

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS - UNICAMP
Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação - IMECC

ANÁLISE PARAMÉTRICA DE DADOS DE SOBREVIVÊNCIA PAREADOS

LUCIANA JIA LIN HSIEH

PROFA. DRA. CÍCÍLIA YUKO WADA
Orientadora

CAMPINAS - SÃO PAULO

1993

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

ANÁLISE PARAMÉTRICA DE DADOS DE SOBREVIVÊNCIA PAREADOS

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. *Luciana Jia Lin Hsieh* e aprovada pela Comissão Julgadora.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Estatística.

Campinas, 26 de novembro de 1993

Profa. Dra. *Cicília Yuko Wada*
Cicília Yuko Wada

Aos meus pais

Hsiang Jen Hsieh e Sheue Fang Lin Hsieh

AGRADECIMENTOS

À professora Cícília Yuko Wada, pela orientação e pelo apoio e incentivo nos momentos difíceis.

Aos professores Luís K. Hotta e Enrico L. Colosimo pela participação da Comissão Julgadora.

Ao professor Luiz K. Hotta pelas sugestões e esclarecimentos de várias dúvidas. À professora Aída Verdugo Lazo pela concessão do uso do conjunto de dados de PNAD-84 e úteis discussões. Ao professor Lúcio Tunes dos Santos pelo esclarecimento sobre o processo iterativo de Newton-Raphson.

Aos amigos do mestrado, pelo carinho e companheirismo que ajudaram a superar as inúmeras dificuldades.

Ao meu irmão Eduardo J. H. Hsieh, pelo constante apoio, compreensão e paciência.

Aos funcionários da biblioteca e da secretaria da Pós-graduação do IMECC.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e, ao Fundo de Apoio ao Ensino e à Pesquisa (FAEP/UNICAMP), pelo apoio financeiro.

Acima de tudo, agradeço a Deus pela orientação nesta caminhada tão árdua e difícil.

RESUMO

O uso de distribuições bivariadas tem um papel importante nos estudos de sobrevivência, principalmente nas áreas de Saúde e de Confiabilidade, onde os tempos em análise aparecem de forma pareada (X, Y) .

No presente trabalho apresentam-se as distribuições bivariadas exponenciais absolutamente contínuas de Block-Basu e de Sarkar. Estimação de parâmetros, usando o método de máxima verossimilhança através de processo iterativo Newton-Raphson, e testes das hipóteses de independência entre X e Y e de igualdade das distribuições marginais de X e Y são desenvolvidos. Análises de dados pareados com presença de censuras e covariáveis também são desenvolvidas.

Para cada metodologia apresentada, aplicações numéricas são feitas para vários conjuntos de dados gerados computacionalmente e um conjunto de dados reais.

ÍNDICE

CAPÍTULO I. INTRODUÇÃO		1
CAPÍTULO II. NOTAÇÃO E CONCEITOS BÁSICOS		
2.1	INTRODUÇÃO	5
2.2	CONCEITOS BÁSICOS DE DISTRIBUIÇÕES UNIVARIADAS DE FALHA	6
2.3	CONCEITOS BÁSICOS DE DISTRIBUIÇÕES BIVARIADAS DE FALHA	9
2.4	FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA PARA DISTRIBUIÇÕES UNIVARIAS E BIVARIADAS	22
2.5	ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA	24
	2.5.1 - PROPRIEDADES ASSINTÓTICAS DE EMV	25
	2.5.2 - MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA	27
2.6	TESTES ASSINTÓTICOS	29
2.7	ESTIMAÇÃO DA FUNÇÃO DE SOBREVIVÊNCIA	32
2.8	MODELOS DE REGRESSÃO	34
CAPÍTULO III - ANÁLISE DE DADOS PAREADOS USANDO A DISTRIBUIÇÃO DE BLOCK-BASU		
3.1	INTRODUÇÃO	37
3.2	DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA ABSOLUTAMENTE CONTÍNUA DE BLOCK-BASU	38
3.3	ESTIMAÇÃO E TESTES DE HIPÓTESES UTILIZANDO A DISTRIBUIÇÃO DE BLOCK-BASU SEGUNDO GROSS E LAM	42
	3.3.1 - TESTE DE IGUALDADE DAS DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS USANDO A DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA INDEPENDENTE	44

3.3.2	- TESTES DE IGUALDADE E DE INDEPENDÊNCIA DAS MARGINAIS USANDO A DISTRIBUIÇÃO DE BLOCK-BASU	45
3.3.3	- UM TESTE DE AJUSTE PARA O MODELO TEÓRICO	49
3.3.4	- REVISÃO DA APLICAÇÃO NUMÉRICA	50
3.4	ANÁLISE DE DADOS PAREADOS COMPLETOS	53
3.4.1	- ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS	53
3.4.2	- TESTE DE INDEPENDÊNCIA ENTRE X E Y	56
3.4.3	- TESTE DE IGUALDADE DAS DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS DE X E Y	59
3.5	ANÁLISE DE DADOS PAREADOS COM CENSURAS	62
3.5.1	- ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS	63
3.5.2	- TESTE DE INDEPENDÊNCIA ENTRE X E Y	65
3.5.3	- TESTE DE IGUALDADE DAS DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS DE X E Y	70
3.6	EXEMPLO NUMÉRICO	76

CAPITULO IV - ANÁLISE DE DADOS PAREADOS USANDO A DISTRIBUIÇÃO DE SARKAR

4.1	INTRODUÇÃO	83
4.2	DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA ABSOLUTAMENTE CONTÍNUA DE SARKAR	84
4.3	ANÁLISE DE DADOS PAREADOS COMPLETOS	88
4.3.1	- ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS	88
4.3.2	- TESTE DE INDEPENDÊNCIA ENTRE X E Y	91
4.3.3	- TESTE DE IGUALDADE DAS DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS DE X E Y	93
4.4	ANÁLISE DE DADOS PAREADOS COM CENSURAS	96
4.4.1	- ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS	96
4.4.2	- TESTE DE INDEPENDÊNCIA ENTRE X E Y	99
4.4.3	- TESTE DE IGUALDADE DAS DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS DE X E Y	101
4.5	EXEMPLO NUMÉRICO	103

CAPÍTULO V - ANÁLISE DE DADOS PAREADOS COM PRESENÇA DE COVARIÁVEIS

5.1	INTRODUÇÃO	107
5.2	MODELO DE CLAYTON E OAKES	108
5.3	MODELO EXPONENCIAL BIVARIADO INDEPENDENTE	111
5.4	MODELO EXPONENCIAL BIVARIADO DE BLOCK-BASU	116
5.5	MODELO EXPONENCIAL BIVARIADO DE SARKAR	121

CAPÍTULO VI - ILUSTRAÇÃO NUMÉRICA

6.1	INTRODUÇÃO	128
6.2	ANÁLISE DESCRITIVA	129
6.3	ADEQUAÇÃO DOS MODELOS	131
6.4	ANÁLISE DOS DADOS USANDO A DISTRIBUIÇÃO DE BLOCK-BASU	132
6.5	ANÁLISE DOS DADOS USANDO A DISTRIBUIÇÃO DE SARKAR	135
6.6	ANÁLISE COM PRESEÇA DE COVARIÁVEIS	136
6.7	CONCLUSÕES	141

CONCLUSÕES E FUTURAS PESQUISAS	143
---------------------------------------	------------

APÊNDICE 1. DERIVADAS UTILIZADAS NO CAPÍTULO III	145
---------------------------------------------------------	------------

APÊNDICE 2. DERIVADAS UTILIZADAS NO CAPÍTULO IV	148
--------------------------------------------------------	------------

APÊNDICE 3. CONJUNTO DE DADOS UTILIZADOS	161
-------------------------------------------------	------------

APÊNDICE 4. PROGRAMAS COMPUTACIONAIS	167
---------------------------------------------	------------

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	202
-----------------------------------	------------

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Trabalhos sobre análise estatística de dados de sobrevivência pareados tem surgido recentemente na literatura especializada. Trata-se de um tema de grande interesse, principalmente nas áreas de Saúde, Demografia e Confiabilidade. Ela se aplica, por exemplo, em situações onde se estudam dois tempos de recorrência de uma doença no mesmo paciente ou tempos de vida útil de dois componentes de um sistema eletrônico.

Um dos aspectos que tem sido investigado em Sobrevivência é o ajuste de modelos paramétricos a dados pareados, isto é, quando existem dois tempos X e Y associados ao mesmo indivíduo. No caso univariado, a distribuição exponencial tem sido muito utilizada em razão das propriedades associadas a esta distribuição. Pode-se citar, entre elas, uma propriedade importante, a da perda de memória (PPM), isto é, a probabilidade de um indivíduo (componente) "falhar" em um determinado intervalo de tempo independe do tempo que o indivíduo já sobreviveu. Em situações de dados pareados, modelos exponenciais bivariados são geralmente considerados. A derivação de um modelo exponencial depende do comportamento do sistema em questão. Por esta razão, vários modelos têm sido propostos para descrever dados pareados. Entre eles, o mais simples é o modelo exponencial bivariado independente, que pressupõe a independência entre X e Y . Contudo, nem sempre é razoável assumir este pressuposto em situações reais. Além deste, pode-se citar as distribuições exponenciais bivariadas de

Gumbel (1960), Freund (1961), Marshall e Olkin (1967), Downton (1970), Hawkes (1971), Block e Basu (1974), Clayton (1978), Oakes (1982), Raftery (1984) e Sarkar (1987).

Em aplicações onde a chance de X e Y falhar simultaneamente é desprezível, a propriedade $P(X = Y) = 0$ deve ser considerada no modelo. Nessas situações, as distribuições exponenciais bivariadas absolutamente contínuas de Block-Basu e Sarkar são adequadas, em princípio. A distribuição de Block-Basu tem a propriedade da perda de memória (PPM), porém não possui marginais exponenciais, em contraste com a distribuição de Sarkar que não possui a PPM mas sim, marginais exponenciais.

A distribuição de Block-Basu foi utilizada por Gross e Lam (1981) para descrever dados pareados (x, y) ; a estimação e testes de hipóteses foram desenvolvidos por eles baseados nos parâmetros da distribuição da variável $T = Y/X$. O estudo de Gross e Lam serviu de motivação para esta dissertação.

Um segundo aspecto da análise de dados de sobrevivência pareados é a incorporação de observações censuradas, que são dados não completos, originados ou do planejamento (censuras Tipo I ou II) ou aleatórios (perdidos de observação).

Considerando a distribuição paramétrica associada a tempos de vida bivariados, um terceiro e último aspecto da análise é estudar o efeito de alguns fatores, denominados *covariáveis* ou *variáveis concomitantes*, nos tempos. Por exemplo, num estudo de recorrência de uma certa doença, fatores como idade, sexo, estágio da doença etc. podem ser considerados como covariáveis.

Os modelos de tempos univariados com a incorporação de covariáveis são os de regressão paramétrica (Feigl e Zelen (1965), Glasser (1967), Cox e Snell (1968), Prentice (1973), Lawless (1976) etc.). A extensão com a incorporação de covariáveis no modelo exponencial bivariado foi recentemente abordada por Huster et al. (1989), usando a distribuição de Clayton (1978). Basu e Ebrahimi (1987) utilizaram o modelo de teste acelerado considerando a distribuição de Block-Basu num contexto de sistema de dois componentes.

Considerando os aspectos em análise de dados de sobrevivência pareados citados acima, o presente trabalho é elaborado com os seguintes objetivos principais:

- a - desenvolver a análise paramétrica de dados pareados (completos e censurados) considerando as distribuições de Block-Basu e Sarkar; encontrar os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros e realizar testes assintóticos para independência e igualdade das distribuições marginais;
- b - desenvolver modelos para a análise de dados bivariados considerando a distribuição exponencial independente, a de Block-Basu e a de Sarkar com a incorporação de covariáveis e,
- c - aplicar os modelos desenvolvidos em conjuntos de dados gerados e reais.

No Capítulo II são apresentadas notações e alguns conceitos básicos utilizados em Análise de Sobrevivência nos contextos univariado e bivariado. As propriedades do estimador de máxima verossimilhança e testes da razão de verossimilhança, de Rao (score) e de Wald também são revistas. É feito um sumário dos modelos exponenciais bivariados citados acima e, finalmente, são apresentados alguns modelos de regressão utilizados em análise de sobrevivência.

As distribuições exponenciais bivariadas absolutamente contínuas de Block-Basu e Sarkar são estudadas nos Capítulo III e Capítulo IV, respectivamente. A estimação dos parâmetros é desenvolvida usando o método de máxima verossimilhança e testes assintóticos são feitos para verificar a independência e a igualdade das distribuições marginais. São considerados casos de dados completos e censurados para a análise. Para a ilustração dos resultados teóricos, exemplos numéricos são aplicados usando dados gerados, assumindo a distribuição de Block-Basu como a distribuição básica conjunta no Capítulo III e a distribuição de Sarkar no Capítulo IV.

No Capítulo V é apresentada a análise de dados pareados com a inclusão de covariáveis usando o modelo de regressão log-linear. O estudo de Huster et al. (1989) é também revisto neste capítulo. São consideradas as distribuições exponenciais bivariadas de Block-Basu e de Sarkar e da distribuição exponencial bivariada independente como

distribuições básicas conjuntas dos dados.

No Capítulo VI, os resultados teóricos obtidos nos capítulos anteriores são aplicados a um conjunto de dados extraídos da PNAD-84 (Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios) que se constitui nas principais fontes de informações demográficas do Brasil, produzidas pela Fundação IBGE.

Finalmente, programas computacionais são desenvolvidos, usando os pacotes estatísticos SOC e SAS, para realizar os cálculos da estimação e testes de hipóteses considerando os modelos citados acima.

CAPÍTULO II

NOTAÇÃO E CONCEITOS BÁSICOS

2.1. INTRODUÇÃO

A análise estatística dos tempos decorridos desde um início bem definido até a ocorrência de um certo evento de interesse é denominada *Análise de Sobrevivência*. A *Análise de Sobrevivência* tem evoluído como uma área da Estatística de grande interesse aplicada em Engenharia, Demografia, Medicina e Ciências Biológicas nos últimos anos.

Os modelos e metodologias desenvolvidos em *Análise de Sobrevivência* podem ser classificados em três grupos: paramétricos, não-paramétricos e semi-paramétricos. Os dados de sobrevivência são chamados de *tempo de vida*, *tempo de falha* ou *tempo de sobrevivência*, que podem aparecer de forma univariada ou multivariada. No presente trabalho, são considerados modelos paramétricos para a análise dos tempos de falha bivariados. Neste capítulo, alguns conceitos básicos utilizados em análise de dados de sobrevivência univariados são apresentados e, posteriormente, estendidos para análise de dados bivariados.

2.2. CONCEITOS BÁSICOS DE DISTRIBUIÇÕES UNIVARIADAS DE FALHA

A variável (absolutamente) contínua e não negativa T , que representa o tempo de falha de um certo evento, é geralmente descrita ou caracterizada por três funções : (1) a função densidade de probabilidade, (2) a função de sobrevivência e, (3) a função risco. Essas três funções são matematicamente equivalentes - se uma delas é dada, as outras duas podem ser derivadas a partir desta. Definem-se as funções:

(1) Função Densidade de Probabilidade (f.d.p.) $f(t)$. Também é chamada de função densidade. A $f_T(t)$ é definida por

$$f_T(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (2.1)$$

A $f_T(t)$ tem duas propriedades importantes:

1. $f_T(t)$ é uma função não negativa:

$$\begin{aligned} f_T(t) &\geq 0 && p/ \ t \geq 0 \\ &= 0 && p/ \ t < 0. \end{aligned}$$

2. a área total entre a curva da função densidade e o eixo t é igual a 1, isto é,

$$\int_0^{\infty} f_T(t) dt = 1.$$

■

(2) Função de Sobrevivência $S(t)$. Esta função é definida como a probabilidade de um indivíduo sobreviver a um tempo t :

$$S_T(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f_T(u) du. \quad (2.2)$$

$S_T(t)$ é uma função não-decrescente com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} S_T(t) &= 1 & p/ t = 0, \text{ e} \\ S_T(t) &\rightarrow 0 & \text{quando } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Observa-se que a função de sobrevivência pode ser escrita como $1 - P(T \leq t) = 1 - F_T(t)$, onde $F_T(t)$ é denominada função de distribuição acumulada ou, simplesmente, função de distribuição.

(3) Função Risco $\lambda(t)$. A função risco é definida a taxa de falha instantânea em um tempo t , dado que o indivíduo tenha sobrevivido a t , isto é,

$$\lambda_T(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \quad (2.3)$$

Em particular, $\lambda_T(t) \cdot \Delta t$ é a probabilidade aproximada de falha em $[t, t + \Delta t]$, dado que o indivíduo sobreviveu a t . A função risco pode ser crescente, decrescente, constante, ou assumindo alguma outra forma mais complicada; ela pode ser definida em termos da função densidade e da função de sobrevivência da seguinte forma:

$$\lambda_T(t) = \lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = - \frac{d \log S(t)}{dt}, \text{ e} \quad (2.4)$$

$$\Lambda_T(t) = \int_0^t \lambda(u) du = -\log S(t) \quad (2.5)$$

é chamada de função risco acumulada.

Para ilustrar os conceitos acima, são consideradas as distribuições exponencial e Weibull:

(1) $T \sim \text{Exp}(\theta)$ Seja T uma variável aleatória que possui distribuição exponencial com parâmetro θ . Então a função

densidade, a função de sobrevivência e a função risco são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} f(t) &= \theta \exp(-\theta t); \\ S(t) &= \exp(-\theta t); \\ \lambda(t) &= \theta; \quad t \geq 0 \text{ e } \theta > 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

(2) $X \sim \text{Weibull}(\theta, \alpha)$ Seja X uma variável aleatória que possui distribuição Weibull com parâmetros θ e α . Então tem as funções densidade, de sobrevivência e risco dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} f(x) &= \theta \alpha (\theta x)^{\alpha-1} \exp[-(\theta x)^\alpha]; \\ S(x) &= \exp[-(\theta x)^\alpha]; \\ \lambda(x) &= \theta \alpha (\theta x)^{\alpha-1}; \quad x \geq 0, \theta > 0 \text{ e } \alpha > 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Considerando a transformação $\gamma = \theta^\alpha$, as expressões acima podem ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= \gamma \alpha (x)^\alpha \exp(-\gamma x^\alpha); \\ S(x) &= \exp(-\gamma x^\alpha); \\ \lambda(x) &= \gamma \alpha x^{\alpha-1}; \quad x \geq 0, \gamma > 0 \text{ e } \alpha > 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

O parâmetro α é chamado de parâmetro de forma e γ de parâmetro de escala.

Dados de tempos de falha geralmente possuem uma característica conhecida como censura. Uma observação é dita censurada à direita (esquerda) em L quando não se sabe o seu tempo exato de falha e sabe-se apenas que ele é maior (menor) que L . Nesta dissertação será considerada apenas censura à direita, por ser mais freqüente a sua ocorrência em situações práticas.

Censuras podem ser classificadas em três tipos: Tipo I, Tipo II e censuras aleatórias. Quando o período de tempo do experimento é pré-determinado, o tempo exato de falha de um indivíduo só pode ser observado se a falha acontecer dentro deste período. Neste caso,

indivíduos que sobreviveram até o término do experimento são considerados censurados do Tipo I. Suponha-se que em uma amostra de tamanho n , apenas os r menores tempos de falha são observados, onde o valor r é pré-determinado, então as outras $n-r$ observações são consideradas censuradas do Tipo II. Censuras aleatórias são mais freqüentes de acontecer. Em ensaios clínicos, por exemplo, os pacientes podem entrar em estudo em tempos diferentes e censuras aleatórias podem ocorrer das seguintes formas: pacientes perdidos de observação, retirados do experimento ou ainda não falharam quando terminou o experimento.

2.3. CONCEITOS BÁSICOS DE DISTRIBUIÇÕES BIVARIADAS DE FALHA

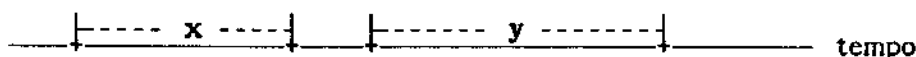
Muitas vezes, os tempos de falha são observados em pares, isto é, num mesmo indivíduo da população são observados dois tempos de falha de uma certa característica. Por exemplo, durações de dois casamentos de uma mesma pessoa; dois tempos de recorrência de uma doença num mesmo paciente; tempo que leva para a perda de acuidade visual dos dois olhos de um paciente com catarata etc.

Dados pareados podem ser classificados, em geral, no sentido do modo de observação, em dois tipos:

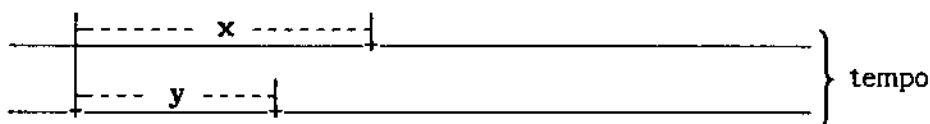
- (1) (x_1, y_1) observações longitudinais: onde o tempo de falha y_1 só pode ser observado depois da falha de x_1 . Portanto, a censura só pode ocorrer em y_1 , pois se x_1 for censurado, não será possível observar o valor de y_1 .
- (2) (x_1, y_1) observações simultâneas: onde os tempos de falha x_1 e y_1 são observados simultaneamente com o mesmo início. Neste caso, a censura pode ocorrer tanto em x_1 quanto em y_1 .

As definições acima podem ser ilustradas da seguinte forma:

observação pareada longitudinal:



observação pareada simultânea:



Seja (X, Y) uma variável bivariada contínua, não negativa, que representa os tempos de falha de um evento. As três funções que caracterizam (X, Y) são definidas da seguinte forma:

(1) Função Densidade de Probabilidade (f.d.p) Conjunta $f(x,y)$:

$$f_{XY}(x,y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x, y \leq Y \leq y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}, \quad (2.9)$$

tal que
$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_{XY}(x,y) dy dx = 1.$$

As densidades marginais de X e de Y são respectivamente:

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} f_{XY}(x,y) dy \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \int_0^{\infty} f_{XY}(x,y) dx. \quad (2.10)$$

■

(2) Função de Sobrevida Conjunta $S(x,y)$:

$$S_{XY}(x,y) = P(X > x, Y > y) = \int_x^{\infty} \int_y^{\infty} f(u,v) dv du, \quad (2.11)$$

p/ $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Portanto, a função de densidade conjunta de (X,Y) é relacionada com a função de sobrevivência por:

$$f_{xy}(x,y) = \partial^2 S_{xy}(x,y)/\partial x \partial y. \quad (2.12)$$

OBSERVAÇÃO. Na página 478 do livro de Lawless (1982), a expressão

$$f(t_1, \dots, t_k) = -\partial^k S(t_1, \dots, t_k)/\partial t_1 \dots \partial t_k$$

deveria ser escrita como

$$f(t_1, \dots, t_k) = (-1)^k \partial^k S(t_1, \dots, t_k)/\partial t_1 \dots \partial t_k. \quad \blacksquare$$

As funções de sobrevivência marginais de X e Y são dadas por:

$$S_X(x) = S_{XY}(x,0) = P(X > x, Y > 0) = \int_x^\infty \int_0^\infty f_{XY}(u,v) \, dv \, du, \quad (2.13)$$

$$S_Y(y) = S_{XY}(0,y) = P(X > 0, Y > y) = \int_y^\infty \int_0^\infty f_{XY}(u,v) \, du \, dv, \quad (2.14)$$

Observa-se que a função de sobrevivência conjunta pode ser escrita como $1 - P(X \leq x) - P(Y \leq y) + P(X \leq x, Y \leq y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{XY}(x,y)$, onde $F_X(x)$ e $F_Y(y)$ são funções de distribuições de X e Y, respectivamente e, $F_{XY}(x,y)$ a função de distribuição acumulada conjunta de (X,Y). ■

(3) Taxa de Falha Bivariada $\lambda(x,y)$:

A função risco bivariada ou a taxa de falha bivariada foi definida por Basu (1971) da seguinte forma:

$$\lambda(x,y) = \frac{f(x,y)}{P(X > x, Y > y)} = \frac{f(x,y)}{S(x,y)}, \quad (2.15)$$

onde $f(x,y)$ é uma função densidade conjunta absolutamente contínua. Note que no caso de independência, a $\lambda(x,y)$ pode ser escrita como:

$$\lambda(x,y) = \frac{f(x) \cdot f(y)}{P(X > x) \cdot P(Y > y)} = \frac{f(x) \cdot f(y)}{S(x) \cdot S(y)} = \lambda(x) \cdot \lambda(y), \quad (2.16)$$

onde $\lambda(x)$ e $\lambda(y)$ são as taxas de falhas marginais univariadas correspondentes.

Cox (1972) definiu a taxa de falha marginal de X (Y) como a taxa de X (Y) falhar no intervalo $(t, t+\Delta t)$, dado que X e Y sobreviveram a t, isto é:

$$\lambda_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq X \leq t+\Delta t \mid X \geq t, Y \geq t)}{\Delta t}, \text{ e} \quad (2.17a)$$

$$\lambda_y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq Y \leq t+\Delta t \mid X \geq t, Y \geq t)}{\Delta t}. \quad (2.17b)$$

e a taxa de falha condicional de X dado Y como a taxa de X falhar no intervalo $(x, x+\Delta x)$ dado que Y falhou em y e X sobreviveu a x, $x > y$, isto é:

$$\lambda_{xy}(x|y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x+\Delta x \mid X \geq x, Y=y)}{\Delta x} \quad p/ \ x > y, \quad (2.18a)$$

com a expressão similar para $\lambda_{xy}(y|x)$:

$$\lambda_{yx}(y|x) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y \leq Y \leq y+\Delta y \mid X=x, Y \geq y)}{\Delta y}, \quad x < y. \quad (2.18b)$$

As taxas acima também podem ser escritas em termos da função de sobrevivência conjunta $S(x,y)$:

$$\lambda_x(t) = \left. \frac{-\partial S(x,y)/\partial x}{S(x,y)} \right|_{x=y=t}. \quad (2.19)$$

$$\lambda_{xy}(x|y) = - \frac{\partial^2 S(x,y)/\partial x \partial y}{\partial S(x,y)/\partial y} = - \frac{f(x,y)}{\partial S(x,y)/\partial y}, \quad x > y. \quad (2.20)$$

com expressões similares para $\lambda_y(t)$ e $\lambda_{yx}(y|x)$.

A função densidade conjunta de (X,Y) , a $f(x,y)$, pode ser expressa completamente pelas funções (2.17) e (2.18) acima:

$$\lambda_y(y)\lambda_{xy}(x|y)\exp\left(-\int_0^y [\lambda_x(u) + \lambda_y(u)] du - \int_y^x \lambda_{xy}(u|y) du\right), \quad x > y; \quad (2.21a)$$

$$\lambda_x(x)\lambda_{yx}(y|x)\exp\left(-\int_0^x [\lambda_x(u) + \lambda_y(u)] du - \int_x^y \lambda_{yx}(u|x) du\right), \quad x < y. \quad (2.21b)$$

Isto pode ser visto como um processo pontual. Por exemplo, com $x > y$, a probabilidade de não haver falha em $[0,y)$ e o evento $Y \in [y, y+\Delta y)$, é dada por

$$\lambda_y(y)\Delta y \exp\left(-\int_0^y [\lambda_x(u) + \lambda_y(u)] du\right). \quad (2.22)$$

Condicionando a isso, a probabilidade de não haver falhas em $[y,x)$ e o evento $X \in [x, x+\Delta x)$, é dada por

$$\lambda_{xy}(x|y)\Delta x \exp\left(-\int_y^x \lambda_{xy}(u|y) du\right). \quad (2.23)$$

Multiplicando essas probabilidades, encontra-se a (2.21a).

Porém observa-se que as expressões acima foram definidas considerando o caso de observações simultâneas. Para dados observados longitudinalmente, define-se a taxa de falha condicional de Y dado que X falhou em x da seguinte forma:

$$\lambda_{yx}(y|x) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y \leq Y \leq y+\Delta y | X=x, Y \geq y)}{\Delta y}. \quad (2.18c)$$

Neste caso, o valor de y não tem que ser necessariamente maior do que x como em (2.18b). A taxa de falha condicional de X dado que Y falhou em y não será definida, já que a observação de Y só é feita após a falha de X . ■

A seguir, são apresentadas algumas distribuições exponenciais bivariadas mais conhecidas:

(1) DISTRIBUIÇÕES EXPONENCIAIS BIVARIADAS DE GUMBEL

(1.1) PRIMEIRA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA DE GUMBEL

A primeira distribuição exponencial bivariada proposta por Gumbel (1960) tem a função de distribuição acumulada dada por:

$$F(x,y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y+\delta xy)} \quad p/ \quad x, y \geq 0 \quad e \quad 0 \leq \delta \leq 1. \quad (2.24)$$

Observa-se que esta distribuição possui um único parâmetro δ . As funções de distribuição marginais $F(x)$ e $F(y)$ dadas por:

$$F(x) = 1 - e^{-x}, \quad F(y) = 1 - e^{-y}. \quad (2.25)$$

A densidade é dada por:

$$f(x,y) = e^{-(x+y+\delta xy)} \cdot [(1+\delta x) (1+\delta y) - \delta]. \quad (2.26)$$

Observa-se que X e Y são independentes e exponencialmente distribuídas com parâmetro um se $\delta = 0$.

A função de sobrevivência é dada por:

$$S(x,y) = 1 - F(x) - F(y) + F(x,y) = e^{-(x+y+\delta xy)}, \quad (2.27)$$

e as taxas de risco definidas em (2.16), (2.17a) e (2.18a) são, respectivamente:

$$\lambda(x,y) = (1+\delta x) (1+\delta y) - \delta; \quad (2.28)$$

$$\lambda_x(t) = 1+\delta t; \quad (2.29)$$

$$\lambda_{xy}(x|y) = \frac{(1+\delta x) (1+\delta y) - \delta}{(1+\delta x)}. \quad (2.30)$$

(1.2) SEGUNDA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA DE GUMBEL

A segunda distribuição derivada por Gumbel (1960) tem a seguinte função de distribuição conjunta bivariada:

$$F(x,y) = (1-e^{-x}) (1-e^{-y}) (1+ \alpha e^{-x-y}), \quad x,y>0 \text{ e } -1 \leq \alpha \leq 1. \quad (2.31)$$

Novamente, só há um único parâmetro α nesta distribuição. As funções de distribuição marginais $F(x)$ e $F(y)$ dadas por:

$$F(x) = 1 - e^{-x}, \quad \text{e} \quad F(y) = 1 - e^{-y}. \quad (2.32)$$

A função densidade é dada por:

$$f(x,y) = e^{-x-y} [1 + \alpha(2e^{-x}-1) (2e^{-y}-1)]. \quad (2.33)$$

Observa-se que X e Y são independentes e exponencialmente distribuídas com parâmetro um quando $\alpha = 0$.

A função de sobrevivência é expressa por:

$$\begin{aligned} S(x,y) &= 1 - F(x) - F(y) + F(x,y) = \\ &= e^{-x-y} [1 + \alpha(1-e^{-x}) (1-e^{-y})]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

As taxas de risco (2. 16), (2. 17a) e (2. 18a) são, respectivamente:

$$\lambda(x,y) = \frac{1 + \alpha(1-2e^{-y}) (1-2e^{-x})}{1 + \alpha(1-e^{-y}) (1-e^{-x})}; \quad (2.35)$$

$$\lambda_x(t) = \frac{1 + \alpha(1-e^{-t}) (1-2e^{-t})}{1 + \alpha(1-e^{-t}) (1-e^{-t})}; \quad (2.36)$$

$$\lambda_{xy}(x|y) = \frac{1 + \alpha(1-2e^{-y}) (1-2e^{-x})}{1 + \alpha(1-2e^{-y}) (1-e^{-x})}. \quad (2.37)$$

(1.3) TERCEIRA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA DE GUMBEL

A terceira distribuição proposta por Gumbel (1960) tem a função de distribuição conjunta dada por:

$$F(x,y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + P(x,y), \quad (2.38)$$

onde $P(x,y) = \exp[-(x^m + y^m)^{1/m}]$, $m \geq 1$. Quando $m = 1$, tem-se independência entre X e Y.

As funções de distribuição marginais são:

$$F(x) = 1 - e^{-x}, \text{ e } F(y) = 1 - e^{-y}. \quad (2.39)$$

A função densidade é dada por:

$$f(x,y) = P(x,y)(x^m + y^m)^{(1/m-2)} x^{m-1} y^{m-1} [(x^m + y^m)^{1/m} + m - 1]. \quad (2.40)$$

A função de sobrevivência é dada por:

$$S(x,y) = P(x,y), \quad (2.41)$$

e as taxas de risco definidas em (2.16), (2.17a) e (2.18a) são dadas, respectivamente, por:

$$\lambda(x,y) = (x^m + y^m)^{(1/m-2)} x^{m-1} y^{m-1} [(x^m + y^m)^{1/m} + m - 1]; \quad (2.42)$$

$$\lambda_x(t) = t^{m-1} (2t^m)^{1/m-1} = 2^{1/m-1}; \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{xy}(x|y) &= x^{m-1} (x^m + y^m)^{-1} [(x^m + y^m)^{1/m} + m - 1] \\ &= x^{m-1} (x^m + y^m)^{1/m-1} + x^{m-1} (x^m + y^m)^{-1(m-1)}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

(2) DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA DE FREUND

Freund (1961) apresentou uma distribuição exponencial bivariada que é indicada, em particular, para teste de vida de sistemas com dois componentes, onde os sistemas podem continuar funcionando mesmo depois que um dos seus componentes tenha falhado, isto é, sistema em paralelo.

A função densidade conjunta é dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \alpha\beta' \exp(-\beta'y - (\alpha+\beta-\beta')x), & 0 < x < y; \\ \beta\alpha' \exp(-\alpha'x - (\alpha+\beta-\alpha')y), & 0 < y < x. \end{cases} \quad (2.45)$$

onde $\alpha, \beta, \alpha', \beta' > 0$.

A independência entre X e Y ocorre quando $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$. Neste caso X e Y são exponencialmente distribuídas com parâmetros α e β , respectivamente.

As principais diferenças entre este modelo e os de Gumbel (1960) é que este modelo tem 4 parâmetros enquanto que os de Gumbel têm somente um e as distribuições marginais do modelo de Freund, em geral, não são exponenciais:

$$f(x) = \frac{(\alpha - \alpha')(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta - \alpha'} e^{-(\alpha + \beta)x} + \frac{\alpha' \beta e^{-\alpha'x}}{\alpha + \beta - \alpha'}, \quad (2.46)$$

com $\alpha + \beta - \alpha' \neq 0$, e

$$f(y) = \frac{(\beta - \beta') (\alpha + \beta) e^{-(\alpha + \beta)y}}{\alpha + \beta - \beta'} + \frac{\alpha \beta' e^{-\beta' y}}{\alpha + \beta - \beta'}, \quad (2.47)$$

com $\alpha + \beta - \beta' \neq 0$.

A função de sobrevivência conjunta pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \int_y^\infty \int_x^\infty f(x, y) dx dy = \int_y^\infty \int_x^\infty \alpha \beta' e^{-\beta' y} e^{-(\alpha + \beta - \beta')x} dx dy \\ &= -\alpha \beta' / (\alpha + \beta - \beta') \int_y^\infty e^{-\beta' y} \left(e^{-(\alpha + \beta - \beta')x} \right) \Big|_x^y dy \\ &= -\alpha \beta' / (\alpha + \beta - \beta') \int_y^\infty e^{-\beta' y} \left(e^{-(\alpha + \beta - \beta')y} - e^{-(\alpha + \beta - \beta')x} \right) dy \\ &= \alpha (\alpha + \beta - \beta')^{-1} e^{-(\alpha + \beta - \beta')x - \beta' y} \\ &\quad - \alpha \beta' [(\alpha + \beta - \beta') (\alpha + \beta)]^{-1} e^{-(\alpha + \beta)y} \\ &= \alpha k_a^{-1} e^{(-k_a x - \beta' y)} - \alpha \beta' (k_a \cdot k)^{-1} e^{(-ky)} \quad \text{se } 0 < x < y, \end{aligned}$$

$$\text{onde } k = \alpha + \beta \quad \text{e} \quad k_a = \alpha + \beta - \beta'. \quad (2.48)$$

Analogamente,

$$S(x, y) = \beta k_b^{-1} e^{(-\alpha' x - k_b y)} - \beta \alpha' (k_b \cdot k)^{-1} e^{(-kx)} \quad \text{se } 0 < y < x,$$

$$\text{onde } k_b = \alpha + \beta - \alpha'. \quad (2.49)$$

As taxas de risco definidas em (2.16), (2.17a) e (2.18a) são expressas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \lambda(x, y) &= \left\{ (\beta' k_a)^{-1} - (k_a \cdot k)^{-1} e^{(\alpha' - k)(y - x)} \right\}^{-1} \quad \text{se } 0 < x < y, \\ &= \left\{ (\alpha' k_b)^{-1} - (k_b \cdot k)^{-1} e^{(\alpha' - k)(x - y)} \right\}^{-1} \quad \text{se } 0 < y < x; \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}\lambda_X(t) &= (-k_a^{-1} + \beta'(k_a \cdot k)^{-1})^{-1} & \text{se } 0 < x < y, \\ &= \alpha' (k_b - k) (k - \alpha')^{-1} & \text{se } 0 < y < x;\end{aligned}\quad (2.51)$$

$$\begin{aligned}\lambda_{XY}(x|y) &= \left\{ -k_a^{-1} e^{-k_a(y-x)} \right\}^{-1} & \text{se } 0 < x < y, \\ &= \alpha' & \text{se } 0 < y < x.\end{aligned}\quad (2.52)$$

(3) DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA DE MARSHALL E OLKIN

Marshall e Olkin (1967) introduziram uma importante versão de distribuição exponencial bivariada, denotada como a distribuição BVE (Bivariate Exponential), com a função de sobrevivência conjunta dada por:

$$S(x,y) = \exp(-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_3 \max(x,y)), \quad x,y > 0 \quad (2.53)$$

Esta distribuição possui as marginais exponenciais com parâmetros $\lambda_1 + \lambda_{12}$ e $\lambda_2 + \lambda_{12}$. Além disso, ela conserva a propriedade da perda de memória da distribuição exponencial univariada, isto é, $S(t_1+x, t_1+y) = S(x,y) \cdot S(t_1, t_1)$.

O modelo de Marshall e Olkin (1967) foi motivado por dois resultados em Confiabilidade que estão baseados em modelos nos quais um sistema de dois componentes sobrevive ou falha, em função da ocorrência de choques para cada um ou para os dois componentes. Esses resultados são apresentados a seguir.

(3.1) MODELO DE CHOQUE FATAL

Considere-se um sistema de dois componentes e suponha-se que os componentes falham depois de receber um choque que é sempre fatal, e os processos de Poisson independentes $Z_1(t, \lambda_1)$, $Z_2(t, \lambda_2)$ e $Z_3(t, \lambda_3)$ governem a ocorrência de choques. Eventos no processo $Z_1(t, \lambda_1)$ são choques para o componente 1, eventos no processo $Z_2(t, \lambda_2)$ são choques para o componente 2, e eventos no processo $Z_3(t, \lambda_3)$ são choques para

os dois componentes simultaneamente. Daí, se X e Y denotam a vida do primeiro e do segundo componente, tem-se:

$$\begin{aligned} S(x,y) &= P(Z_1(x,\lambda_1)=0, Z_2(y,\lambda_2)=0, Z_3(\max(x,y),\lambda_3)=0) \\ &= \exp(-\lambda_1 x -\lambda_2 y -\lambda_3 \max(x,y)). \end{aligned} \quad (2.54)$$

(3.2) MODELO DE CHOQUES NÃO FATAIS

Suponha-se que um sistema de dois componentes e três processos de Poisson independentes $Z_1(t,\delta_1)$, $Z_2(t,\delta_2)$, $Z_3(t,\delta_3)$ governando a ocorrência de choques que não precisam ser fatais.

Descreva-se o estado do sistema pelos pares ordenados $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, onde "1" indica que um componente está funcionando e "0" indica que não está funcionando.

Suponha-se que eventos no processo $Z_1(t,\delta_1)$ são choques no primeiro componente que causam uma transição de $(1,1)$ até $(0,1)$ com probabilidade p_1 e de $(1,1)$ até $(1,1)$ com probabilidade $(1-p_1)$. Similarmente, eventos no processo $Z_2(t,\delta_2)$ são transições de $(1,1)$ até $(1,0)$ ou $(1,1)$ com probabilidade p_2 e $(1-p_2)$, respectivamente. Eventos no processo $Z_3(t,\delta_3)$ são choques nos dois componentes que causam uma transição do estado $(1,1)$ até os estados $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ com probabilidades p_{00} , p_{01} , p_{10} , p_{11} respectivamente. Além disso, assume-se que cada choque em um componente representa uma chance independente de falha.

Se X e Y são os tempos de vida do primeiro e do segundo componente, respectivamente, e como $Z_1(t,\delta_1)$, $Z_2(t,\delta_2)$, $Z_3(t,\delta_3)$ são independentes e têm incrementos independentes, tem-se para $y \geq x \geq 0$:

$$\begin{aligned} S(x,y) = P(X > x, Y > y) &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta_1 x} \frac{(\delta_1 x)^k}{k!} (1-p_1)^k \right\} \cdot \\ &\cdot \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta_1 x} \frac{(\delta_1 x)^k}{k!} (1-p_1)^k \right\} . \end{aligned}$$

$$\cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[e^{-\delta_2 y} \frac{(\delta_2 y)^l}{l!} (1-p_2)^l \right] \cdot \left[e^{-\delta_3 (y-x)} \frac{[\delta_3 (y-x)]^n}{n!} (p_{11} + p_{01})^n \right] \right\}$$

$$S(x,y) = \exp \left(-(\delta_1 p_1 + \delta_3 p_{01})x - [\delta_2 p_2 + \delta_3 (1 - p_{11} - p_{01})]y \right) \quad (2.55)$$

Por simetria, para $x \geq y \geq 0$ tem-se:

$$S(x,y) = \exp \left(-[\delta_1 p_1 + \delta_3 (1 - p_{11} - p_{10})]x - (\delta_2 p_2 + \delta_3 p_{10})y \right) \quad (2.56)$$

Conseqüentemente, combinando (2.55) e (2.56), obtém-se:

$$S(x,y) = \exp \left(-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_3 \max(x,y) \right), \quad (2.57)$$

onde $\lambda_1 = \delta_1 p_1 + \delta_3 p_{01}$, $\lambda_2 = \delta_2 p_2 + \delta_3 p_{10}$, e $\lambda_3 = \delta_3 p_{00}$.

(4) MODELO EXPONENCIAL BIVARIADO INDEPENDENTE

Quando X e Y são independentes, os problemas do ajuste simplificam bastante. A condição necessária e suficiente para a independência de X e Y é

$$\lambda_{XY}(t|y) = \lambda_X(t), \quad \lambda_{YX}(t|x) = \lambda_Y(t). \quad (2.58)$$

Em termos de sobrevivência, X e Y são independentes se e somente se $S(x,y) = S(x) \cdot S(y)$. Portanto, se (X,Y) possui uma distribuição exponencial bivariada independente, com $X \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ e $Y \sim \text{Exp}(\lambda_2)$, a função de sobrevivência conjunta pode ser expressa como:

$$S(x,y) = \exp(-\lambda_1 x - \lambda_2 y). \quad (2.59)$$

(5) OUTRAS DISTRIBUIÇÕES

Block e Basu (1974) desenvolveram uma importante distribuição exponencial bivariada, a qual é absolutamente contínua e preserva a PPM da distribuição de Marshall e Olkin com marginais exponenciais de médias ponderadas. Essa distribuição será estudada mais detalhadamente no próximo capítulo.

Clayton (1978) propôs um modelo bivariado para a análise de associação de tempos de sobrevivência bivariada a partir de duas distribuições marginais desconhecidas. Este modelo é revisado, discutido e reparametrizado por Oakes (1982). O modelo de Clayton-Oakes será discutido mais adiante no Capítulo V.

Sarkar (1987) deduziu uma outra distribuição exponencial bivariada absolutamente contínua com marginais exponenciais, porém sem a PPM. Essa distribuição será estudada com mais detalhe no Capítulo IV.

2.4. FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA PARA DISTRIBUIÇÕES UNIVARIADAS E BIVARIADAS

Uma amostra aleatória de tamanho n é retirada de uma população homogênea, e constituída por X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias univariadas independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com f.d.p. $f(\cdot; \theta)$. A f.d.p. conjunta de X_1, \dots, X_n quando os valores da amostra são obtidos pode-se considerar como uma função de θ , que é chamada de função de verossimilhança de θ dado x_1, \dots, x_n ou, simplesmente, de função de verossimilhança de θ , $L(\theta)$:

$$L(\theta) = L(\theta | x_1, \dots, x_n) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta). \quad (2.60)$$

Em distribuições bivariadas, a função de verossimilhança é

generalizada da seguinte forma: seja uma amostra aleatória de tamanho n retirada de uma população homogênea constituída por $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ variáveis aleatórias bivariadas independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com f.d.p. $f(x_1, y_1; \underline{\theta})$. A função de verossimilhança de $\underline{\theta}$ dado $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ é, portanto, expressa por

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(x_i, y_i; \underline{\theta}). \quad (2.61)$$

Para analisar dados com presença de censuras, onde o tempo exato de falha não é observado, a função de verossimilhança é modificada usando uma variável indicadora δ . Considere-se um estudo de sobrevivência, onde uma amostra de n itens são colocados em análise, a função de verossimilhança é expressa da seguinte forma:

$$L(\underline{\theta}; t') = \prod_{i=1}^n f(t_i; \underline{\theta})^{\delta_i} S(t_i; \underline{\theta})^{1-\delta_i}, \quad (2.62)$$

$$\text{onde } \delta_i = \begin{cases} 1, & \text{se } t_i \text{ é tempo de falha;} \\ 0, & \text{se } t_i \text{ é tempo censurado.} \end{cases}$$

A análise de dados bivariados com presença de censuras já apresenta mais dificuldades. Suponha-se que os dados são generalizados de tal forma que a censura possa ocorrer em X ou Y . As n observações são divididas em 4 classes: C_1 , onde x_1 e y_1 são ambos tempos de falha observada; C_2 , onde x_1 é tempo de falha e y_1 é tempo censurado (i.é, sabe-se apenas que $Y_1 \geq y_1$); C_3 , onde x_1 é tempo de censura e y_1 é tempo de falha; e C_4 , onde x_1 e y_1 são ambos tempos de censura. A função de verossimilhança é então

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{i \in C_1} f(x_i, y_i) \prod_{i \in C_2} \frac{-\partial S(x_i, y_i)}{\partial x_i} \prod_{i \in C_3} \frac{-\partial S(x_i, y_i)}{\partial y_i} \prod_{i \in C_4} S(x_i, y_i), \quad (2.63)$$

onde $\frac{-\partial S(x_1, y_1)}{\partial x_1}$ também pode ser escrita como $\int_{y_1}^{\infty} f(x_1, v) dv$, é a probabilidade de X_1 falhar num intervalo $(x_1, x_1 + \Delta x_1)$, com $\Delta x_1 \rightarrow 0$, e Y_1 sobreviver a y_1 . A situação é similar para $\frac{-\partial S(x_1, y_1)}{\partial y_1}$, onde y_1 é o tempo de falha e x_1 o de censura. Observa-se que no caso de observações bivariadas longitudinais, a censura só ocorre em Y . Portanto, a função de verossimilhança é simplificada para

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{i \in C_1} f(x_i, y_i) \prod_{i \in C_2} \frac{-\partial S(x_i, y_i)}{\partial x_i} \quad (2.64)$$

2.5. ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA (EMV)

Suponha-se que um modelo paramétrico que envolve um conjunto de parâmetros $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)'$ foi formulado para um experimento. O experimento é realizado e alguns dados são obtidos. Deseja-se então usar este conjunto de dados para estimar o valor de $\underline{\theta}$ de tal forma que a função de verossimilhança de $\underline{\theta}$ dada a amostra seja maximizada. A estatística encontrada para estimar $\underline{\theta}$ é chamada de estimador de máxima verossimilhança (EMV) de $\underline{\theta}$ e denotada por $\hat{\underline{\theta}}$. E o valor numérico obtido de $\hat{\underline{\theta}}$ é chamado de estimativa de máxima verossimilhança de $\underline{\theta}$.

DEFINIÇÃO : Um estimador de máxima verossimilhança (E.M.V.) de $\underline{\theta}$, $\hat{\underline{\theta}}$, é uma estatística que maximiza a função de verossimilhança $L(\underline{\theta})$, isto é,

$$L(\hat{\underline{\theta}}) = \sup [L(\underline{\theta}); \forall \underline{\theta} \in \Omega], \quad (2.65)$$

onde Ω é o espaço de parâmetros, o conjunto de todos os valores possíveis de $\underline{\theta}$. ■

Maximizar $L(\underline{\theta})$ equivalen a maximizar a função $\log L(\underline{\theta})$ pois a

função \log é uma função estritamente crescente. Em casos gerais, $\hat{\theta}$ pode ser calculado resolvendo as chamadas equações de verossimilhança $U_i(\theta) = 0$ ($i = 1, \dots, r$), onde

$$U_i(\theta) = \frac{\partial \log L(\underline{\theta})}{\partial \theta_i} \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.66)$$

as $U_i(\theta)$ são chamadas de funções escores e $U(\theta) = [U_1(\theta), \dots, U_r(\theta)]'$ é chamado de vetor escore.

A seguir, são apresentadas duas propriedades importantes do EMV para amostras de tamanho fixo n :

TEOREMA 1. Sejam X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias i.i.d. com a função densidade $f(\cdot; \underline{\theta})$, $\underline{\theta} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^r$, e seja $T = (T_1, \dots, T_r)'$, $T_j = T_j(X_1, \dots, X_n)$, $j = 1, \dots, r$ uma estatística suficiente para $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)'$. Então, se $\hat{\underline{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_r)'$ é o único EMV de $\underline{\theta}$, então $\hat{\underline{\theta}}$ é uma função de T . ■

TEOREMA 2: Sejam X_1, \dots, X_n v's a's i.i.d. com f.d.p. $f(\cdot; \underline{\theta})$, $\underline{\theta} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^r$, e seja ϕ uma função um a um definida de $\Omega \rightarrow \Omega^* \subseteq \mathbb{R}^m$. Suponha que $\hat{\underline{\theta}}$ é um E.M.V. de $\underline{\theta}$, então $\phi(\hat{\underline{\theta}})$ é um E.M.V. de $\phi(\underline{\theta})$. Essa propriedade é conhecida como a invariância. ■

2.5.1. PROPRIEDADES ASSINTÓTICAS DE EMV

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias i.i.d. com a função densidade $f(\cdot; \underline{\theta})$, $\underline{\theta} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^r$, sob certas condições de regularidade, o EMV de $\underline{\theta}$, $\hat{\underline{\theta}}$, apresenta as seguintes propriedades assintóticas:

1) $\hat{\theta}$ é um estimador consistente de θ , isto é, $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$ quando $n \rightarrow \infty$, ou seja, $p/\forall \epsilon > 0, P(|\hat{\theta} - \theta| \geq \epsilon) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

2) $(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} N(0, I(\theta)^{-1})$, onde $I(\theta)$ é a matriz de informação de Fisher definida na condição (ii)-(a) abaixo.

As condições de regularidade são:

(i) Para $i, j = 1, \dots, r$, as derivadas $\frac{\partial f}{\partial \theta_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ existem em quase toda parte e são tais que $\left| \frac{\partial f}{\partial \theta_i} \right| \leq H_i(x)$ e $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right| \leq G_{ij}(x)$ onde $\int_{\mathbb{R}} H_i(x) dx < \infty$ e $\int_{\mathbb{R}} G_{ij}(x) dx < \infty$;

(ii) Para $i, j = 1, \dots, r$, $\frac{\partial \log f}{\partial \theta_i}$, $\frac{\partial^2 \log f}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ existem em quase toda parte e são tais que:

a) a matriz de informação de Fisher,

$$I(\theta) = E \left\{ \left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta} \right)' \left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta} \right) \right\},$$

onde $\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \log L}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial \log L}{\partial \theta_r} \right)$, é finita e positiva definida.

$$b) E_{\theta} \left\{ \sup_{\{h: \|h\| \leq \delta\}} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta'} \log f(X_1; \theta+h) - \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta'} \log f(X_1; \theta) \right\} = \psi_{\delta},$$

onde $\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta'} \log f(X_1; \theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log f(X_1; \theta) \right)_{ij}$, converge para

zero com $\delta \rightarrow 0$. ■

Como consequência, $U(\theta) \xrightarrow{D} N(0, I(\theta))$.

Uma função importante na teoria assintótica de máxima verossimilhança é a matriz $r \times r$ de informação observada $I(\hat{\theta})$, um estimador consistente, em probabilidade, de $I(\theta)$, onde

$$I_{ij}(\hat{\theta}) = \frac{-\partial^2 \log L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \bigg|_{\theta=\hat{\theta}}. \quad (2.67)$$

2.5.2. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA

Em geral, os estimadores de MV não podem ser expressos explicitamente e são necessários métodos iterativos para obtenção das raízes das equações de verossimilhança. Um dos métodos, talvez o mais utilizado, é o método de Newton-Raphson.

Suponha-se que deseje encontrar uma raiz $\tilde{\theta}$, da equação $g(\theta) = 0$ e seja θ_0 um valor próximo de $\hat{\theta}$. Usando a expansão de séries de Taylor de $g(\theta)$ em torno de $\theta = \theta_0$, tem-se que

$$g(\theta) = g(\theta_0) + (\theta - \theta_0) g'(\theta_0) + (\theta - \theta_0)^2 g''(\theta_0)/2! + \dots \quad (2.68)$$

Quando θ_0 é um valor próximo de $\hat{\theta}$, pode-se considerar a equação acima como

$$g(\hat{\theta}) \approx g(\theta_0) + (\hat{\theta} - \theta_0)g'(\theta_0). \quad (2.69)$$

E, desde que $g(\hat{\theta}) = 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &\approx g(\theta_0) + (\hat{\theta} - \theta_0)g'(\theta_0), \text{ e} \\ 0 &\approx g(\theta_0) + \hat{\theta} g'(\theta_0) - \theta_0 g'(\theta_0) \\ \hat{\theta} &\approx \theta_0 - g(\theta_0)/g'(\theta_0). \end{aligned} \quad (2.70)$$

No método de Newton-Raphson toma-se $\underline{\theta}_0$ como o "chute" (tentativa de solução) inicial de $\underline{\hat{\theta}}$, e calcula-se $\underline{\theta}_1$ da seguinte forma:

$$\underline{\hat{\theta}}_1 = \underline{\hat{\theta}}_0 - g(\underline{\hat{\theta}}_0)/g'(\underline{\hat{\theta}}_0).$$

Considera o $\underline{\hat{\theta}}_1$ como o novo "chute" e repete o cálculo para obter o $\underline{\hat{\theta}}_2$:

$$\underline{\hat{\theta}}_2 = \underline{\hat{\theta}}_1 - g(\underline{\hat{\theta}}_1)/g'(\underline{\hat{\theta}}_1).$$

Prossegue-se até $\underline{\hat{\theta}}_{n+1} \approx \underline{\hat{\theta}}_n$, considerando que $g(\underline{\hat{\theta}}_n) = 0$, $\underline{\hat{\theta}}_n$ será a raiz da equação.

Seja $L(\underline{\theta})$ uma função de verossimilhança com um vetor de r parâmetros desconhecidos $\underline{\theta}_r$. A função $g(\underline{\theta})$ descrita acima seria então a função escore $U(\underline{\hat{\theta}})$ e $g'(\underline{\theta})$ a matriz de informação de Fisher observada com sinal negativo, $-I(\underline{\hat{\theta}})$. Assim, o processo iterativo pode ser escrito da seguinte forma:

$$\underline{\hat{\theta}}_{n+1} = \underline{\hat{\theta}}_n + I(\underline{\hat{\theta}}_n)^{-1} U(\underline{\hat{\theta}}_n). \quad (2.71)$$

Um critério de parada é quando a norma da diferença $|\underline{\hat{\theta}}_{n+1} - \underline{\hat{\theta}}_n|$ e $U(\underline{\hat{\theta}}_n)$ tendem a zero.

Às vezes, as derivadas analíticas são extremamente difíceis de ser calculadas e, nesse caso, a derivação numérica é geralmente utilizada. Para calcular as derivadas numéricas, usa-se a definição de derivada:

$$f'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta)}{\Delta\theta}. \quad (2.72)$$

Vale a pena ressaltar que o valor de $\Delta\theta$ utilizado na convergência em cada iteração deve ser proporcional ao valor de θ .

O método de Newton-Raphson pode apresentar problemas nas seguintes situações: (1) quando há restrições sobre os parâmetros do tipo $\underline{\theta} \in \Omega = \{\underline{\theta} \in \mathbb{R}^p \mid k_i \leq \theta_i \leq m_i, i = 1, \dots, p\}$, o processo pode convergir para fora do espaço de Ω , (2) quando o tamanho do passo da iteração é maior do que deveria ser, a função diminui ao invés de aumentar, e (3) a direção do processo não é de subida (formar um

ângulo agudo com a gradiente, no caso, a primeira derivada) em todas as iterações e o processo pode nunca convergir. Para evitar esses problemas, deve ser feita uma verificação do tamanho do passo e da direção do processo em cada iteração para garantir a convergência. Este procedimento é feito em todos os programas computacionais desta dissertação (APÊNDICE 4).

2.6. TESTES ASSINTÓTICOS

Suponha-se que um modelo (paramétrico) de sobrevivência com r parâmetros, $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)'$ foi ajustado e os EMV dos parâmetros são denotados por $\hat{\underline{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_r)'$. Na hipótese $H_0: \underline{\theta} = \underline{\theta}_0$ e sob as condições de regularidade apresentadas na seção 2.5.1, pode-se mostrar que a estatística da razão de verossimilhança,

$$RV = -2\log \Lambda = -2\log \frac{L(\underline{\theta}_0)}{L(\hat{\underline{\theta}})}, \quad (2.73)$$

possui uma distribuição assintótica χ_r^2 , isto é, qui-quadrado com r graus de liberdade. Portanto, a hipótese nula H_0 é rejeitada ao nível de significância α , chamado de P_value , se $RV > \chi_{r,\alpha}^2$, onde $\chi_{r,\alpha}^2$ é o valor da distribuição qui-quadrado com r graus de liberdade no ponto $1 - \alpha$ de probabilidade.

Tomando agora o vetor dos parâmetros $\underline{\theta}$ particionado em $\underline{\theta} = (\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2)'$, onde $\underline{\theta}_1$ é um vetor $k \times 1$ e $\underline{\theta}_2$ é $(r-k) \times 1$. Seja $H_0: \underline{\theta}_1 = \underline{\theta}_{10}$ contra $H_1: \underline{\theta}_1 \neq \underline{\theta}_{10}$ a hipótese a ser testada e denote por $\hat{\underline{\theta}}$ o EMV de $\underline{\theta}$ calculado sob o modelo irrestrito e $\tilde{\underline{\theta}}_2$ é o EMV de $\underline{\theta}_2$ calculado sob a hipótese H_0 ; então a estatística (2.73) pode ser reformulada como

$$RV = -2\log \Lambda = -2\log \frac{L(\underline{\theta}_{10}, \tilde{\underline{\theta}}_2)}{L(\hat{\underline{\theta}})} \quad (2.74)$$

e possui uma distribuição assintótica χ_k^2 sob a hipótese $H_0: \underline{\theta}_1 = \underline{\theta}_{10}$

(Rao, 1973; Peers, 1971; Hayakawa, 1975; Aitchison & Silvey, 1958 e Chant, 1974). Portanto, a hipótese nula H_0 é rejeitada se $RV > \chi^2_{k,\alpha}$, onde $\chi^2_{k,\alpha}$ é o valor da distribuição qui-quadrado com k graus de liberdade no ponto $1 - \alpha$ de probabilidade.

O vetor de parâmetros $\underline{\theta}_2$ é chamado de parâmetro de perturbação ou parâmetro nuisance. A expressão $L(\underline{\theta}_{10}, \underline{\tilde{\theta}}_2)$ será denotada por $L(\underline{\tilde{\theta}}_2)$ para facilitar a notação.

Como $U(\underline{\theta})$ é assintoticamente $N_r(0, I(\underline{\theta}))$, portanto, sob a hipótese $H_0: \underline{\theta} = \underline{\theta}_0$, a estatística de Rao (escore)

$$R = U'(\underline{\theta}_0) I(\underline{\theta}_0)^{-1} U(\underline{\theta}_0) \quad (2.75)$$

possui uma distribuição assintótica χ^2_r , e a hipótese $H_0: \underline{\theta} = \underline{\theta}_0$ é rejeitada ao nível de significância α se $R > \chi^2_{r,\alpha}$.

