpha_2(1-\alpha_2)} \sum_{x_1=0}^1 (x_1 - \alpha_1)^2 \alpha_1^{x_1} (1-\alpha_1)^{1-x_1} \\
&\cdot \sum_{x_2=0}^1 (x_2 - \alpha_2)^2 \alpha_2^{x_2} (1-\alpha_2)^{1-x_2} \sum_{i=3}^n \alpha_i^{x_i} (1-\alpha_i)^{1-x_i} = \\
&= \frac{1}{\alpha_1(1-\alpha_1) \alpha_2(1-\alpha_2)} (\alpha_1 - \alpha_1^2) (\alpha_2 - \alpha_2^2) = 1
\end{aligned}$$

Desde que existam 2^n funções em S , que V tem dimensão 2^n e que $p_{[1]}(\mathbf{x}) > 0$ para cada \mathbf{x} , temos a seguinte proposição:

Proposição 2. O conjunto

$$S = \{1; Z_1, Z_2, \dots, Z_n; Z_1 Z_2, \dots, Z_{n-1} Z_n; \dots; Z_1 Z_2, \dots, Z_n\}$$

é uma base no espaço de funções de valores reais sobre \mathbf{x} . Esta base é ortonormal sob $p_{[1]}$.

Em particular, cada função f sobre \mathbf{x} admite uma e somente uma representação como uma combinação linear de funções em S , a saber $\sum_{g \in S} \langle f, g \rangle \cdot g$.

Faça $f(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) / p_{[1]}(\mathbf{x})$. Temos então

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} p(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) = E_p g(\mathbf{x}) \quad (2.1.7)$$

$$\text{para todo } g \text{ e } f = \sum_{g \in S} \langle f, g \rangle \cdot g = \sum_{g \in S} E_p g(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) =$$

$$= 1 + \sum_{i < j} r_{ij} Z_i Z_j + \sum_{i < j < k} r_{ijk} Z_i Z_j Z_k + \dots + r_{12 \dots n} Z_1 Z_2 \dots Z_n$$

pois $E_p(1) = 1$ e $E_p(Z_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Logo,

$$p(\mathbf{x}) = p_{[1]}(\mathbf{x}) \left(1 + \sum_{i < j} r_{ij} Z_i Z_j + \sum_{i < j < k} r_{ijk} Z_i Z_j Z_k + \dots + r_{12\dots n} Z_1 Z_2 \dots Z_n \right)$$

estabelecendo a proposição 1.

2.2. O Modelo Davidson e Bradley

Bradley e Terry (1952 a) propuseram um modelo básico para comparações parelhadas.

Considere os parâmetros $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_t$; $\pi_i \geq 0$, associados aos tratamentos T_1, T_2, \dots, T_t ; $i = 1, 2, \dots, t$. É postulado que estes parâmetros representam as probabilidades relativas de seleção π_{ij} (a probabilidade do tratamento i ser preferido em relação ao j), que podem ser estruturados como

$$P(X_i > X_j) = \pi_{ij} = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j}, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, t$$

onde (X_i, X_j) são respostas parelhadas para os tratamentos i e j , com

$$\sum_{i=1}^t \pi_i = 1.$$

Para entendermos o modelo para a situação multivariada com p atributos, é necessário desenvolver parâmetros em cada tratamento para cada atributo e para associação entre atributos. Dado que uma escolha é registrada sobre cada atributo para um par de tratamentos, um modelo multivariado completo deve dar a probabilidade associada com cada uma das 2^p possíveis amostras de preferências, para cada par de atributos.

Suponha que os tratamentos T_i e T_j são comparados e que uma resposta nesta comparação é dada pelo vetor $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p)$, onde \mathbf{s} é observado com p atributos. Definamos $s_\alpha = i$ se T_i é selecionado no atributo α , $s_\alpha = j$ se T_j é selecionado no atributo α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$. Defina $p(\mathbf{s}/i, j)$ como a probabilidade

do vetor de escolha s na comparação do par de tratamentos (i, j) . Nos referiremos a $p(s/i, j)$ como a probabilidade de uma cela. Extensão do caso univariado nos conduz a p conjuntos de parâmetros, $\pi_1(\alpha), \pi_2(\alpha), \dots, \pi_t(\alpha)$; $\alpha = 1, 2, \dots, p$ associado a t tratamentos; $\pi_i(\alpha) \geq 0$; $i = 1, \dots, t$ e

$$\sum_{i=1}^t \pi_i(\alpha) = 1$$

e, se $X_i(\alpha)$ e $X_j(\alpha)$ denotam as respostas parelhadas para os tratamentos i e j no atributo α ,

$$P(X_i(\alpha) > X_j(\alpha)) = \frac{\pi_i(\alpha)}{\pi_i(\alpha) + \pi_j(\alpha)} \quad ; \quad \alpha = 1, 2, \dots, p$$

$i \neq j = 1, 2, \dots, t$. Como antes, $X_i(\alpha) > X_j(\alpha)$ é interpretado como a escolha do tratamento é em relação ao tratamento j , mas agora no atributo α .

O modelo multivariado pode ser formulado como segue, isto é, para cada par de tratamento (i, j) a probabilidade de cada cela é dada por:

$$p(s/i, j) = p^{(1)}(s/i, j) \cdot h(s/i, j) \quad (2.2.1)$$

onde

$$p^{(1)}(s/i, j) = \prod_{\alpha=1}^p \frac{\pi_{s_\alpha}(\alpha)}{\pi_i(\alpha) + \pi_j(\alpha)} \quad (2.2.2)$$

e

$$h(s/i, j) = 1 + \sum_{\alpha < \beta} \delta(s_\alpha, s_\beta) \rho_{\alpha\beta} \left(\frac{\pi_i(\alpha)}{\pi_j(\alpha)} \right)^{-1/2 \delta(i, s_\alpha)} \cdot \left(\frac{\pi_j(\alpha)}{\pi_i(\alpha)} \right)^{-1/2 \delta(i, s_\beta)} \quad (2.2.3)$$

$s_\alpha = i$ ou j , $\alpha = 1, 2, \dots, p$ e $\delta(\dots) = \pm 1$, o sinal sendo positivo se os dois argumentos são iguais e negativo caso contrário.

Os parâmetros de preferências

$$\Pi = \{\pi_i(\alpha); i = 1, 2, \dots, t; \alpha = 1, 2, \dots, p\}$$

são tais que

$$\sum_{i=1}^t \pi_i(\alpha) = 1; \alpha = 1, 2, \dots, p$$

e os parâmetros de medida de associação

$$\rho = \{\rho_{\alpha\beta}; \alpha < \beta, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p\}$$

são determinados de modo que $h(s/i, j) \geq 0$ para cada uma das 2^p celas associadas com cada uma das C_2^t comparações de tratamentos. Podemos observar que $\rho = 0$ implica independência dos atributos.

O modelo (2.2.1) foi escolhido após considerações de vários caminhos e critérios dados em detalhes pela tese de R.R.Davidson. É importante notar que o modelo satisfaz os seguintes critérios:

- i) Um modelo apropriado para as probabilidades das celas dá a dimensão mínima correspondente do mesmo quando se considera somente os subconjuntos dos p atributos inicialmente propostos. Note que o modelo Bradley e Terry segue de (2.2.1), (2.2.2) e (2.3.3) visto que a probabilidade marginal é dada por:

$$P(X_i(\alpha) > X_j(\alpha)) = \frac{\pi_i(\alpha)}{\pi_i(\alpha) + \pi_j(\alpha)}$$

- ii) O conjunto completo de celas de probabilidades tem forma funcional comum para todos os pares de tratamentos e para todas celas.

- iii) O conjunto de celas de probabilidades para cada par de tratamentos é invariante com respeito a permutação dos p atributos ou de dois tratamentos sendo comparados.
- iv) Os parâmetros de medida de associação entre atributos permanecem constantes para todos os pares de tratamentos.

2.3. A Aproximação de m-ésima Ordem ($1 \leq m \leq n$)

Considere o modelo proposto por Bahadur (1961) na secção (2.1), isto é,

$$p(\mathbf{x}) = p_{[1]}(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})$$

onde $p_{[1]}(\mathbf{x})$ é definido em (2.1.4) e $f(\mathbf{x})$ em (2.1.6). Podemos propor então a seguinte classificação de distribuições: diremos que p é de primeira ordem se todas $2^n - n - 1$ correlações são iguais a zero, isto é, os x_i 's são independentemente distribuídos; p é de segunda ordem se todas as correlações de ordem superior a 2 são iguais a zero, e assim por diante.

Um procedimento para efetuar a aproximação em questão é simplesmente omitir as correlações de ordem desejada em (2.1.5) e (2.1.6). Por exemplo, $p_{[1]}$ é a aproximação de primeira ordem para p e

$$p_{[2]}(\mathbf{x}) = p_{[1]}(\mathbf{x}) \left(1 + \sum_{i < j} r_{ij} Z_i Z_j \right)$$

e a aproximação de segunda ordem para p , que é considerada neste trabalho. Existe, entretanto, uma séria dificuldade aqui, a aproximação de m-ésima ordem pode não ser uma probabilidade, isto é, $p_{[m]}(\mathbf{x})$ pode ser negativa para algum ponto de \mathbf{x} .

Para que $p(\mathbf{x}) = p_{[1]}(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})$ seja uma distribuição

de probabilidade devemos ter as seguintes condições satisfeitas:

$$(I) \quad p(\mathbf{x}) \geq 0, \text{ para cada } \mathbf{x} \in \mathbf{X}$$

$$(II) \quad \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} p(\mathbf{x}) = 1$$

Como $p_{[1]}(\mathbf{x}) > 0$ para cada \mathbf{x} , a condição (I) nos conduz a $p_{[1]}(\mathbf{x}) > 0$ e $f(\mathbf{x}) \geq 0$, impondo, portanto, que os parâmetros de associação r_{ij} , r_{ijk} , ..., $r_{12\dots n}$ fiquem sujeitos a desigualdades lineares além da dificuldade mencionada anteriormente.

Ilustrando o problema mencionado, considere a aproximação de segunda ordem.

$$p_{[2]}(\mathbf{x}) = p_{[1]}(\mathbf{x}) \left(1 + \sum_{i < j} r_{ij} Z_i Z_j \right).$$

Desde que

$$\sum_{i,j=1}^n r_{ij} Z_i Z_j = 2 \sum_{i < j} r_{ij} Z_i Z_j + \sum_{i=1}^n Z_i^2 \quad \text{e} \quad p_{[2]}(\mathbf{x}) \geq 0$$

para cada \mathbf{x} , temos que

$$p_{[1]}(\mathbf{x}) \left(1 + \sum_{i < j} r_{ij} Z_i Z_j \right) \geq 0, \quad \text{então}$$

$$1 + \sum_{i < j} r_{ij} Z_i Z_j \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \sum_{i,j=1}^n r_{ij} Z_i Z_j / 2 - \sum_{i=1}^n Z_i^2 / 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i,j=1}^n r_{ij} Z_i Z_j}{\sum_{i=1}^n Z_i^2} \geq 1 - \frac{2}{\sum_{i=1}^n Z_i^2} \quad \text{para todo } Z_1, Z_2, \dots, Z_n$$

Desde que esta condição seja satisfeita, temos que $p_{[2]}(\mathbf{x}) \geq 0$ para cada \mathbf{x} .

2.4. Relação entre a Distribuição de 2ª Ordem e o Modelo de Davidson e Bradley

Seja

$$P(X_i(w) > X_j(w)) = \frac{\pi_i(w)}{\pi_i(w) + \pi_j(w)}$$

uma probabilidade interpretada como sendo a escolha do i -ésimo tratamento em relação ao j -ésimo tratamento no atributo w em (2.2.1).

Seja $X_{ij}(w)$ uma função indicadora definida como

$$X_{ij}(w) = \begin{cases} 1, & \text{se o tratamento } i \text{ é preferido ao tratamento } j \text{ no} \\ & \text{atributo } w \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$i \neq j = 1, 2, \dots, t; w = 1, 2, \dots, p$$

Podemos então definir

$$P(X_{ij}(w) = 1) = \frac{\pi_i(w)}{\pi_i(w) + \pi_j(w)} = \alpha_w \quad (2.4.1)$$

$$P(X_{ij}(w) = 0) = P(X_i(w) < X_j(w)) = \frac{\pi_j(w)}{\pi_i(w) + \pi_j(w)} = 1 - \alpha_w \quad (2.4.2)$$

Seja $Z_{ij}(w)$ a variável padronizada associada ao modelo de Bahadur na comparação do i -ésimo tratamento com o j -ésimo tratamento. Então

$$Z_{ij}(w) = \frac{X_{ij}(w) - E[X_{ij}(w)]}{\sqrt{\text{Var}[X_{ij}(w)]}} \quad (2.4.3)$$

onde $E(.)$ denota a esperança matemática da variável indicada e $\text{Var}(.)$ a sua variância.

Temos então que:

$$E[X_{ij}(w)] = \frac{\pi_i(w)}{\pi_i(w) + \pi_j(w)} \quad (2.4.4)$$

e

$$\text{Var}[X_{ij}(w)] = \frac{\pi_i(w) \pi_j(w)}{[\pi_i(w) + \pi_j(w)]^2} \quad (2.4.5)$$

daí

$$Z_{ij}(w) = \frac{X_{ij}(w) [\pi_i(w) + \pi_j(w)] - \pi_i(w)}{\sqrt{\pi_i(w) \pi_j(w)}} \quad (2.4.6)$$

Consideremos agora os atributos $X_{ij}(w)$ e $X_{ij}(v)$, $w \neq v$, então coeficiente entre $X_{ij}(w)$ e $X_{ij}(v)$ é dado por: $r_{wv} = E[Z_{ij}(w) Z_{ij}(v)]$ para cada par (i, j) . Observe que em (2.4.6) a resposta $X_{ij}(w)$ é quem determina o sinal de $Z_{ij}(w)$, tendo a mesma função que $\delta(\cdot, \cdot)$ no modelo de Davidson e Bradley.

