Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Soluções fracas das equações de Euler incompressíveis

por

Anne Caroline Bronzi[†]

Doutorado em Matemática - Campinas - SP - 2010

Orientadora: Prof^{a}. Dr^{a}. Helena Judith Nussenzveig Lopes

Co-orientador: Prof. Dr. Milton da Costa Lopes Filho

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da Fapesp.

Soluções fracas das equações de Euler incompressíveis

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Anne Caroline Bronzi e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 24 de Agosto de 2010

Profª. Drª. Helena Judith Nussenzveig Lopes
Orientadora

Prof. Dr. Milton da Costa Lopes Filho
Co-orientador

Banca Examinadora:
Profª. Drª. Helena Judith Nussenzveig Lopes
Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
Prof. Dr. José Luiz Boldrini
Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos
Prof. Dr. Ricardo Martins da Silva Rosa

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR EM MATEMÁTICA.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Bronzi, Anne Caroline

B789s Soluções fracas das equações de Euler incompressíveis/Anne Caroline Bronzi-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Helena Judith Nussenzveig Lopes ; Milton da Costa Lopes Filho

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Euler, Equações de. 2.Solução fraca. 3.Dinâmica dos fluidos. I. Lopes, Helena Judith Nussenzveig. II.Lopes Filho, Milton da Costa. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Weak solutions of the incompressible Euler equations

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Euler equations. 2. Weak solution. 3. Fluid dynamics.

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Profa. Dra. Helena Judith Nussenzveig Lopes (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie (DM – UFSCar)
Prof. Dr. José Luiz Boldrini (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Ricardo Martins da Silva Rosa (IM - UFRJ)

Data da defesa: 24/08/2010

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 24 de agosto de 2010 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). HELENA JUDITH NUSSENZVEIG LOPES

Prof(a). Dr(a). RICARDO MARTINS DA SILVA ROSA

Prof(a). Dr(a). JORGE GUILLERMO HOUNIE

Prof(a). Dr(a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Prof(a). Dr(a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS

À minha mãe, Célia, que sempre tem as palavras certas nos momentos em que mais preciso.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço à minha família, minha mãe, Célia, e meus irmãos, Fabiana, Marcus e João. Um agradecimento especial ao Marcus, cuja luta me inspirou, assim como ele, a seguir a carreira de matemática. Acima de tudo agradeço à minha mãe, que sempre lutou para que tivéssemos uma boa educação. Nos ensinou, desde pequenos, que através do estudo poderíamos vencer na vida e que com esforço conseguimos tudo o que queremos. Agradeço também à mais nova integrante da família, minha sobrinha e afilhada, Emanuelle, que trouxe tanta alegria à nossa família.

Agradeço ao meu noivo, José Régis, meu companheiro, melhor amigo e colega de estudo, que esteve sempre ao meu lado, enfrentando todas as adversidades, desde o primeiro semestre da graduação. Com seu senso de humor inigualável e sua incrível sensibilidade, sempre me colocava para cima quando eu estava triste, perdida. Mesmo depois que se mudou para o Rio de Janeiro, esteve sempre presente, me encorajando e me apoiando. Agradeço pelas discussões matemáticas e filosóficas e por todas as brincadeiras e momentos felizes que passamos juntos. Agradeço também aos pais do Régis, Gilsa Varão e Régis Varão, que sempre me acolherem tão bem em sua casa e me tratarem como uma filha.

Agradeço aos meus amigos da graduação, Carlos Gaspar, Daniel Cariello, Daniel Tressi, Elton Lima, Fabiano Lopes, Lonardo Rabelo, Luis Felipe Bueno, Marília Franceschinelli, Paula Coury, Teófilo Reis, Thiago Ferraiol e Ulisses de Paiva. Um agradecimento especial ao Luis Felipe, que foi um amigo sempre presente e que me ajudou muito nestes últimos anos.

Agradeço ao corpo docente do IMECC, em especial aos professores Carlos Duran, Dessislava Kochloukova, Jaime Angulo, Jayme Vaz, José Luiz Boldrini, Paulo Brumati, Pedro Catuogno, Marcelo Montenegro, Marcelo Santos, Mário Mattos, Paulo Ruffino, Helena Lopes e Renato Pedrosa, que foram os responsáveis por minha formação acadêmica. Agradeço aos meus orientadores na graduação, Vera Lúcia Figueiredo, responsável pelo projeto do SAE, Renato Pedrosa, orientador do projeto do REU e Marcelo Santos, orientador de iniciação científica.

Agradeço aos funcionários da Unicamp, em especial aos funcionários do IMECC, no nome de Tânia, sempre simpática e eficiente e Dona Zefa, cujo saboroso café me mantinha acordada.

Agradeço aos meus amigos do doutorado, Allan Moura, Bruno Carvalho, Carlos Banquet, Cíntia Peixoto, Edcarlos Silva, Evandro Monteiro, Henrique Vitório, Maurício Araújo e Taísa Junges. Lembro-me da nossa união, sempre estudando juntos, ajudando uns aos outros. Fico feliz em ver que todos estão realizando seus objetivos. Sou grata também aos amigos do IMECC, Ariane Entringer, Fernanda Pereira, Grasiele Jorge, Ivan Gargate, Lino Grama, Luis Miranda, Wellington Assunção, entre outros, e aos meus companheiros da APG, Luis Roberto Almeida, Cíntia Peixoto, Luís Felipe Bueno, Márcio Valk e Thiago Ferraiol. Agradeço aos meus irmãos acadêmicos, Josiane Faria e Luiz Alberto da Silva, pela parceria.

Agradeço aos amigos do IMPA, Alan de Paula, Cristina Marques, Ivaldo Nunes e Samuel Barbosa pelas discussões matemáticas e filosóficas e por sempre me acolherem tão bem quando vou ao IMPA.

Agradeço aos meus orientadores, Helena e Milton, pela paciência e disposição em me ajudar. Seus conselhos e ensinamentos contribuíram não só para minha formação acadêmica como também pessoal. Lembro-me da primeira conversa que tive com a Helena, quando me perguntou quais eram minhas pretensões, e eu respondi que gostaria de ser pesquisadora. Foi então que ela me disse que se empenharia para isso. E hoje fico feliz de ver o fruto de nosso trabalho e agradeço por terem acreditado no meu potencial. Aproveito para agradecer aos professores A. Shnirelman, C. De Lellis e L. Szekelyhidi, pela colaboração e por terem me recebido tão bem em seus institutos.

Agradeço aos membros da banca pelas correções que ajudaram no aprimoramento desta versão final da tese.

Agradeço ao apoio financeiro da Fapesp, que tornou possível a realização deste trabalho.

"Quando nada parece dar certo, vou ver o cortador de pedras martelando sua rocha talvez cem vezes, sem que uma única rachadura apareça. Mas na centésima primeira martelada a pedra se abre em duas, e eu sei que não foi aquela que conseguiu isso, mas todas as que vieram antes."

Jacob Riis

Resumo

Neste trabalho estudamos o conceito de solução fraca de equações que modelam fluidos ideais incompressíveis. Mais precisamente, estudamos exemplos que evidenciam deficiências na definição de solução fraca das equações de Euler. Um exemplo é o fluxo de Shnirelman, que é uma solução fraca das equações de Euler, no toro bidimensional, com suporte compacto no tempo. Isso implica que as soluções fracas das equações de Euler não são únicas. Nesse trabalho construímos uma aproximação numérica do fluxo de Shnirelman, com o objetivo de obter uma visualização da estrutura do fluxo. Em um trabalho conjunto com Shnirelman, modificamos a construção original a fim de obter um fluxo com uma estrutura física mais interessante e através da qual a visualização da cascata inversa de energia se torna mais clara. Recentemente, De Lellis e Székelyhidi também construíram soluções fracas das equações de Euler, no espaço todo, com suporte compacto no tempo e espaço. A técnica utilizada por eles é inovadora e se mostrou eficiente na construção de contra-exemplos variados. Utilizamos a técnica desenvolvida por De Lellis e Székelyhidi para construir soluções fracas das equações de Euler 2D com traçador passivo que tenham suporte compacto no tempo e espaço. Por fim, em nosso trabalho também estudamos as equações de Euler com simetria helicoidal, tendo demonstrado existência global, no tempo, de soluções fracas, na ausência de rodopio helicoidal, desde que a vorticidade inicial esteja em L^p, com $p > 4/3$, e seja de suporte compacto no plano, periódico na direção axial. Este resultado representa uma melhoria em relação ao estado da arte, devido a Ettinger e Titi, que é a boa-colocação no caso de domínio limitado e com vorticidade inicial limitada.

Abstract

In this work we study the concept of weak solution of the incompressible ideal flow equations. More precisely, we study examples that highlight the shortcomings of the definition of weak solution for the Euler equations. An example is Shnirelman's flow, which is a weak solution of the Euler equations, on the bidimensional torus, compactly supported in time. This implies that weak solutions of the Euler equations are not unique. In this work we construct a numerical approximation of Shnirelman's flow, in order to visualize the structure of the flow. In joint work with Shnirelman, we modified the original construction in order to obtain a flow with more interesting physical structure whereby the visualization of the inverse energy cascade is clearer. Recently, De Lellis and Székelyhidi also constructed weak solutions of the Euler equations, in the whole space, with compact support in time and space. The technique used by them is innovative and has proved to be very effective in the construction of several counter-examples. We used the technique developed by De Lellis and Székelyhidi in order to construct weak solutions of the 2D Euler equations, coupled with a passive tracer, which are compactly supported in time and space. Finally, in our work we also studied the Euler equations with helical symmetry; we proved global existence, in time, of weak solutions, in the absence of helical swirl, provided that the initial vorticity lies in L^p, with $p > 4/3$, and has compact support in the plane, periodic in the axial direction. This result represents an improvement with respect to the state of art, due to Ettinger and Titi, who established the well-posedness, for bounded helical domains, assuming that the initial vorticity is bounded.

Sumário

Introdução

Este trabalho trata do conceito de solução fraca das equações de Euler que modelam fluidos ideais incompressíveis. Os fenômenos físicos presentes na dinâmica dos fluidos são frequentemente irregulares, portanto a noção de solução fraca é importante pois permite que escoamentos irregulares, até mesmo turbulentos, sejam estudados como soluções de equações diferenciais parciais. Esta área tem atraído muito interesse, em parte devido a sua aplicação a problemas cotidianos. Ressaltamos a atualidade do assunto, lembrando que um dos sete problemas do milênio, propostos pelo Clay Institute, é justamente o de verificar se as soluções suaves das equações de Navier-Stokes tridimensionais existem globalmente no tempo ou demonstrar que ocorre formação de singularidade em tempo finito. A mesma pergunta pode ser formulada para as equações de Euler em três dimensões, sendo este um problema em aberto de grande relevância. Muitos avanços foram feitos nesta área devido ao desenvolvimento de novas ferramentas analíticas para o tratamento de problemas não lineares, bem como ao avanço na modelagem computacional.

Neste trabalho tratamos da existência e unicidade de soluções fracas das equações de fluidos ideais e incompressíveis, que são problemas fundamentais da área. Primeiramente, investigamos a unicidade, ou melhor, a não unicidade das soluções fracas das equações de Euler incompressíveis. Inicialmente discutimos um exemplo específico, construído por Shnirelman em [32], de não unicidade de solução. Shnirelman construiu uma solução fraca, não nula, das equações de Euler, no toro bidimensional, com suporte compacto no tempo. Tendo em vista que o escoamento identicamente nulo é solução das equações de Euler, temos que a construção de Shnirelman fornece um exemplo de não unicidade. Vale ressaltar que o escoamento construído por Shnirelman está apenas em $L^2_t(L^2_x)$. Devido à estrutura indutiva da construção feita por Shnirelman pudemos, usando ferramentas computacionais, construir uma aproximação explícita do escoamento de Shnirelman através da qual pudemos visualizar a estrutura do escoamento. A construção de Shnirelman foi baseada no fenômeno da cascata inversa de energia em 2D. A ideia de Shnirelman foi construir uma sequência de soluções fracas das equações de Euler com forçamentos que imitassem a cascata inversa de energia. Isto foi feito tomando uma sequência de forçamentos cada vez mais oscilatórios de tal forma que estes forçamentos convergissem a zero e que a sequência de soluções destes problemas não homogêneos convergisse para uma solução do problema homogêneo em L^2 no tempo e no espaço. Em um trabalho em conjunto com A. Shnirelman nós modificamos a construção original, obtendo ainda assim uma solução fraca das equações de Euler com suporte compacto no tempo e espaço. A proposta inicial era obter um escoamento através do qual a visualização da cascata inversa de energia fosse mais clara. Apesar de não termos atingido a proposta inicial, o problema gerou resultados tecnicamente interessantes, justificando assim sua inclusão neste trabalho.

Em um trabalho mais recente, De Lellis e Székelyhidi também construíram um exemplo de não unicidade de solução fraca das equações de Euler. Porém o escoamento construído por eles é fisicamente mais relevante por pertencer a $L^\infty_t(L^2_x)$. Na verdade, o exemplo é ainda mais surpreendente pois, primeiro, a construção deles pode ser feita em qualquer dimensão e, segundo, a velocidade e pressão obtidas são limitadas no espaço e no tempo. Além disso, a ferramenta utilizada por De Lellis e Székelyhidi é inovadora, mostrando-se eficiente na construção de contra-exemplos variados. Eles reescrevem as equações de Euler como uma inclusão diferencial e usam integração convexa para obter uma solução fraca das equações de Euler com suporte compacto no espaço e no tempo. Neste trabalho consideramos as equações de Euler 2D com traçador passivo, tendo construído um exemplo de não unicidade de solução fraca utilizando tal ferramenta. Mais precisamente, considere as equações de Euler bidimensionais com traçador passivo,

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0 \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla)b = 0 \\ div\ u = 0 \end{cases}$$

onde $u = u(t,x) \in \mathbb{R}^2$ é o campo de velocidades, $p = p(t,x) \in \mathbb{R}$ é a pressão, $b = b(t,x) \in \mathbb{R}$ é o traçador passivo e $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$

O resultado que demonstramos foi o seguinte:

Teorema 0.0.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ aberto e limitado. Então, existe $(u,b,p) \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ solução fraca das equações de Euler com traçador passivo tal que*

- $|u(t,x)| = 1$ *e* $|b(t,x)| = 1$ *q.t.p.* $(t,x) \in \Omega$,
- $u(t,x) = 0$, $b(t,x) = 0$ *e* $p(t,x) = 0$ *q.t.p.* $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$.

Para além dos trabalhos mencionados acima, investigamos também existência de soluções globais das equações de Euler 3D com simetria adicional. Qualquer resultado nesta direção é de extrema importância haja visto que o problema de existência global no tempo de soluções fracas das equações de Euler 3D está completamente em aberto. Em alguns casos específicos, ao se impor que as equações preservem algumas simetrias, o problema pode tornar-se analiticamente tratável. Por exemplo, é sabido que, ao se impor simetria axial às equações de Euler 3D e uma condição geométrica adicional, obtém-se soluções fracas das equações de Euler que existem globalmente no tempo. Outra simetria que pode ser imposta ao problema é a chamada simetria helicoidal, em que o escoamento é covariante relativo a rotações e translações simultâneas em relação ao eixo de simetria. Uma quantidade importante no caso de simetria helicoidal é a chamada velocidade de rodopio, que é componente da velocidade tangente às hélices. Ao se impor a simetria helicoidal na ausência de velocidade de rodopio pode-se demonstrar existência global de solução. O estudo de soluções fracas das equações de Euler com simetria helicoidal na ausência de rodopio foi iniciado por Ettinger e Titi, em um trabalho recente, veja [15]. Os autores provaram a boa-colocação das equações de Euler 3D com simetria helicoidal sem rodopio no caso de domínio limitado e vorticidade inicial limitada. Em nosso trabalho, determinamos a regularidade crítica que a vorticidade inicial deve satisfazer para se obter existência global das soluções fracas. Mais precisamente, demonstramos que, se a vorticidade inicial pertence a L^p, com $p > 4/3$, tem suporte compacto nos planos axiais e é periódica na direção axial então existe uma solução fraca globalmente no tempo.

Descreveremos agora a disposição deste trabalho. No primeiro capítulo fazemos uma breve introdução às equações de Euler. Iniciamos com a dedução das equações de Euler incompressíveis nas formulações em termos da velocidade e da vorticidade. Em seguida, vemos que tanto a energia quanto a norma L^p da vorticidade (no caso bidimensional) são conservadas. A conservação de energia serve como estimativa *a priori* na demonstração do teorema de existência local de soluções das equações de Euler, que é apresentada na seção 1.5 usando o método de energia. Já a conservação da norma L^p da vorticidade no caso bidimensional é utilizada juntamente com o critério de continuação de Beale-Kato-Majda para demonstrar existência global de soluções no caso bidimensional. Introduzimos também a noção de solução fraca e enunciamos o teorema de Yudovich, que estabelece existência e unicidade de solução fraca em 2D. Além disso, estudamos exemplos de escoamentos com simetria. No caso de simetria axial sem rodopio vemos que a solução existe globalmente no tempo, o que não acontece necessariamente no caso com rodopio. Outro exemplo estudado foi o dos escoamentos com simetria helicoidal, novamente no caso sem rodopio tem-se existência global no tempo de solução em domínios limitados. No final do capítulo discutimos o problema de formação de singularidade.

No segundo capítulo discutimos o exemplo de não unicidade das equações de Euler no toro bidimensional. O capítulo divide-se em duas seções. Na primeira explicamos a construção original de Shnirelman e apresentamos os resultados numéricos que obtivemos. Na segunda seção, explicamos a modificação feita na construção original, demonstramos os resultados necessários para obter a convergência da sequência gerada através desta construção modificada e, por fim, exibimos os resultados numéricos.

No terceiro capítulo, construímos um exemplo de não unicidade de soluções fracas para Euler 2D com traçador passivo. Iniciamos o capítulo com a descrição da ferramenta desenvolvida por De Lellis e Székelyhidi, que une inclusão diferencial e integração convexa. Em seguida aplicamos esta ferramenta ao nosso problema e ao longo da seção demonstramos apenas os resultados onde foram feitas modificações em relação ao trabalho de De Lellis e Székelyhidi. No final da seção mostramos a não unicidade de soluções fracas para as equações da magnetohidrodinâmica 3D, com uma certa simetria como um corolário do resultado principal.

Por fim, no último capítulo, nós demonstramos existência global de soluções fracas das equações de Euler 3D com simetria helicoidal, sem rodopio, assumindo que a vorticidade inicial esteja em L^p, para algum $p > 4/3$, que tenha suporte compacto no plano e seja periódica na direção axial. O capítulo é iniciado introduzindo-se as definições e resultados conhecidos no sentido das distribuições. Em seguida, exprimimos uma fórmula para a função de Green associada ao Laplaciano em $\mathbb{R}^3$, periódico na terceira componente. Isso é feito com o intuito de obter a Lei de Biot-Savart, para expressar a velocidade em termos da vorticidade, no caso em que temos periodicidade em relação à terceira componente. Com esta fórmula em mãos, na seção seguinte, introduzimos a definição de solução fraca para as equações de Euler com simetria helicoidal sem rodopio. Em seguida, provamos a boa-colocação do problema no caso suave. Assim, construímos uma sequência de soluções suaves e passamos a um limite fraco, provamos que o limite fraco obtido é solução fraca do problema em questão. Inicialmente isso é feito no caso de vorticidade balanceada, isto é, de integral zero. Finalmente, introduzimos uma nova definição de solução fraca, para o caso em que a vorticidade não é balanceada, e demonstramos o teorema de existência também para este caso.

Capítulo 1

Introdução às equações de Euler

As equações de Euler, introduzidas por Leonhard Euler em 1757 no artigo "Principes generaux du mouvement des fluides", descrevem o movimento dos fluidos. Podemos dividir os escoamentos em duas categorias, os incompressíveis, que preservam volume, e os compressíveis, que não preservam volume. Os escoamentos hidrodinâmicos são tipicamente incompressíveis e podem ser modelados pelas equações de Euler incompressíveis.

Além da interpretação física das equações de Euler como um modelo para o movimento de fluidos incompressíveis existe também uma interpretação geométrica, introduzida por Arnold em [1] e estudada por Ebin e Marsden em [14], onde as soluções clássicas das equações de Euler incompressíveis podem ser vistas como geodésicas no grupo de todos os difeomorfismos que preservam volume.

Neste capítulo faremos uma introdução à teoria das equações de Euler incompressíveis. Começaremos pela dedução das equações de Euler em termos da velocidade e da vorticidade e em seguida exprimiremos as quantidades conservadas, que serão estimativas *a priori* para demonstração de teoremas de existência e unicidade. Por fim, estudaremos exemplos de escoamentos com simetrias e trataremos do problema de singularidade. O conteúdo deste capítulo foi extraído dos livros [6], [23], [28] e das notas de aula da Professora Helena Lopes referentes à disciplina de Dinâmica dos Fluidos.

1.1 Dedução das equações de Euler

O movimento de um fluido pode ser descrito através de dois pontos de vista, o Lagrangiano e o Euleriano. Na descrição Lagrangiana fixamos a atenção em um elemento do fluido e estudamos sua evolução ao longo do tempo. Já na descrição Euleriana, fixamos a atenção num instante t e posição x e estudamos as quantidades de interesse (e.g., o campo de velocidades) neste instante e posição. Visto que na dedução das equações de Euler trabalharemos tanto com a descrição Lagrangiana quanto com a Euleriana inicialmente vamos introduzir ambas descrições e estudar a relação existente entre elas.

Seja $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$ a região ocupada pelo fluido. Na descrição Lagrangiana o movimento do fluido é representado pelo mapa $X = X(t, \alpha)$, chamado de *mapa Lagrangiano*, onde $\alpha \in \mathcal{D}$ é uma partícula do fluido no tempo $t = 0$. Temos que o mapa Lagrangiano X satisfaz o seguinte sistema,

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = u(t, X) \\ X(0, \alpha) = \alpha. \end{cases} \tag{1.1}$$

Na descrição Euleriana, o movimento do fluido é descrito em termos de funções dependentes de x e t (aqui x e t são variáveis independentes) e não de $X(t, \alpha)$ e t. Sendo assim, se uma quantidade tem representação Euleriana $f(t, x)$ então sua representação Lagrangiana será $g(t, \alpha) = f(t, X(t, \alpha))$ e, fixado $\alpha \in \mathcal{D}$, sua derivada será dada por

$$\frac{d}{dt} g(t, \alpha) = \frac{Df}{Dt}(t, X(t, \alpha))$$

onde $\dfrac{D}{Dt} := \dfrac{\partial}{\partial t} + (u \cdot \nabla)$ é chamada de derivada material (ou derivada convectiva). De fato,

$$\frac{d}{dt} g(t, \alpha) = \frac{\partial}{\partial t}(f(t, X(t, \alpha))) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t, \alpha)) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X(t, \alpha)) \frac{\partial}{\partial t} X^i(t, \alpha)$$

e por (1.1) temos que,

$$\frac{d}{dt} g = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} u^i = \frac{\partial f}{\partial t} + (u \cdot \nabla) f.$$

A fim de exprimir a mudança de coordenadas Lagrangianas para Eulerianas e vice-versa vamos introduzir o Jacobiano da mudança de variáveis, $J(t, \alpha) = \det[D_\alpha X](t, \alpha)$, e estudar suas propriedades.

Lema 1.1.1. *O Jacobiano J satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $J(0,\alpha) = 1$;

(ii) $\dfrac{d}{dt}J(t,\alpha) = [(div\ u)(t, X(t,\alpha))]J(t,\alpha)$;

(iii) *se* $div\ u = 0$ *então* $J(t,\alpha) = 1$ *para todo* $t > 0$.

A demonstração do lema 1.1.1 é simples e pode ser encontrada em [6].

Agora faremos a dedução das equações de Euler para fluidos incompressíveis ou seja, fluidos em que o campo de velocidades u satisfaz a condição de incompressibilidade div $u = 0$. A dedução que apresentaremos será baseada nas leis de conservação de massa e de momento.

Antes de iniciarmos a dedução das equações de Euler, vamos demonstrar o Teorema do Transporte que é uma ferramenta necessária na dedução das equações de Euler.

Seja W_0 um subconjunto de $\mathcal{D}$. Um domínio material é um conjunto da forma

$$W_t = \{x = X(t,\alpha) : \alpha \in W_0\}. \tag{1.2}$$

Supondo que u seja suave temos que, pelo teorema de Existência e Unicidade de soluções para EDO's, W_0 possui um único domínio material W_t associado.

Lema 1.1.2. *Suponha que u seja suave. Sejam $W_0 \subset \mathcal{D}$ um aberto limitado com fronteira suave e f uma função suave. Se f satisfaz a seguinte propriedade:*

$$\int_{W_t} f(t,x)dx = 0, \qquad \textit{para todo domínio material } W_t \textit{ associado a } W_0,$$

então $f \equiv 0$.