Se o vetor $\underline{\theta}$ é particionado em $(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2)'$, com $\underline{\theta}_1$ vetor de dimensão $k \times 1$ e $\underline{\theta}_2$ de $(r-k) \times 1$, então, $U(\underline{\theta})$, $I(\underline{\theta})$ e $I^{-1}(\underline{\theta})$ podem ser particionadas de forma correspondente:

$$U(\underline{\theta}) = \begin{pmatrix} U_1(\underline{\theta}) \\ U_2(\underline{\theta}) \end{pmatrix} \quad I(\underline{\theta}) = \begin{pmatrix} I_{11}(\underline{\theta}) & I_{12}(\underline{\theta}) \\ I_{21}(\underline{\theta}) & I_{22}(\underline{\theta}) \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

$$I^{-1}(\underline{\theta}) = \begin{pmatrix} I^{11}(\underline{\theta}) & I^{12}(\underline{\theta}) \\ I^{21}(\underline{\theta}) & I^{22}(\underline{\theta}) \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

onde

$$I^{11}(\underline{\theta}) = (I_{11}(\underline{\theta}) - I_{12}(\underline{\theta}) I_{22}^{-1}(\underline{\theta}) I_{21}(\underline{\theta}))^{-1} \quad (2.78)$$

Sob $H_0: \underline{\theta}_1 = \underline{\theta}_{10}$, $\underline{\tilde{\theta}}_2$ é o E.M.V. de $\underline{\theta}_2$, obtido pela maximização de $L(\underline{\theta}_{10}, \underline{\theta}_2)$. As funções avaliadas no ponto $\hat{\underline{\theta}}$ serão escritas com um circunflexo e as avaliadas no ponto $(\underline{\theta}_{10}, \underline{\tilde{\theta}}_2)'$ serão escritas com um til. Então a estatística definida em (2.75) pode ser reformulada como

$$R = U_1(\tilde{\theta}_2)' [I^{11}(\tilde{\theta}_2)] U_1(\tilde{\theta}_2). \quad (2.79)$$

R possui distribuição assintótica χ^2 com k graus de liberdade, portanto H_0 é rejeitada se $R > \chi^2_{k,\alpha}$. O vetor $U_1(\tilde{\theta}_2)$ é chamado de vetor escore parcial. Este teste também é chamado de teste de escore parcial (Aitchison & Silvey, 1958; Silvey, 1959 e Harris & Peers, 1980).

OBSERVAÇÃO. Na página 524 do livro de Lawless (1982), a expressão

$$I^{11}(\tilde{\theta}) = I_{11}(\tilde{\theta}) - I_{12}(\tilde{\theta})I_{22}^{-1}(\tilde{\theta})I_{21}(\tilde{\theta})$$

e a estatística do teste

$$U_1(\hat{\theta}_2)' [I^{11}(\hat{\theta}_2)]^{-1} U_1(\hat{\theta}_2)$$

deveriam ser trocadas por (2.78) e (2.79), respectivamente, dadas acima. ■

Uma outra estatística usada para testar a hipótese $H_0: \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_0$ é a estatística de Wald

$$W = (\hat{\tilde{\theta}} - \tilde{\theta}_0)' I(\hat{\tilde{\theta}}) (\hat{\tilde{\theta}} - \tilde{\theta}_0) \quad (2.80)$$

que possui, sob as condições de regularidade, distribuição assintótica qui-quadrado com r graus de liberdade. Novamente, H_0 é rejeitada ao nível α se $W > \chi^2_{r,\alpha}$.

Se o vetor $\tilde{\theta}$ é particionado em $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)'$, com $\tilde{\theta}_1$ vetor de dimensão $k \times 1$ e $\tilde{\theta}_2$ de $(r-k) \times 1$ e a hipótese a ser testada é $H_0: \tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_{10}$ contra $H_1: \tilde{\theta}_1 \neq \tilde{\theta}_{10}$, a estatística de Wald pode ser expressa como

$$W = (\hat{\tilde{\theta}}_1 - \tilde{\theta}_{10})' (I^{11}(\hat{\tilde{\theta}}))^{-1} (\hat{\tilde{\theta}}_1 - \tilde{\theta}_{10}), \quad (2.81)$$

que possui distribuição assintótica χ^2 com k graus de liberdade. Portanto H_0 é rejeitada se $W > \chi^2_{k,\alpha}$ (Peers, 1971 e Hayakawa, 1975).

Uma visão geométrica dos três testes citados é discutida por Brown & Cribari-Neto (1992).

2.7. ESTIMAÇÃO DA FUNÇÃO DE SOBREVIVÊNCIA

A estimação da função de sobrevivência univariada (2.2) e bivariada (2.11) pode ser realizada através de métodos não-paramétricos ou paramétricos. Entre os não-paramétricos o método de estimação mais utilizada é o de Kaplan-Meier:

Seja n o tamanho da amostra aleatória, a função de sobrevivência, considerando distribuição univariada, $S(t)$ é estimada como a proporção de indivíduos da amostra que sobreviveram a tempo t e pode ser escrita como:

$$\hat{S}(t) = \frac{\text{No. de indivíduos que sobreviveram a } t}{n} \quad (2.82)$$

Se os tempos de falha forem colocados em ordem crescente, a função acima pode ser estimada como:

$$\hat{S}(t_{(i)}) = \frac{n-i}{n} = 1 - \frac{i}{n}, \quad (2.83)$$

com $\hat{S}(t_{(0)}) = 1$ e $\hat{S}(t_{(n)}) = 0$.

A estimação não-paramétrica de Kaplan-Meier da função de Sobrevivência, com presença de dados censurados, é feita da seguinte forma: suponha-se que são n indivíduos na amostra e k ($k \leq n$) tempos distintos de falha observados e ordenados $t_1 < t_2 < \dots < t_k$, então

$$\hat{S}(t) = \prod_{j: t_j < t} \frac{n_j - d_j}{n_j} \quad (2.84)$$

onde n_j é o número de indivíduos em risco no tempo t_j e d_j o número de indivíduos que falharam no tempo t_j . A variância do estimador $\hat{S}(t)$ é

dada por

$$\text{Var}[\hat{S}(t)] = \hat{S}(t)^2 \sum_{j: t_j < t} \frac{d_j}{n_j (n_j - d_j)} . \quad (2.85)$$

A estimação não-paramétrica da função de sobrevivência para dados pareados (X, Y) também pode ser realizada usando o método de Kaplan-Meier generalizado dado por:

$$\hat{S}(x,y) = \frac{\text{Número de observações}(x_1, y_1) , \quad x_1 > x \text{ e } y_1 > y}{n} \quad (2.86)$$

A estimativa da função de sobrevivência marginal de X é dada por $\hat{S}_X(x) = (\text{número de observações com } x_1 > x) / n = \hat{S}(x, 0)$ e a expressão é similar para $\hat{S}_Y(y)$.

No caso paramétrico, a função de sobrevivência estimada é encontrada através da estimação dos parâmetros de $S(t) = P(T > t)$. Por exemplo, na distribuição univariada exponencial, $\hat{S}(t)$ pode ser estimada usando o EMV de θ , $\hat{\theta}$:

$$\hat{S}(t) = \exp[-(\hat{\theta}t)] . \quad (2.87)$$

Para calcular a variância de $\hat{S}(t)$, considere o seguinte teorema:

TEOREMA 3. Sejam $\underline{T} = (T_1, \dots, T_r)'$ estatísticas tais que, quando $n \rightarrow \infty$,

$$(\underline{T}_1 - \theta_1, \dots, \underline{T}_r - \theta_r) \xrightarrow{D} N(\underline{0}, \underline{\Sigma}) . \quad (2.88)$$

onde $\underline{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{r \times r}$. Se $g(x_1, \dots, x_r)$ é uma função que possui as derivadas primeiras com relação a x_i , $i = 1, \dots, r$. Então quando $n \rightarrow \infty$

$$g(\underline{T}) - g(\underline{\theta}) \rightarrow N \left(0, (g'(\underline{\theta}))' \cdot \underline{\Sigma} \cdot g'(\underline{\theta}) \right) \quad (2.89)$$

■

Considerando o exemplo da distribuição exponencial, tem-se que

$$(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \theta^2/n)$$

$$g(\hat{\theta}) = \exp[-(\hat{\theta}t)], \quad e \quad g'(\hat{\theta}) = -t \exp[-(\hat{\theta}t)]. \quad (2.90)$$

Portanto,

$$\exp[-(\hat{\theta}t)] - \exp[-(\theta t)] \xrightarrow{D} N(0, t^2 \exp[-2(\hat{\theta}t)] \cdot \theta^2/n) \quad (2.91)$$

$$e \quad \text{Var}(\hat{S}(t)) = \text{Var}(\exp[-(\hat{\theta}t)]) = t^2 \exp[-2(\hat{\theta}t)] \cdot \theta^2/n. \quad (2.92)$$

2.8. MODELOS DE REGRESSÃO

Em muitas situações práticas a população em estudo não é homogênea, sendo necessário considerar a influência de outros fatores no tempo de falha. As variáveis que correspondem a tais fatores são chamadas de *covariáveis* (ou *variáveis concomitantes*, ou *variáveis explanatórias*)

O método mais comum de incorporar as covariáveis no modelo é expressar os parâmetros do modelo como funções dessas covariáveis. As funções mais utilizadas em Análise de Sobrevida são: linear, linear recíproca ou log-linear. Como ilustração, a distribuição exponencial é considerada:

Seja $T \sim \exp(\theta)$ e $\underline{Z} = (Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_p)'$, $Z_0=1$, o vetor de covariáveis. Então o modelo de regressão pode ser escrito como

$$f(t|\underline{z}) = \theta_{\underline{z}} \exp(-\theta_{\underline{z}} t), \quad t > 0 \text{ e } \theta_{\underline{z}} > 0 \quad (2.93)$$

onde $\theta_{\underline{z}}$ pode ser:

* modelo linear : $\theta_{\underline{z}} = \underline{\beta}' \underline{z}$, com $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_p)'$, vetor dos parâmetros que representam os coeficientes das covariáveis \underline{z} . As

funções densidade, de sobrevivência e risco são expressas por:

$$\begin{aligned} f(t|z) &= \underline{\beta}'z \exp \left(-(\underline{\beta}'z) t \right), \\ S(t|z) &= \exp \left(-(\underline{\beta}'z) t \right), \\ \lambda(t|z) &= \underline{\beta}'z; \quad p/ \quad t \geq 0 \text{ e } \underline{\beta}'z > 0. \end{aligned} \quad (2.94)$$

* modelo linear recíproca : $\underline{\theta}_z = (\underline{\beta}'z)^{-1}$ e, portanto

$$\begin{aligned} f(t|z) &= (\underline{\beta}'z)^{-1} \exp \left(-(\underline{\beta}'z)^{-1} t \right), \\ S(t|z) &= \exp \left(-(\underline{\beta}'z)^{-1} t \right), \\ \lambda(t|z) &= (\underline{\beta}'z)^{-1}, \quad p/ \quad t \geq 0 \text{ e } (\underline{\beta}'z)^{-1} > 0. \end{aligned} \quad (2.95)$$

* modelo log-linear : $\underline{\theta}_z = \exp(\underline{\beta}'z)$, e as funções acima são escritas neste modelo como:

$$\begin{aligned} f(t|z) &= \exp(\underline{\beta}'z) \exp \left(-\exp(\underline{\beta}'z) t \right), \\ S(t|z) &= \exp \left(-\exp(\underline{\beta}'z) t \right), \\ \lambda(t|z) &= \exp(\underline{\beta}'z), \quad p/ \quad t \geq 0 \text{ e } \exp(\underline{\beta}'z) > 0, \text{ i.é. } -\infty < \underline{\beta}'z < \infty. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Para estimar os parâmetros $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_p)'$, usa-se, novamente, o método da estimação de máxima verossimilhança. Suponha-se que uma amostra aleatória constituída por $X' = (X_1, \dots, X_n)$ é retirada de uma população não homogênea que envolve um vetor de parâmetros $\underline{\theta}$, e seja $\underline{Z}_i = (Z_{i0}, Z_{i1}, Z_{i2}, \dots, Z_{ip})'$ o vetor de covariáveis relacionadas com o indivíduo X_i e $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_p)'$, o vetor dos parâmetros relacionados com \underline{Z} . A verossimilhança pode ser escrita, então, como

$$L(\underline{\theta}_z) = L(\underline{\theta}_z | x', z') = \prod_{i=1}^n f(x_i | z_i; \underline{\theta}) = \prod_{i=1}^n (\underline{\beta}'z_i)^{-1} \exp \left(-(\underline{\beta}'z_i)^{-1} t \right) \quad (2.97)$$

Os parâmetros $\underline{\beta}$ são estimados maximizando a função $L(\theta_{\underline{z}})$, e testes de hipótese podem ser formulados como já explicado nas seções anteriores.

A estimação paramétrica pode ser aplicada neste caso maximizando a função de verossimilhança. Encontrando o vetor escore e a matriz de informação de Fisher observada, o método iterativo de Newton-Raphson pode ser usado para calcular a estimativa de $\underline{\beta}$.

CAPÍTULO III

ANÁLISE DE DADOS PAREADOS COM A DISTRIBUIÇÃO DE BLOCK-BASU

3.1. INTRODUÇÃO

O objetivo desta dissertação é investigar o uso de modelos paramétricos bivariados absolutamente contínuos, em particular as distribuições de Block-Basu (1974) e Sarkar (1987), para a análise de dados pareados do tipo (X, Y) , onde X e Y são tempos medidos em um mesmo indivíduo a partir de inícios bem definidos, e também com a incorporação de dados censurados e covariáveis.

Gross e Lam (1981) apresentaram uma aplicação a dados pareados da distribuição de Block-Basu para a variável bivariada (X, Y) , usando a transformação $T = Y / X$. Estimadores de máxima verossimilhança e testes de hipótese de independência e de igualdade das distribuições marginais foram desenvolvidos através do uso de T , sem, contudo, considerar censuras ou covariáveis.

O objetivo primordial deste capítulo é apresentar o estudo da utilização do modelo de Block-Basu em análise de dados pareados longitudinais (X, Y) , onde Y só pode ser observado após a falha de X , e desenvolver estimação e testes de hipóteses sobre os parâmetros em um contexto de Análise do Sobrevivência, considerando censuras.

A distribuição de Block-Basu é revista na seção 3.2. O estudo sobre a transformação $T = Y/X$ realizado por Gross e Lam é revisto na seção 3.3. Na seção 3.4 são apresentados os estudos concernentes à inferência (estimação, testes da hipótese de

independência e da igualdade das marginais) sobre os parâmetros da distribuição de Block-Basu com dados completos.

Na seção 3.5 são apresentados os estudos concernentes à inferência sobre os parâmetros da distribuição de Block-Basu com a incorporação de censuras à direita no segundo componente do par, isto é, em Y .

Na seção 3.6 são realizadas algumas aplicações numéricas usando resultados teóricos das seções anteriores para alguns conjuntos de dados gerados .

3.2. DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA ABSOLUTAMENTE CONTÍNUA DE BLOCK-BASU

Entre as várias distribuições exponenciais bivariadas propostas na literatura de estatística, a distribuição BVE - Bivariate Exponential, de Marshall e Olkin (1967), que possui a propriedade da perda de memória (PPM) generalizada da distribuição exponencial univariada para modelo exponencial bivariado, é uma das mais aceitas. Esta distribuição não é absolutamente contínua, isto é, existe uma probabilidade positiva do evento $[X = Y]$, o que torna a BVE inapropriada em muitas situações práticas. Por exemplo, em certos tipos de doença, a falha simultânea de dois órgãos é tão rara que pode ser considerada desprezível; também em caso de observações longitudinais, a probabilidade do tempo de falha do segundo componente ser exatamente igual ao do primeiro é geralmente considerada nula. Portanto, uma distribuição exponencial bivariada absolutamente contínua e que conserve algumas propriedades da BVE seria mais desejável para essas situações.

Baseada na parte absolutamente contínua da BVE e a PPM, Block e Basu propuseram uma extensão bivariada absolutamente contínua da distribuição exponencial, a distribuição ACBVE - Absolutely Continuous Bivariate Exponential, em 1974. A principal diferença entre a BVE de Marshall e Olkin e a ACBVE de Block e Basu é que se $(X, Y) \sim \text{ACBVE}$ então $P(X = Y) = 0$; além disso, a ACBVE conserva a PPM da distribuição

BVE, porém as marginais X e Y não são exponencialmente distribuídas.

A ACBVE com parâmetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$ tem a seguinte densidade:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{\lambda_1 \lambda (\lambda_2 + \lambda_{12})}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp[-\lambda_1 x - (\lambda_2 + \lambda_{12}) y] & , \text{ se } x < y \\ \frac{\lambda_2 \lambda (\lambda_1 + \lambda_{12})}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) x - \lambda_2 y] & , \text{ se } x > y \end{cases}$$

$$\text{com } \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_{12} > \max(-\lambda_1, -\lambda_2) \text{ e } \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}. \quad (3.1)$$

e a função de sobrevivência é dada por:

$$S(x,y) = \lambda / (\lambda_1 + \lambda_2) \exp[-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} \max(x, y)] \\ - [\lambda / (\lambda + \lambda_{12})] \exp[-\lambda \max(x, y)] \quad p/ x,y > 0. \quad (3.2)$$

As distribuições (de sobrevivência) marginais da ACBVE são dadas por:

$$S_X(x) = \frac{\lambda}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12})x] - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp(-\lambda x) \quad p/ x > 0, \text{ e} \\ S_Y(y) = \frac{\lambda}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp[-(\lambda_2 + \lambda_{12})y] - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp(-\lambda y) \quad p/ y > 0. \quad (3.3)$$

Estas marginais são chamadas de médias ponderadas de distribuições exponenciais e pode-se notar que são iguais quando $\lambda_1 = \lambda_2$.

A taxa de falha conjunta $\lambda(x,y)$ definida em (2.15) é dada por

$$\lambda(x,y)=\begin{cases} \frac{\lambda_1(\lambda_2+\lambda_{12})\lambda}{\lambda - \lambda_{12} \exp[-\lambda_1(y-x)]} & \text{se } x < y, \\ \frac{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_{12})\lambda}{\lambda - \lambda_{12} \exp[-\lambda_2(x-y)]} & \text{se } y < x. \end{cases} \quad (3.4)$$

e $\lambda(y|x)$, a taxa de falha condicional de Y dado que X falhou em x definida em (2.17c), é expressa por

$$\lambda(y|x) = \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_{12} & \text{se } x < y, \\ \left\{ 1/\lambda_2 - (\lambda_{12}/\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_{12})) \exp[-\lambda_2(x-y)] \right\}^{-1} & \text{se } y < x. \end{cases} \quad (3.5)$$

Pode-se notar que quando X e Y são independentes, isto é, $\lambda_{12} = 0$, a variável Y possui uma distribuição exponencial com parâmetro λ_2 , portanto $\lambda(y|x) = \lambda(y) = \lambda_2$. Um outro fato que deve ser ressaltado é que a taxa de falha condicional é constante, quando $x < y$, o que indica a distribuição condicional de Y dado X ser uma exponencial com parâmetro $\lambda_2 + \lambda_{12}$, quando $x < y$.

A distribuição exponencial bivariada ACBVE de Block-Basu possui algumas características importantes:

1. É uma distribuição exponencial bivariada absolutamente contínua, isto é, a $P(X = Y) = 0$;

2. Conserva a propriedade da perda de memória, PPM, isto é, se $(X, Y) \sim \text{ACBVE}$, então:

$$S(s_1 + t, s_2 + t) = S(s_1, s_2) S(t, t) \quad \text{p/ } s_1, s_2 \text{ e } t \geq 0;$$

3. Não possui marginais exponenciais; mas pode-se provar que, se (X, Y) uma variável aleatória bivariada positiva e absolutamente contínua com a PPM e as marginais são exponenciais, então X e Y são independentes;

4. $\min(X, Y) \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$;

5. $V = X - Y$ tem a função de distribuição

$$F(v) = \begin{cases} 1 - \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1} \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_{12})v\} & v \geq 0, \\ \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1} \exp\{(\lambda_2 + \lambda_{12})v\}, & v < 0; \end{cases}$$

6. $Z = |X - Y|$ tem a função de distribuição

$$F(z) = \lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2) (1 - \exp[-(\lambda_2 + \lambda_{12})z]) + \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2) (1 - \exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12})z]) \quad \text{se } z > 0.$$

7. $\min(X, Y)$ é independente de V e de Z .

A função geradora de momentos da ACBVE é dada por

$$m(s, t) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{\lambda}{\lambda - (s + t)} \cdot \left[\frac{\lambda_1 (\lambda_2 + \lambda_{12})}{\lambda_2 + \lambda_{12} - t} + \frac{(\lambda_1 + \lambda_{12}) \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_{12} - s} \right]$$

de tal modo que as esperanças e variâncias são expressas por:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_{12}} + \frac{\lambda_{12} \lambda_2}{\lambda (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_1 + \lambda_{12})},$$

$$Var(X) = \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_{12})^2} + \frac{\lambda_{12} \lambda_2 [2\lambda_1 \lambda + \lambda_{12} \lambda_2]}{\lambda^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2 (\lambda_1 + \lambda_{12})^2},$$

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_{12}} + \frac{\lambda_{12} \lambda_1}{\lambda (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_2 + \lambda_{12})},$$

$$Var(Y) = \frac{1}{(\lambda_2 + \lambda_{12})^2} + \frac{\lambda_{12} \lambda_2 [2\lambda_1 \lambda + \lambda_{12} \lambda_2]}{\lambda^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2 (\lambda_2 + \lambda_{12})^2},$$

$$E(XY) = \frac{2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_1}{\lambda (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_2 + \lambda_{12})} + \frac{\lambda_2}{\lambda (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_1 + \lambda_{12})}, \text{ e}$$

$$\text{Cov}(X,Y) = \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_{12} \lambda + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_{12}^2}{\lambda^2 (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_1 + \lambda_{12}) (\lambda_2 + \lambda_{12})}.$$

Portanto, a correlação entre X e Y é dada por:

$$\begin{aligned} \rho_{XY} &= \lambda_{12} [(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_{12}] \\ &\quad \cdot [(\lambda_1 + \lambda_2)^2 (\lambda_1 + \lambda_{12})^2 + \lambda_2 (\lambda_2 + 2\lambda_1) \lambda^2]^{-1} \\ &\quad \cdot [(\lambda_1 + \lambda_2)^2 (\lambda_2 + \lambda_{12})^2 + (\lambda_1 + 2\lambda_2) \lambda^2]^{-1}. \end{aligned}$$

3.3. ESTIMAÇÃO E TESTES DE HIPÓTESES UTILIZANDO A DISTRIBUIÇÃO DERIVADA DA BLOCK-BASU, SEGUNDO GROSS E LAM

Gross e Lam (1981) apresentaram uma análise de dados pareados, que envolve estimação e teste de hipótese para investigar a igualdade das distribuições marginais dos tempos de sobrevivência. Dois casos foram considerados: (i) onde as observações pareadas (X, Y) são consideradas estatisticamente independentes e as distribuições marginais são exponenciais; (ii) onde X e Y não são independentes e a distribuição básica conjunta considerada é a distribuição ACBVE de Block-Basu.

Neste artigo de Gross e Lam, a sobrevivência foi considerada como uma variável aleatória bivariada que pode ser vista como um processo de dois estágios, ou seja, dados pareados longitudinais. Foi considerado o seguinte exemplo: um paciente que com uma condição transitória, por exemplo, uma dor de cabeça, recebe um tratamento tal como um analgésico para aliviar a dor. O tempo para aliviar a dor é então uma variável aleatória X. Da próxima vez quando a mesma condição transitória ocorre no sujeito, um outro tratamento é aplicado e o tempo para aliviar a dor é definido como a variável aleatória Y. É assumindo que cada paciente retorna, para receber o segundo tratamento, com as condições idênticas àquelas antes do primeiro

tratamento. A questão principal é então: "Os tempos médios para aliviar a dor nos dois tratamentos são iguais?". Como as variáveis aleatórias X e Y são medições de um mesmo indivíduo, são geralmente correlacionadas. Portanto o uso de função de sobrevivência bivariado é claramente apropriado. As seguintes considerações foram feitas:

i) Tempos completos para o alívio dos n pacientes são disponíveis para os dois tratamentos; i.é, o i -ésimo paciente tem o tempo para o alívio (x_i, y_i) , onde x_i é o tempo para o alívio pelo primeiro tratamento e o y_i é o tempo para o alívio pelo segundo tratamento, $i = 1, \dots, n$.

ii) As variáveis X e Y têm um modelo de falha bivariado com densidade de probabilidade $f_{XY}(xy)$, cujas distribuições marginais pertencem à classe de IHR (increasing hazard rate) (Barlow & Proschan, 1965 e Harris, 1970).

iii) A densidade $f_{XY}(x,y)$ é absolutamente contínua em x e y , portanto é aplicável para o problema de determinar um teste de igualdade dos tempos médios para o alívio.

iv) O segundo tratamento é aplicado assim que as mesmas condições transitórias do paciente antes do primeiro tratamento ocorram novamente. Portanto, não há efeitos periódicos nem sobrepostos.

Considerou-se $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ uma amostra de tempos de falha (ou de sobrevivência) em pares, com densidade conjunta $f_{XY}(x,y)$. Foi utilizada a transformação $T = Y/X$, onde, sem perda de generalidade, $X > 0$. Pode-se verificar que a densidade conjunta de X e T , $f_{XT}(x,t)$, é $xf_{XY}(x, xt)$. A função de densidade marginal de T é então $f_T(t)$, onde

$$f_T(t) = \int_0^{\infty} f_{XT}(x,t) dx = \int_0^{\infty} xf_{XY}(x,xt) dx. \quad (3.6)$$

A partir dos dados (x_i, y_i) , $t_i = y_i/x_i$, $i = 1, \dots, n$, são obtidos, isto é, t_1, t_2, \dots, t_n . A função de verossimilhança dos dados é dada por $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_T(t_i)$, onde θ é o vetor de parâmetros. Observa-se que, utilizando esta transformação, a análise se reduz ao caso univariado.

3.3.1. TESTE DE IGUALDADE DAS DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS USANDO A DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA INDEPENDENTE

Primeiramente, Gross e Lam consideraram o modelo de falha exponencial bivariado independente, isto é, a variável aleatória (X_i, Y_i) , que representa o i -ésimo tempo de falha, tem a seguinte função de falha conjunta:

$$f_{XY}(x_i, y_i) = \lambda_1 \lambda_2 \exp\{-(\lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i)\} \quad (3.7)$$

$x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $i = 1, \dots, n$. Com a transformação $T = Y/X$, $X > 0$, obtém-se a densidade de T , usando (3.6):

$$r_T(t) = \frac{\xi}{(1 + \xi t)^2} \quad (3.8)$$

onde $\xi = \lambda_2 / \lambda_1$ e $t \geq 0$. Como a igualdade das marginais ocorre quando $\lambda_1 = \lambda_2$, para testar a igualdade das distribuições de falha marginais é suficiente testar $H_0: \xi = 1$ vs $H_1: \xi \neq 1$.

A função de verossimilhança é expressa por

$$L(\xi) = \prod_{i=1}^n \frac{\xi}{(1 + \xi t_i)^2} = \xi^n \prod_{i=1}^n (1 + \xi t_i)^{-2} \quad (3.9)$$

$$\text{e portanto,} \quad \log L(\xi) = n \log \xi - 2 \sum_{i=1}^n \log(1 + \xi t_i). \quad (3.10)$$

A função escore é

$$U(\xi) = \frac{\partial \log L(\xi)}{\partial \xi} = \frac{n}{\xi} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{1 + \xi t_i} \quad (3.11)$$

e a equação de verossimilhança é obtida igualando $U(\xi; t') = 0$, isto é:

$$\frac{n}{\xi} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{1 + \xi t_i} = 0 \quad (3.12)$$

O estimador de máxima verossimilhança de ξ , $\hat{\xi}$, baseado na amostra aleatória (t_1, t_2, \dots, t_n) , é então a solução da equação (3.12). Para isso, usa-se o método iterativo de Newton-Raphson que requer a derivada segunda da função $\log L(\xi)$, $-I(\xi)$, a função de informação observada:

$$-I(\xi) = \frac{\partial^2 \log L(\xi)}{\partial \xi^2} = -\frac{n}{\xi^2} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{t_i^2}{(1+\xi t_i)^2} \quad (3.13)$$

Sob a hipótese $H_0: \xi = 1$, a função de verossimilhança será:

$$L(\xi=1) = \prod_{i=1}^n (1 + t_i)^{-2} \quad (3.14)$$

Usando o teste da razão de verossimilhança, H_0 é rejeitada ao nível α se

$$-2 \log \Lambda > \chi_{1,\alpha}^2, \quad (3.15)$$

onde $\chi_{1,\alpha}^2$ é o valor da distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade no ponto $1 - \alpha$ de probabilidade e

$$\Lambda = \frac{L(\xi=1)}{L(\hat{\xi})} = \prod_{i=1}^n \hat{\xi}^{-1} (1+\hat{\xi} t_i)^2 (1+t_i)^{-2}, \quad (3.16)$$

com $L(\xi = 1)$ dada por (3.14) e $L(\hat{\xi})$ dada por (3.9), substituindo ξ por $\hat{\xi}$.

3.3.2. TESTES DE IGUALDADE E DE INDEPENDÊNCIA DAS MARGINAIS USANDO A DISTRIBUIÇÃO DE BLOCK-BASU

No segundo caso considerado por Gross e Lam, a independência entre X e Y não é assumida e a densidade básica conjunta é definida pelo modelo exponencial bivariado de Block-Basu. Sejam (x_1, y_1) ,

$(x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ o conjunto de tempos de falha observados em pares, e (X_i, Y_i) tem densidade definido por (3.1), $X_i \neq Y_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Note que (3.1) reduz a (3.7) quando $\lambda_{12} = 0$. Seja $T = Y/X$, $X > 0$. Pode-se mostrar que a distribuição marginal de T , usando (3.6), é:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{\lambda_1 \lambda (\lambda_2 + \lambda_{12})}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{1}{\{\lambda_1 + (\lambda_2 + \lambda_{12})t\}^2}, & t > 1, \\ \frac{\lambda_2 \lambda (\lambda_1 + \lambda_{12})}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{1}{\{(\lambda_1 + \lambda_{12}) + \lambda_2 t\}^2}, & 0 < t < 1. \end{cases} \quad (3.17)$$

que pode ser escrita como:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{(1 + \xi + \xi_{12})(\xi + \xi_{12})}{(1 + \xi)} \frac{1}{\{1 + (\xi + \xi_{12})t\}^2}, & t > 1, \\ \frac{\xi(1 + \xi + \xi_{12})(1 + \xi_{12})}{(1 + \xi)} \frac{1}{\{(1 + \xi_{12}) + \xi t\}^2}, & 0 < t < 1. \end{cases} \quad (3.18)$$

onde $\xi = \lambda_2/\lambda_1$ e $\xi_{12} = \lambda_{12}/\lambda_1$, $\xi > 0$, e $\xi_{12} > \max\{-1, -\xi\}$.

Considerando agora, os n pares observados (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, estejam ordenados de tal forma nos primeiros r pares o primeiro componente falha antes ($x_i < y_i$, $p/ i = 1, \dots, r$); e em outros $n-r$ pares o segundo componente falha antes ($x_i > y_i$, $p/ i = r+1, \dots, n$). Portanto a função de verossimilhança para a amostra $(t_1, \dots, t_n)'$ é escrita como

$$L(\xi, \xi_{12}) = \Delta_1(r) \Delta_2(n-r) \Delta_3 \prod_{i \leq r} \{(1 + \xi_{12}) + \xi t_i\}^{-2} \prod_{i \geq r+1} \{1 + (\xi + \xi_{12})t_i\}^{-2}, \quad (3.19)$$

onde $\Delta_1(r) = \xi^r (1 + \xi_{12})^r$, $\Delta_2(n-r) = (\xi + \xi_{12})^{n-r}$, e $\Delta_3(r) = \{(1 + \xi + \xi_{12}) / (1 + \xi)\}^n$. As observações (t_1, \dots, t_r) são valores entre 0 e 1 e as observações (t_{r+1}, \dots, t_n) são maiores que 1. Observou-se que, a expressão (3.19) acima está incorreta no artigo em revisão.

Portanto, os estimadores de máxima verossimilhança, $\hat{\xi}$ e $\hat{\xi}_{12}$, de ξ e ξ_{12} , respectivamente, são conjuntamente a solução do sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \xi} &= \frac{r}{\xi} + \frac{n-r}{\xi + \xi_{12}} + \frac{n}{(1 + \xi + \xi_{12})} - \frac{n}{1 + \xi} \\ &- 2 \sum_{1 \leq r} \left\{ \frac{t_1}{(1 + \xi_{12}) + \xi t_1} \right\} - 2 \sum_{1 > r} \left\{ \frac{t_1}{1 + (\xi + \xi_{12}) t_1} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \xi_{12}} &= \frac{r}{1 + \xi_{12}} + \frac{n-r}{\xi + \xi_{12}} + \frac{n}{(1 + \xi + \xi_{12})} \\ &- 2 \sum_{1 \leq r} \left\{ \frac{1}{(1 + \xi_{12}) + \xi t_1} \right\} - 2 \sum_{1 > r} \left\{ \frac{t_1}{1 + (\xi + \xi_{12}) t_1} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Observou-se que, mais uma vez, as expressões (3.20) e (3.21) acima estão incorretas no artigo.

Novamente, pelo método Newton-Raphson, pode-se estimar os parâmetros ξ e ξ_{12} , usando a derivada segunda da função $\log L(\xi, \xi_{12}; t')$, $-I(\xi, \xi_{12})$, uma matriz 2x2 da seguinte forma:

$$-I(\xi, \xi_{12}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial \xi \partial \xi_{12}} \\ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \xi_{12} \partial \xi} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial \xi_{12}^2} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \xi^2} &= -\frac{r}{\xi^2} - \frac{n-r}{(\xi + \xi_{12})^2} - \frac{n}{(1 + \xi + \xi_{12})^2} + \frac{n}{(1 + \xi)^2} \\ &+ 2 \sum_{1 \leq r} \left\{ \frac{t_1^2}{[(1 + \xi_{12}) + \xi t_1]^2} \right\} + 2 \sum_{1 > r} \left\{ \frac{t_1^2}{[1 + (\xi + \xi_{12}) t_1]^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \xi_{12}^2} = - \frac{r}{(1+\xi_{12})^2} - \frac{n-r}{(\xi+\xi_{12})^2} - \frac{n}{(1+\xi+\xi_{12})^2} \\ + 2 \sum_{i \leq r} \left\{ \frac{1}{[(1+\xi_{12})+\xi t_i]^2} \right\} + 2 \sum_{i > r} \left\{ \frac{t_i^2}{[1+(\xi+\xi_{12})t_i]^2} \right\} \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \xi \partial \xi_{12}} = \frac{\partial^2 \log L}{\partial \xi_{12} \partial \xi} = - \frac{n-r}{(\xi+\xi_{12})^2} - \frac{n}{(1+\xi+\xi_{12})^2} \\ + 2 \sum_{i \leq r} \left\{ \frac{t_i}{[(1+\xi_{12})+\xi t_i]^2} \right\} + 2 \sum_{i > r} \left\{ \frac{t_i^2}{[1+(\xi+\xi_{12})t_i]^2} \right\} \quad (3.25)$$

Para testar a igualdade das distribuições de falha neste caso, testa-se a hipótese nula $H_0 : \xi = 1$ contra a hipótese alternativa $H_1 : \xi \neq 1$. Sob a hipótese H_0 , a função de verossimilhança será:

$$L(\xi_{12}; t') = \left\{ (2 + \xi_{12}) (1 + \xi_{12}) / 2 \right\}^n \cdot \\ \prod_{i \leq r} \{(1 + \xi_{12}) + t_i\}^{-2} \prod_{i > r} \{1 + (1 + \xi_{12})t_i\}^{-2}, \quad (3.26)$$

E o estimador de máxima verossimilhança, $\tilde{\xi}_{12}$, de ξ_{12} sob H_0 é a solução da equação de verossimilhança:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \xi_{12}} = \frac{n}{2+\xi_{12}} + \frac{n}{1+\xi_{12}} - 2 \sum_{i \leq r} \left\{ \frac{1}{(1+\xi_{12}) + t_i} \right\} \\ - 2 \sum_{i > r} \left\{ \frac{t_i}{1+(1+\xi_{12})t_i} \right\} = 0 \quad (3.27)$$

Para usar o processo iterativo de Newton-Raphson, é preciso da função de informação observada, que é a derivada segunda do $\log L(\xi_{12})$ em relação a ξ_{12} com sinal de menos, onde

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \xi_{12}^2} = - \frac{n}{(2+\xi_{12})^2} - \frac{n}{(1+\xi+\xi_{12})^2} + 2 \sum_{i \leq r} \left\{ \frac{1}{[(1+\xi_{12}) + t_i]^2} \right\} + 2 \sum_{i > r} \left\{ \frac{t_i^2}{[1+(1+\xi_{12})t_i]^2} \right\} \quad (3.28)$$

O teste da razão de verossimilhança para $H_0: \xi = 1$ contra $H_1: \xi \neq 1$ terá H_0 rejeitada para o nível de significância α se a condição $-2 \log \Lambda > \chi_{1,\alpha}^2$ for satisfeita

$$\text{onde} \quad \Lambda = \frac{L(\tilde{\xi}_{12})}{L(\hat{\xi}, \hat{\xi}_{12})} \quad (3.29)$$

com $L(\tilde{\xi}_{12})$ dada por (3.26), substituindo ξ por $\tilde{\xi}_{12}$, a estimativa de ξ sob H_0 ; e $L(\hat{\xi}, \hat{\xi}_{12})$ dada por (3.19) com ξ e ξ_{12} substituídas pelas suas estimativas, $\hat{\xi}$ e $\hat{\xi}_{12}$, respectivamente.

Finalmente, o teste da razão de verossimilhança que pode ser usado para testar a hipótese de independência das distribuições marginais de X e Y , $H_0: \xi_{12} = 0$ vs $H_1: \xi_{12} \neq 0$. A hipótese H_0 é rejeitada ao nível α se e somente se $-2 \log \Lambda > \chi_{1,\alpha}^2$, onde

$$\Lambda = \frac{L(\tilde{\xi})}{L(\hat{\xi}, \hat{\xi}_{12})} \quad (3.30)$$

com $L(\tilde{\xi})$ dada por (3.9), com ξ substituída por $\tilde{\xi}$; e $L(\hat{\xi}, \hat{\xi}_{12})$ dada por (3.19), com ξ e ξ_{12} substituídas por $\hat{\xi}$ e $\hat{\xi}_{12}$, respectivamente.

3.3.3. UM TESTE DE AJUSTE PARA O MODELO TEÓRICO

Para determinar se as suposições do modelo exponencial bivariado de Block-Basu são válidas para um vetor de amostra de observações $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$, o seguinte procedimento é recomendado por Gross e Lam:

- i) Seja $U = \min(X,Y)$. Teste para exponencialidade de U , usando um teste de bondade de ajuste qui-quadrado baseado nas observações $u_i = \min(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n$.
- ii) Seja $V = X - Y$. Testa se U e V têm correlação não nula, isto é, por coeficiente de correlação de postos de Spearman.
- iii) Teste para determinar se V tem f.d.a. :

$$F(v) = \begin{cases} 1 - \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1} \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_2)v\} & v \geq 0, \\ \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1} \exp(\lambda_2 + \lambda_1)v, & v < 0, \end{cases}$$

usando um teste de bondade de ajuste qui-quadrado baseado em v_1, \dots, v_n .

Se as hipóteses nulas são aceitas em (i)–(iii), então tem-se uma justificativa teórica considerável para aplicar o modelo exponencial bivariado de Block-Basu. Finalmente, um teste qui-quadrado pode ser usado para testar se a $T = Y/X$ tem distribuição descrita em (3.18).

3.3.4. REVISÃO DA APLICACÃO NUMÉRICA

Gross e Lam utilizaram o seguinte conjunto de dados para ilustrar a metodologia descrita nas sub-seções anteriores:

TABELA I. Tempos para o alívio de dor de cabeça usando tratamentos padrão e novo.

Obs	Tratamento	
	Padrão	Novo
1	8,4	6,9
2	7,7	6,8
3	10,1	10,3
4	9,6	9,4
5	9,3	8,0
6	9,1	8,8
7	9,0	6,1
8	7,7	7,4
9	8,1	8,0
10	5,3	5,1

Os autores realizaram o ajuste do modelo de Block-Basu verificando as condições descritas na seção 3.3.3, e concluíram o bom ajuste do modelo embora a condição iii) não tenha sido satisfeita.

Considerando o modelo irrestrito, as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetro ξ e ξ_{12} encontradas pelos autores foram $\hat{\xi} = 0,11$ e $\hat{\xi}_{12} = 8,84$. Sob a hipótese $H_0: \xi = 1$, a estimativa de ξ_{12} encontrada foi $\tilde{\xi}_{12} = 9,83$. O resultado do teste da razão de verossimilhança rejeitou a hipótese H_0 ($\alpha < 0,01$). Sob a hipótese $H_0: \xi_{12} = 0$, a estimativa de ξ foi $\tilde{\xi} = 0,67$, e o resultado do teste da razão de verossimilhança também rejeitou a hipótese H_0 ($\alpha < 0,01$).

A fim de realizar uma revisão mais completa do artigo e também para aplicações futuras, foi desenvolvido um program computacional, GROSS.PRG, que executa as análises propostas por Gross e Lam (APÊNDICE 4). Todas as etapas descritas no artigo para obter as estimativas dos parâmetros e os resultados dos testes foram refeitas utilizando este programa, considerando os dados da TABELA I subtraindo 5 (segundo o procedimento dos autores).

Nesta revisão, verificou-se que não existe estimador de máxima verossimilhança de ξ_{12} , tanto no modelo irrestrito como no modelo sob $H_0: \xi = 1$, pois a estimativa converge para o infinito. Os seguintes procedimentos foram realizados para estudar melhor este resultado:

1) Foram calculados os valores de $\log L(\xi, \xi_{12})$ utilizando vários valores de ξ e ξ_{12} , pode-se ver que as estimativas $\hat{\xi} = 0,11$ e $\hat{\xi}_{12} = 8,84$ encontradas pelos autores não produzem o máximo da função, como mostra a tabela abaixo. Note-se que sob a hipótese $H_0: \xi = 1$, a estimativa $\tilde{\xi}_{12} = 9,83$ também não maximiza a função $\log L(\xi = 1, \xi_{12})$.

TABELA II. $\log(\xi, \xi_{12})$ para vários valores de ξ e ξ_{12} .

$\xi_{12} \backslash \xi$	0,05	0,10	0,11	0,12	0,5	1
0,00	-31,5365	-26,0449	-25,3655	-24,7648	-18,5295	-18,6733
5,00	-12,1907	-11,9638	-11,9592	-11,9621	-13,4669	-15,6685
8,84	-11,8971	-11,6716	-11,6673	-11,6705	-13,1838	-15,3926
10,00	-11,8518	-11,6264	-11,6221	-11,6252	-13,1383	-15,3465
50,00	-11,5711	-11,3440	-11,3393	-11,3422	-12,8428	-15,0347
100,00	-11,5354	-11,3079	-11,3032	-11,3059	-12,8035	-14,9916

Note-se que o máximo da função de verossimilhança não é observada na TABELA II e $\log L(\xi, \xi_{12})$ é positivamente proporcional a ξ_{12} .

2) Foi realizado o gráfico de ξ_{12} vs. $\log L(\xi, \xi_{12})$ sob a hipótese $H_0: \xi = 1$ para melhor visualizar o comportamento da função $\log L(\xi, \xi_{12})$ quando ξ_{12} aumenta.

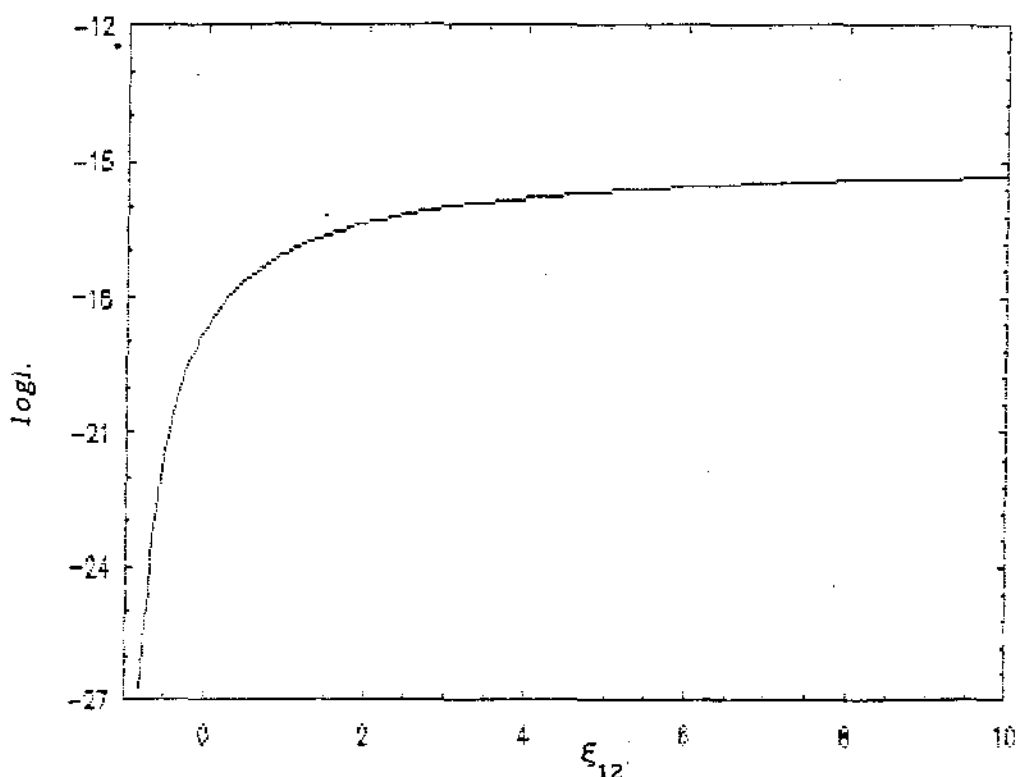


GRÁFICO I. ξ_{12} vs. $\log L(\xi, \xi_{12})$ sob $H_0: \xi = 1$.

Pode-se ver que a função $\log L(\xi, \xi_{12})$ é estritamente crescente com relação a ξ_{12} , o que indica a inexistência do estimador de máxima verossimilhança para este conjunto de dados em particular.

Baseado nesses resultados de estimação, conclui-se que os teste da razão de verossimilhança para a independência de X e Y e a igualdade das distribuições marginais de X e Y não são possíveis de se realizar para este conjunto de dados.

Os autores ressaltaram que entre vários testes realizados por Gross e Clark (1975), apenas o teste dos sinais mostrou uma diferença significativa para os dados originais (sem subtrair 5 dos dados), o que indicaria o modelo de Block-Basu ser sensitivo ao número de pares concordantes e discordantes na amostra.

3.4. ANÁLISE DE DADOS PAREADOS COMPLETOS

Nesta seção serão desenvolvidos a estimação dos parâmetros da distribuição bivariada de Block-Basu, usando o método de máxima verossimilhança, e testes das hipóteses de independência de X e Y e de igualdade das distribuições marginais de X e Y, usando os testes assintóticos da razão de verossimilhança, de Rao e de Wald.

3.4.1. ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

Seja uma amostra aleatória de n pares de observações (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, em sistemas de dois componentes e ordenados de tal forma nos primeiros r pares, o primeiro componente falha antes que o segundo, i.é, $x_i < y_i$, $p/ i = 1, \dots, r$; e em outros $n-r$ pares, o segundo componente falha antes que o primeiro, $x_i > y_i$, $p/ i = r+1, \dots, n$. Para estimar os parâmetros da distribuição ACBVE pelo método de máxima verossimilhança, a função de verossimilhança é construída:

$$\begin{aligned} L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}) &= [(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})/(\lambda_1 + \lambda_2)]^n [\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_{12})]^r \\ &\cdot [\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_{12})]^{(n-r)} \cdot \exp \left[-\lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i - \lambda_2 \sum_{i=1}^n y_i \right. \\ &\quad \left. - \lambda_{12} \left(\sum_{i=1}^r y_i + \sum_{i=r+1}^n x_i \right) \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Como o objetivo é testar a independência entre X e Y e a igualdade das marginais dadas em (3.3), para poder utilizar o teste de Rao mais adiante, é considerada a seguinte reparametrização: $\delta = \lambda_1 - \lambda_2$ de tal modo que os parâmetros da distribuição de Block-Basu são λ_1 , λ_{12} e $\delta = \lambda_1 - \lambda_2$. Portanto, a função de verossimilhança (3.31) será expressa por

$$\begin{aligned}
L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) &= \left[(2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) / (2\lambda_1 - \delta) \right]^n \left[\lambda_1 (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) \right]^r \\
&\cdot \left[(\lambda_1 - \delta) (\lambda_1 + \lambda_{12}) \right]^{(n-r)} \cdot \exp \left[-\lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i \right) + \delta \sum_{i=1}^n y_i \right. \\
&\quad \left. - \lambda_{12} \left(\sum_{i=1}^r y_i + \sum_{i=r+1}^n x_i \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.32}$$

e o logaritmo de $L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ dado por

$$\begin{aligned}
\log L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) &= n \log \left((2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) / (2\lambda_1 - \delta) \right) \\
&+ r \log \left(\lambda_1 (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) \right) + (n-r) \log \left((\lambda_1 - \delta) (\lambda_1 + \lambda_{12}) \right) \\
&+ \left[-\lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i \right) + \delta \sum_{i=1}^n y_i - \lambda_{12} \left(\sum_{i=1}^r y_i + \sum_{i=r+1}^n x_i \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.33}$$

As funções escores são dadas por

$$\begin{aligned}
U_{\lambda_1}(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) &= 2n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) - 2n / (2\lambda_1 - \delta) + r / \lambda_1 + r / (\lambda_1 - \delta) \\
&+ (n-r) / (\lambda_1 - \delta) + (n-r) / (\lambda_1 + \lambda_{12}) - \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
U_{\lambda_{12}}(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) &= n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) + r / (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) \\
&+ (n-r) / (\lambda_1 + \lambda_{12}) - \sum_{i=1}^r y_i - \sum_{i=r+1}^n x_i
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
U_{\delta}(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) &= -n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) + n / (2\lambda_1 - \delta) \\
&- r / (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) - (n-r) / (\lambda_1 - \delta) + \delta \sum_{i=1}^n y_i
\end{aligned} \tag{3.36}$$

A matriz de informação observada do vetor $(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ é utilizada no processo iterativo de Newton-Raphson para encontrar as estimativas dos parâmetros e é dada por:

$$I(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) = - \begin{bmatrix} \partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2 & \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta & \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} \\ \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta & \partial^2 \log L / \partial \delta^2 & \partial^2 \log L / \partial \delta \partial \lambda_{12} \\ \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} & \partial^2 \log L / \partial \delta \partial \lambda_{12} & \partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

onde

$$\begin{aligned} \partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2 &= -4n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 + 4n / (2\lambda_1 - \delta)^2 - r / \lambda_1^2 \\ &\quad - n / (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 - (n-r) / (\lambda_1 - \delta)^2 - (n-r) / (\lambda_1 + \lambda_{12})^2, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2 = -n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 - r / (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 - (n-r) / (\lambda_1 + \lambda_{12})^2, \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 \log L / \partial \delta^2 &= -n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 + n / (2\lambda_1 - \delta)^2 - r / (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 \\ &\quad - (n-r) / (\lambda_1 - \delta)^2, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} &= -2n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 - r / (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 \\ &\quad - (n-r) / (\lambda_1 + \lambda_{12})^2, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta &= 2n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 - 2n / (2\lambda_1 - \delta)^2 + r / (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 \\ &\quad + (n-r) / (\lambda_1 - \delta)^2, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta = n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 + r / (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2. \quad (3.43)$$

Pela propriedade 4 desta distribuição, dada na seção 3.2.: $\min(X, Y) \sim \text{Exp}(\lambda)$, o EMV de λ é, portanto, dado por:

$$\hat{\lambda} = n / \sum_{i=1}^n \min(x_i, y_i). \quad (3.44)$$

que pode ser utilizado como uma informação útil para o chute inicial dos parâmetros no processo iterativo.

3.4.2. TESTE DE INDEPENDÊNCIA ENTRE X E Y

As marginais X e Y da distribuição exponencial bivariada de Block-Basu são independentemente distribuídas com $X \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ e $Y \sim \text{Exp}(\lambda_2)$, quando $\lambda_{12} = 0$ (propriedade 3, seção 3.2.). Portanto, para testar se X e Y são independentes basta testar a hipótese $H_0: \lambda_{12} = 0$ vs. $H_1: \lambda_{12} \neq 0$. Os testes estatísticos a serem considerados a seguir são os testes assintóticos da razão de verossimilhança, de Rao (escore) e de Wald.

TESTE DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA

Sob a hipótese de independência $H_0: \lambda_{12} = 0$, a função de verossimilhança (3.32) é expressa como

$$L(\lambda_1, \delta) = \lambda_1^n (\lambda_1 - \delta)^n \exp \left[-\lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i \right) + \delta \sum_{i=1}^n y_i \right] \quad (3.45)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança de λ_1 e δ são, respectivamente:

$$\tilde{\lambda}_1 = n / \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{e} \quad \tilde{\delta} = n / \sum_{i=1}^n x_i - n / \sum_{i=1}^n y_i. \quad (3.46)$$

A hipótese H_0 é rejeitada ao nível α se $-2 \log \Lambda > \chi_{1, \alpha}^2$, onde

$$\Lambda = \frac{L(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta})}{L(\hat{\lambda}_1, \hat{\delta}, \hat{\lambda})} \quad (3.47)$$

com $L(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta})$ dada por (3.45) e λ_1 e δ substituídos por $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\delta}$, estimados sob a hipótese $H_0: \lambda_{12} = 0$, e $L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})$ dada por (3.32) com λ_1 , λ_{12} e δ substituídas por suas estimativas de máxima verossimilhança, $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_{12}$ e $\hat{\delta}$, respectivamente.

TESTE DE RAO (ESCORE)

Para testar $H_0: \lambda_{12} = 0$, o vetor dos parâmetros é particionado em $(\lambda_{12}, (\lambda_1, \delta))'$ e o vetor escore parcial com relação a λ_{12} sob a hipótese $H_0: \lambda_{12}=0$ é

$$\begin{aligned} U_{\lambda_{12}}(\tilde{\lambda}, \tilde{\delta}) &= \partial \log L(\lambda_{12}, \lambda_1, \delta) / \partial \lambda_{12} \big|_{\lambda_{12}=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \delta=\tilde{\delta}} \\ &= n/(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) + r/(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) + (n-r)/\tilde{\lambda}_1 - \sum_{i=1}^r y_i - \sum_{i=r+1}^n x_i \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde $L(\lambda_{12}, \lambda_1, \delta)$ é a função de verossimilhança sob o modelo irrestrito (3.32).

A matriz de informação de Fisher observada parcial com relação a λ_{12} sob a hipótese nula é denotada por $\tilde{I}_{\lambda_{12}}^{11}$ e é definida como $\tilde{I}_{\lambda_{12}}^{11} = I_{\lambda_{12}}^{11}(\tilde{\lambda}, \tilde{\delta}) = \left(\tilde{I}_{11} - \tilde{I}_{12} (\tilde{I}_{22})^{-1} \tilde{I}_{21} \right)^{-1}$, onde

$$\begin{aligned} -\tilde{I}_{11} &= \partial^2 \log L(\lambda_{12}, \lambda_1, \delta) / \partial \lambda_{12}^2 \big|_{\lambda_{12}=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \delta=\tilde{\delta}} = a \\ -\tilde{I}_{21} = -\tilde{I}'_{12} &= \left[\begin{array}{c} \partial^2 \log L(\lambda_{12}, \lambda_1, \delta) / \partial \lambda_{12} \partial \lambda_1 \\ \partial^2 \log L(\lambda_{12}, \lambda_1, \delta) / \partial \lambda_{12} \partial \delta \end{array} \right] \bigg|_{\lambda_{12}=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \delta=\tilde{\delta}} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} \\ -\tilde{I}_{22} &= \left[\begin{array}{cc} \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta) / \partial \lambda_1^2 & \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta) / \partial \lambda_1 \partial \delta \\ \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta) / \partial \delta \partial \lambda_1 & \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta) / \partial \delta^2 \end{array} \right] \bigg|_{\lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \delta=\tilde{\delta}} = \begin{bmatrix} d & e \\ e & f \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde $L(\lambda_{12}, \lambda_1, \delta)$ é dada por (3.32) e $L(\lambda_1, \delta)$ dada por (3.45). As funções a, b, c, d, e, e f citadas acima são expressas por

$$a = -n/(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2 - r/(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2 - (n-r)/\tilde{\lambda}_1^2, \quad (3.49)$$

$$b = -2n/(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2 - r/(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2 - (n-r)/\tilde{\lambda}_1^2, \quad (3.50)$$

$$c = n/(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2 + r/(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2, \quad (3.51)$$

$$d = -n/\tilde{\lambda}_1^2 - n/(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2, \quad (3.52)$$

$$e = n/(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2, \quad e \quad (3.53)$$

$$f = -n/(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2. \quad (3.54)$$

onde $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\delta}$ são as estimativas de λ_1 e δ sob $H_0: \lambda_{12} = 0$, dadas por (3.52).

A hipótese de independência de X e Y é rejeitada ao nível α se

$$U_{\lambda_{12}}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta})^2 * I_{\lambda_{12}}^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta}) > \chi_{1, \alpha}^2. \quad (3.55)$$

TESTE DE WALD

Para o teste de Wald, a estatística usada é $(\hat{\lambda}_{12})^2 / \hat{I}_{\lambda_{12}}^{11}$, onde $\hat{I}_{\lambda_{12}}^{11} = I_{\lambda_{12}}^{11}(\hat{\lambda}_{12}, \hat{\lambda}_1, \hat{\delta}) = \left(\hat{I}_{11} - \hat{I}_{12} (\hat{I}_{22})^{-1} \hat{I}_{21} \right)^{-1}$, com

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_{11} & \hat{I}_{12} \\ \hat{I}_{21} & \hat{I}_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12}} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12}}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta} \\ \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \delta^2} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

calculada no ponto $(\hat{\lambda}_{12}, \hat{\lambda}_1, \hat{\delta})$, usando a função de verossimilhança $L = L(\lambda_{12}, \lambda_1, \delta)$ dada por (3.32).

As derivadas segundas da matriz de informação (3.56) acima são as mesmas da matriz de informação (3.37), com as posições modificadas de acordo com a partição do vetor dos parâmetros feita para o teste.

Sob a hipótese $H_0: \lambda_{12} = 0$, a estatística de Wald $W = (\hat{\lambda}_{12})^2 / \hat{I}_{\lambda_{12}}^{11}$ possui uma distribuição assintótica qui-quadrado com 1 grau de liberdade. Portanto a hipótese de independência ($\lambda_{12} = 0$) é rejeitada se $W > \chi_{1, \alpha}^2$, onde $\chi_{1, \alpha}^2$ é o valor da distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade no ponto $1 - \alpha$ de probabilidade.

3.4.3. TESTE DE IGUALDADE DAS DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS DE X E Y

Quando o modelo usado é de independência entre as marginais, a distribuição de Block-Basu é simplificada para um produto de duas distribuições exponenciais univariadas com a função densidade conjunta dada por (3.7). A análise de igualdade das distribuições marginais para este caso é bastante simples (usando a transformação $T=Y/X$, como já foi visto em 3.3.1), não será discutida neste capítulo.

Quando a distribuição considerada é a de Block-Basu com os parâmetros $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_{12} > \max(-\lambda_1, -\lambda_2)$ a igualdade das distribuições marginais de X e Y ocorre quando $\lambda_1 = \lambda_2$. Portanto, para testar a igualdade das distribuições de X e Y basta testar a hipótese $H_0: \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ ou considerar o parâmetro δ , $\delta = \lambda_1 - \lambda_2$, e testar a hipótese $H_0: \delta = 0$ vs. $H_1: \delta \neq 0$.

Considerando a função de verossimilhança dada em (3.32), testes assintóticos da razão de verossimilhança, de Rao e de Wald são utilizados para testar $H_0: \delta = 0$ vs. $H_1: \delta \neq 0$.