Como exemplo, seja um vetor de preferências com dois atributos ($p = 2$), isto é, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, então

$$P_{[2]}(\mathbf{x}) = P_{[1]}(\mathbf{x}) \left(1 + \sum_{w < v}^2 r_{wv} Z_w Z_v\right),$$

então

$$\begin{aligned} P_{[2]}(\mathbf{x}) &= \alpha_1^{x_1} (1 - \alpha_1)^{1-x_1} \cdot \alpha_2^{x_2} (1 - \alpha_2)^{1-x_2} \cdot (1 + r_{12} Z_1 Z_2) = \\ &= \alpha_1^{x_1} (1 - \alpha_1)^{1-x_1} \cdot \alpha_2^{x_2} (1 - \alpha_2)^{1-x_2} \cdot \left(1 + \frac{(x_1 - \alpha_1)(x_2 - \alpha_2)}{\sqrt{\alpha_1(1 - \alpha_1)\alpha_2(1 - \alpha_2)}} r_{12}\right) \end{aligned}$$

como α_w é a probabilidade do tratamento i ser preferido em relação ao tratamento j no atributo w , $w = 1, 2$, portanto podemos escrever

$$p_{[2]}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\pi_i(1)}{\pi_i(1) + \pi_j(1)} \right)^{x_1} \cdot \left(\frac{\pi_j(1)}{\pi_i(1) + \pi_j(1)} \right)^{1-x_1} \cdot \left(\frac{\pi_i(2)}{\pi_i(2) + \pi_j(2)} \right)^{x_2} \cdot \left(\frac{\pi_j(2)}{\pi_i(2) + \pi_j(2)} \right)^{1-x_2} \cdot \left\{ 1 + r_{12} \frac{x_1 [\pi_i(1) + \pi_j(1)] - \pi_i(1)}{[\pi_i(1) \cdot \pi_j(1)]^{1/2}} \cdot \frac{x_2 [\pi_i(2) + \pi_j(2)] - \pi_i(2)}{[\pi_i(2) \cdot \pi_j(2)]^{1/2}} \right\}$$

Suponha que $x_1=0$ e $x_2=1$, isto é, $\mathbf{x}=(0,1)$, então

$$p_{[2]}(\mathbf{x}) = \frac{\pi_j(1)}{\pi_i(1) + \pi_j(1)} \cdot \frac{\pi_i(2)}{\pi_i(2) + \pi_j(2)} \left\{ 1 - r_{12} \left[\frac{\pi_i(1)}{\pi_j(1)} \right]^{1/2} \cdot \left[\frac{\pi_i(2)}{\pi_j(2)} \right]^{-1/2} \right\}$$

Retornando ao modelo de Davidson e Bradley, $x_1=0$ implica em $s_1=j$ (o tratamento j foi preferido em relação ao tratamento i no atributo 1), $x_2=1$ implica $s_2=i$, logo associado ao par $(0,1)$ no modelo de Bahadur temos o par (j,i) em Davidson e Bradley, onde o vetor $\mathbf{s}=(s_1, s_2)=(j,i)$ e

$$\begin{aligned} \delta(s_1, s_2) &= \delta(j, i) = -1 \\ \delta(i, s_1) &= \delta(i, j) = -1 \\ \delta(i, s_2) &= \delta(i, i) = 1 \end{aligned}$$

e podemos reescrever $p_{[2]}(\mathbf{x})$ como

$$p_{[2]}(\mathbf{x}) = \prod_{w=1}^2 \left(\frac{\pi_{s_w}(w)}{\pi_i(w) + \pi_j(w)} \right) \cdot \left\{ 1 + \sum_{w=1}^1 \sum_{v=2}^2 r_{wv} \delta(j, i) \right\}$$

$$\left\{ \frac{\pi_i(w)}{\pi_j(w)}^{-1/2\delta(i,j)} \cdot \frac{\pi_j(v)}{\pi_j(v)}^{-1/2\delta(i,i)} \right\} = p(s/i,j)$$

para $s = (s_1, s_2)$; $\alpha < \beta = 1, 2$

Definamos $X_i(\alpha)$ como sendo a preferência do tratamento i em relação ao tratamento j no atributo α , então $p(s/i,j)$ para $s=(s_1, s_2)$, $\alpha, \beta=1, 2$; $\alpha < \beta$, pode ser escrito como

$$p(s/i,j) = E[X_j(1)] E[X_i(2)] - r_{12} \sigma_{X_j(1)} \sigma_{X_i(2)}$$

cujo vetor de preferências associados a s é dado pelo par $(0,1)$, podendo ser verificado ainda que, qualquer que seja a dimensão do vetor de preferências, a probabilidade $p(s/i,j)$ pode ser escrita como uma combinação dos momentos dos tratamentos envolvidos e dos coeficientes de medida de associação determinados pelo vetor s .

2.5. A Função de Verossimilhança

Um método frequentemente usado na estimação de parâmetros em modelos probabilísticos é o método de verossimilhança proposto por Fisher no início do século.

Seja $p(s/i,j) = p^{(1)}(s/i,j) \cdot h(s/i,j)$, que é a probabilidade definida na escolha do vetor de preferências $s = (s_1, s_2, \dots, s_p)$ na comparação do par de tratamentos (i,j) . $p(s/i,j)$ está associado a cada combinação de atributos do vetor s . Nós assumiremos também que as respostas para cada par de tratamentos (i,j) é independente de qualquer outro par de tratamentos (K,l) . Definamos $f(s/i,j)$ como o número de vezes que o vetor de preferências s ocorre entre as n_{ij} respostas para o par de tratamentos (i,j) e seja $f_{\alpha ij}$ a frequência marginal de preferências para o tratamento i no atributo α .

buto α . Então

$$f_{\alpha ij} + f_{\alpha ji} = n_{ij}$$

Definamos $v_{\alpha i} = \sum_{j=1}^t f_{\alpha ij}$ representando o número total de preferências para o tratamento i , $i=1, \dots, t$ no atributo α . Podemos então escrever a função de verossimilhança L como sendo

$$L = \prod_{i < j} \prod_s \frac{f(s/i, j)}{p(s/i, j)}$$

e

$$\begin{aligned} \ln L &= \sum_{i < j} \sum_s f(s/i, j) \ln p(s/i, j) = \\ &= \sum_{i < j} \sum_s f(s/i, j) \ln p^{(1)}(s/i, j) + \sum_{i < j} \sum_s f(s/i, j) \ln h(s/i, j) \\ \Rightarrow \ln L &= \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=1}^t v_{\alpha i} \ln \pi_i(\alpha) - \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i < j} n_{ij} \ln [\pi_i(\alpha) + \pi_j(\alpha)] + \\ &+ \sum_{i < j} \sum_s f(s/i, j) \ln h(s/i, j) \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

com a função $h(s/i, j)$ dada por (2.2.3) e a \sum_s indica a soma sobre todos os 2^p possíveis valores de s , representando as possíveis respostas de preferências.

Obteremos assim as estimativas de máxima-verossimilhança maximizando a função $\ln L$, sob as seguintes restrições:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^t \pi_i(\alpha) = 1; \quad \alpha = 1, 2, \dots, p \\ -1 \leq \rho_{\alpha\beta} \leq 1, \quad \alpha < \beta; \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p \\ h(s/i, j) > 0 \end{array} \right. \quad (2.5.2)$$

2.6. Testes de Hipóteses

Vamos testar algumas hipóteses com base na razão de verossimilhança λ

$$\lambda = \frac{\max_{\omega} L}{\max_{\Omega} L} \quad (2.6.1)$$

e

$$-2 \ln \lambda = 2 \max_{\Omega} \ln L - 2 \max_{\omega} \ln L \quad (2.6.2)$$

onde Ω é o espaço paramétrico do modelo multivariado e ω é o espaço paramétrico restrito pela hipótese nula e $\ln L$ é dado por (2.5.1). Sabemos que a distribuição assintótica de $-2 \ln \lambda$ é uma distribuição χ^2 (Qui-quadrado), veja Bichel e Docksum (1977, pg. 229).

Adotaremos a seguinte notação:

$$B(\pi) = \sum_{\alpha=1}^p \left\{ \sum_{i=1}^t v_{\alpha i} \ln \pi_i(\alpha) - \sum_{i < j} \sum n_{ij} \ln [\pi_i(\alpha) + \pi_j(\alpha)] \right\} \quad (2.6.3)$$

$$C(\pi, \rho) = \sum_{i < j} \sum_s f(s/i, j) \ln h(s/i, j) \quad (2.6.4)$$

então

$$\ln L = B(\pi) + C(\pi, \rho) \quad (2.6.5)$$

Um importante teste a ser considerado é o teste para a significância dos parâmetros de correlação, que é relevante para determinarmos as análises posteriores dos dados a serem estudados. Testaremos as hipóteses:

$H_0: \rho = 0$ e π desconhecido

contra

$H_1: \rho_{\alpha\beta} \neq 0$, para $\alpha \neq \beta$ e π desconhecido.

Então sob H_0

$$\max \ln L(\hat{\mathbf{p}}_0) = B(\hat{\mathbf{p}}_0) \quad (2.6.6)$$

onde $B(\hat{\mathbf{p}}_0)$ é o valor de $B(\boldsymbol{\pi})$ em (2.6.3) quando o vetor $\boldsymbol{\pi}$ é substituído por sua estimativa de máxima-verossimilhança $\hat{\mathbf{p}}_0$, obtido quando $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Considerando todo o espaço paramétrico, temos:

$$\max_{\Omega} \ln L = B(\hat{\mathbf{p}}) + C(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}) \quad (2.6.7)$$

onde $B(\hat{\mathbf{p}})$ e $C(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}})$ são os valores de $B(\boldsymbol{\pi})$ e $C(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\rho})$ obtidos quando $\boldsymbol{\pi}$ e $\boldsymbol{\rho}$ são substituídos simultaneamente por suas estimativas de máxima-verossimilhança $\hat{\mathbf{p}}$ e $\hat{\mathbf{p}}$. Então

$$-2 \ln \lambda = 2 \{B(\hat{\mathbf{p}}) - B(\hat{\mathbf{p}}_0) + C(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}})\} \quad (2.6.8)$$

é uma estatística cuja distribuição assintótica é χ^2 com C_2^p graus de liberdade supondo H_0 verdadeira.

Um teste mais geral para testar o efeito entre tratamentos, é o teste que tem como hipótese nula a igualdade entre os parâmetros de preferências para os t tratamentos para cada um dos p atributos. Temos então as seguintes hipóteses:

$$H_0: \pi_i(\alpha) = \frac{1}{t}; \quad i = 1, 2, \dots, t; \quad \alpha = 1, 2, \dots, t$$

contra

$$H_1: \pi_i(\alpha) \neq \pi_j(\alpha); \quad i \neq j; \quad i = j = 1, 2, \dots, t; \quad \alpha = 1, 2, \dots, p$$

Em princípio, supondo \mathbf{p} desconhecido, proporciona

$$\max_{\omega} \ln L = B(1/t) + C(1/t, \hat{\mathbf{p}}_{[1/t]}) \quad (2.6.9)$$

onde

$$B(1/t) = -p \ln 2 \sum_{i < j} \sum n_{ij}$$

e $C(1/t, \hat{\rho}_{[1/t]})$ é o valor de $C(\pi, \rho)$, quando π é substituído pela estimativa de máxima-verossimilhança com

$$C(1/t, \hat{\rho}_{[1/t]}) = \sum_{i < j} \sum_s f(s/i, j) \ln [1 + \sum_{\alpha < \beta} \rho_{\alpha\beta} \delta(s_\alpha, s_\beta)] \quad (2.6.10)$$

Fazendo

$$N = \sum_{i < j} \sum n_{ij}, \text{ temos:}$$

$$-2 \ln \lambda = 2 \{ B(\hat{\rho}) + C(\hat{\rho}, \hat{\rho}) + pN \ln 2 - C(1/t, \hat{\rho}_{[1/t]}) \} \quad (2.6.11)$$

que tem distribuição assintótica χ^2 com $p(t-1)$ g.l., sob H_0 .

Quando $\rho = 0$ e as condições sob H_0 são satisfeitas, temos que $\max_{\omega} \ln L = -p N \ln 2$, quando $\rho = 0$ e as condições sob H_1 são satisfeitas $\max_{\Omega} \ln L = B(\hat{\rho}_0)$, logo

$$-2 \ln \lambda = 2 \{ B(\hat{\rho}_0) + p N \ln 2 \} \quad (2.6.12)$$

que tem distribuição assintótica χ^2 com $p(t-1)$ g.l.. Esta estatística é simplesmente a soma das estatísticas Bradley e Terry do caso univariado calculada para cada atributo esboçada por Bradley e Terry (1952).

Testes exatos para pequenas amostras seriam excessivamente difíceis de serem desenvolvidos, pois é desejável conduzir testes em presença de correlação. Bradley e Terry (1952) e Bradley (1954 a) dão tabelas para o caso univariado, sendo muito extensas. Para o caso univariado, a comparação das distribuições assintóticas e para pequenas amostras indicaram, que os testes em presença de correlação foram adequados (Bradley, 1954 b).

2.7. Adequabilidade do Modelo

Um procedimento para testar a adequabilidade do mo

delo Bradley e Terry para comparações parelhadas foi desenvolvido por Bradley (1954 b) e aplicados para uma variedade de dados experimentais. Nesta secção é feita um desenvolvimento análogo para o modelo multivariado.

O modelo mais geral acessível para comparações parelhadas multivariadas, é um para o qual as probabilidades $\bar{p}(s/i, j)$ associadas com a ocorrência do vetor de preferências s na comparação dos tratamentos i e j são desconhecidos, excepto para a condição $\sum \bar{p}(s/i, j) = 1$ para cada par de tratamentos (i, j) . Neste caso, aplicamos distribuições multinomiais sobre as "celas" definidas para os distintos valores de s , para cada par de tratamento. As estimativas de máxima-verossimilhança de $\bar{p}(s/i, j)$ são dadas pelas frequências relativas.

$$\frac{f(s/i, j)}{n_{ij}} \quad (2.7.1)$$

que é o resultado conhecido das distribuições multinomiais, veja Roussas (1972, pág. 304). O logaritmo da função de verossimilhança é dado por:

$$\ln \bar{L} \{ \bar{p}(s/i, j) \} = \sum_{i < j} \sum_s f(s/i, j) \ln \bar{p}(s/i, j)$$

Para testar o ajuste do modelo para comparações parelhadas multivariadas, são consideradas as seguintes hipóteses:

$$H_0: \bar{p}(s/i, j) = p(s/i, j) \text{ para todo par } (i, j)$$

contra

$$H_1: \bar{p}(s/i, j) \neq p(s/i, j) \text{ para algum par } (i, j)$$

onde $p(s/i, j) = p^{(1)}(s/i, j) h(s/i, j)$ é o modelo dado por (2.2.1). Sob H_0 (2.7.2) é dado por (2.5.1).

Substituindo (2.7.1) em (2.7.2) temos

$$\begin{aligned} \max_{\omega} \ln \bar{L} &= \sum_{i < j} \sum_s f(s/i, j) \ln \left\{ \frac{f(s/i, j)}{n_{ij}} \right\} = \\ &= \sum_{i < j} \sum_s f(s/i, j) \ln f(s/i, j) - \sum_{i < j} n_{ij} \ln n_{ij} \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

que é o logaritmo da estimativa de máxima-verossimilhança sob Ω .

Estimativa da frequência esperada para cada para de tratamento pode ser expressa em termos das estimativas $\hat{\pi}$ de π e \hat{p} de p , sob H_0 , temos:

$$\hat{f}(s/i, j) = n_{ij} \hat{p}(s/i, j) = n_{ij} \hat{p}^{(1)}(s/i, j) \hat{h}(s/i, j) \quad (2.7.4)$$

onde

$$\hat{p}^{(1)}(s/i, j) = \prod_{\alpha=1}^p \frac{p_{s\alpha}(\alpha)}{p_i(\alpha) + p_j(\alpha)}$$

e $\hat{h}(s/i, j)$ é simplesmente $h(s/i, j)$ com π e p substituídas por suas respectivas estimativas $\hat{\pi}$ e \hat{p} . Segue de (2.2.1) e da definição de $\hat{p}(s/i, j)$ em (2.7.4)

$$\max_{\Omega} \ln \bar{L} = \sum_{i < j} \sum_s f(s/i, j) \ln \hat{f}(s/i, j) - \sum_{i < j} n_{ij} \ln n_{ij} \quad (2.7.5)$$

Então para testar H_0 versus H_1 , a estatística é dada por:

$$-2 \ln \lambda = 2 \sum_{i < j} \sum_s f(s/i, j) \ln \left\{ f(s/i, j) / \hat{f}(s/i, j) \right\} \quad (2.7.6)$$

que tem sob H_0 distribuição assintótica χ^2 central com

$$(2^P - 1) C_2^t - p(t-1) - C_2^p \text{ g.l.} \quad (2.7.7)$$

Podé ser mostrado que, através de adaptação feita por Kullback (1959, pp. 113-4) ou por Bradley (1954 b) que a

estatística $-2 \ln \lambda$ é tal que

$$-2 \ln \lambda = \sum_{i < j} \sum_s \{ [f(s/i, j) - \hat{f}(s/i, j)]^2 / \hat{f}(s/i, j) \} = \chi^2 \quad (2.7.8)$$

A precisão da aproximação é diretamente verificada pela proximidade da frequência estimada $\hat{f}(s/i, j)$ em (2.7.4) com a frequência observada $f(s/i, j)$. Os graus de liberdade as sociados com (2.5.8) são os mesmos de (2.5.7).