Demonstração. Fixe $s > 0$ e tome $U \subset \mathcal{D}$ um aberto qualquer. Defina $W_0 = (X(s,\cdot))^{-1}(U)$ e seja W_t o domínio material associado a W_0. Como u é suave segue que $W_s = U$. Logo, temos que

$$0 = \int_{W_s} f(s,x)dx = \int_U f(s,x)dx,$$

ou seja, a integral de $f(s,\cdot)$ se anula para qualquer aberto U. Portanto, $f(s,x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{D}$ mas, como s é arbitrário, temos que $f \equiv 0$. $\square$

Teorema 1.1.1 (Teorema do Transporte). *Sejam $u = u(t,x)$ uma função suave e $f = f(t,x)$ uma função em $\mathcal{C}^1([0,T],\mathcal{D})$. Seja $W_0 \subset \mathcal{D}$ um aberto limitado com fronteira suave e W_t o domínio material associado a W_0. Então*

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} f dx = \int_{W_t}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + div\,(uf)\right)dx.$$

Demonstração. Começamos aplicando a mudança de variáveis Eulerianas para Lagrangianas, depois usamos o lema 1.1.1 e por fim voltamos as variáveis Eulerianas,

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} f(t,x)dx = \frac{d}{dt}\int_{W_0} f(t,X(t,\alpha))J(t,\alpha)d\alpha =$$

$$= \int_{W_0}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,X(t\alpha)) + \nabla_x f(t,X(t,\alpha))\cdot\frac{d}{dt}X(t,\alpha)\right)J(t,\alpha)d\alpha + \int_{W_0} f(t,X(t,\alpha))\frac{d}{dt}J(t,\alpha)d\alpha =$$

$$= \int_{W_0}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,X(t,\alpha)) + \nabla_x f(t,X(t,\alpha))\cdot u(t,X(t,\alpha))\right)J(t,\alpha)d\alpha +$$

$$+\int_{W_0} f(t,X(t,\alpha))\text{div }u(t,X(t,\alpha))J(t,\alpha)d\alpha =$$

$$= \int_{W_t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \nabla_x f(t,x)\cdot u(t,x)\right)dx + \int_{W_t} f(t,x)\text{div }u(t,x)dx =$$

$$= \int_{W_t}\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \text{div }(f(t,x)u(t,x))dx.$$

□

Observação . Se div $u = 0$ então

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} f dx = \int_{W_t}\frac{Df}{Dt}dx$$

e portanto $vol(W_t) = vol(W_0)$. De fato,

$$\frac{d}{dt}vol(W_t) = \frac{d}{dt}\int_{W_t} 1dx = \int_{W_t}\frac{D1}{Dt}dx = 0.$$

Agora vamos retomar a dedução das equações de Euler incompressíveis. No que segue, assumimos suavidade do campo de velocidades $u = u(t,x)$, da densidade $\rho = \rho(t,x)$ e da pressão $p = p(t,x)$. Além disso, assumimos que os domínios materiais W_t são interiores a $\mathcal{D}$.

A *Lei de Conservação de Massa* diz que

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho(t,x)dV(x) = 0. \tag{1.3}$$

Pela *Lei de Conservação de Massa* e pelo teorema do Transporte temos que

$$\int_{W_t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } (u\rho)\right) dV = 0,$$

como esta identidade vale para todo W_t, pelo lema 1.1.2, obtemos a chamada *Equação de Continuidade*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } (u\rho) = 0.$$

A *Lei de Conservação de Momento* diz que a taxa de variação do momento linear total em W_t é igual à força resultante agindo sobre W_t, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho(t,x)u(t,x)dx = F_{total}(t). \tag{1.4}$$

Existem dois tipos de força:

(i) *força de volume:* são forças que agem à distância.

Estas forças podem ser representadas por

$$\int_{W_t} \rho(t,x)g(t,x)dx$$

onde g pode ser a densidade da força gravitacional, eletromagnética, entre outras.

(ii) *força superficial:* são forças provenientes do contato do fluido em W_t com um fluido externo a W_t ou com as paredes do recipiente.

No caso de fluidos ideais estas forças são perpendiculares à fronteira ∂W_t e podem ser representadas por

$$-\int_{\partial W_t} p(t,x)n(x)dS(x)$$

onde p é a pressão e n é o vetor unitário normal exterior a ∂W_t.

Primeiro, usando o teorema do Transporte e a equação de Continuidade, reescrevemos o lado esquerdo da equação (1.4) como

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho u^i dx = \int_{W_t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u^i) + \text{div } (\rho u^i u) dx =$$

$$= \int_{W_t} \left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } (u\rho) \right) u^i + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u^i \right) \rho \right) dx = \int_{W_t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u^i \right) \rho dx,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho u dx = \int_{W_t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) \rho dx.$$

Observe que segue do teorema da divergência que

$$\int_{\partial W_t} p(t,x) n(x) dS(x) = \int_{W_t} \nabla p(t,x) dx.$$

Portanto, a partir da Segunda Lei de Newton, concluímos que

$$\int_{W_t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) \rho dx = \int_{W_t} (\rho g - \nabla p) dx.$$

Como a identidade acima vale para todo W_t, pelo lema 1.1.2, segue que

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g - \nabla p,$$

esta equação leva o nome de *Equação do Momento*.

No caso de fluidos incompressíveis (div $u = 0$) e homogêneos ($\rho = 1$) obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{array}{ll} \dfrac{Du}{Dt} = -\nabla p + g & \textit{Equação de Momento} \\ \text{div } u = 0 & \textit{Equação de Continuidade} \end{array}$$

Portanto, temos que as *equações de Euler* ideais e incompressíveis se escrevem como

$$(E) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = g \\ \text{div } u = 0 \end{cases}$$

1.2 Equação de vorticidade

A vorticidade é o vetor que mede a quantidade infinitesimal de rotação de um fluido e aponta na direção do eixo de rotação do fluido. Em escoamentos bidimensionais a vorticidade é perpendicular ao plano. A vorticidade é calculada como o rotacional da velocidade. É através desta caracterização que deduzimos a equação de vorticidade em termos da vorticidade e da velocidade. No entanto, veremos que podemos expressar a velocidade em termos da vorticidade e com isso podemos escrever a equação de vorticidade apenas em termos da vorticidade.

Definição 1.2.1. *Seja $u = u(t, x) \in \mathbb{R}^3$ um campo de velocidades, então a vorticidade $\omega = \omega(t, x) \in \mathbb{R}^3$ associada a u é definida por*

$$\omega = rot\ u.$$

Aplicando o rotacional às equações de Euler tridimensionais e usando o fato que div $u = 0$ obtemos a *equação de vorticidade*,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)u = 0.$$

A equação acima deve ser acoplada ao seguinte sistema elítico com coeficientes constantes

$$\begin{cases} \text{rot } u = \omega \\ \text{div } u = 0. \end{cases}$$

Podemos simplificar a equação de vorticidade eliminando a velocidade. Para fazer isso basta inverter o sistema elítico acima. Como a resolução de sistemas elíticos envolve condições de fronteira específicas vamos trabalhar apenas com o caso em que nosso fluido ocupa o $\mathbb{R}^3$ todo.

Seja u uma solução suave das equações de Euler em todo $\mathbb{R}^3$ que se anula no infinito. Como u tem divergente nulo segue que existe um potencial Ψ tal que $u = -\text{rot } \Psi$. Portanto, Ψ satisfaz o sistema $\Delta\Psi = \omega$ em todo $\mathbb{R}^3$. Invertemos o Laplaciano no espaço todo e obtemos que

$$\Psi(t, x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\omega(t, y)}{|x - y|} dy + H(t, x).$$

onde H é uma função harmônica qualquer. Logo,

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x - y}{|x - y|^3} \times \omega(t, y) dy + \text{rot } H(t, x).$$

Suponha que ω tenha suporte compacto. Então, temos que a integral $\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\frac{x-y}{|x-y|^3}\times\omega(t,y)dy$ se anula para $|x|\to\infty$. De fato, fixe $R>0$ tal que supp $\omega\subset B_R(0)$. Para todo x e y tais que $|y|\le R$ e $|x|\ge 2R$ temos que $|x-y|\ge|x|-|y|\ge|x|-R\ge|x|-\dfrac{|x|}{2}=\dfrac{|x|}{2}$. Sendo assim,

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{x-y}{|x-y|^3}\times\omega(t,y)dy\right|\le\frac{1}{4\pi}\int_{|y|\le R}\frac{1}{|x-y|^2}|\omega(t,y)|dy\le\frac{C}{|x|^2}\to 0 \text{ quando } |x|\to\infty.$$

Como por hipótese u se anula no infinito então rot H também se anula no infinito. Logo, rot H é uma função harmônica, limitada e que se anula no infinito. Portanto, pelo teorema de Liouville (veja [2], capítulo 2) rot H é constante, mas como rot H se anula no infinito temos que rot $H\equiv 0$.

Assim, obtemos a *Lei de Biot-Savart*

$$u(t,x)=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{x-y}{|x-y|^3}\times\omega(t,y)dy$$

que expressa a velocidade em termos da vorticidade.

Introduziremos agora a noção de escoamentos bidimensionais como escoamentos tridimensionais que possuem a seguinte forma especial

$$u=u(t,x_1,x_2,x_3)=(u^1(t,x_1,x_2),u^2(t,x_1,x_2),0).$$

Observe que neste caso temos que a vorticidade associada a u é dada por

$$\omega=\omega(t,x_1,x_2,x_3)=(0,0,\partial_1u^2(t,x_1,x_2)-\partial_2u^1(t,x_1,x_2)).$$

Vamos identificar a vorticidade com sua terceira componente e com isso definimos a vorticidade associada a escoamentos bidimensionais como sendo o campo escalar $\omega=\omega(t,x_1,x_2)=\partial_1u^2(t,x_1,x_2)-\partial_2u^1(t,x_1,x_2)$. Sendo assim, temos que a equação de vorticidade para escoamentos bidimensionais é dada por

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+(u\cdot\nabla)\omega=0$$

acoplada ao sistema elítico com coeficientes constantes

$$\begin{cases}\text{rot } u=\omega\\ \text{div } u=0.\end{cases}$$

Neste caso também podemos simplificar a equação de vorticidade eliminando a velocidade. No caso bidimensional a *Lei de Biot-Savart* fica

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)^{\perp}}{|x-y|^2}\omega(t,y)dy.$$

É através da equação de vorticidade que vemos a diferença entre fluidos bidimensionais e tridimensionais. A equação de vorticidade para fluidos bidimensionais é uma equação de transporte que nos diz que a vorticidade é transportada pelo fluido. No entanto, na equação de vorticidade para fluidos tridimensionais aparece o termo adicional $(\omega \cdot \nabla)u$, chamado de *estiramento de vorticidade*, que é responsável por um possível aumento e acumulação da vorticidade.

1.3 Quantidades conservadas

Nesta seção demonstraremos que a energia para escoamentos bidimensionais e tridimensionais e que a norma L^p da vorticidade associada a escoamentos bidimensionais são conservadas. Estes resultados são utilizados como estimativas *a priori* na demonstração dos teoremas de existência e unicidades de soluções.

Conservação de energia para escoamentos 2D e 3D

Seja u uma solução suave das equações de Euler. A fim de obter uma estimativa para a norma L^2 de u fazemos o produto interno da equação do Momento por u e integramos em x,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx = -\int_{\mathbb{R}^n} ((u(t,x)\cdot\nabla)u(t,x))\cdot u(t,x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla p(t,x)\cdot u(t,x)dx$$

Temos que os dois termos do lado direito da equação acima se anulam. De fato, como div $u = 0$ segue que $(u\cdot\nabla)u^i = \text{div }(u^i u)$ e portanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} ((u\cdot\nabla)u)\cdot u dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} \text{div }(u^i u)\cdot u^i dx = -\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} u^i u\cdot\nabla u^i dx = -\int_{\mathbb{R}^n} ((u\cdot\nabla)u)\cdot u dx,$$

donde concluímos que $\int_{\mathbb{R}^n} ((u\cdot\nabla)u)\cdot u dx = 0$. Temos também que $u\cdot\nabla p = \text{div }(pu)$, logo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla p\cdot u dx = \int_{\mathbb{R}^n} \text{div }(pu)dx = 0.$$

Com isso, temos que

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx = 0$$

donde segue que

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2} = \|u(0,\cdot)\|_{L^2}$$

Conservação da norma L^p da vorticidade de escoamentos 2D

Lembre que a equação de vorticidade para escoamentos bidimensionais é dada por

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u\cdot\nabla)\omega = 0.$$

Observe que podemos reescrever a equação acima em coordenadas Lagrangianas,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}(t, X(t,\alpha)) + (u(t,X(t,\alpha))\cdot\nabla)\omega(t,X(t,\alpha)) = 0.$$

Agora, note que $\frac{d}{dt}\omega(t,X(t,\alpha)) = \frac{\partial \omega}{\partial t}(t,X(t,\alpha)) + \frac{dX}{dt}(t,\alpha)\cdot\nabla\omega(t,X(t,\alpha))$, mas a derivada do mapa Lagrangiano é igual a velocidade, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\omega(t,X(t,\alpha)) = \frac{\partial \omega}{\partial t}(t,X(t,\alpha)) + u(t,\alpha)\cdot\nabla\omega(t,X(t,\alpha)).$$

Portanto, pela equação de vorticidade, segue que

$$\frac{d}{dt}\omega(t,X(t,\alpha)) = 0.$$

Logo, a vorticidade é constante ao longo das trajetória de partículas, isto é,

$$\omega(t,X(t,\alpha)) = \omega(0,\alpha) \equiv \text{const}.$$

Segue da identidade acima que a norma L^∞ da vorticidade é conservada. O mesmo vale para as normas L^p, para todo $1 \le p < \infty$. De fato, seja f uma função mensurável qualquer. Como div $u = 0$ temos que, pelo lema 1.1.1, o Jacobiano da mudança de coordenadas Eulerianas para Lagrangianas é igual a 1, logo para qualquer domínio material Ω_t temos que vale a seguinte identidade

$$\int_{\Omega_t} f(\omega(t,x))dx = \int_{\Omega_0} f(\omega(0,\alpha))d\alpha.$$

Como o domínio Ω do fluido é sempre um domínio material temos que, em particular, as normas L^p são conservadas.

1.4 Resultados de existência e unicidade para Euler 2D e 3D

Nesta seção enunciaremos os principais resultados de existência e unicidade de soluções para Euler 2D e 3D. Começaremos com o resultado de existência e unicidade de soluções clássicas, em seguida introduziremos a noção de solução fraca para poder enunciar o teorema de Yudovich que estabelece a existência e unicidade de soluções fracas para vorticidade inicial limitada e com suporte compacto. Por fim, veremos o critério de Beale-Kato-Majda que diz que se uma solução não pode ser continuada então a integral no tempo da norma L^∞ da vorticidade é infinita.

Antes de enunciar os teoremas vamos introduzir os espaços de funções que serão utilizados ao longo do texto.

Definição 1.4.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos*

- $H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$,
- $V^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in H^m(\mathbb{R}^n) : div\ u = 0\}$.

O teorema a seguir é devido a T. Kato, veja [21]. No entanto, o enunciado, da forma que está, foi extraído do livro [23], capítulo 2, seção 2.

Teorema 1.4.1 (Kato). *Seja $u_0 \in V^m$, com $m \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 2$. Então existe $T_0 = T_0(\|u_0\|_{H^m}) > 0$ tal que para todo $T < T_0$ existe uma única solução $u \in \mathcal{C}^1([0,T]; V^m)$ das equações de Euler com dado inicial u_0,*

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p \\ div\ u = 0 \\ u(0,\cdot) = u_0 \\ |u| \to 0 \ quando\ |x| \to \infty. \end{cases} \tag{1.5}$$

Abaixo introduzimos a definição de solução fraca e enunciamos o resultado de existência e unicidade de soluções fracas para as equações de Euler devido à V. Yudovich, veja [36].

Definição 1.4.2. *Seja* $\omega_0 \in L^\infty_c(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ *e* $T > 0$ *fixo. Então,* $\omega = \omega(t,x) \in L^\infty([0,T);L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}))$ *é uma solução fraca da formulação em termos da vorticidade das equações de Euler se, para toda* $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c([0,T]\times\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ *temos que*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \omega\phi_t dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (u\cdot\nabla\phi)\omega dxdt - \int_{\mathbb{R}^2} \phi(T,x)\omega(T,x)dx + \int_{\mathbb{R}^2} \phi(0,x)\omega_0(x)dx = 0$$

onde $u(t,x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2}\omega(t,y)dy.$

Teorema 1.4.2 (Yudovich)**.** *Dado* $\omega_0 \in L^\infty_c(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ *existe uma única solução fraca das equações de Euler no sentido da definição 1.4.2.*

A definição de solução fraca e o enunciado do teorema de Yudovich foram extraídos do capítulo 3, seção 2, do livro [23], onde encontra-se também a demonstração do teorema.

Por fim, vamos enunciar o critério de continuação de Beale-Kato-Majda (veja [4]). O enunciado do teorema foi extraído do livro [23], capítulo 2, seção 3. Este resultado é utilizado na demonstração da existência global no tempo das soluções suaves de Euler 2D.

Teorema 1.4.3 (Beale-Kato-Majda)**.** *Seja* $u_0 \in V^m$, *com* $m \geq \left[\dfrac{n}{2}\right] + 2$. *Considere* $u \in \mathcal{C}^1([0,T];V^m)$ *a solução das equações de Euler com dado inicial* u_0 *e seja* $\omega = rot\ u$ *a vorticidade associada. Seja* T^* *o tempo máximo de existência da solução dentro dessa classe. Então, se* $T^* < \infty$ *tem-se que*

$$\int_0^{T^*} \|\omega(\cdot,t)\|_{L^\infty} dt = \infty.$$

Corolário 1.4.1. *Seja* $u_0 \in V^m$, *com* $m \geq 3$. *Então a solução* u *das equações de Euler 2D com dado inicial* u_0 *existe globalmente e* $u \in \mathcal{C}^1([0,+\infty);V^m)$.

1.5 Demonstração do teorema de existência e unicidade

Nesta seção, apresentamos a demonstração do teorema de existência e unicidade de solução local no tempo das equações de Euler em duas e três dimensões, via método de energia. Vamos seguir a demonstração dada em [23], capítulo 2, seção 2. Uma demonstração mais detalhada encontra-se em [28], capítulo 3, seção 2.

Enunciamos alguns resultados que serão utilizados no decorrer desta seção porém omitiremos suas demonstrações:

Lema 1.5.1 (Aubin-Lions)**.** *Sejam X, Y e Z espaços de Banach tais que $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$, onde a primeira imersão é compacta. Sejam $T > 0$ e $\{u_n\}$ uma sequência limitada em $L^\infty([0,T];X)$. Suponha que a sequência $\{u^n\}$ é equicontínua como funções definidas em $[0,T]$ com valores em Z. Então a sequência $\{u_n\}$ é relativamente compacta em $\mathcal{C}([0,T];Y)$.*

Este resultado foi extraído do livro [23],capítulo 2, seção 2, onde encontra-se demonstrado e sua demonstração é devido a H. Nussenzveig Lopes.

Lema 1.5.2. *Sejam $u, v \in H^m(\mathbb{R}^n)$, com $m \in \mathbb{N}$.*

(1) Se u, v são limitadas e contínuas então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|uv\|_{H^m} \leq C(\|u\|_{L^\infty}\|D^m v\|_{L^2} + \|v\|_{L^\infty}\|D^m u\|_{L^2}),$$

(2) Se u, v e ∇u são limitadas e contínuas então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha(uv) - uD^\alpha v\|_{L^2} \leq C(\|\nabla u\|_{L^\infty}\|D^{m-1}v\|_{L^2} + \|v\|_{L^\infty}\|D^m u\|_{L^2}).$$

Seja $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, a molificação $\mathcal{M}^\varepsilon u$ de u é dada pela seguinte convolução

$$\mathcal{M}^\varepsilon u(x) = (\rho^\varepsilon * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho^\varepsilon(x-y)f(y)dy$$

onde $\rho \in C_c^\infty$ é o molificador usual e $\rho^\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$.

Lema 1.5.3. *Propriedades dos molificadores*

(i) para toda $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{M}^\varepsilon u \to u$ uniformemente em compactos e

$$\|\mathcal{M}^\varepsilon u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty};$$

(ii) para toda $u \in H^m$

$$D^\alpha \mathcal{M}^\varepsilon u = \mathcal{M}^\varepsilon D^\alpha u, \quad \forall |\alpha| \leq m;$$

(iii) para toda $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}^\varepsilon u) v dx = \int_{\mathbb{R}^n} u (\mathcal{M}^\varepsilon v) dx;$$

(iv) para toda $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{M}^\varepsilon u \to u$ *em* H^s *e a taxa de convergência na norma* H^{s-1} *é linear em* ε,

$$\|\mathcal{M}^\varepsilon u - u\|_{s-1} \leq C\varepsilon \|u\|_s;$$

(v) para toda $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$ *e* $\varepsilon > 0$,

$$\|\mathcal{M}^\varepsilon u\|_{m+k} \leq \frac{c_{mk}}{\varepsilon^k} \|u\|_m, \quad \|\mathcal{M}^\varepsilon D^k u\|_{L^\infty} \leq \frac{c_k}{\varepsilon^{n/2+k}} \|u\|_{L^2}.$$

Lema 1.5.4 (Decomposição de Hodge em H^m)**.** *Todo campo vetorial* $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *pode ser decomposto de modo único como*

$$u = \omega + \nabla\varphi,$$

onde div $\omega = 0$. *Além disso, esta decomposição é ortogonal em* L^2.

O projetor de Leray, definido por

$$P : L^2 \longrightarrow V^0 \quad (1.6)$$

$$u \longmapsto Pu = \omega, \quad (1.7)$$

comuta com derivadas, convoluções e mapeia H^s *em* V^s.

A ideia da demonstração de existência de solução é provar existência de uma sequência de soluções de problemas suavizados e depois passar ao limite e provar que o limite da sequência é solução das equações de Euler.

Considere a versão molificada das equações de Euler,

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \mathcal{M}^\varepsilon(((\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon) \cdot \nabla)(\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon)) = -\nabla p^\varepsilon \\ \text{div } u^\varepsilon = 0 \\ u^\varepsilon(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

Agora, aplicamos o projetor de Leray na versão molificada das equações de Euler e obtemos,

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon = -P[\mathcal{M}^\varepsilon(((\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon)\cdot\nabla)(\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon))] \\ Pu^\varepsilon = 0 \\ u^\varepsilon(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{1.8}$$

No lema a seguir provamos existência e unicidade para a versão molificada das equações de Euler:

Lema 1.5.5. *Dados $u_0 \in V^m$, com $m \in \mathbb{N}$, e $\varepsilon > 0$ existe $T^\varepsilon > 0$ e uma solução $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^1([0,T^\varepsilon);V^m)$ do problema (1.8).*

Demonstração. Para mostrar existência de solução usaremos o Teorema de existência local de Picard para EDO's em espaços de Banach. Para isso precisamos mostrar que F_ε, dada por $F_\varepsilon(u) = -P[\mathcal{M}^\varepsilon(((\mathcal{M}^\varepsilon u)\cdot\nabla)(\mathcal{M}^\varepsilon u))]$, satisfaz

(i) $F_\varepsilon : V^m \to V^m$,

(ii) F_ε é localmente Lipschitz.