TESTE DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA

Sob a hipótese nula $H_0: \delta = 0$, a função de verossimilhança é expressa por

$$L(\lambda_1, \lambda_{12}) = \left[(2\lambda_1 + \lambda_{12}) / (2\lambda_1) \right]^n \cdot \left[\lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_{12}) \right]^n \cdot \exp \left[-\lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i \right) - \lambda_{12} \left(\sum_{i=1}^r y_i + \sum_{i=r+1}^n x_i \right) \right]. \quad (3.57)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança de λ_1 e λ_{12} são conjuntamente a solução das equações de verossimilhança:

$$\partial \log L / \partial \lambda_1 = 2n / (2\lambda_1 + \lambda_{12}) + n / (\lambda_1 + \lambda_{12}) - \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i = 0, \text{ e} \quad (3.58)$$

$$\partial \log L / \partial \lambda_{12} = n / (2\lambda_1 + \lambda_{12}) + n / (\lambda_1 + \lambda_{12}) - \sum_{i=1}^r y_i - \sum_{i=r+1}^n x_i = 0. \quad (3.59)$$

As derivadas segundas são necessárias para calcular a matriz de informação de Fisher observada, utilizada no processo iterativo de Newton-Raphson para encontrar as estimativas dos parâmetros:

$$\partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2 = -4n / (2\lambda_1 + \lambda_{12})^2 - n / (\lambda_1 + \lambda_{12})^2, \quad (3.60)$$

$$\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} = -2n / (2\lambda_1 + \lambda_{12})^2 - n / (\lambda_1 + \lambda_{12})^2, \text{ e} \quad (3.61)$$

$$\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2 = -n / (2\lambda_1 + \lambda_{12})^2 - n / (\lambda_1 + \lambda_{12})^2. \quad (3.62)$$

O teste da razão de verossimilhança rejeita $H_0: \delta = 0$ em favor de $H_1: \delta \neq 0$ para o nível de significância α se a condição $-2 \log \Lambda > \chi_{1, \alpha}^2$ for satisfeita,

$$\text{onde} \quad \Lambda = \frac{L(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})}{L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})} \quad (3.63)$$

e $L(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})$ é a função de verossimilhança sob H_0 (3.57), avaliada no ponto $(\lambda_1, \lambda_{12}) = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})$, e $L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})$ é a função de verossimilhança sem restrição (3.32), avaliada no ponto $(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})$.

TESTE DE RAO

Particionando-se o vetor dos parâmetros em $(\delta, (\lambda_1, \lambda_{12}))'$, o vetor escore parcial com relação a δ $U_{\delta}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})$ é calculado, obtendo-se

$$\begin{aligned} U_{\delta}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12}) &= \partial \log L(\delta, \lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \delta \big|_{\delta=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \lambda_{12}=\tilde{\lambda}_{12}} \\ &= -n / (2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) + n / 2\tilde{\lambda}_1 - r / (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) - (n-r) / \tilde{\lambda}_1 + \sum_{i=1}^n y_i, \end{aligned}$$

onde $L(\delta, \lambda_1, \lambda_{12})$ é a função de verossimilhança sem nenhuma restrição dada em (3.32).

A matriz de informação de Fisher observada parcial com relação a δ sob a hipótese nula é definida como

$$I_{\delta}^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12}) = \left(\tilde{I}_{11} - \tilde{I}_{12} (\tilde{I}_{22})^{-1} \tilde{I}_{21} \right)^{-1}, \quad \text{onde}$$

$$-\tilde{I}_{11} = \partial^2 \log L(\delta, \lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \delta^2 \Big|_{\delta=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \lambda_{12}=\tilde{\lambda}_{12}} = a$$

$$-\tilde{I}_{21} = -\tilde{I}'_{12} = \left[\begin{array}{c} \partial^2 \log L(\delta, \lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \delta \partial \lambda_1 \\ \partial^2 \log L(\delta, \lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \delta \partial \lambda_{12} \end{array} \right] \Big|_{\delta=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \lambda_{12}=\tilde{\lambda}_{12}} = \left[\begin{array}{c} b \\ c \end{array} \right]$$

$$-\tilde{I}_{22} = \left[\begin{array}{cc} \partial^2 \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \lambda_1^2 & \partial^2 \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} \\ \partial^2 \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} & \partial^2 \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \lambda_{12}^2 \end{array} \right] \Big|_{\lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \lambda_{12}=\tilde{\lambda}_{12}} \\ = \left[\begin{array}{cc} d & e \\ e & f \end{array} \right]$$

com $L(\delta, \lambda_1, \lambda_{12})$ dada em (3.32), e $L(\lambda_1, \lambda_{12})$ a função de verossimilhança sob H_0 dada em (3.57). As funções a, b, e c citadas acima são as seguintes:

$$a = -n/(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2 + n/4\tilde{\lambda}_1^2 - r/(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})^2 - (n-r)/\tilde{\lambda}_1^2 \quad (3.64)$$

$$b = 2n/(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})^2 - n/2\tilde{\lambda}_1^2 + r/(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})^2 + (n-r)/\tilde{\lambda}_1^2 \quad (3.65)$$

$$c = n/(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})^2 + r/(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})^2 \quad (3.66)$$

e as funções d, e e f são dados por (3.60), (3.61) e (3.62), respectivamente, com λ_1 e λ_{12} substituídos por suas estimativas de máxima verossimilhança $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\lambda}_{12}$.

A hipótese de igualdade das distribuições de X e Y é rejeitada ao nível α se

$$U_{\delta}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})^2 * I_{\delta}^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12}) > \chi_{1,\alpha}^2. \quad (3.67)$$

TESTE DE WALD

Para o teste de Wald, calcula-se a matriz de informação de Fisher parcial sob a hipótese alternativa, isto é, usando o modelo irrestrito: $\hat{I}_{\delta}^{11} = I_{\delta}^{11}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta}) = (\hat{I}_{11} - \hat{I}_{12} (\hat{I}_{22})^{-1} \hat{I}_{21})^{-1}$, com

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_{11} & \hat{I}_{12} \\ \hat{I}_{21} & \hat{I}_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log L / \partial \delta^2}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12}} \\ \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12}} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12}}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

calculada no ponto $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})$, usando a função de verossimilhança $L = L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ dada por (3.32).

As expressões das derivadas segundas da matriz de informação (3.68) descrita acima são as mesmas utilizadas na matriz (3.37) dadas por (3.38), (3.39), (3.40), (3.41), (3.42) e (3.43).

Sob o $H_0: \delta = 0$, a estatística de Wald $W = (\hat{\delta})^2 / \hat{I}_{\delta}^{11}$ possui distribuição assintótica qui-quadrado com 1 grau de liberdade. Portanto, a hipótese de igualdade das marginais de X e Y é rejeitada se $W > \chi_{1, \alpha}^2$.

3.5. ANÁLISE DE DADOS PAREADOS COM PRESENÇA DE CENSURAS

Seja (X, Y) variável aleatória bivariada de um sistema de dois componentes onde X representa o tempo de falha do primeiro componente e Y do segundo. Será estudada nesta seção a análise de dados pareados com presença de censuras à direita no segundo componente do sistema, isto é, em Y. Este é um caso típico de censuras em dados pareados quando são observados longitudinalmente, onde a observação de Y só pode ser feita após a falha de X.

3.5.1. ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

Seja C_1 o conjunto de observações onde x_i e y_i são ambos tempos de falha, e C_2 o conjunto de observações onde x_i é tempo de falha e y_i de censura. Neste caso, a função de verossimilhança é expressa por

$$L = \prod_{i \in C_1} f(x_i, y_i) \cdot \prod_{i \in C_2} \frac{-\partial S(x_i, y_i)}{\partial x_i}, \quad (3.69)$$

onde $-\partial S(x_i, y_i)/\partial x_i$ representa a probabilidade conjunta de X_i falhar em x_i e Y_i sobreviver (censura) a y_i .

Considerando a distribuição de Block-Basu, sejam (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, observações ordenadas da seguinte forma:

$$(x_i, y_i) \in C_1, \text{ e } x_i < y_i, \quad i = 1, \dots, r_1;$$

$$(x_i, y_i) \in C_1, \text{ e } x_i > y_i, \quad i = r_1 + 1, \dots, r_2;$$

$$(x_i, y_i) \in C_2 \text{ e } x_i < y_i, \quad i = r_2 + 1, \dots, r_3;$$

$$(x_i, y_i) \in C_2 \text{ e } x_i > y_i, \quad i = r_3 + 1, \dots, n.$$

A função de verossimilhança dada em (3.69) é expressa por

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{r_1} f(x_i, y_i) \cdot \prod_{i=r_1+1}^{r_2} f(x_i, y_i) \cdot \prod_{i=r_2+1}^{r_3} \frac{-\partial S(x_i, y_i)}{\partial x_i} \cdot \prod_{i=r_3+1}^n \frac{-\partial S(x_i, y_i)}{\partial x_i} \quad (3.70)$$

com $\theta = (\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$.

Quando a distribuição básica é a de Block-Basu, a função de Sobrevivência é dada por (3.2):

$$S(x_i, y_i) = \lambda / (\lambda_1 + \lambda_2) \exp[-\lambda_1 x_i - \lambda_2 y_i - \lambda_{12} \max(x_i, y_i)] \\ - \lambda_{12} / (\lambda_1 + \lambda_2) \exp[-\lambda \max(x_i, y_i)] \quad x_i, y_i \geq 0,$$

onde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$. Então, tem-se que

$$\frac{-\partial S(x_1, y_1)}{\partial x_1} = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \exp[-\lambda_1 x_1 - (\lambda_2 + \lambda_{12}) y_1] & \text{se } x < y, \\ \frac{\lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_{12})}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) x_1 - \lambda_2 y_1] - \frac{\lambda_1 \lambda_{12}}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \exp(-\lambda x_1), & \text{se } x > y. \end{cases} \quad (3.71)$$

Portanto, a função de verossimilhança da distribuição de Block-Basu com presença de censuras à direita em Y pode ser expressa como

$$\begin{aligned} L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}) = & \prod_{i=1}^{r1} \left\{ \lambda_1 \lambda (\lambda_2 + \lambda_{12}) / (\lambda_1 + \lambda_2) \exp[-\lambda_1 x_i - (\lambda_2 + \lambda_{12}) y_i] \right\} \\ & \cdot \prod_{i=r1+1}^{r2} \left\{ \lambda_2 \lambda (\lambda_1 + \lambda_{12}) / (\lambda_1 + \lambda_2) \exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) x_i - \lambda_2 y_i] \right\} \\ & \cdot \prod_{i=r2+1}^{r3} \left\{ \lambda_1 \lambda / (\lambda_1 + \lambda_2) \exp[-\lambda_1 x_i - (\lambda_2 + \lambda_{12}) y_i] \right\} \\ & \cdot \prod_{i=r3+1}^n \left\{ \lambda (\lambda_1 + \lambda_{12}) / (\lambda_1 + \lambda_2) \exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) x_i - \lambda_2 y_i] \right. \\ & \left. - \lambda_{12} \lambda / (\lambda_1 + \lambda_2) \exp(-\lambda x_i) \right\}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Sejam $n1=r1$, $n2 = r2-r1$, $n3 = r3-r2$ e $n4 = n-r3$, a função (3.72) acima pode ser reescrita em termos de λ_1 , λ_{12} e δ como:

$$\begin{aligned} L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) = & \left[(2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) / (2\lambda_1 - \delta) \right]^n \left[\lambda_1 (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) \right]^{n1} \\ & \left[(\lambda_1 - \delta) (\lambda_1 + \lambda_{12}) \right]^{n2} \lambda_1^{n3} \exp \left[-\lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^{r3} y_i \right) \right. \\ & \left. + \delta \sum_{i=1}^{r3} y_i - \lambda_{12} \left(\sum_{i=1}^{r1} y_i + \sum_{i=r1+1}^{r2} x_i + \sum_{i=r2+1}^{r3} y_i + \sum_{i=r3+1}^n x_i \right) \right] \\ & \prod_{i=r3+1}^n \left\{ (\lambda_1 + \lambda_{12}) \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] - \lambda_{12} \exp[-(\lambda_1 - \delta) x_i] \right\}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

e o log da função de verossimilhança será

$$\begin{aligned}
 \log L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) = & n \log(2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) - n \log(2\lambda_1 - \delta) + n_1 \log \lambda_1 + n_1 \log(\lambda_1 \\
 & - \delta + \lambda_{12}) + n_2 \log(\lambda_1 - \delta) + n_2 \log(\lambda_1 + \lambda_{12}) + n_3 \log \lambda_1 - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right. \\
 & + \sum_{i=1}^{r3} y_i \left. \right) + \delta \sum_{i=1}^{r3} y_i - \lambda_{12} \left(\sum_{i=1}^{r1} y_i + \sum_{i=r1+1}^{r2} x_i + \sum_{i=r2+1}^{r3} y_i + \sum_{i=r3+1}^n x_i \right) \\
 & + \sum_{i=r3+1}^n \log \{ (\lambda_1 + \lambda_{12}) \exp[-(\lambda_1 - \delta)y_i] - \lambda_{12} \exp[-(\lambda_1 - \delta)x_i] \}. \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

Derivando o $\log L$ com relação a λ_1 , λ_{12} e δ respectivamente, as funções escores $U_{\lambda_1}(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) = \partial \log L / \partial \lambda_1$, $U_{\lambda_{12}}(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) = \partial \log L / \partial \lambda_{12}$ e $U_{\delta}(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) = \partial \log L / \partial \delta$ são obtidas e apresentadas no APÊNDICE 1. Os estimadores de máxima verossimilhança são a solução conjunta das equações de verossimilhança (igualando as funções escores acima a zero). Novamente, como não é possível encontrar a solução exata das equações de verossimilhança, as derivadas segundas $\partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2$, $\partial^2 \log L / \partial \delta^2$, $\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2$, $\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta$, $\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12}$ e $\partial^2 \log L / \partial \delta \partial \lambda_{12}$ (APÊNDICE 1) são calculadas para construir a matriz de informação observada $I(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ para o processo iterativo de Newton-Raphson, onde

$$I(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) = - \begin{bmatrix} \partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2 & \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} & \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta \\ \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} & \partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2 & \partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta \\ \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta & \partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta & \partial^2 \log L / \partial \delta^2 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

3.5.2. TESTE DE INDEPENDÊNCIA ENTRE X E Y

Para testar a independência entre X e Y quando há censuras, a hipótese a ser testada continua sendo $H_0: \lambda_{12} = 0$ contra $H_1: \lambda_{12} \neq 0$, como no caso de dados completos. Considerando o vetor dos parâmetros

particionado em $(\lambda_{12}, (\lambda_1, \delta))$, os testes assintóticos da razão de verossimilhança, de Rao e de Wald são desenvolvidos utilizando a função de verossimilhança dada em (3.73) e são descritos a seguir.

TESTE DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA

Sob $H_0: \lambda_{12} = 0$, a função de verossimilhança dada em (3.73) será dada por

$$L(\lambda_1, \delta) = \lambda_1^{(n_1+n_2+n_3)} (\lambda_1 - \delta)^{(n_1+n_2)} \exp \left[-\lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^{r3} y_i \right) + \delta \sum_{i=1}^{r3} y_i \right] \prod_{i=r3+1}^n \{ \lambda_1 \exp[-(\lambda_1 - \delta)y_i] \}. \quad (3.76)$$

O \log da função de verossimilhança será, portanto, expressa por

$$\begin{aligned} \log L(\lambda_1, \delta) &= (n_1 + n_2 + n_3) \log \lambda_1 + (n_1 + n_2) \log(\lambda_1 - \delta) - \lambda_1 \\ &\quad \left(\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^{r3} y_i \right) + \delta \sum_{i=1}^{r3} y_i + \sum_{i=r3+1}^n \log \{ \lambda_1 \exp[-(\lambda_1 - \delta)y_i] \}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança de λ_1 e δ , é preciso resolver as seguintes equações de verossimilhança :

$$\begin{aligned} \partial \log L / \partial \lambda_1 &= (n_1 + n_2 + n_3) / \lambda_1 + (n_1 + n_2) / (\lambda_1 - \delta) - \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^{r3} y_i \\ &\quad + \sum_{i=r3+1}^n \{ \lambda_1 \exp[-(\lambda_1 - \delta)y_i] \}^{-1} \{ (1 - y_i \lambda_1) \exp[-(\lambda_1 - \delta)y_i] \} = 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} \partial \log L / \partial \delta &= -(n_1 + n_2) / (\lambda_1 - \delta) + \sum_{i=1}^{r3} y_i + \sum_{i=r3+1}^n \left\{ \{ \lambda_1 \exp[-(\lambda_1 - \delta)y_i] \}^{-1} \right. \\ &\quad \left. \cdot \{ \lambda_1 y_i \exp[-(\lambda_1 - \delta)y_i] \} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.79)$$

As derivadas segundas são calculadas para o uso do processo iterativo Newton-Raphson:

$$\begin{aligned} \partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2 = & -(n_1 + n_2 + n_3) / \lambda_1^2 - (n_1 + n_2) / (\lambda_1 - \delta)^2 - \sum_{i=r+3+1}^n \left\{ \lambda_1 \right. \\ & \left. \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] \right\}^{-2} \left\{ (1 - y_i \lambda_1) \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] \right\}^2 \Big\} \\ & + \sum_{i=r+3+1}^n \left\{ \lambda_1 \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] \right\}^{-1} \left\{ (2 - \lambda_1 y_i) (-y_i) \right. \\ & \left. \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] \right\} \Big\}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta = & (n_1 + n_2) / (\lambda_1 - \delta)^2 - \sum_{i=r+3+1}^n \left\{ \lambda_1 \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] \right\}^{-2} \\ & \left\{ (1 - y_i \lambda_1) \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] \right\} \left\{ \lambda_1 y_i \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] \right\} \Big\} \\ & + \sum_{i=r+3+1}^n \left\{ \lambda_1 \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] \right\}^{-1} \left\{ (1 - y_i \lambda_1) y_i \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] \right\} \Big\}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} e \quad \partial^2 \log L / \partial \delta^2 = & -(n_1 + n_2) / (\lambda_1 - \delta)^2 - \sum_{i=r+3+1}^n \left\{ \lambda_1 \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] \right\}^{-2} \\ & \left\{ \lambda_1 y_i \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] \right\}^2 \Big\} + \sum_{i=r+3+1}^n \left\{ \lambda_1 \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] \right\}^{-1} \\ & \left\{ \lambda_1 y_i^2 \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] \right\} \Big\} \end{aligned} \quad (3.82)$$

A hipótese $H_0: \lambda_{12} = 0$ é rejeitada para o nível de significância α se a $-2 \log \Lambda > \chi_{1, \alpha}^2$

$$\text{onde} \quad \Lambda = \frac{L(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta})}{L(\hat{\lambda}_{12}, \hat{\lambda}_1, \hat{\delta})} \quad (3.83)$$

$L(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta})$ dada por (3.76), com λ_1, δ substituídos pelas suas estimativas de máxima verossimilhança $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\delta}$, e $L(\hat{\lambda}_{12}, \hat{\lambda}_1, \hat{\delta})$ dada por (3.76), com λ_{12}, λ_1 e δ substituídos por $\hat{\lambda}_{12}, \hat{\lambda}_1$ e $\hat{\delta}$, respectivamente.

TESTE DE RAO

Para realizar o teste de independência de X e Y, usando o teste de Rao, é necessário calcular a função escore parcial $U_{\lambda_{12}}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta})$

e a matriz de informação parcial $I_{\lambda_{12}}^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta})$ com relação a λ_{12} , onde

$$\begin{aligned}
 U_{\lambda_{12}}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta}) &= \partial \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \lambda_{12} \big|_{\lambda_{12}=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \delta=\tilde{\delta}} \\
 &= n / (2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) + n_1 / (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) - n_2 / \tilde{\lambda}_1 - \left(\sum_{i=1}^{r1} y_i + \sum_{i=r1+1}^{r2} x_i + \sum_{i=r2+1}^{r3} y_i \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=r3+1}^n x_i \right) + \sum_{i=r3+1}^n \left\{ \tilde{\lambda}_1 \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) y_i]^{-1} \{ \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) y_i] \right. \\
 &\quad \left. - \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) x_i] \} \right\} \quad (3.84)
 \end{aligned}$$

e $I_{\lambda_{12}}^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta}) = \begin{pmatrix} \tilde{I}_{11} & \tilde{I}_{12} \\ \tilde{I}_{21} & \tilde{I}_{22} \end{pmatrix}^{-1}$, com

$$-\tilde{I}_{11} = \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \lambda_{12}^2 \big|_{\lambda_{12}=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \delta=\tilde{\delta}} = a$$

$$-\tilde{I}_{21} = -\tilde{I}_{12}' = \begin{bmatrix} \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \lambda_{12} \partial \lambda_1 \\ \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \lambda_{12} \partial \delta \end{bmatrix} \bigg|_{\lambda_{12}=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \delta=\tilde{\delta}} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 -\tilde{I}_{22} &= \begin{bmatrix} \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta) / \partial \lambda_1^2 & \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta) / \partial \lambda_1 \partial \delta \\ \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta) / \partial \delta \partial \lambda_1 & \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta) / \partial \delta^2 \end{bmatrix} \bigg|_{\lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \delta=\tilde{\delta}} = \\
 &= \begin{bmatrix} d & e \\ e & f \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

As funções a, b, e c citadas acima são dadas por:

$$\begin{aligned}
 a &= -n / (2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2 - n_1 / (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2 + n_2 / \tilde{\lambda}_1^2 + \sum_{i=r3+1}^n - \left\{ \tilde{\lambda}_1 \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) y_i] \right. \\
 &\quad \left. \cdot y_i \right\}^{-2} \cdot \left\{ \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) y_i] - \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) x_i] \right\}^2 \bigg\} \quad (3.85)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b = & -2n/(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2 - n_1/(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2 - n_2/\tilde{\lambda}_1^2 + \sum_{i=r3+1}^n - \left\{ \tilde{\lambda}_1 \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) \right. \\
& \cdot y_i]^{-2} \{ [1 - \tilde{\lambda}_1 y_i] \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) y_i] \} \{ \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) y_i] \\
& - \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) x_i] \} \} + \sum_{i=r3+1}^n \left\{ \tilde{\lambda}_1 \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) y_i]^{-1} \right. \\
& \cdot \{ -y_i \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) y_i] + x_i \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) x_i] \} \} \quad (3.86)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c = & n/(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2 + n_1/(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2 + \sum_{i=r3+1}^n - \left\{ \tilde{\lambda}_1 \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) y_i]^{-2} \right. \\
& \left. \{ \tilde{\lambda}_1 y_i \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) y_i] \{ \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) y_i] - \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) x_i] \} \} \right. \\
& + \sum_{i=r3+1}^n \left\{ \tilde{\lambda}_1 \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) y_i]^{-1} \{ -y_i \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) y_i] \right. \\
& \left. - x_i \exp[-(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) x_i] \} \right\}, \quad (3.87)
\end{aligned}$$

e as funções d, e, e f são dadas por (3.80), (3.81) e (3.82), respectivamente, substituindo λ_1 e δ por $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\delta}$, suas estimativas de máxima verossimilhança sob H_0 .

A hipótese de independência de X e Y é rejeitada ao nível α se e somente se

$$U_{\lambda_{12}}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta})^2 * I_{\lambda_{12}}^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta}) > \chi_{1, \alpha}^2. \quad (3.88)$$

TESTE DE WALD

Para o teste de Wald, é utilizada a matriz de informação de Fisher parcial com relação a λ_{12} :

$$\hat{I}_{\lambda_{12}}^{11} = I_{\lambda_{12}}^{11}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta}) = \left(\hat{I}_{11} - \hat{I}_{12} (\hat{I}_{22})^{-1} \hat{I}_{21} \right)^{-1}, \text{ com}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_{11} & \hat{I}_{12} \\ \hat{I}_{21} & \hat{I}_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12}} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12}}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta} \\ \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12}}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \delta^2} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

calculada no ponto $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})$, usando a função de verossimilhança $L = L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ dada por (3.73).

As derivadas segundas da matriz de informação acima são as mesmas da matriz dada em (3.75), apenas mudam-se as posições para poder ser particionada de forma correspondente a $(\lambda_{12}, (\lambda_1, \delta))$ para fazer o teste da hipótese $H_0: \lambda_{12} = 0$.

Sob o H_0 , a estatística de Wald $W = (\hat{\lambda}_{12})^2 / \hat{I}_{\lambda_{12}}^{11}$ tem distribuição assintótica qui-quadrado com 1 grau de liberdade. Portanto, a hipótese de independência $(\lambda_{12} = 0)$ é rejeitada se $W > \chi_{1, \alpha}^2$.

3.5.3. TESTE DE IGUALDADE DAS DISTRIBUIÇÃO MARGINAIS DE X E Y

A hipótese de igualdade das distribuições marginais de X e Y, quando há presença de censuras, é verificada através do teste da hipótese $H_0: \lambda_1 = \lambda_2$ vs. $H_1: \lambda_1 \neq \lambda_2$, que equivale a testar $H_0: \delta = 0$ vs. $H_1: \delta \neq 0$, no modelo reparame- trizado de Block-Basu. Considerando a função de verossimilhança dada em (3.73), os testes assintóticos da razão de verossimilhança, de Rao e de Wald são desenvolvidos.

TESTE DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA

Sob $H_0: \delta = 0$, a função de verossimilhança (3.73) será expressa por

$$\begin{aligned}
L(\lambda_1, \lambda_{12}) &= [(2\lambda_1 + \lambda_{12}) / (2\lambda_1)]^n [\lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_{12})]^{n_1+n_2} \lambda_1^{n_3} \\
&\cdot \exp \left[-\lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^{r_3} y_i \right) - \lambda_{12} \left(\sum_{i=1}^{r_1} y_i + \sum_{i=r_1+1}^{r_2} x_i + \sum_{i=r_2+1}^{r_3} y_i \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{i=r_3+1}^n x_i \right) \right] \prod_{i=r_3+1}^n \{ (\lambda_1 + \lambda_{12}) \exp(-\lambda_1 y_i) - \lambda_{12} \exp(-\lambda_1 x_i) \}
\end{aligned} \quad (3.90)$$

e o log da função de verossimilhança por

$$\begin{aligned}
\log L(\lambda_1, \lambda_{12}) &= n \log(2\lambda_1 + \lambda_{12}) - n \log(2\lambda_1) + (n_1 + n_2 + n_3) \log \lambda_1 \\
&+ (n_1 + n_2) \log(\lambda_1 + \lambda_{12}) - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^{r_3} y_i \right) - \lambda_{12} \left(\sum_{i=1}^{r_1} y_i \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=r_1+1}^{r_2} x_i + \sum_{i=r_2+1}^{r_3} y_i + \sum_{i=r_3+1}^n x_i \right) + \sum_{i=r_3+1}^n \log [(\lambda_1 + \lambda_{12}) \\
&\quad \exp(-\lambda_1 y_i) - \lambda_{12} \exp(-\lambda_1 x_i)]
\end{aligned} \quad (3.91)$$

A solução conjunta das equações de verossimilhança (3.92) e (3.93) abaixo será o vetor dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros.

$$\begin{aligned}
\partial \log L / \partial \lambda_1 &= 2n / (2\lambda_1 + \lambda_{12}) - (n_1 + n_2 + n_3) / \lambda_1 + (n_1 + n_2) / (\lambda_1 + \lambda_{12}) \\
&- \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^{r_3} y_i + \sum_{i=r_3+1}^n \left\{ \{ \Phi_2 \}^{-1} \{ [1 - (\lambda_1 + \lambda_{12}) y_i] \right. \\
&\quad \left. \exp(-\lambda_1 y_i) + \lambda_{12} x_i \exp(-\lambda_1 x_i) \} \right\} = 0
\end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned}
\partial \log L / \partial \lambda_{12} &= n / (2\lambda_1 + \lambda_{12}) + (n_1 + n_2) / (\lambda_1 + \lambda_{12}) - \left(\sum_{i=1}^{r_1} y_i + \sum_{i=r_1+1}^{r_2} x_i \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=r_2+1}^{r_3} y_i + \sum_{i=r_3+1}^n x_i \right) + \sum_{i=r_3+1}^n \left\{ \{ \Phi_2 \}^{-1} [\exp(-\lambda_1 y_i) \right. \\
&\quad \left. - \exp(-\lambda_1 x_i)] \right\} = 0
\end{aligned} \quad (3.93)$$

, onde $\{ \Phi_2 \} = (\lambda_1 + \lambda_{12}) \exp(-\lambda_1 y_i) - \lambda_{12} \exp(-\lambda_1 x_i)$.

As derivadas segundas são necessárias para serem utilizadas no processo iterativo de Newton-Raphson, e são dadas por

$$\begin{aligned} \partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2 = & -4n / (2\lambda_1 + \lambda_{12})^2 + (n_1 + n_2 + n_3) / \lambda_1^2 - (n_1 + n_2) / (\lambda_1 + \lambda_{12})^2 \\ & - \sum_{i=r+1}^n \left\{ \{ \Phi_2 \}^{-2} \{ [1 - (\lambda_1 + \lambda_{12}) y_i] \exp(-\lambda_1 y_i) + \lambda_{12} x_i \right. \\ & \cdot \exp(-\lambda_1 x_i) \}^2 \} + \sum_{i=r+1}^n \left\{ \{ \Phi_2 \}^{-1} \{ [2 - (\lambda_1 + \lambda_{12}) y_i] (-y_i) \right. \\ & \cdot \exp(-\lambda_1 y_i) - \lambda_{12} x_i^2 \exp(-\lambda_1 x_i) \} \}, \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} = & -2n / (2\lambda_1 + \lambda_{12})^2 - (n_1 + n_2) / (\lambda_1 + \lambda_{12})^2 - \sum_{i=r+1}^n \\ & \left\{ \{ \Phi_2 \}^{-2} [\exp(-\lambda_1 y_i) - \exp(-\lambda_1 x_i)] \{ [1 - (\lambda_1 + \lambda_{12}) y_i] \right. \\ & \cdot \exp(-\lambda_1 y_i) + \lambda_{12} x_i \exp(-\lambda_1 x_i) \} \} + \sum_{i=r+1}^n \left\{ \{ \Phi_2 \}^{-1} \right. \\ & \cdot [-y_i \exp(-\lambda_1 y_i) + x_i \exp(-\lambda_1 x_i)] \}, \text{ e} \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2 = & -n / (2\lambda_1 + \lambda_{12})^2 - (n_1 + n_2) / (\lambda_1 + \lambda_{12})^2 \\ & - \sum_{i=r+1}^n \left\{ \{ \Phi_2 \}^{-2} [\exp(-\lambda_1 y_i) - \exp(-\lambda_1 x_i)]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

O teste da razão de verossimilhança para $H_0: \delta = 0$ vs. $H_1: \delta \neq 0$ é rejeitado para α se a $-2 \log \Lambda > \chi_{1, \alpha}^2$

$$\text{onde} \quad \Lambda = \frac{L(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})}{L(\hat{\delta}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12})} \quad (3.97)$$

com $L(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})$ dada por (3.90), λ_1 e λ_{12} substituídas pelas suas estimativas de máxima verossimilhança $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\lambda}_{12}$, e $L(\hat{\delta}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12})$ dada

por (3.73), com λ_1 , δ e λ_{12} substituídas por $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\delta}$ e $\tilde{\lambda}_{12}$.

TESTE DE RAO

Para testar $H_0: \delta = 0$ vs. $H_1: \delta \neq 0$, o teste de Rao utiliza a função escore parcial $U_{\delta}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})$ e a matriz de informação parcial $I_{\delta}^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})$ com relação a δ , onde

$$\begin{aligned} U_{\delta}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12}) &= \partial \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \delta \Big|_{\delta=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \lambda_{12}=\tilde{\lambda}_{12}} = \\ &= -n / (2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) + n / (2\tilde{\lambda}_1) - n_1 / (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) - n_2 / \tilde{\lambda}_1 \\ &\quad - \sum_{i=1}^{r_3} y_i + \sum_{i=r_3+1}^n \left\{ \{ \tilde{\Phi}_2 \}^{-1} \{ (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) y_i \exp(-\tilde{\lambda}_1 y_i) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\lambda}_{12} x_i \exp(-\tilde{\lambda}_1 x_i) \} \right\} \end{aligned} \quad (3.98)$$

onde $\{ \tilde{\Phi}_2 \}$ é $\{ \Phi_2 \}$ com λ_1 e λ_{12} substituídos por $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\lambda}_{12}$.

A matriz de informação de Fisher observada parcial é definida como

$$I_{\delta}^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12}) = \left(\tilde{I}_{11} - \tilde{I}_{12} * (\tilde{I}_{22})^{-1} * \tilde{I}_{21} \right)^{-1}, \text{ onde}$$

$$-\tilde{I}_{11} = \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \delta^2 \Big|_{\delta=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \lambda_{12}=\tilde{\lambda}_{12}} = a$$

$$-\tilde{I}_{21} = -\tilde{I}_{12}' = \left[\begin{array}{c} \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \delta \partial \lambda_1 \\ \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \lambda_{12} \partial \delta \end{array} \right] \Big|_{\delta=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \lambda_{12}=\tilde{\lambda}_{12}} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}.$$

E \tilde{I}_{22} é a estimativa da matriz de informação observada sob o H_0 :

$$-\tilde{I}_{22} = \left[\begin{array}{cc} \partial^2 \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \lambda_1^2 & \partial^2 \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} \\ \partial^2 \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} & \partial^2 \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \lambda_{12}^2 \end{array} \right] \Big|_{\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1, \lambda_{12} = \tilde{\lambda}_{12}}$$

$$= \begin{bmatrix} d & e \\ e & f \end{bmatrix}$$

onde $L(\lambda_1, \lambda_{12})$ é a função de verossimilhança sob H_0 dada por (3.90).

As funções a, b e c são as seguintes:

$$a = -n/(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})^2 + n/4\tilde{\lambda}_1^2 - n_1/(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})^2 - n_2/\tilde{\lambda}_1^2 + \sum_{i=r_3+1}^n \left\{ -(\tilde{\phi}_2)^{-2} \right.$$

$$\cdot \left\{ (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})y_i \exp(-(\tilde{\lambda}_1 y_i) - \tilde{\lambda}_{12} x_i \exp(-\tilde{\lambda}_1 x_i) \right\}^2 \left. \right\}$$

$$+ \sum_{i=r_3+1}^n \left\{ (\tilde{\phi}_2)^{-1} \left\{ (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})y_i^2 \exp(-\tilde{\lambda}_1 y_i) - \tilde{\lambda}_{12} x_i^2 \exp(-\tilde{\lambda}_1 x_i) \right\} \right\}$$

$$(3.99)$$

$$b = 2n/(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})^2 - n/2\tilde{\lambda}_1^2 + n_1/(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})^2 + n_2/\tilde{\lambda}_1^2 + \sum_{i=r_3+1}^n \left\{ (\tilde{\phi}_2)^{-2} \right.$$

$$\left\{ [1 - (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})y_i] \exp[-(\tilde{\lambda}_1 y_i) + \tilde{\lambda}_{12} x_i \exp(-\tilde{\lambda}_1 x_i)] \right\} \left\{ (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) \right.$$

$$\cdot y_i \exp(-\tilde{\lambda}_1 y_i) - \tilde{\lambda}_{12} \exp(-\tilde{\lambda}_1 x_i) \left. \right\} \left. \right\} + \sum_{i=r_3+1}^n \left\{ (\tilde{\phi}_2)^{-1} \right.$$

$$\cdot \left\{ [1 - (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})y_i] y_i \exp(-\tilde{\lambda}_1 y_i) + \tilde{\lambda}_{12} x_i^2 \exp(-\tilde{\lambda}_1 x_i) \right\} \left. \right\}$$

$$(3.100)$$

$$c = n/(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})^2 + n_1/(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})^2 + \sum_{i=r_3+1}^n \left\{ (\tilde{\phi}_2)^{-2} \left\{ (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) \right. \right.$$

$$y_i \exp(-\tilde{\lambda}_1 y_i) - \tilde{\lambda}_{12} \exp(-\tilde{\lambda}_1 x_i) \left. \right\} \left\{ \exp(-\tilde{\lambda}_1 y_i) - \exp(-\tilde{\lambda}_1 x_i) \right\} \left. \right\}$$

$$+ \sum_{i=r+1}^n \left\{ \left\{ \tilde{\Phi}_2 \right\}^{-1} \left\{ -y_i \exp(-\tilde{\lambda}_1 y_i) - x_i \exp(-\tilde{\lambda}_1 x_i) \right\} \right\} \quad (3.101)$$

e d, e e f dadas pelas equações (3.94), (3.95) e (3.96), respectivamente, substituindo λ_1 e λ_{12} por $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\lambda}_{12}$, estimativas de máxima verossimilhança sob a hipótese H_0 .

A hipótese de igualdade das distribuições marginais de X e Y é rejeitada ao nível α se

$$U_{\delta}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})^2 * I_{\delta}^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12}) > \chi_{1, \alpha}^2. \quad (3.102)$$

TESTE DE WALD

Para o teste de Wald, calcula-se a matriz de informação parcial com relação a δ sob o modelo irrestrito:

$$\hat{I}_{\delta}^{11} = I_{\delta}^{11}(\hat{\delta}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}) = \left(\hat{I}_{11} - \hat{I}_{12} (\hat{I}_{22})^{-1} \hat{I}_{21} \right)^{-1}, \text{ com}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_{11} & \hat{I}_{12} \\ \hat{I}_{21} & \hat{I}_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log L / \partial \delta^2}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12}} \\ \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12}} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12}}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2} \end{bmatrix}$$

calculada no ponto $(\hat{\delta}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12})$, usando a função de verossimilhança $L = L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ dada por (3.73).

As derivadas segundas da matriz descrita acima são as mesmas que constituem a matriz de informação de Fisher dada em (3.75).

Sob o H_0 : $\delta = 0$, a estatística de Wald $W = (\hat{\delta})^2 / \hat{I}_{\delta}^{11}$ possui distribuição assintótica qui-quadrado com 1 grau de liberdade. Portanto H_0 é rejeitada se $W > \chi^2$.

3.6. EXEMPLO NUMÉRICO

Para ilustrar a metodologia desenvolvida neste capítulo, foram geradas 3 amostras aleatórias de dados bivariados, utilizando transformações lineares a partir de duas exponenciais padrões (com parâmetro igual a um) independentes e assumindo a distribuição de Block-Basu como a distribuição básica conjunta, (Friday & Patial, 1985). Os dados são apresentados no APÊNDICE 3 e o programa computacional BLOCK.PRG utilizado para a estimação dos parâmetros e os testes das hipóteses de independência e de igualdade das distribuições marginais é apresentado no APÊNDICE 4.

EXEMPLO 3.1.

Os dados utilizados para este exemplo foram gerados a partir de duas distribuições exponenciais independentes com os parâmetros $\lambda_1 = 0,1$ e $\lambda_2 = 0,2$, sem presença de censuras, constituindo assim uma amostra de dados da distribuição Block-Basu com os parâmetros $\lambda_1 = 0,1$, $\lambda_{12} = 0$ e $\delta = -0,1$. A tabela 3.1. apresenta as estimativas dos parâmetros encontradas utilizando o método de Newton-Raphson, seus respectivos desvios padrões calculados através da estimativa da matriz de informação de Fisher observada e o valor do logaritmo da função de verossimilhança para cada modelo considerado.

TABELA 3.1. Estimativas dos parâmetros da distribuição, calculadas através do método de máxima verossimilhança.

modelo	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_{12}$	$\hat{\delta}$	logL
irrestrito	0,0875 (,0234)	0,0194 (,0295)	-0,0868 (,0210)	-594,3486
Ho: $\delta = 0$	0,1521 (,0306)	-0,0254 (,0376)	-	-603,7367
Ho: $\lambda_{12} = 0$	0,1021 (,0102)	-	-0,0874 (,0215)	-594,5521

Obs. os valores entre parênteses são os desvios padrões.

Na Tabela 3.2. são apresentadas as estatísticas dos testes da razão de verossimilhança, de Rao e de Wald, para verificar a independência e a igualdade das distribuições marginais de X e Y.

TABELA 3.2. Testes da razão de verossimilhança, de Rao e de Wald para verificar a independência entre X e Y e a igualdade das distribuições marginais de X e Y.

Teste	Teste de Independência			Teste de Igualdade		
	R.V.	Rao	Wald	R.V.	Rao	Wald
Estatíst.	0,4070	0,4338	0,4360	18,7763	23,1590	17,1423
P_value	0,5235	0,5101	0,5094	0,0000	0,0000	0,0000

Com os resultados obtidos acima, pode-se dizer que X e Y são independentes, isto é, $\lambda_{12} = 0$, o que já é esperado, pois os dados foram gerados com $\lambda_{12} = 0$; mas, as distribuições de X e Y não são igualmente distribuídas, isto é, $\delta \neq 0$.

As funções de sobrevivência marginais estimadas de X e Y são apresentadas no gráfico 3.1. abaixo:

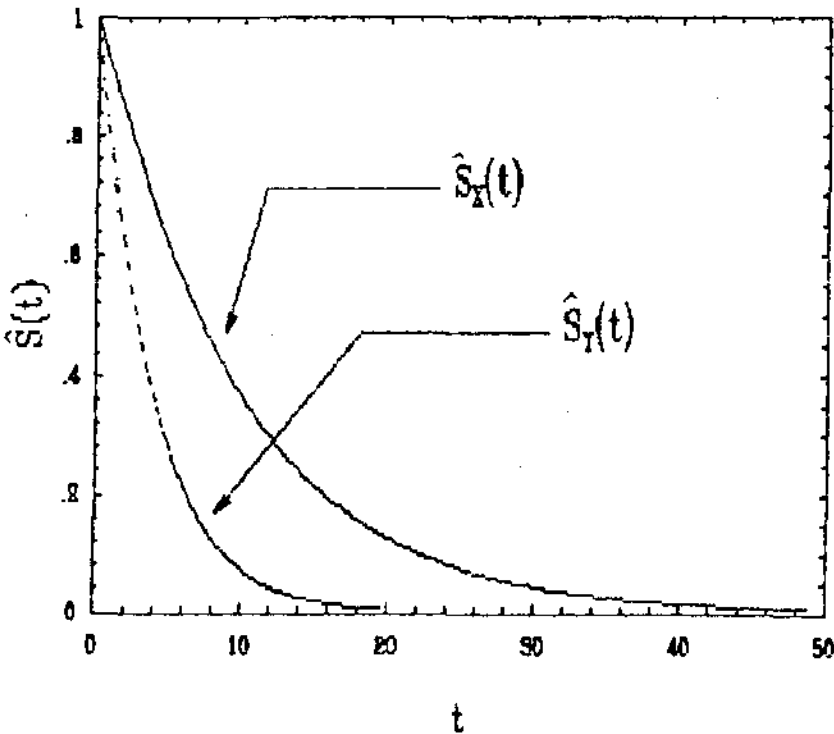


GRÁFICO 3.1. Funções de sobrevivência marginais estimadas de X e Y.

EXEMPLO 3.2.

Os 100 dados para este exemplo foram gerados usando transformação de duas exponenciais padrões independentes sugerida por Friday e Patial (1985), com os parâmetros $\lambda_1 = 0,5$, $\lambda_{12} = 0,6$ e $\delta = 0,15$, sem presença de censuras. Na tabela 3.3. são apresentadas as estimativas dos parâmetros, seus respectivos desvios padrões e o logaritmo da função de verossimilhança sob três modelos considerados.

TABELA 3.3. Estimativas dos parâmetros da dstribuição de Block-Basu, calculadas através do método de máxima verossimilhança.

modelo	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_{12}$	$\hat{\delta}$	logL
irrestrito	0,5868 (,1885)	0,5290 (,2068)	0,2231 (,1039)	-230,6129
Ho: $\delta = 0$	0,4531 (,1747)	0,5347 (,2445)	-	-234,0243
Ho: $\lambda_{12} = 0$	0,9953 (,0993)	-	0,2788 (,1226)	-233,8150

Obs. os valores entre parênteses são os desvios padrões.

Obtidas as estimativas, os testes estatísticos são feitos para verificar a independência e a igualdade das marginais. Na tabela a seguir apresentam-se os reultados dos testes realizados.

TABELA 3.4. Testes da razão de verossimilahça, de Rao e de Wald para verificar a independência entre X e Y e a igualdade das distribuições marginais de X e Y.

Teste	Teste de Independência			Teste de Igualdade		
	R. V.	Rao	Wald	R. V.	Rao	Wald
Estatíst.	6,4041	7,0917	6,5463	6,8229	15,4502	4,6101
P_value	0,0113	0,0077	0,0109	0,0009	0,0001	0,0318

Os valores de $P_value < 0,05$ em todos os testes realizados, o que indicam X e Y não são independentes e as distribuições marginais de X e Y não são igualmente distribuídas isto é, $\lambda_{12} \neq 0$ e $\delta \neq 0$.

As funções de sobrevivência marginais estimadas de X e Y são apresentadas no gráfico 3.2. abaixo:

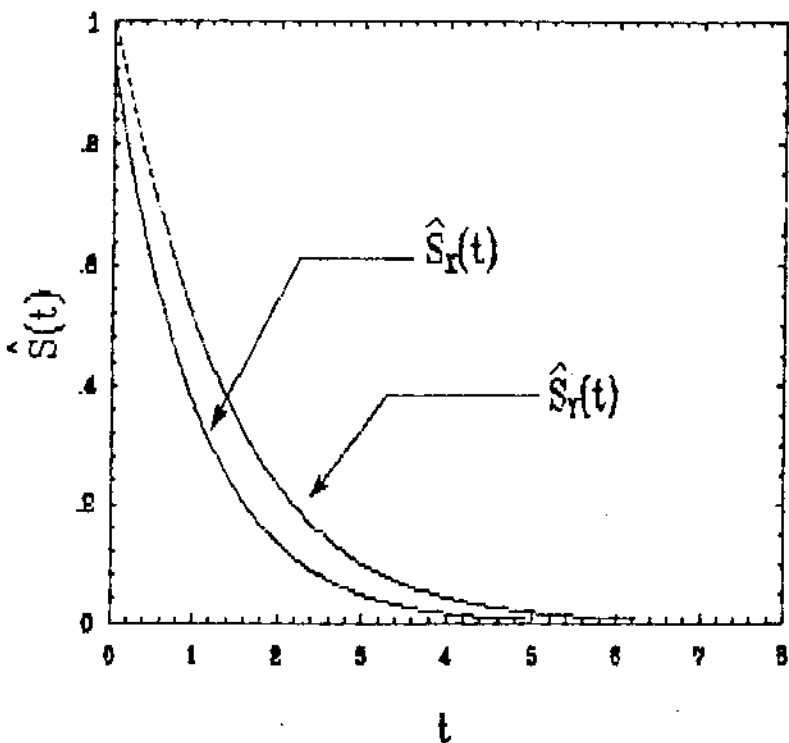


GRÁFICO 3.2. Funções de sobrevivência marginais estimadas de X e Y .

EXEMPLO 3.3.

Neste exemplo, os parâmetros utilizados foram: $\lambda_1 = 0,5$, $\lambda_{12} = 0,4$ e $\delta = 0,4$, sem censuras. Os mesmos procedimentos aplicados nos exemplos anteriores são realizados e os seguintes resultados são obtidos:

TABELA 3.5. Estimativas dos parâmetros da distribuição de Block-Basu, calculadas através do método de máxima verossimilhança.

modelo	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_{12}$	$\hat{\delta}$	logL
irrestrito	0,3515 (,1015)	0,4241 (,0806)	0,2580 (,0772)	-322,7498
Ho: $\delta = 0$	0,3130 (,1032)	0,2435 (,1412)	-	-341,9137
Ho: $\lambda_{12} = 0$	0,7037 (,0704)	-	0,3300 (,0797)	-333,5826

Obs. os valores entre parênteses são os desvios padrões.

TABELA 3.6. Testes da razão de verossimilhança, de Rao e de Wald para verificar a independência entre X e Y e a igualdade das distribuições marginais de X e Y.

Teste	Teste de Independência			Teste de Igualdade		
	R.V.	Rao	Wald	R.V.	Rao	Wald
Estatíst.	21,6654	81,4028	27,6759	38,3277	-13,3889 [*]	11,1706
P_value	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0008

Através dos resultados obtidos acima, pode-se concluir facilmente, que $\lambda_{12} \neq 0$ e $\delta \neq 0$. Deve-se, porém, observar que o teste de Rao não pode ser aplicado no caso do teste de Ho: $\delta = 0$, pois a estatística $U_{\delta}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12}) * I_{\delta}^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})$ é negativa. Esse tipo de problema ocorre no teste de Rao quando o verdadeiro valor do parâmetro a ser testado está longe do valor do parâmetro sob hipótese nula e a matriz de informação de Fisher no ponto máximo sob Ho não é positiva definida. No caso deste exemplo a matriz de informação de Fisher é positiva definida no ponto $(\hat{\delta}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}) = (0,2580, 0,3515, 0,4241)$, mas já não é mais positiva definida no ponto $(\delta_0, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12}) = (0, 0,3130, 0,2435)$, e conseqüentemente, $I_{\delta}^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12}) < 0$.

O mesmo problema já não ocorre nos testes da Razão de Verossimilhança e de Wald, pois a estatística utilizada no teste da R.V. é sempre positiva, já que $\log L(\hat{\theta}) \geq \log L(\tilde{\theta})$ sempre. A estatística utilizada no teste de Wald é positiva desde que a matriz de informação

de Fisher é positiva definida no ponto $\hat{\theta}$, o que sempre é verdade sob as condições de regularidade (Seção 2.5.1).

As funções de sobrevivência marginais estimadas de X e Y deste exemplo são apresentadas no gráfico 3.3. a seguir:

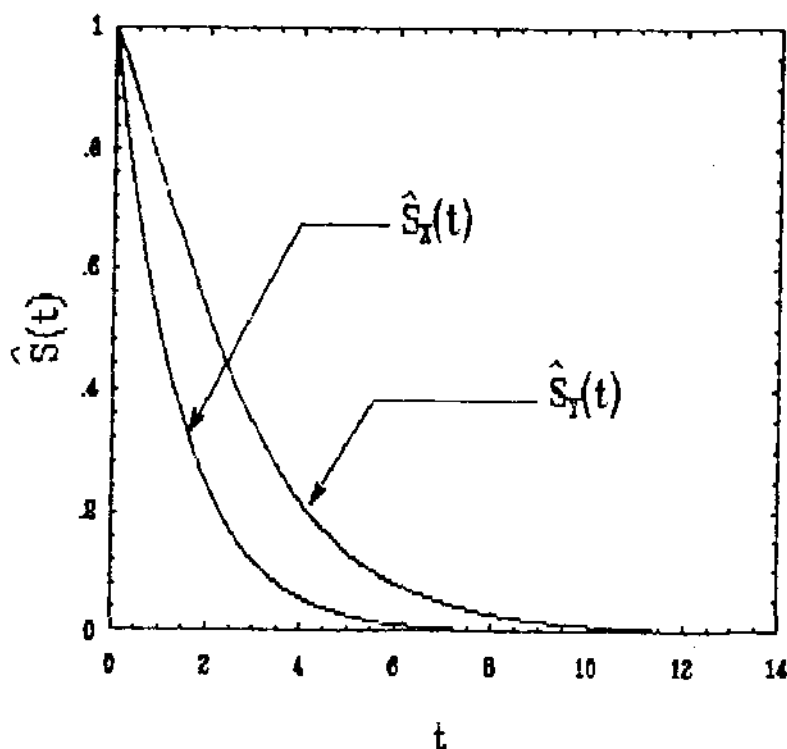


GRÁFICO 3.3. Funções de sobrevivência marginais estimadas de X e Y.

EXEMPLO 3.4.

Neste exemplo, a transformação $T = Y/X$ usada por Gross e Lam (1981), onde (X, Y) possui a distribuição de Block-Basu, será considerada para estimação e testar as hipóteses de independência e de igualdade das distribuições de X e Y, $H_0: \xi_{12} = 0$ e $H_0: \xi = 1$, respectivamente usando o teste da razão de verossimilhança. O conjunto de dados, utilizado para este exemplo é o mesmo do exemplo 3.2. Na tabela abaixo são apresentadas as estimativas dos parâmetros ξ e ξ_{12} sob os modelos considerados.

TABELA 3.7. Estimativas dos parâmetros da dstribuição de Block-Basu, usando a transformação $T = Y/X$, calculadas através do método de máxima verossimilhança.

Modelo	ξ	ξ_{12}	$\log L$	R. V.
Irrestrito	0,6499 (,1306) _a	1,8472 (1,8348) _a	-218,0449	
$H_0: \xi_{12} = 0$	0,7191 (,1183) _a	-	-221.6870	7,2841 (0,0070) _b
$H_0: \xi = 1$	-	2.5994 (2.8762) _a	-220.3858	4.6817 (0,0305) _b

Obs. a: desvio padrão da estimativa do parâmetros;
b: P_value da estatística da razão de verossimilhança.

Com os resultados obtidos acima, pode-se dizer que as hipóteses $H_0: \xi_{12} = 0$ e $H_0: \xi = 0$ são ambas rejeitadas para $\alpha>0.05$, concordando com os resultados do exemplo 3.2.

Note-se que neste caso, as estimativas de ξ e ξ_{12} são possíveis de serem calculadas, para ilustrar o comportamento da função $\log L(\xi, \xi_{12})$, o gráfico de ξ_{12} vs. $\log L(\xi, \xi_{12})$ é feito sob $H_0: \xi = 1$, como mostra o gráfico 3.4. abaixo:

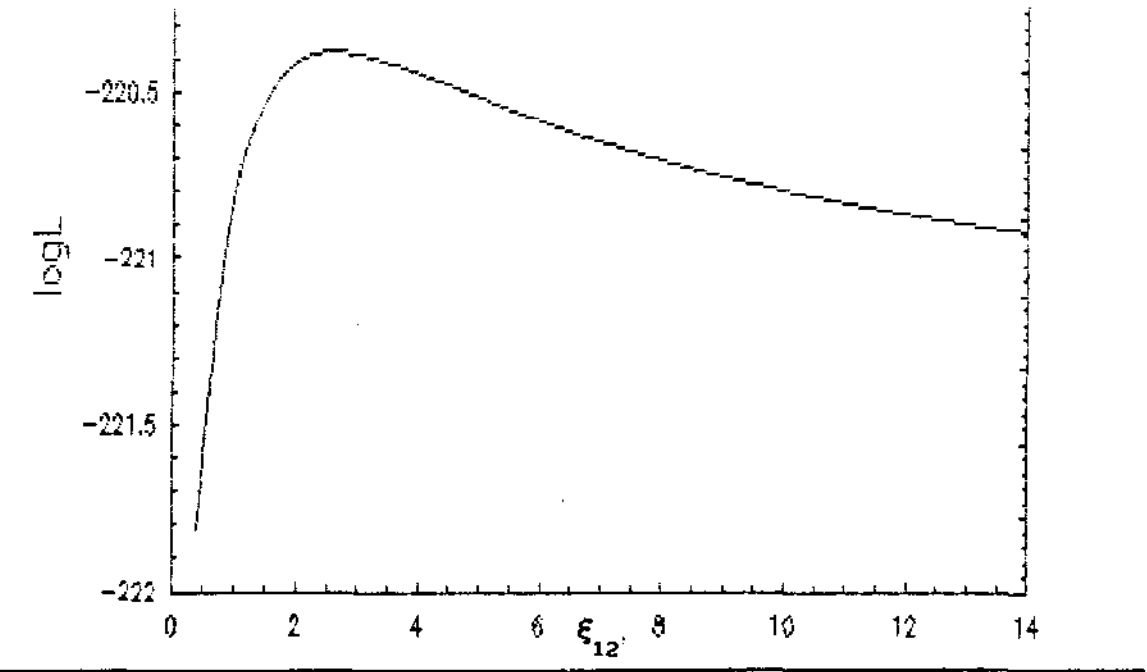


GRÁFICO 3.4. ξ_{12} vs. $\log L(\xi, \xi_{12})$ sob $H_0: \xi = 1$.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DE DADOS PAREADOS USANDO A DISTRIBUIÇÃO DE SARKAR

4.1. INTRODUÇÃO

A distribuição bivariada desenvolvida por Block e Basu, a ACBVE, estudada no capítulo anterior, é uma distribuição exponencial absolutamente contínua que conserva a propriedade da perda de memória (PPM), mas não possui marginais exponenciais. Com o propósito de derivar uma distribuição bivariada exponencial absolutamente contínua com marginais exponencialmente distribuídas, Sarkar (1987) apresentou uma outra distribuição, a ACBVE_s (ACBVE_s - Absolutely Continuous Bivariate Exponential Distribution, o índice *s* é usado para distingüir da ACBVE de Block e Basu). Esta distribuição não possui, portanto, a PPM.

O objetivo principal deste capítulo é estudar a distribuição exponencial bivariada (X,Y) de Sarkar para desenvolver a estimação dos seus parâmetros e testes de independência entre as variáveis X e Y e de igualdade das distribuições marginais de X e Y, quando os dados são completos e, quando apresentam censuras à direita no segundo componente da bivariada, isto é, em Y.

Na seção 4.2 é apresentada uma revisão sobre a distribuição de Sarkar, a ACBVE_s. Na seção 4.3 são realizados a derivação da estimação dos parâmetros usando o método de máxima verossimilhança e o estudo dos testes de hipóteses de independência e de igualdade das distribuições marginais de X e Y, considerando dados completos. Na seção 4.4 são apresentados os estudos concernentes à inferência sobre

os parâmetros da distribuição Sarkar, com a incorporação de censuras à direita em Y.

Finalmente, aplicações numéricas são apresentadas na seção 4.5. Os programas utilizados neste capítulo são SARKAR.PRG e SARKARC.PRG e são apresentados no APÊNDICE 4.

4.2. DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA ABSOLUTAMENTE CONTÍNUA DE SARKAR

Entre várias distribuições exponenciais bivariadas, a de Marshall e Olkin (1867) tem sido de grande aceitação. A BVE de Marshall e Olkin satisfaz algumas propriedades interessantes que têm interpretações físicas proveitosas. Porém, ela é inapropriada em situações nas quais os dois componentes do sistema bivariado não falham simultaneamente com probabilidade positiva. Uma distribuição exponencial bivariada absolutamente contínua mais apropriada na situação acima citada poderia ser a ACBVE de Block e Basu, apresentada no capítulo anterior. Esta é absolutamente contínua e retém a propriedade da perda de memória, a PPM da BVE, porém não possui marginais exponenciais.

Sarkar (1987) derivou uma distribuição exponencial bivariada absolutamente contínua com marginais exponenciais, a ACBVEs. A seguir, são apresentadas algumas características desta distribuição:

Se $(X,Y) \sim \text{ACBVEs}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$, com $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, e $\lambda_{12} \geq 0$, então (X,Y) tem a função de densidade dada por

$$f(x, y) = \lambda_1 \lambda / (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \exp \left[- \lambda_1 x - (\lambda_2 + \lambda_{12}) y \right] \\ \cdot \left\{ (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_2 + \lambda_{12}) - \lambda_2 \lambda \exp(-\lambda_1 y) \right\} \\ \cdot \left[A(\lambda_1 x) \right]^\gamma \left[A(\lambda_1 y) \right]^{-(1+\gamma)} \quad \text{se } 0 < x < y,$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_2 \lambda / (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \exp[- \lambda_2 y - (\lambda_1 + \lambda_{12})x] \\
&\cdot \{ (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_1 + \lambda_{12}) - \lambda_1 \lambda \exp(-\lambda_2 x) \} \\
&\cdot [A(\lambda_2 y)]^\gamma [A(\lambda_2 x)]^{-(1+\gamma)} \quad \text{se } 0 < y < x.
\end{aligned}
\tag{4.1}$$

onde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$, $\gamma = \lambda_{12} / (\lambda_1 + \lambda_2)$ e $A(z) = 1 - \exp(-z)$ para $z > 0$.

A função de sobrevivência da ACBVEs é dada por

$$\begin{aligned}
S(x, y) &= \Pr(X > x, Y > y) = \\
&= \exp\{-(\lambda_2 + \lambda_{12})y\} \{1 - [A(\lambda_1 y)]^{-\gamma} [A(\lambda_1 x)]^{1+\gamma}\} \quad \text{se } 0 < x < y, \\
&= \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x\} \{1 - [A(\lambda_2 x)]^{-\gamma} [A(\lambda_2 y)]^{1+\gamma}\} \quad \text{se } 0 < y < x.
\end{aligned}
\tag{4.2}$$

Note-se que X e Y são independentes quando $\lambda_{12} = 0$. Neste caso, $X \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ e $Y \sim \text{Exp}(\lambda_2)$.

As distribuições marginais de ACBVEs são expressas por

$$S_X(x) = \exp\{ - (\lambda_1 + \lambda_{12})x \} \tag{4.3}$$

$$S_Y(y) = \exp\{ - (\lambda_2 + \lambda_{12})y \} \tag{4.4}$$

$$\text{e } S_{\min(X,Y)}(z) = \exp(-\lambda z), \text{ onde } \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}. \tag{4.5}$$

Note-se que X e Y são igualmente distribuídas se $\lambda_1 = \lambda_2$.