Algumas propriedades para grandes amostras sobre o modelo multivariado, a saber, distribuições assintóticas dos estimadores de máxima-verossimilhança e a distribuição limite da estatística da razão de verossimilhança para testar a hipótese de igualdade das preferências, contra alternativas locais (próximas), foram desenvolvidas por Davidson e Bradley (1970).

2.8. O Desenvolvimento de uma Função de Regressão para Comparações Parelhadas Multivariadas

Em comparações parelhadas multivariadas é importante que se possa medir a "qualidade" (controle) global na comparação de produtos, estímulos, etc... Consideraremos esta variável um atributo em adição aos p atributos específicos no modelo de Davidson e Bradley. O objetivo é desenvolver uma função de regressão de atributo que dá uma idéia geral do produto a ser comparado com os outros p atributos.

Suponha que a "qualidade" global seja tratado como um atributo X_0 em um experimento de comparação multivariada parelhada. Então o vetor de preferência aumentado para um par de tratamento pode ser denotado por $s^* = (s_0, s) = (s_0, s_1, \dots, s_p)$ e os parâmetros por

$$\pi^* = \{ \pi_i(\alpha), \alpha = 1, 2, \dots, p; i = 1, 2, \dots, t \}$$

e

$$\rho^* = \{ \rho_{\alpha\beta}, \alpha < \beta; \alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots, p \}$$

As probabilidades $p(s^*/i, j)$, definidas por (2.2.1), correspondem à aproximação da segunda ordem do modelo de Bahadur. Isto foi mostrado nas secções anteriores.

Na comparação do par de tratamento (i, j) , seja $X_{ij}(\alpha) = 1$ ou 0 para $s_\alpha = i$ ou j , respectivamente ($\alpha=0, 1, \dots, p$). Sob o argumento do modelo multivariado $X_{ij}(\alpha)$ toma o valor 1 com probabilidade $\pi_i(\alpha) / (\pi_i(\alpha) + \pi_j(\alpha))$ e toma o valor 0 (zero) com $\pi_j(\alpha) / (\pi_i(\alpha) + \pi_j(\alpha))$ respectivamente. Se definirmos

$$\begin{aligned} \hat{x}_{ij}(0) &= E(X_{ij}(0)/s) = \\ &= E(X_{ij}(0) / X_{ij}(1) = x_1, \dots, X_{ij}(p) = x_p) \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

usando o resultado associado ao modelo de segunda ordem

$$\begin{aligned} \hat{x}_0^{(2)} &= \alpha_0 + \sqrt{\alpha_0 \Phi_0} \sum_j \rho_{0j} Z_j / f^{(2)}(\mathbf{x}) \\ \text{com } f^{(2)}(\mathbf{x}) &= 1 + \sum_{i < j} \sum \rho_{ij} Z_i Z_j \quad \text{e} \quad \Phi_0 = 1 - \alpha_0, \text{ temos:} \end{aligned}$$

$$\hat{x}_{ij}(0) = \frac{\pi_i(0)}{\pi_i(0) + \pi_j(0)} + \frac{\sqrt{\pi_i(0)\pi_j(0)}}{\pi_i(0) + \pi_j(0)} \cdot h^{-1}(s/i, j)$$

$$\sum_{\alpha=1}^p \delta(i, s_\alpha) \rho_{0\alpha} \left[\frac{\pi_i(\alpha)}{\pi_j(\alpha)} \right]^{1/2 \delta(j, s_\alpha)} \quad (2.8.2)$$

A quantidade $\hat{x}_{ij}(0)$ pode ser considerada como uma predição de probabilidade, quando o tratamento i é preferido ao tratamento j , no atributo X_0 dada a resposta s para os p atributos especificados na comparação do par de tratamento (i, j) . O valor predito proporciona um ajuste para a probabili

dade marginal de preferência para o tratamento i sobre o tratamento j na "qualidade" global. O ajuste é aditivo e depende linearmente das correlações $\rho_{0\alpha}$ entre $X_{ij}(0)$ e $X_{ij}(\alpha)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, p$).

2.9. A Regressão sob o Modelo de Bahadur

Nesta secção nós mostraremos como a relação (2.8.1) foi obtida.

Seja $\mathbf{x} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ e seja $\mathbf{x}^* = (X_0, X_1, \dots, X_n)$ um vetor ampliado, onde \mathbf{x} e \mathbf{x}^* são vetores de respostas sobre itens dicotômicos, $X_j = 1$ ou 0 com probabilidades α_j e $\phi_j = 1 - \alpha_j$ respectivamente ($j = 0, 1, \dots, m$). A correlação de ordem K no modelo é dada por:

$$\rho_{i_1 \dots i_K} = E(Z_{i_1} \dots Z_{i_K}); 0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_K \leq m; K=2, \dots, m \quad (2.9.1)$$

onde

$$Z_j = \frac{X_j - \alpha_j}{\sqrt{\alpha_j \phi_j}}, \quad j = 0, 1, \dots, m, \text{ que são como visto anterior}$$

mente, variáveis padronizadas.

A distribuição conjunta proposta por Bahadur é:

$p(\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*) = p(\mathbf{x}^*) = p_{(1)}(\mathbf{x}^*) f(\mathbf{x}^*)$, onde \mathbf{x}^* é a realização de \mathbf{x}^* e

$$p_{(1)}(\mathbf{x}^*) = \prod_j \alpha_j^{x_j} \phi_j^{1-x_j} \quad (2.9.2)$$

e

$$f(\mathbf{x}^*) = 1 + \sum_{i < j} \sum \rho_{ij} Z_i Z_j + \sum_{i < j < k} \sum \rho_{ijk} Z_i Z_j Z_k + \dots + \rho_{01\dots m} Z_0 Z_1 \dots Z_m$$

$i, j = 0, 1, 2, \dots, m \quad i \neq j$. Considere a regressão de X_0 sobre

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$. Podemos decompor $f(\mathbf{x}^*)$ do seguinte modo

$$f(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}) + Z_0 g(\mathbf{x}) \quad (2.9.3)$$

onde $f(\mathbf{x})$ é a forma reduzida de $f(\mathbf{x}^*)$ com a variável X_0 omitida e

$$g(\mathbf{x}) = \sum_j \rho_{0j} Z_j + \sum_{i < j} \rho_{0ij} Z_i Z_j + \dots + \rho_{01\dots n} Z_1 \dots Z_n \quad (2.9.4)$$

com a distribuição condicional de X_0 dado $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ dado por

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0 | \mathbf{X} = \mathbf{x}) &= \frac{p_{(1)}(\mathbf{x}^*) \cdot f(\mathbf{x}^*)}{p_{(1)}(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})} = \frac{\prod_j \alpha_j^{x_j} \phi_j^{(1-x_j)} \cdot f(\mathbf{x}^*)}{\prod_j \alpha_j^{x_j} \phi_j^{(1-x_j)} \cdot f(\mathbf{x})} = \\ &= \frac{\alpha_0^{x_0} \phi_0^{(1-x_0)} [f(\mathbf{x}) + Z_0 g(\mathbf{x})]}{f(\mathbf{x})} = \alpha_0^{x_0} \phi_0^{(1-x_0)} \left[1 + Z_0 \frac{g(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} \right] \quad (2.9.5) \end{aligned}$$

$x_0 = 0, 1$, logo \hat{x}_0 é dado por

$$\hat{x}_0 = E(X_0 | \mathbf{X} = \mathbf{x}) = \sum_{x_0=0}^1 x_0 P(X_0 = x_0 | \mathbf{X} = \mathbf{x}) = \alpha_0 + \sqrt{\alpha_0 \phi_0} \frac{g(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} \quad (2.9.6)$$

que é uma equação de regressão racional do tipo $Q(\mathbf{x})/R(\mathbf{x})$ (veja Steyn, 1957).

Então, para a aproximação de segunda ordem proposta por Bahadur (1969), temos

$$\hat{x}_0^{(2)} = \alpha_0 + \sqrt{\alpha_0 \phi_0} \sum_j \rho_{0j} Z_j / f^{(2)}(\mathbf{x}) \quad (2.9.7)$$

onde $f^{(2)}(\mathbf{x}) = 1 + \sum_{i < j} \rho_{ij} Z_i Z_j$, que é o resultado (2.8.2).

Observe que ρ_{ij} é equivalente a r_{ij} em (2.1.6).

CAPÍTULO 3

O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO ALEATÓRIA. UMA DERIVAÇÃO E APLICAÇÃO NO MODELO DAVIDSON E BRADLEY

Neste capítulo aplicaremos o método de otimização aleatória (MOA) para estimarmos, usando a função de verossimilhança (MVS), os parâmetros do Modelo Davidson e Bradley(1969), propondo um critério de parada para o MOA que nos assegure uma "alta probabilidade" de que o ponto encontrado em R_e , R_e definida como a provável região de máximo global, maximiza MVS.

3.1. O Modelo, suas Restrições e os Problemas Computacionais

Relembrando o modelo de Davidson e Bradley, temos

$$p(s/i, j) = p^{(1)}(s/i, j) \cdot h(s/i, j) \quad (3.1.1)$$

$$p^{(1)}(s/i, j) = \frac{p}{\Pi} \frac{\pi_i(\alpha)}{\pi_i(\alpha) + \pi_j(\alpha)}$$

$$h(s/i, j) = 1 + \sum_{i < j} \sum \delta(s_\alpha, s_\beta) \rho_{\alpha\beta} \left[\frac{\pi_i(\alpha)}{\pi_j(\alpha)} \right]^{-1/2 \delta(i, s_\alpha)} \left[\frac{\pi_i(\alpha)}{\pi_j(\alpha)} \right]^{-1/2 \delta(i, s_\beta)}$$

$s_\alpha = i$ se o tratamento i for preferido no atributo α ,
 $\alpha = 1, 2, \dots, p$ e $\delta(.,.) = \pm 1$, o sinal sendo positivo se os dois argumentos são iguais, negativo caso contrário. Com $\Pi = \{\pi_i(\alpha), i = 1, 2, \dots, t; \alpha = 1, 2, \dots, p\}$, sendo que (3.1.1) será uma distribuição de probabilidade se $h(s/i, j) \geq 0$ para cada uma das 2^p celas associadas com cada das C_2^t comparações de tratamentos. $\rho = \{\rho_{\alpha\beta}, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p; \alpha < \beta\}$ são os parâme

tros de medida de associação entre os atributos no vetor s . Então, para maximizarmos a função (2.5.1), devemos considerar as seguintes restrições:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^t \pi_i(\alpha) = 1; \alpha = 1, 2, \dots, p & (3.1.2) \\ -1 \leq \rho_{\alpha\beta} \leq 1, \alpha < \beta; \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p & (3.1.3) \\ h(s/i, j) > 0 & (3.1.4) \end{array} \right.$$

Considerando a restrição (3.1.2), para cada α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$, estimaremos $(t-1)$ parâmetros de preferências independentes, sendo que o parâmetro de ordem t será dado por

$$\pi_t(\alpha) = 1 - \sum_{i=1}^{t-1} \pi_i(\alpha), \text{ onde } 0 < \pi_i(\alpha) < 1$$

seria gerado aleatoriamente no intervalo $(0,1)$ e $\rho_{\alpha\beta}$; $\alpha < \beta$; $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p$, gerado aleatoriamente no intervalo $(-1,1)$ de tal modo que, a matriz Π e o vetor ρ determinados pelos $\pi_i(\alpha)$ e $\rho_{\alpha\beta}$ respectivamente, o par (Π, ρ) possa satisfazer (3.1.4), calcularíamos para cada $h(s/i, j) > 0$ os estimadores de MVS, até que fosse encontrado um ponto de máximo global segundo um critério pré-estabelecido. Entretanto, este procedimento tornou-se inviável, primeiro, porque a probabilidade de encontrarmos um ponto tal que MVS seja máximo global é muito pequeno, tornando o algoritmo inviável do ponto de vista computacional, surgindo então as seguintes perguntas: Qual o melhor procedimento para estimarmos os parâmetros de preferências e os de medida de associação entre atributos, de modo que a função $h(s/i, j) \leq 0$ o menor número de vezes possível? Qual o critério de parada a ser usado quando o ponto em R_e fosse encontrado? R_e é região de máximo global?

Para respondermos a primeira pergunta, considere o

seguinte teorema:

Teorema: Seja $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$. Se $f(a) > 0$, então $\exists \delta > 0$ tal que $x \in X, |x-a| < \delta \rightarrow f(x) > 0$.

Prova:

Dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|x-a| < \delta$, então

$$|f(x)-f(a)| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < f(x)-f(a) < \epsilon \Leftrightarrow f(a)-\epsilon < f(x) < \epsilon + f(a),$$

escolha ϵ tal que $f(a) - \epsilon > 0$ e o teorema está demonstrado.

Em consequência, a partir de cada ponto que torna $h(s/i, j) > 0$, a vizinhança do mesmo seria reduzida, nos permitindo sempre que $h(s/i, j) > 0$ numa vizinhança desse ponto.

Se a função MVS está sendo calculada numa região de máximo local, este procedimento forçará a mesma a convergir para um ponto dentro desta região. Este problema será discutido na secção (3.4) quando proporemos um critério de parada para o MOA.

3.2. Método de Otimização Aleatória, uma Variação do Método C

Consideremos o método C proposto na secção (1.4), proporemos aqui uma variação deste procedimento.

Seja $\mathbf{X}^{(0)}$ associado à matriz $(\pi_i(\alpha))$, $i=1,2,\dots,t$; $\alpha = 1,2,\dots,p$ e $\mathbf{Y}^{(0)}$ associado à matriz (ρ_i) , gerados aleatoriamente segundo as restrições (3.1.2) e (3.1.3) e seja $\mathbf{Z}^{(0)} = (\mathbf{X}^{(0)}, \mathbf{Y}^{(0)})$ o ponto que determina o início do MOA. A partir deste ponto, um número aleatório é obtido no intervalo $(0,1)$, se este número estiver compreendido entre 0 e 0.5, obteremos o próximo ponto dentro das mesmas restrições, caso contrário, os pontos são gerados aleatoriamente segundo os passos descritos abaixo:

Passo 1:

Sejam $\mathbf{X}^{(u)} = (\pi_i^{(u)}(\alpha))$ e $\mathbf{Y}^{(u)} = (\rho_l^{(u)})$, $l=1,2,\dots,C_2^p$

$\alpha = 1,2,\dots,p$; $i = 1,2,\dots,t-1$; onde $\mathbf{Z}^{(u)}, \mathbf{Y}^{(u)}$ é o último ponto determinado antes de iniciarmos este passo.