Claramente div $F_\varepsilon(u) = 0$ para todo $u \in V^m$, logo, para mostrar (i), basta verificarmos que $F_\varepsilon(u) \in H^m$ para todo $u \in V^m$, mas isso segue da estimativa abaixo

$$\|F_\varepsilon(u)\|_{H^m} \le \|\mathcal{M}^\varepsilon(((\mathcal{M}^\varepsilon u)\cdot\nabla)(\mathcal{M}^\varepsilon u))\|_{H^m} \le C\|\mathcal{M}^\varepsilon(\text{div }(\mathcal{M}^\varepsilon u\otimes\mathcal{M}^\varepsilon u))\|_{H^m} \le$$

$$\le \frac{C}{\varepsilon}\|\mathcal{M}^\varepsilon u\otimes\mathcal{M}^\varepsilon u\|_{H^m} \le \frac{C}{\varepsilon^{3/2}}\|u\|_{H^m}^2.$$

Para (ii), observe que

$$\|F_\varepsilon(u) - F_\varepsilon(v)\|_{H^m} \le \|\mathcal{M}^\varepsilon(((\mathcal{M}^\varepsilon u)\cdot\nabla)(\mathcal{M}^\varepsilon u)) - \mathcal{M}^\varepsilon(((\mathcal{M}^\varepsilon v)\cdot\nabla)(\mathcal{M}^\varepsilon v))\|_{H^m} \le$$

$$\le \frac{C}{\varepsilon}(\|\mathcal{M}^\varepsilon u\otimes\mathcal{M}^\varepsilon(u-v)\|_{H^m} + \|\mathcal{M}^\varepsilon v\otimes\mathcal{M}^\varepsilon(u-v)\|_{H^m} \le \frac{C}{\varepsilon^{3/2}}(\|u\|_{H^m} + \|v\|_{H^m})\|u-v\|_{H^m},$$

donde concluímos que F_ε é localmente Lipschitz. $\square$

Lema 1.5.6. *Seja $u \in \mathcal{C}^1([0,T);V^m)$ solução de (1.8). Então*

$$\|u\|_{H^m} \le \|u_0\|_{H^m} e^{C\int_0^t \|\nabla\mathcal{M}^\varepsilon u\|_{L^\infty}\,ds}.$$

Demonstração. Para cada multi-índice α temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u(t,x)|^2dx = -\int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha u P[\mathcal{M}^\varepsilon D^\alpha(((\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon)\cdot\nabla)(\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon))]dx =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \mathcal{M}^\varepsilon u D^\alpha(((\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon)\cdot\nabla)(\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon))dx =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \mathcal{M}^\varepsilon u((D^\alpha(\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon))\cdot\nabla)(\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon)) - ((\mathcal{M}^\varepsilon u)\cdot\nabla)D^\alpha\mathcal{M}^\varepsilon u)dx.$$

Agora, somando sob todos os multi-índices $0 \leq |\alpha| \leq m$ e usando lema 1.5.2 (ii) obtemos que

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{H^m}^2 \leq 2\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}\|D^\alpha\mathcal{M}^\varepsilon u\|_{L^2}\|(D^\alpha(\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon))\cdot\nabla)(\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon)) - ((\mathcal{M}^\varepsilon u)\cdot\nabla)D^\alpha\mathcal{M}^\varepsilon u\|_{L^2} \leq$$

$$\leq C\|u\|_{H^m}(\|\nabla\mathcal{M}^\varepsilon u\|_{L^\infty}\|(D^{m-1}D\mathcal{M}^\varepsilon u\|_{L^2} + \|D^m\mathcal{M}^\varepsilon u\|_{L^2}\|\nabla\mathcal{M}^\varepsilon u\|_{L^\infty}) \leq C\|\nabla\mathcal{M}^\varepsilon u\|_{L^\infty}\|u\|_{H^m}^2.$$

□

Demonstração do Teorema 1.4.1. Na demonstração do lema anterior obtivemos a seguinte estimativa

$$\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon\|_{H^m}^2 \leq C\|\nabla\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^\infty}\|u^\varepsilon\|_{H^m}^2.$$

Seja $m > \frac{n}{2}+1$, então

$$\|\nabla\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|\nabla u^\varepsilon\|_{H^{m-1}} \leq \|u^\varepsilon\|_{H^m}.$$

Logo, $\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon\|_{H^m}^2 \leq C\|u^\varepsilon\|_{H^m}^3$ e portanto $\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon\|_{H^m} \leq C\|u^\varepsilon\|_{H^m}^2$. Com isso, obtemos a seguinte estimativa da norma H^m de u:

$$\|u^\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^m} \leq \frac{\|u_0\|_{H^m}}{1-CT\|u_0\|_{H^m}}$$

para todo $0 \leq t \leq T$ onde $T < T_0 \equiv (C\|u_0\|_{H^m})^{-1}$. Em outras palavras, para todo $0 < T < T_0$ temos que $\{u^\varepsilon\}$ é limitada em $L^\infty([0,T];H^m(\mathbb{R}^n))$. Temos também que

$$\|\partial_t u^\varepsilon\|_{H^{m-1}} = \|F_\varepsilon(u^\varepsilon)\|_{H^{m-1}} \leq C\|\text{div }(\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon\otimes\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon)\|_{H^{m-1}} \leq C\|\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon\otimes\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon\|_{H^{m-1}} \leq$$

$$\leq C\|\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^\infty}\|D^m\mathcal{M}^\varepsilon u^\varepsilon)\|_{L^2} \leq C\|u^\varepsilon\|_{H^m}^2.$$

Portanto, a sequência $\{u^\varepsilon\}$ é limitada em $Lip([0,T];H^{m-1}(\mathbb{R}^n))$ para todo $T < T_0$. Fixamos $R > 0$ e usamos o lema de Aubin-Lions com $X = H^m(B(0,R)$ e $Y = Z = H^{m-1}$ para concluir que sequência $\{u^\varepsilon\}$ é relativamente compacta em $\mathcal{C}([0,T];H^{m-1}(B(0,R)))$. Tome R_k uma sequência de números positivos tal que $R_k \to \infty$. Usando o argumento da diagonal de Cantor concluímos que $\{u^\varepsilon\}$ possui subsequência que converge fortemente em $\mathcal{C}([0,T];H^{m-1}_{loc}(\mathbb{R}^n))$, a um limite u. Além disso, como $m > \dfrac{n}{2} + 2$, a convergência e o limite estão de fato em $\mathcal{C}([0,T];\mathcal{C}^1_{loc}(\mathbb{R}^n))$.

Vamos reescrever a equação (1.8) como

$$u^\varepsilon = u_0 + \int_0^t F_\varepsilon(u^\varepsilon)ds.$$

Defina $F(u) := P[(u\cdot\nabla)u]$. Então, $F_\varepsilon(u^\varepsilon) \to F(u)$ em $\mathcal{C}([0,T];\mathcal{C}_{loc}(\mathbb{R}^n))$. Portanto, para todo $R > 0$,

$$\left\| u^\varepsilon - u_0 - \int_0^t F(u)ds \right\|_{L^\infty([0,T]\times B(0,R))} = \left\| \int_0^t F_\varepsilon(u^\varepsilon)ds - \int_0^t F(u)ds \right\|_{L^\infty([0,T]\times B(0,R))} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

Como temos que $\|u^\varepsilon - u\|_{L^\infty([0,T]\times B(0,R))} \to 0$ segue que

$$u = u_0 + \int_0^t F(u)ds,$$

o que, a posteriori, mostra que $u \in C^1([0,T];\mathcal{C}^1_{loc}(\mathbb{R}^n))$. Diferenciando a identidade acima no tempo, obtemos que u é solução do seguinte sistema

$$\begin{cases} \partial_t u + P[(u\cdot\nabla)u] = 0 \\ \text{div } u = 0 \\ u(0,\cdot) = u_0 \\ |u| \to 0 \text{ quando } |x| \to \infty. \end{cases}$$

Agora, aplicando o lema 1.5.4 para $\partial_t u + (u\cdot\nabla)u$ obtemos que

$$\partial_t u + (u\cdot\nabla)u = w + \nabla p$$

com $P[w] = w$ e $P[\nabla p] = 0$. Portanto,

$$0 = \partial_t u + P[(u\cdot\nabla)u] = P[\partial_t u + (u\cdot\nabla)u] = w,$$

donde concluímos que

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p.$$

Agora, provaremos unicidade de solução. Para isso, suponha que existam duas soluções do problema (1.5), u_1 e u_2, em $L^\infty([0,T]; V^m(\mathbb{R}^n))$, com a mesma velocidade inicial u_0. Então temos que

$$\partial_t(u_1 - u_2) + P[(u_1 \cdot \nabla)u_1 - (u_2 \cdot \nabla)u_2] = 0,$$

com $(u_1 - u_2)(0, \cdot) = 0$. Multiplicamos a equação acima por $u_1 - u_2$ e integramos no espaço para obter que

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |u_1 - u_2|^2 dx = -\int_{\mathbb{R}^3} (u_1 - u_2)((u_1 \cdot \nabla)u_1 - (u_2 \cdot \nabla)u_2)dx =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^3} (u_1 - u_2)(((u_1 - u_2) \cdot \nabla)u_1)dx \leq \|\nabla u_1\|_{L^\infty} \|u_1 - u_2\|_{L^2}^2 \leq C\|u_1\|_{H^m} \|u_1 - u_2\|_{L^2}^2.$$

Usando o lema de Gronwall concluímos que $u_1 - u_2 \equiv 0$. Portanto a solução é única. $\square$

1.6 Outros exemplos de escoamentos com simetria

Nesta seção estudaremos outros exemplos de escoamentos com simetria: escoamentos com simetria axial com e sem rodopio (casos em que a componente de rodopio da velocidade, que é a componente tangente aos círculos, é diferente de zero ou não, respectivamente) e escoamentos com simetria helicoidal sem rodopio (caso em que a velocidade é ortogonal às hélices). Escoamentos com simetria axial sem rodopio são similares a escoamentos bidimensionais e para este tipo de escoamento existem resultados de existência e unicidade de soluções. Por outro lado, escoamentos com simetria axial com rodopio possuem comportamento tridimensional não trivial e estes podem apresentar singularidades em tempo finito. Os escoamentos com simetria helicoidal sem rodopio são mais parecidos com escoamentos bidimensionais e existem alguns resultados de existência e unicidade de soluções global no tempo.

As definições e resultados que apresentaremos a seguir foram extraídos do livro [28], capítulo 2, seção 3.

Considere o sistema de coordenadas cilíndricas

$$x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta,\ x_3 = x_3$$

e sua base ortonormal usual,

$$e^r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)\,,\ e^\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\,,\ e^3 = (0, 0, 1),$$

onde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Seja $v = v(t, x_1, x_2, x_3)$ um campo vetorial.

$$u = u(t, r, \theta, x_3) = u^r(t, r, \theta, x_3)e^r + u^\theta(t, r, \theta, x_3)e^\theta + u^3(t, r, \theta, x_3)e^3$$

Definição 1.6.1. *Um campo vetorial v tem simetria axial se se não depende de θ, ou seja,*

$$v = v^r(t, r, x_3) = v^r(t, r, x_3)e^r + v^\theta(t, r, x_3)e^\theta + v^3(t, r, x_3)e^3.$$

Dizemos que um escoamento tem simetria axial se o campo de velocidades u e a pressão p tem simetria axial.

Em escoamentos com simetria axial escrevemos o campo de velocidades u como

$$u = u^r(t, r, x_3) = u^r(t, r, x_3)e^r + u^\theta(t, r, x_3)e^\theta + u^3(t, r, x_3)e^3,$$

e chamamos u^θ de componente de rodopio da velocidade. Se em um escoamento com simetria axial o termo $u^\theta \neq 0$ dizemos que este escoamento tem rodopio e se $u^\theta = 0$ dizemos que o escoamento não tem rodopio.

Agora vamos escrever as equações de Euler para escoamentos com simetria axial. Primeiro vejamos que o operador $u \cdot \nabla$ em coordenadas cilíndricas se escreve como $u^r\partial_r + \dfrac{u^\theta}{r}\partial_\theta + u^3\partial_3$. De fato,

$$u \cdot \nabla = u^1\partial_1 + u^2\partial_2 + u^3\partial_3 = \left(u^r\frac{x_1}{r} + u^\theta\frac{x_2}{r}\right)\partial_1 + \left(-u^r\frac{x_2}{r} + u^\theta\frac{x_1}{r}\right)\partial_2 + u^3\partial_3 =$$

$$= u^r\left(\frac{x_1}{r}\partial_1 + \frac{x_2}{r}\partial_2\right) + u^\theta\left(-\frac{x_2}{r}\partial_1 + \frac{x_1}{r}\partial_2\right) + u^3\partial_3 = u^r\partial_r + \frac{u^\theta}{r}\partial_\theta + u^3\partial_3.$$

Portanto, usando as seguintes identidades

$$\partial_r e^r = \partial_r e^\theta = \partial_r e^3 = 0,$$

$$\partial_\theta e^r = e^\theta, \partial_\theta e^\theta = -e^r, \partial_\theta e^3 = 0,$$

$$\partial_3 e^r = \partial_3 e^\theta = 0, \partial_3 e^3 = 1,$$

$$\partial_\theta u^r = \partial_\theta u^\theta = \partial_\theta u^3 = \partial_\theta p = 0,$$

temos que

$$(u \cdot \nabla)u = \left(u^r \partial_r + \frac{u^\theta}{r}\partial_\theta + u^3\partial_3\right)\left(u^r e^r + u^\theta e^\theta + u^3 e^3\right) =$$

$$= u^r\left(\partial_r u^r e^r + \partial_r u^\theta e^\theta + \partial_r u^3 e^3\right) + \frac{u^\theta}{r}(u^r e^\theta - u^\theta e^r) + u^3\left(\partial_3 u^r e^r + \partial_3 u^\theta e^\theta + \partial_3 u^3 e^3\right) =$$

$$= \left(u^r\partial_r u^r + u^3\partial_3 u^r - \frac{(u^\theta)^2}{r}\right)e^r + \left(u^r\partial_r u^\theta + u^3\partial_3 u^\theta + \frac{u^\theta}{r}u^r\right)e^\theta + \left(u^r\partial_r u^3 + u^3\partial_3 u^3\right)e^3 =$$

$$= \left(\left(u^r\partial_r + u^3\partial_3\right)u^r - \frac{(u^\theta)^2}{r}\right)e^r + \left(\left(u^r\partial_r + u^3\partial_3\right)u^\theta + \frac{u^\theta}{r}u^r\right)e^\theta + \left(u^r\partial_r + u^3\partial_3\right)u^3 e^3.$$

Por fim, observe que

$$\text{div } u = \nabla \cdot u = \left(e^r\partial_r + e^\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + e^3\partial_3\right)(u^r e^r + u^\theta e^\theta + u^3 e^3) = \partial_r u^r + \frac{u^r}{r} + \partial_3 u^3$$

$$\text{e} \quad \nabla p = \partial_r p e^r + \partial_3 p e^3.$$

Então, em coordenadas cilíndricas, as equações de Euler com simetria axial se escrevem

$$\begin{cases} \partial_t u^r + \left(u^r\partial_r + u^3\partial_3\right)u^r - \dfrac{(u^\theta)^2}{r} = -\partial_r p \\ \partial_t u^\theta + \left(u^r\partial_r + u^3\partial_3\right)u^\theta + \dfrac{u^\theta u^r}{r} = 0 \\ \partial_t u^3 + \left(u^r\partial_r + u^3\partial_3\right)u^3 = -\partial_3 p \\ \partial_r u^r + \dfrac{u^r}{r} + \partial_3 u^3 = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Escoamentos com simetria axial com rodopio

Nesta seção estamos considerando escoamentos com simetria axial com rodopio, ou seja, escoamentos com simetria axial onde $u^\theta \neq 0$. Começaremos calculando a vorticidade de tais escoamentos,

$$\omega = \nabla \times u = \left(e^r\partial_r + e^\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + e^3\partial_3\right) \times (u^r e^r + u^\theta e^\theta + u^3 e^3) =$$

$$= e^r(\partial_r u^r e^r + \partial_r u^\theta e^\theta + \partial_r u^3 e^3) + e^\theta\frac{1}{r}(u^r\partial_\theta e^r + u^\theta\partial_\theta e^\theta) + e^3(\partial_3 u^r e^r + \partial_3 u^\theta e^\theta + \partial_3 u^3 e^3) =$$

$$= (\partial_r u^\theta e^3 - \partial_r u^3 e^\theta) + \frac{1}{r} u^\theta e^3 + (\partial_3 u^r e^\theta - \partial_3 u^\theta e^r) = -\partial_3 u^\theta e^r + (\partial_3 u^r - \partial_r u^3) e^\theta + \left(\frac{1}{r} u^\theta + \partial_r u^\theta \right) e^3$$

Portanto, a vorticidade é dada por,

$$\omega = -\partial_3 u^\theta e^r + \omega^\theta e^\theta + \frac{1}{r} \partial_r (r u^\theta) e^3 \tag{1.10}$$

onde

$$\omega^\theta = \partial_3 u^r - \partial_r u^3.$$

Agora vamos deduzir uma equação para a vorticidade escalar ω^θ. Para isso, derivamos a primeira equação de (1.9) com respeito a x_3 e a terceira com respeito a r e subtraímos as duas equações obtidas:

$$\partial_t \omega^\theta + \left(u^r \partial_r + u^3 \partial_3 \right) \omega^\theta + (\partial_r u^r + \partial_3 u^3) \omega^\theta = \partial_3 \left(\frac{(u^\theta)^2}{r} \right).$$

Agora, usando a última equação de (1.9) temos que

$$\partial_t \omega^\theta + \left(u^r \partial_r + u^3 \partial_3 \right) \omega^\theta - \frac{u^r}{r} \omega^\theta = \partial_3 \left(\frac{(u^\theta)^2}{r} \right).$$

Observe que a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$\partial_t \left(\frac{\omega^\theta}{r} \right) + \left(u^r \partial_r + u^3 \partial_3 \right) \left(\frac{\omega^\theta}{r} \right) = \frac{1}{r^4} \partial_3 ((r u^\theta)^2).$$

Seja $\dfrac{\tilde{D}}{Dt} := \partial_t + u^r \partial_r + u^3 \partial_3$ a derivada material agindo apenas no plano axial. Logo,

$$\frac{\tilde{D}}{Dt} \left(\frac{\omega^\theta}{r} \right) = \frac{1}{r^4} \partial_3 ((r u^\theta)^2). \tag{1.11}$$

Além disso, a equação para a velocidade de rodopio pode ser reescrita como

$$\frac{\tilde{D}}{Dt} \left(r u^\theta \right) = 0. \tag{1.12}$$

Da equação (1.11) concluímos que a quantidade ω^θ / r não é conservada ao longo das trajetórias de partículas e o responsável por essa variação é a velocidade de rodopio u^θ.

As equações (1.11) e (1.12) descrevem completamente a dinâmica de vórtices. De fato, da condição de incompressibilidade segue que existe um função $\psi = \psi(t, r, x_3)$ tal que

$$u^r = \frac{\partial_3 \psi}{r}, \qquad u^3 = -\frac{\partial_r \psi}{r}.$$

A função corrente ψ é definida pela vorticidade ω^θ através da equação,

$$L\psi = \frac{\omega^\theta}{r}$$

onde L é seguinte operador elítico linear

$$L = \frac{1}{r}\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_r\right) + \frac{1}{r^2}\partial_3^2.$$

Portanto, resolvendo a equação para ψ em termos da vorticidade ω^θ, depois calculando as velocidades u^r e u^3 e substituindo nas equações (1.11) e (1.12) nós obtemos a equação de vorticidade para ω^θ e u^θ.

Proposição 1.6.1. *Seja $u = u(t, r, x_3)$ um escoamento com simetria axial com rodopio,*

$$u = u^r e^r + u^\theta e^\theta + u^3 e^3,$$

com vorticidade correspondente dada dada por

$$\omega = -\partial_3 u^\theta e^r + \omega^\theta e^\theta + \frac{1}{r}\partial_r(ru^\theta)e^3$$

Para tais escoamentos as equações de Euler tridimensionais são equivalentes à formulação de vorticidade,

$$\frac{\tilde{D}}{Dt}\left(\frac{\omega^\theta}{r}\right) = \frac{1}{r^4}\partial_3((ru^\theta)^2),$$

$$\frac{\tilde{D}}{Dt}\left(ru^\theta\right) = 0,$$

$$L\psi = \frac{\omega^\theta}{r},$$

$$u^r = \frac{\partial_3\psi}{r}, \qquad u^3 = -\frac{\partial_r\psi}{r},$$

onde $\frac{\tilde{D}}{Dt}$ *é a derivada material dada por* $\frac{\tilde{D}}{Dt} = \partial_t + u^r\partial_r + u^3\partial_3$ *e L é o operador elítico linear* $L = \frac{1}{r}\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_r\right) + \frac{1}{r^2}\partial_3^2$.

Escoamentos com simetria axial sem rodopio

O sistema de equações que modelam escoamentos com simetria axial sem rodopio ($u^\theta = 0$) é o seguinte

$$\begin{cases} \partial_t u^r + (u^r \partial_r + u^3 \partial_3)\, u^r = -\partial_r p \\ \partial_t u^3 + (u^r \partial_r + u^3 \partial_3)\, u^3 = -\partial_3 p \\ \partial_r u^r + \dfrac{u^r}{r} + \partial_3 u^3 = 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Substituindo $u^\theta = 0$ em (1.10) obtemos que a vorticidade é dada por

$$\omega = \omega^\theta e^\theta$$

onde $\omega^\theta := (\partial_3 u^r - \partial_r u^3)$. E substituindo $u^\theta = 0$ em (1.11) obtemos que

$$\frac{\tilde{D}}{Dt}\left(\frac{\omega^\theta}{r}\right) = 0.$$

A condição de incompressibilidade pode ser reescrita como $\partial_r(ru^r) + \partial_3(ru^3) = 0$. Logo, existe $\psi = \psi(t, r, x_3)$ com simetria axial tal que

$$u^r = \frac{\partial_3 \psi}{r}, \qquad u^3 = -\frac{\partial_r \psi}{r}.$$

Logo, como $\omega^\theta = \partial_3 u^r - \partial_r u^3$ temos que $L\psi = \dfrac{\omega^\theta}{r}$ onde $L = \dfrac{1}{r}\partial_r\left(\dfrac{1}{r}\partial_r\right) + \dfrac{1}{r^2}\partial_3^2$

Proposição 1.6.2. *Seja $u = u(t, r, x_3)$ um escoamento com simetria axial sem rodopio,*

$$u = u^r e^r + u^3 e^3,$$

com vorticidade correspondente dada por $\omega = \omega^\theta e^\theta$. Para tais escoamentos as equações de Euler tridimensionais são equivalentes à formulação de vorticidade,

$$\frac{\tilde{D}}{Dt}\left(\frac{\omega^\theta}{r}\right) = 0,$$

$$L\psi = \frac{\omega^\theta}{r},$$

$$u^r = \frac{\partial_3 \psi}{r}, \qquad u^3 = -\frac{\partial_r \psi}{r},$$

onde $\dfrac{\tilde{D}}{Dt}$ é a derivada material dada por $\dfrac{\tilde{D}}{Dt} = \partial_t + u^r\partial_r + u^3\partial_3$ e L é o operador elítico linear $L = \dfrac{1}{r}\partial_r\left(\dfrac{1}{r}\partial_r\right) + \dfrac{1}{r^2}\partial_3^2$.

O teorema a seguir, devido à Majda, estabelece existência global de solução para escoamentos com simetria axial sem rodopio. O enunciado e a demonstração de tal resultado foi extraído de [26].

Teorema 1.6.1. *Seja $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$, $s > \dfrac{3}{2} + 1$, com simetria axial sem rodopio e seja $\omega_0 = \omega_0^\theta$ a vorticidade associada. Assuma que a vorticidade escalar ω_0^θ satisfaz*

(i) $|\omega_0^\theta(r, x_3)| \leq cr$,

(ii) $\omega_0^\theta(r, x_3) \geq 0$,

(iii) $\omega_0^\theta(r, x_3)$ *tem suporte compacto.*

Então a solução u, com dado inicial u_0, existe globalmente no tempo.

Demonstração. Como a quantidade $\dfrac{\omega^\theta}{r}$ é conservada ao longo da trajetória de partículas $X = X(t, \alpha)$ segue que

$$\frac{\omega^\theta(t, X(t, \alpha))}{|(X^1(t, \alpha), X^2(t, \alpha))|} = \frac{\omega_0^\theta(\alpha)}{|(\alpha^1, \alpha^2))|}$$

logo,

$$0 \leq \omega^\theta(t, X(t, \alpha)) = |(X^1(t, \alpha), X^2(t, \alpha))| \frac{\omega_0^\theta(\alpha)}{|(\alpha^1, \alpha^2)|} \leq C|(X^1(t, \alpha), X^2(t, \alpha))|.$$

Defina,

$$R(t) = \sup_{\alpha \in \text{ supp } \omega^\theta} |X(t, \alpha)|$$

e observe que

$$\frac{d}{dt} R(t) \leq \sup_{\alpha \in \text{supp } \omega^\theta} \left| \frac{d}{dt} X(t, \alpha) \right| \leq$$

$$\leq C \sup_{\alpha \in \text{supp } \omega^\theta} \int_{|X(t,\alpha) - y| \leq 2R(t)} |X(t, \alpha) - y|^{-2} \omega^\theta(t, y) dy \leq$$

$$\leq CR(t) + C \sup_{\alpha \in \text{supp } \omega^\theta} \int_{1 \leq |X(t,\alpha) - y| \leq 2R(t)} |X(t, \alpha) - y|^{-2} \omega^\theta(t, y) dy \leq$$

$$\leq CR(t) + C \sup_{\alpha \in \text{supp } \omega^\theta} \left(\int_{1 \leq |X(t,\alpha) - y| \leq 2R(t)} |X(t, \alpha) - y|^{-4} \frac{\omega^\theta(t, y)}{|(y^1, y^2)|} dy \right)^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} \leq CR(t) + M,$$

onde $P = \int_{\mathbb{R}^3} \omega^\theta(t,y)|(y^1,y^2)|dy = \int_{\mathbb{R}^3} \omega^\theta(y)|(y^1,y^2)|dy < \infty$.