A taxa de falha conjunta $\lambda(x, y)$ definida em (2.15) é dada por

$$\begin{aligned}
\lambda(x, y) &= \lambda_1 \lambda (\lambda_1 + \lambda_2)^{-2} \exp(-\lambda_1 x) \{ (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_2 + \lambda_{12}) - \lambda_2 \lambda \exp(-\lambda_1 y) \} \\
&\cdot [A(\lambda_1 x)]^\gamma [A(\lambda_1 y)]^{-(1+\gamma)} \left\{ 1 - [A(\lambda_1 y)]^{-\gamma} [A(\lambda_1 x)]^{1+\gamma} \right\}^{-1}, \\
&\quad \text{se } 0 < x < y,
\end{aligned}$$

$$= \lambda_2 \lambda (\lambda_1 + \lambda_2)^{-2} \exp(-\lambda_2 y) \{ (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_1 + \lambda_{12}) - \lambda_1 \lambda \exp(-\lambda_2 x) \} \\ \cdot [A(\lambda_2 y)]^\gamma [A(\lambda_2 x)]^{-(1+\gamma)} \left\{ 1 - [A(\lambda_2 x)]^{-\gamma} [A(\lambda_2 y)]^{1+\gamma} \right\}^{-1},$$

se $0 < y < x$.

(4.6)

A taxa de falha condicional de Y dado que X falhou em x $\lambda(y|x)$, definida em (2.17c), é dada por

$$\lambda(y|x) = \lambda (\lambda_1 + \lambda_2)^{-2} \{ (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_2 + \lambda_{12}) - \lambda_2 \lambda \exp(-\lambda_1 y) \} \\ [A(\lambda_1 y)]^{-(1+\gamma)} \left\{ [A(\lambda_1 y)]^{-\gamma} (1+\gamma) \right\}^{-1}$$

se $0 < x < y$.

$$\lambda_2 \lambda (\lambda_1 + \lambda_2)^{-2} \exp(-\lambda_2 y) \{ (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_1 + \lambda_{12}) - \lambda_1 \lambda \exp(-\lambda_2 x) \} \\ \cdot [A(\lambda_2 y)]^\gamma [A(\lambda_2 x)]^{-(1+\gamma)} \left\{ (\lambda_1 + \lambda_{12}) \left\{ 1 - [A(\lambda_2 x)]^{-\gamma} \right. \right. \\ \left. \left. \cdot [A(\lambda_2 y)]^{1+\gamma} \right\} - \gamma \lambda_2 \exp(-\lambda_2 x) [A(\lambda_2 x)]^{-(1+\gamma)} [A(\lambda_2 y)]^{1+\gamma} \right\}^{-1}$$

se $0 < y < x$.

(4.7)

Quando as distribuições marginais de X e Y são independentes, isto é, $\lambda_{12} = 0$, pode-se verificar facilmente que $\lambda_{YX}(y|x) = \lambda_Y(y) = \lambda_2$.

A distribuição de Sarkar possui algumas propriedades importantes:

1. $P(X=Y) = 0$;
2. X e Y são exponencialmente distribuídas com parâmetros $\lambda_1 + \lambda_{12}$ e $\lambda_2 + \lambda_{12}$, respectivamente;
3. $\min(X, Y)$ é uma distribuição exponencial com parâmetro λ , $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$;
4. $\min(X, Y)$ é independente de alguma função $g(X, Y)$, onde $g(X, Y)$ tem uma distribuição específica que será definida no teorema a seguir:

Teorema 4.1. (X, Y) é a $ACBVE_s(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$ se e somente se

- i) $\min(X, Y) \sim \text{Exp}(\lambda)$;
- ii) $\min(X, Y)$ e $Z = X - Y + k(X, Y)$ são independentes, onde

$$k(x, y) = \frac{\lambda_{12}}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_{12})} \log\{A(\lambda_1 x)/A(\lambda_1 y)\} \text{ se } 0 < x < y,$$

$$= \frac{\lambda_{12}}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_{12})} \log\{A(\lambda_2 x)/A(\lambda_2 y)\} \text{ se } 0 < y < x.$$

com $A(z) = 1 - \exp(-z)$, $p/ z > 0$, e a função de distribuição de $Z = X - Y + k(X, Y)$ é dada por

$$F(z) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp\{(\lambda_2 + \lambda_{12})z\} \quad \text{se } z < 0,$$

$$= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp\{(\lambda_1 + \lambda_{12})z\} \quad \text{se } z \geq 0.$$

A função geradora de momentos da $ACBVE_s$ é dada por

$$m(s, t) = \frac{(\lambda + s + t)(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12}) + s t \lambda_{12}}{(\lambda + s + t)(\lambda_1 + \lambda_{12} + s)(\lambda_2 + \lambda_{12} + t)} +$$

$$+ s t \lambda_{12} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{\lambda + (\lambda_1 + \lambda_2) j}$$

$$\times \left\{ \frac{\lambda_1 \prod_{k=1}^{j-1} (k \lambda_1 - s)}{\prod_{k=-1}^j (\lambda + t + k \lambda_1)} + \frac{\lambda_2 \prod_{k=1}^{j-1} (k \lambda_2 - t)}{\prod_{k=-1}^j (\lambda + s + k \lambda_2)} \right\}$$

Através dos momentos pode-se calcular as esperanças e variâncias marginais:

$$E(X) = (\lambda_1 + \lambda_{12})^{-1} \quad E(Y) = (\lambda_2 + \lambda_{12})^{-1}$$

$$Var(X) = (\lambda_1 + \lambda_{12})^{-2} \quad Var(Y) = (\lambda_2 + \lambda_{12})^{-2}$$

e a correlação é dada por

$$\rho(X, Y) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!}{\lambda + (\lambda_1 + \lambda_{12}) j} \left\{ x \lambda_1^j \prod_{k=1}^j (\lambda + k \lambda_1)^{-1} + \lambda_2^j \prod_{k=1}^j (\lambda + k \lambda_2)^{-1} \right\},$$

onde $0 \leq \rho(X, Y) < 1$

4.3. ANÁLISE DE DADOS PAREADOS COMPLETOS

Nesta seção, são apresentadas a estimação dos parâmetros da distribuição Sarkar, utilizando o método de máxima verossimilhança e, testar as hipóteses de independência entre X e Y e de igualdades das distribuições marginais de X e Y, utilizando os testes assintóticos da razão de verossimilhança, de Rao e de Wald, considerando dados completos, isto é, sem censuras.

4.3.1. ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

Sarkar (1987) propôs o método dos momentos para encontrar os estimadores dos parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_{12} , justificando o uso deste pela complexidade da função densidade da ACBVEs para aplicar o método de máxima verossimilhança. O objetivo desta seção é encontrar os estimadores de máxima verossimilhança de λ_1 , λ_{12} e $\delta (= \lambda_1 - \lambda_2)$ através do método iterativo de Newton-Raphson, utilizando as estimativas dos momentos como o chute inicial dos parâmetros.

Para facilitar os cálculos da estimação, as seguintes transformações foram feitas:

$$S = \text{EXP}(X)$$

$$T = \text{EXP}(Y).$$

Então a função densidade conjunta será:

$$f_{ST}(s, t) = 1/st \cdot f_{XY}(\log s, \log t) \quad (4.8)$$

Portanto, a densidade conjunta de Sarkar dada em (4.1) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} f(s, t) &= \lambda_1 \lambda / (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \cdot s^{-\lambda_1} t^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})} \cdot \{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_{12}) - \lambda_2 \lambda\} t^{-\lambda_1} \\ &\quad \cdot [1 - s^{-\lambda_1}]^\gamma \cdot [1 - t^{-\lambda_1}]^{-(1+\gamma)} \cdot 1/st \quad 0 < s < t, \\ &= \lambda_2 \lambda / (\lambda_1 + \lambda_2)^2 t^{-\lambda_2} s^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})} \{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_{12}) - \lambda_1 \lambda\} s^{-\lambda_2} \\ &\quad \cdot [1 - t^{-\lambda_2}]^\gamma \cdot [1 - s^{-\lambda_2}]^{-(1+\gamma)} \cdot 1/st \quad 0 < t < s. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Como a função exponencial é estritamente crescente, os estimadores de máxima verossimilhança da distribuição (S, T) são os mesmos da distribuição de (X, Y).

A função de verossimilhança é, então, expressa como:

$$\begin{aligned} L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}) &= \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} [\lambda / (\lambda_1 + \lambda_2)^2]^n \prod_{i=1}^{n_1} [s_i^{-\lambda_1} t_i^{-(\lambda_2 + \lambda_1)}] \cdot \\ &\quad \prod_{i=1}^{n_1} \{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1) - \lambda_2 \lambda t_i^{-\lambda_1}\} \prod_{i=1}^{n_1} (1 - s_i^{-\lambda_1})^\gamma (1 - t_i^{-\lambda_1})^{-(1+\gamma)} \cdot \\ &\quad \prod_{i=n_1+1}^n [t_i^{-\lambda_2} s_i^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}] \prod_{i=n_1+1}^n \{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_1 \lambda s_i^{-\lambda_2}\} \cdot \\ &\quad \prod_{i=n_1+1}^n (1 - t_i^{-\lambda_2})^\gamma (1 - s_i^{-\lambda_2})^{-(1+\gamma)} \prod_{i=1}^n (s_i t_i)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\text{onde } \gamma = \lambda_{12} / (\lambda_1 + \lambda_2), \quad x_i < y_i \text{ p/ } i = 1, \dots, n_1, \quad x_i > y_i \text{ p/ } i = n_1+1, \dots, n \text{ e, } n = n_1 + n_2. \quad (4.10)$$

que pode ser expressa em termos de λ_1 , λ_{12} e δ :

$$\begin{aligned} L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) &= \lambda_1^{n_1} (\lambda_1 - \delta)^{n_2} (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^n (2\lambda_1 + \delta)^{2n} \prod_{i=1}^{n_1} (s_i t_i)^{-\lambda_{12}} \\ &\quad \prod_{i=1}^n (s_i t_i)^{-\lambda_1} t_i^\delta [(2\lambda_1 - \delta)(\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) - (\lambda_1 - \delta)(2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) t_i^{-\lambda_1}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=n1+1}^n [(2\lambda_1 - \delta)(\lambda_1 + \lambda_{12}) - \lambda_1(2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})s_i^{-\lambda_1 + \delta}] \prod_{i=1}^n (s_i t_i)^{-1} \\
& \cdot \left(\prod_{i=1}^{n1} (1-s_i^{-\lambda_1}) \prod_{i=n1+1}^n (1-t_i^{-\lambda_1 + \delta}) \right)^{[\lambda_{12}/(2\lambda_1 - \delta)]} \\
& \cdot \left(\prod_{i=1}^{n1} (1-t_i^{-\lambda_1}) + \prod_{i=n1+1}^n (1-s_i^{-\lambda_1 + \delta}) \right)^{-[1 + \lambda_{12}/(2\lambda_1 - \delta)]} \quad (4.11)
\end{aligned}$$

e o logaritmo de $L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ dado por:

$$\begin{aligned}
\log L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) &= n_1 \log \lambda_1 + n_2 \log(\lambda_1 - \delta) + n \log(2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) - 2n \log(2\lambda_1 + \delta) \\
&- \sum_{i=1}^n \log s_i - \sum_{i=1}^n \log t_i - \lambda_{12} \left(\sum_{i=1}^{n1} \log t_i + \sum_{i=n1+1}^n \log s_i \right) - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n \log s_i + \sum_{i=1}^n \log t_i \right) \\
&+ \delta \sum_{i=1}^n \log t_i + \sum_{i=1}^{n1} \log [(2\lambda_1 - \delta)(\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) - (\lambda_1 - \delta)(2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) t_i^{-\lambda_1}] \\
&+ \sum_{i=n1+1}^n \log [(2\lambda_1 - \delta)(\lambda_1 + \lambda_{12}) - \lambda_1(2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) s_i^{-\lambda_1 + \delta}] \\
&+ [\lambda_{12}/(2\lambda_1 - \delta)] \cdot \left[\sum_{i=1}^{n1} \log(1-s_i^{-\lambda_1}) + \sum_{i=n1+1}^n \log(1-t_i^{-\lambda_1 + \delta}) \right] \\
&- [1 + \lambda_{12}/(2\lambda_1 - \delta)] \cdot \left[\sum_{i=1}^{n1} \log(1-t_i^{-\lambda_1}) + \sum_{i=n1+1}^n \log(1-s_i^{-\lambda_1 + \delta}) \right]. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Para estimar os parâmetros através do método iterativo de Newton-Raphson, o vetor escore $U(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ e a matriz de informação observada $I(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ são calculados:

$$\begin{aligned}
U(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) &= (U_{\lambda_1}(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta), U_{\lambda_{12}}(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta), U_{\delta}(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta))' \\
&= (\partial \log L / \partial \lambda_1, \partial \log L / \partial \lambda_{12}, \partial \log L / \partial \delta)', \text{ e}
\end{aligned}$$

$$I(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) = - \begin{bmatrix} \partial^2 \log L / \partial^2 \lambda_1 & \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} & \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta \\ \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} & \partial^2 \log L / \partial^2 \lambda_{12} & \partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta \\ \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta & \partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta & \partial^2 \log L / \partial^2 \delta \end{bmatrix}.$$

As derivadas citadas acima são apresentadas no APÊNDICE 2.

A velocidade de convergência do processo iterativo aplicado em vários conjuntos de dados mostra que as estimativas dos parâmetros encontradas através do método dos momentos constituem um bom chute inicial.

4.3.2. TESTE DE INDEPENDÊNCIA ENTRE X E Y

Quando $\lambda_{12} = 0$, a função densidade da ACBEs (4.1) pode ser escrita como um produto de duas distribuições exponenciais X e Y com parâmetros λ_1 e $\lambda_2 (= \lambda_1 - \delta)$, respectivamente. Portanto, para verificar a hipótese de independência de X e Y, basta testar $H_0: \lambda_{12} = 0$ vs. $H_1: \lambda_{12} \neq 0$.

Sob $H_0: \lambda_{12} = 0$, a função de verossimilhança (4.11) será dada por

$$L(\lambda_1, \delta) = \lambda_1^n (\lambda_1 - \delta)^n \left(\prod_{i=1}^n s_i t_i \right)^{-\lambda_1} \left(\prod_{i=1}^n t_i \right)^{\delta} \prod_{i=1}^n (s_i t_i)^{-1} \quad (4.14)$$

e o log da função de verossimilhança tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \log L(\lambda_1, \delta) &= n \log \lambda_1 + n \log (\lambda_1 - \delta) - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n \log s_i + \sum_{i=1}^n \log t_i \right) + \delta \sum_{i=1}^n \log t_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \log s_i - \sum_{i=1}^n \log t_i \end{aligned} \quad (4.15)$$

Pode ser facilmente verificado que os estimadores de máxima verossimilhança de λ_1 e δ sob o H_0 , $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\delta}$, são, respectivamente, dados por

$$\tilde{\lambda}_1 = n / \sum_{i=1}^n \log s_i \quad \text{e} \quad \tilde{\delta} = n / \sum_{i=1}^n \log s_i - n / \sum_{i=1}^n \log t_i. \quad (4.16)$$

Os testes assintóticos da razão de verossimilhança, de Rao

(escore) e de Wald são apresentados a seguir.

A hipótese H_0 é rejeitada pelo teste da razão de verossimilhança, se $-2 \log \Lambda > \chi^2_{1, \alpha}$, onde

$$\Lambda = L(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta}) / L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta}),$$

com $L(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta})$ a função de verossimilhança $L(\lambda_1, \delta)$ (4.14) avaliada no ponto $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta})$, e $L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})$ resultado obtido da função $L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ (4.11) calculada no ponto $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})$.

Para utilizar o teste de Rao, o vetor escore parcial e a matriz de informação parcial com relação a λ_{12} , $\tilde{U}_{\lambda_{12}}$ e $\tilde{I}_{\lambda_{12}}^{11}$, são desenvolvidos para calcular a estatística: $R = (\tilde{U}_{\lambda_{12}})^2 * \tilde{I}_{\lambda_{12}}^{11}$, onde

$$\tilde{U}_{\lambda_{12}} = U_{\lambda_{12}}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta}) = \partial \log L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) / \partial \lambda_{12} \big|_{\lambda_{12}=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \delta=\tilde{\delta}}, \text{ e}$$

$$\tilde{I}_{\lambda_{12}}^{11} = I_{\lambda_{12}}^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta}) = \tilde{I}_{11} - \tilde{I}_{12} * (\tilde{I}_{22})^{-1} * \tilde{I}_{21}, \text{ com}$$

$$-I_{11} = \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \lambda_{12}^2 \big|_{\lambda_{12}=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \delta=\tilde{\delta}}$$

$$-I_{21} = -I'_{12} = \begin{bmatrix} \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \lambda_{12} \partial \lambda_1 \\ \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \lambda_{12} \partial \delta \end{bmatrix} \bigg|_{\lambda_{12}=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \delta=\tilde{\delta}}$$

que são as derivadas segundas de $\log L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$, calculadas no ponto $(\lambda_{12}, \lambda_1, \delta) = (0, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta})$; e

$$-I_{22} = \begin{bmatrix} \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta) / \partial \lambda_1^2 & \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta) / \partial \lambda_1 \partial \delta \\ \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta) / \partial \lambda_1 \partial \delta & \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta) / \partial \delta^2 \end{bmatrix} \bigg|_{\lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \delta=\tilde{\delta}},$$

as derivadas segundas de $\log L(\lambda_1, \delta)$ com relação aos parâmetros λ_1 e δ , avaliadas no ponto $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta})$. As derivadas utilizadas para calcular $\tilde{U}_{\lambda_{12}}$ e $\tilde{I}_{\lambda_{12}}^{11}$ são apresentadas no APÊNDICE 2. A hipótese $H_0: \lambda_{12} = 0$ é rejeitada ao nível α pelo teste de Rao quando $R > \chi^2_{1, \alpha}$.

No teste de Wald, a estatística utilizada é dada por $W = (\hat{\lambda}_{12})^2 / \hat{I}_{\lambda_{12}}^{11}$, onde

$$\hat{I}_{\lambda_{12}}^{11} = I_{\lambda_{12}}^{11}(\hat{\lambda}_{12}, \hat{\lambda}_1, \hat{\delta}) = (\hat{I}_{11} - \hat{I}_{12}^* (\hat{I}_{22})^{-1} * \hat{I}_{21})^{-1}, \text{ e}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_{11} & \hat{I}_{12} \\ \hat{I}_{21} & \hat{I}_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12}} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12}}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta} \\ \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \delta^2} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

com $L = L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ dada por (4.11).

Verifica-se que os elementos da matriz acima são exatamente os mesmos da matriz de informação do modelo irrestrito (4.14), avaliados no ponto $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})$, com as posições modificadas de acordo com a partição feita para o teste. A hipótese $H_0: \lambda_{12} = 0$ é rejeitada ao nível α pelo teste de Wald se $W > \chi_{1, \alpha}^2$.

4.3.3. TESTE DE IGUALDADE DAS DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS DE X E Y

As distribuições marginais de X e Y, dadas em (4.3) e (4.4), são igualmente distribuídas quando $\lambda_1 = \lambda_2$. Portanto, a hipótese $H_0: \lambda_1 = \lambda_2$ é testada contra $H_1: \lambda_1 \neq \lambda_2$ no teste de igualdade das distribuições marginais, o que equivale a testar $H_0: \delta = 0$ contra $H_0: \delta \neq 0$. Sob o H_0 , a função de verossimilhança (4.11) é dada por

$$\begin{aligned} L(\lambda_1, \lambda_{12}) &= \lambda_1^n [\lambda / (2\lambda_1)^2]^n \prod_{i=1}^{n_1} [s_i^{-\lambda_1} t_i^{-(\lambda - \lambda_1)}] \prod_{i=1}^{n_1} \{ (2\lambda_1)(\lambda - \lambda_1) \lambda_1 \lambda t_i^{-\lambda_1} \} \\ &\cdot \prod_{i=1}^{n_1} (1 - s_i^{-\lambda_1})^\gamma (1 - t_i^{-\lambda_1})^{-(1+\gamma)} \cdot \prod_{i=n_1+1}^n [t_i^{-\lambda_1} s_i^{-(\lambda - \lambda_1)}] \prod_{i=1}^n (s_i t_i)^{-1} \\ &\cdot \prod_{i=n_1+1}^n \{ (2\lambda_1)(\lambda - \lambda_1) \lambda_1 \lambda s_i^{-\lambda_1} \} \prod_{i=n_1+1}^n (1 - t_i^{-\lambda_1})^\gamma (1 - s_i^{-\lambda_1})^{-(1+\gamma)} \end{aligned}$$

$$\text{onde } \gamma = (\lambda - 2\lambda_1) / (2\lambda_1). \quad (4.18)$$

Calculando o log da função de verossimilhança, a seguinte expressão é obtida:

$$\begin{aligned}
 \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) = & n \log \lambda_1 + n \log(2\lambda_1 + \lambda_{12}) - 2n \log(2\lambda_1) - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n \log t_i \right. \\
 & + \sum_{i=1}^n \log s_i \left. \right) - \lambda_{12} \left(\sum_{i=1}^{n1} \log t_i + \sum_{i=n1+1}^n \log s_i \right) + \sum_{i=1}^{n1} \log [2\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_{12}) \\
 & - \lambda_1(2\lambda_1 + \lambda_{12}) t_i^{-\lambda_1}] + \sum_{i=n1+1}^n \log [2\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_{12}) - \lambda_1(2\lambda_1 + \lambda_{12}) s_i^{-\lambda_1}] \\
 & + (\lambda_{12}/2\lambda_1) \left[\sum_{i=1}^{n1} \log(1 - s_i^{-\lambda_1}) + \sum_{i=n1+1}^n \log(1 - t_i^{-\lambda_1}) \right] - (1 + \lambda_{12}/2\lambda_1) \\
 & \left[\sum_{i=1}^{n1} \log(1 - t_i^{-\lambda_1}) + \sum_{i=n1+1}^n \log(1 - s_i^{-\lambda_1}) \right] - \sum_{i=1}^n \log s_i - \sum_{i=1}^n \log t_i
 \end{aligned} \quad (4.19)$$

O vetor escore $U(\lambda_1, \lambda_{12})$ e a matriz de informação de Fisher observada $I(\lambda_1, \lambda_{12})$, onde

$$\begin{aligned}
 U(\lambda_1, \lambda_{12}) &= (U_{\lambda_1}(\lambda_1, \lambda_{12}), U_{\lambda_{12}}(\lambda_1, \lambda_{12}))^t \\
 &= (\partial \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \lambda_1, \partial \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \lambda_{12})^t, \text{ e} \\
 I(\lambda_1, \lambda_{12}) &= - \begin{bmatrix} \partial^2 \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) / \partial^2 \lambda_1 & \partial^2 \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} \\ \partial^2 \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} & \partial^2 \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) / \partial^2 \lambda_{12} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (4.20)$$

são necessários para o cálculo das estimativas de máxima verossimilhança de λ_1 e λ_{12} pelo método Newton-Raphson. As derivadas utilizadas são apresentadas no APÊNDICE 2.

Os testes assintóticos da razão de verossimilhança, de Rao e de Wald são utilizados para testar $H_0: \delta = 0$ vs. $H_0: \delta \neq 0$.

No teste da razão de verossimilhança, a hipótese $H_0: \delta = 0$ é rejeitada se $-2 \log \Lambda > \chi_{1, \alpha}^2$, onde

$$\Lambda = L(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12}) / L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})$$

com $L(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})$ a função de verossimilhança $L(\lambda_1, \lambda_{12})$ dada em (4.18) e calculada no ponto $(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}_1)$, e $L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})$ a função (4.11) calculada no ponto $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})$.

Para utilizar o teste de Rao, o vetor escore parcial \tilde{U}_δ e a matriz de informação parcial \tilde{I}_δ são calculados e apresentados no APÊNDICE 2, onde

$$\tilde{U}_\delta = U_\delta(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12}) = \partial \log L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) / \partial \delta \Big|_{\delta=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \lambda_{12}=\tilde{\lambda}_{12}}, \text{ e}$$

$$\tilde{I}_\delta^{11} = I_\delta^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12}) = \tilde{I}_{11} - \tilde{I}_{12} * (\tilde{I}_{22})^{-1} * \tilde{I}_{21}, \text{ com}$$

$$-I_{11} = \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \delta^2 \Big|_{\delta=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \lambda_{12}=\tilde{\lambda}_{12}}$$

$$-I_{21} = -I'_{12} = \begin{bmatrix} \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \delta \partial \lambda_1 \\ \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \lambda_{12} \partial \delta \end{bmatrix} \Big|_{\delta=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \lambda_{12}=\tilde{\lambda}_{12}}$$

que são as derivadas segundas de $\log L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ da equação (4.11) com relação aos parâmetros, calculadas no ponto $(\delta, \lambda_1, \lambda_{12}) = (0, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})$; e

$$-I_{22} = \begin{bmatrix} \partial^2 \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \lambda_1^2 & \partial^2 \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} \\ \partial^2 \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} & \partial^2 \log L(\lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \lambda_{12}^2 \end{bmatrix} \Big|_{\lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \lambda_{12}=\tilde{\lambda}_{12}}$$

as derivadas segundas de $\log L(\lambda_1, \lambda_{12})$ da função dada em (4.18) com relação aos parâmetros λ_1 e λ_{12} , avaliadas no ponto $(\lambda_1, \lambda_{12}) = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})$.

A hipótese de igualdade das distribuições marginais de X e Y é rejeitada ao nível α se $R = \tilde{U}_\delta^2 * \tilde{I}_\delta^{11} > \chi_{1, \alpha}^2$.

Para aplicar o teste de Wald, a hipótese de igualdade das distribuições marginais $H_0: \delta = 0$ é rejeitada ao nível α se a estatística $W = \hat{\delta}^2 / \hat{I}_\delta^{11} > \chi_{1, \alpha}^2$, onde $\hat{\delta}$ é o EMV de δ encontrado sob o

modelo irrestrito encontrado pela maximização da função de verossimilhança dada por (4.17) e

$$\hat{I}_{\delta}^{11} = I_{\delta}^{11}(\hat{\delta}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}) = (\hat{I}_{11} - \hat{I}_{12} * (\hat{I}_{22})^{-1} * \hat{I}_{21})^{-1}, \text{ com}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_{11} & \hat{I}_{12} \\ \hat{I}_{21} & \hat{I}_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log L / \partial \delta^2}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12}} \\ \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12}} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

com $L = L(\delta, \lambda_1, \lambda_{12}) = L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ dada por (4.17). A matriz acima é a matriz de informação calculada sob o modelo irrestrito (4.13) com as posições das derivadas modificadas de acordo com a partição do vetor dos parâmetros feita para o teste.

4.4. ANÁLISE DE DADOS PAREADOS COM PRESENÇA DE CENSURAS

Seja (X, Y) variável aleatória bivariada onde X representa o tempo de falha do primeiro componente e Y do segundo. Será estudado agora o caso onde há censuras nas observações longitudinais, o que significa a censura só pode ocorrer no segundo componente da variável bivariada, isto é, em Y .

4.4.1. ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

Usando o mesmo procedimento descrito no capítulo anterior, a função de verossimilhança de $\underline{\theta} = (\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)'$, com presença de censuras em Y , pode ser expressa por

$$L(\theta) = \underbrace{\prod_{i=1}^{r_1} f(x_i, y_i)}_{P1} \underbrace{\prod_{i=r_1+1}^{r_2} f(x_i, y_i)}_{P2} \underbrace{\prod_{i=r_2+1}^{r_3} \frac{-\partial S(x_i, y_i)}{\partial x_i}}_{P3} \underbrace{\prod_{i=r_3+1}^n \frac{-\partial S(x_i, y_i)}{\partial x_i}}_{P4}$$

$$= P1 \times P2 \times P3 \times P4 \quad (4.22)$$

onde

- $(x_i, y_i), i = 1, \dots, r_1 : x_i, y_i$ tempos de falha e $x_i < y_i$;
 $(x_i, y_i), i = r_1+1, \dots, r_2 : x_i, y_i$ tempos de falha e $x_i > y_i$;
 $(x_i, y_i), i = r_2+1, \dots, r_3 : x_i$ falha, y_i censura e $x_i < y_i$;
 $(x_i, y_i), i = r_3+1, \dots, n : x_i$ falha, y_i censura e $x_i > y_i$.

Para o cálculo do termo $-\partial S(x_i, y_i)/\partial x_i$, a função de sobrevivência de Sarkar $S(x_i, y_i)$, dada por (4.2), é retomada:

$$S(x_i, y_i) = \exp[-(\lambda_2 + \lambda_{12})y_i] \left\{ 1 - [A(\lambda_1 y_i)]^{-\gamma} [A(\lambda_1 x_i)]^{1+\gamma} \right\}, \quad p/x_i < y_i$$

$$= \exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12})x_i] \left\{ 1 - [A(\lambda_2 x_i)]^{-\gamma} [A(\lambda_2 y_i)]^{1+\gamma} \right\}, \quad p/x_i > y_i$$

onde $\gamma = \lambda_{12}/(\lambda_1 + \lambda_2)$ e $A(z) = 1 - \exp(-z)$ p/ $z > 0$.

Potanto,

$$-\partial S(x_i, y_i)/\partial x_i =$$

$$= \exp[-(\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})y_i] \left\{ [A(\lambda_1 y_i)]^{-\gamma} (1+\gamma) [A(\lambda_1 x_i)]^{\gamma} [\lambda_1 \exp(-\lambda_1 x_i)] \right\}$$

$$p/ x_i < y_i$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_{12}) \exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12})x_i] \left\{ 1 - [A((\lambda_1 - \delta)x_i)]^{-\gamma} [A((\lambda_1 - \delta)y_i)]^{1+\gamma} \right\}$$

$$- \exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12})x_i] \left\{ \gamma [A((\lambda_1 - \delta)x_i)]^{-\gamma-1} [(\lambda_1 - \delta) \right.$$

$$\cdot \exp[-(\lambda_1 - \delta)x_i] [A((\lambda_1 - \delta)y_i)]^{1+\gamma} \left. \right\} \quad p/ x_i > y_i \quad (4.23)$$

Sejam $n1=r1$, $n2 = r2-r1$, $n3 = r3-r2$ e $n4 = n-r3$. O log da

função de verossimilhança da distribuição de Sarkar, com presença de censuras à direita em Y, considerando os parâmetros λ_1 , δ e λ_{12} é dado por

$$\log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) = \log P1 + \log P2 + \log P3 + \log P4, \quad (4.24)$$

onde

$$\begin{aligned} \log P1 = & n_1 \log(\lambda_1) + n_1 \log(2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) - 2n_1 \log(2\lambda_1 - \delta) - \lambda_1 \sum_{i=1}^{r1} x_i \\ & - (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) \sum_{i=1}^{r1} y_i + \sum_{i=1}^{r1} \log \left[(2\lambda_1 - \delta) (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) - (\lambda_1 - \delta) \right. \\ & \left. (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) \exp(-\lambda_1 y_i) \right] + \gamma \log[A(\lambda_1 x_i)] - (1+\gamma) \log[A(\lambda_1 y_i)] \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \log P2 = & n_2 \log(\lambda_1 - \delta) + n_2 \log(2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) - 2n_2 \log(2\lambda_1 - \delta) - (\lambda_1 - \delta) \\ & \sum_{i=r1+1}^{r2} y_i - (\lambda_1 + \lambda_{12}) \sum_{i=r1+1}^{r2} x_i + \sum_{i=r1+1}^{r2} \log \left\{ 2\lambda_1 - \delta \right. \\ & \left. - \lambda_1 (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) \exp[-(\lambda_1 - \delta)x_i] \right\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \log P3 = & -(\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) \sum_{i=r2+1}^{r3} y_i - \lambda_1 \sum_{i=r2+1}^{r3} x_i + n_3 \log(\lambda_1) + n_3 \log(1+\gamma) \\ & + \gamma \sum_{i=r2+1}^{r3} \log[A(\lambda_1 x_i)/A(\lambda_1 y_i)] \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \log P4 = & -(\lambda_1 + \lambda_{12}) \sum_{i=r3+1}^n x_i + \sum_{i=r3+1}^n \log \left\{ (\lambda_1 + \lambda_{12}) - [A((\lambda_1 - \delta)x_i)]^{-\gamma} \right. \\ & \left. [A((\lambda_1 - \delta)y_i)]^{1+\gamma} \left[(\lambda_1 + \lambda_{12}) + \gamma (\lambda_1 - \delta) \exp[-(\lambda_1 - \delta)x_i] \right. \right. \\ & \left. \left. [A((\lambda_1 - \delta)x_i)]^{-1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde $\gamma = \lambda_{12}/(2\lambda_1 - \delta)$ e $A(z) = 1 - \exp(-z)$, $p/ z > 0$.

Observa-se que a soma $\log P1 + \log P2$ constitui o logaritmo da

função de verossimilhança $L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ para dados completos dado em (4.12). Para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança de λ_1 , λ_{12} e δ com presença de censuras, deve-se resolver as equações de verossimilhança derivando a função $\log L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ com relação aos parâmetros λ_1 , λ_{12} e δ , e igualá-las a zero. Porém as expressões das derivadas são extremamente complexas e longas, portanto as derivadas são encontradas numericamente a partir do \log da função de verossimilhança ao invés da derivada analítica.

Encontrando as derivadas primeiras e segundas numericamente, pode-se construir o vetor escore $U(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ e a matriz de informação observada $I(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$. Com isso, utiliza-se novamente o método iterativo de Newton-Raphson para encontrar as estimativas dos parâmetros.

4.4.2. TESTE DE INDEPENDÊNCIA ENTRE X E Y

A hipótese de independência de X e Y é formulada através de $H_0: \lambda_{12} = 0$. Sob H_0 , o \log da função de verossimilhança (4.24) pode ser escrita em termos de λ_1 e δ :

$$\log L(\lambda_1, \delta) = K1 + K2 + K3 + K4, \quad (4.29)$$

onde

$$\begin{aligned} K1 = & n_1 \log(\lambda_1) + n_1 \log(2\lambda_1 - \delta) - 2n_1 \log(2\lambda_1 - \delta) - \lambda_1 \sum_{i=1}^{r1} x_i - (\lambda_1 \\ & - \delta) \sum_{i=1}^{r1} y_i + \sum_{i=1}^{r1} \log \left[\frac{(2\lambda_1 - \delta)(\lambda_1 - \delta) - (\lambda_1 - \delta)(2\lambda_1 - \delta)}{\exp(-\lambda_1 y_i)} \right] - \log[A(\lambda_1, y_i)] \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} K2 = & n_2 \log(\lambda_1 - \delta) + n_2 \log(2\lambda_1 - \delta) - 2n_2 \log(2\lambda_1 - \delta) - (\lambda_1 - \delta) \\ & \sum_{i=r1+1}^{r2} y_i - \lambda_1 \sum_{i=r1+1}^{r2} x_i + \sum_{i=r1+1}^{r2} \log \left\{ \frac{(2\lambda_1 - \delta)\lambda_1 - \lambda_1(2\lambda_1 - \delta)}{\exp[-(\lambda_1 - \delta)x_i]} \right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$K3 = -(\lambda_1 - \delta) \sum_{i=r2+1}^{r3} y_i - \lambda_1 \sum_{i=r2+1}^{r3} x_i + n_3 \log(\lambda_1) \quad (4.32)$$

$$K4 = -\lambda_1 \sum_{i=r3+1}^n x_i + \sum_{i=r3+1}^n \log \left\{ \lambda_1 - [A((\lambda_1 - \delta)y_i)] \left[\lambda_1 + \gamma (\lambda_1 - \delta) \exp[-(\lambda_1 - \delta)x_i] [A((\lambda_1 - \delta)x_i)]^{-1} \right] \right\}, \quad (4.33)$$

onde $\gamma = \lambda_{12}/(2\lambda_1 - \delta)$ e $A(z) = 1 - \exp(-z)$, $p/z > 0$.

Usando o teste da razão de verossimilhança, a hipótese H_0 é rejeitada se $-2 \log \Lambda > \chi_{1, \alpha}^2$, onde $\chi_{1, \alpha}^2$ é o valor da distribuição chi-quadrada com 1 grau de liberdade no ponto $1 - 100\alpha$ % de probabilidade, com

$$\Lambda = L(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta}) / L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})$$

e $\log \Lambda = \log L(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta}) - \log L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})$ onde $\log L(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta})$ é o resultado da função $\log L(\lambda_1, \delta)$ (4.29), calculada no ponto $(\lambda_1, \delta) = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta})$ e, $\log L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ é o valor da função $\log L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ (4.24), calculada no ponto $(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta) = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})$.

Para utilizar o teste de Rao, é preciso calcular o vetor de escores parcial $\tilde{U}_{\lambda_{12}} = U_{\lambda_{12}}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta})$ e a matriz de informação parcial $\tilde{I}_{\lambda_{12}}^{11} = I_{\lambda_{12}}^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta}) = (\tilde{I}_{11} - \tilde{I}_{12} * (\tilde{I}_{22})^{-1} * \tilde{I}_{21})^{-1}$, onde $U_{\lambda_{12}}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta})$ e I_{11} , I_{12} , I_{21} e I_{22} são calculadas utilizando as funções $\log L(\lambda_{12}, \lambda_1, \delta)$ e $\log L(\lambda_1, \delta)$ dadas por (4.24) e (4.29), respectivamente. A hipótese de independência de X e Y é rejeitada ao nível α se e somente se

$$R = (\tilde{U}_{\lambda_{12}})^2 * \tilde{I}_{\lambda_{12}}^{11} > \chi_{1, \alpha}^2.$$

Para aplicar o teste de Wald, a estatística $W = (\hat{\lambda}_{12})^2 / \hat{I}_{\lambda_{12}}^{11}$ é calculada, e a hipótese $H_0: \lambda_{12} = 0$ é rejeitada ao nível α se $W > \chi_{1, \alpha}^2$, onde

$$\hat{I}_{\lambda_{12}}^{11} = I_{\lambda_{12}}^{11}(\hat{\lambda}_{12}, \hat{\lambda}_1, \hat{\delta}) = (\hat{I}_{11} - \hat{I}_{12} * (\hat{I}_{22})^{-1} * \hat{I}_{21})^{-1}, \text{ e}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_{11} & \hat{I}_{12} \\ \hat{I}_{21} & \hat{I}_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12}} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12}}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta} \\ \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta}{\partial^2 \log L / \partial \delta^2} & \frac{\partial^2 \log L / \partial \delta^2}{\partial^2 \log L / \partial \delta^2} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

com $\log L = \log L(\lambda_{12}, \lambda_1, \delta) = \log L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$, dada por (4.24).

4.4.3. TESTE DE IGUALDADE DAS DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS DE X E Y

A hipótese de igualdade das distribuições marginais de X e Y é verificada através de $H_0: \lambda_1 = \lambda_2$ vs. $H_1: \lambda_1 \neq \lambda_2$, como no caso de dados completos, o que equivale a testar o $H_0: \delta = 0$ vs. $H_1: \delta \neq 0$. Sob H_0 , o \log da função de verossimilhança (4.29) é reescrito por:

$$\log L(\lambda_1, \lambda_{12}) = M1 + M2 + M3 + M4, \quad (4.35)$$

onde

$$\begin{aligned} M1 = & n_1 \log(\lambda_1) + n_1 \log(2\lambda_1 + \lambda_{12}) - 2n_1 \log(2\lambda_1) - \lambda_1 \sum_{i=1}^{r1} x_i - (\lambda_1 + \lambda_{12}) \\ & \sum_{i=1}^{r1} y_i + \sum_{i=1}^{r1} \log \left[2\lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_{12}) - \lambda_1 (2\lambda_1 + \lambda_{12}) \exp(-\lambda_1 y_i) \right] + \gamma \\ & \log[A(\lambda_1 x_i)] - (1+\gamma) \log[A(\lambda_1 y_i)] \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} M2 = & n_2 \log(\lambda_1) + n_2 \log(2\lambda_1 + \lambda_{12}) - 2n_2 \log(2\lambda_1) - \lambda_1 \sum_{i=r1+1}^{r2} y_i - (\lambda_1 + \lambda_{12}) \\ & \sum_{i=r1+1}^{r2} x_i + \sum_{i=r1+1}^{r2} \log \left[2\lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_{12}) - \lambda_1 (2\lambda_1 + \lambda_{12}) \exp(-\lambda_1 x_i) \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} M3 = & -(\lambda_1 + \lambda_{12}) \sum_{i=r2+1}^{r3} y_i - \lambda_1 \sum_{i=r2+1}^{r3} x_i + n_3 \log(\lambda_1) + n_3 \log(1+\gamma) \\ & + \gamma \sum_{i=r2+1}^{r3} \log[A(\lambda_1 x_i) / A(\lambda_1 y_i)] \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$M4 = -(\lambda_1 + \lambda_{12}) \sum_{i=r3+1}^n x_i + \sum_{i=r3+1}^n \log \left\{ (\lambda_1 + \lambda_{12}) - [A(\lambda_1 x_i)]^{-\gamma} \right\}$$

$$[A(\lambda_1 y_1)]^{1+\gamma} \left[(\lambda_1 + \lambda_{12}) + \gamma \lambda_1 \exp(-\lambda_1 x_1) [A(\lambda_1 x_1)]^{-1} \right] \} \quad (4.39)$$

com $\gamma = \lambda_{12}/(2\lambda_1)$ e $A(z) = 1 - \exp(-z)$, p/ $z > 0$.

Usando o teste da razão de verossimilhança, a hipótese H_0 é rejeitada se e somente se $-2 \log \Lambda > \chi^2_{1,\alpha}$, com

$$\Lambda = L(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12}) / L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})$$

e $\log \Lambda = \log L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}) - \log L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})$, onde $\log L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12})$ é dada por (4.35), substituindo seus parâmetros pelas estimativas e o $\log L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})$, resultado obtido da função (4.24), avaliado no ponto $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_{12}, \hat{\delta})$.

Para aplicar o teste de Rao, o vetor escore parcial $U_{\delta}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})$ e a matriz de informação parcial $I_{\delta}^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12}) = (\tilde{I}_{11} \quad -\tilde{I}_{12}^* (\tilde{I}_{22})^{-1} \quad \tilde{I}_{21})^{-1}$ são calculados, onde as derivadas que compoem $U_{\delta}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})$ e $I_{\delta}^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})$ têm as mesmas expressões dadas na seção 4.5, utilizando $\log L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ e $\log L(\lambda_1, \lambda_{12})$ dadas por (4.24) e (4.35), respectivamente. A hipótese de igualdade das distribuições marginais de X e Y é rejeitada ao nível α se e somente se

$$R = (U_{\delta}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12}))^2 * I_{\delta}^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12}) > \chi^2_{1,\alpha}.$$

O teste de Wald pode ser aplicado usando a estatística $W = (\hat{\delta})^2 / \hat{I}_{\delta}^{11}$, onde

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_{11} & \hat{I}_{12} \\ \hat{I}_{21} & \hat{I}_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial^2 \log L / \partial \delta^2 & \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta & \partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta \\ \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta & \partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2 & \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} \\ \partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta & \partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} & \partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

com $\log L = \log L(\delta, \lambda_1, \lambda_{12})$ dada por (4.24). A hipótese de igualdade das distribuições marginais de X e Y $H_0: \delta = 0$ é rejeitada ao nível α se $W > \chi^2_{1,\alpha}$.

4.5. EXEMPLO NUMÉRICO

Dois exemplos numéricos são utilizados para ilustrar a metodologia desenvolvida nas seções anteriores. Os conjuntos de dados bivariados foram gerados assumindo a distribuição de Sarkar como a distribuição básica conjunta, através de transformações de três distribuições exponenciais independentes e uma uniforme (Teorema 3.2, Sarkar, 1987). A estimação dos parâmetros e testes de hipótese de independência e de igualdade das distribuições marginais são feitos utilizando o programa computacional SARKAR.PRG apresentado no APÊNDICE 4. Os conjuntos de dados são apresentados no APÊNDICE 3.

EXEMPLO 4.1

Os dados deste exemplo foram gerados com os parâmetros $\lambda_1 = 0,9$, $\lambda_2 = 1,1$ e $\lambda_{12} = 0,1$ da distribuição de Sarkar, sem censura, constituindo assim uma amostra de dados com o vetor dos parâmetros $(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)' = (0,9, 0,1, -0,2)'$. As estimativas são calculadas através do método de Newton-Raphson seus desvios padrões através raiz quadrada do vetor diagonal da inversa da matriz de informação observada. Os resultados são apresentados na tabela 4.1 a seguir:

TABELA 4.1. Estimativas dos parâmetros da distribuição de Sarkar, calculadas através do método de máxima verossimilhança.

Modelo	λ_1	λ_{12}	δ	logL
Irrestrito	0,8239 (,1139)	0,0829 (,0942)	-0,2496 (,1518)	-391,0065
Ho: $\lambda_{12} = 0$	0,9041 (,0972)	-	-0,2596 (,1419)	-391,4368
Ho: $\delta = 0$	0,9322 (,1110)	0,0831 (,0871)	-	-392,5733

Obs. os valores entre parênteses são os desvios padrões.

Os teste assintóticos da razão de verossimilhança, de Rao e de Wald são feitos, também, no programa SARKAR.PRG e os resultados são os seguintes:

TABELA 4.2. Testes assintóticos da razão de verossimilhança, de Rao e de Wald para verificar a independência entre X e Y e a igualdade das distribuições marginais de X e Y.

Teste	Teste de Independência			Teste de Igualdade		
	R. V.	Rao	Wald	R. V.	Rao	Wald
Estatíst.	0,8607	0,9681	0,7753	3,1336	3,3697	2,7031
P_value	0,3535	0,3252	0,3786	0,0767	0,0664	0,1002

Os valores de P_value dos testes indicam a independência entre X e Y e igualdade das distribuições marginais de X e Y. As funções de sobrevivência marginais estimadas de X e Y são apresentadas no gráfico 4.1.

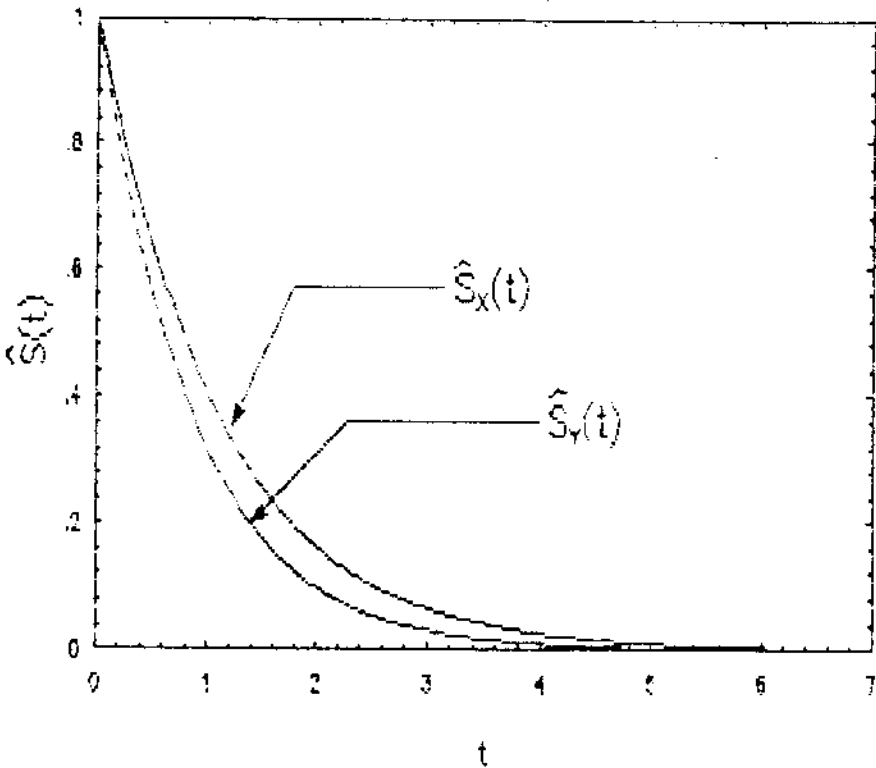


GRÁFICO 4.1. Funções de sobrevivência marginais estimadas de X e Y.

EXEMPLO 4.2

Os dados deste exemplo foram gerados com $\lambda_1 = 0,4$, $\lambda_2 = 0,2$ e $\lambda_{12} = 0,2$ da distribuição de Sarkar, portanto $(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)' = (0,4, 0,2, 0,2)'$. As estimativas e seus respectivos desvios padrões são apresentadas na tabela 4.3, e os resultados dos testes estatísticos na tabela 4.4:

TABELA 4.3. Estimativas dos parâmetros da distribuição de Sarkar, calculadas através do método de máxima verossimilhança.

modelo	λ_1	λ_{12}	δ	logL
irrestrito	0,4306 (,0571)	0,2137 (,0385)	0,2178 (,0653)	-689,0444
Ho: $\lambda_{12} = 0$	0,6383 (,0651)	-	0,1980 (,0607)	-710,6394
Ho: $\delta = 0$	0,3232 (,0400)	0,1901 (,0349)	-	-696,3694

Obs. os valores entre parênteses são os desvios padrões.

TABELA 4.4. Testes assintóticos da razão de verossimilhança, de Rao e de Wald para verificar a independência entre X e Y e a igualdade das distribuições marginais de X e Y.

Teste	Teste de Independência			Teste de Igualdade		
	R.V.	Rao	Wald	R.V.	Rao	Wald
Estatíst.	43,1899	29,8333	30,8319	14,6479	20,3444	11,1761
P_value	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0008

Os resultados da tabela 4.2. mostram claramente que X e Y não são independentes e nem igualmente distribuídas. As funções de sobrevivência marginais estimadas são apresentadas no gráfico 4.2.

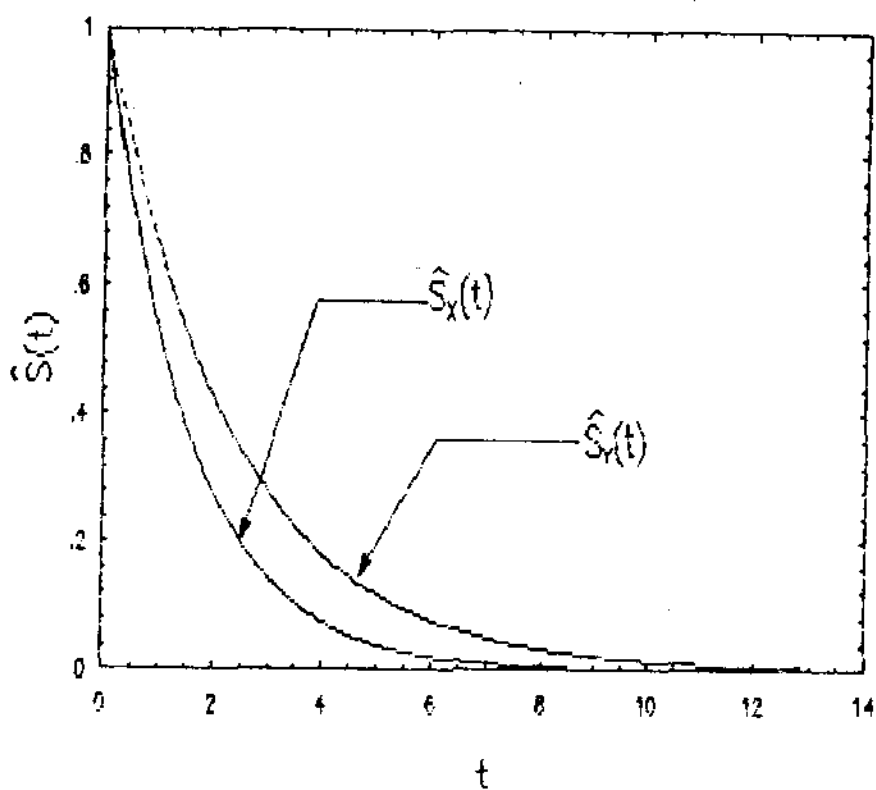


GRÁFICO 4.2. Funções de sobrevivência marginais estimadas de X e Y.

CAPÍTULO V

ANÁLISE DE DADOS PAREADOS COM PRESENÇA DE COVARIÁVEIS

5.1. INTRODUÇÃO

Uma técnica muito usada para detectar a heterogeneidade numa população é a inclusão de covariáveis no modelo. O estudo do efeito das covariáveis nos tempos de falha é freqüente em Análise de Sobrevivência. Por exemplo, num estudo de sobrevivência de câncer no pulmão, fatores como a idade, o tipo do tumor e o estágio que inicia o diagnóstico, podem ser considerados como covariáveis na análise para verificar se existe alguma relação com a sobrevivência do paciente.

Holt e Prentice (1974) apresentaram uma análise para dados de sobrevivência pareados, utilizando uma extensão do modelo de regressão de riscos proporcionais de Cox (1972). Neste modelo semi-paramétrico uma função risco de perturbação (nuisance) é assumida para cada par e a covariável idade proporcionalmente no risco dele.

Análise de dados pareados com presença de covariáveis usando modelos paramétricos só foi abordada recentemente. Huster et al. (1989) utilizaram o modelo paramétrico de Clayton-Oakes com as marginais Weibull para uma análise de tempos de falha (X, Y) e ilustraram a abordagem com um conjunto de dados relacionados com retinopatia diabética.

Uma revisão do modelo Clayton-Oakes e do estudo feito por Huster et al. (1989) é feita na seção 5.2. Seguindo o mesmo procedimento de Huster et al., são desenvolvidas análises de dados pareados com covariáveis usando a distribuição exponencial bivariada

independente, a distribuição exponencial bivariada de Block-Basu e a distribuição exponencial bivariada de Sarkar nas seções 5.3, 5.4 e 5.5, respectivamente.

5.2. MODELO DE CLAYTON E OAKES

Clayton (1978) e Oakes (1982) apresentaram um modelo paramétrico bivariado com a função conjunta de sobrevivência dada por

$$S_{XY}(x,y) = (S_X(x)^{1-\theta} + S_Y(y)^{1-\theta} - 1)^{-1/(\theta-1)} \quad (5.1)$$

onde $\theta (>1)$ é o parâmetro que mede a associação positiva entre os tempos de falha X e Y , $S_X(x)$ e $S_Y(y)$ são as funções de sobrevivência marginais. Para todo x e y , $S(x,\infty) = S(\infty,y) = 0$ e $S(x,0) = S(x)$, $S(0,y) = S(y)$. Quando $\theta \rightarrow 1+$, $S(x,y) \rightarrow S(x) \cdot S(y)$, que implica na independência entre X e Y . Se $\theta \rightarrow \infty$, então $S(x,y) \rightarrow \min\{S(x), S(y)\}$, e a distribuição bivariada apresenta associação máxima entre X e Y (Oakes, 1982).

A função densidade conjunta de (X,Y) é expressa por

$$f(x,y) = \frac{\theta \cdot f(x) \cdot f(y)}{(S(x) \cdot S(y))^\theta D^{(2+1/(\theta-1))}} \quad (5.2)$$

onde $f(x)$ e $f(y)$ são as funções densidades marginais e X e Y , respectivamente, e $D = S_X(x)^{1-\theta} + S_Y(y)^{1-\theta} - 1$.

Os seguintes aspectos são características atrativas desta família de distribuição: (1) qualquer forma de distribuição marginal pode ser usada, e (2) o parâmetro de associação θ é um parâmetro separado dos parâmetros das marginais e tem a seguinte interpretação: Se $\lambda_a = \lambda(x|Y=y)$ e $\lambda_b = \lambda(x|Y>y)$, as taxas de falha de X condicionando em $[Y = y]$ e $[Y > y]$, respectivamente, então, para todo x e y , $\theta = \lambda_a/\lambda_b$ (Clayton, 1978). Portanto, θ pode ser interpretado como um risco relativo - o risco de falha de X se Y falha no ponto y , relativo à falha de X se Y não tenha falhado até y . O parâmetro θ também pode dar

uma interpretação de "efeitos aleatórios" nos dados (Clayton, 1978; Cox e Oakes, 1984).

Como ilustração, o seguinte exemplo é considerado: Suponha-se que (X, Y) uma variável bivariada com as distribuições marginais $X \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ e $Y \sim \text{Exp}(\lambda_2)$. A função de sobrevivência do modelo de Clayton-Oakes é dada por

$$S(x, y) = (\exp[\lambda_1(\theta-1)x] + \exp[\lambda_2(\theta-1)y] - 1)^{-1/(\theta-1)} \quad (5.3)$$

e a função densidade conjunta dada por

$$f(x, y) = \frac{\theta \lambda_1 \lambda_2 \exp((\theta-1)(\lambda_1 x + \lambda_2 y))}{(\exp[\lambda_1(\theta-1)x] + \exp[\lambda_2(\theta-1)y] - 1)^{(2+1/(\theta-1))}} \quad (5.4)$$

Portanto, as funções λ_a e λ_b são respectivamente:

$$\begin{aligned} \lambda_a &= \lambda(x|Y=y) = f(x, y) / (-\partial S(x, y)/\partial y) = \\ &= \frac{\theta \lambda_1 \exp(\lambda_1(\theta-1)x)}{(\exp[\lambda_1(\theta-1)x] + \exp[\lambda_2(\theta-1)y] - 1)}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} e \quad \lambda_b &= \lambda(x|Y>y) = (-\partial S(x, y)/\partial x) / S(x, y) = \\ &= \frac{\lambda_1 \exp(\lambda_1(\theta-1)x)}{(\exp[\lambda_1(\theta-1)x] + \exp[\lambda_2(\theta-1)y] - 1)}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Inferências concernentes à estimação e testes de hipóteses sobre os parâmetros podem ser feitas para verificar a independência ($H_0: \theta = 1$) ou, a igualdade das distribuições marginais ($H_0: \lambda_1 = \lambda_2$).

Na aplicação numérica apresentada por Huster et al. (1989),

um grupo de pacientes com retinopatia diabética foi selecionado para a análise. Em cada paciente, um olho foi escolhido ao acaso para receber um tratamento de laser fotocoagulação, enquanto o outro foi observado sem nenhum tratamento (controle). Os tempos decorridos até a cegueira (acuidade visual menor do que 2,5%) dos olhos foram registrados como uma variável bivariada (X,Y). Foi considerada também a covariável "Tipo de Diabetes" do paciente para a análise.

O modelo Clayton-Oakes considerado para a variável foi de marginais Weibull com o mesmo parâmetro de forma (α) e parâmetros diferentes de escala - γ_1 para X (tratamento) e γ_2 para Y (controle). Portanto, as funções de sobrevivência marginais (como já visto na seção 2.2 do Capítulo II) são dadas por:

$$S(x) = \exp(-x^\alpha \gamma_1) \text{ e } S(y) = \exp(-y^\alpha \gamma_2) \quad (5.7)$$

e a função de sobrevivência conjunta é expressa por

$$S(x,y) = \left\{ \left(\exp(-x^\alpha \gamma_1) \right)^{1-\theta} + \left(\exp(-y^\alpha \gamma_2) \right)^{1-\theta} - 1 \right\}^{-1/(\theta-1)} \quad (5.8)$$

O primeiro objetivo do estudo é avaliar se há um efeito do tratamento, o que equivale a verificar se as distribuições marginais são iguais, isto é, se $\gamma_1 = \gamma_2$. A segunda hipótese de interesse é verificar se há associação entre os tempos de sobrevivência do olho tratado e do olho não-tratado, isto é, se $\theta = 1$.

Rejeitando as hipóteses de independência e de igualdade das marginais, a covariável Z = "tipo de diabetes", que foi classificado como juvenil ou adulto, é incorporada no modelo da seguinte forma: $\gamma_1 = \exp(\beta'_1 z)$ e $\gamma_2 = \exp(\beta'_2 z)$ (Aitkin & Clayton, 1980), e a função de sobrevivência conjunta é, portanto, dada por:

$$S(x,y) = \left\{ \left(\exp[-x^\alpha \exp(\beta'_1 z)] \right)^{1-\theta} + \left(\exp[-y^\alpha \exp(\beta'_2 z)] \right)^{1-\theta} - 1 \right\}^{-1/(\theta-1)} \quad (5.9)$$

onde $\beta'_j = (\beta_{j0}, \beta_{j1})$, $j = 1, 2$; e $z = (1, z)'$.

Considerando os parâmetros α e θ como parâmetros de perturbação, o efeito da covariável pode ser verificado de duas formas: (1) como um efeito principal, isto é, considerar $\beta_{11} = \beta_{21} = \beta$ e testar $H_0: \beta = 0$ vs. $H_1: \beta \neq 0$, e (2) como uma interação com o tratamento (marginal), isto é, estimar β_{11} e β_{21} e testar $H_0: \beta_{11} = \beta_{21}$ vs. $H_1: \beta_{11} \neq \beta_{21}$. O resultado obtido pelos autores foi de $\beta_{11} \neq \beta_{21} \neq 0$, portanto, concluindo-se que existe uma interação do efeito do tipo de diabetes com o tratamento.