Passo k+1:

b₁) Tendo determinado $\mathbf{X}^{(k+u)}$, para cada $\alpha = 1,2,\dots,p$ calculamos a distância d_α do ponto $\mathbf{X}^{(k+u)}$ a um dos hiperplanos determinados pela restrição (3.1.2), onde

$$\mathbf{X}^{(k+u)} = (\pi_i^{(k+u)}(\alpha)); i = 1,2,\dots,t-1; \alpha = 1,\dots,p$$

e

$$d_\alpha = \frac{1 - \sum_{i=1}^{t-1} \pi_i^{(k+u)}(\alpha)}{\sqrt{t-1}}, \quad \alpha = 1,2,\dots,p$$

b₂) Determinada a distância d_α , construiremos um hipercubo de semi-aresta a_α em função de d_α . Caso a_α seja maior que cada uma das coordenadas da linha; $\alpha = 1,2,\dots,p$, de $\mathbf{X}^{(k+u)}$, a_α será dada pela menor delas na linha α .

b₃) Tendo determinado $\mathbf{Y}^{(k+u)} = (\rho_l^{(k+u)})$; $l = 1,2,\dots,C_2^p$, calculamos a distância w_l tal que:

$$w_l = \begin{cases} \rho_l^{(k+u)} + 1 & \text{se } \rho_l^{(k+u)} \leq 0 \\ 1 - \rho_l^{(k+u)} & \text{se } \rho_l^{(k+u)} > 0 \end{cases}$$

onde w_l é calculado para cada elemento de $(\rho_l^{(k+u)})$.

b₄) Geramos $\xi_i^{(k+u+1)}$, $i = 1,2,\dots,t-1$, no intervalo $(-a_\alpha, a_\alpha)$ e $\lambda_l^{(k+u+1)}$ em $(-w_l, w_l)$, determinado, então

$$\mathbf{X}^{(k+u+1)} = (\pi_i^{(k+u)}(\alpha)) + (\xi_i^{(k+u+1)}) \quad \text{e}$$

$$Y^{(k+u+1)} = (\rho_1^{(k+u)}) + (\lambda_1^{(k+u+1)})$$

b₅) Definamos $Z^{(k+u+1)} = (X^{(k+u+1)}, Y^{(k+u+1)})$
se $f(Z^{(k+u+1)}) > f(Z^{(k+u)})$, se não

b₆) $Z^{(k+u+1)} = Z^{(k+u)}$

Observe que a distribuição de probabilidade na geração dos vetores aleatórios não permanece a mesma neste método, isto é, tem uma distribuição de probabilidade quando a geração dos vetores é feita em todo espaço de restrições e uma outra distribuição que muda todas as vezes que os vetores aleatórios são gerados no hipercubo, isto é,

$U_{\eta}(k)/Y(k) (y/x)$ não permanece a mesma.

As condições (b_1, b_2, b_3) pode nos conduzir a uma sub-região contida em (3.1.2) e (3.1.3) de máximo local.

3.3. Um Critério de Parada para o MOA

Proporemos aqui um critério de parada para o MOA que nos possibilite determinar um ponto em R_e , onde R_e tenha uma alta probabilidade de ser a região de máximo global.

Seja MVS1 a estimativa de máxima-verossimilhança de MVS tal que MVS1 esteja em R_e , sejam $(\pi_i(\alpha))_1$ e $(\rho_1)_1$ a matriz dos parâmetros de preferências e a matriz dos parâmetros de medida de associação entre os atributos associados a MVS1 respectivamente. MVS2 a segunda estimativa de MVS tal que MVS2 esteja em R_e , $(\pi_i(\alpha))_2$ a matriz dos parâmetros de preferências e $(\rho_1)_2$ a matriz dos parâmetros de medida de associação. Sejam MVSx o x-ésimo valor de MVS tal que MVSx esteja em

R_ϵ , $(\pi_i(\alpha))_x$ e $(\rho_j)_x$ as matrizes referenciadas acima associadas a MVSx. Definamos

$$d_\pi = \max |\pi_{\alpha im} - \pi_{\alpha in}| \quad (3.3.1)$$

$\alpha = 1, 2, \dots, p$; $i = 1, 2, \dots, t$; $m, n = 1, 2, \dots, x$; $m < n$, a maior distância entre os elementos das matrizes $(\pi_i(\alpha))_m$ e $(\pi_i(\alpha))_n$, onde $\pi_{\alpha im}$ representa o elemento da matriz m na linha α coluna i .

$$\text{Seja } d_\rho = \max |\rho_{jm} - \rho_{jn}| \quad (3.3.2)$$

$m, n = 1, 2, \dots, x$; $m < n$; $j = 1, 2, \dots, C_2^p$, a maior distância entre os elementos das matrizes ρ_m e ρ_n . Seja θ a maior distância entre d_π e d_ρ . Após determinarmos o máximo das distâncias entre os elementos das matrizes $(\pi_i(\alpha))_m$ e $(\pi_i(\alpha))_n$ é θ for menor que $\epsilon > 0$, isto é, os elementos das matrizes citadas anteriormente estão na mesma região determinada por ϵ , escolhemos então, a melhor estimativa de MVS entre MVS_m e MVS_n. R_ϵ é agora a região de maior probabilidade de encontrarmos o ponto de máximo global. Se $\theta \geq \epsilon$ nas x execuções, escolhemos então, a maior estimativa de MVS nestas x execuções. Este critério de parada proporciona condições de se escolher o melhor dos pontos candidatos a máximo global, x é o número de vezes que o MOA é calculado para determinarmos MVS nestas x vezes em R_ϵ .

CAPÍTULO 4

O EXEMPLO DO PUDIM DE CHOCOLATE

Os dados abaixo foram obtidos por Davidson e Bradley (1969) junto à General Foods Corporation. As respostas para comparações parelhadas com atributos (1) sabor, (2) cor e (3) textura, para compararmos as marcas de pudim 1,2,3 (tratamentos). As frequências $f(s|i,j)$ de cada cela são tabuladas abaixo (tabela). Estas frequências foram usadas para obter as estimativas de máxima-verossimilhança \hat{p} de π e $\hat{\rho}$ de ρ por Davidson e Bradley utilizando o método de Newton-Raphson (estimativas finais), sendo que para obtenção das estimativas iniciais \hat{p} de π foi usado o método proposto por Ford (1957), e o método de Newton-Raphson para $\hat{\rho}$ de ρ . Neste ponto temos $p = 3$; $t = 3$. Entre parênteses encontram-se as frequências estimadas.

A rotina geradora de números aleatórios usada foi desenvolvida por Golser (1970). É uma rotina implícita ao Vax Fortran 4 - Vax 11/785.

TABELA 1. CELAS DE FREQUÊNCIAS OBSERVADAS E ESTIMADAS PARA O TESTE DO PUDIM DE CHOCOLATE

Par de tratamentos		Celas de frequência $f(s i,j)$								Frequência
i	j	(iii)	(jii)	(iji)	(jji)	(iij)	(jij)	(ijj)	(jjj)	n_{ij}
1	2	8 (7.93)	1 (1.09)	1 (1.15)	1 (1.69)	0 (0.76)	2 (0.97)	0 (0.37)	9 (8.03)	22
1	3	6 (6.25)	0 (0.60)	1 (1.24)	1 (0.92)	1 (1.12)	0 (0.62)	1 (0.64)	9 (7.61)	19
2	3	7 (6.92)	1 (0.37)	1 (1.26)	1 (0.60)	3 (1.70)	1 (0.75)	1 (1.10)	6 (8.31)	21

O teste da razão de verossimilhança foi calculado para igualdade de preferências com todos atributos na presença de correlação (2.6.11) e os testes da bondade de ajuste (2.7.6) e (2.7.8). A tabela 2 apresenta os resultados das estimativas dos parâmetros e do logaritmo da função de verossimilhança. A tabela 3 apresenta os resultados dos testes realizados com seus graus de liberdade (g.l.) correspondentes e respectivas probabilidades de significância obtidas sob H_0 , todos os resultados foram obtidos por Davidson e Bradley.

TABELA 2. ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS PARA O TESTE DO PUDIM DE CHOCOLATE

Estimativas iniciais ($p_{\alpha i}^{(0)}$)				$\ell n L = -97,20 = \text{MVS INICIAL}$		
				$\rho_{\alpha\beta}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
1	0.281	0.409	0.310	0.626	0.607	0.559
2	0.281	0.363	0.356			
3	0.300	0.321	0.379			

Estimativas iniciais ($p_{\alpha i}^{(0)}$)				$\ell n L = -96,46 = \text{MVS FINAL}$		
				$\rho_{\alpha\beta}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
1	0.312	0.360	0.328	0.675	0.654	0.588
2	0.307	0.321	0.372			
3	0.338	0.288	0.374			

TABELA 3. NÍVEIS CRÍTICOS DA ESTATÍSTICA DA RAZÃO DE VEROSIMILHANÇA PARA TESTES DE HIPÓTESES BASEADOS NOS DADOS DO PUDIM DE CHOCOLATE

Teste	$-2\ln\lambda$	g.l.	Probabilidade de Significância
Igualdade de preferências	2.362	6	0.88
Correlações iguais a zero	62.665	2	0.00005
Adequabilidade de ajuste	9.135	12	0.69
Baseado em (2.7.6)	7.557	12	0.69

A tabela 4 mostra os resultados obtidos segundo a derivação do método C proposto neste trabalho para as frequências estimadas (entre parênteses).

TABELA 4. CELAS DE FREQUÊNCIAS OBSERVADAS E ESTIMADAS PARA O TESTE DE PUDIM DE CHOCOLATE SEGUNDO A DERIVAÇÃO DO MÉTODO C

Par de tratamentos		Celas de frequências $f(i, j)$								Frequência
i	j	(iii)	(jii)	(iji)	(jji)	(iij)	(jij)	(ijj)	(jjj)	n_{ij}
1	2	8	1	1	1	0	2	0	9	22
		(7.83)	(1.07)	(1.20)	(1.07)	(0.75)	(1.11)	(0.83)	(8.03)	
1	3	6	0	1	1	1	0	1	9	19
		(5.43)	(0.63)	(1.19)	(1.20)	(1.06)	(1.14)	(0.80)	(7.59)	
2	3	7	1	1	1	3	1	1	6	21
		(6.09)	(0.45)	(1.16)	(1.34)	(1.66)	(1.20)	(0.73)	(8.30)	

A tabela 5 mostra os resultados das estimativas dos parâmetros π e ρ . O número máximo de vezes que MVS é calculada na provável região de máximo global, R_e , é $x = 10$. Aqui a distância 0, com $\epsilon = 10^{-2}$, é satisfeita para $x = 7$. O tempo de CPU para estas 7 execuções é de 9 minutos 57 segundos e 71

décimos de segundo.

TABELA 5. ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS PARA O TESTE DO PUDIM DE CHOCOLATE SEGUNDO MÉTODO C, SEGUNDO AS EXECUÇÕES $x = 1, 2, \dots, 7$

$x = 1$

$p_i(\alpha)$				$\ell n L = -117.053 = \text{MVS FINAL}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.256	0.439	0.306	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.280	0.359	0.361	-0.034	0.646	-0.124
3	0.289	0.360	0.351			

$x = 2$

$p_i(\alpha)$				$\ell n L = -116.537 = \text{MVS FINAL}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.288	0.394	0.318	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.272	0.366	0.362	0.659	-0.113	-0.018
3	0.317	0.311	0.372			

$x = 3$

$p_i(\alpha)$				$\ell n L = -96.493 = \text{MVS FINAL}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.321	0.353	0.326	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.311	0.319	0.370	0.682	0.668	0.601
3	0.349	0.285	0.366			

x = 4

$p_i(\alpha)$				$\ell n L = -96.464 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.311	0.361	0.328	$(\alpha\beta)=(12)$	$(\alpha\beta)=(13)$	$(\alpha\beta)=(23)$
2	0.304	0.323	0.372	0.674	0.650	0.588
3	0.334	0.291	0.375			

x = 5

$p_i(\alpha)$				$\ell n L = -122.579 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.272	0.434	0.294	$(\alpha\beta)=(12)$	$(\alpha\beta)=(13)$	$(\alpha\beta)=(23)$
2	0.294	0.347	0.359	-0.080	0.656	-0.255
3	0.304	0.367	0.329			

x = 6

$p_i(\alpha)$				$\ell n L = -108.809 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.280	0.386	0.334	$(\alpha\beta)=(12)$	$(\alpha\beta)=(13)$	$(\alpha\beta)=(23)$
2	0.286	0.367	0.347	0.434	0.364	-0.027
3	0.302	0.324	0.375			

x = 7

$p_i(\alpha)$				$\ell n L = -96.460 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.313	0.359	0.328	$(\alpha\beta)=(12)$	$(\alpha\beta)=(13)$	$(\alpha\beta)=(23)$
2	0.307	0.322	0.371	0.676	0.654	0.590
3	0.339	0.288	0.374			

Observando os resultados, temos para a execução de número 7 o melhor candidato a ponto de máximo global, logo a estimativa de MVS na construção dos testes de hipóteses será dada por -96.4607. Esta solução é aceita porque temos θ menor que $\epsilon = 10^{-2}$, isto é, para $x = 4$ e $x = 7$ as estimativas dos parâmetros de preferências e dos parâmetros de medida de associação entre atributos estão na mesma região determinada por ϵ (observe que $\theta = 8 \cdot 10^{-3}$). Outras seqüências de execuções foram realizadas para obtenção das estimativas de π e ρ , com ϵ menor que 10^{-2} , os resultados encontrados apresentaram diferenças insignificantes em relação ao resultado obtido acima (a maioria das estimativas de π e ρ e candidatas a máximo global diferem da ordem de 10^{-2} a 10^{-3} , bem como as estimativas de MVS associadas a estes pontos).

A tabela 6 apresenta os resultados dos testes realizados com seus graus de liberdades correspondentes e respectivos probabilidade de significância (aproximados) obtidos sob H_0 obtido segundo a derivação do método C.

TABELA 6. PROBABILIDADE DE SIGNIFICÂNCIA DA ESTATÍSTICA DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA PARA TESTES DE HIPÓTESES BASEADOS NOS DADOS DO PUDIM DE CHOCOLATE

Teste	$-2\ln\lambda$	g.l	Probabilidade de Significância
Igualdade de preferências	255.50	6	$<10^{-5}$
Correlações iguais a zero	62.46	3	$<2 \cdot 10^{-4}$
Adequabilidade de ajuste	8.91	12	0.69
Baseado em (2.7.6)	7.43	12	0.69

CAPÍTULO 5

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E CONCLUSÃO

Observando os resultados, verificamos que os mesmos são equivalentes aos encontrados por Davidson e Bradley, com exceção do resultado obtido quando testamos a igualdade de preferências na presença de correlação, devido a um erro de conta cometido em (2.6.11) por Davidson e Bradley.

A conclusão que chegamos é que a derivação do método C é eficaz e de fácil tratamento matemático. As estimativas finais independem das estimativas iniciais dos parâmetros. A maior dificuldade encontrada, foi o estabelecimento de um critério de parada que nos assegurasse a convergência de MVS para o máximo global, com o critério proposto, se não eliminarmos este problema, pelo menos podemos selecionar um ponto com "alta probabilidade" de pertencer a região de máximo global. Uma vantagem do método de otimização aleatória é que o mesmo depende somente da continuidade da função.