Então, pela desigualdade de Gronwall, temos que $R(t) \leq Me^{Ct}$. Portanto, $\|\omega^\theta(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq cMe^{Ct}$ e com isto termina a demonstração. $\square$

Escoamentos com simetria helicoidal sem rodopio

Começaremos com a definição de simetria helicoidal. Usaremos a notação introduzida em [15]. Sejam R_θ, a transformação de rotação em torno do eixo $\hat{z}$ por um ângulo θ, dada por

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e S_θ, a superposição da rotação R_θ e uma translação ao longo do eixo $\hat{z}$ de tamanho $\kappa\theta$, dada por

$$S_\theta(x) = R_\theta(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \kappa\theta \end{pmatrix}.$$

Definição 1.6.2. *Um campo vetorial $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é helicoidal se*

$$v(S_\theta x) = R_\theta v(x) \text{ para todo } \theta \in \mathbb{R}. \tag{1.14}$$

Definição 1.6.3. *Um campo vetorial $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é ortogonal às hélices se*

$$v(x) \cdot \xi(x) = 0$$

onde $\xi(x) = (-x_2, x_1, \kappa)$.

Observações . 1) Se $\kappa = 0$, a condição de simetria helicoidal é equivalente à condição de simetria axial. Além disso, neste caso a condição de ser ortogonal às hélices é equivalente a de não ter rodopio no caso axial.

2) Se v tem simetria helicoidal com $\kappa > 0$ então v não tem simetria axial. Além disso, v é periódico na direção $\hat{z}$. De fato, como u tem simetria helicoidal então v satisfaz (1.14) para todo θ. Em particular, para $\theta = 2\pi$ temos que $v(S_{2\pi}x) = R_{2\pi}v(x)$, isto é, $v(x_1, x_2, x_3 + 2\pi\kappa) = v(x_1, x_2, x_3)$. Portanto v é periódico na direção $\hat{z}$ com período $2\kappa\pi$.

A seguir enunciaremos alguns resultados de escoamentos suaves com simetria helicoidal que podem ser encontrados demonstrados em [15].

Lema 1.6.1. *Um campo vetorial suave $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tem simetria helicoidal se e somente se $(\xi(x) \cdot \nabla)v(x) = (-v_2(x), v_1(x), 0)$, isto é,*

$$-x_2\partial_1 v^1(x) + x_1\partial_2 v^1(x) + \kappa\partial_3 v^1(x) = -v^2(x); \tag{1.15}$$

$$-x_2\partial_1 v^2(x) + x_1\partial_2 v^2(x) + \kappa\partial_3 v^2(x) = v^1(x); \tag{1.16}$$

$$-x_2\partial_1 v^3(x) + x_1\partial_2 v^3(x) + \kappa\partial_3 v^3(x) = 0. \tag{1.17}$$

Lema 1.6.2. *Seja $\omega = rot\, u$ a vorticidade associada ao campo de velocidades suave u que é solução das equações de Euler 3D, tem simetria helicoidal e é ortogonal às hélices. Então, $\omega(x) = \frac{1}{\kappa}\omega^3(x)\xi(x)$ onde $\omega^3(x) = \partial_1 u^2(x) - \partial_2 u^1(x)$ e ω é solução da seguinte equação,*

$$\frac{D\omega}{Dt} - \frac{\omega^3}{\kappa}\mathcal{R}u = 0. \tag{1.18}$$

onde $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Demonstração. Primeiro provaremos que $\omega = \frac{1}{\kappa}\omega^3\xi$. Para isso, usaremos a definição de simetria ortogonal e o lema 1.6.1,

$$\omega = rot\ u = (\partial_2 u^3 - \partial_3 u^2, \partial_3 u^1 - \partial_1 u^3, \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1) =$$

como $u \cdot \xi = 0$

$$= \left(\frac{1}{\kappa}\partial_2(x_2u^1 - x_1u^2) - \partial_3 u^2, \partial_3 u^1 - \frac{1}{\kappa}\partial_1(x_2u^1 - x_1u^2), \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\kappa}(x_2\partial_2 u^1 + u^1 - x_1\partial_2 u^2) - \partial_3 u^2, \partial_3 u^1 - \frac{1}{\kappa}(x_2\partial_1 u^1 - x_1\partial_1 u^2 - u^2), \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1\right) =$$

pelo lema 1.6.1

$$= \left(\frac{1}{\kappa}(x_2\partial_2 u^1 - x_2\partial_1 u^2), -\frac{1}{\kappa}(-x_1\partial_1 u^2 + x_1\partial_2 u^1), \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1\right) = \frac{1}{\kappa}(\partial_1 u^2 - \partial_2 u^1)\xi = \frac{\omega^3}{\kappa}\xi$$

Portanto, $\omega = \dfrac{\omega^3}{\kappa}\xi$. Agora provaremos que ω é solução de (1.18). Lembre que a equação de vorticidade para escoamentos tridimensionais é dada por

$$\frac{D\omega}{Dt} - (\omega \cdot \nabla)u = 0, \tag{1.19}$$

e é claro do lema 1.6.1 que

$$(\omega \cdot \nabla)u = \frac{1}{\kappa}\omega^3(\xi \cdot \nabla)u = \frac{1}{\kappa}\omega^3\mathcal{R}u.$$

Isto completa a demonstração. □

Corolário 1.6.1. *Seja $\omega = \operatorname{rot} u$ a vorticidade associada ao campo de velocidades suave u que é solução das equações de Euler 3D, tem simetria helicoidal e é ortogonal às hélices. Então, $\omega = \frac{1}{\kappa}\omega^3\xi$ onde $\omega^3 = \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1$ e ω^3 é solução da seguinte equação,*

$$\frac{D\omega^3}{Dt} = 0. \tag{1.20}$$

Proposição 1.6.3. *Seja ω a vorticidade associada ao campo de velocidades suave u que tem simetria helicoidal e é ortogonal às hélices. Então, (u, ω) é solução de*

$$\frac{D\omega}{Dt} - \frac{\omega^3}{\kappa}\mathcal{R}u = 0. \tag{1.21}$$

se e somente se, (u, ω^3) é solução de

$$\frac{D\omega^3}{Dt} = 0. \tag{1.22}$$

Demonstração. A demonstração da implicação direta é trivial. Reciprocamente, suponha que ω^3 é solução da seguinte equação

$$\frac{D\omega^3}{Dt} = 0. \tag{1.23}$$

observe também que do lema 1.6.2 temos que $\omega = \dfrac{\omega^3}{\kappa}\xi$. Portanto,

$$\frac{D\omega}{Dt} + \frac{\omega^3}{\kappa}\mathcal{R}u = \frac{D\omega^3}{Dt}\frac{\xi}{\kappa} + \frac{D\xi}{Dt}\frac{\omega^3}{\kappa} - \frac{\omega^3}{\kappa}\mathcal{R}u = \frac{D\omega_3}{Dt}\frac{\xi}{\kappa} + (-u_2, u_1, 0)\frac{\omega^3}{\kappa} - \frac{\omega^3}{\kappa}\mathcal{R}u = 0. \tag{1.24}$$

□

1.7 Formação de Singularidade

Ao longo das seções anteriores vimos que soluções das equações de Euler, com dado inicial suave e energia cinética finita, não desenvolvem singularidade em tempo finito quando a dimensão do espaço é $n = 2$. De fato, como já observado anteriormente, neste caso temos que a equação de vorticidade se escreve como $\dfrac{D\omega}{Dt} = 0$, logo $\omega(t, X(t, \alpha)) = \omega_0(\alpha)$ e portanto $\|\omega\|_{L^p} = \|\omega_0\|_{L^p}$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Logo, por Beale-Kato-Majda, concluímos que a solução permanece suave para todo tempo. Já para $n = 3$ o problema de formação de singularidade está em aberto. A dificuldade aparece devido ao termo de estiramento presente na equação de vorticidade para $n = 3$, podendo assim haver aumento e acumulação de vorticidade.

Capítulo 2

O escoamento de Shnirelman

No capítulo anterior enunciamos e provamos alguns resultados de existência e unicidade de soluções das equações de Euler. Agora, apresentaremos o exemplo de um escoamento que implica na não unicidade de soluções fracas das equações de Euler. Tal exemplo é conhecido como o escoamento de Shnirelman, e foi construído por Shnirelaman em [32]. A não unicidade de solução fraca segue do fato que o escoamento de Shnirelman é uma solução fraca das equações de Euler em $\mathbb{T}^2$ com suporte compacto no tempo, mas é claro que a velocidade identicamente nula também é uma solução deste problema. Esse exemplo é fundamental pois mostra que a noção usual de solução fraca para as equações de Euler incompressíveis não é forte o suficiente para garantir a unicidade. No entanto esse não é o primeiro exemplo, em [30] Scheffer construiu uma solução fraca para as equações de Euler bidimensionais com suporte compacto no tempo e espaço. No entanto, a construção de Shnirelman é mais clara e elementar do que a feita por Scheffer. Também exibiremos nesta seção uma visualização da estrutura do escoamento de Shnirelman feita através da construção de uma aproximação explícita do escoamento que obtivemos utilizando ferramentas computacionais, veja [5]. Em particular, como a construção do escoamento de Shnirelman foi baseada no uso da cascata inversa de energia em 2D, poderemos visualizar o papel da cascata inversa de energia na construção. No final da seção, faremos uma modificação na construção original. Este foi um trabalho feito em conjunto com A. Shnirelman.

2.1 Construção do escoamento de Shnirelman

Considere as equações de Euler incompressíveis bidimensionais no toro $\mathbb{T}^2$ com forçamento,

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \\ \text{div } u = 0 \end{cases}$$

onde $u = u(t,x)$ é o campo de velocidade, $p = p(t,x)$ é a pressão, $f = f(t,x)$ é uma força externa dada e $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$.

A definição de solução fraca que será usada ao longo desta seção é a seguinte:

Definição 2.1.1. *Um campo vetorial $u = u(t,x) \in L^2_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ é uma solução fraca das equações de Euler incompressíveis com forçamento $f \in \mathcal{D}'$ se, para toda função teste $\varphi = \varphi(t,x) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ e $\phi = \phi(t,x) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2, \mathbb{R}^2)$ tal que* div $\phi = 0$, *tivermos*

$$-\int\int \left[u \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + (u \otimes u) \cdot \nabla \phi \right] dxdt = \int\int f \cdot \phi dxdt$$

$$e \int\int u \cdot \nabla \varphi dxdt = 0.$$

O resultado principal de [32] é o seguinte:

Teorema 2.1.1 (Shnirelman, 1997)**.** *Existe uma solução fraca não nula para as equações de Euler homogêneas (ou seja, $f \equiv 0$), $u = u(t,x) \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ tal que $u(t,x) \equiv 0,\ |t| > C$, para alguma constante $C > 0$.*

Em particular, esse teorema implica que as soluções fracas das equações de Euler incompressíveis em 2D, no sentido da definição 2.1.1, não são únicas.

2.1.1 A construção

A construção é baseada no seguinte resultado: se $\{u_i\}_i$ é uma solução fraca de Euler 2D com forçamento $\{f_i\}_i$ tal que $f_i \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}'$ e $u_i \to u$ fortemente em L^2 então u é solução fraca de Euler 2D sem forçamento.

A ideia então é construir uma sequência $\{u_i\}_i$ de campos de velocidade com suporte compacto no tempo de tal forma que u_i seja uma solução fraca de Euler 2D com forçamento f_i, $f_i \rightharpoonup 0$ em

$\mathcal{D}'$ e $u_i \to u$ fortemente em L^2. Com isso, usando o resultado enunciado anteriormente, teremos que o limite u da sequência $\{u_i\}_i$ é uma solução fraca das equações de Euler 2D homogêneas e com suporte compacto no tempo.

Para construir tal sequência, considere u_0 uma solução suave arbitrária não nula das equações de Euler. Definimos o primeiro termo da sequência $\{u_i\}_i$ por

$$u_1(t,x) = \begin{cases} u_0(t,x), & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

A construção de $u_{i+1}(t,x)$ a partir de $u_i(t,x)$ é feita da seguinte forma: Suponha que $u_i(t,x)$ seja uma solução suave das equações de Euler no intervalo $t_{i,j} < t < t_{i,j+1}$, descontínua em $t = t_{i,j}$, $j = 1, 2, ..., J_i$, e tal que $u_i(t,x) = 0$ para $t < t_{i,1}$ e $t > t_{i,J_i}$ então $u_i(t,x)$ é solução fraca das equações de Euler com forçamento

$$f_i(t,x) = \sum_{j=1}^{J_i} f_{i,j}(x)\delta(t - t_{i,j}).$$

Para construir o campo vetorial $u_{i+1}(t,x)$ inserimos lacunas no tempo de tamanho T_i via translações da solução u_i do intervalo $(t_{i,j}, t_{i,j+1})$ para o intervalo $(t_{i,j} + jT_i, t_{i,j+1} + jT_i)$. Depois subdividimos as lacunas de tamanho T_i em um número finito de subintervalos nos quais $u_{i+1}(t,x)$ será solução suave das equações de Euler e será descontínua nos extremos destes subintervalos. Então, $u_{i+1}(t,x)$ será uma solução fraca das equações de Euler com forçamento

$$f_{i+1}(t,x) = \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{p=1}^{p_{ij}} f_{i,j,p}(x)\delta(t - t_{i,j,p}),$$

onde

$$f_{i,j,p}(x) = u_{i+1}(x, t_{i,j,p}^+) - u_{i+1}(x, t_{i,j,p}^-).$$

Note que no lugar de cada pulso $f_{i,j}(x)$ gerar o salto da velocidade em $t = t_{i,j}$, nós inserimos uma série de pulsos $f_{i,j,p}(x)$ em $t_{i,j,p}$ com o mesmo resultado final porém com retardo temporal.

Observe que a função $u_{i+1}(t,x)$ é construída independentemente em cada lacuna, logo a construção pode ser descrita completamente se nos restringirmos ao caso de uma solução fraca das equações de Euler com forçamento $f(t,x) = f(x)\delta(t - t_0)$, onde $f(x) = u_+(x) - u_-(x)$ e

$u_\pm(x) = u(x, t_0^\pm)$. A construção então fornecerá um campo vetorial $U(t,x)$ tal que $f(t,x)$ é transformado em uma série de pulsos possuindo o mesmo efeito que f. A construção se resume em definir os pulsos F_j que serão aplicados nos instantes t_j e em definir $U(x, t_j^-) = S_{t_j - t_{j-1}}(U(x, t_{j-1}^+))$ e $U(x, t_j^+) = U(x, t_j^-) + F_j$, onde S_t representa o operador solução das equações de Euler incompressíveis.

Os pulsos são escolhidos de forma que convirjam fracamente a 0 em $\mathcal{D}'$ e ao mesmo tempo forcem a solução de $u_i(x, t_{i,j}^-)$ para $u_i(x, t_{i,j}^+)$. A cascata inversa de energia, apesar de não explícita na construção, explica como isso de fato ocorre.

2.1.2 A cascata inversa de energia

As duas principais ferramentas que fazem esta construção funcionar são: o escoamento de Kolmogorov modulado e uma decomposição especial do pulso f.

O escoamento de Kolmogorov modulado é um escoamento altamente instável e oscilatório que tem sido muito utilizado no estudo da cascata inversa de energia.

Ao longo desta seção usaremos o operador diferencial $\nabla^\perp$ definido por $\nabla^\perp := (-\partial_2, \partial_1)$.

Dado uma velocidade inicial $v_0 = v(x) + w(x)$ onde, $v(x) = \nabla^\perp \psi(x), \psi(x) = k^{-1+\alpha} b(x) \sin(ka \cdot x)$ e w é um polinômio trigonométrico, existe uma solução assintótica que nós truncamos obtendo assim o escoamento de Kolmogorov aproximado

$$v^N(t,x) = v_0(x) + (t - t_0)v_1(x) + \ldots + (t - t_0)^N v_N(x),$$

tal que

$$\frac{\partial v^{(N)}}{\partial t} = A(v^{(N)}, v^{(N)}) + r_N$$
$$\text{onde} \quad A(v,w) = -P[(v \cdot \nabla)w],$$

e P é o projetor ortogonal de $L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^2)$ no subespaço de campos vetoriais de divergente nulo.

O segundo termo $v_1(x)$ da série $v^{(N)}(t,x)$ pode ser decomposto da seguinte forma

$$v_1(x) = k^{2\alpha} \frac{1}{2} P[(a^\perp \cdot \nabla B)a^\perp] + \text{ termos oscilatórios com frequência dependendo de } k,$$

onde $B(x) = (b(x))^2$.

O resultado de decomposição que mencionamos no início desta seção é o seguinte:

Teorema 2.1.2. *Seja $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ um campo vetorial tal que div $f = 0$ e $\int f(x)dx = 0$. Então existem vetores a_1 e a_2, funções suaves positivas $B_1(x)$ e $B_2(x)$, e dois operadores pseudo-diferenciais Φ_1 e Φ_2 tais que $B_j = \Phi_j f$ e f pode ser escrita como*

$$f = \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2} P[(a_j^{\perp} \cdot \nabla B_j) a_j^{\perp}].$$

2.1.3 Trabalhos numéricos

A construção de Shnirelman é feita através de uma sequência infinita de passos, mas explorando apenas os primeiros passos, por meios computacionais, podemos ter uma boa ideia da estrutura básica resultante da solução limite. Para construir as soluções aproximadas para as equações de Euler utilizamos o esquema de diferenças finitas centrada de segunda ordem de Levy-Tadmor na formulação de vorticidade das equações de Euler, veja [22], juntamente com a inversão espectral do Laplaciano.

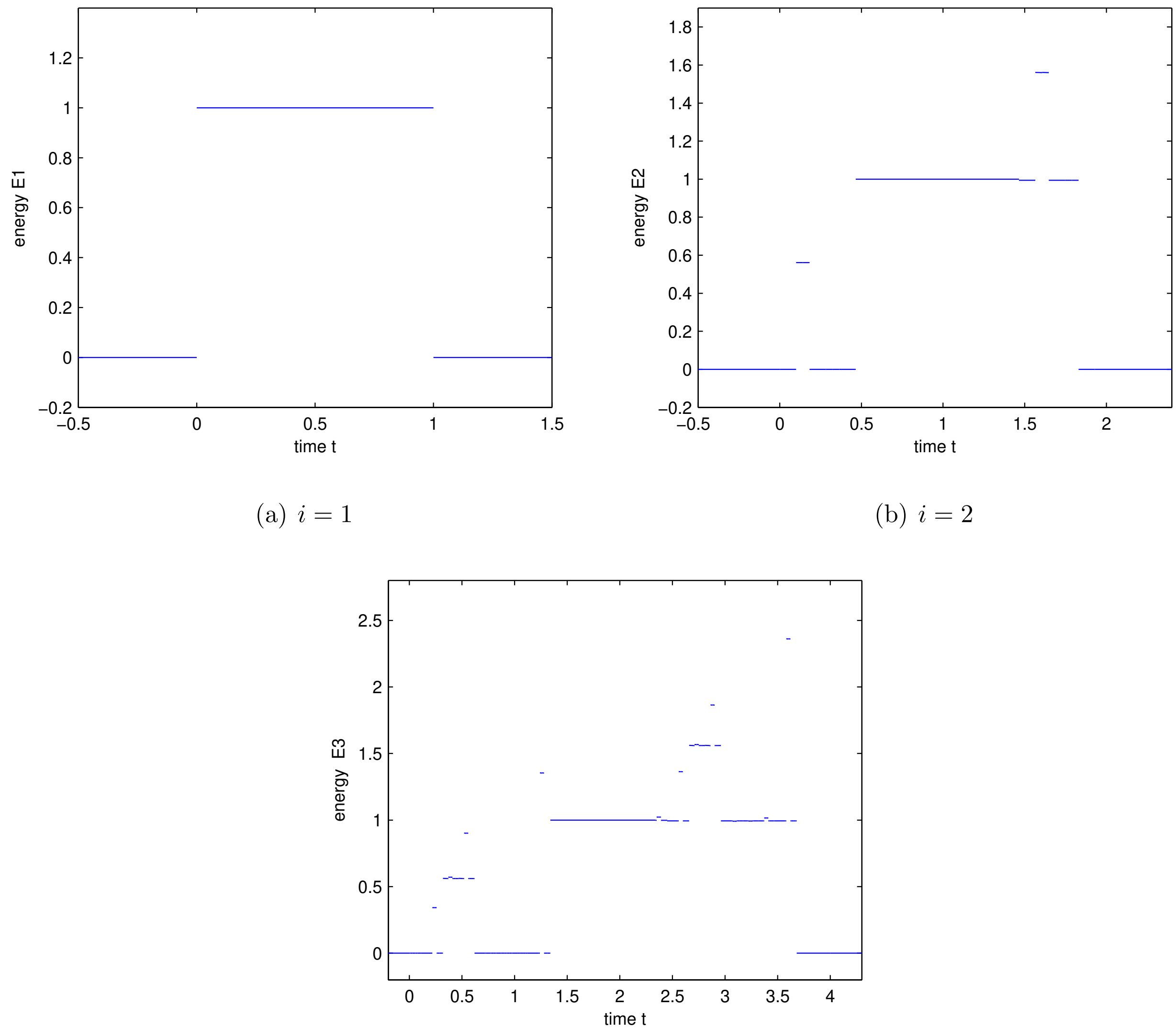
No nosso exemplo numérico, usamos o seguinte campo de velocidades como velocidade inicial para obter uma aproximação de uma solução suave das equações de Euler que depois será truncada dando origem ao primeiro termo da sequência $\{u_i\}_i$,

$$u_0(t,x) = \frac{u(t,x)}{\|u\|_{L^2}^2},$$

onde

$$u(t,x) = \begin{cases} \left(\tanh(\frac{15}{\pi}(y - \frac{\pi}{2})),\ 0.05\sin(x) \right), & y \leq \pi \\ \\ \left(\tanh(\frac{15}{\pi}(\frac{3\pi}{2} - y)),\ 0.05\sin(x) \right), & y > \pi \end{cases}$$

As figuras 2.1 (a), (b) e (c) representam a energia, calculada numericamente, de u_1, u_2 e u_3, respectivamente. Como esperado, podemos ver através das figuras que quando passamos do primeiro para o segundo passo, alguns dos pulsos que foram inseridos possuem energia maior do que o pulso inicial. Esses pulsos são campos vetoriais oscilatórios com alta frequência e isto é sua propriedade principal já que implica que estes pulsos convergem fracamente a zero e ainda assim são transformados em um campo de velocidade não nulo nas grandes escalas via o escoamento de Euler.



(a) $i = 1$ (b) $i = 2$ (c) $i = 3$

Figura 2.1: Energia $E_i(t)$ versus tempo t do campo de velocidade u_i.

Agora, usando $v_0 = v + w$ com $w = 0$ e $v = \nabla^{\perp}\psi$, onde

$$\psi(x) = k^{-1+\alpha} b(x) \sin(ka \cdot x),\ b(x) = \frac{1}{2}(\sin x_2 + 1),\ k = 4,\ \alpha = 2/3 \ \text{ e } a = (1, -1),$$

temos que

$$B(x) = \frac{1}{4}(\sin^2 x_2 + 2\sin x_2 + 1) \ \text{ e}$$

$$(v_1^1, v_1^2) = k^{2\alpha}\frac{1}{2}P[(a^{\perp} \cdot \nabla B)a^{\perp}] + \text{termos oscilatórios } (k) =$$
$$= k^{2\alpha}\left(\frac{1}{8}(\sin 2x_2 + 2\cos x_2), 0\right) + \text{termos oscilatórios}(k).$$

Abaixo temos o gráfico de $g(x_2) = k^{2\alpha}\frac{1}{8}(\sin 2x_2 + 2\cos x_2)$ como função de x_2.

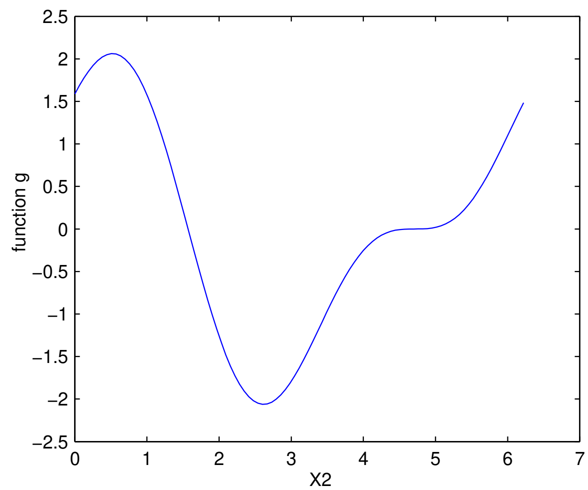


Figura 2.2: Gráfico de $g(x_2) = k^{2\alpha}\frac{1}{8}(\sin 2x_2 + 2\cos x_2)$ versus x_2.