5.3. MODELO EXPONENCIAL BIVARIADO INDEPENDENTE

Nesta seção, é apresentada a análise de dados bivariados com covariáveis usando o modelo exponencial bivariado independente, a função densidade é expressa por

$$f(x, y) = f(x) \cdot f(y) = \lambda_1 \exp(-\lambda_1 x) \cdot \lambda_2 \exp(-\lambda_2 y),$$

$$i = 1, \dots, n. \quad (5.10)$$

Seja \tilde{Z} o vetor $((p+1) \times 1)$ de p covariáveis:

$$\tilde{Z}_{(p+1) \times 1} = (Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_p)', \text{ com } Z_0 = 1,$$

é introduzido no modelo através de uma transformação log-linear dos parâmetros, isto é,

$$\lambda_i = \exp(\beta_i' \tilde{z}), \quad (5.11)$$

onde $\beta_i = (\beta_{i0}, \beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ip})'$, $i = 1, 2$;

de tal modo que a função densidade (5.11) pode ser escrita como

$$f(x, y) = e^{(\beta_1' \tilde{z})} \exp(-x e^{(\beta_1' \tilde{z})}) \cdot e^{(\beta_2' \tilde{z})} \exp(-y e^{(\beta_2' \tilde{z})})$$

$$= \exp \left((\beta_1 + \beta_2)' \underline{z} - x e^{(\beta_1' \underline{z})} - y e^{(\beta_2' \underline{z})} \right) \quad (5.12)$$

A função de verossimilhança é expressa por:

$$L(\beta) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left((\beta_1 + \beta_2)' \underline{z}_i - x_i e^{(\beta_1' \underline{z}_i)} - y_i e^{(\beta_2' \underline{z}_i)} \right) \right\}, \quad (5.13)$$

$$e \quad \log L(\beta) = \sum_{i=1}^n \left((\beta_1 + \beta_2)' \underline{z}_i - x_i e^{(\beta_1' \underline{z}_i)} - y_i e^{(\beta_2' \underline{z}_i)} \right). \quad (5.14)$$

onde $(\beta_1 + \beta_2)' \underline{z}_i = (\beta_{10} + \beta_{20}) + (\beta_{11} + \beta_{21}) z_{i1} + \dots + (\beta_{1p} + \beta_{2p}) z_{ip}$, e

$\beta_j' \underline{z}_i = \beta_{j0} + \beta_{j1} z_{i1} + \dots + \beta_{jp} z_{ip}$, $j = 1, 2$, e $i = 1, \dots, n$.

Será considerada apenas uma covariável nesta dissertação, como ilustração, isto é, $\underline{z} = (1, z)$. Nesse caso particular de uma covariável, a função de verossimilhança dos parâmetros $\beta = (\beta_1, \beta_2) = ((\beta_{10}, \beta_{11})', (\beta_{20}, \beta_{21})')$ é expressa da seguinte forma:

$$L(\beta) = \exp \left\{ n \beta_{10} + n \beta_{20} + (\beta_{11} + \beta_{21}) \sum_{i=1}^n z_i - \sum_{i=1}^n \left[x_i \exp(\beta_{10} + \beta_{11} z_i) \right] - \sum_{i=1}^n \left[y_i \exp(\beta_{20} + \beta_{21} z_i) \right] \right\}, \quad (5.15)$$

As derivadas com relação aos parâmetros são dadas por:

$$\partial \log L(\beta) / \partial \beta_{10} = n - \sum_{i=1}^n x_i \exp(\beta_{10} + \beta_{11} z_i) \quad (5.16)$$

$$\partial \log L(\beta) / \partial \beta_{20} = n - \sum_{i=1}^n y_i \exp(\beta_{20} + \beta_{21} z_i) \quad (5.17)$$

$$\partial \log L(\beta) / \partial \beta_{11} = \sum_{i=1}^n z_i - \sum_{i=1}^n x_i z_i \exp(\beta_{10} + \beta_{11} z_i) \quad (5.18)$$

$$\partial \log L(\beta) / \partial \beta_{21} = \sum_{i=1}^n z_i - \sum_{i=1}^n y_i z_i \exp(\beta_{20} + \beta_{21} z_i) \quad (5.19)$$

$$\partial^2 \log L(\underline{\beta}) / \partial \beta_{10}^2 = - \sum_{i=1}^n x_i \exp(\beta_{10} + \beta_{11} z_i) \quad (5.20)$$

$$\partial^2 \log L(\underline{\beta}) / \partial \beta_{20}^2 = - \sum_{i=1}^n y_i \exp(\beta_{20} + \beta_{21} z_i) \quad (5.21)$$

$$\partial^2 \log L(\underline{\beta}) / \partial \beta_{11}^2 = \sum_{i=1}^n x_i z_i^2 \exp(\beta_{10} + \beta_{11} z_i) \quad (5.22)$$

$$\partial^2 \log L(\underline{\beta}) / \partial \beta_{21}^2 = \sum_{i=1}^n y_i z_i^2 \exp(\beta_{20} + \beta_{21} z_i) \quad (5.23)$$

$$\partial^2 \log L(\underline{\beta}) / \partial \beta_{10} \partial \beta_{11} = - \sum_{i=1}^n x_i z_i \exp(\beta_{10} + \beta_{11} z_i) \quad (5.24)$$

$$\partial^2 \log L(\underline{\beta}) / \partial \beta_{20} \partial \beta_{21} = - \sum_{i=1}^n y_i z_i \exp(\beta_{20} + \beta_{21} z_i) \quad (5.25)$$

Como as distribuições marginais X e Y são independentes, as derivadas $\partial^2 \log L(\underline{\beta}) / \partial \beta_{10} \partial \beta_{20}$, $\partial^2 \log L(\underline{\beta}) / \partial \beta_{10} \partial \beta_{21}$, $\partial^2 \log L(\underline{\beta}) / \partial \beta_{11} \partial \beta_{20}$, e $\partial^2 \log L(\underline{\beta}) / \partial \beta_{11} \partial \beta_{21}$ são iguais a zero.

O primeiro aspecto de interesse na análise de dados com covariáveis é verificar a existência do efeito da covariável nas funções riscos das distribuições marginais. Isto pode ser realizado através do teste da hipótese $H_0: \beta_{11} = \beta_{21} = 0$. vs $H_1: \beta_{11}$ e/ou $\beta_{21} \neq 0$. Sob o H_0 , a função de verossimilhança é dada por

$$L(\underline{\beta}) = \exp \left\{ n \beta_{10} + n \beta_{20} - \sum_{i=1}^n [x_i \exp(\beta_{10})] - \sum_{i=1}^n [y_i \exp(\beta_{20})] \right\}, \quad (5.26)$$

portanto, os estimadores de máxima verossimilhança de β_{10} e β_{20} são, respectivamente, $\log(n / \sum_{i=1}^n x_i)$ e $\log(n / \sum_{i=1}^n y_i)$.

Sob H_0 , a estatística $-2\log\Lambda$ possui uma distribuição assintótica qui-quadrado com 2 graus de liberdade. A hipótese H_0 é rejeitada, portanto, ao nível α se $-2\log\Lambda > \chi^2_{2,\alpha}$, onde

$$\Lambda = \frac{L(\tilde{\beta}_{10}, \tilde{\beta}_{20})}{L(\hat{\beta}_{10}, \hat{\beta}_{20}, \hat{\beta}_{11}, \hat{\beta}_{21})} \quad (5.27)$$

com $L(\tilde{\beta}_{10}, \tilde{\beta}_{20})$ é dada por (5.26), substituindo os parâmetros β_{10} e β_{20} pelas suas estimativas, $\tilde{\beta}_{10}$ e $\tilde{\beta}_{20}$, e $L(\hat{\beta}_{10}, \hat{\beta}_{20}, \hat{\beta}_{11}, \hat{\beta}_{21})$ dada por (5.15), também com os parâmetros substituídos pelas respectivas estimativas.

Caso exista efeito da covariável nas funções riscos marginais (H_0 rejeitada), pode ser realizado um teste de igualdade desses efeitos, isto é, testar $H_0: \beta_{11} = \beta_{21} = \beta_1$ vs. $H_1: \beta_{11} \neq \beta_{21}$. Sob a hipótese nula H_0 , a função de máxima verossimilhança (5.15) é escrita como

$$L(\underline{\beta}) = \exp \left\{ n \beta_{10} + n \beta_{20} + 2\beta_1 \sum_{i=1}^n z_i - \sum_{i=1}^n [x_i \exp(\beta_{10} + \beta_1 z_i)] - \sum_{i=1}^n [y_i \exp(\beta_{20} + \beta_1 z_i)] \right\}. \quad (5.28)$$

Para encontrar as estimativas dos parâmetros, usam-se as funções escores:

$$\partial \log L(\underline{\beta}) / \partial \beta_{10} = n - \sum_{i=1}^n \exp(\beta_{10} + \beta_1 z_i) \quad (5.29)$$

$$\partial \log L(\underline{\beta}) / \partial \beta_{20} = n - \sum_{i=1}^n \exp(\beta_{20} + \beta_1 z_i) \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \partial \log L(\underline{\beta}) / \partial \beta_1 &= 2 \sum_{i=1}^n z_i - \sum_{i=1}^n [x_i z_i \exp(\beta_{10} + \beta_1 z_i)] \\ &\quad - \sum_{i=1}^n [y_i z_i \exp(\beta_{20} + \beta_1 z_i)] \end{aligned} \quad (5.31)$$

e as derivadas segundas com relação aos parâmetros, para construir a matriz de informação:

$$\partial^2 \log L(\underline{\beta}) / \partial^2 \beta_{10} = - \sum_{i=1}^n \exp(\beta_{10} + \beta_1 z_i) \quad (5.32)$$

$$\partial^2 \log L(\underline{\beta}) / \partial^2 \beta_{20} = - \sum_{i=1}^n \exp(\beta_{20} + \beta_1 z_i) \quad (5.33)$$

$$\partial^2 \log L(\underline{\beta}) / \partial^2 \beta_1 = - \sum_{i=1}^n [x_i z_i^2 \exp(\beta_{10} + \beta_1 z_i)] - \sum_{i=1}^n [y_i z_i^2 \exp(\beta_{20} + \beta_1 z_i)] \quad (5.34)$$

$$\partial^2 \log L(\underline{\beta}) / \partial \beta_{10} \partial \beta_1 = - \sum_{i=1}^n [x_i z_i \exp(\beta_{10} + \beta_1 z_i)] \quad (5.35)$$

$$\partial^2 \log L(\underline{\beta}) / \partial \beta_{20} \partial \beta_1 = - \sum_{i=1}^n [y_i z_i \exp(\beta_{20} + \beta_1 z_i)] \quad (5.36)$$

A hipótese de igualdade dos parâmetros β_{11} e β_{21} é rejeitada ao nível α quando $-2 \log \Lambda > \chi_{1, \alpha}^2$, onde

$$\Lambda = \frac{L(\tilde{\beta}_{10}, \tilde{\beta}_{20}, \tilde{\beta}_1)}{L(\hat{\beta}_{10}, \hat{\beta}_{20}, \hat{\beta}_{11}, \hat{\beta}_{21})} \quad (5.37)$$

onde $L(\tilde{\beta}_{10}, \tilde{\beta}_{20}, \tilde{\beta}_1)$ é dada por (5.28), substituindo os parâmetros β_{10} , β_{20} e β_1 pelas suas estimativas, $\tilde{\beta}_{10}$, $\tilde{\beta}_{20}$ e $\tilde{\beta}_1$, e $L(\hat{\beta}_{10}, \hat{\beta}_{20}, \hat{\beta}_{11}, \hat{\beta}_{21})$ é dada por (5.15), avaliada no ponto $(\hat{\beta}_{10}, \hat{\beta}_{20}, \hat{\beta}_{11}, \hat{\beta}_{21})$.

O programa COVEXP.PRG, apresentado no APÊNDICE 4, calcula as estimativas dos parâmetros nos três casos da distribuição exponencial independente: (1) sem nenhuma restrição dos parâmetros, (2) sob $H_0: \beta_{11} = \beta_{21} = 0$ e (3) sob $H_0: \beta_{11} = \beta_{21} = \beta_1$; e realiza testes da razão de verossimilhança para testar as hipóteses nulas citadas acima.

5.4. MODELO EXPONENCIAL BIVARIADO DE BLOCK-BASU

Como já foi visto no Capítulo III, a função densidade da distribuição de Block-Basu é dada por (3.1):

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{\lambda_1 \lambda (\lambda_2 + \lambda_{12})}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp[-\lambda_1 x - (\lambda_2 + \lambda_{12}) y] & , \text{ se } x < y \\ \frac{\lambda_2 \lambda (\lambda_1 + \lambda_{12})}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) x - \lambda_2 y] & , \text{ se } x > y \end{cases}$$

A utilização de covariáveis no modelo paramétrico bivariado de Block-Basu se restringe ao estudo de Basu & Ebrahime (1987), que consideram testes acelerados com modelo de potência associado aos parâmetros da distribuição de Block-Basu.

Aqui, os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_{12} serão expressos em função da covariável através do modelo log-linear:

$$\lambda_1 = \exp(\beta'_1 \underline{z}), \lambda_2 = \exp(\beta'_2 \underline{z}) \text{ e } \lambda_{12} = \exp(\beta'_3 \underline{z}), \quad (5.38)$$

onde $\beta_j = (\beta_{j0}, \beta_{j1})'$, $j = 1, 2, 3$; e $\underline{z} = (1, z)'$.

A função densidade será expressa, portanto, por

$$f(x,y) = \left\{ \exp(\beta'_1 \underline{z}) (\exp(\beta'_1 \underline{z}) + \exp(\beta'_2 \underline{z}) + \exp(\beta'_3 \underline{z})) (\exp(\beta'_2 \underline{z}) + \exp(\beta'_3 \underline{z})) \right\} (\exp(\beta'_1 \underline{z}) + \exp(\beta'_2 \underline{z}))^{-1} \exp \left\{ -(\exp(\beta'_1 \underline{z}))x - (\exp(\beta'_2 \underline{z}) + \exp(\beta'_3 \underline{z}))y \right\}, \quad \text{se } x < y.$$

$$= \left\{ \exp(\beta'_{2z}) (\exp(\beta'_{1z}) + \exp(\beta'_{2z}) + \exp(\beta'_{3z})) (\exp(\beta'_{1z}) + \exp(\beta'_{3z})) \right\} (\exp(\beta'_{1z}) + \exp(\beta'_{2z}))^{-1} \exp \left\{ -(\exp(\beta'_{1z}) + \exp(\beta'_{3z})) x - \exp(\beta'_{2z}) y \right\}, \quad \text{se } x > y, \quad (5.39)$$

onde $\beta'_{jz} = \beta_{j0} + \beta_{j1}z$, $j = 1, 2, 3$.

A função de verossimilhança dos parâmetros $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = ((\beta_{10}, \beta_{20})', (\beta_{20}, \beta_{21})', (\beta_{30}, \beta_{31})')$ é expressa por:

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^n \left\{ (\exp(\beta'_{1z_i}) + \exp(\beta'_{2z_i}) + \exp(\beta'_{3z_i})) (\exp(\beta'_{1z_i}) + \exp(\beta'_{2z_i})) \right\} \prod_{i=1}^r \left\{ \exp(\beta'_{1z_i}) (\exp(\beta'_{2z_i}) + \exp(\beta'_{3z_i})) \right\} \prod_{i=r+1}^n \left\{ \exp(\beta'_{2z_i}) (\exp(\beta'_{1z_i}) + \exp(\beta'_{3z_i})) \right\} \exp \left\{ \sum_{i=1}^r [-\exp(\beta'_{1z_i}) x_i - (\exp(\beta'_{2z_i}) + \exp(\beta'_{3z_i})) y_i] \right\} \exp \left\{ \sum_{i=r+1}^n [-(\exp(\beta'_{1z_i}) + \exp(\beta'_{3z_i})) x_i - \exp(\beta'_{2z_i}) y_i] \right\} \quad (5.40)$$

onde $x_i < y_i$, para $i = 1, \dots, r$; e $x_i > y_i$, para $i = r+1, \dots, n$.

A significância do efeito da covariável Z é testada através do teste $H_0: \beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{31} = 0$ vs. $H_1: \beta_{11}, \beta_{21}$ ou $\beta_{31} \neq 0$. Sob o H_0 , a função de verossimilhança é dada por

$$L(\beta) = \left\{ (\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{20}) + \exp(\beta_{30})) (\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{20})) \right\}^n \left\{ \exp(\beta_{10}) (\exp(\beta_{20}) + \exp(\beta_{30})) \right\}^r \left\{ \exp(\beta_{20}) (\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{30})) \right\}^{(n-r)} \exp \left\{ \sum_{i=1}^r [-\exp(\beta_{10}) x_i - (\exp(\beta_{20}) + \exp(\beta_{30})) y_i] \right\} \cdot \exp \left\{ \sum_{i=r+1}^n [-(\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{30})) x_i - \exp(\beta_{20}) y_i] \right\} \quad (5.41)$$

As estimativas são calculadas através do processo iterativo Newton-Raphson, usando as derivadas numéricas ao invés de derivadas analíticas, pois as expressões das derivadas são bastante complexas.

Observe-se que a função (5.40) é exatamente a função de verossimilhança da distribuição de Block-Basu apresentada no Capítulo III (3.31), com os parâmetros $\lambda_i = \exp(\beta_{10})$, $i = 1, 2$ e $\lambda_{12} = \exp(\beta_{30})$. A propriedade de invariância do estimador de máxima verossimilhança, apresentada na seção 2.5 do Capítulo II, assegura que o logaritmo dos estimadores que maximizam a função de verossimilhança (3.31) são exatamente os estimadores que maximizam a função (5.40). Por exemplo, o logaritmo da estimativa de λ_{12} , $\log(\hat{\lambda}_{12})$, é igual à estimativa de β_{30} .

Sob H_0 , a estatística da razão de verossimilhança $-2\log\Lambda$ possui distribuição assintótica qui-quadrado com 3 graus de liberdade. Portanto, a hipótese H_0 é rejeitada ao nível α se $-2\log\Lambda > \chi^2_{3,\alpha}$, onde $\chi^2_{3,\alpha}$ é o valor da distribuição de qui-quadrado com 3 graus de liberdade no ponto $1-100\alpha\%$ de probabilidade e

$$\Lambda = L(\tilde{\beta})/L(\hat{\beta}),$$

com $L(\tilde{\beta}) = L(\tilde{\beta}_{10}, \tilde{\beta}_{20}, \tilde{\beta}_{30})$, a função de verossimilhança sob H_0 dada por (5.37), calculada no ponto $(\tilde{\beta}_{10}, \tilde{\beta}_{20}, \tilde{\beta}_{30})$, e $L(\hat{\beta}) = L(\hat{\beta}_{10}, \hat{\beta}_{20}, \hat{\beta}_{11}, \hat{\beta}_{21}, \hat{\beta}_{30}, \hat{\beta}_{31})$ dada por (5.36), também com os parâmetros substituídos pelas respectivas estimativas.

Um outro aspecto de interesse é verificar se a covariável Z possui o mesmo efeito nas distribuições marginais de X e Y . Para isso, a hipótese $H_0: \beta_{11} = \beta_{21} = \beta_1$ é testada contra $\beta_{11} \neq \beta_{21}$. Observa-se que, neste caso, o parâmetro β_{31} é considerado como um parâmetro de perturbação, já que o valor dele não causa nenhuma diferença no efeito de Z nas marginais. Sob H_0 , a função de verossimilhança é dada por

$$L(\tilde{\beta}) = \prod_{i=1}^n \left\{ \left(\exp(\beta_{10} + \beta_1 z_{1i}) + \exp(\beta_{20} + \beta_1 z_{1i}) + \exp(\beta'_{3z_{1i}}) \right) \left(\exp(\beta_{10} + \beta_1 z_{1i}) + \exp(\beta_{20} + \beta_1 z_{1i}) \right) \right\} \prod_{i=1}^r \left\{ \exp(\beta_{10} + \beta_1 z_{1i}) \left(\exp(\beta_{20} + \beta_1 z_{1i}) + \exp(\beta'_{3z_{1i}}) \right) \right\} \prod_{i=r+1}^n \left\{ \exp(\beta_{20} + \beta_1 z_{1i}) \left(\exp(\beta_{10} + \beta_1 z_{1i}) + \exp(\beta'_{3z_{1i}}) \right) \right\} \exp \left\{ \sum_{i=1}^r [-\exp(\beta_{10} + \beta_1 z_{1i})] \right\}$$

$$\left. + \beta_1 z_1 \right) x_1 - (\exp(\beta_{20} + \beta_1 z_1) + \exp(\beta'_{30} z_1)) y_1 \Big] \Big\} \cdot \exp \left\{ \sum_{i=r+1}^n \left[-(\exp(\beta_{10} + \beta_1 z_1) + \exp(\beta'_{30} z_1)) x_1 - \exp(\beta_{20} + \beta_1 z_1) y_1 \right] \right\} \quad (5.42)$$

As estimativas dos parâmetros são calculadas através do processo iterativo de Newton-Raphson, usando derivadas numéricas de $\log L$ com relação aos parâmetros.

A hipótese de igualdade de parâmetros β_{11} e β_{21} é rejeitada ao nível α se $-2\log\Lambda > \chi^2_{1,\alpha}$, onde

$$\Lambda = L(\tilde{\beta})/L(\hat{\beta}),$$

com $L(\tilde{\beta}) = L(\tilde{\beta}_{10}, \tilde{\beta}_{20}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_{30}, \tilde{\beta}_{31})$ dada por (5.41), substituindo os parâmetros pelas suas estimativas, e $L(\hat{\beta}) = L(\hat{\beta}_{10}, \hat{\beta}_{20}, \hat{\beta}_{11}, \hat{\beta}_{21}, \hat{\beta}_{30}, \hat{\beta}_{31})$ dada por (5.39), também com os parâmetros substituídos pelas respectivas estimativas.

EXEMPLO NUMÉRICO

Para ilustrar a metodologia apresentada nesta seção, é considerado o conjunto de dados utilizado no exemplo 3.3 do Capítulo III e, é incorporada uma covariável Z de duas categorias, assumindo valores -1 e 1 através de um processo aleatório. O valor $'1'$ é atribuído com uma probabilidade maior para os pares (x_1, y_1) quando $x_1 > y_1$, e o valor $'-1'$ com uma probabilidade maior para os pares (x_1, y_1) quando $x_1 < y_1$. O conjunto de dados e o programa computacional utilizado COVBB.PRG, estão apresentados nos APÊNDICE 3 e 4, respectivamente, desta dissertação.

As funções de sobrevivência marginais de X e Y são primeiramente estimadas usando o método não-paramétrico de Kaplan-Meier para cada categoria de Z , e são apresentadas nos gráficos 5.1 e 5.2 a seguir.

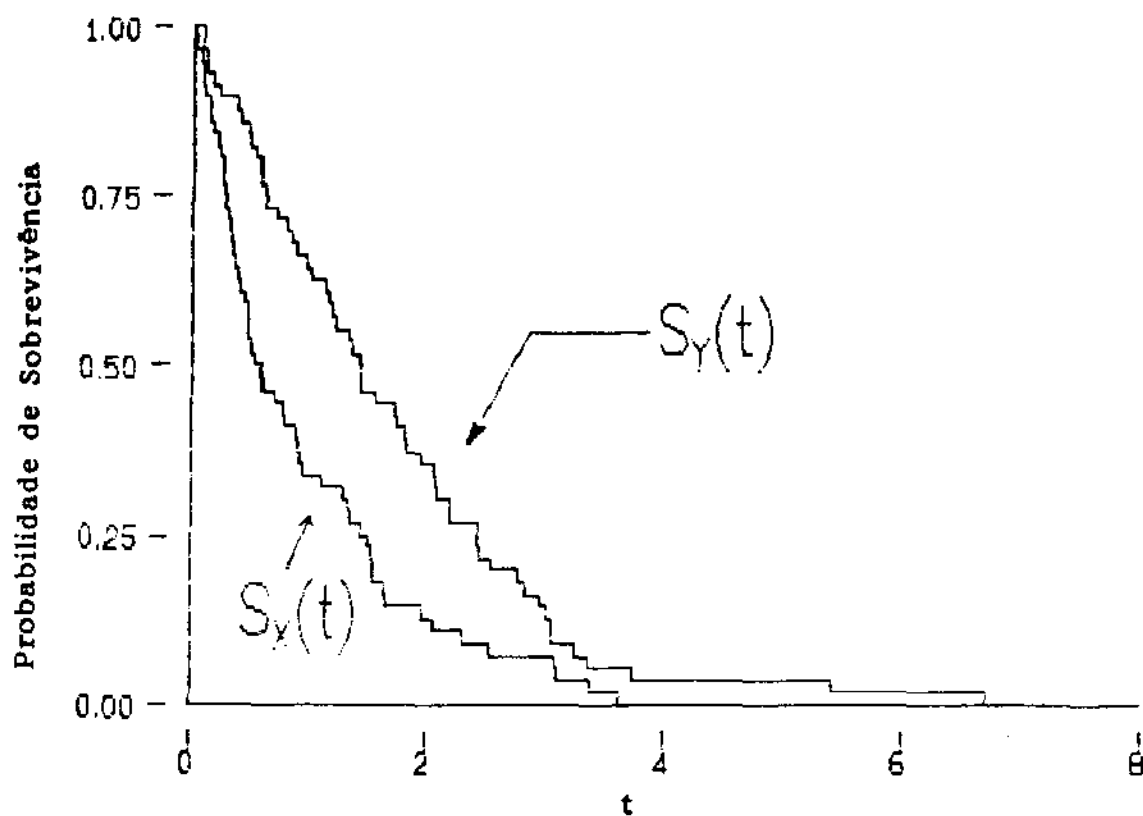


GRAFICO 5.1. - Curvas de Kaplan-Meier das Marginais de X e Y, $Z = -1$.

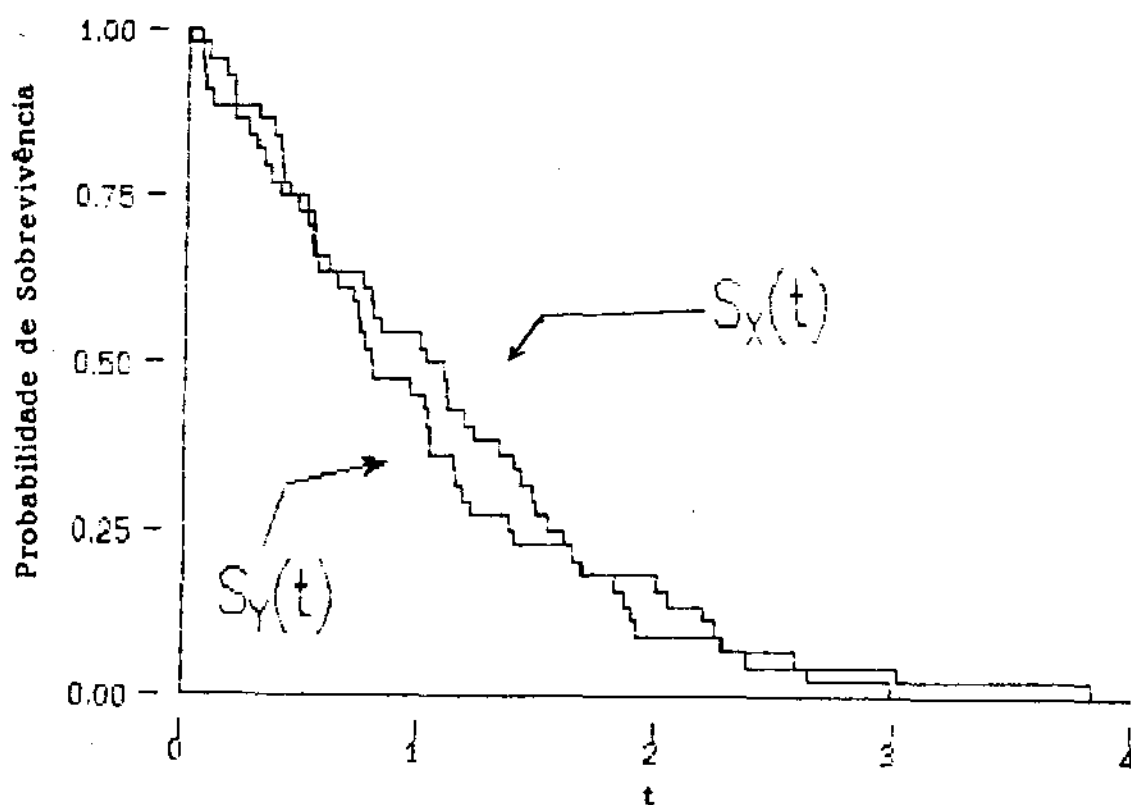


GRAFICO 5.2. - Curvas de Kaplan-Meier das Marginais de X e Y, $Z = 1$.

Os parâmetros do modelo de Block-Basu sem nenhuma restrição (modelo [1]) são $(\beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{30}, \beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{31})$, os parâmetros sob H_{01} : $\beta_{11} = 0, i = 1, 2, 3$ (modelo [2]) são $(\beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{30})$ e, os parâmetros sob H_{02} : $\beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{31}$ (modelo [3]) são $(\beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{30}, \beta_{31}, \beta_1)$. As estimativas dos parâmetros, para cada modelo citado acima, e seus respectivos desvios padrões, calculados através da raiz quadrada do vetor diagonal da inversa da matriz de informação observada, são apresentados na Tabela 5.1 abaixo:

TABELA 5.1. Estimativas dos parâmetros calculadas pelo método de máxima verossimilhança.

Modelo	β_{10}	β_{20}	β_{30}	β_{11}	β_{21}	β_{31}	$\log L$
[1]	-1,168 (,647)	-1,592 (,593)	-0,187 (,249)	-0,421 (,646)	0,444 (,593)	0,144 (,150)	-222,155
[2]	-0,533 (,321)	-1,012 (,355)	-0,636 (,390)	-	-	-	-230,613
[3]	-0,534 (,335)	-1,001 (,364)	-0,631 (,439)	0,182 (,333)	-	-0,039 (,438)	-229,896

Obs. os valores entre parênteses são os desvios padrões.

As estatísticas para testar as hipóteses do modelo [2] e [3] são $16,916 \gg \chi^2_{3,0.05}$ e $15,484 \gg \chi^2_{1,0.05}$, respectivamente. Portanto as hipóteses de H_{01} : $\beta_{11} = 0, i = 1, 2, 3$, e H_{02} : $\beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{31}$ são ambas rejeitadas, o que indica a existência de interação de efeito da covariável com as marginais, o que pode ser observada também nos gráficos 5.1 e 5.2.

5.5. MODELO EXPONENCIAL BIVARIADA DE SARKAR

A utilização de covariáveis no modelo de Sarkar ainda não é conhecida na literatura de estatística. Nesta seção, é considerada a variável aleatória bivariada $(X,Y) \sim ACBVEs(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$, com $\lambda_1 > 0$,

$\lambda_2 > 0$, e $\lambda_{12} \geq 0$. Os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_{12} são relacionados com uma covariável Z através de modelo log-linear e são expressos da seguinte forma:

$$\lambda_1 = \exp(\beta'_1 \underline{z}), \lambda_2 = \exp(\beta'_2 \underline{z}) \text{ e } \lambda_{12} = \exp(\beta'_{12} \underline{z}), \quad (5.43)$$

onde $\beta_j = (\beta_{j0}, \beta_{j1})'$, $j = 1, 2, 3$; e $\underline{z} = (1, z)'$.

A função de densidade é dada por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \exp(\beta'_1 \underline{z}) \left(\exp(\beta'_1 \underline{z}) + \exp(\beta'_2 \underline{z}) + \exp(\beta'_{12} \underline{z}) \right) / \left(\exp(\beta'_1 \underline{z}) \right. \\ &\quad \left. + \exp(\beta'_2 \underline{z}) \right)^2 \exp \left\{ -\exp(\beta'_1 \underline{z})x - [\exp(\beta'_2 \underline{z}) + \exp(\beta'_{12} \underline{z})]y \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ [\exp(\beta'_1 \underline{z}) + \exp(\beta'_2 \underline{z})] [\exp(\beta'_2 \underline{z}) + \exp(\beta'_{12} \underline{z})] - \exp(\beta'_2 \underline{z}) \right. \\ &\quad \left. \cdot (\exp(\beta'_1 \underline{z}) + \exp(\beta'_2 \underline{z}) + \exp(\beta'_{12} \underline{z})) \cdot \exp(-\exp(\beta'_1 \underline{z})y) \right\} \\ &\quad \cdot [A(\exp(\beta'_1 \underline{z})x)]^\gamma [A(\exp(\beta'_1 \underline{z})y)]^{-(1+\gamma)} \quad \text{se } 0 < x < y \\ &= \exp(\beta'_2 \underline{z}) \left(\exp(\beta'_1 \underline{z}) + \exp(\beta'_2 \underline{z}) + \exp(\beta'_{12} \underline{z}) \right) / \left(\exp(\beta'_1 \underline{z}) \right. \\ &\quad \left. + \exp(\beta'_2 \underline{z}) \right)^2 \exp \left\{ -\exp(\beta'_2 \underline{z})y - [\exp(\beta'_1 \underline{z}) + \exp(\beta'_{12} \underline{z})]x \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ [\exp(\beta'_1 \underline{z}) + \exp(\beta'_2 \underline{z})] [\exp(\beta'_1 \underline{z}) + \exp(\beta'_{12} \underline{z})] - \exp(\beta'_1 \underline{z}) \right. \\ &\quad \left. \cdot (\exp(\beta'_1 \underline{z}) + \exp(\beta'_2 \underline{z}) + \exp(\beta'_{12} \underline{z})) \exp(-\exp(\beta'_2 \underline{z})x) \right\} \\ &\quad \cdot [A(\exp(\beta'_2 \underline{z})y)]^\gamma [A(\exp(\beta'_2 \underline{z})x)]^{-(1+\gamma)} \quad \text{se } 0 < y < x \end{aligned} \quad (5.44)$$

onde $\gamma = \exp(\beta'_{12} \underline{z}) / (\exp(\beta'_1 \underline{z}) + \exp(\beta'_2 \underline{z}))$ e $A(s) = 1 - \exp(-s)$ para $s > 0$.

A função de verossimilhança dos parâmetros $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = ((\beta_{10}, \beta_{11}), (\beta_{20}, \beta_{21}), (\beta_{30}, \beta_{31}))'$ é expressa por:

$$L(\beta) = \exp \left(\sum_{i=1}^r \beta'_1 \underline{z}_{i1} + \sum_{i=r+1}^n \beta'_2 \underline{z}_{i1} \right) \prod_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^3 \exp(\beta'_j \underline{z}_{i1}) / \left(\sum_{j=1}^2 \exp(\beta'_j \underline{z}_{i1}) \right)^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \left(\exp(\beta'_{1z_i}) x_i + \exp(\beta'_{2z_i}) y_i \right) - \sum_{i=1}^r \left(\exp(\beta'_{3z_i}) y_i \right) \right. \\
& - \sum_{i=r+1}^n \left(\exp(\beta'_{3z_i}) x_i \right) \left. \right\} \prod_{i=1}^r \left\{ \left[\sum_{j=1}^2 \exp(\beta'_{jz_i}) \right] \left[\sum_{j=2}^3 \exp(\beta'_{jz_i}) \right] \right. \\
& \left. - \exp(\beta'_{2z_i}) \left(\sum_{j=1}^3 \exp(\beta'_{jz_i}) \right) \exp(-\exp(\beta'_{1z_i}) y_i) \right\} \\
& \prod_{i=r+1}^n \left\{ \left(\sum_{j=1}^2 \exp(\beta'_{jz_i}) \right) \left[\exp(\beta'_{1z_i}) + \exp(\beta'_{3z_i}) \right] - \exp(\beta'_{1z_i}) \right. \\
& \cdot \left. \left(\sum_{j=1}^3 \exp(\beta'_{jz_i}) \right) \exp(-\exp(\beta'_{2z_i}) x_i) \right\} \\
& \prod_{i=1}^r \left\{ \left[A(\exp(\beta'_{1z_i}) x_i) \right]^\gamma \cdot \left[A(\exp(\beta'_{1z_i}) y_i) \right]^{-(1+\gamma)} \right\} \\
& \prod_{i=r+1}^n \left\{ \left[A(\exp(\beta'_{2z_i}) y_i) \right]^\gamma \left[A(\exp(\beta'_{2z_i}) x_i) \right]^{-(1+\gamma)} \right\}, \quad (5.45)
\end{aligned}$$

onde $x_i < y_i$ p/ $i = 1, \dots, r$ e $x_i > y_i$ p/ $i = r+1, \dots, n$.

As estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros podem ser calculadas através do processo iterativo utilizando as primeiras e segundas derivadas numéricas.

Para avaliar a significância do efeito da covariável Z, o teste $H_0: \beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{31} = 0$ vs. $H_1: \beta_{11}, \beta_{21}$ ou $\beta_{31} \neq 0$ é realizado. Sob H_0 , a função de verossimilhança (5.44) é expressa por:

$$\begin{aligned}
L(\beta) = & \exp \left(r \beta_{10} + (n-r) \beta_{20} \right) \left\{ \sum_{j=1}^3 \exp(\beta_{j0}) / \left(\sum_{j=1}^2 \exp(\beta_{j0}) \right)^2 \right\}^n \\
& \cdot \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \left(\exp(\beta_{10}) x_i + \exp(\beta_{20}) y_i \right) - \sum_{i=1}^r \left(\exp(\beta_{30}) y_i \right) \right. \\
& - \sum_{i=r+1}^n \left(\exp(\beta_{30}) x_i \right) \left. \right\} \prod_{i=1}^r \left\{ \left[\sum_{j=1}^2 \exp(\beta_{j0}) \right] \left[\sum_{j=2}^3 \exp(\beta_{j0}) \right] - \exp(\beta_{20}) \right. \\
& \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \exp(\beta_{j0}) \right) \exp(-\exp(\beta_{10}) y_i) \left. \right\} \prod_{i=r+1}^n \left\{ \left(\sum_{j=1}^2 \exp(\beta_{j0}) \right) \right. \\
& \cdot \left. \left[\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{30}) \right] - \exp(\beta_{10}) \left(\sum_{j=1}^3 \exp(\beta_{j0}) \right) \exp(-\exp(\beta_{20}) x_i) \right\}
\end{aligned}$$

$$\prod_{i=1}^r \left\{ [A(\exp(\beta_{10})x_i)]^\gamma \cdot [A(\exp(\beta_{10})y_i)]^{-(1+\gamma)} \right\} \\ \prod_{i=r+1}^n \left\{ [A(\exp(\beta_{20})y_i)]^\gamma [A(\exp(\beta_{20})x_i)]^{-(1+\gamma)} \right\}, \quad (5.46)$$

onde $x_i < y_i$, para $i = 1, \dots, r$; e $x_i > y_i$, para $i = r+1, \dots, n$.

Observa-se que a função (5.46) é a função de verossimilhança da distribuição de Sarkar, dada no Capítulo III (4.10), com os parâmetros $\lambda_1 = \exp(\beta_{10})$, $i = 1, 2$ e $\lambda_{12} = \exp(\beta_{30})$ e sem usar a transformação de X e Y . Novamente, os logaritmos das estimativas encontradas através da função de verossimilhança dada por (4.10) $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ e $\hat{\lambda}_{12}$ são as estimativas dos parâmetros de (5.46).

Sob H_0 , a estatística da razão de verossimilhança $-2\log\Lambda$ possui distribuição assintótica qui-quadrado com 3 graus de liberdade. Portanto a hipótese H_0 é rejeitada a nível α se e somente se $-2\log\Lambda > \chi_{3,\alpha}^2$, onde

$$\Lambda = L(\tilde{\beta})/L(\hat{\beta}),$$

com $L(\tilde{\beta}) = L(\tilde{\beta}_{10}, \tilde{\beta}_{20}, \tilde{\beta}_{30})$, a função de verossimilhança sob H_0 dada por (5.46), calculada no ponto $(\tilde{\beta}_{10}, \tilde{\beta}_{20}, \tilde{\beta}_{30})$, e $L(\hat{\beta}) = L(\hat{\beta}_{10}, \hat{\beta}_{20}, \hat{\beta}_{11}, \hat{\beta}_{21}, \hat{\beta}_{30}, \hat{\beta}_{31})$ a função de verossimilhança dada por (5.45) e calculada no ponto $\hat{\beta}$.

Para verificar se a covariável Z possui o mesmo efeito nas distribuições marginais de X e Y , a hipótese $H_0: \beta_{11} = \beta_{21} = \beta_1$ é testada contra $\beta_{11} \neq \beta_{21}$. Sob H_0 , a função de verossimilhança é dada por

$$L(\beta) = \exp\left(\sum_{i=1}^r (\beta_{10} + \beta_1 z_i) + \sum_{i=r+1}^n (\beta_{20} + \beta_1 z_i)\right) \prod_{i=1}^n \left\{ \left(\exp(\beta_{10} + \beta_1 z_i) \right. \right. \\ \left. \left. + \exp(\beta_{20} + \beta_1 z_i) + \exp(\beta'_3 z_i) \right) / \left(\exp(\beta_{10} + \beta_1 z_i) + \exp(\beta_{20} + \beta_1 z_i) \right)^2 \right\} \\ \cdot \exp\left\{ - \sum_{i=1}^n \left(\exp(\beta_{10} + \beta_1 z_i) x_i + \exp(\beta_{20} + \beta_1 z_i) y_i \right) - \sum_{i=1}^r \left(\exp(\beta'_3 z_i) y_i \right) \right. \\ \left. - \sum_{i=r+1}^n \left(\exp(\beta'_3 z_i) x_i \right) \right\} \prod_{i=1}^r \left\{ \left(\exp(\beta_{10} + \beta_1 z_i) + \exp(\beta_{20} + \beta_1 z_i) \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (\exp(\beta_{20} + \beta_1 z_1) + \exp(\beta'_{31} z_1)) - \exp(\beta_{20} + \beta_1 z_1) (\exp(\beta_{10} + \beta_1 z_1) \\
& + \exp(\beta_{20} + \beta_1 z_1) + \exp(\beta'_{31} z_1)) \exp(-\exp(\beta_{10} + \beta_1 z_1) y_1) \Big\} \\
& \prod_{i=r+1}^n \left\{ (\exp(\beta_{10} + \beta_1 z_1) + \exp(\beta_{20} + \beta_1 z_1)) (\exp(\beta_{10} + \beta_1 z_1) \right. \\
& + \exp(\beta'_{31} z_1)) - \exp(\beta_{10} + \beta_1 z_1) (\exp(\beta_{10} + \beta_1 z_1) + \exp(\beta_{20} + \beta_1 z_1) \\
& + \exp(\beta'_{31} z_1)) \exp(-\exp(\beta_{20} + \beta_1 z_1) x_1) \Big\} \prod_{i=1}^r \left\{ [A(\exp(\beta_{10} \right. \\
& + \beta_1 z_1) x_1)]^\gamma \cdot [A(\exp(\beta_{10} + \beta_1 z_1) y_1)]^{-(1+\gamma)} \Big\} \prod_{i=r+1}^n \left\{ (A[\exp(\beta_{20} \right. \\
& + \beta_1 z_1) y_1)]^\gamma [A(\exp(\beta_{20} + \beta_1 z_1) x_1)]^{-(1+\gamma)} \Big\}, \tag{5.47}
\end{aligned}$$

onde $x_i < y_i$ p/ $i = 1, \dots, r$ e $x_i > y_i$ p/ $i = r+1, \dots, n$.

As estimativas dos parâmetros são calculadas através do processo iterativo de Newton-Raphson, usando derivadas numéricas de $\log L$ com relação aos parâmetros.

A hipótese de igualdade de parâmetros β_{11} e β_{21} é rejeitada ao nível α se $-2\log \Lambda > \chi^2_{1, \alpha}$, onde

$$\Lambda = L(\tilde{\beta}) / L(\hat{\beta}),$$

com $L(\tilde{\beta}) = L(\tilde{\beta}_{10}, \tilde{\beta}_{20}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_{30}, \tilde{\beta}_{31})$ é o valor a função dada por (5.47) e avaliada no ponto $\tilde{\beta}$, e $L(\hat{\beta}) = L(\hat{\beta}_{10}, \hat{\beta}_{20}, \hat{\beta}_{11}, \hat{\beta}_{21}, \hat{\beta}_{30}, \hat{\beta}_{31})$ é o valor da função dada por (5.45), calculada no ponto $\hat{\beta}$.

EXEMPLO NUMÉRICO

Para ilustrar a metodologia apresentada nesta seção, é considerado o conjunto de dados utilizado no exemplo 4.2 do Capítulo IV e, com a incorporação da covariável Z . Utilizou-se o mesmo procedimento do exemplo da seção anterior, porém atribuindo o valor $Z = -1$ com uma probabilidade maior para os pares (x_i, y_i) , quando $x_i > y_i$, e $Z = 1$ com uma probabilidade maior para os pares (x_i, y_i) , quando

$x_1 < y_1$. Novamente, as curvas de sobrevivência de Kaplan-Meier das marginais de X e Y são calculadas para cada categoria de Z, e são apresentadas nos gráficos 5.3 e 5.4 abaixo.

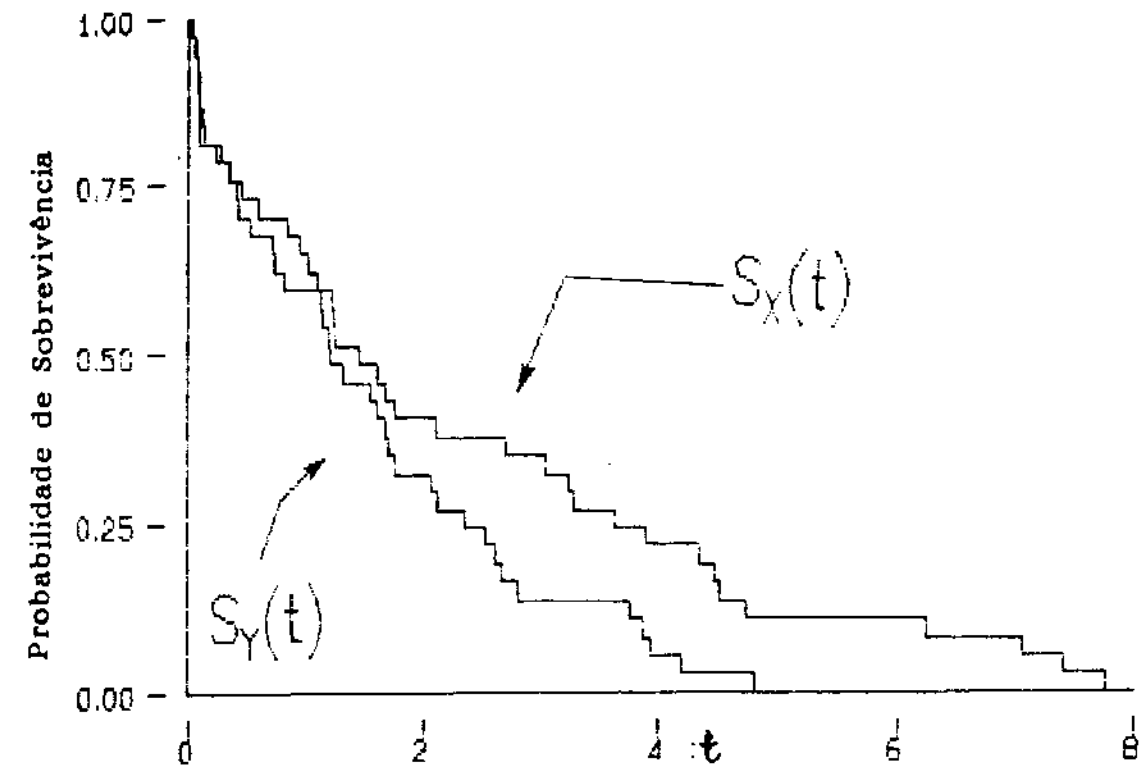


GRAFICO 5.3. - Curvas de Kaplan-Meier das Marginais de X e Y, Z = -1.

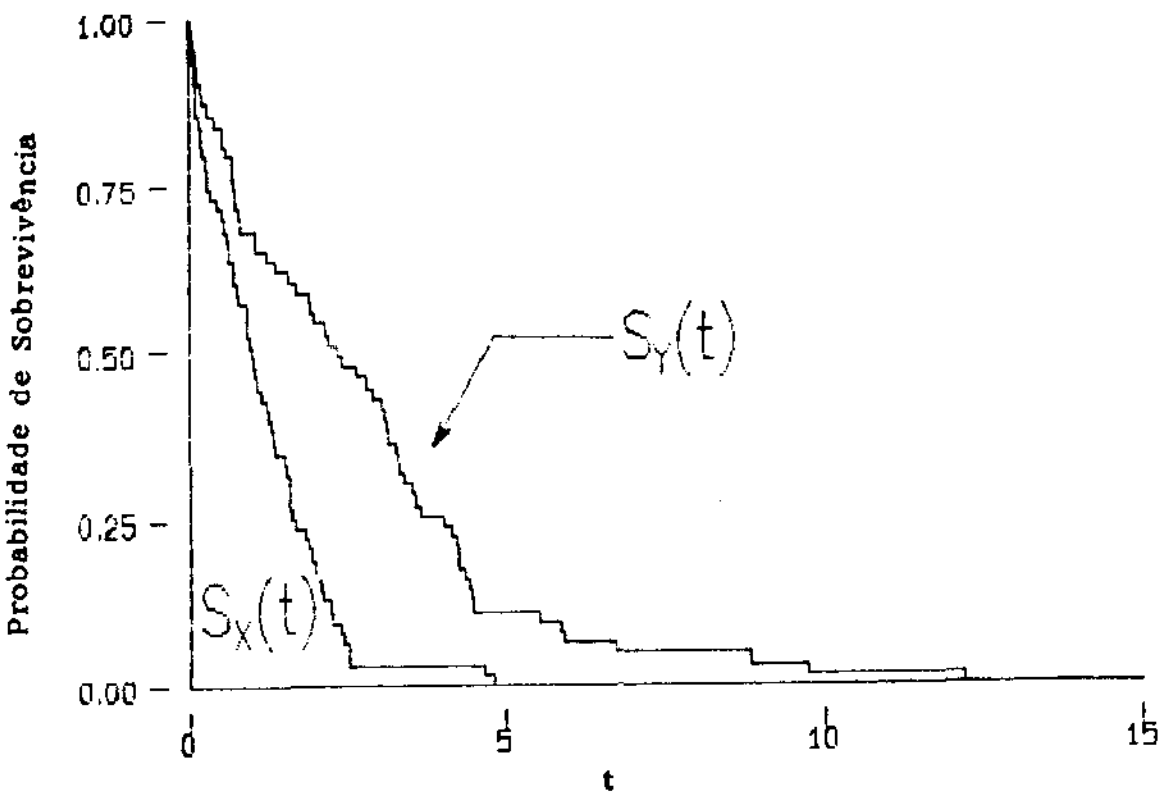


GRAFICO 5.4. - Curvas de Kaplan-Meier das Marginais de X e Y, Z = 1.

Os parâmetros do modelo de Sarkar sem nenhuma restrição (modelo [1]) são $(\beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{30}, \beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{31})$, os parâmetros sob $H_{01}: \beta_{11} = 0, i = 1, 2, 3$ (modelo [2]) são $(\beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{30})$ e, os parâmetros sob $H_{02}: \beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{31}$ (modelo [3]) são $(\beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{30}, \beta_{31}, \beta_1)$. As estimativas dos parâmetros para cada modelo citado acima e seus respectivos desvios padrões são apresentados na Tabela 5.2 a seguir.

TABELA 5.2 Estimativas dos parâmetros calculadas pelo método de máxima verossimilhança.

Modelo	β_{10}	β_{20}	β_{30}	β_{11}	β_{21}	β_{31}	logL
[1]	-0,995 (,165)	-1,724 (,222)	-1,406 (,166)	0,434 (,165)	-0,914 (,222)	0,232 (,166)	-285,450
[2]	-0,843 (,134)	-1,548 (,164)	-1,543 (,185)	-	-	-	-305,307
[3]	-0,832 (,135)	-1,578 (,191)	-1,589 (,180)	0,013 (,125)		0,1619 (,178)	-304,767

Obs. os valores entre parênteses são os desvios padrões.

As estatísticas para testar as hipóteses do modelo [2] e [3] são $39,714 \gg \chi^2_{3,0.05}$ e $38,634 \gg \chi^2_{1,0.05}$, respectivamente. Portanto as hipóteses de $H_{01}: \beta_{11} = 0, i = 1, 2, 3$, e $H_{02}: \beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{31}$ são ambas rejeitadas, o que indica a existência de interação de efeito da covariável com as marginais, o que pode ser visto também através dos gráficos 5.3 e 5.4.

O programa COVSARK.PRG escrito no módulo IML de SAS, apresentado no APÊNDICE 4, calcula as estimativas e os desvios padrões dos parâmetros sob os três modelos citados acima, assim como também realiza os testes das hipóteses H_{01} e H_{02} .

CAPÍTULO VI

ILUSTRAÇÃO NUMÉRICA

6.1. INTRODUÇÃO

Com a finalidade de ilustrar os métodos estudados nos capítulos anteriores, é realizada, neste capítulo, uma aplicação numérica a um conjunto de dados de sobrevivência pareados extraídos de PNAD-1984 (Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios) da Região de São Paulo. Este arquivo consiste em 202 observações bivariadas completas (X, Y) , onde X é o tempo de duração da primeira união das mulheres que tiveram pelo menos duas uniões terminadas, e Y o tempo de duração da segunda união destas mesmas mulheres.

Na seção 6.2 é feita uma análise estatística descritiva dos dados. Uma discussão sobre a adequação dos modelos de Block-Basu e de Sarkar é apresentada na seção 6.3. Inferências concernentes aos parâmetros (estimação e testes das hipóteses de independência entre X e Y e de igualdade das distribuições marginais de X e Y), considerando as distribuições de Block-Basu e de Sarkar como distribuições básicas conjuntas dos dados, são realizados nas seções 6.4 e 6.5, respectivamente. Na seção 6.6 é apresentada uma análise dos dados incorporando covariáveis e, na seção 6.7 são apresentadas algumas conclusões sobre os resultados obtidos.

6.2. ANÁLISE DESCRITIVA

Foi realizada inicialmente uma análise exploratória dos dados calculando algumas estatísticas descritivas básicas. As durações das uniões foram medidas em meses.

TABELA 6.1 - Estatísticas Básicas dos Dados

	1a. união	2a. união
N	202	202
Média	75,3	78,7
Desvio Padrão	61,2	64,9
Coef. de Variação	0,81	0,82
Mínimo	1	2
1o. quartil	24	25
Mediana	57	60
3o. quartil	114	120
Máximo	300	288

Gráficos de *Box-Plot* e de Ramo e Folhas foram feitos para a duração de cada união.

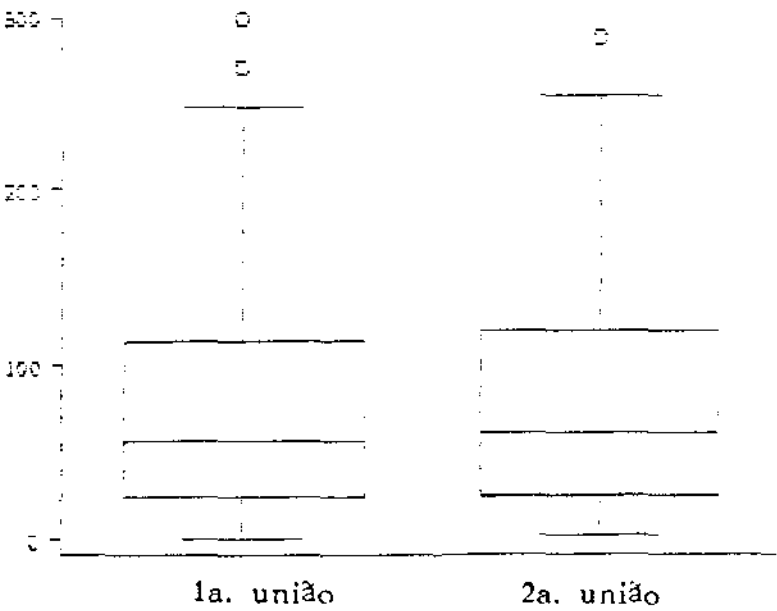


GRÁFICO 6.1 - *Box-Plot*

1a. união		
325+*		1
.*		1
.*****		8
175+*****		14
.*****		33
.*****		55
25+*****		90
-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+		
2a. união		
325+.		0
**.		3
.*****		10
175+*****		15
.*****		34
.*****		54
25+*****		86
-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+		

GRÁFICO 6.2 - Ramo e folhas de duração da 1a. e 2a. união.

Nos dois grupos, os tempos de duração dos casamentos revelaram uma assimetria análoga, com um comportamento de exponencialidade, indicando possível ajuste de distribuição exponencial aos dados.

Curvas de sobrevivência $S(t)$ de Kaplan-Meier são feitas com o fim de obter uma visão prévia do comportamento das marginais (1a. união e 2a. união).

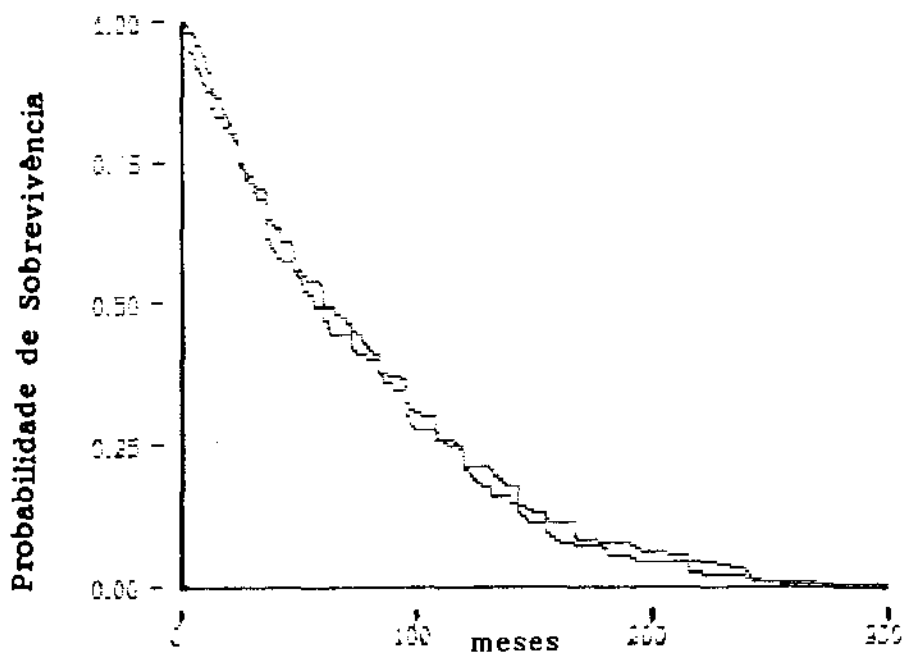


GRÁFICO 6.3 - Curvas de Sobrevivência das Uniões.

O teste qui-quadrado é realizado para verificar se o parâmetro de forma de Weibull (γ) é igual a um (o que implica na exponencialidade dos dados) para a primeira união (X), a segunda união (Y) e a variável $Z = \min(X,Y)$, usando o módulo PROC LIFEREG do SAS. A hipótese de $\gamma=1$ é rejeitada nos três casos e os parâmetros estimados são 0,8193, 0,8803 e 0,8394, respectivamente.

6.3. ADEQUAÇÃO DOS MODELOS

Através das estatísticas básicas, dos gráficos de *box-plot* e dos diagramas de Ramo e Folhas apresentados na seção 6.2, os dados das marginais de X (1a. união) e de Y (2a. união) parecem comportar de uma forma exponencial. No teste de exponencialidade das marginais, apesar de ter sido rejeitada a hipótese do parâmetro de forma da distribuição Weibull ser igual a um, os parâmetros estimados são próximos de um, o que indica uma possível distribuição exponencial ou uma exponencial ponderada. Como a probabilidade dos tempos de duração das uniões serem iguais pode ser considerada zero, as distribuições exponenciais bivariadas absolutamente contínuas de Block-Basu e de Sarkar são propostas para o ajuste dos dados.

Considerando o modelo de Block-Basu, com os parâmetros $\lambda_1 = 0,0096$, $\lambda_2 = 0,009$ e $\lambda_{12} = 0,0051$, e $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$ estimados pelo método de máxima verossimilhança, as seguintes hipóteses não são rejeitadas pelos testes qui-quadrado:

- (1) As marginais X e Y possuem distribuições de médias ponderadas de exponenciais dadas por (3.3) da seção 3.1, com parâmetros $\lambda_1 + \lambda_{12}$ e $\lambda_2 + \lambda_{12}$, respectivamente;
- (2) A variável $Z = \min(X,Y)$ possui uma distribuição exponencial com parâmetro λ ;
- (3) a variável $V = X - Y$ possui a distribuição $F(v)$ conforme item 5 da seção 3.2, com os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_{12} ;
- (4) o coeficiente de correlação de postos de Spearman verificou que Z e V são não-correlacionados,

o que indica a adequação do modelo.

Para o modelo de Sarkar, os parâmetros estimados foram $\lambda_1 = 0,0118$, $\lambda_2 = 0,0113$ e $\lambda_{12} = 0,0015$. Os testes qui-quadrado de aderência também não rejeitaram as seguintes hipóteses:

- (1) As marginais X e Y possuem distribuições exponenciais com parâmetros $\lambda_1 + \lambda_{12}$ e $\lambda_2 + \lambda_{12}$, respectivamente;
 - (2) $Z = \min(X, Y) \sim \text{Exp}(\lambda)$;
 - (3) $U = X - Y + k(X, Y)$ possui a distribuição dada no Teorema 4.1 da seção 4.1 (pág. 85) com os parâmetros calculados através do método de máxima verossimilhança;
 - (4) o coeficiente de correlação de Spearman indicou a não-correlação entre Z e U,
- o que também indica a adequação do modelo.