APÊNDICE I

TABELAS DAS SEQUÊNCIAS DE EXECUÇÕES COM OS
RESULTADOS DAS ESTIMATIVAS DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA
SEGUNDO O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO ALEATÓRIA
DERIVADO DO MÉTODO C

SEQUÊNCIA 1

TEMPO DE CPU - 10 MINUTOS 57 SEGUNDOS 03 DÉCIMOS DE SEGUNDOS

x = 1

$P_{i\alpha}$				$\ell nL = -112.972 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.294	0.425	0.282	$(\alpha\beta) = (\alpha\beta)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.285	0.369	0.345	0.494	-0.053	0.224
3	0.301	0.324	0.376			

x = 2

$P_{i\alpha}$				$\ell nL = -140.592 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.257	0.447	0.296	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.299	0.398	0.303	-0.035	-0.157	-0.056
3	0.266	0.287	0.477			

x = 3

$P_{i\alpha}$				$\ell nL = -113.930 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.309	0.396	0.295	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.294	0.363	0.344	0.682	-0.037	-0.028
3	0.291	0.325	0.325			

x = 4

$P_{i\alpha}$				$\ell nL = -120.164 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.309	0.381	0.310	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.275	0.378	0.347	-0.034	-0.087	0.617
3	0.296	0.331	0.373			

x = 5

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -96.635 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.296	0.386	0.318	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.297	0.333	0.370	0.646	0.633	0.574
3	0.329	0.305	0.367			

x = 6

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -114.885 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.280	0.416	0.305	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.258	0.386	0.356	-0.073	0.439	0.248
3	0.297	0.347	0.356			

x = 7

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -116.197 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.277	0.415	0.309	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.286	0.362	0.352	-0.059	0.666	-0.060
3	0.309	0.331	0.360			

x = 8

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -121.196 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.276	0.404	0.320	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.290	0.362	0.348	-0.130	-0.011	0.567
3	0.310	0.324	0.366			

x = 9

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -122.636 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$P_{\alpha\beta}$		
1	0.273	0.407	0.320	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.286	0.371	0.343	0.608	-0.039	-0.288
3	0.327	0.310	0.363			

x = 10

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -126.634 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$P_{\alpha\beta}$		
1	0.296	0.378	0.327	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.282	0.378	0.340	-0.271	0.613	-0.113
3	0.310	0.613	0.388			

SEQUÊNCIA 2

TEMPO DE CPU - 12 MINUTOS 47 SEGUNDOS 81 DÉCIMOS DE SEGUNDO

x = 1

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -96.572 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$P_{\alpha\beta}$		
1	0.310	0.357	0.332	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.291	0.314	0.395	0.678	0.673	0.593
3	0.329	0.288	0.383			

x = 2

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -124.447 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$P_{\alpha\beta}$		
1	0.270	0.394	0.336	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.293	0.349	0.358	-0.230	0.667	-0.137
3	0.299	0.320	0.380			

x = 3

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -116.899$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$P_{\alpha\beta}$		
1	0.294	0.398	0.308	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.283	0.370	0.374	0.631	-0.123	-0.011
3	0.309	0.317	0.374			

x = 4

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -113.847$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$P_{\alpha\beta}$		
1	0.291	0.393	0.316	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.287	0.353	0.360	0.675	-0.037	-0.025
3	0.294	0.324	0.382			

x = 5

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -130.483 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.276	0.406	0.318	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.271	0.382	0.348	-0.244	-0.204	0.661
3	0.279	0.326	0.386			

x = 6

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -96.470 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.313	0.359	0.328	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.308	0.321	0.372	0.682	0.664	0.600
3	0.341	0.287	0.372			

x = 7

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -96.494 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.309	0.366	0.324	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.306	0.321	0.374	0.658	0.641	0.588
3	0.355	0.288	0.377			

x = 8

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -128.926 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.282	0.409	0.309	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.304	0.370	0.327	0.502	-0.010	-0.399
3	0.316	0.321	0.363			

x = 9

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -96.513 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.311	0.360	0.329	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.297	0.325	0.378	0.682	0.644	0.588
3	0.344	0.285	0.371			

x = 10

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -117.831 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3			
1	0.268	0.408	0.324	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.292	0.366	0.342	-0.111	0.640	-0.044
3	0.302	0.331	0.367			

SEQUÊNCIA 3

TEMPO DE CPU 13 MINUTOS 32 SEGUNDOS 19 DÉCIMOS DE SEGUNDOS

x = 1

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -95.577 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.319	0.355	0.326	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.317	0.323	0.370	0.683	0.650	0.582
3	0.359	0.271	0.370			

x = 2

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -116.534 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.267	0.404	0.329	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.272	0.368	0.360	-0.109	0.395	0.251
3	0.305	0.316	0.378			

x = 3

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -96.565 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.296	0.377	0.33	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.299	0.324	0.377	0.671	0.652	0.584
3	0.333	0.287	0.380			

x = 4

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -115.912 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.273	0.397	0.330	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.283	0.359	0.358	0.703	-0.040	-0.117
3	0.304	0.326	0.370			

x = 5

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -116.230 = \text{MVS FINAL}$		
	i = 1	i = 2	i = 3			
1	0.266	0.406	0.328	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.281	0.372	0.347	-0.077	0.642	-0.021
3	0.292	0.327	0.382			

x = 6

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -96.592 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.308	0.369	0.323	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.320	0.320	0.360	0.657	0.665	0.593
3	0.356	0.281	0.362			

x = 7

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -112.790 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.298	0.382	0.320	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.285	0.351	0.364	0.683	-0.226	-0.121
3	0.311	0.319	0.371			

x = 8

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -96.616 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.295	0.380	0.325	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.291	0.332	0.376	0.669	0.627	0.583
3	0.330	0.300	0.369			

x = 9

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -96.529 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.318	0.355	0.327	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.308	0.325	0.367	0.694	0.638	0.580
3	0.332	0.293	0.375			

x = 10

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -146.341 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.342	0.367	0.292	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.306	0.333	0.361	-0.158	-0.129	-0.063
3	0.315	0.342	0.343			

SEQUÊNCIA 4

TEMPO DE CPU: 05 MINUTOS 48 SEGUNDOS 07 DÉCIMOS DE SEGUNDO

$x = 1$

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -152.911 = MVS \text{ FINAL}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.296	0.378	0.326	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.316	0.341	0.343	-0.230	-0.110	-0.109
3	0.322	0.315	0.363			

$x = 2$

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -96.480 = MVS \text{ FINAL}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.309	0.361	0.330	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.303	0.325	0.372	0.683	0.658	0.598
3	0.331	0.292	0.377			

$x = 3$

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -96.461 = MVS \text{ FINAL}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.311	0.359	0.330	$(\alpha\beta) = 12$	$(\alpha\beta) = 13$	$(\alpha\beta) = 23$
2	0.307	0.321	0.372	0.674	0.654	0.591
3	0.337	0.289	0.374			

SEQUÊNCIA 5(*)

TEMPO DE CPU: 22 MINUTOS 43 SEGUNDOS 27 DÉCIMOS DE SEGUNDO

x = 1

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -113.901 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.277	0.419	0.304	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.271	0.384	0.345	0.678	-0.015	-0.062
3	0.304	0.322	0.374			

x = 2

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -115.188 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.280	0.409	0.311	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.284	0.361	0.355	-0.019	0.670	-0.069
3	0.307	0.335	0.358			

x = 3

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -96.461 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.313	0.358	0.328	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.309	0.322	0.369	0.676	0.655	0.590
3	0.339	0.288	0.373			

x = 4

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -96.462$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.313	0.359	0.329	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.309	0.320	0.371	0.678	0.657	0.590
3	0.337	0.290	0.373			

(*) Execuções realizadas segundo $\epsilon = 0.5 \times 10^{-2}$

SEQUÊNCIA 6

TEMPO DE CPU: 10 MINUTOS 36 SEGUNDOS 66 DÉCIMOS DE SEGUNDOS

$x = 1$

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -103.7670 = MVS \text{ FINAL}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.428	0.312	0.259	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.418	0.286	0.296	0.581	0.536	0.418
3	0.553	0.193	0.253			

$x = 2$

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -121.954 = MVS \text{ FINAL}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.245	0.434	0.320	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.259	0.373	0.368	-0.053	-0.115	0.556
3	0.317	0.332	0.351			

$x = 3$

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -116.223 = MVS \text{ FINAL}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.281	0.392	0.327	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.271	0.366	0.364	-0.019	0.651	-0.108
3	0.310	0.319	0.371			

$x = 4$

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -121.042 = MVS \text{ FINAL}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.266	0.426	0.308	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.288	0.384	0.327	0.648	-0.067	-0.246
3	0.300	0.306	0.394			

x = 5

$p_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -96.521 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.308	0.365	0.328	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.300	0.332	0.368	0.659	0.633	0.571
3	0.335	0.294	0.371			

x = 6

$p_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -108.778 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.273	0.402	0.325	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.277	0.379	0.345	0.478	0.342	-0.022
3	0.290	0.333	0.377			

x = 7

$p_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -118.054 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.285	0.412	0.304	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.277	0.374	0.349	0.690	-0.094	-0.145
3	0.306	0.326	0.368			

x = 8

$p_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -96.5403 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.310	0.370	0.320	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.302	0.324	0.373	0.650	0.632	0.568
3	0.341	0.293	0.366			

SEQUÊNCIA 7

TEMPO DE CPU 05 MINUTOS 04 SEGUNDOS 42 DÉCIMOS DE SEGUNDO.

$x = 1$

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -96.564 = \text{MVS FINAL}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$P_{\alpha\beta}$		
1	0.320	0.359	0.321	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.304	0.320	0.376	0.671	0.645	0.597
3	0.357	0.274	0.369			

$x = 2$

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -112.076 = \text{MVS FINAL}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$P_{\alpha\beta}$		
1	0.263	0.419	0.319	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.270	0.380	0.349	0.478	-0.030	0.240
3	0.478	0.329	0.240			

$x = 3$

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -96.492 = \text{MVS FINAL}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$P_{\alpha\beta}$		
1	0.317	0.355	0.328	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.309	0.318	0.373	0.676	0.649	0.594
3	0.349	0.280	0.372			

SEQUÊNCIA 8

TEMPO DE CPU: 14 MINUTOS 05 SEGUNDOS 98 DÉCIMOS DE SEGUNDO

x = 1

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -96.570 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.324	0.346	0.330	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.298	0.323	0.378	0.679	0.649	0.591
3	0.346	0.287	0.367			

x = 2

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -127.262 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.275	0.394	0.331	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.292	0.355	0.353	-0.284	0.614	-0.125
3	0.290	0.324	0.386			

x = 3

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -96.528 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.314	0.351	0.334	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.303	0.321	0.381	0.666	0.639	0.561
3	0.340	0.278	0.381			

x = 4

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -96.740 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.326	0.351	0.322	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.341	0.314	0.344	0.697	0.655	0.612
3	0.348	0.291	0.362			

x = 5

$p_{\alpha i}$				$\ell nL = -96.480 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.309	0.363	0.328	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.308	0.324	0.364	0.686	0.655	0.599
3	0.337	0.287	0.376			

x = 6

$p_{\alpha i}$				$\ell nL = -96.476 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.303	0.365	0.331	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.304	0.320	0.376	0.665	0.646	0.585
3	0.334	0.290	0.376			

x = 7

$p_{\alpha i}$				$\ell nL = -96.485 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.303	0.367	0.330	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.302	0.320	0.378	0.659	0.643	0.579
3	0.332	0.291	0.377			

SEQUÊNCIA 9

TEMPO DE CPU: 13 MINUTOS 56 SEGUNDOS 22 DÉCIMOS DE SEGUNDO

x = 1

$p_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -118.442 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.251	0.421	0.327	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.269	0.377	0.354	0.613	-0.004	-0.207
3	0.306	0.327	0.367			

x = 2

$p_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -120.835 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.282	0.408	0.310	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.278	0.364	0.359	-0.019	-0.121	0.584
3	0.296	0.334	0.370			

x = 3

$p_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -119.235 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.282	0.410	0.308	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.279	0.349	0.371	-0.018	-0.071	0.609
3	0.295	0.308	0.398			

x = 4

$p_{\alpha i}$				$nL = -96.515 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.310	0.356	0.334	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.304	0.320	0.376	0.668	0.670	0.606
3	0.336	0.291	0.373			

x = 5

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -119.062 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.271	0.413	0.316	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.291	0.353	0.356	-0.160	0.449	0.167
3	0.305	0.329	0.367			

x = 6

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -132.071 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.309	0.426	0.266	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.288	0.347	0.365	-0.078	-0.326	0.520
3	0.312	0.302	0.387			

x = 7

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -96.467 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.314	0.358	0.327	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.303	0.320	0.377	0.672	0.655	0.589
3	0.336	0.288	0.376			

x = 8

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -96.515 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.323	0.352	0.324	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.319	0.322	0.359	0.676	0.644	0.583
3	0.343	0.286	0.370			

x = 9

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -122.071 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.286	0.407	0.307	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.289	0.368	0.343	0.705	-0.134	-0.241
3	0.306	0.318	0.376			

x = 10

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -133.613 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.282	0.406	0.312	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.282	0.365	0.353	-0.028	-0.031	-0.079
3	0.308	0.316	0.376			

SEQUÊNCIA 10

TEMPO DE CPU = 10 MINUTOS 51 SEGUNDOS 39 DÉCIMOS DE SEGUNDO

x = 1

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -126.170 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.2805	0.3909	0.3287	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.2972	0.3513	0.3515	-0.2636	0.6470	-0.1339
3	0.2979	0.3301	0.3720			

x = 2

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -112.731 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.2868	0.4084	0.3048	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.2840	0.3697	0.3463	0.6677	-0.0087	-0.0102
3	0.2967	0.3305	0.3728			

x = 3

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -119.968 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.3041	0.3932	0.3027	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.2641	0.3874	0.3484	-0.0353	-0.0794	0.5859
3	0.2903	0.3575	0.3522			

x = 4

$P_{\alpha i}$				$nL = -96.525 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.3052	0.3555	0.3393	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.2938	0.3171	0.3891	0.6731	0.6565	0.5859
3	0.3367	0.2826	0.3807			

x = 5

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -113.496 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$P_{\alpha\beta}$		
1	0.3015	0.4188	0.2797	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.2939	0.3721	0.3340	0.6775	-0.0319	-0.0068
3	0.3039	0.3204	0.3757			

x = 6

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -96.490 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$P_{\alpha\beta}$		
1	0.3079	0.3576	0.3345	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.3109	0.3191	0.3700	0.6836	0.6453	0.5890
3	0.3377	0.2846	0.3777			

x = 7

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -118.698 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$P_{\alpha\beta}$		
1	0.2750	0.3994	0.3256	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.2952	0.3400	0.3648	-0.0041	-0.0622	0.5735
3	0.3198	0.3258	0.3544			

x = 8

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -96.597 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$P_{\alpha\beta}$		
1	0.3304	0.3507	0.3190	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.3014	0.3332	0.3654	0.6857	0.6612	0.5974
3	0.3386	0.2873	0.3739			

x = 9

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -119.257 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$P_{\alpha\beta}$		
1	0.2603	0.4255	0.3142	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.2719	0.3761	0.3520	-0.1022	0.7000	-0.1380
3	0.2964	0.3410	0.3625			

x = 10

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -109.287 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$P_{\alpha\beta}$		
1	0.2781	0.3882	0.3337	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.2861	0.3691	0.3448	0.4242	0.3707	-0.0386
3	0.2833	0.3352	0.3815			

SEQUÊNCIA 11

TEMPO DE CPU 12 MINUTOS 42 SEGUNDOS 87 DÉCIMOS DE SEGUNDO.