Numericamente, obtivemos o seguinte gráfico de v_1^1 como função de (x_1, x_2).

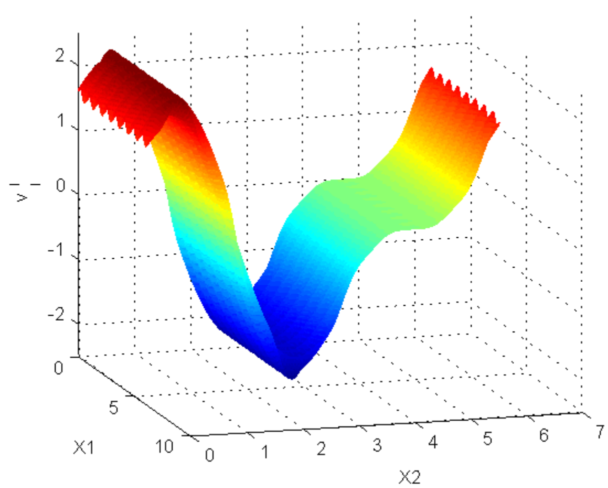
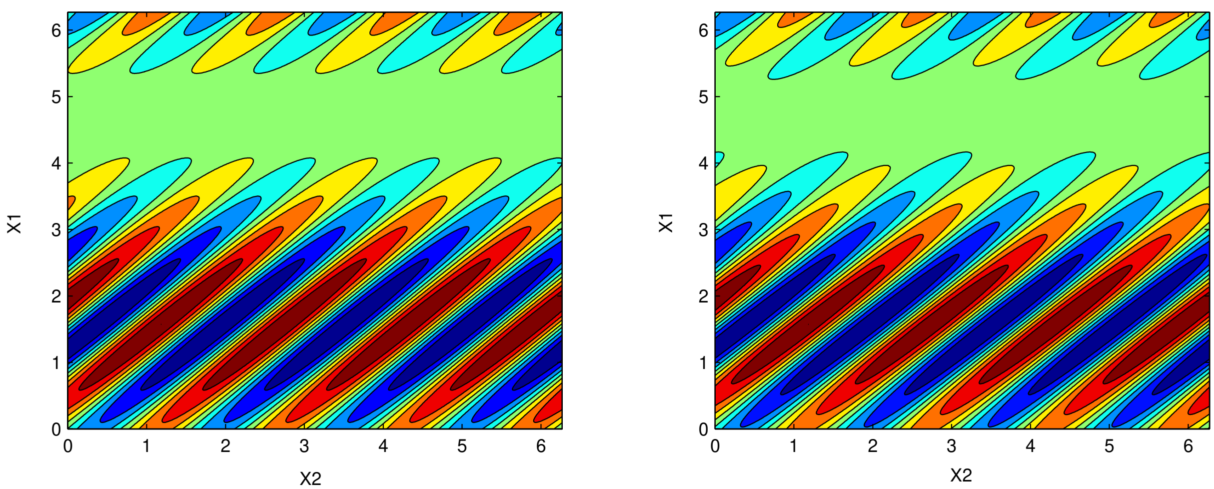


Figura 2.3: Gráfico de v_1^1 versus x_1 e x_2.

Através das figuras 2.2 e 2.3 vemos que a aproximação numérica está de acordo com a teoria.

Shnirelman usou o Teorema 2.1.2 para construir pulsos que imitassem o fenômeno de cascata inversa. Veremos que o escoamento de Kolmogorov modulado possui um comportamento de duplicação de período, e portanto, os pulsos definidos usando o Teorema 2.1.2 também apresentarão esse comportamento.

As figuras abaixo representam as curvas de nível da vorticidade associada ao escoamento de Kolmogorov aproximado v.



(a) $t = 0$ (b) $t = 0.5$

Figura 2.4: Curvas de nível da vorticidade

2.2 Construção do escoamento modificado

Nesta seção vamos apresentar uma modificação na construção do escoamento de Shnirelman. O objetivo inicial era o de obtermos um novo escoamento onde a visualização da cascata inversa de energia fosse mais clara. Apesar de não termos atingido a proposta inicial, o problema gerou resultados tecnicamente interessantes justificando assim sua inclusão neste trabalho.

A modificação é feita na velocidade inicial usada na construção do escoamento de Kolmogorov. Em particular, o escoamento obtido também será uma solução fraca das equações de Euler no toro $\mathbb{T}^2$ com suporte compacto no tempo.

A construção deste novo escoamento segue a mesma estrutura da construção original de

Shnirelman e que foi discutida na seção 2.1. Em [32], Shnirelman demonstrou que para uma velocidade inicial v_0 dada por

$$v_0(x) = \nabla^{\perp}\varphi + w(x)$$

onde $\varphi(x) = k^{\alpha-1}b(x)\sin(ka\cdot x)$, w é um polinômio trigonométricos e b suave, o escoamento de Kolmogorov

$$v^N(t,x) = v_0(x) + (t-t_0)v_1(x) + \ldots + (t-t_0)^n v_n(x) + \ldots \tag{2.1}$$

é uma série assintótica no intervalo $(t_0 - k^{-2\alpha}, t_0 + k^{2\alpha})$, se $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ e k suficientemente grande.

Para construir o novo escoamento usaremos o seguinte campo vetorial como velocidade inicial

$$v_0(x) = k^{\beta-1}\nabla^{\perp}\sin(\varphi(x)) + w(x) \tag{2.2}$$

onde

$$\varphi(x) = ka\cdot x + k^{\alpha}f(x),$$
$$\frac{1}{2} < \alpha < 1,$$
$$2\alpha + \beta > 3,$$
$$w, f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{T}^2).$$

Observe que a diferença entre a velocidade inicial utilizada na construção original e a que usaremos agora é que no nosso caso permitimos que o argumento do seno (que é o responsável pelo comportamento altamente oscilatório) seja não linear.

2.2.1 Estimativas para os termos da solução assintótica

O próximo resultado mostra que o escoamento de Kolmogorov (2.1), com v_0 dado por (2.2), é uma série assintótica em um intervalo de tempo pequeno e fornece estimativas para os termos v_n e o resto r_N.

Teorema 2.2.1. *Seja v_0 dado por (2.2), com f e w independentes de k. Então, para $k \to \infty$, existem constantes $c_n = c_n(f,w)$ tais que*

$$||v_n||_{\infty} \leq c_n k^{\alpha+(n+1)\beta+n-2} \quad \forall n = 1,2,\ldots, \ e \tag{2.3}$$

$$||r_N||_\infty \leq c_N k^{-\sigma N},\ \textit{para algum}\ \ \sigma > 0\ \ \textit{se}\ \ |t - t_0| \leq k^{-(\alpha+2\beta-1)}\ \ \textit{e}\ \alpha + \beta > 2. \tag{2.4}$$

Demonstração. Defina $v(x) = k^{\beta-1}\nabla^\perp \sin(\varphi(x))$, então $v_0(x) = v(x) + w(x)$ e

$$v_1(x) = A(v_0, v_0) = A(v + w, v + w) = A(v, v) + A(v, w) + A(w, v) + A(w, w) =$$

$$= -\mathbb{P}[Dvv] - \mathbb{P}[Dvw] - \mathbb{P}[Dwv] - \mathbb{P}[Dww].$$

Podemos ainda reescrever v como $v(x) = k^\beta \nabla^\perp \psi(x) \cos(\varphi(x))$ onde $\psi(x) = a \cdot x + k^{\alpha-1} f(x)$.

Com o objetivo de estimar o termo v_1 iremos inicialmente calcular Dvv,

$$Dvv = k^{2\beta} \left\{ \cos(\varphi) \begin{pmatrix} -\psi_{12} & -\psi_{22} \\ \psi_{11} & \psi_{21} \end{pmatrix} - k^1 \sin(\varphi) \begin{pmatrix} -\psi_2\psi_1 & -\psi_2^2 \\ \psi_1^2 & \psi_1\psi_2 \end{pmatrix} \right\} \cos(\varphi) \begin{pmatrix} -\psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix} =$$

$$= k^{2\beta} \cos^2(\varphi) \begin{pmatrix} \psi_{12}\psi_2 - \psi_{22}\psi_1 \\ -\psi_{11}\psi_2 + \psi_{21}\psi_1 \end{pmatrix} + k^{2\beta+1} \cos(\varphi)\sin(\varphi) \begin{pmatrix} -\psi_2\psi_1\psi_2 + \psi_2^2\psi_1 \\ \psi_1^2\psi_2 - \psi_1\psi_2\psi_1 \end{pmatrix} =$$

$$= k^{2\beta} \cos^2(\varphi) \begin{pmatrix} \psi_{12}\psi_2 - \psi_{22}\psi_1 \\ -\psi_{11}\psi_2 + \psi_{21}\psi_1 \end{pmatrix} =$$

$$= k^{2\beta} \cos^2(\varphi) \begin{pmatrix} k^{\alpha-1} f_{12}(a_2 + k^{\alpha-1} f_2) - k^{\alpha-1} f_{22}(a_1 + k^{\alpha-1} f_1) \\ -k^{\alpha-1} f_{11}(a_2 + k^{\alpha-1} f_2) + k^{\alpha-1} f_{21}(a_1 + k^{\alpha-1} f_1) \end{pmatrix} =$$

$$= k^{\alpha+2\beta-1} \cos^2(\varphi) \begin{pmatrix} f_{12}(a_2 + k^{\alpha-1} f_2) - f_{22}(a_1 + k^{\alpha-1} f_1) \\ -f_{11}(a_2 + k^{\alpha-1} f_2) + f_{21}(a_1 + k^{\alpha-1} f_1) \end{pmatrix} =$$

$$= k^{\alpha+2\beta-1} \cos^2(\varphi) \begin{pmatrix} f_{12}a_2 - f_{22}a_1 + f_{12}k^{\alpha-1} f_2 - f_{22}k^{\alpha-1} f_1 \\ -f_{11}a_2 + f_{21}a_1 - f_{11}k^{\alpha-1} f_2 + f_{21}k^{\alpha-1} f_1 \end{pmatrix} =$$

$$= k^{\alpha+2\beta-1} \cos^2(\varphi) \begin{pmatrix} -(a^\perp \cdot \nabla) f_2 - k^{\alpha-1}(\nabla^\perp f \cdot \nabla) f_2 \\ (a^\perp \cdot \nabla) f_1 + k^{\alpha-1}(\nabla^\perp f \cdot \nabla) f_1 \end{pmatrix} =$$

$$= k^{\alpha+2\beta-1} \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} \begin{pmatrix} -(a^\perp \cdot \nabla) f_2 \\ (a^\perp \cdot \nabla) f_1 \end{pmatrix} + k^{2\alpha+2\beta-2} \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} \begin{pmatrix} -(\nabla^\perp f \cdot \nabla) f_2 \\ (\nabla^\perp f \cdot \nabla) f_1 \end{pmatrix} =$$

$$= k^{\alpha+2\beta-1}\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}(a^\perp\cdot\nabla)\nabla^\perp f + k^{2\alpha+2\beta-2}\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}(\nabla^\perp f\cdot\nabla)\nabla^\perp f$$

$$= k^{\alpha+2\beta-1}\frac{1}{2}(a^\perp\cdot\nabla)\nabla^\perp f + k^{\alpha+2\beta-1}\frac{\cos(2\varphi)}{2}(a^\perp\cdot\nabla)\nabla^\perp f + k^{2\alpha+2\beta-2}\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}(\nabla^\perp f\cdot\nabla)\nabla^\perp f.$$

Logo,

$$\mathbb{P}[Dvv] = \frac{1}{2}k^{\alpha+2\beta-1}\mathbb{P}[(a^\perp\cdot\nabla)\nabla^\perp f] + \frac{1}{2}k^{\alpha+2\beta-1}\mathbb{P}[\cos(2\varphi)(a^\perp\cdot\nabla)\nabla^\perp f] +$$
$$+\frac{1}{2}k^{2\alpha+2\beta-2}\mathbb{P}[(1+\cos(2\varphi))(\nabla^\perp f\cdot\nabla)\nabla^\perp f].$$

Observe que $\operatorname{div}((a^\perp\cdot\nabla)\nabla^\perp f) = 0$ e portanto $\mathbb{P}[(a^\perp\cdot\nabla)\nabla^\perp f] = (a^\perp\cdot\nabla)\nabla^\perp f$. Desta forma, podemos reescrever $\mathbb{P}[Dvv]$ como

$$\mathbb{P}[Dvv] = \frac{1}{2}k^{\alpha+2\beta-1}(a^\perp\cdot\nabla)\nabla^\perp f + \frac{1}{2}k^{\alpha+2\beta-1}\mathbb{P}[\cos(2\varphi)(a^\perp\cdot\nabla)\nabla^\perp f] +$$
$$+\frac{1}{2}k^{2\alpha+2\beta-2}\mathbb{P}[(1+\cos(2\varphi))(\nabla^\perp f\cdot\nabla)\nabla^\perp f].$$

Afirmação: Se v não depende de uma potência positiva de k temos que

$$\mathbb{P}[v(x)\cos(\varphi(x))] = p(a)v(x)\cos(\varphi(x)) + o(k^{-1+\alpha}), \tag{2.5}$$
$$\mathbb{P}[v(x)\sin(\varphi(x))] = p(a)v(x)\sin(\varphi(x)) + o(k^{-1+\alpha}).$$

A demonstração da afirmação acima será postergada até o fim desta demonstração.

Usando (2.5) concluímos que

$$\mathbb{P}[Dvv] = \frac{1}{2}k^{\alpha+2\beta-1}\left((a^\perp\cdot\nabla)\nabla^\perp f + p(a)((a^\perp\cdot\nabla)\nabla^\perp f)\cos(2\varphi) + o(k^{-1+\alpha})\right) + o(k^{2\alpha+2\beta-2}).$$

Observe também que como $w\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ temos as seguintes estimativas

$$\mathbb{P}[Dww] \leq C,$$

$$\mathbb{P}[Dwv] = \mathbb{P}\left[Dwk^\beta\cos(\varphi)\begin{pmatrix}-\psi_2\\ \psi_1\end{pmatrix}\right] =$$

$$= k^\beta\mathbb{P}\left[Dw\begin{pmatrix}-a_2\\ a_1\end{pmatrix}\cos(\varphi)\right] + k^{\beta+\alpha-1}\mathbb{P}\left[Dw\begin{pmatrix}-f_2\\ f_1\end{pmatrix}\cos(\varphi)\right] =$$

$$= k^\beta p(a) D w \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \cos(\varphi) + o(k^{-1+\alpha+\beta}) = o(k^\beta),$$

$$\mathbb{P}[Dvw] = \mathbb{P}\left[\left\{ k^\beta \cos(\varphi) \begin{pmatrix} -\psi_{12} & -\psi_{22} \\ \psi_{11} & \psi_{21} \end{pmatrix} - k^{\beta+1}\sin(\varphi) \begin{pmatrix} -\psi_2\psi_1 & -\psi_2^2 \\ \psi_1^2 & \psi_1\psi_2 \end{pmatrix} \right\} w \right] =$$

$$= k^{\beta+\alpha-1}\mathbb{P}\left[\cos(\varphi)\begin{pmatrix} -f_{12} & -f_{22} \\ f_{11} & f_{21} \end{pmatrix} w\right] - k^{\beta+1}\mathbb{P}\left[\sin(\varphi)\begin{pmatrix} -a_2a_1 & -a_2^2 \\ a_1^2 & a_1a_2 \end{pmatrix} w\right] -$$

$$-k^{\beta+\alpha}\mathbb{P}\left[\sin(\varphi)\begin{pmatrix} -a_2f_1 - a_1f_2 & -2a_2f_2 \\ 2a_1f_1 & a_1f_2 + a_2f2 \end{pmatrix} w\right] - k^{\beta+2\alpha-1}\mathbb{P}\left[\sin(\varphi)\begin{pmatrix} -f_2f_1 & -f_2^2 \\ f_1^2 & f_1f_2 \end{pmatrix} w\right]$$

$$= -k^{\beta+1}\left(p(a)\begin{pmatrix} -a_2a_1 & -a_2^2 \\ a_1^2 & a_1a_2 \end{pmatrix} w\sin(\varphi) + o(k^{-1+\alpha})\right) = o(k^{\beta+1}).$$

Por hipótese, temos que $2\alpha + 2\beta - 2 > \beta + 1 > \beta$. Então, juntando todas as estimativas anteriores, obtemos que

$$v_1(x) = k^{\alpha+2\beta-1}\left((a^\perp\cdot\nabla)\nabla^\perp f + p(a)(a^\perp\cdot\nabla)\nabla^\perp f)\cos(2\varphi)\right) + o(k^{2\alpha+2\beta-2}).$$

Defina $B_1^0(x) = (a^\perp\cdot\nabla)\nabla^\perp f$ e $B_1^2(x) = p(a)(a^\perp\cdot\nabla)\nabla^\perp f)$, então podemos colocar v_1 na forma

$$v_1(x) = k^{\alpha+2\beta-1}\left(B_1^0(x) + \cos(2\varphi)B_1^2(x)\right) + o(k^{2\alpha+2\beta-2})$$

onde $B_1^j, j = 0, 2$ não depende de k. Sendo assim, a estimativa (2.3) está provada para $n = 1$.

Agora vamos estimar v_2. Lembre que $v_2(x) = \frac{1}{2}(A(v_0, v_1) + A(v_1, v_0)) = -\frac{1}{2}(\mathbb{P}[Dv_0v_1] + \mathbb{P}[Dv_1v_0])$, portanto precisamos calcular Dv_1. Observe que

$$Dv_1(x) = k^{\alpha+2\beta}\sin(2\varphi)\tilde{B_1^2}(x) + o(k^{2\alpha+2\beta-1})$$

onde $\tilde{B_1^2}$ não dependem de k.

Lembre que

$$v_0(x) = k^\beta\begin{pmatrix} -\psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix}\cos(\varphi) + w = k^\beta\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}\cos(\varphi) + w + k^{\beta+\alpha-1}\begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}\cos(\varphi) + w.$$

Defina $B_0^1 = a^{\perp}$ e reescreva v_0 como

$$v_0(x) = k^{\beta} B_0^1 \cos(\varphi) + o(k^{\alpha+\beta-1}).$$

Agora calcularemos os termos Dv_0v_1 e Dv_1v_0,

$$Dv_0v_1 = \left\{k^{\beta+1}\sin(\varphi)\tilde{B}_0^1 + o(k^{\beta})\right\}\left\{k^{\alpha+2\beta-1}\left(B_1^0(x) + \cos(2\varphi)B_1^2(x)\right) + o(k^{2\alpha+2\beta-2})\right\} =$$
$$= k^{\alpha+3\beta}\left(\sin(\varphi)\tilde{B}_0^1 B_1^0 + \frac{\sin(3\varphi)+\sin(\varphi)}{2}\tilde{B}_0^1 B_1^2\right) + o(k^{2\alpha+3\beta-1}),$$
$$Dv_1v_0 = \left\{k^{\alpha+2\beta}\sin(2\varphi)\tilde{B}_1^2(x) + o(k^{2\alpha+2\beta-1})\right\}\left\{k^{\beta}\cos(\varphi)B_0^1 + w\right\} =$$
$$= k^{\alpha+3\beta}\left(\frac{\sin(3\varphi)-\sin(\varphi)}{2}\tilde{B}_1^2 B_0^1\right) + o(k^{2\alpha+3\beta-1}).$$

Usando (2.5) e as contas acima concluímos que

$$v_2(x) = k^{\alpha+3\beta}\left(\sin(\varphi)B_2^1 + \sin(3\varphi)B_2^3\right) + o(k^{2\alpha+3\beta-1})$$

onde B_i^j não depende de k. Com isso, temos que a estimativa (2.3) está provada também para $n = 2$.

Por fim, vamos reescrever v_3 como a soma de um termo dominante, termos oscilatórios e termos de baixa ordem, da mesma forma que fizemos com v_1 e v_2. Com isso em mãos tentaremos deduzir uma fórmula para um termo v_n qualquer e depois demonstrar que tal fórmula é válida através de um argumento de indução em n. Lembre que $v_3(x) = -\frac{1}{3}(\mathbb{P}[Dv_0v_2] + \mathbb{P}[Dv_1v_1] + \mathbb{P}[Dv_2v_0])$, logo começaremos calculando Dv_2,

$$Dv_2(x) = k^{\alpha+3\beta+1}\left(\cos(\varphi)\tilde{B}_2^1 + \cos(3\varphi)\tilde{B}_2^3\right) + o(k^{2\alpha+3\beta}).$$

Agora vamos estimar os termos Dv_0v_2, Dv_1v_1 e Dv_2v_0,

$$Dv_0v_2 = \left\{k^{\beta+1}\sin(\varphi)\tilde{B}_0^1 + o(k^{\beta})\right\}\left\{k^{\alpha+3\beta}\left(\sin(\varphi)B_2^1 + \sin(3\varphi)B_2^3\right) + o(k^{2\alpha+3\beta-1})\right\} =$$
$$= k^{\alpha+4\beta+1}\left(\frac{1-\cos(2\varphi)}{2}B_0^1 B_2^1 + \frac{\cos(2\varphi)-\cos(4\varphi)}{2}B_0^1 B_2^3\right) + o(k^{2\alpha+4\beta}),$$
$$Dv_1v_1 = \left\{k^{\alpha+2\beta}\sin(2\varphi)\tilde{B}_1^2 + o(k^{2\alpha+2\beta-1})\right\}\left\{k^{\alpha+2\beta-1}\left(B_1^0 + \cos(2\varphi)B_1^2\right) + o(k^{2\alpha+2\beta-2})\right\} =$$
$$= k^{2\alpha+4\beta-1}\left(\sin(2\varphi)\tilde{B}_1^2 B_1^0 + \frac{\sin(4\varphi)}{2}B_1^2\tilde{B}_1^2\right) + o(k^{3\alpha+4\beta-2}),$$

$$Dv_2v_0 = \left\{k^{\alpha+3\beta+1}\left(\cos(\varphi)\tilde{B}_2^1 + \cos(3\varphi)\tilde{B}_2^3\right) + o(k^{2\alpha+3\beta})\right\}\left\{k^{\beta}\cos(\varphi)B_0^1 + w\right\} =$$

$$= k^{\alpha+4\beta+1}\left(\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}B_0^1\tilde{B}_2^1 + \frac{\cos(2\varphi)+\cos(4\varphi)}{2}\tilde{B}_2^3B_0^1\right) + o(k^{2\alpha+4\beta}).$$

Portanto, temos que

$$v_3 = k^{\alpha+4\beta+1}\left(B_3^0 + \cos(2\varphi)B_3^2 + \cos(4\varphi)B_3^4\right) + o(k^{2\alpha+4\beta})$$

onde B_i^j não dependem de k.

Abaixo temos a fórmula para um termo v_n qualquer, observe que a fórmula muda se n for par ou ímpar,

$$v_{2m} = k^{\alpha+(2m+1)\beta+2m-2}\left(\sin(\varphi)B_{2m}^1 + \sin(3\varphi)B_{2n}^3 + ... + \sin((2m+1)\varphi)B_{2m}^{2m+1}\right) +$$

$$+o(k^{2\alpha+(2m+1)\beta+2m-3})$$

$$v_{2m+1} = k^{\alpha+(2m+2)\beta+2m-1}\left(B_{2m+1}^0 + \cos(2\varphi)B_{2m+1}^2 + ... + \cos((2m+2)\varphi)B_{2m+1}^{2m+2}\right) +$$

$$+o(k^{2\alpha+(2m+2)\beta+2m-2})$$

onde B_i^j não dependem de k.

Não é difícil mostrar que a fórmula acima é verdadeira. Isso pode ser feito através de indução em n, porém iremos omitir a demonstração.

Falta ainda estimar o resto $r_N(t,x)$ para $|t-t_0| \leq k^{-(\alpha+2\beta-1)}$,

$$|r_N(t,x)| \leq \sum_{j=N}^{2N}|t-t_0|^j|v_j(x)| \leq \sum_{j=N}^{2N}|t-t_0|^j k^{\alpha+(j+1)\beta+j-2} \leq$$

$$\sum_{j=N}^{2N} k^{\alpha+(j+1)\beta+j-2-(\alpha+2\beta-1)j} = \sum_{j=N}^{2N} k^{(j-1)(-\beta-\alpha+2)} \leq \sum_{j=N}^{2N} k^{2N(-\beta-\alpha+2)} \leq C_N k^{-\sigma N}$$

onde $\sigma = 2\beta + 2\alpha - 4 > 0$ como $\alpha + \beta > 2$.