6.4. ANÁLISE DOS DADOS USANDO A DISTRIBUIÇÃO DE BLOCK-BASU

A estimação dos parâmetros e testes de hipóteses de independência entre X e Y e de igualdade das distribuições marginais de X e Y são realizados nesta seção, considerando a distribuição de Block-Basu como a distribuição básica conjunta dos tempos de duração das uniões.

Caso 1: Utilizando a transformação $T = Y/X$ dada na seção 3.3 do Capítulo III. A tabela abaixo apresenta os resultados da estimação e dos testes de independência ($H_0: \xi_{12} = 0$) e de igualdade das distribuições de X e Y ($H_0: \xi = 1$). O programa computacional GROSS.PRG apresentado no APÊNDICE 4 é utilizado para os cálculos.

TABELA 6.2 - Estimativas dos parâmetros e testes de hipóteses usando a transformação $T = Y/X$.

Modelo	$\hat{\xi}$	$\hat{\xi}_{12}$	$\log L$	R. V.
Irrestrito	1,0278 (,1392) _a	1,0546 (,7512) _a	-361,3420	
Ho: $\xi_{12} = 0$	1,0415 (,1219) _a	-	-364,3692	6,0459 (,0139) _b
Ho: $\xi = 1$	-	1,0501 (,7463) _a	-361,3626	0,0409 (,8398) _b

a: desvio padrão da estimativa do parâmetro.
b: P_value do teste da razão de verossimilhança.

Através dos valores de P_value das estatísticas, pode-se concluir que a hipótese de igualdade das distribuições marginais não é rejeitada, e a hipótese de independência das marginais é rejeitada para o nível de significância $\alpha \geq 0,0139$. Portanto, pode-se dizer que as durações da primeira e segunda união da mulher não são independentes porém são igualmente distribuídas.

Caso 2: Neste caso são considerados os dados sem nenhuma transformação de X e Y, e o modelo utilizado para a análise é o modelo de Block-Basu dado por (3.1). Os resultados da estimação dos parâmetros e dos testes assintóticos de independência (Ho: $\lambda_{12} = 0$) e de igualdade das marginais (Ho: $\delta = 0$), calculados pelo programa computacional BLOCK.PRG (APÊNDICE 4), são apresentados nas Tabelas 6.3 e 6.4 a seguir.

TABELA 6.3 - Estimativas dos parâmetros da distribuição de Block-Basu.

Modelo	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_{12}$	$\hat{\delta}$	$\log L$
Irrestrito	0,0096 (,0020)	0,0051 (,0026)	0,0006 (,0011)	-2157,0333
Ho: $\lambda_{12} = 0$	0,0133 (,0009)	-	0,0006 (,0013)	-2158,9660
Ho: $\delta = 0$	0,0093 (,0019)	0,0051 (,0026)	-	-2157,1613

Obs. os valores entre parênteses são os desvios padrões.

TABELA 6.4 - Testes assintóticos da razão de verossimilhança, de Rao e de Wald, para verificar a indenpendência e a igualdade de duração das uniões.

Teste	Teste de Independência			Teste de Igualdade		
	R. V.	Rao	Wald	R. V.	Rao	Wald
Estatíst.	3,8654	3,8533	3,8196	0,2560	0,2577	0,2566
P_value	0,0493	0,0496	0,0507	0,6129	0,6117	0,6125

Pode-se observar que os resultados obtidos são semelhantes aos resultados do caso anterior. Os P_values das estatísticas indicam que as durações das uniões não são independentes porém igualmente distribuídas. Este resultado é concordante nos três testes, e as estatísticas também são próximas.

Considerando a distribuição de Block-Basu como a distribuição básica conjunta, as funções de sobrevivência marginais das uniões calculadas, usando os parâmetros estimados sob o modelo sem restrição ($\lambda_1=0,096$, $\lambda_{12}= 0,0051$ e $\delta = \lambda_1-\lambda_2 = 0,0006$), são apresentadas no Gráfico 6.4 a seguir.

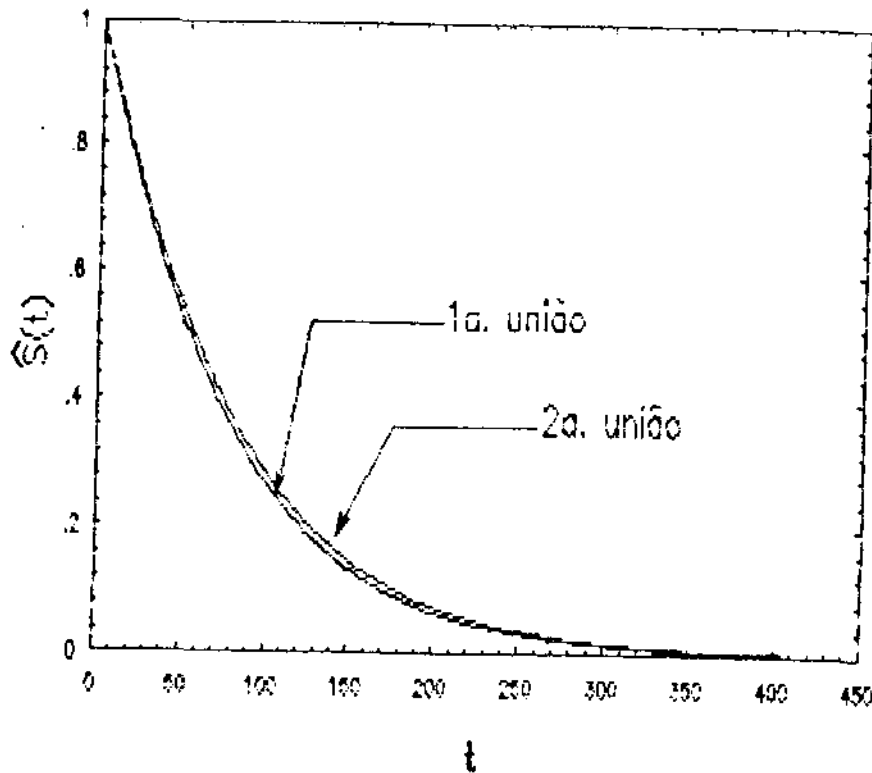


GRÁFICO 6.4 - Funções de sobrevivência estimadas de duração das uniões.

6.5. ANÁLISE DOS DADOS USANDO A DISTRIBUIÇÃO DE SARKAR

Nesta seção, são apresentados a estimação dos parâmetros e testes de independência e de igualdade das marginais, considerando a distribuição de Sarkar como a distribuição básica conjunta dos dados. Os resultados da estimação usando o método de máxima verossimilhança e dos testes de independência ($H_0: \lambda_{12} = 0$) e de igualdade das marginais ($H_0: \delta = 0$) são dados nas Tabelas 6.5 e 6.6 a seguir. O programa computacional usado é o SARKAR.PRG, apresentado no APÊNDICE 4.

TABELA 6.5 - Estimativas dos parâmetros da distribuição de Sarkar.

Modelo	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_{12}$	$\hat{\delta}$	logL
Irrestrito	0,0118 (,0011)	0,0015 (,0009)	0,0005 (,0013)	-33278,388
$H_0: \lambda_{12} = 0$	0,0133 (,0010)	-	0,0006 (,0009)	-33279,966
$H_0: \delta = 0$	0,0116 (,0010)	0,0015 (,0013)	-	-33278,479

Obs. os valores entre parênteses são os desvios padrões.

TABELA 6.6 - Testes assintóticos da razão de verossimilhança, de Rao e de Wald, para verificar a indenpendência e a igualdade de duração das uniões

Teste	Teste de Independência			Teste de Igualdade		
	R. V.	Rao	Wald	R. V.	Rao	Wald
Estatíst.	3,1573	2,8491	2,7415	0,1824	0,2066	0,1618
P_value	0,0756	0,0914	0,0978	0,6693	0,6494	0,6875

Os P_values dos testes assintóticos indicam que a hipótese de indepedência das durações das uniões pode ser rejeitada para o nível de significância $\alpha \geq 0,10$ e as distribuições de duração das uniões podem ser consideradas iguais. Este resultado é igual nos três testes assintóticos.

No Gráfico 6.5 abaixo são apresentadas as funções de sobrevivência das marginais das uniões, calculadas usando os parâmetros estimados ($\lambda_1 = 0,0118$, $\lambda_{12} = 0,0015$, e $\delta = \lambda_1 - \lambda_2 = 0,0005$) do modelo irrestrito da Tabela 6.5.

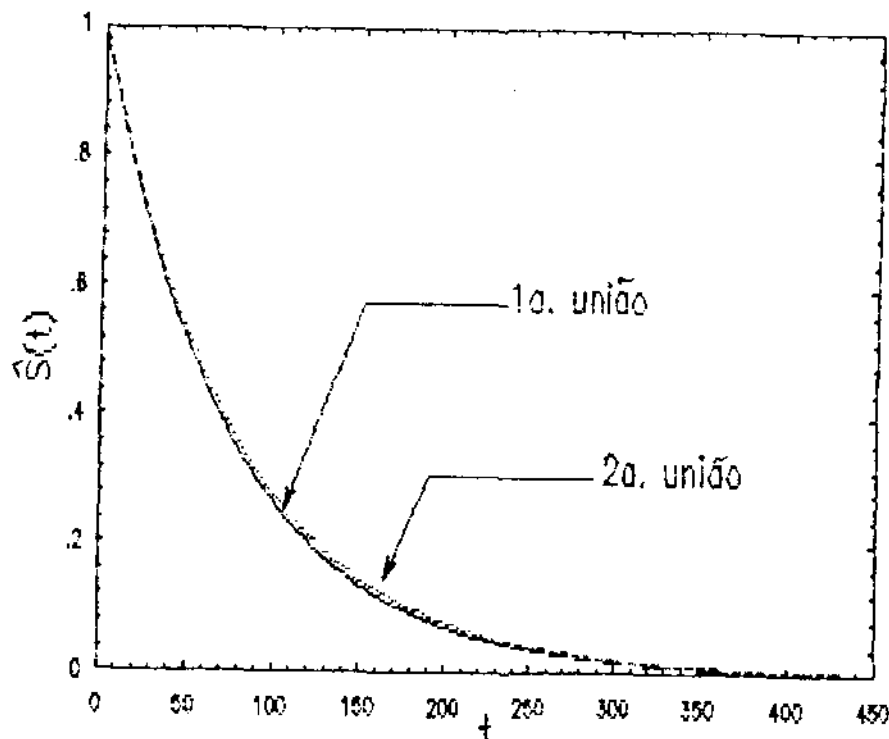


GRÁFICO 6.5 - Funções de sobrevivência estimadas de duração das uniões.

6.6. ANÁLISE COM PRESENÇA DE COVARIÁVEIS

Nesta seção, as estimativas dos parâmetros são calculadas e testes de hipóteses são realizados, assumindo o modelo exponencial bivariado independente, o modelo de Block-Basu e o modelo de Sarkar, como as distribuições básicas conjuntas dos dados, utilizando os programas computacionais COVEXP.PRG, COVBB.PRG e COVSAR.PRG (apresentados no APÊNDICE 4), respectivamente. As covariáveis consideradas são: a idade da mulher ao início da primeira união (Idade1), medida em anos, o nível de instrução da mulher (Nível de Instrução), divididos em 5 categorias, e, o tempo do intervalo entre o término da primeira união e o início da segunda união (Intervalo entre as Uniões), medidos em meses.

Primeiramente, é considerado o modelo bivariado exponencial independente dado por (5.11) da seção 5.3. Os resultados dos cálculos são apresentados nas Tabelas 6.7 a 7.9. O modelo [1] é o modelo irrestrito, o [2] é o modelo sob a hipótese $H_{01}: \beta_{11} = \beta_{21} = 0$, e o [3] é o modelo exponencial bivariado independente sob a hipótese $H_{02}: \beta_{11} = \beta_{21} = \beta_1$.

TABELA 6.7 - Estimativas dos parâmetros da distribuição exponencial independente, covariável: Idade1.

Modelo	$\hat{\beta}_{10}$	$\hat{\beta}_{20}$	$\hat{\beta}_{11}$	$\hat{\beta}_{21}$	logL
[1]	-4,857 (0,407)	-4,335 (0,403)	0,029 (0,022)	-0,002 (0,021)	-2158,097
[2]	-4,322 (0,070)	-4,366 (0,070)	-	-	-2158,966
[3]	-4,560 (0,289)	-4,609 (0,296)	0,013 (0,019)		-2158,608

Obs. os valores entre parênteses são os desvios padrões.

TABELA 6.8 - Estimativas dos parâmetros da distribuição exponencial independente, covariável: Nível de instrução.

Modelo	$\hat{\beta}_{10}$	$\hat{\beta}_{20}$	$\hat{\beta}_{11}$	$\hat{\beta}_{21}$	logL
[1]	-4,512 (0,124)	-4,512 (0,024)	0,047 (0,127)	0,036 (0,025)	-2156,154
[2]	-4,322 (0,070)	-4,366 (0,070)	-	-	-2158,966
[3]	-4,488 (0,102)	-4,537 (0,102)	0,042 (0,017)		-2156,208

Obs. os valores entre parênteses são os desvios padrões.

TABELA 6.9 - Estimativas dos parâmetros da distribuição exponencial independente, covariável: Intervalo entre as uniões.

Modelo	$\hat{\beta}_{10}$	$\hat{\beta}_{20}$	$\hat{\beta}_{11}$	$\hat{\beta}_{21}$	logL
[1]	-4,389 (0,099)	-4,431 (0,103)	0,021 (0,021)	0,020 (0,022)	-2158,100
[2]	-4,322 (0,070)	-4,366 (0,070)	-	-	-2158,966
[3]	-4,388 (0,087)	-4,433 (0,087)	0,021 (0,019)		-2158,100

Obs. os valores entre parênteses são os desvios padrões.

TABELA 6.10 - Estatísticas do teste da razão de verossimilhança.

	Idade1	Nível	Espera
Ho: $\beta_{11} = \beta_{21} = 0$	1,739 (0,187) _a	5,623 (0,018) _a	1,732 (0,188) _a
Ho: $\beta_{11} = \beta_{21} = \beta_1$	1,022 (0,312) _a	0,108 (0,743) _a	0,000 (0,983) _a

a: P_value da estatística do teste.

Através dos resultados obtidos da Tabela 6.10 acima, pode-se dizer que apenas a covariável "Nível de Instrução" teve efeito significativo na duração das uniões das mulheres e esse efeito é igual nas duas uniões.

No segundo caso, a distribuição de Block-Basu é considerada como a distribuição básica conjunta dos dados e o modelo é dados por (5.38) da seção 5.4. O mesmo procedimento descrito acima para o modelo de independência é realizado aqui, o modelo [1] é o modelo irrestrito, o modelo [2] é o modelo sob Ho: $\beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{31} = 0$ e o modelo [3] é o modelo sob Ho: $\beta_{11} = \beta_{21} = \beta_1$. Os seguintes resultados da análise são obtidos:

TABELA 6.11 - Estimativa dos parâmetros da distribuição de Block-Basu, covariável: Idade1.

Modelo	$\hat{\beta}_{10}$	$\hat{\beta}_{20}$	$\hat{\beta}_{30}$	$\hat{\beta}_{11}$	$\hat{\beta}_{21}$	$\hat{\beta}_{31}$	logL
[1]	-5,757 (,736)	-5,165 (,793)	-3,697 (2,327)	0,060 (,035)	0,025 (,040)	-0,089 (,143)	-2155,842
[2]	-4,652 (,213)	-4,711 (,219)	-5,274 (,505)	-	-	-	-2157,033
[3]	-5,481 (,666)	-5,548 000,673)	-3,590 (1,926)	0,044 (,031)	-0,092 (,118)		-2156,398

Obs. os valores entre parênteses são os desvios padrões.

TABELA 6.12 - Estimativas dos parâmetros da distribuição de Block-Basu, covariável: Nível de instrução.

Modelo	$\hat{\beta}_{10}$	$\hat{\beta}_{20}$	$\hat{\beta}_{30}$	$\hat{\beta}_{11}$	$\hat{\beta}_{21}$	$\hat{\beta}_{31}$	logL
[1]	-4,674 (,239)	-4,654 (,250)	-5,854 (,672)	-0,022 (,054)	-0,033 (,054)	0,164 (,069)	-2152,635
[2]	-4,652 (,213)	-4,711 (,219)	-5,274 (,505)	-	-	-	-2157,033
[3]	-4,621 (,227)	-4,678 (,234)	-5,846 (,669)	-0,028 (,050)		0,164 (,069)	-2152,667

Obs. os valores entre parênteses são os desvios padrões.

TABELA 6.13 - Estimativas dos Parâmetros da Distribuição de Block-Basu, covariável: Intervalo entre as uniões.

Modelo	$\hat{\beta}_{10}$	$\hat{\beta}_{20}$	$\hat{\beta}_{30}$	$\hat{\beta}_{11}$	$\hat{\beta}_{21}$	$\hat{\beta}_{31}$	logL
[1]	-4,674 (,239)	-4,741 (,253)	-5,441 (1,583)	0,002 (,045)	0,005 (,046)	0,060 (,069)	-2155,954
[2]	-4,652 (,213)	-4,711 (,219)	-5,274 (,505)	-	-	-	-2157,033
[3]	-4,677 (,236)	-4,736 (,242)	-5,442 (,584)	0,003 (,042)		0,060 (,069)	-2155,957

Obs. os valores entre parênteses são os desvios padrões.

TABELA 6.14 - Estatísticas do teste da razão de verossimilhança.

	Idade1	Nível	Espera
$H_0: \beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{31} = 0$	2,382 (0,497) _a	8,796 (0,032) _a	2,158 (0,540) _a
$H_0: \beta_{11} = \beta_{21} = \beta_1$	1,112 (0,292) _a	0,064 (0,801) _a	0,006 (0,934) _a

a: P_value da estatística do teste.

Os resultados da Tabela 6.14 indicam que apenas a covariável "Nível de Instrução" teve efeito significativo na duração das uniões das mulheres e esse efeito é igual nas duas uniões, coincidindo com o resultado do modelo exponencial bivariado independente.

Por último, a distribuição de Sarkar é considerada como a distribuição básica conjunta dos dados. Como no caso da distribuição de Block-Basu, o modelo [1] é o modelo irrestrito, o modelo [2] é o modelo sob $H_0: \beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{31} = 0$ e o modelo [3] é o modelo sob $H_0: \beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{31}$. Os seguintes resultados da análise são obtidos:

TABELA 6.15 - Estimativas dos parâmetros da distribuição de Sarkar, covariável: Idade1.

Modelo	$\hat{\beta}_{10}$	$\hat{\beta}_{20}$	$\hat{\beta}_{30}$	$\hat{\beta}_{11}$	$\hat{\beta}_{21}$	$\hat{\beta}_{31}$	logL
[1]	-5,221 (,537)	-4,663 (,585)	-3,950 (2,853)	0,043 (,028)	0,010 (,032)	-0,146 (,360)	-2156,386
[2]	-4,437 (,101)	-4,482 (,101)	-6,503 (,567)	-	-	-	-2157,387
[3]	-4,924 (,414)	-4,975 (,420)	-3,525 (2,921)	0,027 (,022)	-0,173 (,109)		-2156,919

Obs. os valores entre parênteses são os desvios padrões.

TABELA 6.16 - Estimativas dos parâmetros da distribuição de Sarkar, covariável: Nível de instrução.

Modelo	$\hat{\beta}_{10}$	$\hat{\beta}_{20}$	$\hat{\beta}_{30}$	$\hat{\beta}_{11}$	$\hat{\beta}_{21}$	$\hat{\beta}_{31}$	logL
[1]	-4,481 (,148)	-4,470 (,150)	-7,638 (,932)	0,003 (,033)	-0,011 (,033)	0,270 (,099)	-2152,271
[2]	-4,437 (,101)	-4,482 (,101)	-6,503 (,567)	-	-	-	-2157,387
[3]	-4,454 (,127)	-4,499 (,129)	-7,638 (,931)	-0,004 (,027)		0,270 (,099)	-2152,338

Obs. os valores entre parênteses são os desvios padrões.

TABELA 6.17 - Estimativas dos parâmetros da distribuição de Sarkar, covariável: Intervalo entre as uniões.

Modelo	$\hat{\beta}_{10}$	$\hat{\beta}_{20}$	$\hat{\beta}_{30}$	$\hat{\beta}_{11}$	$\hat{\beta}_{21}$	$\hat{\beta}_{31}$	logL
[1]	-4,482 (,131)	-4,525 (,133)	-6,744 (,664)	0,011 (,029)	0,010 (,031)	0,089 (,095)	-2156,346
[2]	-4,437 (,101)	-4,482 (,101)	-6,503 (,567)	-	-	-	-2157,387
[3]	-4,481 (,120)	-4,526 (,120)	-6,744 (,665)	0,011 (,025)		0,089 (,095)	-2156,346

Obs. os valores entre parênteses são os desvios padrões.

TABELA 6.18 - Estatísticas do teste da razão de verossimilhança.

	Idade1	Nivel	Espera
Ho: $\beta_{11} = \beta_{21} = 0$	1,876 (0,599) _a	10,232 (0,017) _a	2,083 (0,555) _a
Ho: $\beta_{11} = \beta_{21} = \beta$	0,940 (0,332) _a	0,134 (0,714) _a	0,001 (0,979) _a

a: P_value da estatística do teste.

Com base nos resultados dispostos na Tabela 6.18, pode-se dizer que apenas a covariável "Nível de Instrução" teve efeito significativo na duração das uniões das mulheres e esse efeito é igual nas duas uniões, concordando com os resultados do modelo independente e de Block-Basu.

6.7. CONCLUSÕES

As curvas de sobrevivência de Kaplan-Meier das marginais apresentadas no gráfico 6.3 mostram a igualdade das distribuições marginais. O mesmo fato é verificado utilizando os modelos de Block-Basu e de Sarkar.

Os resultados dos testes assintóticos (Tabelas 6.2, 6.4 e 6.6) revelam evidências contra a hipótese de independência entre X e Y , portanto a adequação de uso de um modelo bivariado dependente.

Para a análise dos dados com presença de covariáveis, são considerados os modelos de exponencial bivariado independente, de Block-Basu e de Sarkar. Os resultados são concordantes: apenas a covariável "Nível de Instrução" teve efeito significativo na duração das uniões, e esse efeito é o mesmo nas duas uniões.

Não foi observada nenhuma diferença significativa entre os modelos de Block-Basu e de Sarkar para este conjunto de dados, este resultado talvez possa ser explicado pela existência de pequena dependência entre X e Y . Portanto, neste caso particular, o modelo de independência produziu resultados semelhantes.

Como já foi dito inicialmente, a aplicação numérica deste conjunto de dados de PNAD tinha como o objetivo de ilustrar os métodos descritos nos capítulos anteriores, sem intencionar a análise completa dos dados de PNAD. Para realizar uma análise completa, necessita-se, entre outras questões, de investigações sobre a coleta dos dados, a incorporação de censuras e outras covariáveis que possam ser relevantes na duração das uniões.

CONCLUSÕES E FUTURAS PESQUISAS

Nesta dissertação foram desenvolvidos métodos para análise de dados de sobrevivência pareados, utilizando as distribuições exponenciais bivariadas absolutamente contínuas de Block-Basu e Sarkar, considerando dados completos e censurados e, posteriormente com a inclusão de covariáveis. Os objetivos foram a estimação de parâmetros e a realização de testes de independência entre as marginais e de igualdade das distribuições marginais. Oito programas computacionais foram escritos usando o módulo CM do SOC e o módulo IML do SAS para efetuar os cálculos da estimação e testes de hipóteses.

A estimação dos parâmetros pelo método da máxima verossimilhança, feita através de métodos numéricos, requer intensos recursos computacionais, dada a complexidade da expressão da função densidade da distribuição Sarkar (dificuldade também apontada por Sarkar, que sugeriu o uso do método dos momentos). A velocidade de convergência do processo iterativo Newton-Raphson para encontrar a solução das equações de verossimilhança da distribuição de Sarkar, mostra que os estimadores calculados pelo autor através do método dos momentos constituem-se uma boa aproximação inicial para a aplicação do processo. Já no caso da distribuição de Block-Basu, a função densidade é mais simples, possibilitando o cálculo das derivadas de forma analítica.

A análise de dados pareados com a presença de covariáveis utilizando as distribuições de Block-Basu e Sarkar como distribuições básicas conjuntas, e o modelo log-linear para a regressão, é proposta e desenvolvida no estudo.

Na análise dos dados de duração das uniões, considerados os modelos de Block-Basu, de Sarkar e de exponencial bivariado independente, não se verificaram diferenças significativas com relação aos resultados dos testes propostos para a análise de regressão log-linear, isto é, considerando como covariáveis a idade da mulher ao

início da primeira união, o nível de instrução da mulher e o intervalo de tempo entre o término da primeira união e o início da segunda união. Apenas o nível de instrução da mulher teve efeitos significativos na duração das uniões e, este efeito é igual nas duas uniões.

Os métodos de análise de dados pareados no contexto da Análise de Sobrevivência é recente na literatura, o que propicia o aparecimento de novos estudos. Como decorrência da linha em que foi abordada nesta dissertação, pode-se visualizar os seguintes trabalhos no futuro:

a - análise de dados pareados considerando riscos competitivos;

b - realização de mais estudos comparativos entre o modelo de Block-Basu e de Sarkar, e entre esses e o modelo de Clayton-Oakes, isto é, considerando distribuição de Clayton-Oakes com marginais de médias ponderadas de exponenciais (como no caso de Block-Basu) e marginais exponenciais (como no caso de Sarkar).

c - a análise de dados de confiabilidade considerando testes acelerados com distribuições paramétricas de Block-Basu e Sarkar.

APÊNDICE 1

DERIVADAS UTILIZADAS NO CAPÍTULO III

Neste apêndice, são apresentadas as funções escores e a matriz de informação observada dos parâmetros da distribuição de Block-Basu com a presença de censuras.

Derivando o $\log L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ (3.89) com relação a λ_1 , λ_{12} e δ , as três funções escores $U_{\lambda_1}(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$, $U_{\lambda_{12}}(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ e $U_{\delta}(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ são obtidas:

$$\begin{aligned} \partial \log L / \partial \lambda_1 = & 2n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) - 2n / (2\lambda_1 - \delta) + (n_1 + n_3) / \lambda_1 + n_1 / (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) \\ & + n_2 / (\lambda_1 - \delta) + n_2 / (\lambda_1 + \lambda_{12}) - \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^{r3} y_i + \sum_{i=r3+1}^n \left\{ \left(\Phi_1 \right)^{-1} \right. \\ & \left. \left\{ [1 - (\lambda_1 + \lambda_{12}) y_i] \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] + \lambda_{12} x_i \exp[-(\lambda_1 - \delta) x_i] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (A1.1)$$

$$\begin{aligned} \partial \log L / \partial \lambda_{12} = & n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) + n_1 / (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) - n_2 / (\lambda_1 + \lambda_{12}) \\ & - \left(\sum_{i=1}^{r1} y_i + \sum_{i=r1+1}^{r2} x_i + \sum_{i=r2+1}^{r3} y_i + \sum_{i=r3+1}^n x_i \right) + \sum_{i=r3+1}^n \left\{ \left(\Phi_1 \right)^{-1} \right. \\ & \left. \left\{ \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] - \exp[-(\lambda_1 - \delta) x_i] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (A1.2)$$

$$\begin{aligned}
\partial \log L / \partial \delta = & -n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) + n / (2\lambda_1 - \delta) - n_1 / (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) \\
& - n_2 / (\lambda_1 - \delta) - \sum_{l=1}^{r3} y_l + \sum_{l=r3+1}^n \left\{ \langle \Phi_l \rangle^{-1} \left\{ (\lambda_1 + \lambda_{12}) y_l \right. \right. \\
& \left. \left. \exp[-(\lambda_1 - \delta)y_l] - \lambda_{12} x_l \exp[-(\lambda_1 - \delta)x_l] \right\} \right\}
\end{aligned} \quad (A1.3)$$

E as derivadas segundas com relação aos parâmetros são dadas por:

$$\begin{aligned}
\partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2 = & -4n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 + 4n / (2\lambda_1 - \delta)^2 - (n_1 + n_3) / \lambda_1^2 \\
& - n_1 / (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 - n_2 / (\lambda_1 - \delta)^2 - n_2 / (\lambda_1 + \lambda_{12})^2 \\
& - \sum_{l=r3+1}^n \left\{ \langle \Phi_l \rangle^{-2} \left\{ [1 - (\lambda_1 + \lambda_{12})y_l] \exp[-(\lambda_1 - \delta)y_l] + \lambda_{12} x_l \right. \right. \\
& \left. \left. \exp[-(\lambda_1 - \delta)x_l] \right\}^2 \right\} + \sum_{l=r3+1}^n \left\{ \langle \Phi_l \rangle^{-1} \left\{ [2 - (\lambda_1 + \lambda_{12}) y_l] (-y_l) \right. \right. \\
& \left. \left. \exp[-(\lambda_1 - \delta)y_l] - \lambda_{12} x_l^2 \exp[-(\lambda_1 - \delta)x_l] \right\} \right\}
\end{aligned} \quad (A1.4)$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2 = & -n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 - n_1 / (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 + n_2 / (\lambda_1 + \lambda_{12})^2 \\
& - \sum_{l=r3+1}^n \left\{ \langle \Phi_l \rangle^{-2} \left\{ \exp[-(\lambda_1 - \delta)y_l] - \exp[-(\lambda_1 - \delta)x_l] \right\}^2 \right\}
\end{aligned} \quad (A1.5)$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 \log L / \partial \delta^2 = & -n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 + n / (2\lambda_1 - \delta)^2 - n_1 / (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 \\
& - n_2 / (\lambda_1 - \delta)^2 - \sum_{l=r3+1}^n \left\{ \langle \Phi_l \rangle^{-2} \left\{ (\lambda_1 + \lambda_{12}) y_l \exp[-(\lambda_1 - \delta)y_l] \right. \right. \\
& \left. \left. - \lambda_{12} x_l \exp[-(\lambda_1 - \delta)x_l] \right\}^2 \right\} + \sum_{l=r3+1}^n \left\{ \langle \Phi_l \rangle^{-1} \left\{ (\lambda_1 + \lambda_{12}) y_l^2 \right. \right. \\
& \left. \left. \exp[-(\lambda_1 - \delta)y_l] - \lambda_{12} x_l^2 \exp[-(\lambda_1 - \delta)x_l] \right\} \right\}
\end{aligned} \quad (A1.6)$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} &= -2n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 - n_1 / (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 - n_2 / (\lambda_1 + \lambda_{12})^2 \\
&- \sum_{i=r+3}^n \left\{ \{ \Phi_i \}^{-2} \{ [1 - (\lambda_1 + \lambda_{12}) y_i] \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] + \lambda_{12} x_i \right. \\
&\quad \left. \exp[-(\lambda_1 - \delta) x_i] \} \{ \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] - \exp[-(\lambda_1 - \delta) x_i] \} \right\} \\
&+ \sum_{i=r+3}^n \left\{ \{ \Phi_i \}^{-1} \{ -y_i \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] + x_i \exp[-(\lambda_1 - \delta) x_i] \} \right\}
\end{aligned} \tag{A1.7}$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta &= 2n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 - 2n / (2\lambda_1 - \delta)^2 + n_1 / (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 \\
&+ n_2 / (\lambda_1 - \delta)^2 - \sum_{i=r+3}^n \left\{ \{ \Phi_i \}^{-2} \{ [1 - (\lambda_1 + \lambda_{12}) y_i] \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] \right. \\
&\quad \left. + \lambda_{12} x_i \exp[-(\lambda_1 - \delta) x_i] \} \{ (\lambda_1 + \lambda_{12}) y_i \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] - \lambda_{12} \right. \\
&\quad \left. \exp[-(\lambda_1 - \delta) x_i] \} \right\} + \sum_{i=r+3}^n \left\{ \{ \Phi_i \}^{-1} \{ [1 - (\lambda_1 + \lambda_{12}) y_i] y_i \right. \\
&\quad \left. \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] + \lambda_{12} x_i^2 \exp[-(\lambda_1 - \delta) x_i] \} \right\}
\end{aligned} \tag{A1.8}$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 \log L / \partial \delta \partial \lambda_{12} &= n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 + n_1 / (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 - \sum_{i=r+3}^n \\
&\left\{ \{ \Phi_i \}^{-2} \{ (\lambda_1 + \lambda_{12}) y_i \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] - \lambda_{12} \exp[-(\lambda_1 - \delta) x_i] \} \right. \\
&\quad \left. \{ \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] - \exp[-(\lambda_1 - \delta) x_i] \} \right\} + \sum_{i=r+3}^n \left\{ \{ \Phi_i \}^{-1} \right. \\
&\quad \left. \{ -y_i \exp[-(\lambda_1 - \delta) y_i] - x_i \exp[-(\lambda_1 - \delta) x_i] \} \right\}
\end{aligned} \tag{A1.9}$$

APÊNDICE 2

DERIVADAS UTILIZADAS NO CAPÍTULO IV

A2.1. DERIVADAS UTILIZADAS NA SEÇÃO 4.3

As derivadas primeiras e segundas de $\log L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ (4.12) com relação aos parâmetros λ_1 , λ_{12} e δ utilizadas para construir o vetor escore $U(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ e a matriz de informação observada $I(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ dados em (4.13) são as seguintes:

$$\begin{aligned} \partial \log L / \partial \lambda_1 = & n_1 / \lambda_1 + n_2 / (\lambda_1 - \delta) + 2n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) - 4n / (2\lambda_1 - \delta) \\ & - \left(\sum_{i=1}^n \log(s_i t_i) \right) + \sum_{i=1}^{n_1} \left\{ (\Phi_1)^{-1} \left(4\lambda_1 - 3\delta + 2\lambda_{12} - (4\lambda_1 - 3\delta + \lambda_{12}) t_i^{-\lambda_1} \right. \right. \\ & \left. \left. + (\lambda_1 - \delta)(2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) t_i^{-\lambda_1} \log t_i \right) \right\} + \sum_{i=n_1+1}^n \left\{ (\Phi_2)^{-1} \left((4\lambda_1 + 2\lambda_{12} - \delta) \right. \right. \\ & \left. \left. - (4\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) s_i^{-\lambda_1 + \delta} + \lambda_1 (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) s_i^{-\lambda_1 + \delta} \log s_i \right) \right\} \\ & - 2\lambda_{12} (\Sigma \lambda) / (2\lambda_1 - \delta)^2 + \lambda_{12} / (2\lambda_1 - \delta) \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} (1 - s_i^{-\lambda_1})^{-1} s_i^{-\lambda_1} \log s_i \right. \\ & \left. + \sum_{i=n_1+1}^n (1 - t_i^{-\lambda_1 + \delta})^{-1} t_i^{-\lambda_1 + \delta} \log t_i \right\} - (1 + \lambda_{12} / (2\lambda_1 - \delta)) \\ & \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} (1 - t_i^{-\lambda_1})^{-1} t_i^{-\lambda_1} \log t_i + \sum_{i=n_1+1}^n (1 - s_i^{-\lambda_1 + \delta})^{-1} s_i^{-\lambda_1 + \delta} \log s_i \right\}, \end{aligned} \quad (A2.1)$$

$$\begin{aligned} \partial \log L / \partial \lambda_{12} = & n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) + \langle \Sigma \Lambda \rangle / (2\lambda_1 - \delta) - \left(\sum_{i=1}^{n1} \log t_i + \sum_{i=n1+1}^n \log s_i \right) \\ & + \sum_{i=1}^{n1} \left\{ \langle \Phi_1 \rangle^{-1} (2\lambda_1 - \delta - (\lambda_1 - \delta) t_i^{-\lambda_1}) \right\} + \sum_{i=n1+1}^n \left\{ \langle \Phi_2 \rangle^{-1} (2\lambda_1 - \delta - \lambda_1 s_i^{-\lambda_1 + \delta}) \right\}, \end{aligned} \quad (A2.2)$$

$$\begin{aligned} \partial \log L / \partial \delta = & -n_2 / (\lambda_1 - \delta) - n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) + 2n / (2\lambda_1 - \delta) + \sum_{i=1}^n \log t_i \\ & + \sum_{i=1}^{n1} \left\{ \langle \Phi_1 \rangle^{-1} \left(-(3\lambda_1 - 2\delta + \lambda_{12}) + (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) (\lambda_1 - \delta) t_i^{-\lambda_1} \right) \right\} \\ & + \sum_{i=n1+1}^n \left\{ \langle \Phi_2 \rangle^{-1} \left(-(\lambda_1 + \lambda_{12}) + [1 - (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) \log s_i] \lambda_1 s_i^{-\lambda_1 + \delta} \right) \right\} \\ & : \lambda_{12} \langle \Sigma \Lambda \rangle / (2\lambda_1 - \delta)^2 - \lambda_{12} / (2\lambda_1 - \delta) \sum_{i=n1+1}^n \left(\log(1 - t_i^{-\lambda_1 + \delta}) \right) t_i^{-\lambda_1 + \delta} \\ & \log t_i + \left(1 + \lambda_{12} / (2\lambda_1 - \delta) \right) \cdot \sum_{i=n1+1}^n \left(\log(1 - s_i^{-\lambda_1 + \delta}) s_i^{-\lambda_1 + \delta} s_i \right), \end{aligned} \quad (A2.3)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2 = & -n_1 / \lambda_1^2 - n_2 / (\lambda_1 - \delta)^2 - 4n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 + 8n / (2\lambda_1 - \delta)^2 \\ & + \sum_{i=1}^{n1} \left\{ -\langle \Phi_1 \rangle^{-2} \left(4\lambda_1 - 3\delta + 2\lambda_{12} - (4\lambda_1 - 3\delta + \lambda_{12}) t_i^{-\lambda_1} + (\lambda_1 - \delta) (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) \right. \right. \\ & \left. \left. t_i^{-\lambda_1} \log t_i \right)^2 + \langle \Phi_1 \rangle^{-1} \left(4 - 4t_i^{-\lambda_1} + [2(2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) + 4(\lambda_1 - \delta) - (\lambda_1 - \delta) \right. \right. \\ & \left. \left. (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) \log t_i] t_i^{-\lambda_1} \log t_i \right) \right\} + \sum_{i=n1+1}^n \left\{ -\langle \Phi_2 \rangle^{-2} \left((4\lambda_1 + 2\lambda_{12} - \delta) \right. \right. \\ & \left. \left. - (4\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) s_i^{-\lambda_1 + \delta} + \lambda_1 (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) s_i^{-\lambda_1 + \delta} \log s_i \right)^2 + \langle \Phi_2 \rangle^{-1} \left(4 - 4s_i^{-\lambda_1 + \delta} \right. \right. \\ & \left. \left. + [2(2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) + 4\lambda_1 - \lambda_1 (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) \log s_i] s_i^{-\lambda_1 + \delta} \log s_i \right) \right\} \\ & + 8\lambda_{12} \langle \Sigma \Lambda \rangle / (\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^3 - (4\lambda_{12} / (2\lambda_1 - \delta)^2) \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{n1} (1 - s_i^{-\lambda_1})^{-1} s_i^{-\lambda_1} \right. \\ & \cdot \log s_i + \sum_{i=n1+1}^n (1 - t_i^{-\lambda_1})^{-1} t_i^{-\lambda_1} \log t_i - \sum_{i=1}^{n1} (1 - t_i^{-\lambda_1})^{-1} t_i^{-\lambda_1} \log t_i \\ & \left. - \sum_{i=n1+1}^n (1 - s_i^{-\lambda_1})^{-1} s_i^{-\lambda_1} \log s_i \right\} - (\lambda_{12} / (2\lambda_1 - \delta)) \sum_{i=1}^{n1} \left\{ ((1 - s_i^{-\lambda_1})^{-1} s_i^{-\lambda_1} \right. \end{aligned}$$

(A2.4)

(A2.5)

(A2.6)

150

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l=1}^{n1} (1-t_1^{-\lambda_1})^{-1} t_1^{-\lambda_1} \log t_1 - \sum_{l=n1+1}^n (1-s_1^{-\lambda_1+\delta})^{-1} s_1^{-\lambda_1+\delta} \log s_1 \Big\} \\
& + \sum_{l=1}^{n1} \left\{ -(\phi_1)^{-2} (4\lambda_1 - 3\delta + 2\lambda_{12} - (4\lambda_1 - 3\delta + \lambda_{12})) t_1^{-\lambda_1} + (\lambda_1 - \delta)(2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) \right. \\
& t_1^{-\lambda_1} \log t_1 \Big) (2\lambda_1 - \delta - (\lambda_1 - \delta) t_1^{-\lambda_1}) + (\phi_1)^{-1} (2 + [(\lambda_1 - \delta) \log t_1 - 1] t_1^{-\lambda_1}) \Big\} \\
& + \sum_{l=n1+1}^n \left\{ -(\phi_2)^{-2} (-(4\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})) s_1^{-\lambda_1+\delta} + \lambda_1 (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) s_1^{-\lambda_1+\delta} \log s_1 \right. \\
& \cdot (2\lambda_1 - \delta - s_1^{-\lambda_1+\delta}) + (\phi_2)^{-1} (2 + [\lambda_1 \log s_1 - 1] s_1^{-\lambda_1+\delta}) \Big\} \quad (A2.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \delta & = + n_2 / (\lambda_1 - \delta)^2 + 2n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 - 4n / (2\lambda_1 - \delta)^2 - 4\lambda_{12} \\
& \cdot (\Sigma \Lambda) / (2\lambda_1 - \delta)^3 + \sum_{l=1}^{n1} \left\{ -(\phi_1)^{-2} (4\lambda_1 - 3\delta + 2\lambda_{12} - (4\lambda_1 - 3\delta + \lambda_{12})) t_1^{-\lambda_1} + (\lambda_1 - \delta) \right. \\
& \cdot (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) t_1^{-\lambda_1} \log t_1 \Big) (-(3\lambda_1 - 2\delta + \lambda_{12}) + (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) (\lambda_1 - \delta) t_1^{-\lambda_1}) \\
& + (\phi_1)^{-1} (-3 + 3t_1^{-\lambda_1} - [(3\lambda_1 - 2\delta + \lambda_{12}) t_1^{-\lambda_1} \log t_1]) \Big\} \\
& + \sum_{l=n1+1}^n \left\{ -(\phi_2)^{-2} (-(4\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})) s_1^{-\lambda_1+\delta} + \lambda_1 (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) s_1^{-\lambda_1+\delta} \log s_1 \right. \\
& \cdot (-(\lambda_1 + \lambda_{12}) + [1 - (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) \log s_1] \lambda_1 s_1^{-\lambda_1+\delta}) + (\phi_2)^{-1} (-1 + s_1^{-\lambda_1+\delta} \\
& \cdot [5\lambda_1 - \delta + \lambda_{12} - \lambda_1 \log s_1] s_1^{-\lambda_1+\delta} \log s_1) \Big\} + \lambda_{12} / (2\lambda_1 - \delta)^2 \\
& \cdot \left\{ \sum_{l=1}^{n1} (1 - s_1^{-\lambda_1})^{-1} s_1^{-\lambda_1} \log s_1 + 3 \sum_{l=n1+1}^n (1 - t_1^{-\lambda_1+\delta})^{-1} t_1^{-\lambda_1+\delta} \log t_1 \right. \\
& - \sum_{l=1}^{n1} (1 - t_1^{-\lambda_1})^{-1} t_1^{-\lambda_1} \log t_1 - 3 \sum_{l=n1+1}^n (1 - s_1^{-\lambda_1+\delta})^{-1} s_1^{-\lambda_1+\delta} \log s_1 \Big\} \\
& + \lambda_{12} / (2\lambda_1 - \delta) \sum_{l=n1+1}^n \left\{ ((1 - t_1^{-\lambda_1+\delta})^{-1} t_1^{-\lambda_1+\delta} \log t_1)^2 (1 - t_1^{-\lambda_1+\delta})^{-1} \right.
\end{aligned}$$

$$\left. t_1^{-\lambda_1+\delta} (\log t_1)^2 \right\} - (1 + \lambda_{12}/(2\lambda_1-\delta)) \sum_{i=n1+1}^n \left\{ ((1-s_1^{-\lambda_1+\delta})^{-1} s_1^{-\lambda_1+\delta} \cdot \log s_1)^2 ((1-s_1^{-\lambda_1+\delta})^{-1} s_1^{-\lambda_1+\delta} (\log s_1)^2) \right\} \quad (A2.8)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 \log L / \partial \lambda_{12} \partial \delta &= n / (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12})^2 + \langle \Sigma \Lambda \rangle / (2\lambda_1 - \delta)^2 - 1 / (2\lambda_1 - \delta) \\ &\cdot \sum_{i=n1+1}^n (\log(1 - s_1^{-\lambda_1+\delta}) s_1^{-\lambda_1+\delta} s_1) - \sum_{i=n1+1}^n (\log(1 - t_1^{-\lambda_1+\delta}) t_1^{-\lambda_1+\delta} \log t_1) \\ &+ \sum_{i=1}^{n1} \left\{ -\langle \Phi_1 \rangle^{-2} \left(-(3\lambda_1 - 2\delta + \lambda_{12}) + (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) (\lambda_1 - \delta) t_1^{-\lambda_1} \right) \right. \\ &\cdot (2\lambda_1 - \delta - (\lambda_1 - \delta) t_1^{-\lambda_1}) + \langle \Phi_1 \rangle^{-1} (-1 + t_1^{-\lambda_1}) \left. \right\} + \sum_{i=n1+1}^n \left\{ -\langle \Phi_2 \rangle^{-2} \right. \\ &\cdot \left(-(\lambda_1 + \lambda_{12}) + [1 - (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) \log s_1] \lambda_1 s_1^{-\lambda_1+\delta} \right) (2\lambda_1 - \delta - s_1^{-\lambda_1+\delta}) \\ &\left. - \langle \Phi_2 \rangle^{-1} (-1 + \lambda_1 s_1^{-\lambda_1+\delta} \log s_1) \right\}, \quad (A2.9) \end{aligned}$$

onde

$$\langle \Phi_1 \rangle = [(2\lambda_1 - \delta)(\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) - (\lambda_1 - \delta)(2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) t_1^{-\lambda_1}],$$

$$\langle \Phi_2 \rangle = [(2\lambda_1 - \delta)(\lambda_1 + \lambda_{12}) - \lambda_1 (2\lambda_1 - \delta + \lambda_{12}) s_1^{-\lambda_1+\delta}], \text{ e}$$

$$\langle \Sigma \Lambda \rangle = \sum_{i=1}^{n1} \log((1-s_1^{-\lambda_1})(1-t_1^{-\lambda_1})) + \sum_{i=n1+1}^n \log((1-t_1^{-\lambda_1+\delta})(1-s_1^{-\lambda_1+\delta})).$$

A2.2. DERIVADAS UTILIZADAS NA SEÇÃO 4.4

A derivada primeira de $\log L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ (4.12) com relação a λ_{12} que compõe o vetor de escore parcial $U_{\lambda_{12}}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta})$ e as derivadas segundas com relação aos parâmetro λ_1 , λ_{12} , e δ que formam a matriz de

informação parcial $I_{\lambda_{12}}^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta})$ com relação a λ_{12} utilizados no teste de Rao são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 U_{\lambda_{12}}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\delta}) &= \partial \log L(\lambda_{12}, \lambda_1, \delta) / \partial \lambda_{12} \Big|_{\lambda_{12}=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \delta=\tilde{\delta}} = \\
 &= n/(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) + [1/(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})] \left[\sum_{i=1}^{n1} \log(1 - s_i^{-\tilde{\lambda}_1}) \right. \\
 &+ \sum_{i=n1+1}^n \log(1 - t_i^{-\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\delta}}) - \sum_{i=1}^{n1} \log(1 - t_i^{-\tilde{\lambda}_1}) - \sum_{i=n1+1}^n \log(1 - s_i^{-\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\delta}}) \Big] \\
 &- \sum_{i=1}^{n1} \log t_i - \sum_{i=n1+1}^n \log s_i + \sum_{i=1}^n [(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})(1 - t_i^{-\tilde{\lambda}_1})]^{-1} \\
 &[(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) - (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) t_i^{-\tilde{\lambda}_1}] + \sum_{i=n1+1}^n [(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\delta} - \tilde{\lambda}_1 s_i^{-\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\delta}})]^{-1} \\
 &[2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta} - \tilde{\lambda}_1 s_i^{-\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\delta}}], \tag{A2.10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -I_{11} &= \partial^2 \log L(\lambda_{12}, \lambda_1, \delta) / \partial \lambda_{12}^2 \Big|_{\lambda_{12}=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \delta=\tilde{\delta}} = \\
 &= -n/(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) - \sum_{i=1}^{n1} [(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})(1 - t_i^{-\tilde{\lambda}_1})]^{-2} [(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) \\
 &- (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) t_i^{-\tilde{\lambda}_1}]^2 - \sum_{i=n1+1}^n [(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\delta} - \tilde{\lambda}_1 (2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) s_i^{-\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\delta}})]^{-2} \\
 &\cdot [2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta} - \tilde{\lambda}_1 s_i^{-\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\delta}}]^2, \tag{A2.11}
 \end{aligned}$$

$$-I_{21} = -I'_{12} = \begin{bmatrix} \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \lambda_{12} \partial \lambda_1 \\ \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \lambda_{12} \partial \delta \end{bmatrix} \Big|_{\lambda_{12}=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \delta=\tilde{\delta}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

onde $\log L(\lambda_{12}, \lambda_1, \delta) = \log L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ dada por (4.12), e

$$\begin{aligned}
a = & -2n/(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) + [2/(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})] \left[\sum_{l=1}^{n1} \log(1-s_1^{-\tilde{\lambda}_1}) + \sum_{l=n1+1}^n \log(1-t_1^{-\tilde{\lambda}_1+\tilde{\delta}}) \right. \\
& - \sum_{l=1}^{n1} \log(1-t_1^{-\tilde{\lambda}_1}) - \sum_{l=n1+1}^n \log(1-s_1^{-\tilde{\lambda}_1+\tilde{\delta}}) \left. \right] + 1/(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) \\
& \left[\sum_{l=1}^{n1} (1-s_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} s_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log s_1 - \sum_{l=1}^{n1} (1-t_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} t_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log t_1 \right. \\
& - \sum_{l=n1+1}^n (1-s_1^{-\tilde{\lambda}_1+\tilde{\delta}})^{-1} s_1^{-\tilde{\lambda}_1+\tilde{\delta}} \log s_1 + \sum_{l=n1+1}^n (1-t_1^{-\tilde{\lambda}_1+\tilde{\delta}})^{-1} t_1^{-\tilde{\lambda}_1+\tilde{\delta}} \log t_1 \left. \right] \\
& - \sum_{l=1}^{n1} [(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})(1-t_1^{-\tilde{\lambda}_1})]^{-2} [4\tilde{\lambda}_1 - 3\tilde{\delta} - (4\tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\delta})t_1^{-\tilde{\lambda}_1} + (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) \\
& t_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log t_1] [(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) - (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})t_1^{-\tilde{\lambda}_1}] + \sum_{l=1}^{n1} [(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})(1-t_1^{-\tilde{\lambda}_1})]^{-1} \\
& [2-t_1^{-\tilde{\lambda}_1} + (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})t_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log t_1] - \sum_{l=n1+1}^n [(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\delta} - \tilde{\lambda}_1 s_1^{-\tilde{\lambda}_1+\tilde{\delta}})]^{-2} \\
& [2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta} - \tilde{\lambda}_1 s_1^{-\tilde{\lambda}_1+\tilde{\delta}}] [4\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta} - (4\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})s_1^{-\tilde{\lambda}_1+\tilde{\delta}} + \tilde{\lambda}_1 (2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) s_1^{-\tilde{\lambda}_1+\tilde{\delta}} \log s_1] \\
& + \sum_{l=n1+1}^n [(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\delta} - \tilde{\lambda}_1 s_1^{-\tilde{\lambda}_1+\tilde{\delta}})]^{-1} [2-s_1^{-\tilde{\lambda}_1+\tilde{\delta}} + \tilde{\lambda}_1 s_1^{-\tilde{\lambda}_1+\tilde{\delta}} \log s_1],
\end{aligned}$$

(A2.12)

$$\begin{aligned}
b = & n/(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2 + [1/(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2] \left[\sum_{l=1}^{n1} \log(1-s_1^{-\tilde{\lambda}_1}) + \sum_{l=n1+1}^n \log(1-t_1^{-\tilde{\lambda}_2}) \right. \\
& - \sum_{l=1}^{n1} \log(1-t_1^{-\tilde{\lambda}_1}) - \sum_{l=n1+1}^n \log(1-s_1^{-\tilde{\lambda}_2}) \left. \right] + [1/(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})] \\
& \left[\sum_{l=n1+1}^n (1-s_1^{-\tilde{\lambda}_1+\tilde{\delta}})^{-1} s_1^{-\tilde{\lambda}_1+\tilde{\delta}} \log s_1 - \sum_{l=n1+1}^n (1-t_1^{-\tilde{\lambda}_1+\tilde{\delta}})^{-1} t_1^{-\tilde{\lambda}_1+\tilde{\delta}} \log t_1 \right] \\
& - \sum_{l=1}^{n1} [(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})(1-t_1^{-\tilde{\lambda}_1})]^{-2} [-3\tilde{\lambda}_1 + 2\tilde{\delta} + (2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})t_1^{-\tilde{\lambda}_1} \\
& + (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})t_1^{-\tilde{\lambda}_1}] [(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) - (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})t_1^{-\tilde{\lambda}_1}] + \sum_{l=1}^{n1} [(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) \\
& \cdot (1-t_1^{-\tilde{\lambda}_1})]^{-1} [-1+t_1^{-\tilde{\lambda}_1}] - \sum_{l=n1+1}^n [(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\delta} - \tilde{\lambda}_1 s_1^{-\tilde{\lambda}_1+\tilde{\delta}})]^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot [-\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_1 s_1^{-\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\delta}} - \tilde{\lambda}_1 (2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta}) s_1^{-\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\delta}} \log s_1] [2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta} - \tilde{\lambda}_1 s_1^{-\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\delta}}] \\
& + \sum_{l=n1+1}^n [(2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\delta} - \tilde{\lambda}_1 s_1^{-\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\delta}})]^{-1} [-1 - \tilde{\lambda}_1 s_1^{-\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\delta}} \log s_1].
\end{aligned}
\tag{A2.13}$$

$$\begin{aligned}
-I_{22} &= \left[\begin{array}{cc} \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta) / \partial \lambda_1^2 & \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta) / \partial \lambda_1 \partial \delta \\ \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta) / \partial \delta \partial \lambda_1 & \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta) / \partial \delta^2 \end{array} \right] \Big|_{\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1, \delta = \tilde{\delta}} \\
&= \begin{bmatrix} c & d \\ d & e \end{bmatrix}, \text{ com } \log L(\lambda_1, \delta) \text{ dada por (4.15), e}
\end{aligned}$$

$$c = -n/\tilde{\lambda}_1^2 - n/(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2 \tag{A2.14}$$

$$d = n/(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2 \tag{A2.15}$$

$$e = -n/(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta})^2 \tag{A2.16}$$

A2.3. DERIVADAS UTILIZADAS NA SECÇÃO 4.5

As derivadas do $\log L(\lambda_1, \lambda_{12})$ com relação a λ_1 e λ_{12} para construir a $U(\lambda_1, \lambda_{12})$ e $I(\lambda_1, \lambda_{12})$ (4.20) são as seguintes:

$$\begin{aligned}
\partial \log L / \partial \lambda_1 &= -n_1 / \lambda_1 + 2n / (2\lambda_1 + \lambda_{12}) - \left(\sum_{i=1}^n \log s_i + \log t_i \right) \\
&- \lambda_{12} \left\{ \sum_{i=1}^{n1} \left((1-s_i^{-\lambda_1}) (1-t_i^{-\lambda_1}) \right) + \sum_{i=n1+1}^n \log \left((1-t_i^{-\lambda_1}) (1-s_i^{-\lambda_1}) \right) \right\} 2\lambda_1^2 \\
&+ \sum_{i=1}^{n1} \left\{ \left[\begin{array}{cc} 2\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_{12}) & -\lambda_1(2\lambda_1 + \lambda_{12})t_i^{-\lambda_1} \end{array} \right]^{-1} (4\lambda_1 + 2\lambda_{12} - (4\lambda_1 + \lambda_{12}) \right. \\
&\cdot t_i^{-\lambda_1} + \lambda_1(2\lambda_1 + \lambda_{12})t_i^{-\lambda_1} \log t_i) \left. \right\} + \sum_{i=n1+1}^n \left\{ \left[\begin{array}{cc} 2\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_{12}) & \end{array} \right] \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda_1(2\lambda_1+\lambda_{12})s_1^{-\lambda_1} \Big]^{-1} \left\{ (4\lambda_1+2\lambda_{12}) - (4\lambda_1+\lambda_{12})s_1^{-\lambda_1} + \lambda_1(2\lambda_1+\lambda_{12}) \right. \\
& \cdot s_1^{-\lambda_1} \log s_1 \Big\} + \lambda_{12}/2\lambda_1 \left\{ \sum_{l=1}^{n1} (1 - s_1^{-\lambda_1})^{-1} s_1^{-\lambda_1} \log s_1 + \sum_{l=n1+1}^n (1 - t_1^{-\lambda_1})^{-1} \right. \\
& \cdot t_1^{-\lambda_1} \log t_1 \Big\} - (1 + \lambda_{12}/(2\lambda_1)) \left\{ \sum_{l=1}^{n1} (1 - t_1^{-\lambda_1})^{-1} t_1^{-\lambda_1} \log t_1 \right. \\
& \left. + \sum_{l=n1+1}^n (1 - s_1^{-\lambda_1})^{-1} s_1^{-\lambda_1} \log s_1 \right\} \quad (A2.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial \log L / \partial \lambda_{12} = & n/(2\lambda_1 + \lambda_{12}) - \left(\sum_{l=1}^{n1} \log t_1 + \sum_{l=n1+1}^n \log s_1 \right) \\
& \left\{ \sum_{l=1}^{n1} \log \left((1-s_1^{-\lambda_1}) (1-t_1^{-\lambda_1}) \right) + \sum_{l=n1+1}^n \log \left((1-t_1^{-\lambda_1}) (1-s_1^{-\lambda_1}) \right) \right\} / 2\lambda_1 \\
& + \sum_{l=1}^{n1} \left\{ \left[\begin{array}{cc} 2\lambda_1(\lambda_1+\lambda_{12}) & -\lambda_1(2\lambda_1+\lambda_{12})t_1^{-\lambda_1} \end{array} \right]^{-1} (2\lambda_1-\lambda_1 t_1^{-\lambda_1}) \right\} \\
& + \sum_{l=n1+1}^n \left\{ \left[\begin{array}{cc} 2\lambda_1(\lambda_1+\lambda_{12}) & -\lambda_1(2\lambda_1+\lambda_{12})s_1^{-\lambda_1} \end{array} \right]^{-1} (2\lambda_1-\lambda_1 s_1^{-\lambda_1}) \right\}, \quad (A2.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 \log L / \partial \lambda_1^2 = & n/\lambda_1^2 - 4n/(2\lambda_1+\lambda_{12})^2 - \sum_{l=1}^{n1} \left[2\lambda_1(\lambda_1+\lambda_{12}) - \lambda_1(2\lambda_1+\lambda_{12}) \right. \\
& \cdot \lambda_1^{-\lambda_1} \Big]^{-2} \left[4\lambda_1 + 2\lambda_{12} - (4\lambda_1 + \lambda_{12})t_1^{-\lambda_1} + \lambda_1(2\lambda_1 + \lambda_{12})t_1^{-\lambda_1} \log t_1 \right]^2 \\
& + \sum_{l=1}^{n1} \left[2\lambda_1(\lambda_1+\lambda_{12}) - \lambda_1(2\lambda_1+\lambda_{12})t_1^{-\lambda_1} \right]^{-1} \left[4 - 4t_1^{-\lambda_1} \right. \\
& \left. + (8\lambda_1 + 2\lambda_{12})t_1^{-\lambda_1} \log t_1 - \lambda_1(2\lambda_1+\lambda_{12})t_1^{-\lambda_1} (\log t_1)^2 \right] \\
& - \sum_{l=n1+1}^n \left[2\lambda_1(\lambda_1+\lambda_{12}) - \lambda_1(2\lambda_1+\lambda_{12})s_1^{-\lambda_1} \right]^{-2} \left[4\lambda_1 + 2\lambda_{12} \right. \\
& \left. - (4\lambda_1+\lambda_{12})s_1^{-\lambda_1} + \lambda_1(2\lambda_1+\lambda_{12})s_1^{-\lambda_1} \log s_1 \right]^2 + \sum_{l=n1+1}^n \left[2\lambda_1(\lambda_1+\lambda_{12}) \right. \\
& \left. - \lambda_1(2\lambda_1+\lambda_{12})s_1^{-\lambda_1} \right]^{-1} \left[4 - 4s_1^{-\lambda_1} + (8\lambda_1 + 2\lambda_{12})s_1^{-\lambda_1} \log s_1 \right. \\
& \left. - \lambda_1(2\lambda_1+\lambda_{12})s_1^{-\lambda_1} (\log s_1)^2 \right] \quad (A2.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 \log L / \partial \lambda_1 \partial \lambda_{12} = & -2n / (2\lambda_1 + \lambda_{12})^2 - (1/2\lambda_1^2) \left[\sum_{i=1}^{n1} \log(1-s_i^{-\lambda_1}) \right. \\
& + \sum_{i=n1+1}^n \log(1-t_i^{-\lambda_2}) - \sum_{i=1}^{n1} \log(1-t_i^{-\lambda_1}) - \sum_{i=n1+1}^n \log(1-s_i^{-\lambda_2}) \left. \right] \\
& + (1/2\lambda_1) \left[\sum_{i=1}^{n1} (1-s_i^{-\lambda_1})^{-1} s_i^{-\lambda_1} \log s_i - \sum_{i=1}^{n1} (1-t_i^{-\lambda_1})^{-1} t_i^{-\lambda_1} \log t_i \right. \\
& - \sum_{i=n1+1}^n (1-s_i^{-\lambda_1})^{-1} s_i^{-\lambda_1} \log s_i + \sum_{i=n1+1}^n (1-t_i^{-\lambda_1})^{-1} t_i^{-\lambda_1} \log t_i \left. \right] \\
& - \sum_{i=1}^{n1} [2\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_{12}) - \lambda_1(2\lambda_1 + \lambda_{12}) t_i^{-\lambda_1}]^{-2} [2\lambda_1 - \lambda_1 t_i^{-\lambda_1}] [4\lambda_1 + 2\lambda_{12} \\
& - (4\lambda_1 + \lambda_{12}) t_i^{-\lambda_1} + \lambda_1(2\lambda_1 + \lambda_{12}) t_i^{-\lambda_1} \log t_i] + \sum_{i=1}^{n1} [2\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_{12}) \\
& - \lambda_1(2\lambda_1 + \lambda_{12}) t_i^{-\lambda_1}]^{-1} [2 - t_i^{-\lambda_1} + \lambda_1 t_i^{-\lambda_1} \log t_i] - \sum_{i=n1+1}^n [2\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_{12}) \\
& - \lambda_1(2\lambda_1 + \lambda_{12}) s_i^{-\lambda_1}]^{-2} [2\lambda_1 - \lambda_1 s_i^{-\lambda_1}] [4\lambda_1 + 2\lambda_{12} - (4\lambda_1 + \lambda_{12}) s_i^{-\lambda_1} \\
& + \lambda_1(2\lambda_1 + \lambda_{12}) s_i^{-\lambda_1} \log s_i] + \sum_{i=n1+1}^n [2\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_{12}) - \lambda_1(2\lambda_1 + \lambda_{12}) s_i^{-\lambda_1}]^{-1} \\
& [2 - s_i^{-\lambda_1} + \lambda_1 s_i^{-\lambda_1} \log s_i] \tag{A2.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 \log L / \partial \lambda_{12}^2 = & -n / (2\lambda_1 + \lambda_{12})^2 - \sum_{i=1}^{n1} [2\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_{12}) - \lambda_1(2\lambda_1 + \lambda_{12}) t_i^{-\lambda_1}]^{-2} \\
& [2\lambda_1 - \lambda_1 t_i^{-\lambda_1}]^2 + \sum_{i=n1+1}^n [2\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_{12}) - \lambda_1(2\lambda_1 + \lambda_{12}) s_i^{-\lambda_1}]^{-2} \\
& [2\lambda_1 - \lambda_1 s_i^{-\lambda_1}]^2 \tag{A2.21}
\end{aligned}$$