$x = 1$

p_{ai}				$\ell nL = -115,629 = MVS \text{ FINAL}$		
a	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.282	0.425	0.293	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.268	0.393	0.340	0.672	-0.072	-0.060
3	0.298	0.331	0.371			

$x = 2$

p_{ai}				$\ell nL = -96,543 = MVS \text{ FINAL}$		
a	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.320	0.357	0.324	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.320	0.321	0.359	0.685	0.661	0.606
3	0.358	0.280	0.362			

$x = 3$

p_{ai}				$\ell nL = -115,327 = MVS \text{ FINAL}$		
a	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.314	0.376	0.310	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.296	0.342	0.362	0.648	-0.075	-0.018
3	0.321	0.340	0.339			

$x = 4$

p_{ai}				$\ell nL = -118,385 = MVS \text{ FINAL}$		
a	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.287	0.403	0.310	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.270	0.376	0.354	-0.040	0.022	0.596
3	0.293	0.329	0.378			

x = 5

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -96.487 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.311	0.360	0.329	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.310	0.320	0.369	0.677	0.636	0.582
3	0.343	0.284	0.373			

x = 6

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -124.862 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.286	0.404	0.310	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.261	0.381	0.357	0.541	-0.278	-0.004
3	0.317	0.311	0.372			

x = 7

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -96.477 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.308	0.361	0.332	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.300	0.324	0.376	0.674	0.650	0.580
3	0.339	0.285	0.376			

x = 8

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -113.489 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.263	0.416	0.321	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.291	0.358	0.351	-0.002	0.649	-0.005
3	0.285	0.339	0.375			

x = 9

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -116.175 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.286	0.397	0.317	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.275	0.368	0.356	0.713	-0.068	-0.098
3	0.297	0.319	0.384			

x = 10

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -131.107 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.301	0.367	0.332	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.272	0.384	0.344	-0.050	-0.327	0.523
3	0.300	0.359	0.341			

SEQUÊNCIA 12

TEMPO DE CPU: 14 MINUTOS 43 SEGUNDOS 16 DÉCIMOS DE SEGUNDO

x = 1

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -148.471 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.288	0.386	0.326	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.289	0.363	0.348	-0.119	-0.216	-0.053
3	0.326	0.301	0.373			

x = 2

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -129.949 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.286	0.387	0.327	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.279	0.389	0.332	-0.263	-0.158	0.642
3	0.305	0.350	0.345			

x = 3

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -96.515 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.303	0.362	0.335	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.293	0.323	0.384	0.672	0.662	0.594
3	0.336	0.290	0.373			

x = 4

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -96.488 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.316	0.360	0.324	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.312	0.320	0.368	0.666	0.642	0.572
3	0.343	0.287	0.370			

x = 5

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -96.732 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.292	0.379	0.329	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.317	0.330	0.352	0.647	0.603	0.564
3	0.325	0.306	0.369			

x = 6

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -115.690 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.282	0.418	0.299	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.265	0.373	0.362	-0.049	0.658	-0.044
3	0.317	0.346	0.338			

x = 7

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -96.627 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.312	0.346	0.343	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.298	0.309	0.393	0.654	0.648	0.554
3	0.343	0.276	0.381			

x = 8

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -125.349 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.298	0.384	0.318	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.265	0.372	0.363	-0.144	-0.157	0.636
3	0.291	0.388	0.371			

x = 9

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -96.619 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.320	0.362	0.318	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.297	0.333	0.370	0.644	0.646	0.579
3	0.346	0.297	0.357			

x = 10

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -123.068 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.279	0.400	0.322	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.281	0.365	0.354	-0.072	-0.147	0.598
3	0.313	0.323	0.364			

SEQUÊNCIA 13

TEMPO DE CPU: 11 MINUTOS 13 SEGUNDOS 27 DÉCIMOS DE SEGUNDO

x = 1

$P_{\alpha i}$				$\ell_{NL} = -95.519 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.321	0.356	0.322	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.318	0.326	0.355	0.668	0.649	0.586
3	0.347	0.287	0.367			

x = 2

$P_{\alpha i}$				$\ell_{NL} = -96.522 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.324	0.351	0.325	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.304	0.316	0.379	0.669	0.650	0.579
3	0.352	0.280	0.368			

x = 3

$P_{\alpha i}$				$\ell_{NL} = -111.967 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.281	0.402	0.317	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.279	0.354	0.367	0.524	-0.031	0.212
3	0.308	0.316	0.376			

x = 4

$P_{\alpha i}$				$\ell_{NL} = -116.419 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.272	0.403	0.324	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.285	0.355	0.359	-0.108	0.468	0.187
3	0.313	0.314	0.372			

x = 5

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -112.868 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.285	0.403	0.313	$(\alpha\beta) = 12$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.277	0.355	0.368	0.523	-0.053	0.198
3	0.296	0.321	0.383			

x = 6

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -122.734 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.297	0.389	0.314	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.284	0.353	0.363	-0.043	-0.157	0.609
3	0.304	0.326	0.370			

x = 7

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -96.727 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.332	0.346	0.323	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.307	0.315	0.378	0.639	0.655	0.600
3	0.351	0.291	0.358			

x = 8

$P_{\alpha i}$				$nL = -129.364 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.256	0.408	0.336	$(\alpha\beta) = 12$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.319	0.312	0.369	-0.315	0.604	-0.101
3	0.264	0.355	0.381			

x = 9

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -96.524 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.318	0.355	0.327	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.309	0.320	0.370	0.670	0.649	0.596
3	0.355	0.284	0.361			

x = 10

$P_{\alpha i}$				$\ell_{nL} = -117.668 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.277	0.424	0.299	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.304	0.350	0.346	-0.015	-0.018	0.575
3	0.322	0.312	0.365			

SEQUÊNCIA 14

TEMPO DE CPU: 11 MINUTOS 13 SEGUNDOS 27 DÉCIMOS DE SEGUNDO

x = 1

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -110.235 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.292	0.376	0.332	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.285	0.356	0.360	0.446	0.332	-0.063
3	0.302	0.331	0.366			

x = 2

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -96.705 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.327	0.343	0.330	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.328	0.298	0.373	0.670	0.680	0.599
3	0.345	0.281	0.374			

x = 3

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -124.023 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.278	0.427	0.295	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.294	0.383	0.323	0.567	-0.020	-0.318
3	0.310	0.308	0.382			

x = 4

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -113.106 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.271	0.391	0.338	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.271	0.359	0.370	0.661	-0.003	-0.035
3	0.297	0.332	0.371			

x = 5

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -126.483 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.287	0.395	0.318	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.275	0.383	0.342	-0.199	-0.130	0.642
3	0.296	0.343	0.361			

x = 6

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -111.755 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.294	0.397	0.309	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.286	0.353	0.361	0.525	-0.026	0.224
3	0.309	0.319	0.372			

x = 7

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -158.151 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.317	0.368	0.315	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.308	0.347	0.345	-0.233	-0.190	-0.088
3	0.317	0.316	0.367			

x = 8

$P_{\alpha i}$				$\ell nL = -96.481 = MVS \text{ FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.313	0.360	0.327	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.310	0.328	0.362	0.675	0.658	0.592
3	0.335	0.293	0.372			

$$x = 9$$

$p_{\alpha i}$				$\ell_{NL} = -96.471 = \text{MVS FINAL}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$\sigma_{\alpha\beta}$		
1	0.319	0.356	0.325	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.310	0.322	0.368	0.678	0.651	0.587
3	0.340	0.288	0.372			

SEQUÊNCIA 15

TEMPO DE CPU: 10 MINUTOS 41 SEGUNDOS 29 DÉCIMOS DE SEGUNDO

$x = 1$

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -136.219 = \text{MVS FINAL}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.297	0.386	0.317	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.256	0.378	0.367	0.458	-0.437	-0.038
3	0.320	0.312	0.368			

$x = 2$

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -111.792 = \text{MVS FINAL}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.299	0.408	0.293	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.295	0.360	0.345	0.534	-0.026	0.212
3	0.311	0.316	0.373			

$x = 3$

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -119.237 = \text{MVS FINAL}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$p_{\alpha\beta}$		
1	-0.305	0.383	0.312	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.257	0.369	0.374	-0.032	-0.057	0.608
3	0.279	0.329	0.392			

$x = 4$

$p_{\alpha i}$				$\ell n L = -120.882 = \text{MVS FINAL}$		
α	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$p_{\alpha\beta}$		
1	0.269	0.418	0.313	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.275	0.378	0.347	-0.114	-0.026	0.581
3	0.300	0.325	0.375			

x = 5

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -124.596 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.289	0.387	0.323	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.279	0.367	0.354	-0.256	0.410	0.140
3	0.311	0.325	0.363			

x = 6

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -117.876 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.274	0.415	0.310	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.278	0.353	0.369	-0.117	0.634	-0.018
3	0.298	0.337	0.365			

x = 7

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -117.429 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.283	0.396	0.321	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.286	0.364	0.350	0.662	-0.025	-0.175
3	0.308	0.316	0.376			

x = 8

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -110.277 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$\rho_{\alpha\beta}$		
1	0.280	0.382	0.338	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.276	0.371	0.353	0.418	0.345	-0.063
3	0.318	0.307	0.375			

x = 9

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -114.601 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$P_{\alpha\beta}$		
1	0.286	0.408	0.306	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.282	0.368	0.349	0.690	-0.044	-0.057
3	0.299	0.321	0.380			

x = 10

$P_{\alpha i}$				$\ell n L = -116.857 = \text{MVS FINAL}$		
α	i = 1	i = 2	i = 3	$P_{\alpha\beta}$		
1	0.268	0.409	0.324	$(\alpha\beta) = (12)$	$(\alpha\beta) = (13)$	$(\alpha\beta) = (23)$
2	0.281	0.367	0.352	-0.041	0.676	-0.114
3	0.299	0.336	0.365			

APÊNDICE II

PROGRAMAS COMPUTACIONAIS FEITOS PARA
REALIZAÇÃO DESTE TRABALHO

PROGRAMA PARA CALCULO ITERATIVO DO METODO DE OTIMIZACAO ALEATORIA.

FUNCAO AUXILIAR FSIJ ---> CELAS DE FREQUENCIAS.

```
INTEGER FUNCTION FSIJ(ALFA,I,J)
INTEGER NIJ,CF,ALFA,P,T
COMMON CF(64,100,10),NIJ(64),PIA(10,10),ROA(10),GA(10),AMEN(10),
*G,F,P,T,ISEED
ISOMA=0
NC=2**P
IF(I-J)1,1,2
L=((2*P-I)*(I-1))/2+(J-T)
GO TO 3
L=((2*P-J)*(J-1))/2+(I-3)
DO K=1,NC
IF ( CF(L,K,ALFA) .EQ. 1 ) ISOMA=ISOMA+CF(L,K,F)
ENDDO
FSIJ=ISOMA
```

FSIJ E UM ACUMULADOR DA FREQUENCIA MARGINAL DE PREFERENCIAS DO TRATAMENTO I SOBRE O TRATAMENTO J COM ATRIBUTO ALFA.

```
RETURN
END
```

FUNCAO INDICADORA PARA DETERMINAR O SINAL DE DELTA(CALL_{ij},CB=1,0)
,DELTA(i,Salta),DELTA(i,Sbeta).

```
INTEGER FUNCTION DELTA(A,B)
INTEGER A,B
DELTA=1
IF (A.NE.B) DELTA=-DELTA
RETURN
END
```

CALCULO DO LOGARITMO DA FUNCAO DE VEROSSIMILHANCA.

```
SUBROUTINE VERO(PI,RO,MVS)
REAL MVS,PI(10,10),RO(10)
INTEGER NIJ,CF,T,P,ALFA,BETA,FSIJ,DELTA,AL,VALPAT
COMMON CF(64,100,10),NIJ(64),PIA(10,10),ROA(10),GA(10),AMEN(10),
*G,F,P,T,ISEED
F1=0.
F2=0.
DO ALFA=1,P
```

P E TOTAL DE ATRIBUTOS.

CALCULO DE F1, F1 E A PRIMEIRA PARCELA DA EXPRESSAO DO LOGARITMO DA FUNCAO DE VEROSSIMILHANCA.

```
DO I=1,T
```

T E O TOTAL DE ATRIBUTOS.

```
VALFAI=0
```

VALFAI E O NUMERO TOTAL DE PREFERENCIAS PARA O TRATAMENTO i COM ATRIBUTO ALFA.

```
DO J=1,T
```

```
IF (I.NE.J) VALFAI=VALFAI+FSIJ(ALFA,I,J)
```

```
ENDDO
```

```
F1 = F1 + VALFAI * LOG( PI(ALFA,I) )
```

```
ENDDO
```

CALCULO DE F2, F2 E A SEGUNDA PARCELA DA EXPRESSAO DO LOGARITMO DA FUNCAO DE VEROSSIMILHANCA.

```
ICONT=0
```

```
DO I=1,T-1
```

```
DO J=I+1,T
```

```
ICONT=ICONT+1
```

```
F2 = F2 + NII(ICONT) * LOG( PI(ALFA,I) + PI(ALFA,J) )
```

```
ENDDO
```

```
ENDDO
```

```
ENDDO
```

CALCULO DE F3, F3 E A ULTIMA PARCELA DA EXPRESSAO DO LOGARITMO DA FUNCAO DE VEROSSIMILHANCA.

```
NC=2**P
```

NC E O TOTAL DE CELAS DE FREQUENCIAS QUANDO SE COMPARA O PAR (i, j), i < j.

```
ICONTA=0
```

```
F3=0.
```

```
DO I=1,T-1
```

```
DO J=I+1,T
```

```
ICONTA=ICONTA+1
```

```
DO M=1,NC
```

```
SOMA=1.
```

```
ICON=0
```

```
DO AL=1,P-1
```

```
DO BETA=AL+1,P
```

```
ICON=ICON+1
```

```
A = ( PI(AL,I)/PI(AL,J) ) ** (-0.5)
```

```
B = ( PI(BETA,I)/PI(BETA,J) ) ** (-0.5)
```

```
O = DELTA(CF(ICONTA,M,AL),CF(ICONTA,M,BETA))
```

```
C = RO(ICON)*O
```

```
D = DELTA(1,CF(ICONTA,M,AL))
```

```
E = DELTA(1,CF(ICONTA,M,BETA))
```

```
SOMA=SOMA + C * (A ** D) * (B ** E)
```

SOMA E A EXPRESSÃO EQUIVALENTE A FUNÇÃO $h(s/i, j)$ NO MODELO DAVIDSON E DRABLEY.

```

      ENDDO
      ENDDO
      IF(SOMA)1,1,2
      ZW=RAN(ISEED)
      IF(ZW.GE..50)GOTO 4
      INDICA=1
      CALL RANDOM1(PI,RO,INDICA)
      GO TO 101
      CALL RANDOM2(PI,RO)
      GO TO 101
      X=LOG(SOMA)
      F3 = F3 + CF(ICONTA,M,F) * X
      ENDDO
      ENDDO
      ENDDO
      MVS = F1 - F2 + F3

```

MVS É A ESTIMATIVA DO LOGARITMO DA FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA.

```

      RETURN
      END

```

SUBROTINA PARA GERAR OS VETORES ALEATORIOS 'PI' E 'RO' NA SUB-REGIÃO CONTIDA NO ESPAÇO DE RESTRICÕES.

```

      SUBROUTINE RANDOM1(PI,RO,INDICA)
      REAL GAMA,PI(10,10),RO(10)
      INTEGER P,T
      COMMON CF(64,100,10),NIJ(64),PIA(10,10),ROA(10),GA(10),AMEN(10),
      *G,F,P,T,ISEED

```

GERANDO PI NO HIPERCUBO.

```

      DO ALFA=1,P
      IF(INDICA.EQ.1)GO TO 15

```

PARA CADA LINHA DE 'PI', CALCULAR GAMA. GAMA É A DISTÂNCIA DO ÚLTIMO PONTO GERADO ATÉ UM DOS HIPERPLANOS DETERMINADOS PELO SIMPLEX ASSOCIADO À RESTRIÇÃO (3.1.2).

```

      GAMA = 0.
      DO I=1,T-1
      GAMA=GAMA+PIA(ALFA,I)
      ENDDO
      GAMA=(1. - GAMA)/(T-1)
      DO I=1,T-1
      IF(GAMA.GT.PIA(ALFA,I))GAMA=PIA(ALFA,I)
      ENDDO
      GA(ALFA)=GAMA
      IF(INDICA.EQ.0)GO TO 115

```

GERAÇÃO DA MATRIZ DOS PARÂMETROS DE PREFERÊNCIAS.

```

5 AMEN(ALFA)=AMEN(ALFA)/2.
  GA(ALFA)=GA(ALFA)/2.
15 API=0.
  DO I=1,T-1
    W = (RAN(ISEED) - 0.5)*2.*GA(ALFA)
    PI(ALFA,I) = PIA(ALFA,I) + W
    API = API +PI(ALFA,I)
  ENDDO
  PI(ALFA,T) = 1. - API
ENDDO