Portanto,

$$|r_N(t,x)| \leq C_N k^{-\sigma N}, \quad \text{para algum} \quad \sigma > 0 \quad \text{se} \quad |t-t_0| \leq k^{-(\alpha+2\beta-1)} \quad \text{e} \quad \alpha+\beta > 2.$$

Prova da Afirmação: Seja u um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$. Inicialmente vamos escrever $\mathbb{P}[u]$ como sua série de Fourier e depois usaremos a fórmula da série de Fourier encontrada para demonstrar que $\mathbb{P}[v(\cdot)e^{ika\cdot(\cdot)}](x) = p(a)v(x)e^{ika\cdot x} + o(k^{-1})$. Em seguida, usando a fórmula obtida, demonstraremos a identidade desejada para $\mathbb{P}[v(x)e^{i\varphi(x)}]$, onde $\varphi(x) = ka \cdot x + k^{\alpha} f(x)$.

$$\mathbb{P}[u](x) = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^2} p(\xi)\hat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^2} p(\xi)\int_{\mathbb{T}^2} u(y)e^{-iy\cdot\xi}dy e^{ix\cdot\xi} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^2}\int_{\mathbb{T}^2} p(\xi)u(y)e^{i(x-y)\cdot\xi}dy$$

onde $p(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{|\xi|^2}\begin{pmatrix} \xi_1^2 & \xi_1\xi_2 \\ \xi_1\xi_2 & \xi_2^2 \end{pmatrix}$.

Tome $u(y) = v(y)e^{ika\cdot y}$, onde v é um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ e $a \in \mathbb{Z}^2$. Logo,

$$\mathbb{P}[v(x)e^{ik\cdot x}] = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^2}\int_{\mathbb{T}^2} p(\xi)v(y)e^{ika\cdot y}e^{i(x-y)\cdot\xi}dy =$$

$$= \int_{\mathbb{T}^2}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^2} p(\xi)e^{i(x-y)\cdot\xi}v(y)e^{ika\cdot y}dy = \int_{\mathbb{T}^2}\check{p}(x-y)v(y)e^{ika\cdot y}dy =$$

$$= \int_{\mathbb{T}^2}\check{p}(x-y)\left(v(x) + v'(x)\cdot(y-x) + \frac{1}{2}v''(x)\cdot(y-x)^2 + ...\right)e^{ika\cdot y}dy =$$

$$= \int_{\mathbb{T}^2}\check{p}(x-y)\left\{v(x) + \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)(y_j - x_j) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j\partial x_k}(x)(y_j-x_j)(y_k-x_k) + ...\right\}e^{ika\cdot y}dy =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{T}^2}\check{p}(x-y)e^{ika\cdot(y-x)}dy\right)v(x)e^{ika\cdot x} + \left(\int_{\mathbb{T}^2}\check{p}(x-y)\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)(y_j-x_j)e^{ika\cdot(y-x)}dy\right)e^{ika\cdot x} +$$

$$\left(\int_{\mathbb{T}^2}\check{p}(x-y)\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j\partial x_k}(x)(y_j-x_j)(y_k-x_k)e^{ika\cdot(y-x)}dy\right)e^{ika\cdot x} + ... =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{T}^2}\check{p}(x-y)e^{ika\cdot(y-x)}dy\right)v(x)e^{ika\cdot x} + \left(\int_{\mathbb{T}^2}\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{i}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j}\right)\check{}(x-y)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)e^{ika\cdot(y-x)}dy\right)e^{ika\cdot x} +$$

$$\left(\int_{\mathbb{T}^2}\frac{1}{-2i^2}\sum_{j,k=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial\xi_j\partial\xi_k}\right)\check{}(x-y)\frac{\partial^2 v}{\partial x_j\partial x_k}(x)e^{ika\cdot(y-x)}dy\right)e^{ika\cdot x} + ... =$$

$$= p(ka)v(x)e^{ika\cdot x} + h_1(p(ka), v(x))e^{ika\cdot x} + \frac{1}{2}h_2(p(ka), v(x))e^{ika\cdot x} + ... =$$

$$= p(a)v(x)e^{ika\cdot x} + k^{-1}h_1(p(a), v(x))e^{ika\cdot x} + \frac{1}{2}k^{-2}h_2(p(a), v(x))e^{ika\cdot x} + ... =$$

$$= p(a)v(x)e^{ika\cdot x} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} k^{-j} h_j(p(a), v(x)) e^{ika\cdot x} = p(a)v(x)e^{ika\cdot x} + o(k^{-1})$$

onde

$$h_j(p(a), v(x)) = \sum_{\beta, |\beta|=1}^{|\beta|=j} C_\beta \frac{\partial^\beta p}{\partial \xi_\beta}(a) \frac{\partial^\beta v}{\partial x_\beta}(x) \quad \text{com} \quad C_\beta = -i^{|\beta|}.$$

Portanto temos que

$$\mathbb{P}[v(x)e^{ik\cdot x}] = p(a)v(x)e^{ika\cdot x} + o(k^{-1}).$$

Precisamos estimar $\mathbb{P}[u]$ quando $u(x) = v(x)e^{i\varphi(x)}$, onde v é um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{Z}^2$ e $\varphi(x) = ka\cdot x + k^\alpha f(x)$. Podemos reescrever o campo vetorial u como $u(x) = \left(v(x)e^{ik^\alpha f(x)}\right) e^{ika\cdot x}$. Dessa forma, usando as contas anteriores, concluímos que

$$\mathbb{P}[v(x)e^{i\varphi(x)}] = p(a)v(x)e^{ik^\alpha f(x)}e^{ika\cdot x} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} k^{-j} h_j(p(a), v(x)e^{ik^\alpha f(x)}) e^{ika\cdot x} = p(a)v(x)e^{i\varphi(x)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} k^{-j} \left(h_j(p(a), v(x))e^{ik^\alpha f(x)} + ik^{j\alpha} h_j(p(a), f(x)) v(x) e^{ik^\alpha f(x)} + ...\right) e^{ika\cdot x} =$$

$$= p(a)v(x)e^{i\varphi(x)} + o(k^{\alpha-1})$$

É claro que vale o seguinte

$$\mathbb{P}[v(x)e^{i\varphi(x)}] = p(a)v(x)e^{i\varphi(x)} + o(k^{-1+\alpha}),$$

donde segue que

$$\mathbb{P}[v(x)\cos(\varphi(x))] = p(a)v(x)\cos(\varphi(x)) + o(k^{-1+\alpha}),$$

$$\mathbb{P}[v(x)\sin(\varphi(x))] = p(a)v(x)\sin(\varphi(x)) + o(k^{-1+\alpha}).$$

□

2.2.2 Espectro dos termos da solução assintótica

Nesta seção investigaremos o espectro dos termos v_n da solução assintótica v^N para $k \to \infty$. Faremos isso através do estudo dos coeficientes de Fourier de cada termo v_n.

Lembre que $v_0(x) = k^{\beta-1}\nabla^{\perp}\sin(ka\cdot x + k^{\alpha}f(x)) + w(x)$, onde $f, w \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{T}^2)$. Então, podemos reescrever v_0 como $v_0(x) = k^{\beta-1}(ka^{\perp} + k^{\alpha}\nabla^{\perp}f)\cos(ka\cdot x + k^{\alpha}f(x)) + w(x)$. Defina $\zeta(x) = \cos(ka\cdot x + k^{\alpha}f(x))$.

Para exprimir o espectro de v_0 vamos calcular $\widehat{g\zeta}$ para $g(x) = \nabla^{\perp}f$ e $g(x) = a^{\perp}$. Note que

$$\widehat{g\zeta}(\xi) = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{T}^2} e^{i(ka\cdot x + k^{\alpha}f(x))}g(x)e^{-i\xi\cdot x}dx + \int_{\mathbb{T}^2} e^{-i(ka\cdot x + k^{\alpha}f(x))}g(x)e^{-i\xi\cdot x}dx\right). \tag{2.6}$$

Como os dois termos do lado esquerdo de (2.6) são análogos iremos calcular apenas o primeiro. Para isso, suponha que $\xi \in \mathbb{Z}^2$ seja tal que $|ka-\xi| \geq k^{\gamma}\|\nabla f\|_{\infty}$, para algum $\alpha < \gamma < 1$. Neste caso temos que ou $|ka_1 - \xi_1| \geq k^{\gamma}\|\nabla f\|_{\infty}$ ou $|ka_2 - \xi_2| \geq k^{\gamma}\|\nabla f\|_{\infty}$. Suponha que $|ka_1 - \xi_1| \geq k^{\gamma}\|\nabla f\|_{\infty}$ então integrando por partes obtemos que

$$\int_{\mathbb{T}^2} e^{i(ka\cdot x + k^{\alpha}f(x))}g(x)e^{-i\xi\cdot x}dx = \int_{\mathbb{T}^2} e^{i(ka-\xi)\cdot x}g(x)e^{ik^{\alpha}f(x)}dx =$$

$$= -\int_{\mathbb{T}^2} \frac{e^{i(ka-\xi)\cdot x}}{i(ka_1-\xi_1)}\left(ik^{\alpha}g(x)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_1}\right)e^{ik^{\alpha}f(x)}dx =$$

$$= \frac{-k^{\alpha}}{ka_1-\xi_1}\int_{\mathbb{T}^2} e^{i(ka-\xi)\cdot x}\left(g(x)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{1}{ik^{\alpha}}\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)e^{ik^{\alpha}f(x)}dx =$$

$$= \left(\frac{-k^{\alpha}}{ka_1-\xi_1}\right)^2\int_{\mathbb{T}^2} e^{i(ka-\xi)\cdot x}\left(g(x)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{2}{ik^{\alpha}}\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{g(x)}{ik^{\alpha}}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{1}{(ik^{\alpha})^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\right)e^{ik^{\alpha}f(x)}dx =$$

$$= \cdots = \left(\frac{-k^{\alpha}}{ka_1-\xi_1}\right)^N\int_{\mathbb{T}^2} e^{i(ka-\xi)\cdot x}G_N(x)e^{ik^{\alpha}f(x)}dx \leq C_N\left(\frac{k^{\alpha}}{|ka_1-\xi_1|}\right)^N\|G_N\|_{\infty} \leq$$

$$\leq C_N\left(\frac{k^{\alpha}}{|ka_1-\xi_1|}\right)^N\|g\|_{\infty}\|\nabla f\|_{\infty}^N \leq C_N k^{(\alpha-\gamma)N} \leq C_N k^{-\sigma N}, \sigma > 0$$

onde

$$G_N(x) = g(x)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^N + \frac{1}{ik^{\alpha}}\frac{\partial g}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^{N-1} + \cdots + \left(\frac{1}{ik^{\alpha}}\right)^N\frac{\partial^N g}{\partial x_1^N} = g(x)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^N + o(k^{-\alpha}).$$

Portanto temos que

$$\left|\int_{\mathbb{T}^2} e^{i(ka\cdot x + k^{\alpha}f(x))}g(x)e^{-i\xi\cdot x}dx\right| \leq C_M k^{-M}, \quad \forall M.$$

Observe que a mesma estimativa vale para o segundo termo de $\widehat{g\zeta}$. Logo,

$$|\widehat{g\zeta}(\xi)| \leq C_M k^{-M}\ \forall M \quad \text{para} \quad |\xi| \geq k|a| + \rho,$$

onde $\rho = k^{\gamma}\|\nabla f\|_{L^{\infty}}$. Em outras palavras $|\widehat{g\zeta}(\xi)| \leq C_M k^{-M}$ para $\xi \notin B(-ka,\rho) \cup B(ka,\rho)$.

Como $v_0(x) = k^\beta a^\perp \zeta(x) + k^{\beta+\alpha-1}\nabla^\perp f(x)\zeta(x) + w(x)$, com $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ segue que

$$|\hat{v}_0(\xi)| \leq C_M k^{-M} \quad \text{para} \quad \xi \notin B(-ka,\rho) \cup B(ka,\rho). \tag{2.7}$$

Lembre da definição dos termos da solução assintótica $v(t,x)$ e que

$$\widehat{A(v,w)}(\xi) = \sum_\eta (i\eta, \hat{v}(\xi-\eta))P_\xi \hat{w}(\eta).$$

Além disso, para $\xi \notin B(-2ka,2\rho) \cup B(0,2\rho) \cup B(2ka,2\rho)$ e $\eta \in B(-ka,\rho) \cup B(ka,\rho)$ temos que $\xi - \eta \notin B(-ka,\rho) \cup B(ka,\rho)$. Logo, para $\xi \notin B(-2ka,2\rho) \cup B(0,2\rho) \cup B(2ka,2\rho)$

$$|\widehat{A(v,v)}(\xi)| \leq \sum_{\eta \in B(-ka,\rho)\cup B(ka,\rho)} |\eta||\hat{v}(\xi-\eta)||\hat{v}(\eta)| + \sum_{\eta \notin B(-ka,\rho)\cup B(ka,\rho)} |\eta||\hat{v}(\xi-\eta)||\hat{v}(\eta)| \leq$$

$$\leq C_M \rho^2 k k^{-M} \max|\hat{v}| + \sum_{\eta \notin B(-ka,\rho)\cup B(ka,\rho)} |\eta| \frac{\|\partial^3_{x_1}\partial^3_{x_2} v\|_{L^1}}{|\eta_1 - \xi_1|^3 |\eta_2 - \xi_2|^3} C_M k^{-M} \leq$$

$$\leq C_M k^{2\gamma+1-M+\beta} + C_M k^{-M} \|\partial^3_{x_1}\partial^3_{x_2} v\|_{L^1} \leq C_M k^{-\bar{M}}.$$

Para $\xi \notin B(-ka,2\rho) \cup B(ka,2\rho)$ e $\eta \in B(0,\rho)$ temos que $\xi - \eta \notin B(-ka,\rho) \cup B(ka,\rho)$. Portanto, para $\xi \notin B(-ka,2\rho) \cup B(ka,2\rho)$

$$|\widehat{A(v,w)}(\xi)| \leq \sum_{\eta \in B(0,\rho)} |\eta||\hat{v}(\xi-\eta)||\hat{w}(\eta)| + \sum_{\eta \notin B(0,\rho)} |\eta||\hat{v}(\xi-\eta)||\hat{w}(\eta)|$$

$$\leq C_M \rho^2 \rho k^{-M} \max|\hat{w}| + \sum_{\eta \notin B(0,\rho)} |\eta||\hat{v}(\xi-\eta)| C_M k^{-M} \leq C_M k^{-\bar{M}}.$$

Para $\xi \notin B(-ka,2\rho) \cup B(ka,2\rho)$ e $\eta \in B(-ka,\rho) \cup B(ka,\rho)$ temos que $\xi - \eta \notin B(0,\rho)$. Logo,

$$|\widehat{A(w,v)}(\xi)| \leq \sum_{\eta \in B(-ka,\rho)\cup B(ka,\rho)} |\eta||\hat{w}(\xi-\eta)||\tilde{v}(\eta)| + \sum_{\eta \notin B(-ka,\rho)\cup B(ka,\rho)} |\eta||\hat{w}(\xi-\eta)||\hat{v}(\eta)|$$

$$\leq C_M \rho^2 \rho k^{-M} \max|\hat{v}| + \sum_{\eta \notin B(0,\rho)} |\eta||\hat{w}(\xi-\eta)| C_M k^{-M} \leq C_M k^{-\bar{M}}.$$

Para $\xi \notin B(0,2\rho)$ e $\eta \in B(0,\rho)$ temos que $\xi - \eta \notin B(0,\rho)$. Portanto,

$$|\widehat{A(w,w)}(\xi)| \leq \sum_{\eta \in B(0,\rho)} |\eta||\hat{w}(\xi-\eta)||\hat{w}(\eta)| + \sum_{\eta \notin B(0,\rho)} |\eta||\hat{w}(\xi-\eta)||\hat{w}(\eta)|$$

$$\leq C_M \rho^2 \rho k^{-M} \max|\hat{w}| + \sum_{\eta \notin B(0,\rho)} |\eta||\hat{w}(\xi-\eta)| C_M k^{-M} \leq C_M k^{-\bar{M}}.$$

Logo,

$$|\hat{v}_1(\xi)| \leq C_M k^{-M} \quad \text{para} \quad \xi \notin \bigcup_{j=-2}^{2} B(jka, 2\rho).$$

Por indução podemos provar que

$$|\hat{v}_n(\xi)| \leq C_M k^{-M} \quad \text{para} \quad \xi \notin \bigcup_{j=-(n+1)}^{n+1} B(jka, (n+1)\rho).$$

Juntando este resultado com o teorema 2.2.1 obtemos a seguinte caracterização do espectro dos termos v_n,

$$|\hat{v}_n(\xi)| \leq \begin{cases} C_n k^{\alpha+(n+1)\beta+n-2}, & \text{se} \quad \xi \in \bigcup_{j=-(n+1)}^{n+1} B(jka, (n+1)\rho) \\ \\ C_M k^{-M}, & \text{se} \quad \xi \notin \bigcup_{j=-(n+1)}^{n+1} B(jka, (n+1)\rho) \end{cases} \tag{2.8}$$

onde $\rho = k^{\gamma}\|\nabla f\|_{L^\infty}$ e $\gamma > \alpha$.

2.2.3 Teorema de Decomposição

Teorema 2.2.2. *Existem dois vetores $A, B \in \mathbb{Z}^2$ tais que para todo campo vetorial $v \in L^2(\mathbb{T}^2)$ de divergente nulo, com $\int v(x)dx = 0$, existem funções suaves Φ_1 e Φ_2 tais que*

$$v(x) = -\frac{1}{2}(A^{\perp} \cdot \nabla)\nabla^{\perp}\Phi_1 - \frac{1}{2}(B^{\perp} \cdot \nabla)\nabla^{\perp}\Phi_2$$

Demonstração. Escolha dois vetores $A, B \in \mathbb{Z}^2$ tais que eles não sejam colineares e duas funções $\phi_1(\xi)$ e $\phi_2(\xi)$ satisfazendo

- $\phi_j(\xi) \geq 0$;
- $\phi_1(\xi) + \phi_2(\xi) = 1$;
- $\phi_j(\xi) = 0$ em alguma vizinhança cônica das retas $\{tA\}, \{tB\}, \{tA^{\perp}\}$ e $\{tB^{\perp}\}$.

Como v tem divergente nulo temos que $\hat{v}(\xi)$ e $\xi^{\perp}$ são colineares. Portanto existe um único número complexo $\lambda(\xi)$ tal que $\hat{v}(\xi) = \lambda(\xi)\xi^{\perp}$.

Para $\xi \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, definimos

$$\hat{\Phi}_1(\xi) = 2\frac{\lambda(\xi)}{A^\perp \cdot \xi}\phi_1(\xi) \quad \text{e} \quad \hat{\Phi}_2(\xi) = 2\frac{\lambda(\xi)}{B^\perp \cdot \xi}\phi_2(\xi)$$

Vamos verificar que A, B, Φ_1 e Φ_2 satisfazem o teorema:

$$\left(-\frac{1}{2}(A^\perp \cdot \nabla)\nabla^\perp\Phi_1 - \frac{1}{2}(B^\perp \cdot \nabla)\nabla^\perp\Phi_2\right)^\wedge(\xi) = -\frac{1}{2}(A^\perp \cdot i\xi)i\xi^\perp\hat{\Phi}_1(\xi) - \frac{1}{2}(B^\perp \cdot i\xi)i\xi^\perp\hat{\Phi}_2(\xi)$$

$$= -\frac{1}{2}i^2(A^\perp \cdot \xi)\xi^\perp\left(2\frac{\lambda(\xi)}{A^\perp \cdot \xi}\phi_1(\xi)\right) - \frac{1}{2}i^2(B^\perp \cdot \xi)\xi^\perp\left(2\frac{\lambda(\xi)}{B^\perp \cdot \xi}\phi_2(\xi)\right) =$$

$$= \lambda(\xi)\xi^\perp(\phi_1(\xi) + \phi_2(\xi)) = \lambda(\xi)\xi^\perp = \hat{v}(\xi)$$

□

2.2.4 A construção

A construção tem a mesma estrutura que a construção original de Shnirelman. Como já dito antes, a diferença está na definição dos pulsos. Lembre que a construção original gerava um campo de velocidades $U(t,x)$ tal que $f(t,x)$ era transformada em uma série de pulsos com o mesmo efeito que f. Portanto, já sabemos que é suficiente definir os pulsos F_j que serão aplicados nos instantes t_j e que $U(x,t_j^-) = S_{t_j - t_{j-1}}(U(x,t_{j-1}^+))$ e $U(x,t_j^+) = U(x,t_j^-) + F_j$, onde S_t é operador solução das equações de Euler incompressíveis.

Inicialmente decompomos o pulso f usando o teorema 2.2.2

$$f(x) = Z_1 f + Z_2 f \tag{2.9}$$

$$Z_1 f = -\frac{1}{2}(A^\perp \cdot \nabla)\nabla^\perp\Phi_1 \tag{2.10}$$

$$Z_2 f = -\frac{1}{2}(B^\perp \cdot \nabla)\nabla^\perp\Phi_2 \tag{2.11}$$

Definimos $f_1 = k^{\beta-1}\nabla^\perp(\sin(kA \cdot x + k^\alpha\Phi_1))$ e $f_2 = k^{\beta-1}\nabla^\perp(\sin(kB \cdot x + k^\alpha\Phi_2))$. Aplicamos o pulso $f_1(x)\delta(t-t_0)$ ao campo vetorial u_- para obter

$$U(x,t_0^+) = f_1 + u_-.$$

Definimos $v_0 = U(x, t_0^+)$, logo temos que

$$v(t,x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} v_j(x)(t-t_0)^j, \qquad |t-t_0| < k^{-(\alpha+2\beta-1)} \tag{2.12}$$

$$v^N(t,x) = \sum_{j=0}^{N} v_j(x)(t-t_0)^j, \qquad t_0 \le t \le t_0 + k^{-(\alpha+2\beta-1)} \tag{2.13}$$

A ideia agora é aproximar v^N por uma solução que tenha a estrutura descrita anteriormente, ou seja, uma solução que é solução suave das equações de Euler homogêneas no interior dos intervalos e descontínua nos pontos extremos dos intervalos.

Teorema 2.2.3. *Seja $v = v(t,x)$ uma solução suave das equações de Euler com forçamento $f = f(t,x)$ no intervalo $(t_0, t_0+\tau)$. Considere uma subdivisão do intervalo $(t_0, t_0+\tau)$, digamos $t_0 < t_1 < ... < t_n = t_0 + \tau$, e um campo vetorial contínua por partes tal que $u(x, t_i^+) = v(x, t_i)$ e tal que u satisfaz as equações de Euler homogêneas em todo intervalo (t_i, t_{i+1}), $i = 0, \dots, n-1$.*

(i) Se $\max(t_{i+1} - t_i) \to 0$, então $\sup_{t_0 \le t \le t_0+\tau} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_s \to 0$ para todo s,

(ii) o campo vetorial $v(t,x)$ é solução fraca da seguinte equação

$$\frac{\partial v}{\partial t} - A(v,v) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\delta(t-t_i)$$

onde $f_i(x) = f(x, t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) + \phi_i$ e $\|\phi_i\|_s \le C_s(t_i - t_{i-1})^2$,

(iii) e,

$$\lim_{\max(t_i - t_{i-1}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_s = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \|f(.,t)\|_s dt.$$

Usando o teorema anterior para $v(t,x) = v^N(t,x)$ obtemos que, para todo s e ϵ, uma sequência $t_0 < t_1 < ... < t_n = t_0 + k^{-(\alpha+2\beta-1)}$ e uma sequência de forças $g_1(x), ..., g_n(x) \in \mathcal{C}^\infty$ tais que se $u(t,x)$ é solução fraca das soluções de Euler com forçamento dado por $g(t,x) = \sum g_i(x)\delta(t-t_i)$, então

(i) $\sup_{t_0 \le t \le t_0 + k^{-(\alpha+2\beta-1)}} \|u(\cdot,t) - v^N(\cdot,t)\|_s < \epsilon$;

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \|g_i(x)\|_s < Ck^{-\mu}$ para algum $\mu > 0$ independente de v e k.