O vetor escore parcial $U_{\delta}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})$ e a matriz de informação parcial $I_{\delta}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})$ usados no teste de Rao para testar a igualdade das distribuições marginais são dados por:

$$\begin{aligned}
U_{\delta}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12}) &= \partial \log L(\delta, \lambda_1, \lambda_{12}) / \partial \delta \big|_{\delta=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \lambda_{12}=\tilde{\lambda}_{12}} \\
&= n_1 / \tilde{\lambda}_1 - n / (2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) + \sum_{i=1}^n \log t_i + \sum_{i=1}^{n1} [2\tilde{\lambda}_1(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 \\
&\quad + \tilde{\lambda}_{12}) t_i^{-\tilde{\lambda}_1}]^{-1} [-3\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_{12} + (3\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) t_i^{-\tilde{\lambda}_1}] + \sum_{i=n1+1}^n [2\tilde{\lambda}_1(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) \\
&\quad - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) s_i^{-\tilde{\lambda}_1}]^{-1} [-3\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_1 s_i^{-\tilde{\lambda}_1} - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) s_i^{-\tilde{\lambda}_1} \log s_i] \\
&\quad + \tilde{\lambda}_{12} / 4\tilde{\lambda}_1^2 \left[\sum_{i=1}^{n1} \log(1 - s_i^{-\tilde{\lambda}_1}) + \sum_{i=n1+1}^n \log(1 - t_i^{-\tilde{\lambda}_2}) - \sum_{i=1}^{n1} \log(1 - t_i^{-\tilde{\lambda}_1}) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=n1+1}^n \log(1 - s_i^{-\tilde{\lambda}_2}) \right] - \tilde{\lambda}_{12} / 2\tilde{\lambda}_1 \left[\sum_{i=n1+1}^n (1 - t_i^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} t_i^{-\tilde{\lambda}_1} \log t_i \right] \\
&\quad + (1 + \tilde{\lambda}_{12} / 2\tilde{\lambda}_1) \left[\sum_{i=n1+1}^n (1 - s_i^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} s_i^{-\tilde{\lambda}_1} \log s_i \right] \quad (A2.22)
\end{aligned}$$

$$e \quad I_{\delta}^{11}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12}) = \tilde{I}_{11} - \tilde{I}_{12}^* (\tilde{I}_{22})^{-1} * \tilde{I}_{21}, \quad \text{onde}$$

$$\begin{aligned}
-\tilde{I}_{11} &= \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \delta^2 \big|_{\delta=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \lambda_{12}=\tilde{\lambda}_{12}} = \\
&= -n_2 / \tilde{\lambda}_1^2 - n / (2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})^2 + n / 2\tilde{\lambda}_1^2 - \sum_{i=1}^{n1} [2\tilde{\lambda}_1(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) \\
&\quad t_i^{-\tilde{\lambda}_1}]^{-2} [-3\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_{12} + (3\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) t_i^{-\tilde{\lambda}_1}]^2 + \sum_{i=1}^{n1} [2\tilde{\lambda}_1(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) \\
&\quad - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) t_i^{-\tilde{\lambda}_1}]^{-1} (2 - 2t_i^{-\tilde{\lambda}_1}) - \sum_{i=n1+1}^n [2\tilde{\lambda}_1(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 \\
&\quad + \tilde{\lambda}_{12}) s_i^{-\tilde{\lambda}_1}]^{-2} [-3\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_1 s_i^{-\tilde{\lambda}_1} - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) s_i^{-\tilde{\lambda}_1} \log s_i]^2 \\
&\quad + \sum_{i=n1+1}^n [2\tilde{\lambda}_1(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) s_i^{-\tilde{\lambda}_1}]^{-1} [\tilde{\lambda}_1(2 - (2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) \\
&\quad s_i^{-\tilde{\lambda}_1}) s_i^{-\tilde{\lambda}_1} \log s_i] + \tilde{\lambda}_{12} / 8\tilde{\lambda}_1^3 \left[\sum_{i=1}^{n1} \log(1 - s_i^{-\tilde{\lambda}_1}) + \sum_{i=n1+1}^n \log(1 - t_i^{-\tilde{\lambda}_2}) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^{n1} \log(1 - t_i^{-\tilde{\lambda}_1}) - \sum_{i=n1+1}^n \log(1 - s_i^{-\tilde{\lambda}_2}) \right] - \tilde{\lambda}_{12} / 2\tilde{\lambda}_1^2 \left[\sum_{i=n1+1}^n (1 - t_i^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} \right. \\
&\quad \left. t_i^{-\tilde{\lambda}_1} \log t_i + \sum_{i=n1+1}^n (1 - s_i^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} s_i^{-\tilde{\lambda}_1} \log s_i \right] - (\tilde{\lambda}_{12} / 2\tilde{\lambda}_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left\{ \sum_{l=n1+1}^n [(1-t_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} t_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log t_1]^2 + \sum_{l=n1+1}^n (1-t_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} t_1^{-\tilde{\lambda}_1} (\log t_1)^2 \right\} \\
& + (1+\tilde{\lambda}_{12}/2\tilde{\lambda}_1) \left\{ \sum_{l=n1+1}^n [(1-s_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} s_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log s_1]^2 + \sum_{l=n1+1}^n (1-s_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} \right. \\
& \left. s_1^{-\tilde{\lambda}_1} (\log s_1)^2 \right\} \quad (A2.23)
\end{aligned}$$

$$-\tilde{I}_{21} = -\tilde{I}_{12}' = \left[\begin{array}{c} \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \delta \partial \lambda_1 \\ \partial^2 \log L(\lambda_1, \delta, \lambda_{12}) / \partial \delta \partial \lambda_{12} \end{array} \right] \bigg|_{\delta=0, \lambda_1=\tilde{\lambda}_1, \lambda_{12}=\tilde{\lambda}_{12}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
a = & -n_1/\tilde{\lambda}_1^2 + 2n/\tilde{\lambda}_1^2 - \tilde{\lambda}_{12}/2\tilde{\lambda}_1^3 - \sum_{l=1}^{n1} [2\tilde{\lambda}_1(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 \\
& + \tilde{\lambda}_{12})t_1^{-\tilde{\lambda}_1}]^{-2} [-3\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_{12} + (3\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})t_1^{-\tilde{\lambda}_1}] [4\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12} - (4\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) \\
& t_1^{-\tilde{\lambda}_1} + \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})t_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log t_1] + \sum_{l=1}^{n1} [2\tilde{\lambda}_1(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) \\
& t_1^{-\tilde{\lambda}_1}]^{-1} [-3 + 3t_1^{-\tilde{\lambda}_1} - (3\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})(t_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log t_1)] \\
& - \sum_{l=n1+1}^n [2\tilde{\lambda}_1(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})s_1^{-\tilde{\lambda}_1}]^{-2} [-3\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_1 s_1^{-\tilde{\lambda}_1} \\
& - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})s_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log s_1] [4\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12} - (4\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})s_1^{-\tilde{\lambda}_1} + \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) \\
& s_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log s_1] + \sum_{l=n1+1}^n [2\tilde{\lambda}_1(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})s_1^{-\tilde{\lambda}_1}]^{-1} \\
& [-1 + s_1^{-\tilde{\lambda}_1} - (5\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12} - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})s_1^{-\tilde{\lambda}_1})(s_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log s_1)] \\
& - \tilde{\lambda}_{12}/\tilde{\lambda}_1 \left[\sum_{l=n1+1}^n (1-s_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} s_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log s_1 - \sum_{l=n1+1}^n (1-t_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} t_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log t_1 \right] \\
& + \tilde{\lambda}_{12}/4\tilde{\lambda}_1^2 \left[\sum_{l=1}^{n1} (1-s_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} s_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log s_1 - \sum_{l=1}^{n1} (1-t_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} t_1^{-\tilde{\lambda}_1} \right. \\
& \left. \log t_1 - \sum_{l=n1+1}^n (1-s_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} s_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log s_1 + \sum_{l=n1+1}^n (1-t_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} t_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log t_1 \right] \\
& + \tilde{\lambda}_{12}/2\tilde{\lambda}_1 \left[\sum_{l=n1+1}^n (1-t_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} t_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log t_1]^2 + \sum_{l=n1+1}^n (1-t_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& t_1^{-\tilde{\lambda}_1} (\log t_1)^2] - (1 + \tilde{\lambda}_{12}/2\tilde{\lambda}_1) \left[\sum_{l=n1+1}^n [(1 - s_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} s_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log s_1]^2 \right. \\
& \left. + \sum_{l=n1+1}^n (1 - s_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} s_1^{-\tilde{\lambda}_1} (\log s_1)^2 \right] \quad (A2.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b = & n/(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})^2 + (1/4\tilde{\lambda}_1^2) \left[\sum_{l=1}^{n1} (1 - s_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} s_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log s_1 \right. \\
& - \sum_{l=1}^{n1} (1 - t_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} t_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log t_1 - \sum_{l=n1+1}^n (1 - s_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} s_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log s_1 \\
& + \sum_{l=n1+1}^n (1 - t_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} t_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log t_1 \left. \right] (1/2\tilde{\lambda}_1) \left[\sum_{l=n1+1}^n (1 - s_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} s_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log s_1 \right. \\
& - \sum_{l=n1+1}^n (1 - t_1^{-\tilde{\lambda}_1})^{-1} t_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log t_1 \left. \right] - \sum_{l=1}^{n1} [2\tilde{\lambda}_1(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) \\
& t_1^{-\tilde{\lambda}_1}]^{-2} [-3\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_{12} + (3\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})t_1^{-\tilde{\lambda}_1}] [2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_1 t_1^{-\tilde{\lambda}_1}] + \sum_{l=1}^{n1} [2\tilde{\lambda}_1 \\
& (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})t_1^{-\tilde{\lambda}_1}]^{-1} (-1 + t_1^{-\tilde{\lambda}_1}) - \sum_{l=n1+1}^n [2\tilde{\lambda}_1 \\
& (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})s_1^{-\tilde{\lambda}_1}]^{-2} [-3\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_1 s_1^{-\tilde{\lambda}_1} - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12})s_1^{-\tilde{\lambda}_1} \\
& \log s_1] (2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_1 t_1^{-\tilde{\lambda}_1}) + \sum_{l=n1+1}^n \left\{ [2\tilde{\lambda}_1(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) - \tilde{\lambda}_1(2\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_{12}) \right. \\
& \left. s_1^{-\tilde{\lambda}_1}]^{-1} (-1 + \tilde{\lambda}_1 s_1^{-\tilde{\lambda}_1} \log s_1) \right\} \quad (A2.25)
\end{aligned}$$

com $\log L(\delta, \lambda_1, \lambda_{12}) = \log L(\lambda_1, \lambda_{12}, \delta)$ dada por (4.12), e $I_{22} = I(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})$ (4.20), a matriz de informação com as derivadas segundas dadas por (A2.19), (A2.20) e (A2.21) avaliadas no ponto $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{12})$.

APÊNDICE 3

CONJUNTOS DE DADOS UTILIZADOS

LISTA DE TABELAS

TABELA A3.1 -CONJUNTO DE DADOS UTILIZADO NO EXEMPLO 3.1.
DO CAPÍTULO III.

TABELA A3.2 -CONJUNTO DE DADOS UTILIZADO NO EXEMPLO 3.2 DO
CAPÍTULO III E NO EXEMPLO 5.1 DO CAPÍTULO V.

TABELA A3.3 -CONJUNTO DE DADOS UTILIZADO NO EXEMPLO 3.3.
DO CAPÍTULO III.

TABELA A3.4 -CONJUNTO DE DADOS UTILIZADO NO EXEMPLO 4.1.
DO CAPÍTULO IV.

TABELA A3.5 -CONJUNTO DE DADOS UTILIZADO NO EXEMPLO 4.2 DO
CAPÍTULO IV E NO EXEMPLO 5.2 DO CAPÍTULO V.

Tabela A3.1 Conjunto de Dados do Exemplo 3.1.

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	15,2376	3,4542	51	23,5529	8,5264
2	1,9614	0,1226	52	12,2631	4,8486
3	20,7371	1,9848	53	13,8320	11,8040
4	2,0364	0,1759	54	3,2791	3,1858
5	3,1021	1,2690	55	2,6614	2,2868
6	20,2586	0,0091	56	18,0267	0,6141
7	10,9755	1,6197	57	13,1443	4,6774
8	14,5516	1,8922	58	1,4349	4,5217
9	6,3402	18,9204	59	0,2778	6,4162
10	14,1738	1,5162	60	12,0527	6,1880
11	13,9227	2,3463	61	12,8282	3,4323
12	2,0912	4,1387	62	13,0358	1,3936
13	5,3426	0,9631	63	27,7787	1,7608
14	8,4319	13,9610	64	7,9368	12,8159
15	11,9277	7,5605	65	19,6146	19,8084
16	6,5162	16,3649	66	0,6851	0,4768
17	10,4742	3,5425	67	3,4540	5,6871
18	21,5935	0,6804	68	32,0779	0,3629
19	27,1015	2,3386	69	0,7838	4,3999
20	8,9182	2,4439	70	9,4280	7,3223
21	2,3404	5,3834	71	9,2269	8,8174
22	13,1149	1,9138	72	56,2909	3,4099
23	15,9398	10,8132	73	0,6148	2,5501
24	15,2431	5,2407	74	4,7156	4,7941
25	1,2149	1,5071	75	6,1451	13,3019
26	4,2330	1,0637	76	11,5488	0,8760
27	9,8530	6,2604	77	14,3584	1,8255
28	7,7186	24,0939	78	17,9129	0,4274
29	3,3572	1,3553	79	11,3671	5,8955
30	7,1557	8,9901	80	7,1457	15,4913
31	14,1544	12,5104	81	7,0449	1,0479
32	10,6101	0,3553	82	2,0870	13,6064
33	22,8700	17,9288	83	2,7489	0,0221
34	14,5359	2,2595	84	7,5001	0,3360
35	5,2125	5,6399	85	3,7381	0,2589
36	15,1121	3,4456	86	0,7879	5,4420
37	4,4963	2,8244	87	8,0757	1,1376
38	3,0633	6,8736	88	2,9668	11,0093
39	30,7273	1,0444	89	2,9921	10,3355
40	1,9099	13,0439	90	13,1109	4,6032
41	13,9567	9,0646	91	1,3657	14,0202
42	8,5607	0,7474	92	3,5158	4,0910
43	4,0168	1,4738	93	1,2071	1,2883
44	6,0296	3,8023	94	0,0544	3,3387
45	1,5225	3,2387	95	14,8411	13,1720
46	4,5506	4,0266	96	21,0170	3,5264
47	1,1077	1,7035	97	12,7713	4,1708
48	20,2415	0,1332	98	5,1787	10,1949
49	4,0081	3,7522	99	0,4107	8,8922
50	2,9382	3,3468	100	5,2356	0,2411

Tabela A3.2. Conjunto de Dados do Exemplo 3.2 e 5.1.

i	x_i	y_i	z_i	i	x_i	y_i	z_i
1	1,6451	1,1571	1	51	1,1158	0,2935	1
2	0,0287	2,1935	-1	52	0,4281	2,0446	1
3	0,1984	0,0589	1	53	1,3327	1,7363	-1
4	0,2976	2,2430	1	54	3,0816	1,1799	1
5	1,1196	0,5426	1	55	0,2447	2,9554	-1
6	0,4437	0,8322	-1	56	0,0052	0,7914	-1
7	1,4026	0,5079	1	57	0,3593	0,0867	1
8	0,5053	0,3502	1	58	1,2761	1,3241	-1
9	0,5582	0,3226	1	59	0,3478	2,4470	-1
10	2,9870	1,9977	1	60	2,3724	2,1959	1
11	0,7640	3,7291	-1	61	0,1601	3,0111	-1
12	0,8307	2,5816	-1	62	0,7892	0,2022	1
13	2,6397	0,7834	1	63	0,0064	0,7053	-1
14	0,5324	0,3920	1	64	3,0886	3,3598	-1
15	1,3363	0,6411	1	65	1,4748	1,3971	1
16	2,5355	2,5465	-1	66	1,8691	0,0688	1
17	0,1424	0,3702	-1	67	0,4941	0,0808	1
18	0,2494	1,1298	-1	68	0,3647	1,1556	1
19	0,9049	5,4086	-1	69	2,3159	1,2085	1
20	0,3178	0,8713	-1	70	1,2325	1,6886	1
21	1,6595	3,2503	-1	71	1,5436	2,2045	-1
22	0,0833	2,4383	-1	72	0,4029	0,6047	-1
23	1,4914	0,7569	1	73	1,8976	0,7358	1
24	1,3225	2,0821	-1	74	0,7919	1,1808	1
25	0,5272	0,7905	-1	75	0,4770	0,4790	-1
26	1,6117	3,8332	-1	76	0,8749	1,8099	-1
27	0,2239	2,8293	-1	77	0,2049	0,1029	1
28	1,9701	1,4338	1	78	1,5483	2,0607	-1
29	0,4709	0,4852	-1	79	1,5363	1,0023	1
30	0,7486	0,2550	1	80	0,6027	0,5695	1
31	0,5335	1,0459	1	81	0,4641	1,0470	1
32	0,3994	2,2791	1	82	3,3692	1,4242	1
33	0,4699	0,9645	-1	83	0,0955	2,4404	-1
34	0,7848	2,7708	-1	84	0,5786	0,6173	-1
35	1,4377	1,5549	-1	85	1,9140	0,9549	1
36	2,2695	0,5492	1	86	0,8917	2,0856	-1
37	0,3120	0,5974	-1	87	1,5401	0,0733	1
38	0,1440	1,4371	-1	88	1,1894	0,0521	1
39	0,1682	1,0144	-1	89	1,6404	0,7323	1
40	1,5045	1,8276	-1	90	1,6755	1,2180	1
41	1,4244	1,1497	1	91	0,6939	1,7210	-1
42	0,3268	3,0455	-1	92	0,3891	3,0184	-1
43	0,9305	3,0438	-1	93	0,9928	1,6428	-1
44	3,6273	0,1148	1	94	0,3885	0,4038	-1
45	0,4050	1,3477	-1	95	0,2138	0,1689	1
46	0,0851	0,1141	-1	96	0,2747	0,5297	-1
47	1,1054	1,9522	-1	97	1,8260	0,7120	1
48	2,0675	6,6935	-1	98	0,2672	0,2236	1
49	0,0721	0,5636	-1	99	0,0872	1,3810	1
50	1,1028	1,0292	1	100	1,0227	0,5378	1

Tabela A3.3. Conjunto de Dados do Exemplo 3.3.

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	0,9697	2,0812	51	1,6498	1,6956
2	2,7836	5,4238	52	0,3715	0,4892
3	1,5860	2,8665	53	0,7055	7,5888
4	1,8243	2,3403	54	0,6256	2,5136
5	0,7125	1,6021	55	0,2017	0,8831
6	2,4817	2,3300	56	4,2380	2,8266
7	1,4232	0,6062	57	1,6597	1,7889
8	0,6855	2,1272	58	2,3501	2,8855
9	0,3052	1,5825	59	0,2878	0,6721
10	1,7862	3,6070	60	0,2087	0,5406
11	3,6657	4,7052	61	2,0439	11,2415
12	0,3399	1,0748	62	0,4203	3,8016
13	0,5885	0,9865	63	0,2156	0,8370
14	1,6879	1,2034	64	0,2605	1,6790
15	3,2708	1,2462	65	0,1063	0,6364
16	0,0115	0,6429	66	1,2017	4,1699
17	1,4957	2,0679	67	0,9722	2,5393
18	1,1516	1,3444	68	0,6011	0,4382
19	1,3345	2,3467	69	0,0430	1,8195
20	2,8307	3,2029	70	3,1688	2,4937
21	1,9401	5,7307	71	0,5716	1,0982
22	2,8719	7,7077	72	1,3158	2,2525
23	1,8319	2,4848	73	0,0796	0,2662
24	1,6515	9,1524	74	1,0150	5,5860
25	0,0546	0,0070	75	1,3862	2,1351
26	1,5084	0,1604	76	0,0257	3,6289
27	1,5498	1,7498	77	0,9633	0,1206
28	0,2356	0,7380	78	0,7505	3,0119
29	1,6538	3,0458	79	0,4182	1,3910
30	3,4469	3,7126	80	2,2473	0,5442
31	1,2326	4,6188	81	0,1137	2,3088
32	0,0832	2,4495	82	1,0003	6,6657
33	0,2794	1,9955	83	0,3429	0,8961
34	1,5363	2,7866	84	5,5712	3,6207
35	0,9755	4,0328	85	1,8188	1,1477
36	0,0435	3,5407	86	0,9206	1,6373
37	1,7862	0,3306	87	3,6569	7,6110
38	0,5228	2,5518	88	2,5892	9,0571
39	0,2480	2,3806	89	0,8541	0,7717
40	4,9892	5,7181	90	1,4357	0,7880
41	3,4459	2,1756	91	0,0360	2,9108
42	0,1102	2,4828	92	0,1277	0,2554
43	7,3842	1,0254	93	0,0966	3,6089
44	1,8744	2,4661	94	0,7335	2,7524
45	1,4760	2,2898	95	1,1137	1,1831
46	1,0540	3,0375	96	0,1170	4,9816
47	4,4755	5,8995	97	0,4563	4,6435
48	0,4477	6,0926	98	0,4293	0,3810
49	3,0101	0,3860	99	3,8689	4,4696
50	1,6150	2,0747	100	2,4582	0,1342

Tabela A3.4. Conjunto de Dados do Exemplo 4.1.

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	2,1162	0,9322	51	0,3018	1,3730
2	0,5188	0,1640	52	2,4423	0,8811
3	0,4249	0,7461	53	0,4357	0,0455
4	5,8794	0,1967	54	0,0455	0,2335
5	0,1475	2,3532	55	0,5496	0,2204
6	1,9041	0,0482	56	0,1347	0,0584
7	1,1702	0,2666	57	1,2157	1,3219
8	1,8702	0,3140	58	0,0571	2,3324
9	0,8235	0,7720	59	2,7413	3,1002
10	0,8128	0,1974	60	0,1054	0,6849
11	0,0277	0,1361	61	0,4832	0,1647
12	1,1645	0,4241	62	0,6358	2,4324
13	0,4587	1,3873	63	0,0207	0,2260
14	0,5047	0,2830	64	0,0845	0,5050
15	0,3437	0,1806	65	0,7694	0,1207
16	0,9399	0,2257	66	1,3407	2,3799
17	2,0460	0,1152	67	0,0981	0,0460
18	0,0502	0,1563	68	1,0962	0,1176
19	1,8511	0,0445	69	1,2682	0,9944
20	2,1298	0,4549	70	0,2687	1,2654
21	2,0278	0,3280	71	1,2223	1,5090
22	0,5024	0,7872	72	4,3572	1,0727
23	0,3745	0,4321	73	0,5588	0,4736
24	0,0076	0,0676	74	7,9718	1,0390
25	2,7009	1,2508	75	0,3938	0,2129
26	1,0537	1,2971	76	0,3203	0,1960
27	2,2558	0,5339	77	0,5705	2,7247
28	0,7402	0,4191	78	0,7212	0,3508
29	0,4127	0,8369	79	0,4379	1,6018
30	0,0041	1,1832	80	2,2557	0,1839
31	0,1360	2,3460	81	0,6085	0,5436
32	0,7058	0,7976	82	0,3523	2,9064
33	0,6755	0,5201	83	4,3022	1,4341
34	0,4112	0,3152	84	0,6036	1,6173
35	0,4790	1,5577	85	0,1795	0,0915
36	1,6032	0,4901	86	1,6947	0,4858
37	0,1091	0,4433	87	0,5282	1,7192
38	0,1515	0,2174	88	0,2145	0,2338
39	0,1334	0,3790	89	0,2162	0,3477
40	1,8281	1,0638	90	0,3176	0,9800
41	0,9580	1,5340	91	0,7402	0,1285
42	1,5230	0,0700	92	0,3764	0,9659
43	0,5795	1,3793	93	2,8197	1,6026
44	0,4944	2,0676	94	1,2042	0,9215
45	1,4481	0,1502	95	0,6961	0,5600
46	0,0989	1,9336	96	3,9413	0,5545
47	2,3854	0,8182	97	1,6989	1,7804
48	1,8646	3,3368	98	1,3892	0,5501
49	2,8823	0,9799	99	0,7017	0,0016
50	0,4460	0,7670	100	0,9360	2,9331

Tabela A3.5. Conjunto de Dados do Exemplo 4.2 e 5.2.

i	x_i	y_i	z_i	i	x_i	y_i	z_i
1	0,1892	0,3916	1	51	3,0548	0,3511	-1
2	1,0705	3,1017	1	52	0,1982	0,5675	1
3	0,0677	0,0779	1	53	1,7755	1,6175	-1
4	0,5440	0,6802	1	54	2,2096	3,0178	1
5	3,6353	2,6280	-1	55	4,3657	1,1309	-1
6	0,1276	0,0947	-1	56	1,2498	2,1330	1
7	0,0881	0,1302	1	57	3,2872	1,2015	-1
8	1,1585	0,1908	1	58	1,6096	3,3570	1
9	0,9001	4,4369	1	59	2,1153	1,0952	-1
10	0,1025	1,0208	-1	60	7,7714	1,5558	-1
11	0,0957	0,2062	1	61	0,3579	3,7556	-1
12	2,0656	6,7173	1	62	0,5253	2,1318	-1
13	1,5282	3,0726	1	63	0,1127	2,7853	1
14	2,2500	4,4772	1	64	1,8678	2,6352	1
15	1,5042	5,5150	1	65	2,7226	1,3209	-1
16	1,4566	1,7123	-1	66	0,2832	0,1041	1
17	0,9013	2,3313	1	67	4,8153	8,8448	1
18	4,5287	0,8452	-1	68	1,9709	0,6746	1
19	0,4223	1,7619	-1	69	0,1506	0,5189	1
20	2,3785	3,9983	1	70	0,8246	0,0644	-1
21	1,0034	1,3510	1	71	7,4290	3,9395	-1
22	0,0517	0,1410	1	72	0,6183	1,9670	1
23	0,0951	4,2325	1	73	0,4380	2,3704	-1
24	1,0463	1,2163	1	74	2,5166	4,3470	1
25	0,0833	0,6000	-1	75	0,1789	1,0525	1
26	2,1011	5,8469	1	76	0,7518	0,7993	1
27	4,4830	2,8249	-1	77	0,6190	0,7206	1
28	0,9620	0,5310	1	78	0,7178	0,1023	-1
29	0,3408	0,7890	1	79	1,8197	12,2247	1
30	0,7774	4,1357	1	80	4,7510	3,8715	-1
31	2,4244	3,2545	1	81	0,7067	1,8695	1
32	1,2341	2,0690	-1	82	1,5996	2,2000	1
33	0,0140	0,0265	1	83	0,2882	2,4120	1
34	1,3519	3,4863	1	84	1,2533	0,9446	-1
35	0,5119	3,2881	1	85	1,9257	3,5414	1
36	3,8943	2,6866	-1	86	0,0995	0,2308	-1
37	0,9255	4,2083	1	87	1,3099	1,0523	1
38	4,6462	5,9072	1	88	3,2463	2,5449	-1
39	1,6099	0,4539	-1	89	0,7145	2,9069	1
40	1,0227	3,1325	1	90	0,7359	4,2121	-1
41	0,0606	0,0975	-1	91	0,2530	0,2749	1
42	1,2235	0,0860	-1	92	0,2774	1,2135	-1
43	1,5929	3,6377	1	93	1,6000	1,9012	1
44	1,3200	4,4049	1	94	2,5045	4,2220	1
45	1,9882	1,5717	1	95	1,6829	0,7372	1
46	0,1343	0,0852	-1	96	0,6104	9,7346	1
47	1,6824	1,1355	-1	97	1,2375	3,3000	1
48	0,4302	1,6643	1	98	6,2657	4,8244	-1
49	0,0404	0,0122	-1	99	0,0591	0,7000	1
50	7,0829	1,6892	-1	100	0,0296	0,0446	1

APÊNDICE 4

PROGRAMAS COMPUTACIONAIS

PROGRAMA 1. - GROSS.PRG

```
/* PROGRAMA ESCRITO NO MODULO "CM" DO SOC */  
/* ESTE PROGRAMA ESTIMA OS PARAMETROS DA DISTRIBUICAO DE BLOCK-BASU */  
/* USANDO A TRANSFORMACAO T=Y/X FEITA POR GROSS E LAM, E FAZ TESTE */  
/* DE INDEPENDENCIA E DE IGUALDADE DE X E Y. */
```

```
AA=LEIA"DADOS";
```

```
/* DADOS = nome_arquivo_soc contendo variaveis X, Y e T */
```

```
PROC INICIA(){
```

```
    P1=CATA(&1,3,1,"<="); /* (x,y,t) onde x>y, 0<t<1 */
```

```
    P2=CATA(&1,3,1,">"); /* (x,y,t) onde x<y t>1 */
```

```
    T1=P1[,3];
```

```
    T2=P2[,3];
```

```
    T2E2=T2#(2); /* T2E2 = exp(T2) */
```

```
    N1=NLIN(T1); /* N1 = numero de linhas do vetor T1 */
```

```
    N2=NLIN(T2); /* N2 = numero de linhas do vetor T2 */
```

```
    N=N1+N2;
```

```
}
```

```
PROC GROSS(){
```

```
/* este procedimento estima os parametros ksy e ksy_12 sob o modelo  
irrestrito */
```

```
    ANOTE "ESTIMACAO DE KSY E KSY12 DA DISTRIB. DE GROSS";
```

```
    KSY=&l[1,];
```

```
/* ksy e' o primeiro elemento do vetor de entrada */
```

```
    KSY12=&l[2,];
```

```
/* ksy12 e' o segundo elemento do vetor de entrada */
```

```
    DIF=1;
```

```
    LOG1=0;
```

```
    ITERAC=1;
```

```
    ENQUANTO ((DIF>1.E-5) && (ITERAC<50) && (KSY>0) && (KSY12 >  
    MAX(-(1,KSY))) )
```

```
    {
```

```
        PAR=(KSY,KSY12);
```

```
        KSYE2=KSY^2;
```

```

KSY12E2=KSY12^2;
K=KSY+KSY12;
KE2=K^2;
K1=1+K;
K1E2=K1^2;
A1= 1+KSY12+KSY*T1;
A1E1=A1#(-1);
A1E2=A1#(-2);
A2=1+K*T2;
A2E1=A2#(-1);
A2E2=A2#(-2);
/* o logaritmo da funcao de verossimilhanca e' calculada em logL */
LOGL= N1 * LOG(KSY) + N1 * LOG(1+KSY12) + N2 * LOG(K) + N
      * LOG(K1) -N * LOG(1+KSY) -2 *SOMA(LOG(A1))
      - 2*SOMA(LOG(A2));
D1_KSY= N1/KSY + N2/K + N/K1 - N/(1+KSY) - 2*SOMA(A1E1*!T1)
      - 2*SOMA(A2E1*!T2);
D1_KSY12 = N1/(1+KSY12)+ N2/K +N/K1 -2*SOMA(A1E1) - 2*SOMA
      (A2E1*!T2);
D2_KSY = -N1/KSYE2 - N2/KE2 -N/K1E2 + N/(1+KSY)^2 + 2*SOMA
      (A1E2*!T1#(2))+ 2*SOMA(A2E2*!T2E2);
D2_KSY12= -N1/(1+KSY12)^2 - N2/KE2 - N/K1E2 + 2*SOMA(A1E2)
      + 2* SOMA(A2E2*!T2E2);
D2_KKSY12= -N2/KE2 - N/K1E2 + 2*SOMA(A1E2*!T1) + 2*SOMA
      (A2E2*!T2E2);
/* DER1 e' o vetor de escores e DER2 e' a matriz da informacao de
Fisher observada com o sinal negativo */
DER1={D1_KSY,D1_KSY12};
DER2={D2_KSY D2_KKSY12,
      D2_KKSY12 D2_KSY12};
/* se o valor de logL e' maior do que o valor de logL da iteracao
anterior, novos valores dos parametros sao calculados, caso contrario
a direcao da convergencia sera' mantida */
SE ( (ITERAC==1) :: (LOG1<=LOGL)){
  PAR_NOVO = PAR -INV(DER2)* DER1;
  DIF=ABS(LOG1-LOGL);
  LOG1=LOGL;
  IMPRIME {(PAR') DIF LOGL} $ ("KSY,KSY12,DIF,LOG");
}
CC
{ PAR_NOVO=PAR+DER1;
  ANOTE"MUDANDO A DIRECAO DA CONVERGENCIA";
}
KSY=PAR_NOVO[1,];
KSY12=PAR_NOVO[2,];
ITERAC=ITERAC+1;
}
LOGS=LOGL;
DP=SQRT(DIAG(INV(-DER2)))*(1,1); /* calculo de desvio padrao */
IMPRIME DP;
}

```

```

PROC GROSS12(){
/* este procedimento estima o parametro ksy sob a hipotese de ksy_12
igual a zero, isto e', X e Y sao indenpendentes */

```



```

ANOTE" ESTIMACAO DE KSY SOB H0:KSY12=0 ";
T={T1,T2};
N=NLIN(T);
KSY=N/SOMA(T); /* chute inicial */
DIF=1;
LOG1=0;
ITERAC=1;
ENQUANTO ((DIF>0.000005) &&(ITERAC<50) && (KSY>0) )
{
    A=1+KSY*T;
    AE1=A#(-1);
    AE2=A#(-2);
    LOGL=N*LOG(KSY) - 2*SOMA(LOG(A));
    DER1= N/KSY - 2*SOMA(AE1*T);
    DER2 = -N/KSY^2 + 2*SOMA(AE2*T#(2));
    KSY_NOVO = KSY - INV(DER2)*DER1;
    DIF=ABS(LOG1-LOGL);
    LOG1=LOGL;
    IMPRIME {KSY DIF LOGL} $ ("KSY,DIF,LOG");
    KSY=KSY_NOVO;
    ITERAC=ITERAC+1;
}
LOG12=LOGL;
DP=SQRT(INV(-DER2));
IMPRIME DP;
}

PROC GROSSI(){
/* este procedimento estima o parametro ksy_12 sob a hipotese de ksy
igual a um, isto e', X e Y sao identicamente distribuidas */
ANOTE "ESTIMACAO DE KSY12 SOB H0:KSY=1 ";
KSY12=0.8; /* chute inicial */
DIF=1;
LOG1=0;
ITERAC=1;
ENQUANTO ((DIF>0.000005) &&(ITERAC<50) && (KSY12>-1))
{
    K=1+KSY12;
    A1=K+T1;
    A1E1=A1#(-1);
    A1E2=A1#(-2);
    A2=1+K*T2;
    A2E1=A2#(-1);
    A2E2=A2#(-2);
    LOGL= N*LOG(2+KSY12)+N*LOG(1+KSY12) -N*LOG(2)-2*SOMA
        (LOG(A1)) -2*SOMA(LOG(A2));
    DER1= N/(2+KSY12) + N/K -2*SOMA(A1E1) -2*SOMA(A2E1*T2);
/* DER1 é a derivada primeira do logL com relacao ao parametro ksy12
*/
    DER2 = -N/(2+KSY12)^2 - N/K^2 + 2*SOMA(A1E2)
        + 2*SOMA(A2E2*T2#(2));
/* DER2 é a derivada segunda */
    SE ((ITERAC==1)::(LOG1<=LOGL))
    {
        KSY12_NOVO = KSY12 - INV(DER2)*DER1;

```

```

        DIF=ABS(LOG1-LOGL);
        LOG1=LOGL;
        IMPRIME {KSY12 DIF LOGL} $ ("KSY12,DIF,LOG");
    }
    CC
    {
        KSY12_NOVO=KSY12+DER1;
        ANOTE "NOVA DIRECAO DA CONVERGENCIA";
        KSY12=KSY12_NOVO;
        ITERAC=ITERAC+1;
    }

    LOG1=logl;
    DP=SQRT(INV(-DER2));
    IMPRIME DP;
}

PROC TESTE(){
/* teste de indenpendencia e de igualdade das distribuicoes de X e Y
usando o teste da Razao de Verossimilhanca */
    ANOTE "TESTE DE INDEPENDENCIA DE X E Y H0:KSY12=0 ";
    DELTA = -2*(LOG12-LOGS);
    CHI = XPROB(DELTA,1);
    IMPRIME {DELTA CHI} $ ("Chi_square, P_value");
    ANOTE "TESTE DE IGUALDADE DE DISTRIBUICAO X E Y H0:KSY=1";
    DELTA = -2*(LOG1-LOGS);
    CHI = XPROB(DELTA,1);
    IMPRIME {DELTA CHI} $ ("Chi_square, P_value");
}

/* PROGRAMA PRINCIPAL */
INICIA(aa);
CHUTE =( 0.2,0.8);/* atribui valores para o chute inicial */
GROSS(CHUTE);
CMD"PAUSE";
GROSS12();
CMD"PAUSE";
GROSS1();
CMD"PAUSE";
TESTE();

```

PROGRMA 2. BLOCK.PRG

```

/* PROGRAMA ESCRITO EM "CM" DO SOC */
/* ESTE PROGRAMA ESTIMA OS PARAMETROS DA DISTRIBUICAO BLOCK-BASU */
/* EM CASOS DE H0:LAMBDA12=0, H0:DELTA=0 E SEM NENHUMA RESTRICAO, */
/* FAZ TESTES DE HIPOTHESES DE INDEPENDENCIA E DE IGUALDADE USANDO */
/* O TESTE DA RAZAO DE VEROSSIMILHANCA E O TESTE DE RAO. */

AA= LEIA "DADOS"; /* DADOS = NOME DO ARQUIVO */

PROC INICIA(){
/* ESTE PROCEDIMENTO CALCULA AS ESTATISTICAS BASICAS DA BIVARIADA */
/* (X,Y). */

```

```

P1=CATA(&1,3,1,">=");      /*P1= (x,y), onde x<y */
P2=CATA(&1,3,1,"<");       /*P2= (x,y), onde x>y */
X1=P1[,1];                  /* x; tais que x<y */
X2=P2[,1];                  /* x; tais que x>y */
Y1=P1[,2];                  /* y; tais que y>x */
Y2=P2[,2];                  /* y; tais que y<x */
N1=NLIN(P1);                /* tamanho de P1 */
N2=NLIN(P2);                /* tamanho de P2 */
N=N1+N2;                    /* numero total do arquivo DADOS */
SX1=SOMA(X1);               /* soma de X1 */
SX2=SOMA(X2);               /* soma de X2 */
SY1=SOMA(Y1);               /* soma de Y1 */
SY2=SOMA(Y2);               /* soma de Y2 */
SX = SX1+SX2;               /* soma de X */
SY = SY1+SY2;               /* soma de Y */
}

PROC PARAM(){
/* ESTE PROCEDIMENTO ATRIBUI OS VALORES DOS PARAMETROS E VERIFICA */
/* SE AS RESTRICOES INICIAIS SAO SATISFEITAS E CALCULAR ALGUMAS */
/* CONSTANTES USADAS EM OUTROS PROCEDIMENTOS */
PP=&1;
/* PP = o vetor dos parametros = (lambda_1, lambda_12, delta) */
I=1;
/* var. aux. para indicar se as restricoes inicias sao satisfeitas */
ENQUANTO (I==1){
L1=PP[1,];                  /* primeiro componente do PP e' lambda_1 */
L12=PP[2,];                 /* segundo componente do PP e' lambda_12 */
D=PP[3,];                   /* terceiro componente do PP e' delta */
L2=L1-D;                    /* lambda_2 = lambda_1 - delta */
L=L1+L2+L12;                /* lambda = lambda_1 + lambda_2 + lambda_12 */
K=L1+L2;
K1=L1+L12;
K2=L2+L12;
IF ((L1>0) && (L2>0) && (K1>0) &&(K2>0)) {I=0;}
/* se lambda_1>0, lambda_2>0, k1>0 e k2>0 entao as restricoes iniciais
dos parametros sao satisfeitas, a variavel I recebe valor 0, termina o
procedimento */
CC { C=C/2;
PP=PAR+C*S;
ANOTE"CONDICOES INICIAIS NAO SATISFEITAS";}
}
/* caso contrario, o tamanho da convergencia diminui pela metade com a
mesma direcao, as condicoes iniciais sao verificadas novamente, ate
que elas sejam satisfeitas */
}

PROC CALCL(){
/* ESTE PROCEDEMENTO CALCULA O VALOR DA LOGARITMO DA FUNCAO DE VE- */
/* ROSSIMILHANCA logL. */
LOGL=N*LOG(L/K)+N1*LOG(L1*K2)+N2*LOG(L2*K1) -L1*(SX+SY) +D*(SY)
-L12*(SY1+SY2);
}

PROC DERIV1(){

```

```

/* ESTE PROCEDIMENTO CALCULA AS DERIVADAS PRIMEIRAS COM RELACAO AOS */
/* PARAMETROS lambda_1, lambda_12 E delta. */
D1_L1 = 2*N/L - 2*N/K + N1/L1 + N1/K2 + N2/L2 + N2/K1 -SX - SY;
D1_L12 = N/L + N1/K2 + N2/K1 - SY1 - SX2;
D1_D = -N/L + N/K - N1/K2 - N2/L2 + SY;
}

PROC DERIV2(){
/* ESTE PROCEDIMENTO CALCULA AS DERIVADAS SEGUNDAS COM RELACAO AOS */
/* PARAMETROS PARA CONSTITUIR A MATRIZ DE INFORMACAO DE FISHER OB- */
/* SERVADA. */
D2_L1 = -4*N/L^2 + 4*N/K^2 - N1/L1^2 - N1/K2^2 -N2/L2^2 -N2/K1^2;
D2_L12 = -N/L^2 - N1/K2^2 - N2/K1^2;
D2_D = -N/L^2 + N/K^2 - N1/K2^2 - N2/L2^2;
D2_L1L12 = -2*N/L^2 - N1/K2^2 - N2/K1^2;
D2_L1D = 2*N/L^2 - 2*N/K^2 + N1/K2^2 + N2/L2^2;
D2_L12D = N/L^2 + N1/K2^2;
}

PROC DP(){
/* ESTE PROCEDIMENTO CALCULA OS DESVIOS PADROES DOS PARAMETROS */
/* ATRAVES DA MATRIZ DE INFORMACAO DE FISHER OBSERVADA */
UM=CRIAMAT(&1,1,1);
/* UM = var. de dimencao &1x1 de uns */
DESVIO=SQRT(DIAG(INV(-DER2)))*UM;
/* desvio padrao como a raiz quadrada da variancia da estimativa da
matriz de informacao de Fisher */
IMPRIME DESVIO;
}

FUNC TEST(){
/* ESTE FUNCAO CALCULA A PROBABILIDADE P(X>x) ONDE X E' UMA ESTA- */
/* TISTICA COM DISTRIBUICAO QUI_QUADRADO COM PARAMETRO 1. */
SE (&1<0) PROB=9.9999;
/* se x<0, a probabilidade nao pode ser calculada, portanto recebe
valor 9.9999 */
CC PROB=XPROB(&1,1);
/* caso contrario, a funcao retorna o valor da probabilidade tal que
PROB=P(X>&1) */
RETORNAR(PROB);
}

PROC BLOCK(){
/* ESTE PROCEDIMENTO ESTIMA OS PARAMETROS lambda_1, lambda_12 E */
/* delta DO MODELO IRRESTRITO. */
ANOTE"*****";
ANOTE" ESTIMACAO DOS PARAMETROS SOB MODELO IRRESTRITO ";
ANOTE" ";
PAR=&1;
/* inicialmente, o vetor dos parametros e' igual ao vetor do chute
inicial */
PARAM(PAR); /* verifica as restricoes iniciais */
CALCL(); /* calcula o logL */
DERIV1(); /* calcula o vetor de escores */
DER1= {D1_L1 ,D1_L12,D1_D};

```

```

    IMPRIME ((par') logl);
    LOGL1=LOGL;      /* a var. logL_1 recebe valor de logL */
    ITERAC=1;        /* a var. ITERACAO recebe valor 1 */
    EPS=1E-6;        /* a var. de erro epsilon recebe valor 1E(-6) */
    MAXI=MAX(ABS(DER1));
/* a var. MAXI e' o maxima do vetor de escores em valor absoluto */
    MAXIO=MAX((1,MAXI))*EPS;
/* MAXIO e' o valor utilizado para testar a bondade da convergencia */
    ESTAN=0;
/* ESTAN e' a var. usada para verificar se o processo esta' entrando
em 'looping' */
    ENQUANTO ((MAXI>=MAXIO) && (ITERAC<50) && (ESTAN==0)) {
/* enquanto as condicoes acima sao satisfeitas simultaneas, o processo
de convergencia e' feito */
        PAR={L1,L12,D};
        DERIV2();      /* calcula as derivadas segundas */
        DER2= {D2_L1      D2_L1L12      D2_L1D,
                D2_L1L12  D2_L12        D2_L12D,
                D2_L1D    D2_L12D      D2_D };
        S = -INV(DER2)*DER1;
/* a var. S e' a direcao da convergencia */
        DD = S'*DER1;
/* a var. DD verifica se a direcao e' boa (subida), isto e', se DD>0
*/
        SE (DD<=0) S=DER1;
/* se DD<=0, entao a direcao continua sendo da iteracao anterior */
        C=1;
        OK=0;
        ENQUANTO (OK==0){
            PAR_NOVO=PAR+C*S;
/* calcula o vetor dos par. para a proxima iteracao */
            PARAM(PAR_NOVO);
/* atribui os valores dos parametros e verifica as restricoes
iniciais */
            CALCL();
/* calculo o logaritmo da funcao de verossimilhanca usando os novos
parametros */
            IMPRIME ( MAXI (PAR') LOGL) $
            ("MAX(DER1),L1,L12,D,LOG");
            SE (LOGL>LOGL1) {LOGL1=LOGL; OK=1;}
/* se logL novo e' maior do que logL da iteracao anterior, entao
o processo continua */
            CC C=C/2;
            SE (C<1.0E-5) {OK=1; EATAN=1;}
/* caso contrario, o tamanho do passo e' reduzido pela metade, o valor
de logL e' calculado novamente ate ele ficar maior do que logL da
itracao anterior; se o valor de C for menor do que 0.00001, indica que
o processo esta entrando em looping e o vetor dos parametros ja e' a
solucao do processo e a variavel ESTAN recebe valor 1 para para o
processo */
        }
        DERIV1();
/* derivadas primeiras sao calculadas */
        DER1= {D1_L1 ,D1_L12,D1_D};
        MAXI=MAX(ABS(DER1));

```

```

        ITERAC=ITERAC+1;
    }
    LOGS=LOGL;
    ANOTE" ";
    ANOTE" AS ESTIMATIVAS DOS PARAMETROS SAO :";
    IMPRIME ((PAR') LOGL) 16:4 ("LAMBDA1,LAMBDA12,DELTA,logL");
    DP(3);
/* os desvios padroes das estimativas dos parametros sao calculados */
    ANOTE"PROCESSO ITERATIVO TERMINOU POR:";
    SE (ESTAN==1) ANOTE "ESTRANGULAMENTO.";
    CC ANOTE "NORMA DO GRADIENTE SUFICIENTEMENTE PEQUENA.";
    LAMBDA12=PAR[2,];
/* o valor da estimativa de lambda_12 e' guardado para fazer o teste
de WALD */
    DELTA=PAR[3,];
/* o valor da estimativa de delta e' guardado para fazer o teste de
WALD */
    MID=-( D2_D      D2_L1D      D2_L12D,
           D2_L1D      D2_L1      D2_L1L12,
           D2_L12D      D2_L1L12      D2_L12);
    MID=INV(MID)[1,1];
/* MID e' a matriz de informacao de fisher parcial com relacao a delta
calculada no ponto maximo da funcao de verossimilhanca sob o modelo
irrestrito */
    MIL12=-( D2_L12      D2_L1L12      D2_L12D,
            D2_L1L12      D2_L1      D2_L1D,
            D2_L12D      D2_L1D      D2_D);
    MIL12=INV(MIL12)[1,1];
/* MID e' a matriz de informacao de fisher parcial com relacao a
lambda_12 calculada no ponto maximo da funcao de verossimilhanca sob o
modelo irrestrito */
}

PROC BLOCKD(){
    ANOTE"*****";
    ANOTE"          ESTIMACAO DOS PARAMETROS SOB H0:DELTA=0:          ";
    ANOTE"          ";
    L=N/(SX1+SY2);    /* lambda = n/soma(min(x,y) */
    L1=(2*L1-D)/2;
/* lambda_1 = (lambda_1 + lambda_2)/2, onde os valores de lambda_1 e
lambda_2 que aparecem na soma sao as estimativas encontradas usando o
procedimento BLOCK apresentado acima */
    L12=L-2*L1;
/* lambda_12 = lambda - 2*lambda_1 */
    SE (L12<0) L12=0;
/* para evitar lambda_12 inicial nao satisfazer as restricoes iniciais
lambda_12 vai receber zero se for negativo */
    PAR={11,L12,0};
/* PAR = chute inicial */
    PARAM(PAR);
/* atribui valores aos parametros */
    CALCL();
/* calcular logL */
    DERIV1();
    DER1= {D1_L1 ,D1_L12};

```

```

IMPRIME {(PAR') LOGL};
LOGL1=LOGL;
ITERAC=1;
EPS=1E-6;
MAXI=MAX(ABS(DER1));
MAXIO=MAX({1,MAXI})*EPS;
ESTAN=0;
ENQUANTO ((MAXI>=MAXIO) && (ITERAC<50) &&(ESTAN==0)) {
/* o processo iterativo usado aqui e' o mesmo do BLOCK, mudando
apenas o vetor dos parametros {lambda_1, lambda_12, delta}' para
{lambda_1, lambda_12, 0}' */
    PAR={L1,L12,0};
    DERIV2();
    DER2= {D2_L1      D2_L1L12 ,
           D2_L1L12  D2_L12   };
/* a matriz das derivadas segundas e' consequentemente 2x2 */
    MAXI=MAX(ABS(DER1));
    S = -INV(DER2)*DER1;
    DD = S*S*DER1;
    SE (DD<0) S=DER1;
    S={S,0};
    C=1;
    OK=0;
    ENQUANTO (OK==0){
        PAR_NOVO=PAR+C*S;
        PARAM(PAR_NOVO);
        CALCL();
        IMPRIME { MAXI L1 L12 LOGL} $
        ("MAX(DER1),L1,L12,LOG");
        SE (LOGL>=LOGL1) {LOGL1=LOGL; OK=1;}
        CC C=C/2;
        SE (C<1.E-5) {OK=1; ESTAN=1;}
    }
    DERIV1();
    DER1= {D1_L1 ,D1_L12};
    MAXI=MAX(ABS(DER1));
    ITERAC=ITERAC+1;
}
LOGD=LOGL;
ANOTE"AS ESTIMATIVAS DOS PARAMETROS SAO :";
IMPRIME {L1 L12 LOGL} 16:4 ("LAMBDA1,LAMBDA12,logL");
ANOTE" ";
DP(2);
ANOTE"PROCESSO ITERATIVO TERMINOU POR:";
SE (ESTAN==1) ANOTE "ESTRANGULAMENTO.";
CC ANOTE "NORMA DO GRADIENTE SUFICIENTEMENTE PEQUENA.";
I11=-D2_D;
I12=-{D2_L1D D2_L12D};
I21=I12';
I22=-DER2;
I= INV(I11-I12*INV(I22)*I21);
/* a matriz de informacao de Fisher parcial com relacao a delta,
I(delta), e' calculada no ponto de maxima da funcao de verossimilhanca
sob o modelo restrito a delta, isto e', delta=0 */
RAO=D1_D#(2)*I;

```

```

/* a estatística de Rao é calculada como  $(U(\delta)^2) \cdot I(\delta)$  */
RAOD={RAO TEST(RAO)};
/* o vetor Raod recebe o valor da estatística de Rao e o valor da
probabilidade  $P(X > \text{Raod})$  onde X é distribuição qui-quadrado com
parâmetros igual a um */
WALD= (DELTA)#2/MID;
/* a estatística de Wald é calculada como  $(\delta - 0)^2 / \text{MID}$ , onde MID
é a matriz de informação de Fisher parcial com relação a  $\delta$ 
calculada no ponto de máxima da função de verossimilhança sob o modelo
irrestrito */
WALDD={WALD TEST(WALD)};
/* o vetor Waldd recebe o valor da estatística de Wald e a
probabilidade  $P(X > \text{Waldd})$ , onde X é distribuição qui-quadrado com
parâmetro igual a um */
}

PROC BLOCKL12()
/* ESTE PROCEDIMENTO CALCULA AS ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS  $\lambda_1$  */
/* E  $\delta$  SOB A HIPÓTESE NULA  $H_0: \lambda_2 = 0$  */
ANOTE"*****";
ANOTE" ESTIMACAO SOB H0:L12=0";
ANOTE" ";
L1=N/SX; /*  $\lambda_1 = n / \text{soma}(X)$  */
L2=N/SY; /*  $\lambda_2 = n / \text{soma}(Y)$  */
LOGL=N*LOG(L1) + N*LOG(L2) - L1*SX - L2*SY;
/* a função logL é calculada no ponto de máxima da função de
verossimilhança sob  $H_0$ . */
D=L1-L2; /*  $\delta = \lambda_1 - \lambda_2$  */
IMPRIME {L1 D LOGL} 16:4 ("LAMBDA1,DELTA,LOGL");
LOGL12=LOGL;
PARAM({L1,0,D});
DERIV1();
/* o vetor de escores é calculado no ponto máximo */
DERIV2();
/* as derivadas segundas são calculadas */
DER2= {D2_L1 D2_L1D,
D2_L1D D2_D};
DP(2);
/* os desvios padrões das estimativas são calculados */
I11= -D2_L12;
I12= -(D2_L1L12 D2_L12D);
I21=I12';
I22=-DER2;
I=INV(I11- I12*INV(I22)*I21);
/* a estimativa da matriz de informação de Fisher parcial com relação
a  $\lambda_2$  é calculada no ponto de máxima sob o modelo restrito a
 $\lambda_2$ , isto é,  $\lambda_2 = 0$  */
RAO=(D1_L12#2)*I;
/* a estatística de Rao é calculada */
RAOL12={RAO TEST(RAO)};
WALD=(LAMBDA12)#2/MIL12;
/* a estatística de Wald é calculada */
WALDL12={WALD TEST(WALD)};
}

```



```

PROC TESTE1(){
  ANOTE"*****";
  ANOTE"+++++++ TESTE DA RAZAO DE VEROSSIMILHANCA ++++++";
  ANOTE" ";
  ANOTE"TESTE DE INDEPENDENCIA DE X E Y (H0:LAMBDA12=0) : ";
  G=-2*(LOGL12-LOGS);
  P=XPROB(G,1);
  IMPRIME {G P} $("-2logG,P_value");
  ANOTE" ";
  ANOTE"TESTE DE IGUALDADE DAS DISTRIBUICOES X E Y (H0:DELTA=0):";
  G=-2*(LOGD-LOGS);
  P=XPROB(G,1);
  IMPRIME {G P} $ ("-2logG,P_value");
}

PROC TESTE2(){
  ANOTE"*****";
  ANOTE"+++++++ TESTE DE RAO (SCORE) ++++++";
  ANOTE" ";
  ANOTE"TESTE DE INDEPENDENCIA DE X E Y (H0:LAMBDA12=0) :";
  IMPRIME RAOL12 10:4 ("R,P_value");
  ANOTE" ";
  ANOTE"TESTE DE IGUALDADE DAS DISTRIBUICOES X E Y (H0:DELTA=0): ";
  IMPRIME RAOD 10:4 ("R,P_value");
}

PROC TESTE3(){
  ANOTE"*****";
  ANOTE"+++++++ TESTE DE WALD ++++++";
  ANOTE" ";
  ANOTE"TESTE DE INDEPENDENCIA DE X E Y (H0:LAMBDA12=0) :";
  IMPRIME WALDL12 10:4 ("W,P_value");
  ANOTE" ";
  ANOTE"TESTE DE IGUALDADE DAS DISTRIBUICOES X E Y (H0:DELTA=0): ";
  IMPRIME WALDD 10:4 ("W,P_value");
}

/* PROGRAMA PRINCIPAL */
INICIA(AA);
CHUTE={0.6,0.4,0.2}; /* chute inicial */
BLOCK(CHUTE);CMD"PAUSE";
BLOCKD();CMD"PAUSE";
BLOCKL12();CMD"PAUSE";
TESTE1();CMD"PAUSE";
TESTE2();CMD"PAUSE";
TESTE3();

```

PROGRAMA 3. SARKAR.PRG

```

/* PROGROMA ESCRITO EM "CM" DO SOC */
/* ESTE PROGRAMA ESTIMA OS PARAMETROS DA DISTRIBUICAO DE SARKAR EM CASOS
DE : LAMBDA12=0, DELTA=0 E SEM NENHUMA RESTRICAO. E FAZ TESTES DE HI-
POTHESES DE INDEPENDENCIA E DE IGUALDADE USANDO O TESTE DA RAZAO DE