```

GERANDO O VETOR DE MEDIDA DE ASSOCIACAO ENTRE ATRIBUTOS.

```

  L=P*(P-1)/2
  DO ALFA=1,L
    IF(INDICA.EQ.1)GO TO 555
    IF(ROA(ALFA))1,1,2
      AMENORD=ROA(ALFA)+1.
      GO TO 555
      AMENORD=1.-ROA(ALFA)
      AMEN(ALFA)=AMENORD
555 AUX = ( RAN(ISEED) * 2. - 1. ) * AMEN(ALFA)
      RO(ALFA)=ROA(ALFA)+AUX
    ENDDO
  INDICA=0
  RETURN
END

```

SUBROTINA PARA GERAR OS VETORES PI E RO EM TODA REGIAO, ISTO E, NA REGIAO DETERMINADA PELAS RESTRICOES (3.1.2), (3.1.3).

```

SUBROUTINE RANDOMR(PI,RO)
  INTEGER P,T
  REAL PI(10,10),RO(10)
  COMMON CF(64,100,10),NIJ(64),PIA(10,10),ROA(10),GA(10),AMEN(10),
  *G,F,P,T,ISEED

```

GERANDO A MATRIZ ASSOCIADA AOS PARAMETROS DE PREFERENCIAS.

```

  DO ALFA=1,P
    PI(ALFA,1)=RAN(ISEED)
    PIO=0.
    DO I=2,T-1
      PIO=PIO+PI(ALFA,I-1)
      PI(ALFA,I)=RAN(ISEED)*(1.-PIO)
    ENDDO
    PI(ALFA,T)=1.-PIO-PI(ALFA,T-1)
  ENDDO

```

GERANDO O VETOR DE MEDIDA DE ASSOCIACAO ENTRE ATRIBUTOS.

```

  L=P*(P-1)/2
  DO I=1,L
    RO(I) = RAN(ISEED) * 2. -1.
  ENDDO
  RETURN

```

END

SUBROTINA AUXILIAR PARA COPIAR PIA <-- PI ROA <-- RO

```
SUBROUTINE COPIA(A,B,C,D)
  INTEGER P,T
  REAL A(10,10),B(10),C(10,10),D(10)
  COMMON CF(64,100,10),NIJ(64),PIA(10,10),ROA(10),GA(10),AMEN(10),
  *G,F,P,T,ISEED
  DO ALFA=1,P
    DO I=1,T
      A(ALFA,I)=C(ALFA,I)
    ENDDO
  ENDDO
  L=P*(P-1)/2
  DO ALFA=1,L
    B(ALFA)=D(ALFA)
  ENDDO
  RETURN
END
```

SUBROTINA PARA CALCULO DO METODO DE OTIMIZACAO ALEATORIA (M.O.A.).

```
SUBROUTINE ITERA(PI,RO,MVS)
  REAL PI(10,10),RO(10),MVS,MVSA
  INTEGER P,T
  COMMON CF(64,100,10),NIJ(64),PIA(10,10),ROA(10),GA(10),AMEN(10),
  *G,F,P,T,ISEED
  DATA EPS1/1E-3/
  CALL COPIA(PIA,ROA,PI,RO)
  ICONTA=0
  CALL VERO(PI,RO,MVS)
  MVSA=MVS
333  XY = RAN(ISEED)
    IF(XY.GE..50)1,1,2
    CALL RANDOM1(PI,RO,INDICA)
    GO TO 222
    CALL RANDOM2(PI,RO)
222  CALL VERO(PI,RO,MVS)
    IF(MVS.GT.MVSA)GO TO 444
    ICONTA=ICONTA+1
    IF(ICONTA.LT.100)GO TO 333
    INDICA=1
    GO TO 1
144  IF((MVS-MVSA).LT.EPS1)GO TO 555
    MVSA=MVS
    CALL COPIA(PIA,ROA,PI,RO)
    ICONTA=0
    INDICA=0
    GO TO 333
555  RETURN
END
```

PROGRAMA PRINCIPAL M.O.A.

```

INTEGER NIJ,CF,T,P,ALFA,BETA,FSIJ,DELTA,AL,VALFAI
COMMON CF(64,100,10),NIJ(64),PIA(10,10),ROA(10),CA(10),AMEN(10),
*G,F,P,T,ISEED
REAL MUS,PI(10,10),RO(45),SOMA,Z(110,110),PMAT(10,10,10),ZZ(45),
*ROS(10,45)
DATA (((CF(I,J,K),K=1,4),J=1,8),I=1,3)/1,1,1,3,2,1,1,1,1,2,1,1,3,
*2,1,1,1,1,2,0,2,1,2,2,1,2,2,0,2,2,2,9,1,1,1,6,3,1,1,0,1,3,1,1,3,3,
*1,1,1,1,3,1,3,1,3,0,1,3,3,1,3,3,3,9,2,2,2,7,3,2,2,1,2,3,2,1,3,1,2,
*1,2,2,3,3,3,2,3,1,2,3,3,1,3,3,3,6/
DATA (NIJ(I),I=1,3)/22,19,21/
DATA P,T,DE,F,EPS/3,3,3,4,1E-2/
OPEN(UNIT=5,FILE='EPS1.DAL',STATUS='NEW')

```

CALCULO DA ESTIMATIVA DE MUS INICIAL.

```

L=P*(P-1)/2
IV=0
TYPE *, ' ENTRE COM A SEMENTE INTEIRA'
ACCEPT *, ISEED
CALL RANDOM2(PI,RO)
IV=IV+1
F1=0.
F2=0.
DO ALFA=1,P

```

CALCULO DE F1.

```

DO I=1,T
  VALFAI=0
  DO J=1,T
    IF (I.NE. J) VALFAI=VALFAI+FSIJ(ALFA,I,J)
  ENDDO
  F1 = F1 + VALFAI * LOG( PI(ALFA,I) )
ENDDO

```

CALCULO DE F2.

```

ICONT=0
DO I=1,T-1
  DO J=I+1,T
    ICONT=ICONT+1
    F2 = F2 + NIJ(ICONT) * LOG( PI(ALFA,I) + PI(ALFA,J) )
  ENDDO
ENDDO
ENDDO

```

CALCULO DE F3.

```

NC=2**P
ICONTA=0
F3=0.
DO I=1,T-1
  DO J=I+1,T

```

```

ICONTA=ICONTA+1
DO M=1,NC
  SOMA=1.
  ICON=0
  DO AL=1,P-1
    DO BETA=AL+1,P
      ICON=ICON+1
      A = ( PI(AL,I)/PI(AL,J) ) ** (-0.5)
      B = ( PI(BETA,I)/PI(BETA,J) ) ** (-0.5)
      O = DELTA(CF(ICONTA,M,AL),CF(ICONTA,M,BETA))
      C = RO(ICON)*O
      D = DELTA(I,CF(ICONTA,M,AL))
      E = DELTA(I,CF(ICONTA,M,BETA))
      SOMA=SOMA + C * (A ** D) * (E ** E)
    ENDDO
  ENDDO
IF(SOMA)1,1,2
  CALL RANDOM2(PI,RO)
  GO TO 101
  X=LOG(SOMA)
  F3 = F3 + CF(ICONTA,M,F) * X
  ENDDO
ENDDO
ENDDO
MVS = F1 - F2 + F3
WRITE(5,57)MVS
FORMAT(1X,'MVS INICIAL= ',F12.6)

CALL ITERA(PI,RO,MVS)

WRITE(5,11)MVS,IV
WRITE(5,10)((PI(I,K),K=1,T),T=1,P)
WRITE(5,10)(RO(I),I=1,L)
11 10  FORMAT(/,1X,'MVS FINAL= ',F12.6,3X,'IV= ',I3)
      FORMAT(3F8.4)

```

CRITERIO DE PARADA DO M.O.A.

CONSTRUCAO DA MATRIZ ' SOLIDA' (COMPOSTA DE 10 ESTIMATIVAS DAS MATRIZES DOS PARAMETROS DE PREFERENCIAS E DOS PARAMETROS DE MEDIDA DE ASSOCIACAO ENTRE ATRIBUTOS, ONDE CADA MATRIZ DETERMINA A ESTIMATIVA DE MVS ASSOCIADA A R_i).

```

DO I=1,T
  DO K=1,P
    PMAT(I,K,IV)=PI(I,K)
  ENDDO
ENDDO
DO N=1,L
  ROS(N,IV)=RO(N)
ENDDO
IF(IV.EQ.1)GO TO 200
DO M=1,IV-1
  DO N=1+M,IV
    DO J=1,T
      DO K=1,P
        Z(J,K)=ABS(PMAT(J,K,N)-PMAT(J,K,M))
      ENDDO
    ENDDO
    DO MN=1,L
      ZZ(MN)=ABS(ROS(MN,N)-ROS(MN,M))
    ENDDO
  ENDDO

```



```

      ENDDO
DO K=1,T
  DO II=1,P-1
    DO JJ=II+1,P
      IF(Z(K,II).LE.Z(K,JJ))GO TO 131
      AUX=Z(K,II)
      Z(K,II)=Z(K,JJ)
      Z(K,JJ)=AUX
131    ENDDO
  ENDDO
ENDDO
DO K=1,T-1
  DO J=K+1,T
    IF(Z(K,P).LE.Z(J,P))GO TO 190
    AUX1=Z(K,P)
    Z(K,P)=Z(J,P)
    Z(J,P)=AUX1
190  ENDDO
ENDDO
DO K=1,L-1
  DO J=K+1,L
    IF(ZZ(K).LE.ZZ(J))GO TO 111
    AUX1=ZZ(K)
    ZZ(K)=ZZ(J)
    ZZ(J)=AUX1
111  ENDDO
ENDDO
IF(Z(T,P).GE.ZZ(L))GO TO 124
Z(T,P)=ZZ(L)
124 IF((Z(T,P).LE.EPS).OR.(IV.EQ.10))GO TO 121
  ENDDO
ENDDO
GO TO 299
121 CLOSE(UNIT=5,DISPOSE='SAVE')
STOP
END

```

PROGRAMA PARA CALCULO ITERATIVO DO METODO DE OTIMIZACAO ALEATORIA
SUPONDO OS PARAMETROS DE PREFERENCIAS IGUAIS.

FUNCAO AUXILIAR FSIJ ---> CELAS DE FREQUENCIAS.

```
INTEGER FUNCTION FSIJ(ALFA,I,J)
INTEGER NIJ,CF,ALFA,P,T
COMMON CF(64,100,10),NIJ(64),W,PIA(10,10),ROA(10),AMEN(10),
* G,DE,F,P,T,ISEED
ISOMA=0
NC=2**P
IF (I-J) 1,1,2
L=((2*P-I)*(I-1))/2+(J-1)
GO TO 3
L=((2*P-J)*(J-1))/2+(I-1)
DO K=1,NC
  IF ( CF(L,K,ALFA) .EQ. I ) ISOMA=ISOMA+CF(L,K,F)
ENDDO
FSIJ=ISOMA
```

FSIJ E UM ACUMULADOR DA FREQUENCIA MARGINAL DE PREFERENCIAS DO TRA-
TAMENTO I SOBRE O TRATAMENTO J COM ATRIBUTO ALFA.

RETURN
END

FUNCAO INDICADORA PARA DETERMINAR O SINAL DE DELTA(Salfa,dbeta),
DELTA(i,Salfa),delta(i,dbeta).

```
INTEGER FUNCTION DELTA(A,B)
INTEGER A,B
DELTA=1
IF (A.NE.B) DELTA=-DELTA
RETURN
END
```

LOGARITMO DA FUNCAO DE VEROSSIMILHANCA.

```
SUBROUTINE VERO(PI,RO,MVS)
REAL MVS,PI(10,10),RO(10)
INTEGER CF,T,P,ALFA,BETA,FSIJ,DELTA,AL,VALFAI
COMMON CF(64,100,10),NIJ(64),W,PIA(10,10),ROA(10),AMEN(10),
* G,DE,F,P,T,ISEED
F1=0.
F2=0.
DO ALFA=1,P
```

P E O TOTAL DE ATRIBUTOS.

CALCULO DE F1,F1 E A PRIMEIRA PARCELA DA EXPRESSAO DO LOGARITMO DA FUNCAO DE VEROSSIMILHANCA.

DO I=1,T

T E TOTAL DE TRATAMENTOS.

VALFAI=0

VALFAI E O NUMERO TOTAL DE PREFERENCIAS PARA O TRATAMENTO I COM A_ TRIBUTU ALFA.

DO J=1,T

IF (I .NE. J) VALFAI=VALFAI+FSIJ(ALFA,I,J)

ENDDO

F1=F1 + VALFAI * LOG(PI(ALFA,I))

ENDDO

CALCULO DE F2,F2 E A SEGUNDA PARCELA DA EXPRESSAO DO LOGARITMO DA FUNCAO DE VEROSSIMILHANCA.

ICONT=0

DO I=1,T-1

DO J=I+1,T

ICONT=ICONT+1

F2=F2 + NIJ(ICONT) * LOG(PI(ALFA,I) + PI(ALFA,J))

ENDDO

ENDDO

ENDDO

CALCULO DE F3,F3 E A ULTIMA PARCELA DA EXPRESSAO DO LOGARITMO DA FUNCAO DE VEROSSIMILHANCA

NC=2**P

NC E O NUMERO TOTAL DE CELAS DE FREQUENCIAS QUANDO SE COMPARA O PAR (i,j), i<j.

ICONTA=0

F3=0.

DO I=1,T-1

DO J=I+1,T

ICONTA=ICONTA+1

DO M=1,NC

SOMA=1.