Agora, definamos $U(t,x) = u(t,x)$ para $t_0 < t < t_1 := t_0 + k^{-(\alpha+2\beta-1)}$, logo $U(x,t_1^-) = v^N(x,t_1^-) = v_0 + k^{-(\alpha+2\beta-1)}v_1 + v'$. Lembre que

$$|\hat{v}_0(\xi)| \leq \begin{cases} Ck^{\beta}, & \text{se} \quad \xi \in \bigcup_{j=-1}^{1} B(jka,\rho) \\ \\ Ck^{-M}, & \text{se} \quad \xi \notin \bigcup_{j=-1}^{1} B(jka,\rho) \end{cases} \tag{2.14}$$

$$k^{-(\alpha+2\beta-1)}|\hat{v}_1(\xi)| \leq \begin{cases} C, & \text{se} \quad \xi \in \bigcup_{j=-2}^{2} B(jka,2\rho) \\ \\ Ck^{-M}, & \text{se} \quad \xi \notin \bigcup_{j=-2}^{2} B(jka,2\rho) \end{cases} \tag{2.15}$$

$$|\widehat{v'}(\xi)| \leq \begin{cases} Ck^{(1-N)(\alpha+\beta-2)}, & \text{se} \quad \xi \in \bigcup_{j=-(N+1)}^{N+1} B(jka,(N+1)\rho) \\ \\ Ck^{-M}, & \text{se} \quad \xi \notin \bigcup_{j=-(N+1)}^{N+1} B(jka,(N+1)\rho) \end{cases} \tag{2.16}$$

Agora, definamos

$$g_1' = -f_1 - k^{-(\alpha+2\beta-1)}(I - \pi_{2\rho})v_1 - (I - \pi_{(N+1)\rho})v'$$

e aplicamos este pulso no instante $t = t_1$. Então obtemos que

$$U(x,t_1^+) = v_0 + k^{-(\alpha+2\beta-1)}v_1 + v' + g_1' = u_- + Z_1 f + w'$$

onde w' é limitada em L^∞. De fato, lembre que

$$v_1(x) = k^{\alpha+2\beta-1}\big(-(A^\perp \cdot \nabla)\nabla^\perp f(x) - p(A)(A^\perp \cdot \nabla)\nabla^\perp f(x)\cos(2\varphi(x))\big) + o(k^{2\alpha+2\beta-2}),$$

e defina $F(x) = p(A)(A^\perp \cdot \nabla)\nabla^\perp f(x)$. Primeiro provaremos que $\pi_{2\rho}(F\cos(2\varphi))$ pode ser feito arbitrariamente pequeno para $k \to \infty$. Então, como $w' = k^{-(\alpha+2\beta-1)}\pi_{2\rho}v_1 - Z_1 f + \pi_{(N+1)\rho}v'$ e $\pi_{2\rho}(-(A^\perp \cdot \nabla)\nabla^\perp f(x))$ pode ser tomado arbitrariamente perto de $Z_1 f$ para ρ suficientemente grande (o que significa tomar k suficientemente grande já que $\rho = k^\gamma \|\nabla f\|_\infty$, $\alpha < \gamma < 1$) temos que $\max |w'|$ pode ser feito arbitrariamente pequeno para $k \to \infty$.

Começaremos calculando a transformada de Fourier de $F\cos(2\varphi)$,

$$F\widehat{\cos(2\varphi)}(\xi) = \int_{\mathbb{T}^2} F(x)cos(2\varphi(x))e^{-i\xi\cdot x}dx =$$

$$= \int_{\mathbb{T}^2} F(x)\frac{e^{i2ka\cdot x+i2k^\alpha f(x)} + e^{-i2ka\cdot x-i2k^\alpha f(x)}}{2}e^{-i\xi\cdot x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2}\left(F(x)e^{i2k^\alpha f(x)}e^{-ix\cdot(\xi-2ka)} + F(x)e^{-i2k^\alpha f(x)}e^{-ix\cdot(\xi+2ka)}\right)dx =$$

integrando por partes

$$= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) + i2k^\alpha F(x)\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right)e^{i2k^\alpha f(x)}\frac{e^{-ix\cdot(\xi-2ka)}}{-i(\xi_1-2ka_1)}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) - i2k^\alpha F(x)\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right)e^{-i2k^\alpha f(x)}\frac{e^{-ix\cdot(\xi+2ka)}}{-i(\xi_1+2ka_1)}\right\}dx =$$

integrando por partes

$$= \ldots = \frac{(-1)^N}{2}\int_{\mathbb{T}^2} k^{N\alpha}G_1(x)e^{i2k^\alpha f(x)}\frac{e^{-ix\cdot(\xi-2ka)}}{(-i)^N(\xi_1-2ka_1)^N}+$$

$$+\frac{(-1)^N}{2}\int_{\mathbb{T}^2} k^{N\alpha}G_2(x)e^{-i2k^\alpha f(x)}\frac{e^{-ix\cdot(\xi+2ka)}}{(-i)^N(\xi_1+2ka_1)^N}dx =$$

$$= \frac{k^{N\alpha}}{2i^N(\xi_1-2ka_1)^N}\int_{\mathbb{T}^2} G_1(x)e^{i2k^\alpha f(x)}e^{-ix\cdot(\xi-2ka)}dx+$$

$$+\frac{k^{N\alpha}}{2i^N(\xi_1+2ka_1)^N}\int_{\mathbb{T}^2} G_2(x)e^{-i2k^\alpha f(x)}e^{-ix\cdot(\xi+2ka)}dx.$$

onde G_1 e G_2 são funções dependentes das derivadas até ordem N de F e f e não dependem de uma potência positiva de k.

Observe que, para $|\xi| < 2\rho$, temos que

$$|2ka_1 \pm \xi_1| \geq 2k|a_1| - |\xi| > 2k|a_1| - 2k^\gamma\|\nabla f\|_\infty = Ck.$$

Então, $|F\widehat{\cos(2\varphi)}(\xi)| \leq Ck^{N(-1+\alpha)}$ para $|\xi| < 2\rho$ e para todo N. Portanto,

$$|\pi_{2\rho}(F\cos(2\varphi))| = \left|\sum_{|\xi|<2\rho} F\widehat{\cos(2\varphi)}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\right| \leq C\rho^2k^{N(-1+\alpha)} = Ck^{2\gamma+N\alpha-N} \leq Ck^{-\sigma}$$

onde $\sigma > 0$ para N grande o suficiente.

Agora aplicamos S_τ em $U(x, t_1^+)$ e obtemos que $U(x, t_2^-) = S_\tau(U(x, t_1^+))$ onde $t_2 = t_1 + \tau$. E então, neste instante, aplicamos o pulso com amplitude $u_- + Z_1 f - S_\tau(U(x, t_1^+))$ que pode ser tomado arbitrariamente próximo de $-w'(x)$, bastando para isso tomar τ suficientemente pequeno. Dessa forma, obtemos

$$U(x, t_2^+) = u_- + Z_1 f$$

Repetimos a construção dos pulsos porém agora usando o operador Φ_2 ao invés de Φ_1. Com isso obtemos uma série de pulsos "fracos" $h_i(x)\delta(t - S_i), i = 1, \dots, m$, onde $t_3 < S_1 < \dots < S_m < t_4$, $t_3 := t_2 + k^{-(\alpha+2\beta-1}$ e $t_4 := t_3 + \tau$, e dois pulsos "fortes" $f_2(x)\delta(t - t_3)$ e $f_2'(x)\delta(t - t_4)$. Portanto, temos que

$$U(x, t_4^+) = u_- + Z_1 f + Z_2 f = u_- + f = u_+.$$

Por fim obtemos uma solução fraca das equações de Euler com força externa dada por $f_1(x)\delta(t-t_1)+\sum_{i=1}^n g_i(x)\delta(t-s_i)+f_1'(x)\delta(t-t_2)+f_2(x)\delta(t-t_3)+\sum_{i=1}^m h_i(x)\delta(t-S_i)+f_2'(x)\delta(t-t_4)$. Agora, devemos escolher uma quadrupla (τ, N, δ, k) apropriada em cada passo para garantir a convergência da sequência obtida nesta construção.

2.2.5 Estimativas

Vamos escolher as quadruplas $(\tau_i, N_i, \delta_i, k_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|u_{i+1} - u_i\|_{L^2} < 2^{-i} \tag{2.17}$$

$$\sum_{q_1,\dots,q_i} \|f_{q_1,\dots,q_i}\|_{-s} < 2^{-i} \tag{2.18}$$

para algum $s > 0$ independente de i.

A segunda condição assegura que $f_i \to 0$ em $\mathcal{D}'$ quando $i \to \infty$.

Provaremos (2.17) e (2.18) por indução. Suponha que (2.17) e (2.18) valha para $1 \le i \le n-1$ então provaremos que esta condição permanece verdadeira para $i = n$ escolhendo uma quádrupla $(\tau_n, N_n, \delta_n, k_n)$ adequada.

Começaremos fixando a notação,

- $(q_1, \ldots, q_i) :=$ lista associada ao pulso do $i-$ésimo escoamento;

- $T_i := 2k_i^{-(\alpha+2\beta-1)} + 2\tau_i$;

- $d_{(q_1,\ldots,q_i)} :=\#\{(p_1, \ldots, p_i) : t_{(p_1,\ldots,p_i)} < t_{(q_1,\ldots,q_i)}\}$;

- $I_{(q_1,\ldots,q_{i-1})} :=$ o segmento entre $t_{(q_1,\ldots,q_i)}$ e o momento do próximo pulso;

- $I'_{(q_1,\ldots,q_{i-1})} := I_{(q_1,\ldots,q_{i-1})} + T_i d_{(q_1,\ldots,q_i)}$;

- $J_{(q_1,\ldots,q_{i-1})} :=$ o intervalo de tamanho T_i que é inserido no lugar do ponto $t_{(q_1,\ldots,q_{i-1})}$ no $i-$ésimo passo;

- $K_{(q_1,\ldots,q_{i-1})} := I_{(q_1,\ldots,q_{i-1})} \cap I'_{(q_1,\ldots,q_{i-1})}$;

- $L_{(q_1,\ldots,q_{i-1})} := (I_{(q_1,\ldots,q_{i-1})} \Delta I'_{(q_1,\ldots,q_{i-1})}) \setminus J_{(q_1,\ldots,q_{i-1})}$.

Portanto temos que,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}^2} |u_n(t,x) - u_{n-1}(t,x)|^2 dxdt \leq \sum_{(q_1,\ldots,q_{n-1})} \int_{K_{(q_1,\ldots,q_{n-1})}} \int_{\mathbb{T}^2} |u_n(t,x) - u_{n-1}(t,x)|^2 dxdt +$$

$$+2 \sum_{(q_1,\ldots,q_{n-1})} \int_{L_{(q_1,\ldots,q_{n-1})}} \int_{\mathbb{T}^2} (|u_n(t,x)|^2 + |u_{n-1}(t,x)|^2) dxdt +$$

$$+2 \sum_{(q_1,\ldots,q_{n-1})} \int_{J_{(q_1,\ldots,q_{n-1})}} \int_{\mathbb{T}^2} |u_{n-1}(t,x)|^2 dxdt + 2 \sum_{(q_1,\ldots,q_{n-1})} \int_{J_{(q_1,\ldots,q_{n-1})}} \int_{\mathbb{T}^2} |u_n(t,x)|^2 dxdt$$

Os três primeiros termos do lado direito da última desigualdade podem ser feitos menores que 2^{-n-2} tomando T_n pequeno, isto é, tomando τ_n pequeno e k_n grande. A razão pela qual isto pode ser feito é que o primeiro termo é uma integral de uma função menos sua translação por τ_n, o segundo termo é uma integral em um intervalo de tamanho $T_n d_{(q_1,\ldots,q_n)}$ de uma função limitada e o terceiro termo é uma integral em um intervalo de tamanho T_n de função limitada. Agora, vamos estimar o último termo da desigualdade acima.

Fixe um índice $\{q_1, \ldots, q_n\}$ e, por simplicidade, denote o conjunto $\{t_{q_1,\ldots,q_{n-1}} : q_1, \ldots, q_{n-1}\}$ por $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$. Observe que

$$\|u_n(\cdot, t_i^+)\|_{L^2} = \|u_n(\cdot, t_i^-) + f_i\|_{L^2} \leq \|u_n(\cdot, t_i^-)\|_{L^2} + \|f_i\|_{L^2} = \|u_n(\cdot, t_{i-1}^+)\|_{L^2} + \|f_i\|_{L^2} =$$

$$= \|u_n(\cdot,t_{i-1}^-)+f_{i-1}\|_{L^2}+\|f_i\|_{L^2} \leq \|u_n(\cdot,t_{i-1}^+)\|_{L^2}+\|f_{i-1}\|_{L^2}+\|f_i\|_{L^2} \leq \ldots \leq$$

$$\leq \|u_n(\cdot,t_1^-)\|_{L^2}+\sum_{j=1}^{i}\|f_j\|_{L^2}, \forall i=1,\ldots,m$$

Portanto, para todo $i=1,\ldots,m$ temos que

$$\|u_n(\cdot,t_i^+)\|_{L^2}^2 \leq \left(\|u_n(\cdot,t_1^-)\|_{L^2}+\sum_{j=1}^{i}\|f_j\|_{L^2}\right)^2 \leq 2\|u_n(\cdot,t_1^-)\|_{L^2}^2+2\left(\sum_{j=1}^{i}\|f_j\|_{L^2}\right)^2.$$

Logo,

$$\int_{J_{q_1,\ldots,q_n}}\int_{\mathbb{T}^2}|u_n(t,x)|^2dxdt = \sum_{i=1}^{m-1}(t_{i+1}-t_i)\|u_n(\cdot,t_i^+)\|_{L^2}^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m-1}(t_{i+1}-t_i)\left(2\|u_n(\cdot,t_1^-)\|_{L^2}^2+2\left(\sum_{j=1}^{i}\|f_j\|_{L^2}\right)^2\right) =$$

$$= 2\|u_n(\cdot,t_1^-)\|_{L^2}^2(t_m-t_1)+2\sum_{i=1}^{m-1}(t_{i+1}-t_i)\left(\sum_{j=1}^{i}\|f_j\|_{L^2}\right)^2 \leq$$

$$\leq 2|J_{q_1,\ldots,q_n}|\left(\|u_n(\cdot,t_1^-)\|_{L^2}^2+\sum_{i=1}^{m-1}\left(\sum_{j=1}^{i}\|f_j\|_{L^2}\right)^2\right) \leq 2k^{-(\alpha+2\beta-1)}\|u_n(\cdot,t_1^-)\|_{L^2}^2+$$

$$+2k^{-(\alpha+2\beta-1)}\left(\|f_1\|_{L^2}^2+(\|f_1\|_{L^2}+\|f_2\|_{L^2})^2+\ldots+(\|f_1\|_{L^2}+\ldots+\|f_{m-1}\|_{L^2})^2\right) \leq$$

$$\leq 2k^{-(\alpha+2\beta-1)}\left(\|u_n(\cdot,t_1^-)\|_{L^2}^2+\sum_{j=1}^{m-1}j\|f_1\|_{L^2}^2+\sum_{j=2}^{m-1}j\|f_2\|_{L^2}^2+\ldots+(m-1)\|f_{m-1}\|_{L^2}^2\right) \leq$$

$$\leq 2k^{-(\alpha+2\beta-1)}\|u_n(\cdot,t_1^-)\|_{L^2}^2+2k^{-(\alpha+2\beta-1)}\frac{m(m-1)}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\|f_i\|_{L^2}^2 \leq$$

$$\leq 2k^{-(\alpha+2\beta-1)}\|u_n(\cdot,t_1^-)\|_{L^2}^2+\frac{m(m-1)}{2}k^{-(\alpha+2\beta-1)}\sum_{i=1}^{m-5}\|f_i\|_{L^2}^2+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2}k^{-(\alpha+2\beta-1)}(\|f_1\|_{L^2}^2+\|f_1'\|_{L^2}^2+\|f_2\|_{L^2}^2+\|f_2'\|_{L^2}^2)$$

Portanto,

$$\int_{J_{q_1,\ldots,q_n}}\int_{\mathbb{T}^2}|u_n(t,x)|^2dxdt \leq 2k^{-(\alpha+2\beta-1)}\|u_n(\cdot,t_1^-)\|_{L^2}^2+\frac{m(m-1)}{2}k^{-(\alpha+2\beta-1)}\sum_{i=1}^{m-5}\|f_i\|_{L^2}^2+ \tag{2.19}$$

$$+\frac{m(m-1)}{2}k^{-(\alpha+2\beta-1)}(\|f_1\|_{L^2}^2+\|f_1'\|_{L^2}^2+\|f_2\|_{L^2}^2+\|f_2'\|_{L^2}^2)$$

Note que $u_n(x,t_1^-) = u_{n-1}(x, t^-_{q_1,\ldots,q_{n-1}})$. Como $\|u_{i+1} - u_i\|_{L^2} < 2^{-i}$ para todo $i = 1, \ldots, n-2$ temos que

$$\|u_n(\cdot, t_1^-)\|^2_{L^2} = \|u_{n-1}(\cdot, t^-_{q_1,\ldots,q_{n-1}})\|^2_{L^2} \leq \|u_{n-1}\|^2_{L^2} \leq 2^{-(n-2)} + \|u_{n-2}\|^2_{L^2} \leq$$

$$\leq 2^{-(n-2)} + 2^{-(n-3)} + \|u_{n-3}\|^2_{L^2} \leq \ldots \leq \sum_{j=1}^{n-2} 2^{-j} \leq 1.$$

Logo, escolhendo k suficientemente grande podemos fazer o primeiro termo do lado direito de (2.19) tão pequeno quanto se queira

Como $\sum_{i=1}^{m-5} \|f_i\|^2_{L^2} \leq C_{N,s} k^{-\mu}$, também podemos fazer o segundo termo do lado direito de (2.19) bem pequeno escolhendo k suficientemente grande.

Para estimar o terceiro termo do lado direito de (2.19) primeiro lembre que

$$f_1 = k^\beta (A^\perp + k^{\alpha-1} \nabla^\perp \Phi_1) \cos(kA \cdot x + k^\alpha \Phi_1),$$

então observe que

$$\|f_1\|^2_{L^2} \leq k^{2\beta} \|(A^\perp + k^{\alpha-1} \nabla^\perp \Phi_1) \cos(kA \cdot x + k^\alpha \Phi_1)\|^2_{L^2} \leq Ck^{2\beta}$$

Portanto,

$$2^{n+1} k^{-(\alpha+2\beta-1)} (\|f_1\|^2_{L^2} + \|f_1'\|^2_{L^2} + \|f_2\|^2_{L^2} + \|f_2'\|^2_{L^2}) \leq 2^{n+1} k^{-(\alpha+2\beta-1)} Ck^{2\beta} \leq Ck^{-\alpha+1}$$

Finalmente, escolhendo k suficientemente grande podemos fazer o último termo tão pequeno quanto se queira. Logo, escolhendo um k apropriado obtemos que

$$\sum_{q_1,\ldots,q_n} \int_{J_{q_1,\ldots,q_n}} \int_{\mathbb{T}^2} |u_n(t,x)|^2 dxdt \leq 2^{-n-2}$$

donde segue que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}^2} |u_n(t,x) - u_{n-1}(t,x)|^2 dxdt \leq 2^{-n-1}.$$

Agora vamos mostrar que $\sum_{q_1,\ldots,q_i} \|f_{q_1,\ldots,q_i}\|_{-s} < 2^{-i}$ para algum $s > 0$ independente de i. Para isso, observe que estimar os pulsos "fracos" é simples, basta escolher apropriadamente os parâmetros τ_i, N_i, δ_i e k_i. Para os pulsos "fortes", note que pelas estimativas obtidas em 2.2.1 e (2.7), temos que se f_i é um pulso "forte" então

$$|\hat{f}_i(\xi)| \leq \begin{cases} C_i k_i^{\beta}, & \text{para} \quad \xi \in B(-kA,\rho) \cup B(kA,\rho) \\ C_i k_i^{-M}, & \text{para} \quad \xi \notin B(-kA,\rho) \cup B(kA,\rho) \end{cases}$$

Portanto, tomando $s > \beta$ obtemos que $\|f_i\|_{-s} \leq C_i k_i^{\beta - s} \to 0$ quando $k_i \to \infty$. Assim, podemos escolher um k_i suficientemente grande de tal forma que $\sum_{q_1,\ldots,q_i} \|f_{q_1,\ldots,q_i}\|_{-s} < 2^{-i}$.

2.2.6 Trabalhos numéricos

Usando $v_0 = v + w$ com $w = 0$ e $v = \nabla^{\perp}\psi$ onde

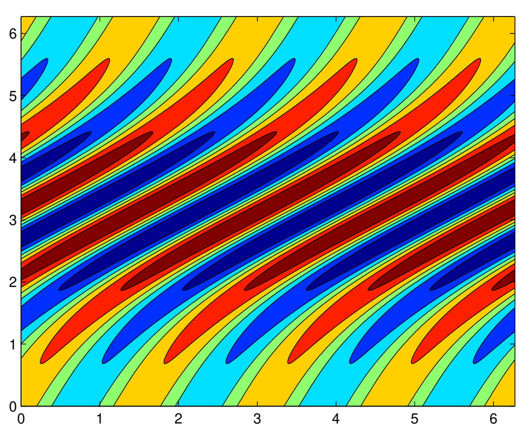
$$\psi(x) = k^{\beta-1}\sin(ka\cdot x + k^{\alpha}f(x)),\ f(x) = \sin(x_2),\ a = (1,-1),\ k = 4,\ \alpha = 0.99 \ \text{ e } \beta = 1.2,$$

temos que

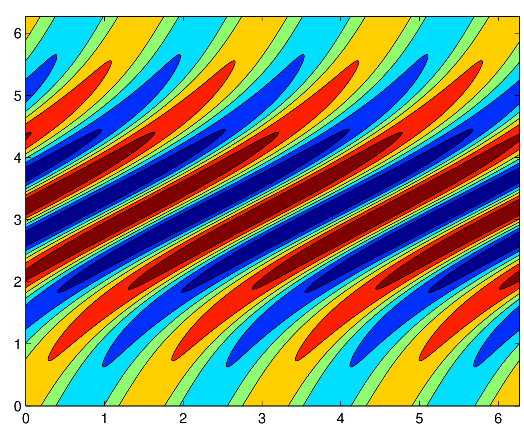
$$(v_1^1, v_1^2) = k^{\alpha+2\beta-1}(a^{\perp}\cdot\nabla)\nabla^{\perp} f + \text{termos oscilatórios } (k) =$$

$$= k^{\alpha+2\beta-1}(\sin x_2, 0) + \text{termos oscilatórios}(k).$$

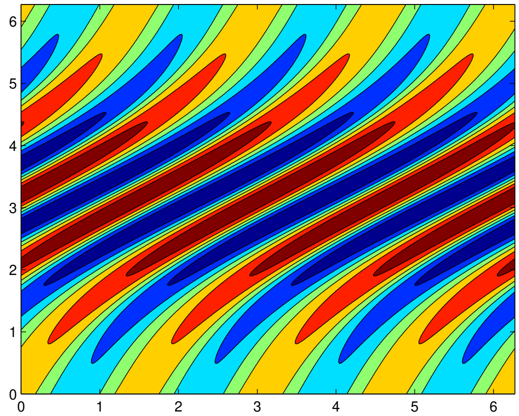
As figuras abaixo representam as curvas de nível da vorticidade associada ao escoamento de Kolmogorov aproximado v.



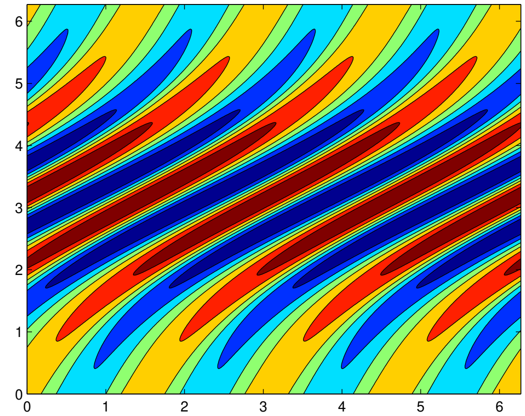
(a) $t = 0$



(b) $t = 0.04$



(c) $t = 0.08$



(d) $t = 0.1$

Através dessas figuras podemos visualizar o comportamento de duplicação de período do fluxo de Kolmogorov modulado.

Capítulo 3

Euler 2D com traçador passivo

Ainda no espírito de investigar unicidade de soluções fracas, neste capítulo demonstraremos que as soluções fracas das equações de Euler 2D com traçador passivo não são únicas. Para isso, utilizaremos uma técnica introduzida por De Lellis e Székelyhidi em [8]. Neste artigo os autores demonstram que soluções fracas das equações de Euler não são únicas. Apesar deste resultado já ter sido demonstrado anteriormente por Scheffer em [30] e por Shnirelman em [32], De Lellis e Székelyhidi demonstraram o resultado em $\mathbb{R}^n$ e a solução obtida por eles é limitada. Além disso, a técnica utilizada é inovadora, utilizando uma reformulação das equações de Euler como uma inclusão diferencial e elementos da integração convexa para construção de soluções fracas das equações de Euler com suporte compacto no espaço e tempo.