```

VEROSSIMILHANCA E O TESTES DE RAO */

AA=LEIA"DADOS"; /* DADOS = NOME_ARQUIVO */

PROC INICIA(){
/* ESTE PROCEDIMENTO IDENTIFICA OS VETORES X E T, E REALIZA ALGUNS
CALCULOS INICIAIS */

 P1=CATA(&1,3,1,">=");
 P2=CATA(&1,3,1,"<");
 N1=NLIN(P1);
 N2=NLIN(P2);
 N=N1+N2;
 X1=P1[,1];
 X2=P2[,1];
 Y1=P1[,2];
 Y2=P2[,2];
 SX1=SOMA(X1); /* SX1 = soma de X1 */
 SX2=SOMA(X2); /* SX2 = soma de X2 */
 SY1=SOMA(Y1); /* SY1 = soma de Y1 */
 SY2=SOMA(Y2); /* SY2 = soma de Y2 */
 SX=SX1+SX2;
 SY=SY1+SY2;

}

PROC PARAM(){
/* ESTE PROCEDIMENTO ATRIBUI OS VALORES DOS PARAMETROS E VERIFICA */
/* SE AS RESTRICOES INICIAIS SAO SATISFEITAS E CALCULAR ALGUMAS */
/* CONSTANTES USADAS EM OUTROS PROCEDIMENTOS */

 PP=&1;
 I=1;
 ENQUANTO (I==1){
 L1=PP[1,];
 L12=PP[2,];
 D=PP[3,];
 L2=L1-D;
 L=L1+L2+L12;
 K=L1+L2;
 K2=K^2;
 K3=K^3;
 SE ((L1>0) && (L2>0) && (L12>=max(-{l1,l2})))) I=0;
 CC { C=C/2;
 PP=PAR+C*S;}

 }
}

PROC CALC(){
/* COM OS VALORES DE L1, L2 E L12, ALGUMAS EXPRESSOES SAO CALCULADAS
PARA SER UTILIZADAS POSTERIORMENTE */

 SE1=EXP(-L1*X1);
 SE2=EXP(-L2*X2);
 TE1=EXP(-L1*Y1);
 TE2=EXP(-L2*Y2);
 SL1=LOG(1-SE1);
 SL2=LOG(1-SE2);
 TL1=LOG(1-TE1);

```

TL2=LOG(1-TE2);
SSL1=SOMA(SL1);
SSL2=SOMA(SL2);
STL1=SOMA(TL1);
STL2=SOMA(TL2);
S1=(1-SE1)#(-1);
T1=(1-TE1)#(-1);
S2=(1-SE2)#(-1);
T2=(1-TE2)#(-1);
W=SSL1+STL2-STL1-SSL2;
CT1=T1*!TE1*!Y1;
CS1=S1*!SE1*!X1;
CT2=T2*!TE2*!Y2;
CS2=S2*!SE2*!X2;
SCT1=SOMA(CT1);
SCT2=SOMA(CT2);
SCS1=SOMA(CS1);
SCS2=SOMA(CS2);
A=K*(L2+L12) - L2*L*TE1; AD=-(L2+L12)-K+(L+L2)*TE1;
B=K*(L1+L12) - L1*L*SE2; BD=-(L1+L12)+L1*SE2-L1*L*SE2*!X2;
AL12=K-L2*TE1; BL12=K-L1*SE2;
AL1=2*(L2+L12)+K-(L+2*L2-L2*L*Y1)*!TE1;
BL1=2*(L1+L12)+K-(L+2*L1-L1*L*X2)*!SE2;
AE1=A#(-1);AE2=A#(-2);BE1=B#(-1);BE2=B#(-2);
}

PROC CALCL(){
/* CALCULO DE logL */
logL = N1*LOG(L1) + N2*LOG(L2) + N*LOG(L) - 2*N*LOG(K)
      - L1*(SX+SY) + D*SY - L12*(SY1+X2)
      + SOMA(LOG(A)) + SOMA(LOG(B)) + (L12/K)*(SSL1+STL2)
      - (1+L12/K)*(STL1+SSL2)-SX-SY;
}

PROC DERIV1(){
/* ESTE PROCEDIMENTO CALCULA O VETOR ESCOR */
D1_L1 = N1/L1+N2/L2+2*N/L - 4*N/K - SX-SY+SOMA(AE1*!AL1)
      + SOMA(BE1*!BL1) - 2*L12*W/K2 + L12*(SCS1+SCT2)/K
      - (1+L12/K)*(SCT1+SCS2);
D1_L12 = N/L + 1/K*W - SY1-SX2 + SOMA(AE1*!AL12) + SOMA(BE1*!BL12);
D1_D = -N2/L2 - N/L + 2*N/K + SY + SOMA(AE1*!AD) + SOMA(BE1*!BD)
      + L12*W/K2 - L12*SCT2/K + (1+L12/K)*SCS2;
}

PROC DERIV2(){
/* ESTE PROCEDIMENTO CALCULA A MATRIZ DE VARIANCIA E COVARIANCIA
ESTIMADA */
D2_L1 = -N1/L1^2 - N2/L2^2 - 4*N/L^2 + 8*N/K2
      + SOMA(-AE2*!AL1#(2)+AE1*!(4-4*TE1+(2*L+4*L2-L2*L*Y1)*!TE1*!Y1))
      + SOMA(-BE2*!BL1#(2)+BE1*!(4-4*SE2+(2*L+4*L1-L1*L*X2)*!SE2*!X2))
      + 8*L12*W/K3 - 4*L12*(SCS1+SCT2-SCT1-SCS2)/K2
      - (L12/K)*(SOMA(CS1#(2)+CS1*!X1)+SOMA(CT2#(2)+CT2*!Y2))
      + (1+L12/K)*(SOMA(CT1#(2)+CT1*!Y1)+SOMA(CS2#(2)+CS2*!X2));
D2_L12 = -N/L^2 + SOMA(-AE2*!AL12#(2)) +SOMA(-BE2*!BL12#(2));
D2_D = -N2/L2^2 - N/L^2 + 2*N/K2 + SOMA(-AE2*!AD#(2)+AE1*!(2-2*TE1))

```

```

      + SOMA(-BE2*!BD#(2)+BE1*!(L1*SE2*!X2*!(2-L*X2)))
      + 2*L12*W/K3 - 2*L12*(SCT2-SCS2)/K2 - (L12/K)*(SOMA(CT2#(2)
      +CT2*!Y2))+ (1+L12/K)*(SOMA(CS2#(2)+CS2*!X2));
D2_L1L12 = - 2*N/L^2 - (2/K^2)*W + 1/K*(SCS1-SCT1+SCT2 - SCS2)
      + SOMA(-AE2*!AL1*!AL12 + AE1*!(2+(L2*Y1-1)*!TE1))
      + SOMA(-BE2*!BL1*!BL12 + BE1*!(2+(L1*X2-1)*!SE2));
D2_L1D = N2/L2^2 + 2*N/L^2 - 4*N/K2 -4*L12*W/K3
      + SOMA(-AE2*!AL1*!AD+AE1*!(-3+3*TE1-(L+L2)*(TE1*!Y1)))
      + SOMA(-BE2*!BD*!BL1+BE1*!(-1+SE2-(3*L1+L-L1*L*X2)*!(SE2*!X2)))
      - 2* L12/K2*(SCS2-SCT2) + L12/K2*(SCS1+SCT2-SCT1-SCS2)
      + L12/K*(SOMA(CT2#(2)+CT2*!Y2))-(1+L12/K)*(SOMA(CS2#(2)+CS2*!X2));
D2_L12D = N/L^2 + 1/K^2*W + (1/K)*(SCS2-SCT2)
      + SOMA(-AE2*!AD*!AL12) + SOMA(-BE2*!BD*!BL12)
      + SOMA(AE1*!(-1+TE1))+ SOMA(BE1*!(-1+L1*SE2*!X2));
}

```

```

PROC DP(){
/* CALCULO DE DESVIOS PADROES ATRAVES DA RAIZ QUADRADA DO DIAGONAL DA
INVERSA DA MATRIZ DE INFORMACAO */
    UM=CRIAMAT(&1,1,1);
    DESVIO=SQRT(DIAG(INV(-DER2)))*UM;
    IMPRIME DESVIO;
}

```

```

FUNC TEST(){
/* ESTA FUNCAO DEVOLVE O P_VALUE DA ESTATISTICA DE QUI-QUADRADO COM UM
GRAU DE LIBERDADE */
    IF (&1<0) {P=9.9999;}
    CC P=XPROB(&1,1);
    RETORNAR(P);
}

```

```

PROC SARKAR(){
/* ESTE PROCEDIMENTO ESTIMA OS PARAMETROS SEM NENHUMA RESTRICAO */
    ANOTE" ";
    ANOTE"      ESTIMACAO DOS PARAMETROS SEM NENHUMA RESTRICAO:";
    ANOTE" ";
    A=N/SX;
    B=N/SY;
    C=N/(SX1+SY2);
    L12=A+B-C;
    L1=A-L12;
    L2=B-L12;
    D=L1-L2;
    PAR=(L1,L12,D);
    PARAM(PAR); /* VERIFICA AS RESTRICOES INICIAIS */
    CALC(); /* CALCULA AS EXPRESSOES COMUNS USADAS NAS CONTAS */
    CALCL(); /* CALCULA O logL */
    DERIV1(); /* CALCULA AS PRIMEIRAS DERIVADAS */
    DER1=(D1_L1, D1_L12, D1_D); /* CONSTROI O VETOR DE ESCORE */
    LOGL1=LOGL;
    IMPRIME ((PAR') LOGL);
    EPS=1E-6;
    MAXI=MAX(ABS(DER1));
    MAXIO=MAX((1,MAXI))*EPS;

```

```

IMPRIME MAXIO;
ITERAC=1;
estan=0;
ENQUANTO ((MAXI>=MAXIO) && (ITERAC<100) && (estan==0)){
    PAR={L1,L12,D};
    CALC();
    CALCCL();
    DERIV2();
    DER2={ D2_L1      D2_L1L12      D2_L1D,
           D2_L1L12  D2_L12        D2_L12D,
           D2_L1D    D2_L12D        D2_D};
/* CONSTROI A MATRIZ DE VAR. E COV. */
    S = -INV(DER2)*DER1; /* DIRECAO */
    DD=S'*DER1; /* GRADIENTE */
    IF (DD<=0) S=DER1;
    C=1;
    OK=0;
    ENQUANTO (OK==0){
        PAR_NOVO=PAR+C*S;
        PARAM(PAR_NOVO);
        CALC();
        CALCCL();
        IMPRIME {iterac MAXI (PAR') LOGL} $
                ("iterac,    MAX(DER1),L1,L12,D,logL");
        SE (LOGL>LOGL1) {LOGL1=LOGL; OK=1;}
        CC {C=C/2;}
        SE (C<0.000001) {ESTAN=1; OK=1;}
    }
    DERIV1();
    DER1={D1_L1,D1_L12,D1_D};
    MAXI=MAX(ABS(DER1));
    ITERAC=ITERAC+1;
}
}
ANOTE "PAROU POR :";
SE (ESTAN==0) ANOTE " NORMA DO GRADIENTE SUFICIENTEMENTE PEQUENA.";
CC ANOTE "ESTRANGULAMENTO.";
DP(3); /* DESVIOS PADROES DOS 3 PARAMETROS */
logs=logl;

}

```

```

PROC SARKARD(){
/* ESTE PROCEDIMENTO CALCULA AS ESTIMATIVAS DOS PARAMETROS
LAMBDA1 E LAMDA12 SOB A HIPOTESE DE IGUALDAE DAS MARGINAIS, ISTO E',
DELTA = 0 */
    ANOTE "*****";
    ANOTE "          ESTIMACAO SOB H0:DELTA=0 :";
    ANOTE " ";
    L=N/(SX1+SY2);
    L1=(2*L1-D)/2; /* CHUTE INICIAL USANDO AS ESTIMATIVAS ENCONTRADAS
NO PROCEDIMENTO ANTERIOR */
    L12=L-2*L1;
    SE (L12<0) L12=0;

```

```

PAR={L1,L12,0}; /* CHUNTE INICIAL */
PARAM(PAR);
CALC();
CALCL();
DERIV1();
DER1={D1_L1,D1_L12};
IMPRIME {L1 L12 LOGL} $ ("LAMBDA1,LAMBDA12,logL");
LOGL1=LOGL;
ITERAC=1;
EPS=1E-6;
MAXI=MAX(ABS(DER1));
MAXIO=MAX({1,MAXI})*EPS;
ITERAC=1;
ESTAN=0;
ENQUANTO ((MAXI>=MAXIO) && (ITERAC<50) && (estan==0)){
    PAR={L1,L12,0};
    CALC();
    CALCL();
    DERIV2();
    DER2={ D2_L1      D2_L1L12,
           D2_L1L12  D2_L12   };
    S = -INV(DER2)*DER1;
    DD=S'*DER1;
    IF (DD<=0) S=DER1;
    S={S,0};
    C=1;
    OK=0;
    ENQUANTO (OK==0){
        PAR_NOVO=PAR+C*S;
        PARAM(PAR_NOVO);
        CALC();
        CALCL();
        IMPRIME {ITERAC C MAXI (PAR') LOGL} $
                ("ITERAC,C,MAX(DER1),L1,L12,D,logL");
        SE (LOGL>LOGL1) {LOGL1=LOGL; OK=1;}
        CC {C=C/2;}
        SE (C<0.000001) {ESTAN=1; OK=1;}
    }
    DERIV1();
    DER1={D1_L1,D1_L12};
    MAXI=MAX(ABS(DER1));
    ITERAC=ITERAC+1;
}
ANOTE "PAROU POR :";
SE (ESTAN==0) ANOTE "NORMA DO GRADIENTE SUFICIENTEMENTE PEQUENA.";
CC ANOTE "ESTRANGULAMENTO.";
logD=logl;
ANOTE "AS ESTIMATIVAS DOS PARAMETROS SAO:";
IMPRIME {L1 L12 LOGL} 10:4 ("LAMBDA1,LAMBDA12,logL");
ANOTE " ";
dp(2);
U={D1_D,DER1}/SQRT(N);
I11=-D2_D/n;
I12=-(D2_L1D D2_L12D)/n;
I21=I12*;

```

```

I22=-DER2/n;
I={I11 I12, I21 I22};
TEST=U'*INV(I)*U;
SE (TEST<0) FINAL=9.9999;
CC FINAL=XPROB(test,1);
RAOD={TEST FINAL};
}

```

```

PROC SARKARL12(){
/* ESTE PROCEDIMENTO CALCULA AS ESTIMATIVAS DE LAMBDA1 E DELTA, SOB A
HIPOTESE DE LAMBDA12 = 0 */

```

```

  ANOTE"*****";
  ANOTE"          ESTIMACAO SOB H0:L12=0";
  ANOTE" ";
  L1=N/SX;
  L2=N/SY;
  LOGL=N*LOG(L1)+N*LOG(L2)-L1*SX-L2*SY-SX-SY;
  D=L1-L2;
  L12=0;
  IMPRIME {L1 D LOGL} 16:4 ("LAMBDA1,DELTA,LOGL");
  logl12=logl;
  PARAM({L1,0,D});
  DERIV1();
  DERIV2();
  DER2= {D2_L1 D2_L1D,
          D2_L1D D2_D};
  U={D1_L12, D1_L1, D1_D}/sqrt(n);
  I11= -D2_L12/n;
  I12= -{D2_L1L12 D2_L12D}/n;
  I21=I12';
  I22= -DER2/N;
  I={I11 I12,I21 I22};
  TEST=U'*INV(I)*U;
  SE (TEST<0) FINAL=9.9999;
  CC FINAL=XPROB(TEST,1);
  RAOL12={TEST FINAL};
  DP(2);
}

```

```

PROC TESTE1(){
/* ESTE PROCEDIMENTO REALIZA O TESTE DA RAZAO DE VEROSSIMILHANCA */
  ANOTE"*****";
  ANOTE"+++++++ TESTE DA RAZAO DE VEROSSIMILHANCA ++++++";
  ANOTE" ";
  ANOTE"TESTE DE INDEPENDENCIA DE X E Y (H0:LAMBDA12=0) :";
  G=-2*(LOGL12-LOGS); /* ESTATISTICA DO TESTE */
  P=XPROB(G,1);
  IMPRIME {G P} $("-2logG,P_value");
  ANOTE" ";
  ANOTE"TESTE DE IGUALDADE DE DISTRIBUICOES DE X E Y (H0:DELTA=0) :";
  G=-2*(LOGD-LOGS);
  P=XPROB(G,1);
  IMPRIME {G P} $ ("-2logG,P_value");
}

```

```

PROC TESTE2()
/* ESTE PROCEDIMENTO REALIZA O TESTE DE RAO */
  ANOTE"*****";
  ANOTE"+++++++ TESTE DE RAO (SCORE) ++++++";
  ANOTE"TESTE DE INDEPENDENCIA DE X E Y (H0:LAMBDA12=0) :";
  IMPRIME RAOL12 10:4 ("R,P_value");
  ANOTE" ";
  ANOTE"TESTE DE IGUALDADE DE DISTRIBUICOES DE X E Y (H0:DELTA=0) :";
  IMPRIME RAOD 10:4 ("R,P_value");
}

INICIA(AA);
SARKAR();
CMD"PAUSE";
SARKARD();
CMD"PAUSE";
SARKARL12();
CMD"PAUSE";
TESTE1();
CMD"PAUSE";
TESTE2();

```

PROGRAMA 4. BLOCKC.PRG

```

/* PROGRAMA ESCRITO EM MODULO IML DO SAS */
/* ESTE PROGRAMA ESTIMA OS PARAMETROS DA DISTRIBUICAO SARKAR COM
PRESENCA DE CENSURAS. TRES MODELOS SAO CONSIDERADOS: IRRESTRITO,
INDEPENDENCIA E IGUALDADES DAS DISTRIBUICAO MARGINAIS. TESTES DE
HIPOTHESES SAO REALIZADOS USANDO O TESTE DA R.V., DE RAO E DE WALD */
LIBNAME LIB 'c:\';
DATA DADOS;
  /* COMANDOS SAS */
RUN;

PROC IML WORKSIZE=150;
START INICIA;
  USE DADOS;
  READ ALL VAR(X Y) WHERE(T>=1 & CENS=0) INTO P1; /* X<Y,FALHA */
  READ ALL VAR(X Y) WHERE(T<1 & CENS=0) INTO P2; /* X>Y,FALHA */
  READ ALL VAR(X Y) WHERE(T>=1 & CENS=1) INTO P3; /* X<Y,CENSURA */
  READ ALL VAR(X Y) WHERE(T<1 & CENS=1) INTO P4; /* X>Y,CENSURA */
  X1=P1[,1];      X2=P2[,1];      X3=P3[,1];      X4=P4[,1];
  Y1=P1[,2];      Y2=P2[,2];      Y3=P3[,2];      Y4=P4[,2];
  N1=NROW(P1); /* numero de linhas de P1 */
  N2=NROW(P2);
  N3=NROW(P3);
  N4=NROW(P4);
  N=N1+N2+N3+N4; PRINT N1 N2 N3 N4;
  SX1=SUM(X1);      SX2=SUM(X2);      SX3=SUM(X3);      SX4=SUM(X4);
  SY1=SUM(Y1);      SY2=SUM(Y2);      SY3=SUM(Y3);      SY4=SUM(Y4);
  SX = SX1+SX2+SX3+SX4;
  SY = SY1+SY2+SY3;
  SK = SY1+SX2+SY3+SX4;

```



```

        L=N/(SX1+SY2+SX3+SY4);
        /*L1=N/SX;
        D=L1-N/(SY+SY4);
        L12=L-2*L1-D; IF L12<0 THEN L12=1;*/
FINISH;

START FUN;
/* ESTE PROCEDIMENTO ATRIBUI VALORES PARA OS PARAMETROS E CALCULA
O VALOR DO LOG DA FUNCAO DE VEROSSIMILHANCA */
        L1=PAR[1,];
        L12=PAR[2,];
        D=PAR[3,];
        L2=L1-D;
        L=L1+L2+L12;
        K=L1+L2;
        K1=L1+L12;
        K2=L2+L12;
        EY = EXP(-L2*Y4);
        EX = EXP(-L2*X4);
        A = K1*EY - L12*EX;
        F = N*LOG(L) - N*LOG(K) + N1*LOG(L1) + N1*LOG(K2) + N2*LOG(L2)
          + N2*LOG(K1) + N3*LOG(L1) - L1*(SX +SY) + D*SY -L12*SK
          + SUM(LOG(A)); /* LOG DA FUNCAO DE VEROSSIMILHANCA */
FINISH;

```

```

START DER1;
/* ESTE PROCEDIMENTO CALCULA A DERIVADA NUMERICA DO LOG DA FUNC. DE
VEROSSIMILHANCA COM RELACAO AOS PARAMETROS */
        PARA=PAR;
        D1=J(NP,1,0); /* D1 = CRIA UMA MATRIZ DE TAMANHO NP*1 */
        D1[I,]=10##(-4)*PARA[I,];
        IF (PARA[I,]=0) THEN D1[I,]=0.000001;
        PAR=PARA+D1;
        RUN FUN;
        RES1=F;
        PAR=PARA-D1;
        RUN FUN;
        RES2=F;
        DE1=(RES1-RES2)/(2*D1[I,]);
FINISH;

```

```

START DER2;
/* ESTE PROCEDIMENTO CALCULA A SEGUNDA DERIVADA NUMERICA, ATRAVES DA
DERIVADA PRIMEIRA */
        PARB=PAR;
        D2=J(NP,1,0);
        D2[J,]=10##(-4)*PARB[J,];
        IF (PARB[J,]=0) THEN D2[J,]=0.000001;
        PAR=PARB+D2;
        RUN DER1;
        RES3=DE1;
        PAR=PARB-D2;
        RUN DER1;
        RES4=DE1;
        DE2=(RES3-RES4)/(2*D2[J,]);

```

```

FINISH;

START CDER1;
/* CALCULA O VETOR ESCORE */
  DERIV1=J(NP,1,0);
  DO I=1 TO NP;
    RUN DER1;
    DERIV1[I,1]=DE1;
  END;
FINISH;

START CDER2;
/* CALCULA A MATRIZ DE VARIANCIA E COVARIANCIA */
  DERIV2=J(NP,NP,0);
  DO I = 1 TO NP;
    DO J = 1 TO I;
      RUN DER2;
      DERIV2[I,J]=DE2;
      DERIV2[J,I]=DE2;
    END;
  END;
FINISH;

START DP;
/* CALCULA O DESVIO PADRAO PARA UM VETOR DE PARAMETROS DE TAMANHO NP
*/
  IND=J(NP,1,1);
  DESVIO=SQRT(DIAG(-INV(DERIV2)))*IND;
  PRINT DESVIO;
FINISH;

START NEWTON;
/* PROCEDIMENTO ITERATIVO NEWTON-RAPHSON */
  RUN FUN;
  LOG1=F;
  RUN CDER1;
  RUN CDER2;
  DELTA=SOLVE(DERIV2,DERIV1);
  IF (ITER=1 ; LOG1<=LOG1) THEN DO;
    PRINT ITER (PARF') LOG1;
    PARF=PARF-DELTA;
    LOG1=LOG1;
  END;
  ELSE DO;
    PRINT ITER (PARF') LOG1,,"XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX",,,;
    PARF= PARF -0.5*DELTA;
    LOG1=LOG1;
  END;
FINISH;

START BLOCK;
  L1=0.0115;
  L12=0.0003;
  D=0.009;
  NP=3;

```

```

PAR=L1//L12//D;
PARF=PAR;
DO;
  ITER=1;
  MAX=1;
  LOG1=0;
  DO WHILE (ITER<=30 & MAX>0.0001 & L1>0);
    RUN NEWTON;
    PAR=PARF;
    MAX=MAX(ABS(DERIV1));
    ITER=ITER+1;
  END;
  PRINT L1 L12 D;
  IND=J(NP,1,1);
  DP=SQRT(DIAG(-INV(DERIV2)))*IND;
  PRINT DERIV1 " " DP;
END;
LOGS=LOGL;
MID=-((DERIV2[3,3]:: DERIV2[3,1]:: DERIV2[3,2])//
      (DERIV2[1,3]:: DERIV2[1,1]:: DERIV2[1,2])//
      (DERIV2[2,3]:: DERIV2[2,1]:: DERIV2[2,2]));
/* MATRIZ DE INFORMACAO DE FISHER SOB O MODELO IRRESTRITO COM RELACAO
A DELTA*/
MID=INV(MID)[1,1];
WALD=D##2/MID; /* ESTATISTICA DE WALD */
P_VALUE = 1-PROBCHI(WALD,1);
WALDD=WALD::P_VALUE;
PRINT WALDD;
MIL12=-((DERIV2[2,2]:: DERIV2[2,1]:: DERIV2[2,3])//
        (DERIV2[1,2]:: DERIV2[1,1]:: DERIV2[1,3])//
        (DERIV2[3,2]:: DERIV2[3,1]:: DERIV2[3,3]));
/* MATRIZ DE INFORMACAO DE FISHER SOB O MODELO IRRESTRITO COM RELACAO
A LAMBDA12 */
MIL12=INV(MIL12)[1,1];
WALD=L12##2/MIL12;
P_VALUE=1-PROBCHI(WALD,1);
WALDL12=WALD::P_VALUE;
PRINT WALDL12;
FINISH;

RUN INICIA;
RUN BLOCK;

```

PROGRAMA 5. SARKARC.PRG

/* ESTE PROGRAMA ESTIMA OS PARAMETROS DA DISTRIBUICAO DE SARKAR COM PRESENCA DE DADOS CENSURADOS SOB OS MODELOS: IRRESTRITO, DELTA=0 E LAMBDA12=0, TESTES DE HIPOTHESES SAO REALIZADOS USANDO OS TESTES DA R.V., DE RAO E DE WALD*/

```

LIBNAME LIB 'C:\';
DATA DADOS;

```

```

/*COMANDO SAS */
RUN;

PROC IML WORKSIZE=150;
START INICIA;
  USE DADOS;
    READ ALL VAR(X Y) WHERE(T=1 & CENS=0) INTO P1; /* X<Y,FALHA */
    READ ALL VAR(X Y) WHERE(T<1 & CENS=0) INTO P2; /* X>Y,FALHA */
    READ ALL VAR(X Y) WHERE(T=1 & CENS=1) INTO P3; /* X<Y,CENSURA */
    READ ALL VAR(X Y) WHERE(T<1 & CENS=1) INTO P4; /* X>Y,CENSURA */
    X1=P1[,1];    X2=P2[,1];    X3=P3[,1];    X4=P4[,1];
    Y1=P1[,2];    Y2=P2[,2];    Y3=P3[,2];    Y4=P4[,2];
    N1=NROW(P1);
    N2=NROW(P2);
    N3=NROW(P3);
    N4=NROW(P4);
    N=N1+N2;
    SX1=SUM(X1);    SX2=SUM(X2);    SX3=SUM(X3);    SX4=SUM(X4);
    SY1=SUM(Y1);    SY2=SUM(Y2);    SY3=SUM(Y3);    SY4=SUM(Y4);
    SX=SX1+SX2;    SY=SY1+SY2;
    L=(N+N3+N4)/(SX1+SY2+SX3+SY4);
    L1=L-(N+N3+N4)/(SY1+SY2+SY3+SY4);
    D=L1-(L-(N+N3+N4)/(SX1+SX2+SX3+SX4));
    L12=L-2*L1+D;
    NP=3;
    L1=0.0116; L12=0.0002; D=0;
    PAR=L1//L12//d;
    PARF=PAR;

FINISH;

START FUN;
/* CALCULA O LOG DA FUNCAO DE VEROSSIMILHANCA */
  L1=PAR[1,];
  L12=PAR[2,];
  D=par[3,];
  L2=L1-D;
  L=2*L1-D+L12;
  K=L1+L2;
  SE1=EXP(-L1*X1);    SE2=EXP(-L2*X2);
  TE1=EXP(-L1*Y1);    TE2=EXP(-L2*Y2);
  SL1=LOG(1-SE1);    SL2=LOG(1-SE2);
  TL1=LOG(1-TE1);    TL2=LOG(1-TE2);
  SSL1=SUM(SL1);    SSL2=SUM(SL2);
  STL1=SUM(TL1);    STL2=SUM(TL2);
  A=K*(L2+L12) - L2*L*TE1;
  B=K*(L1+L12) - L1*L*SE2;
  G=L12/K; K1=L1+L12;
  SE4=EXP(-L2*X4);    SE41=1-SE4;    TE41=1-EXP(-L2*Y4);

  F = N1*LOG(L1) + N2*LOG(L2) + N*LOG(L) - 2*N*LOG(K)
    - L1*(SX+SY) + D*SY - L12*(SY1+SX2)
    + SUM(LOG(A)) + SUM(LOG(B)) + (L12/K)*(SSL1+STL2)
    - (1+L12/K)*(STL1+SSL2)-SX-SY
    - (L2+L12)*SY3 - G*SUM(LOG(1-EXP(-L1*Y3)))
    + N3*LOG(1+G) + G*SUM(LOG(1-EXP(-L1*X3))) + N3*LOG(L1) - L1*SX3

```

```

- K1* $SX^4$  + SUM(LOG(K1-SE41##(-G)#TE41##(1+G)
#(K1+G*SE41##(-1)#(L2*SE4)))));
FINISH;

START DER1;
/* DERIVADA PRIMEIRA DO LOG DA FUNCAO DE VEROSSIMILHANCA COM RELACAO
AOS PARAMETROS */
  PARA=PAR;
  D1=J(NP,1,0);
  D1[I,]=10##(-4)*PARA[I,];
  IF (PARA[I,]=0) THEN D1[I,]=0.000001;
  PAR=PARA+D1;
  RUN FUN;
  RES1=F;
  PAR=PARA-D1;
  RUN FUN;
  RES2=F;
  DE1=(RES1-RES2)/(2*D1[I,]);
FINISH;

START DER2;
/* DERIVADA SEGUNDA CALCULADA ATRAVES DA DERIVADA PRIMEIRA */
  PARB=PAR;
  D2=J(NP,1,0);
  D2[J,]=10##(-4)*PARB[J,];
  IF (PARB[J,]=0) THEN D2[J,]=0.000001;
  PAR=PARB+D2;
  RUN DER1;
  RES3=DE1;
  PAR=PARB-D2;
  RUN DER1;
  RES4=DE1;
  DE2=(RES3-RES4)/(2*D2[J,]);
FINISH;
DO;
  ITER=1;
  MAX=1;
  LOG1=0;
  RUN INICIA;

  DO WHILE (ITER<=50 & MAX>0.0001 & L1>0);
    RUN FUN;
    LOG1=F;
    DERIV1=J(NP,1,0);
    DO I=1 TO NP;
      RUN DER1;
      DERIV1[I,]=DE1;
    END;
    DERIV2=J(NP,NP,0);
    DO I = 1 TO NP;
      DO J = 1 TO I;
        RUN DER2;
        DERIV2[I,J]=DE2;
        DERIV2[J,I]=DE2;

```

```

        END;
END;

DELTA=SOLVE(DERIV2,DERIV1);
IF (ITER=1 : LOG1<=LOGL) THEN DO;
    PRINT ITER L1 L12 D LOGL;
    PARF=PARF-DELTA;
    LOG1=LOGL;
END;

ELSE DO;
    PRINT ITER L1 L12 D LOGL,,"XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX",,;
    PARF= PARF -0.5*DELTA;
    LOG1=LOGL;
END;
if parf[2,]<0 then parf[2,]=0.00001;
if (parf[1,]-parf[3,])<=0 then parf[3,]=0.00001;
PAR=PARF;
MAX=MAX(ABS(DERIV1));
PRINT par deriv1 " " deriv2;
ITER=ITER+1;
end;

    PRINT L1 L12 D;
IF L12<0 THEN PRINT "COND. N. SATISFEITA";
    IND=J(NP,1,1);
    DP=SQRT(DIAG(-INV(DERIV2)))*IND;
    PRINT DP;
    MID=-((DERIV2[3,3]:: DERIV2[3,1]:: DERIV2[3,2])//
        (DERIV2[1,3]:: DERIV2[1,1]:: DERIV2[1,2])//
        (DERIV2[2,3]:: DERIV2[2,1]:: DERIV2[2,2]));
/* MATRIZ DE INFORMACAO DE FISHER COM RELACAO A DELTA */
    MID=INV(MID)[1,1];
    WALD=D##2/MID;
    P_VALUE = 1-PROBCHI(WALD,1);
    WALDD=WALD::P_VALUE;
    PRINT WALDD;
    MIL12=-((DERIV2[2,2]:: DERIV2[2,1]:: DERIV2[2,3])//
        (DERIV2[1,2]:: DERIV2[1,1]:: DERIV2[1,3])//
        (DERIV2[3,2]:: DERIV2[3,1]:: DERIV2[3,3]));
/* MATRIZ DE INFORMACAO DE FISHER COM RELACAO A LAMBDA12 */
    MIL12=INV(MIL12)[1,1];
    WALD=L12##2/MIL12;
    P_VALUE=1-PROBCHI(WALD,1);
    WALDL12=WALD::P_VALUE;
    PRINT WALDL12;

```

PROGRAMA 6. COVEXP.PRG

```

/* ESTE PROGR. ESTIMA OS COEF. DE COV. DA DISTR. EXP INDEPENDENTE.
E FAZ TESTE DE IGUALDADE DOS COEF. */

```

```

LIBNAME LIC 'C:\';

```

```

DATA DADOS;
/* COMANDOS SAS */
/* CONSIDERANDO UM ARQUIVO DE DADOS COM UMA COVARIÁVEL */
RUN;

PROC IML WORKSIZE=100;
    USE DADOS;

START INICIA;
    READ ALL VAR{X Y Z} INTO POP;
    X=POP[,1]; SX=SUM(X);
    Y=POP[,2]; SY=SUM(Y);
    Z=POP[,3]; SZ=SUM(Z); Z2=Z##2;
    N=NROW(POP); XM=SX/N; YM=SY/N; ZM=SZ/N;
FINISH;

START CHUTES;
    B0=LOG(1/AM);
    B1=0;
FINISH;

START CALCS; /* CALC. DAS DERIV. SEM NENHUMA RESTRICAO */
    CONST=A#EXP(B0+Z*B1);
    SCONST=SUM(CONST);
    DER1_B0=N - SCONST;
    DER2_B0=-SCONST;
    DER1_B1=SZ - SUM(Z#CONST);
    DER2_B1=-SUM(Z2#CONST);
    DER2_B01=-SUM(Z#CONST);
    DER1=DER1_B0//DER1_B1;
    DER2=(DER2_B0#DER2_B01)//(DER2_B01#DER2_B1);
FINISH;

START DESVIO;
    UM=J(NP,1,1);
    DP=SQRT(-DIAG(INV(DER2)))*UM;
    PRINT DP;
FINISH;

START NEWTONS;
    RUN CHUTES;
    PAR=B0//B1;
    DO WHILE (ITER<=15 & MAX>0.0001);
        RUN CALCS;
        PRINT,ITER PAR DER1 DER2;
        DELTA=SOLVE(DER2,DER1);
        PAR=PAR-DELTA;
        ITER=ITER+1;
        MAX=MAX(ABS(DER1));
        B0=PAR[1,];
        B1=PAR[2,];
    END;
    PRINT, ITER PAR DER1 DER2;
    NP=2;
    RUN DESVIO;

```

FINISH;

START CHUTEIG; /* CHUTE SOB A HIPOTHESE DE IGUALDADE DAS MARGINAIS */

BX0=LOG(1/XM);

BY0=LOG(1/YM);

B1=0;

FINISH;

START CALCIG; /* CALC. DAS DERIV. SOB HO BETAX1=BETAY1=BETA1 */

CONST1=X#EXP(BX0+Z*B1);SCONST1=SUM(CONST1);

CONST2=Y#EXP(BY0+Z*B1);SCONST2=SUM(CONST2);

D1_BX0=N - SCONST1;

D1_BY0=N - SCONST2;

D1_B1=2*SZ - SUM(Z#CONST1) - SUM(Z#CONST2);

D2_BX0=-SCONST1;

D2_BY0=-SCONST2;

D2_B1=-SUM(Z2#CONST1) - SUM(Z2#CONST2);

D2_BXY0=0;

D2_B1X0=-SUM(Z#CONST1);

D2_B1Y0=-SUM(Z#CONST2);

DER1=D1_BX0//D1_BY0//D1_B1;

DER2=(D2_BX0::D2_BXY0::D2_B1X0)//(D2_BXY0::D2_BY0::D2_B1Y0)
//(D2_B1X0::D2_B1Y0::D2_B1);

FINISH;

START NEWTONIG; /* PROC. ITERAT. NEWTON-RAPHSON PARA O MODELO DE IGUALDADE DAS MARGINAIS */

RUN CHUTEIG;

PAR=BX0//BY0//B1;

DO WHILE (ITER<=15 & MAX>0.0001);

RUN CALCIG;

PRINT,ITER PAR DER1 DER2;

DELTA=SOLVE(DER2,DER1);

PAR=PAR-DELTA;

ITER=ITER+1;

MAX=MAX(ABS(DER1));

BX0=PAR[1,];

BY0=PAR[2,];

B1=PAR[3,];

END;

PRINT, ITER PAR DER1 DER2;

NP=3;

RUN DESVIO;

FINISH;

START TESTE; /* TESTE DE HIPOTHESE */

PRINT,, "TESTE DA R.V. PARA HO:BX1=BY1=0:,";

G=-2*(LOGIN-LOGS);

P_VALUE=1-PROBCHI(G,1);

PRINT G " " P_VALUE;

PRINT "TESTE DA R.V. PARA HO:BX1=BY1=B1:,";

G=-2*(LOGIG-LOGS);

P_VALUE=1-PROBCHI(G,1);

PRINT G " " P_VALUE;

FINISH;


```

START FINAL;
DO;
  PRINT "ESTIMACAO SEM HIPOTESE",.;
  ITER=1;
  MAX=1;
  RUN INICIA;
  A=X; SA=SX; AM=XM;
  PRINT,, "ESTIMACAO DE BETA_X";
  RUN NEWTONS;
  BX0=B0; BX1=B1;
PRINT,,;
  ITER=1;
  MAX=1;
  A=Y; SA=SY; AM=YM;
  PRINT,, "ESTIMACAO DE BETA_Y";
  RUN NEWTONS;
  BY0=B0; BY1=B1;
  LOGS=N*(BX0+BY0) + (BX1+BY1)*SZ - SUM(X#EXP(BX0+BX1*Z))
    -SUM(Y#EXP(BY0+BY1*Z));
  PRINT LOGS;
END;

DO;
  PRINT,, "ESTIMACAO SOB H0:BETAX1=BETAY1=BETA1";
  ITER=1;
  MAX=1;
  RUN NEWTONIG;
  LOGIG=N*(BX0+BY0) + 2*B1*SZ - SUM(X#EXP(BX0+B1*Z))
    -SUM(Y#EXP(BY0+B1*Z));
  PRINT ,LOGIG;
END;

DO;
  PRINT,, "ESTIMACAO SOB H0:BETAX1=BETAY1=0";
  BX0=LOG(1/XM);
  BY0=LOG(1/YM);
  CONSTX=SUM(X#EXP(BX0));
  CONSTY=SUM(Y#EXP(BY0));
  LOGIN=N*(BX0+BY0) - CONSTX - CONSTY;
  DPX=SQRT(1/CONSTX);
  DPY=SQRT(1/CONSTY);
  PRINT BX0 BY0 ,DPX DPY LOGIN;
END;
RUN TESTE;
FINISH;

RUN FINAL;

```

PROGRAMA 7. COVBB.PRG

/* ESTE PROGRAMA ESTIMA OS COEFICIENTES DOS PARAMETROS DA DISTR.
BLOCK-BASU E FAZ OS TESTES DE HIPOTESE DE $H_0: B_{11}=B_{21}=B_{31}=0$ E

```

H0: B11=B21 */

LIBNAME SSD 'C:\';
DATA DADOS;
    /* COMANDOS SAS, CRIA UM ARQUIVO DE DADOS COM UMA COVARIÁVEL */
RUN;

PROC IML WORKSIZE=100;
START INICIA;
    USE DADOS;
    READ ALL VAR{X Y Z} WHERE(T>=1) INTO P1; /* X<Y */
    READ ALL VAR{X Y Z} WHERE(T<1) INTO P2; /* X>Y */
    N1 = NROW(P1); /* N1 = NUM. DE POP. DE P1 */
    N2 = NROW(P2); /* N2 = NUM. DE POP. DE P2 */
    PRINT N1 " " N2;
    N = N1+N2;
    X1=P1[,1]; /* X1 = X T.Q. X<Y */
    X2=P2[,1]; /* X2 = X T.Q. X>Y */
    Y1=P1[,2]; /* Y1 = Y T.Q. Y>X */
    Y2=P2[,2]; /* Y2 = Y T.Q. Y<X */
    U1=J(N1,1,1); /* VETOR N1X1 DE UNS */
    U2=J(N2,1,1); /* VETOR N2X1 DE UNS */

FINISH;

START CHUTE0; /* CHUTE INICIAL SEM H0 */
    Z1=U1#P1[,3]; /* MATRIZ N1X2 DE (1,Z) */
    Z2=U2#P2[,3]; /* MATRIZ N2X2 DE (1,Z) */
    NP=6; /* NUM. DE PARAMETROS = 5 */
    B12=-1//0.01;
    BETA1=(-LOG(SUM(X1//X2)))/(Z1[+,]))'; /* VETOR 2X1 */
    BETA2=(-LOG(SUM(Y1//Y2)))/(Z2[+,]))'; /* VETOR 2X1 */
    PAR=B12//BETA1//BETA2; /* PAR = (BETA12,B10,B20,B21)' */
    PARF=PAR;

FINISH;

START CHUTE1; /* CHUTE INICIAL COM H0: BETA11=BETA21=0 */
    Z1=U1;
    Z2=U2;
    NP=3;
    B12=0.01;
    BETA1=-LOG(SUM(X1//X2))/N;
    BETA2=-LOG(SUM(Y1//Y2))/N;
    PAR=B12//BETA1//BETA2; /* PAR = (BETA12,B10,B20)' */
    PARF=PAR;

FINISH;

START CHUTE2; /* CHUTE INICIAL COM H0: BETA11=BETA12 */
    Z1=U1#P1[,3];
    Z2=U2#P2[,3];
    NP=5;
    B12=0.01//0.01;
    BETA1=-LOG(SUM(X1//X2))/N;
    BETA2=-LOG(SUM(Y1//Y2))/N;
    BETA=-LOG(SUM((X1+Y1)/(X2+Y2)))/SUM(P1[,3]//P2[,3]);
    PAR=B12//BETA1//BETA2//BETA; /* PAR = (BETA12,B10,B20,B)' */

```

```

    PARF=PAR;
FINISH;

START CALCO;
    B12=PAR[{1 2},,];
    BETA1=PAR[{3 4},,]; /* BETA1 = (B10,B11)' */
    BETA2=PAR[{5 6},,]; /* BETA2 = (B20,B21)' */
FINISH;

START CALC1;
    B12=PAR[1,];
    BETA1=PAR[2,]; /* BETA1 = B10 */
    BETA2=PAR[3,]; /* BETA2 = B20 */
FINISH;

START CALC2;
    B12=PAR[{1 2},,];
    BETA1=PAR[{3 5},,]; /* BETA1 = (B10,B)' */
    BETA2=PAR[{4 5},,]; /* BETA1 = (B20,B)' */
FINISH;

START FUN; /* CALCULA O LOG DA FUNC. DE VEROS. */
    IF TIPO=0 THEN RUN CALCO;
    ELSE IF TIPO=1 THEN DO; RUN CALC1; END;
    ELSE DO; RUN CALC2; END;
    Z1B3=Z1*B12;
    Z2B3=Z2*B12;
    Z1B1=Z1*BETA1;
    Z1B2=Z1*BETA2;
    Z2B1=Z2*BETA1;
    Z2B2=Z2*BETA2;
    EZ1B3=EXP(Z1B3);
    EZ2B3=EXP(Z2B3);
    EZ1B1=EXP(Z1B1);
    EZ1B2=EXP(Z1B2);
    EZ2B1=EXP(Z2B1);
    EZ2B2=EXP(Z2B2);
    K=(EZ1B1+EZ1B2)/(EZ2B1+EZ2B2);
    L=K+(EZ1B3/EZ2B3);
    K1=EZ1B2+EZ1B3;
    K2=EZ2B1+EZ2B3;
    F= SUM(LOG(L)) - SUM(LOG(K)) + SUM(Z1B1+LOG(K1)) + SUM(Z2B2+LOG(K2))
      - SUM(X1#EZ1B1 + Y1#K1) - SUM(X2#K2 + Y2#EZ2B2);
FINISH ;

START DER1;
    PARA=PAR;
    D1=J(NP,1,0); /* D1 = VETOR NPX1 DE ZEROS */
    D1[I,]=10#(-4)*PARA[I,]; /* DEFINE O TAMANHO DE DELTA */
    PAR=PARA+D1;
    RUN FUN;
    RES1=F; /* F(BETA1+DELTA1) */
    PAR=PARA-D1;
    RUN FUN;
    RES2=F; /* F(BETA1-DELTA1) */

```

```

DE1=(RES1-RES2)/(2*D1[I,1]); /* (F(B1+D1)-F(B1-D1))/2D1 */
FINISH;

```

```

START DER2;
  PARB=PAR;
  D2=J(NP,1,0);
  D2[J,]=10##(-4)*PARB[J,];
  PAR=PARB+D2;
  RUN DER1;
  RES3=DE1;
  PAR=PARB-D2;
  RUN DER1;
  RES4=DE1;
  DE2=(RES3-RES4)/(2*D2[J,1]);
FINISH;

```

```

START NEWTON;
  ITER =1;
  LOGK=0;
  MAX=1;
  DO WHILE (ITER<=30 & MAX>0.00001);
    RUN FUN;
    LOGL=F;
    DERIV1=J(NP,1,0);
    DO I=1 TO NP;
      RUN DER1;
      DERIV1[I,]=DE1;
    END;
    DERIV2=J(NP,NP,0);
    DO I = 1 TO NP;
      DO J = 1 TO I;
        RUN DER2;
        DERIV2[I, J]=DE2;
        DERIV2[J,I]=DE2;
      END;
    END;
    DELTA=SOLVE(DERIV2,DERIV1);
    IF (ITER=1 : LOGK<=LOGL) THEN DO;
      PRINT ITER (PARF') LOGL. .;
      PARF=PARF-DELTA;
      MAX=MAX(ABS(DERIV1));
      LOGK=LOGL;
    END;
    ELSE DO;
      PRINT ITER (PARF') LOGL;
      PARF=PARF-0.5*DELTA;
      MAX=MAX(ABS(DERIV1));
      LOGK=LOGL;
      PRINT"*****";
    END;
    PAR=PARF;
    ITER=ITER+1;
  END;
  IND=J(NP,1,1);
  DP=SQRT(DIAG(-INV(DERIV2))*IND);

```

```

    PRINT DERIV1 " " DP;
FINISH;

START TESTE1;
PRINT "TESTE DA RAZAO DE VEROSSIMILHANCA PARA H0:B11=B21=B31=0",;
G=-2*(LOG1-LOG0);
P_VALUE=1-PROBCHI(G,3);
PRINT G " " P_VALUE;
FINISH;

START TESTE2;
PRINT "TESTE DA RAZAO DE VEROSSIMILHANCA PARA H0:B11=B21",;
G=-2*(LOG2-LOG0);
P_VALUE=1-PROBCHI(G,1);
PRINT G " " P_VALUE;
FINISH;

DO;
RUN INICIA;
TIPO=0;
RUN CHUTE0;
RUN NEWTON;
PRINT,,,,,;
LOG0=LOGL;
TIPO=1;
RUN CHUTE1;
RUN NEWTON;
PRINT,,,,,;
LOG1=LOGL;
TIPO=2;
RUN CHUTE2;
RUN NEWTON;
LOG2=LOGL;
PRINT ,,,,,;
RUN TESTE1;
RUN TESTE2;
END;

```

PROGRAMA 8. COVSAR.PRG

```

/* ESTE PROGR. ESTIMA OS COEF. DAS COV. EM DISTR. SARKAR
   E FAZ OS TESTES DE HIPOTese DE H0:B11=B21=0 E H0:B11=B21*/

LIBNAME SSD 'C:\';
DATA DADOS;
    /* COMANDOS SAS */
RUN;

PROC IML WORKSIZE=100;
START INICIA;
    USE LIXO;
    READ ALL VAR(X Y Z) WHERE(T)=1) INTO P1; /* X<Y */

```

```

        READ ALL VAR(X Y Z) WHERE(T<1) INTO P2; /* X>Y */
        N1 = NROW(P1);
        N2 = NROW(P2);
        N = N1+N2;
        X1=P1[,1];      X2=P2[,1];
        Y1=P1[,2];      Y2=P2[,2];
        U1=J(N1,1,1);    U2=J(N2,1,1);

FINISH;
START CHUTE0;
        Z1=U1::P1[,3];    Z2=U2::P2[,3];
        NP=6;
        B12=0.01//0.01;
        BETA1=(-LOG(SUM(X1//X2)))/(Z1[+,]))';
        BETA2=(-LOG(SUM(Y1//Y2)))/(Z2[+,]))';
        PAR=B12//BETA1//BETA2;
        PARF=PAR;

FINISH;
START CHUTE1;
        Z1=U1;
        Z2=U2;
        NP=3;
        B12=0.01;
        BETA1=-LOG(SUM(X1//X2))/N;
        BETA2=-LOG(SUM(Y1//Y2))/N;
        PAR=B12//BETA1//BETA2;
        PARF=PAR;

FINISH;
START CHUTE2;
        Z1=U1::P1[,3];    Z2=U2::P2[,3];
        NP=5;
        B12=0.01//0.01;
        BETA1=-LOG(SUM(X1//X2))/N;
        BETA2=-LOG(SUM(Y1//Y2))/N;
        BETA=-LOG(SUM((X1+Y1)/(X2+Y2)))/SUM(P1[,3]//P2[,3]);
        PAR=B12//BETA1//BETA2//BETA;
        PARF=PAR;

FINISH;
START CALCO;
        B12=PAR[{1 2},];
        BETA1=PAR[{3 4},];
        BETA2=PAR[{5 6},];

FINISH;
START CALC1;
        B12=PAR[1,];
        BETA1=PAR[2,];
        BETA2=PAR[3,];

FINISH;
START CALC2;
        B12=PAR[{1 2},];
        BETA1=PAR[{3 5},];
        BETA2=PAR[{4 5},];

FINISH;

START FUN;/* CALCULA O LOG DA FUNC. DE VEROS. */
        IF TIPO=0 THEN RUN CALCO;

```

```

ELSE IF TIPO=1 THEN RUN CALC1;
ELSE RUN CALC2;
Z1B3=Z1*B12;
Z2B3=Z2*B12;
Z1B1=Z1*BETA1;
Z1B2=Z1*BETA2;
Z2B1=Z2*BETA1;
Z2B2=Z2*BETA2;
EZ1B3=EXP(Z1B3);
EZ2B3=EXP(Z2B3);
EZ1B1=EXP(Z1B1);
EZ1B2=EXP(Z1B2);
EZ2B1=EXP(Z2B1);
EZ2B2=EXP(Z2B2);
K1=EZ1B1+EZ1B2;
L1=K1+EZ1B3;
KL1=EZ1B2+EZ1B3;
XB1=-X1#EZ1B1;
YB1=EXP(-Y1#EZ1B1);
A1 = K1#KL1 - EZ1B2#L1#1B1;
GAM1=EZ1B3/K1;
A2 = GAM1#LOG(1-EXP(XB1));
A3 = (1+GAM1)#LOG(1-YB1);
K2=EZ2B1+EZ2B2;
L2=K2+EZ2B3;
KL2=EZ2B1+EZ2B3;
XB2=EXP(-X2#EZ2B2);
YB2=-Y2#EZ2B2;
B1= K2#KL2-EZ2B1#L2#XB2;
GAM2=EZ2B3/K2;
B2= GAM2#LOG(1-EXP(YB2));
B3= (1+GAM2)#LOG(1-XB2);
F = SUM(Z1B1+LOG(L1) - 2*LOG(K1)+XB1
      - Y1#KL1 + LOG(A1) +A2- A3)
  + SUM(Z2B2+LOG(L2) - 2*LOG(K2)+YB2
      - X2#KL2 +LOG(B1) +B2 -B3);
FINISH ;

START DER1;
PARA=PAR;
D1=J(NP,1,0);
D1[I,]=10##(-4)*PARA[I,];
PAR=PARA+D1;
RUN FUN;
RES1=F; /* F(BETA1+DELTA1) */
PAR=PARA-D1;
RUN FUN;
RES2=F; /* F(BETA1-DELTA1) */
DE1=(RES1-RES2)/(2*D1[I,]); /* {F(B1+D1)-F(B1-D1)}/2D1 */
FINISH;

START DER2;
PARB=PAR;
D2=J(NP,1,0);
D2[J,]=10##(-4)*PARB[J,];

```

```

    PAR=PARB+D2;
    RUN DER1;
    RES3=DE1;
    PAR=PARB-D2;
    RUN DER1;
    RES4=DE1;
    DE2=(RES3-RES4)/(2*D2[J,]);
FINISH;

START NEWTON;
  ITER=1;
  LOGK=0;
  MAX=1;
  DO WHILE (ITER<=30 & MAX>0.00001);
    RUN FUN;
    LOGL=F;
    DERIV1=J(NP,1,0);
    DO I=1 TO NP;
      RUN DER1;
      DERIV1[I,]=DE1;
    END;
    DERIV2=J(NP,NP,0);
    DO I = 1 TO NP;
      DO J = 1 TO I;
        RUN DER2;
        DERIV2[I, J]=DE2;
        DERIV2[J,I]=DE2;
      END;
    END;
    DELTA=SOLVE(DERIV2,DERIV1);
    IF (ITER=1 ; LOGK<=LOGL) THEN DO;
      PRINT ITER (PARF') LOGL, ,;
      PARF=PARF-DELTA;
      MAX=MAX(ABS(DERIV1));
      LOGK=LOGL;
    END;
    ELSE DO;
      PRINT ITER (PARF') LOGL;
      PARF=PARF-0.5*DELTA;
      MAX=MAX(ABS(DERIV1));
      LOGK=LOGL;
      PRINT"*****";
    END;
    PAR=PARF;
    ITER=ITER+1;
  END;
  IND=J(NP,1,1);
  DP=SQRT(DIAG(-INV(DERIV2))*IND);
  PRINT DERIV1 " " DP,....;
FINISH;

START TESTE1;
  PRINT "TESTE DA RAZAO DE VEROSSIMILHANCA PARA HO:B11=B21=B31=0:";
  G=-2*(LOG1-LOG0);
  P_VALUE=1-PROBCHI(G,3);

```



```

        PRINT G "      " P_VALUE,...;
FINISH;

START TESTE2;
    PRINT "TESTE DA RAZAO DE VEROSSIMILHANCA PARA H0:B11=B21:";
    G=-2*(LOG2-LOG0);
    P_VALUE=1-PROBCHI(G,1);
    PRINT G "      " P_VALUE;
FINISH;

DO;
    RUN INICIA;
    TIPO=0;
    RUN CHUTE0;
    RUN NEWTON;
    LOG0=LOGL;
    TIPO=1;
    RUN CHUTE1;
    RUN NEWTON;
    LOG1=LOGL;
    TIPO=2;
    RUN CHUTE2;
    RUN NEWTON;
    LOG2=LOGL;
    RUN TESTE1;
    RUN TESTE2;
END;

```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AITKIN, M. & CLAYTON, D. (1980) - "The Fitting of Exponential, Weibull, and Extreme Value Distributions to Complex Censored Survival Data Using GLIM", *Applied Statistics*, 29, 159-163.
- AITCHISON, J. & SILVEY, D. (1958) - "Maximum Likelihood Estimation of Parameters Subject to Restraints", *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 29, No. 3, 813-828.
- BLOCK, H.W. & BASU, A.P. (1974) - "A Continuous Bivariate Exponential Extension", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 69, No. 348, 1031-1037.
- BARLOW, R.E. & PROSCHAN, F. (1965) - *Mathematical Theory of Reliability*, New York: John Wiley and Sons, Inc.
- BASU, A.P. (1971) - "Bivariate Failure Rate", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 66, No. 333, 103-104.
- BASU, A.P. & EBRAHIMI, N. (1985) - "On a Bivariate Accelerated Life Test" *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 16, 297-304.
- BEMIS B.M, BAIN L.J. & HIGGINS J.J. (1972) - "Estimation and Hypothesis Testing for the Parameter of a Bivariate Exponential Distribution", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 67, No. 340, 927-929.

- BROWN, K & CRIBARI-NETO, F. (1992) - "On Hypothesis Testing: a Selective Look at the Lagrange Multiplier, Likelihood Ratio and Wald Tests", *Revista de Econometria*, Ano XII, No. 2.
- CHANT, D. (1974) - "On Asyntotic Tests of Composite Hypotheses in Nonstandard Conditions", *Biometrika*, Vol. 61, No. 2, 291-298.
- CLAYTON, D.G. (1978) - "A Model for Association in Bivariate Life Tables and its Application in Epidemiological Studies of Familial Tendency in Chronic Disease Incidence", *Biometrical*, Vol. 65, 141-151.
- COX, D.R. (1972) - "Regression models and life tables (with discussion)", *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B.*, Vol. 34, 187-202.
- COX, D.R. & OAKES, D. (1984) - *Analysis of Survival Data*. New York: Chapman and Hall.
- COX, D.R. & SNELL E.J.(1968) - "A General Definition of Residuals", *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, Vol. 30, 248-275.
- DOWNTON, F. (1970) - "Bivariate Exponential Distributions in Reliability Theory", *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B.*, Vol. 33, No. 3, 408-417.
- ELANDT-JOHNSON, R.C. & JOHNSON, N.L. (1980) - *Survival Models and Data Analysis*. John Wiley and Sons.
- FEIGL, P & ZELEN, M. (1965) - "Estimation of Exponential Survival Probabilities with Concomitant Information", *Biometrics*, 21, 826-838.

- FRIDAY, D.S. & PATIAL, G.P. (1977) - "A Bivariate Exponential Model with Applications to Reliability and Computer Generation of Random Variables ", *The Theory and Application of Reliability*. Academic Press, New York. 527-549.
- FREUND, H.E. (1961) - "A Bivariate Extension of the Exponential Distribution", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 56 (December), 971-977.
- GLASSER, M. (1965) - "Regression Analysis with Dependent Variable Censored", *Biometrics*, 21, 300-307.
- GROSS, A.J. & LAM, C.F. (1981) - "Paired Observations from a Survival Distribution", *Biometrics*, Vol. 37, 505-511.
- GUMBEL, E.J. "Bivariate Exponential Distributions", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 55 (December), 698-707.
- HARRIS, P (1970) - "A Multivariate Definition for Increasing Hazard Rate Distribution Functions", *Annals of Mathematical Statistics*, 41, 713-717.
- HARRIS, P & PEERS, H.W. (1980) - "The Local Power of the Efficient Scores Test Statistic", *Biometrika*, 67, 525-529.
- HAWKES, A.G. (1972) - "A Bivariate Exponential Distribution With Applications to Reliability", *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 34, 129-131.
- HAYAKAWA, T. (1975) - "The Likelihood Ratio Criteion for a Composite Hypothesis under a Local Alternative", *Biometrika*, 62, 451-460.
- HOLT, J.D. & PRENTICE, R. (1974) - "Survival Analysis in Twin Studies and Matched-pair Experiments", *Biometrika*, 61, 17-30.

- HUSTER, W.J., BROOKMEYER, R. & SELF, S.G. (1989) - "Modelling Paired Survival Data with Covariates", *Biometrics*, Vol. 45, 145-156.
- KALBFLEISCH, J.D. & PRENTICE, R.L. (1980) - *The Statistical Analysis of Failure Time Data*. John Wiley and Sons.
- LAWLESS, J.F. (1982) - *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. John Wiley and Sons.
- LEE, E.T. (1980) - *Statistical Methods for Survival Data Analysis*. Wadsworth, Belmont, California.
- MARSHALL, A.W. & OLKIN, I. (1967) "A Multivariate Exponential Distribution", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 62, 30-44.
- OAKES, D.R. (1982) - "A Model for Association in Bivariate Survival Data", *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 44, 414-428.
- PEERS, H.W. (1971) - "Likelihood Ratio and Associated Test Criteria", *Biometrika*, 58, 577-587.
- PRENTICE, R.L. (1973) - "Exponential Survival with Censoring and Explanatory Variables", *Biometrika*, 60, 279-288.
- RAFERY, A.E. (1984) - "A Continuous Multivariate Exponential Distribution and a Bivariate Exponential Distribution", *Sankhya, Ser. A*, 35, 69-78.
- RAO, C.R. (1973) - *Linear Statistical Inference and its Application*. 2a. edição, New York: John Wiley.
- SARKAR, S.K. (1987) - "A Continuous Bivariate Exponential Distribution", *American Statistical Association*, Vol. 83, No. 398, 667-675.

SAS/IML Guide for Personal Computers, Version 6. SAS Institute Inc.
1985.

SELF, S.G. & LIANG, K.Y. (1987) - "Asymptotic Properties of Maximum Likelihood Estimators and Likelihood Ratio Tests Under Nonstandard Conditions", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 82, No. 398, 605-610.

SILVEY, S.D. (1959) - "The Lagrangian Multiplier Test". *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 30, No. 2, 389-407.