ICON=0

DO AL=1,P-1

DO BETA=AL+1,P

ICON=ICON+1

A=(PI(AL,I)/PI(AL,J)) ** (-0.5)

B=(PI(BETA,I)/PI(BETA,J)) ** (-0.5)

O=DELTA(CF(ICONTA,M,AL),CF(ICONTA,M,BETA))

C=RO(ICON)*O

D=DELTA(I,CF(ICONTA,M,AL))

E=DELTA(I,CF(ICONTA,M,BETA))

SOMA=SOMA + C * (A ** D) * (B ** E)

A EXPRESSAO SOMA E EQUIVALENTE A FUNCAO $h(s|i,j)$ NO MODELO
DAVIDSON_BRADLEY.

```
      ENDDO
      ENDDO
      IF (SOMA) 1,1,2
      ZW=RAN(ISEED)
      IF (ZW.GE..50) GOTO 4
      INDICA=1
      CALL RANDOM1(RO,INDICA)
      GO TO 101
      CALL RANDOM2(RO)
      GO TO 101
      X=LOG(SOMA)
      F3=F3 + CF(ICONTA,M,F) * X
      ENDDO
      ENDDO
      ENDDO
      MVS=F1 - F2 + F3
```

MVS E LOGARITMO DA FUNCAO DE VEROSSIMILHANCA.

```
      RETURN
      END
```

SUBROTINA PARA GERAR O VETOR ALEATORIO 'RO' NA SUB-REGIAO CONTIDA
NO ESPACO DE RESTRICOES.

```
      SUBROUTINE RANDOM1(RO,INDICA)
      REAL GAMA,PI(10,10),RO(10)
      INTEGER P,T
      COMMON CF(64,100,10),NIJ(64),W,PIA(10,10),ROA(10),AMEN(10),
      * G,DE,F,P,T,ISEED
      L = P*(P-1)/2
      DO ALFA=1,L
```

GERANDO RO EM I, ONDE I E UM INTERVALO CONTIDO EM (-1,1).

```
      IF (INDICA-1) 3,4,3
      AMEN(ALFA)=AMEN(ALFA)/2.
      GO TO 5
      IF (ROA(ALFA)) 1,1,2
      AMENORD=ROA(ALFA)+1.
      AMENORD=1.-ROA(ALFA)
      AMEN(ALFA)=AMENORD
      AUX=(.RAN(ISEED) * 2. - 1. ) * AMEN(ALFA)
      RO(ALFA)=ROA(ALFA)+AUX
      ENDDO
      INDICA=0
      RETURN
      END
```

SUBROTINA PARA GERAR OS VETORES RO EM TODA REGIAO.

```

SUBROUTINE RANDOM2(RO)
INTEGER P,T
REAL PI(10,10),RO(10)
COMMON CF(64,100,10),NIJ(64);W,PIA(10,10),ROA(10),AMEN(10),
* G,DE,F,P,T,ISEED

```

GERANDO RO EM TODA REGIAO, DETERMINA POR (3.1.2).

```

L=P*(P-1)/2
DO ALFA=1,L
  RO(ALFA)=RAN(ISEED) * 2. -1.
ENDDO
RETURN
END

```

SUBROTINA AUXILIAR PARA COPIAR ROA <-- RO.

```

SUBROUTINE COPIA(B,D)
INTEGER P,T
REAL B(10),D(10)
COMMON CF(64,100,10),NIJ(64),W,PIA(10,10),ROA(10),AMEN(10),
* G,DE,F,P,T,ISEED
L=P*(P-1)/2
DO ALFA=1,L
  B(ALFA)=D(ALFA)
ENDDO
RETURN
END

```

SUBROTINA PARA CALCULO DO METODO ITERATIVO DE OTIMIZACAO ALEATORIA (M.O.A.).

```

SUBROUTINE ITERA(PI,RO,MVS)
REAL PI(10,10),RO(10),MVS,MVSA
INTEGER P,T
COMMON CF(64,100,10),NIJ(64),W,PIA(10,10),ROA(10),AMEN(10),
* G,DE,F,P,T,ISEED
DATA EPS1/1E-4/
CALL COPIA(ROA,RO)
ICONTA=0
CALL VERO(PI,RO,MVS)
MVSA=MVS
333 XY=RAN(ISEED)
IF(XY.GE..50)1,1,2
1 CALL RANDOM1(RO,INDICA)
GO TO 222
2 CALL RANDOM2(RO)
222 CALL VERO(PI,RO,MVS)
IF(MVS.GT.MVSA)GO TO 444
ICONTA=ICONTA+1
IF(ICONTA.LT.100)GO TO 333

```

```

INDICA=1
GO TO 1
444 IF((MVS-MVSA).LT.EPS1)GO TO 555
MVSA=MVS
WRITE(5,111)MVS
111 FORMAT(/IX,' MVS=',F10.4)
CALL COPIA(ROA,RO)
ICONTA=0
INDICA=0
GO TO 333
555 RETURN
END

```

PROGRAMA M.O.A.

```

INTEGER CF,T,P,ALFA,BETA,FSIJ,DELTA,AL,VALFAI
COMMON CF(64,100,10),NIJ(64);W,PIA(10,10),ROA(10),AMEN(10),
* G,DE,F,P,T,ISEED
REAL MVS,PI(10,10),RO(45),ROS(10,45),ZZ(45)
DATA (((CF(I,J,K),K=1,4),J=1,8),I=1,3)/1,1,1,8,2,1,1,1,1,2,1,1,2,
*2,1,1,1,1,2,0,2,1,2,2,1,2,2,0,2,2,2,9,1,1,1,6,3,1,1,0,1,3,1,1,3,3,
*1,1,1,1,3,1,3,1,3,0,1,3,3,1,3,3,3,9,2,2,2,7,3,2,2,1,2,3,2,1,3,3,2,
*1,2,2,3,3,3,2,3,1,2,3,3,1,3,3,3,6/
DATA (NIJ(I),I=1,3)/22,19,21/
DATA ((PI(I,J),J=1,3),I=1,3)/.333,.333,.334,.333,.332,.334,.333,
* .333,.334/
DATA P,T,DE,F,EPS/3,3,3,4,1E-2/
OPEN(UNIT=5,FILE='PORE.DAT',STATUS='NEW')

```

CALCULO DA ESTIMATIVA DE MVS INICIAL.

```

L=P*(P-1)/2
IV=0
TYPE *, ' ENTRE COM A SEMENTE ENTRE INTEIRA'
ACCEPT *, ISEED
200 CALL RANDOM2(RO)
IV=IV+1
101 F1=0.
PZ=0.
DO ALFA=1,P

```

CALCULO DE F1.

```

DO I=1,T
VALFAI=0
DO J=1,T
IF (I.NE. J) VALFAI=VALFAI+ENT2(ALFA,I,J)
ENDDO
F1=F1 + VALFAI * LOG( PI(ALFA,I) )
ENDDO

```

CALCULO DE F2.

```

ICONT=0
DO I=1,T 1
DO J=I+1,T

```

```

        ICONT=ICON+1
        F2=F2 + NIJ(ICON) * LOG( PI(ALFA,I) + PI(ALFA,J) )
    ENDDO
ENDDO
ENDDO

```

CALCULO DE F3.

```

NC=2**P
ICONTA=0
F3=0.
DO I=1,T-1
    DO J=I+1,T
        ICONTA=ICONTA+1
        DO M=1,NC
            SOMA=1.
            ICON=0
            DO AL=1,P-1
                DO BETA=AL+1,P
                    ICON=ICON+1
                    A=( PI(AL,I)/PI(AL,J) ) ** (-0.5)
                    B=( PI(BETA,I)/PI(BETA,J) ) ** (-0.5)
                    O=DELTA(CF(ICONTA,M,AL),CF(ICONTA,M,BETA))
                    C=RO(ICON)*O
                    D=DELTA(I,CF(ICONTA,M,AL))
                    E=DELTA(I,CF(ICONTA,M,BETA))
                    SOMA=SOMA + C * (A ** D) * (B ** E)
                ENDDO
            ENDDO
            IF(SOMA)1,1,2
            CALL RANDOMZ(RO)
            GO TO 101
            X=LOG(SOMA)
            F3=F3 + CF(ICONTA,M,F) * X
        ENDDO
    ENDDO
ENDDO
MVS.= F1 - F2 + F3
WRITE(5,57)MVS
FORMAT(1X,'MVS INICIAL= ',F10.4)

CALL ITERA(PI,RO,MVS)

WRITE(5,11)MVS,IV
WRITE(5,10)((PI(I,K),K=1,T),I=1,P)
WRITE(5,10)(RO(I),I=1,L)
FORMAT(/,1X,'MVS FINAL=',F10.4,3X,'IV ',I3)
FORMAT(3F8.3)
DO N=1,L
    ROS(N,IV)=RO(N)
ENDDO
IF(IV.EQ.1)GO TO 200

```

CRITERIO DE PARADA PARA O M.O.A.

CONSTRUCAO DA MATRIZ 'SOLIDA' (COMPOSTA DE 10 ESTIMATIVAS DA MATRIZES DOS PARAMETROS DE PREFERENCIAS E DOS PARAMETROS DE DE MEDIDA ASSOCIACAO ENTRE ATRIBUTOS, ONDE CADA MATRIZ DETERMINA A ESTIMATIVA DE MVS ASSOCIADA A R₀).

```

DO M=1,IV-1
DO N=1+M,IV
DO MN=1,L
ZZ(MN)=ABS(ROS(MN,N)-ROS(MN,M))
ENDDO
DO K=1,L-1
DO J=K+1,L
IF(ZZ(K).LE.ZZ(J))GO TO 111
AUXI=ZZ(K)
ZZ(K)=ZZ(J)
ZZ(J)=AUXI
111 ENDDO
ENDDO
IF((ZZ(L).LE.EPS).OR.(IV.EQ.10))GO TO 121
ENDDO
ENDDO
GO TO 200
121 N=T*(T-1)/2
NZ=0
DO I=1,N
NZ=NZ+NIJ(I)
ENDDO
WT=2.
X=-P*LOG(WT)*NZ
WRITE(5,32)X
32 FORMAT(//,2X,'X=',F10.4)
CLOSE(UNIT=5,DISPOSE='SAVE')
STOP
END

```


PROGRAMA PARA TESTAR A ADEQUABILIDADE DE AJUSTE DO MODELO
UTILIZANDO O TESTE QUI QUADRADO.

FUNCAO INDICADORA PARA DETERMINAR O SINAL DE DELTA(Salfa,Sbeta),
DELTA(i,Salfa),DELTA(i,Sbeta).

```

INTEGER FUNCTION DELTA(A,B)
INTEGER A,B
DELTA=1
IF (A.NE.B) DELTA=-DELTA
RETURN
END

```

CALCULO DAS FREQUENCIAS AJUSTADAS E DO QUI QUADRADO ESTIMADO.

```

INTEGER F,T,F,ALFA,BETA,DELTA,AL,ALF,L
REAL PI(10,10),RO(10),PSA(10,32,10),PS(10,32,10),CF(10,32,10).
* NIJ(10)
DATA (((CF(I,J,K),K=1,4),J=1,8),I=1,3)/1,1,1,8,2,1,1,1,1,2,1,1,2,
*2,1,1,1,1,2,0,2,1,2,2,1,2,2,0,2,2,2,9,1,1,1,6,3,1,1,0,1,3,1,1,3,3,
*1,1,1,1,3,1,3,1,3,0,1,3,3,1,3,3,3,9,2,2,2,7,3,2,2,1,2,3,2,1,3,3,2,
*1,2,2,3,3,3,2,3,1,2,3,3,1,3,3,3,6/
DATA (NIJ(I),I=1,3)/22,19,21/
DATA (RO(I),I=1,3)/0.676,0.654,0.590/(PI(I,K),K=1,3),I=1,3)/
* 0.313,0.359,0.328,0.307,0.323,0.371,0.339,0.283,0.274/
DATA P,T,F/3,3,4/
OPEN(UNIT=5,FILE='AJUSTE.DAT',STATUS='NEW')

```

CALCULO DA FREQUENCIA AJUSTADA PARA CADA CELA DDE FREQUENCIA.

```

I=P*(P-1)/2
NC=2**P
ICONTA=0
W=0.
DO J=1,T-1
  DO J=J+1,T
    ICONTA=ICONTA+1
    DO M=1,NC
      SOMA=1.
      ICON=0
      DO AL=1,P-1
        DO BETA=AL+1,P
          ICON=ICON+1
          A = ( PI(AL,J)/PI(AL,J) ) ** ( -0.5)
          B = ( PI(BETA,J)/PI(BETA,J) ) ** ( -0.5)
          O = DELTA(CF(ICONTA,M,AL),CF(ICONTA,M,BETA))
          C = RO(ICON)*O
          D = DELTA(I,CF(ICONTA,M,AL))
          E = DELTA(I,CF(ICONTA,M,BETA))
          SOMA=SOMA + C * (A ** D) * (B ** E)
        ENDDO
      ENDDO
    ENDDO
  ENDDO

```

```

        ENDDO
        PS(I,J,M)=1.
        DO ALF=1,L
            PS(I,J,M)=PS(I,J,M)*PI(ALF,CF(ICONTA,M,ALF))/(PI(ALF,I)+
*           +PI(ALF,J))
        ENDDO

```

CALCULO DO QUI QUADRADO ESTIMADO.

```

        FSA(I,M,J)=NIJ(ICONTA)*SOMA*PS(I,J,M)
        W=((CF(I,M,F)-FSA(I,M,J))**2)/FSA(I,M,J))+W
        ENDDO
    ENDDO
ENDDO
DO I=1,T-1
    DO M=1,NC
        DO J=I+1,T
            WRITE(5,15)FSA(I,M,J),I,M,J
            FORMAT(/,3X,'FSA(I,M,J)=',F7.4,3X,'I=',I2,3X,'M=',I2,3X,
15          'J=',I2)
        ENDDO
    ENDDO
    ENDDO
WRITE(5,16)W
16  FORMAT(/,3X,'W=',F7.4)
    CLOSE(UNIT=5,DISPOSE='SAVE')
STOP
END

```

ESTE PROGRAMA CALCULA A ESTATISTICA DA RAZAO DA VEROSSI_
MILHANCA PARA TESTARMOS A ADEQUABILIDADE DE AJUSTE DO MODELO.

```
REAL CF(100),FSA(100)
INTEGER T,P
DATA T,P/3,3/
DATA (CF(I),I=1,24)/8,1,1,1,0.5,2,0.5,9,6,0.5,1,1,1,0.5,
*1,9,7,1,1,1,3,1,1,6/
DATA (FSA(I),I=1,24)/7.83,1.07,1.20,1.07,0.75,1.11,0.83,8.03,5.43
*,0.63,1.20,1.22,1.06,1.15,0.80,7.59,6.09,0.45,1.16,1.34,1.66,1.20,
*0.73,8.30/
OPEN(UNIT=5,FILE='RAZAO.DAT',STATUS='NEW')
RAZAODAVERO=0.
L=(2*P)*(T*(T-1)/2)
DO I=1,L
  Y=CF(I)/FSA(I)
  RAZAODAVERO=RAZAODAVERO+2*CF(I)*LOG(Y)
ENDDO
WRITE(5,*)RAZAODAVERO
CLOSE(UNIT=5,DISPOSE='SAVE')
STOP
END
```

REFERÊNCIAS

- BAHADUR, R.R. (1961). A representation of the joint distribution of responses to n dichotomous items. In Studies in Item Analysis and Prediction (Herbert Solomon, Ed.) Stanford University Press.
- BICKEL, P. & DOKSUM. (1977). Mathematical statistics: Basic and selected topics. Holden Day.
- BRADLEY, R.A. (1954a). The rank analysis of incomplete block designs II. Additional tables for the method of paired comparisons. Biometrika 41, 502-37.
- BRADLEY, R.A. (1954b). Incomplete block rank analysis: On the appropriateness of the model for a method of paired comparisons. Biometrics 10, 375-90.
- BRADLEY, R.A. (1976). Science, statistics, and paired comparisons. Biometrics 32, 1-213-32.
- BRADLEY, R.A. & TERRY, M.E. (1952a). The rank analysis of incomplete blocks designs I. The method of paired comparisons. Biometrika 39, 324-45.
- DAVIDSON, R.R. & BRADLEY, R.A. (1969). Multivariate paired comparisons: The extension of a univariate model and associate estimation and test procedures. Biometrika 56.81.95.
- DAVIDSON, R.R. & BRADLEY, (1970). Multivariate paired comparisons: the extension of a univariate paired comparisons: Some large sample result on estimation and test of equality of preference. In Nonparametric Techniques

in Statistical Inference, (M:L. Puri, ed.), Cambridge Univ. Press, 111-25.

DAVIDSON, R.R. and BRADLEY, R.A. (1971). A regression relationship for multivariate paired comparisons. *Biometrika* 58, 555-60.

DOREA, C.C.Y. (1983). Expected number of steps a random optimization method, *J. Optim. Theory App.*, 39, pp.165-171.

FORD, L.R., Jr. (1957). Solution of a ranking problem from binary comparisons. *Amer. Math. Monthly* 64(8), 28-23.

KULBACK, S. (1959). *Information Theory and Statistics*. New York: Wiley.

NAKAGAMI, S. (1961). An example of consumer's preference test: on the application of the method of paired comparisons. *Rep. Statist. Appl. Res.* 8, 165-71.

RASTRIGIN, L.A. (1963). The convergence of the random search method in the extremal control of many-parameter system. *Automation and Remote Control* 24, pp. 1337-42.

ROUSSAS, G.G. (1975). *A first course in mathematical statistics*. Reading, Addison Wesley.

STEYN, H.S. (1957). On regression properties of discrete systems of probability functions. *Proc.K. Ned. Akad. Wet.* A60, 119-27.

ZERMELO, E. (1929). Die Berechnung der Turnier-Ergebnisse als ein Maximumproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Z.* 29, 423-60.