3.1 Inclusão diferencial e integração convexa

Para utilizar a técnica desenvolvida por De Lellis e Székelyhidi em [8] precisamos introduzir os seguintes conceitos: inclusão diferencial, ondas planas e integração convexa.

Começaremos definindo a inclusão diferencial. Seja $\omega \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \Gamma^k(\mathbb{R}^n))$, onde $\Gamma^k(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das k-formas em $\mathbb{R}^n$ com $0 \leq k \leq n-1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto limitado. Uma *inclusão diferencial* é uma relação do seguinte tipo

$$dw(x) \in \mathcal{K} \text{ q.t.p.}$$

onde $\mathcal{K} \subset \Gamma^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ é dado.

Observe que no caso em que $n = 3$ e $k = 1$ a inclusão diferencial pode ser escrita como

$$\text{rot } \omega(x) \in \mathcal{K} \text{ q.t.p..}$$

Definindo $z = \text{rot}\, \omega$ temos que z satisfaz a seguinte equação linear acoplada com uma restrição

$$\text{div } z = 0,$$

$$z \in \mathcal{K} \text{ q.t.p..}$$

Logo, o sistema acima, com $z = \text{rot } \omega$, é equivalente a inclusão diferencial $d\omega(x) \in \mathcal{K}$ q.t.p..

Motivados por este último cálculo, dizemos que um sistema de equações diferenciais parciais não lineares $\mathcal{E}(u)$ pode ser reescrito como uma inclusão diferencial se pudermos reescrever o sistema não linear como um sistema de equações diferenciais parciais lineares $\mathcal{L}(z)$ acoplada com uma restrição não linear $z(x) \in \mathcal{K}$, onde $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$ é chamado de *conjunto de restrições*.

Após reescrever um sistema não linear como uma inclusão diferencial temos em mãos um sistema linear. Uma classe de soluções importantes de sistemas lineares são as chamadas *ondas planas* que definiremos a seguir. Considere o seguinte sistema linear com m equações

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \partial_i z = 0, \tag{3.1}$$

onde $z : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ e para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, A_i é uma matriz $m \times d$.

Uma onda plana do sistema acima é uma solução que possui a seguinte forma

$$z(x) = ah(x \cdot \xi)$$

onde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Introduziremos agora o *cone de onda*, que é o conjunto de todos estados $a \in \mathbb{R}^d$ para os quais existe $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que, para todo h, a onda plana $z(x) = ah(x \cdot \xi)$ é solução do sistema linear (3.1). É fácil ver que o cone de onda pode ser escrito como

$$\Lambda := \left\{ a \in \mathbb{R}^d : \exists \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ tal que } \sum_{i=1}^{n} \xi_i A_i a = 0 \right\}.$$

A fim de descrever os passos da integração convexa vamos introduzir o conceito de envoltória Λ-convexa de um conjunto $\mathcal{K}$. Mas para isso precisamos da definição abaixo:

Definição 3.1.1. *Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$. Uma função $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é Λ-convexa se*

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

$\forall t \in [0,1]$ e $\forall a, b \in \mathbb{R}^d$ tais que $b - a \in \Lambda$.

É fácil ver que toda função convexa é Λ-convexa, para qualquer Λ. O contrário nem sempre é verdade. De fato, seja $\Lambda = \{0\} \subset \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^2$. É claro que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $b - a \in \Lambda$, ou seja, $a = b$, tem-se que $f(ta + (1-t)b) = f(a) = tf(a) + (1-t)f(b)$, $\forall t \in [0,1]$, no entanto a função f não é convexa. Por outro lado, existem conjuntos Λ para os quais toda função Λ-convexa é convexa. Por exemplo, para o conjunto $\Lambda = [0,1]$ vale que toda função Λ-convexa é convexa. De fato, seja f uma função Λ-convexa qualquer, com $\Lambda = [0,1]$, vamos verificar que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ vale que

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b), \forall t \in [0,1].$$

Como f é Λ-convexa já sabemos que a identidade acima vale para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $b - a \in [0,1]$. Considere então, $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $b - a \notin [0,1]$. Inicialmente consideraremos a, b tais que $1 < b - a \leq 2$. Neste caso, temos que $a < b - 1 \leq a + 1 < b$. Observe que

$$f(a+1) = f(t^*a + (1-t^*)b) \leq t^*f(a) + (1-t^*)f(b) \tag{3.2}$$

com $t^* = 1 - \dfrac{1}{b-a}$, $t^* \in (0,1)$. De fato, tome $t' = b - a - 1$ e observe que $a + 1 = t'(b-1) + (1-t')b$, $t' \in (0,1]$, e, como $b - (b-1) \in [0,1]$, vale que

$$f(a+1) = f(t'(b-1) + (1-t')b) \leq t'f(b-1) + (1-t')f(b).$$

Por outro lado, como $a < b - 1 < a + 1$ e $(a+1) - a \in [0,1]$ vale que

$$f(b-1) = f(sa + (1-s)(a+1) \leq sf(a) + (1-s)f(a+1),$$

com $s = 2 - (b-a)$, $s \in [0,1)$. Por fim, temos que

$$\begin{aligned} f(a+1) &\leq t'f(b-1) + (1-t')f(b) \leq t'(sf(a) + (1-s)f(a+1)) + (1-t')f(b) = \\ &= t'(1-s)f(a+1) + t'sf(a) + (1-t')f(b), \end{aligned}$$

logo,

$$f(a+1) \leq \frac{t's}{1-t'(1-s)}f(a) + \frac{(1-t')}{1-t'(1-s)}f(b)$$

e, segue das definições de t', s e t^* que $\dfrac{t's}{1-t'(1-s)} = t^*$ e $\dfrac{(1-t')}{1-t'(1-s)} = 1-t^*$, ou seja,

$$f(a+1) = f(t^*a + (1-t^*)b) \leq t^*f(a) + (1-t^*)f(b).$$

Agora, dado $t \in (0,1)$ temos que $a < ta + (1-t)b < a+1$ ou $a+1 \leq ta + (1-t)b < b$. Para o primeiro caso, temos que $ta + (1-t)b = ra + (1-r)(a+1)$, com $r = 1-(1-t)(b-a)$, $r \in (0,1)$. Portanto,

$$f(ta + (1-t)b) = f(ra + (1-r)(a+1)) \leq rf(a) + (1-r)f(a+1).$$

Usando (3.2) obtemos que

$$f(ta+(1-t)b) \leq rf(a)+(1-r)(t^*f(a)+(1-t^*)f(b)) = (r+(1-r)t^*)f(a)+(1-r)(1-t^*)f(b).$$

Pelas definições de r e t^* obtemos que $r + (1-r)t^* = t$ e $(1-r)(1-t^*) = 1-t$. Logo,

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

No segundo caso, ou seja, quando $a+1 \leq ta+(1-t)b < b$, podemos escrever $at + (1-t)b = \tilde{t}(a+1) + (1-\tilde{t})b$, com $\tilde{t} = t\dfrac{b-a}{b-a-1}$, $\tilde{t} \in (0,1]$. Logo,

$$f(ta + (1-t)b) = f(\tilde{t}(a+1) + (1-\tilde{t})(b)) \leq \tilde{t}f(a+1) + (1-\tilde{t})f(b).$$

Usando (3.2) obtemos que

$$f(ta + (1-t)b) \leq \tilde{t}(t^*f(a) + (1-t^*)f(b)) + (1-\tilde{t})f(b) = \tilde{t}t^*f(a) + (1-\tilde{t}t^*)f(b).$$

Pelas definições de $\tilde{t}$ e t^* obtemos que $\tilde{t}t^* = t$. Logo,

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

Usando indução, podemos mostrar que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $n < b-a \leq n+1$, para algum $n \in \mathbb{N}$, vale que

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

A afirmação já foi demonstrada para $n = 1$. Agora suponha que a afirmação vale para todo $k \in \mathbb{N}$, tal que $k \leq n - 1$. Vejamos que a afirmação é verdadeira para $k = n > 1$, ou seja, vamos mostrar que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $n < b - a \leq n + 1$ vale que $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$. Vamos usar a mesma técnica aplicada na demonstração da afirmação para $n = 1$. Seja $t \in [0,1]$, defina $c(t) = at + (1-t)b$. Se $a < c(t) < a + n$ então reescrevemos $c(t) = sa + (1-s)(a+n)$, onde $s = \frac{(1-t)(a-b)+n}{n}$, $s \in [0,1]$. No caso em que $a + n < c(t) < b$, podemos reescrever $c(t) = r(a+n) + (1-r)b$, com $r = \frac{t(b-a)}{b-(a+n)}$, $r \in [0,1]$.

Além disso, como $a < b - 1 < a + n$ e $(a+n) - a = n$, podemos usar a hipótese de indução e concluir que

$$f(b-1) = f(\tau a + (1-\tau)(a+n)) \leq \tau f(a) + (1-\tau) f(a+n), \text{ com } \tau = \frac{n+1-b+a}{n}, \ \tau \in [0,1],$$

e, como $b - 1 < a + n < b$ e $b - (b-1) = 1$, podemos usar a hipótese de indução para obter que

$$f(a+n) = f(\varsigma(b-1) + (1-\varsigma)b) \leq \varsigma f(b-1) + (1-\varsigma) f(b), \text{ com } \varsigma = b - a - n, \ \varsigma \in [0,1].$$

Portanto, usando as contas acima, concluímos que

$$f(a+n) \leq \varsigma(\tau f(a) + (1-\tau) f(a+n)) + (1-\varsigma) f(b)$$

logo,

$$f(a+n) \leq t' f(a) + (1-t') f(b), \text{ com } t' = \frac{\varsigma\tau}{1-\varsigma(1-\tau)}, \ t' \in [0,1].$$

Começaremos com o caso em que $a < c(t) < a + n$. Lembre que podemos rescrever $c(t) = sa + (1-s)(a+n)$, $s \in [0,1]$. Como $(a+n) - a = n$, podemos usar a hipótese de indução para obter que

$$f(ta + (1-t)b) = f(sa + (1-s)(a+n)) \leq sf(a) + (1-s)f(a+n) \leq$$

$$\leq sf(a) + (1-s)(t'f(a) + (1-t')f(b)) = (s + (1-s)t')f(a) + (1-s)(1-t')f(b).$$

Usando as definições de s e t' pode-se mostrar que $s + (1-s)t' = t$ e $(1-s)(1-t') = 1 - (s + (1-s)t') = 1 - t$, logo

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

Agora, no caso em que $a + n < c(t) < b$, podemos reescrever $c(t) = r(a + n) + (1 - r)b$, $r \in [0, 1]$. Como $0 < b - (a + n) \leq 1$, podemos usar que f é $[0, 1]$-convexa e concluir que

$$f(ta + (1-t)b) = f(r(a+n) + (1-r)b) \leq rf(a+n) + (1-r)f(b) \leq$$

$$\leq r(t'f(a) + (1-t')f(b)) + (1-r)f(b) = rt'f(a) + (r(1-t') + (1-r))f(b).$$

Usando as definições de r e t' pode-se mostrar que $rt' = t$ e $r(1-t') + (1-r) = 1 - rt' = 1 - t$, logo

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

Logo, temos que para todo $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $n < b - a \leq n + 1$ para algum $n \in \mathbb{N}$, vale que

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

Analogamente, pode-se demonstrar que para todo $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $b - a < 0$, tem-se que

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Portanto, temos que a função f é convexa.

Agora definimos a envoltória Λ-convexa de um conjunto K.

Definição 3.1.2. *Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ e $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$. A envoltória Λ-convexa de $\mathcal{K}$ é o conjunto $\mathcal{K}^\Lambda$ definido por*

$$\mathcal{K}^\Lambda := \{a \in \mathbb{R}^d \colon f(a) \leq \sup_{\mathcal{K}} f, \ \forall f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \ \ \Lambda\text{-}convexa\}.$$

Observe que $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^\Lambda$ e que $\mathcal{K}^\Lambda \subset \mathcal{K}^{co}$, onde $\mathcal{K}^{co}$ é a envoltória convexa de K (o menor convexo que contém $\mathcal{K}$). De fato, tome $k \in \mathcal{K}$ e observe que $f(k) \leq \sup_{\mathcal{K}} f$ para toda função f Λ-convexa logo $\mathcal{K} \in \mathcal{K}^\Lambda$. Por fim, observe que se f é uma função convexa então ela é também uma função Λ-convexa, para qualquer conjunto $\Lambda \in \mathbb{R}^d$, donde segue que $\mathcal{K}^\Lambda \subset \mathcal{K}^{co}$.

A técnica de integração convexa consiste dos seguintes passos (como descrito por C. Villani em [35])

Integração convexa: Seja $\mathcal{E}(u)$ uma equação não linear. A integração convexa se resume aos seguintes passos:

(i) reescreva $\mathcal{E}(u)$ como uma inclusão diferencial $\mathcal{L}(z) \wedge (z \in \mathcal{K})$, onde $\mathcal{L}(z)$ é a equação linear e $z \in \mathcal{K}$ é a restrição não linear;

(ii) introduza z_0 subsolução estrita do sistema, ou seja, que verifique $\mathcal{L}(z_0)$ e $z_0 \in \text{int}\mathcal{K}^{co}$, onde $\mathcal{K}^{co}$ é a envoltória convexa, em um sentido adequado de $\mathcal{K}$ (e.g., a envoltória Λ-convexa);

(iii) construa uma sequência $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, definida recursivamente via operações lineares, que se aproxima da fronteira de $\mathcal{K}^{co}$.

(iv) passe ao limite, possivelmente depois de ter modificado a sequência $\{z_k\}$ para assegurar a convergência adequada.

3.2 Não unicidade de soluções fracas das equações de Euler com traçador passivo

Motivados pelo trabalho de De Lellis e Székelyhidi, vamos construir uma solução fraca não nula, com suporte compacto no espaço e no tempo, para as equações de Euler com traçador passivo, que é um sistema formado pelas equações de Euler acopladas com uma equação de transporte. Assim como no caso das equações de Euler, a existência de tal solução implica na não unicidade de soluções fracas. A ideia então é reescrever as equações de Euler com traçador passivo como uma inclusão diferencial e, usando integração convexa, construir uma solução fraca não nula com suporte compacto no espaço e no tempo. No artigo [8], De Lellis e Székelyhidi, incialmente mostram a existência de uma solução fraca não nula, com suporte compacto no espaço e no tempo, para as equações de Euler utilizando o teorema de categoria de Baire, ao invés da integração convexa, e ressaltam que, para o problema deles, esta técnica seria mais eficiente e elegante. Como uma demonstração alternativa, os autores utilizam a técnica de integração convexa e alegam que, via esse método, é mais fácil "visualizar" as soluções construídas. No nosso trabalho, optamos pelo método de integração convexa por ser mais construtivo e porque temos a opção de, no futuro, construir aproximações numéricas. Nosso trabalho é uma adaptação, muitas vezes direta, do trabalho de De Lellis e Székelyhidi. Por isso, seguiremos a estrutura do artigo [8], fazendo apenas as adaptações necessárias e em alguns momentos faremos apenas referência a resultados que podem ser encontrados em [8].

Considere as equações de Euler bidimensionais com traçador passivo,

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0 \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla)b = 0 \\ div\ u = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

onde $u = u(t, x) \in \mathbb{R}^2$ é o campo de velocidades, $p = p(t, x) \in \mathbb{R}$ é a pressão, $b = b(t, x) \in \mathbb{R}$ é o traçador passivo e $(t, x) \in \mathbb{R}^3$.

A definição de solução fraca de (3.3) que estamos utilizando é a seguinte:

Definição 3.2.1. *Um campo vetorial* $(u, b) = (u, b)(t, x) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ *é uma solução fraca das equações de Euler com traçador passivo se, para toda função teste* $\varphi = \varphi(t, x) \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $\phi = \phi(t, x) \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ *e* $\Phi = \Phi(t, x) \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ *tal que* div $\Phi = 0$, *tivermos que*

$$\int\int [u \cdot \partial_t \Phi + (u \otimes u) \cdot D\Phi]\, dxdt = 0,$$

$$\int\int [b\partial_t \phi + bu \cdot \nabla \phi]\, dxdt = 0,$$

$$\int\int (u \cdot \nabla \varphi) dxdt = 0.$$

Observe que, ao tomarmos $b \equiv 0$ em (3.3) obtemos exatamente as equações de Euler 2D. Portanto, se considerarmos $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ uma solução fraca não nula, com suporte compacto no espaço e no tempo, das equações de Euler então o par $(u, 0)$ é uma solução fraca não nula, com suporte compacto no espaço e no tempo, das equações de Euler com traçador passivo. Logo, a não unicidade de soluções fracas para o sistema (3.3) já está estabelecido. No entanto, demonstraremos um resultado mais forte. Vamos construir uma solução fraca das equações de Euler com traçador passivo, de suporte compacto no espaço e no tempo, onde b não é identicamente nulo. Em particular vamos construir um exemplo de uma solução fraca para a equação do transporte que tem suporte compacto no tempo e no espaço. Isso só pode ser feito pois u é muito irregular, estando apenas em $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$, caso contrário, poderíamos usar o teorema de DiPerna-Lions (veja [10]), que diz que, dado $T > 0$, se $u \in L^1(0, T; W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2))$, div $u \in L^1(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^2))$, e

$u(1+|x|)^{-1} \in L^1(0,T;L^1(\mathbb{R}^2)) + L^1(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^2))$, para algum $1 \leq p \leq \infty$, então existe uma única solução fraca $b \in L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^2))$ de $\partial_t b + u \cdot \nabla b = 0$.

Mais especificamente, o resultado que demonstraremos ao longo dessa seção é o seguinte:

Teorema 3.2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto e limitado. Então, existe $(u,b,p) \in L^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ solução fraca das equações de Euler com traçador passivo (3.3) tal que*

- $|u(t,x)| = 1$ *e* $|b(t,x)| = 1$ *q.t.p para* $(t,x) \in \Omega$,
- $u(t,x) = 0$, $b(t,x) = 0$ *e* $p(t,x) = 0$ *q.t.p para* $(t,x) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$,

Mais ainda, existe uma sequência de funções $(u_k, b_k, p_k, f_k, g_k) \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \partial_t u_k + (u_k \cdot \nabla) u_k + \nabla p_k = f_k \\ \partial_t b_k + (u_k \cdot \nabla) b_k = g_k \\ div\ u_k = 0 \end{cases}$$

e

- f_k *e* g_k *converge para 0 em* H^{-1},
- $\|u_k\|_{L^\infty} + \|b_k\|_{L^\infty} + \|f_k\|_{L^\infty}$ *é uniformemente limitada,*
- $(u_k, b_k, p_k) \to (u,b,p)$ *em* L^q *para todo* $q < \infty$.

3.2.1 As equações de Euler com traçador passivo como uma inclusão diferencial

Temos que as equações de Euler com traçador passivo podem ser reescritas como

$$\begin{cases} \partial_t u + div\ \left(u \otimes u - \dfrac{|u|^2}{2} I_2\right) + \nabla \left(p + \dfrac{|u|^2}{2}\right) = 0 \\ \partial_t b + div\ (bu) = 0 \\ div\ u = 0. \end{cases}$$

Observe que os termos $-\text{div}\left(\frac{|u|^2}{2}I_2\right)$ e $\nabla\left(\frac{|u|^2}{2}\right)$. De fato, eles só foram adicionados para que o termo $\left(u\otimes u - \frac{|u|^2}{2}I_2\right)$ fosse uma matriz simétrica de traço nulo.

Defina $M =: u\otimes u - \frac{|u|^2}{2}I_2$, $v := bu$ e $q := p + \frac{|u|^2}{2}$. Logo, o sistema acima pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \partial_t u + div\ M + \nabla q = 0 \\ \partial_t b + div\ v = 0 \\ div\ u = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Agora defina

$$U := \begin{pmatrix} M + qI_2 & u \\ u^t & 0 \\ v^t & b \end{pmatrix}.$$

Considere $y = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^3$ como novo sistema de coordenadas e observe que o sistema (3.4) reduz-se a

$$\text{div}_y U = 0.$$

Assim, o cone de onda correspondente a (3.4) é dado por

$$\Lambda := \left\{(b, v, u, M, q) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{S}_0^2\times\mathbb{R} : \exists \xi \in \mathbb{R}^3\setminus\{0\} \text{ tal que } U\xi = 0\right\},$$

onde $\mathbb{S}_0^2$ é o conjunto das matrizes simétricas 2×2 de traço nulo.

Vamos provar que o cone de onda Λ é grande. Dados $u \in \mathbb{R}^2$ e $M \in \mathbb{S}_0^2$ é fácil ver que existe $q \in \mathbb{R}$ tal que

$$\det\begin{pmatrix} M + qI_2 & u \\ u^t & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Portanto, existe $\xi \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{pmatrix} M + qI_2 & u \\ u^t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0$$

Dado $b \in \mathbb{R}$ existe $v \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo

$$(v^t\ b)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0$$

Então, dados $b \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^2$ e $M \in \mathbb{S}_0^2$ existem $q \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^2$ tais que $(b, v, u, M, q) \in \Lambda$, revelando que o cone de onda é grande.

Portanto, a inclusão diferencial obtida para as equações não lineares (3.3) foi:

- $z = (b, v, u, M, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}_0^2 \times \mathbb{R}$;
- $\mathcal{L}(z) =$ sistema linear (3.4);
- $\mathcal{K} = K \times [-1, 1]$ onde $K = \{(b, v, u, M) \in \{-1, 1\} \times S^1 \times S^1 \times \mathbb{S}_0^2 : M = u \otimes u - \frac{1}{2} I_2, v = bu\}$ e S^1 é a esfera de dimensão um.

Observe que na definição do conjunto de restrições $\mathcal{K}$ nós impusemos que $|b| = |u| = |q| = 1$. Isso foi feito para garantir que a solução que construiremos não seja identicamente nula. Além disso, ao impor $|b| = |u| = |q| = 1$ garantimos que o conjunto $\mathcal{K}$ é fechado.

O lema abaixo estabelece sob quais hipóteses soluções do sistema de equações não lineares (3.3) são soluções das equações lineares (3.4) e vice-versa.

Lema 3.2.1. *Seja $(b, v, u, M, q) \in L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}_0^2 \times \mathbb{R})$ solução de (3.4) no sentido das distribuições. Se, além disso, valer que*

$$M = u \otimes u - \frac{1}{2}|u|^2 I_2 \quad e \quad v = bu \quad q.t.p\ em \quad \mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_t \tag{3.5}$$

então u, b e $p := q - \dfrac{|u|^2}{2}$ são solução de (3.3).

Inversamente, se u, b e p são solução de (3.3) no sentido das distribuições, então u, b, $M := u \otimes u - \dfrac{|u|^2}{2} I_2$, $v := bu$ e $q := p + \dfrac{|u|^2}{2}$ são solução de (3.4) e (3.5).

3.2.2 Ondas planas localizadas

Uma solução exata do tipo onda plana possui suporte compacto se e somente se é identicamente zero. Logo não podemos trabalhar com esse tipo de solução pois estamos interessados em soluções não nulas com suporte compacto. Portanto, iremos trabalhar com soluções de (3.4) que estão próximas de soluções do tipo onda plana em algum sentido. O seguinte resultado lida com essa questão.

Proposição 3.2.1. *Seja $a = (b_0, v_0, u_0, M_0, q_0) \in \Lambda$ tal que $u_0 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$. Denote por σ o segmento de reta em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2_0 \times \mathbb{R}$ ligando os pontos $-a$ e a. Então, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe uma solução suave (b, v, u, M, q) de (3.4) satisfazendo as seguintes propriedades:*

- *supp $(b, v, u, M, q) \subset B_1(0)$;*
- *Im $(b, v, u, M, q) \subset \varepsilon$-vizinhança de σ;*
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |u(y)|dy \geq \alpha|u_0|$ *e* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |b(y)|dy \geq \alpha|b_0|$.

Por questão de simplicidade, vamos reescrever a proposição acima em linguagem matricial. Com isso, poderemos demonstrar a proposição utilizando a teoria de Álgebra Linear.

Denote por $\mathcal{M}$ o conjunto das matrizes A simétricas 3×3 tais que $A_{33} = 0$ e observe que as transformações abaixo são isomorfismos lineares

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2_0 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (u, M, q) &\longmapsto U = \begin{pmatrix} M + qI_2 & u \\ u^t & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (b, v) &\longmapsto W = \begin{pmatrix} v^t & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proposição 3.2.2. *Seja $\bar{U} \in \mathcal{M}$ e $\bar{W} \in \mathbb{R}^3$ tal que existe $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ com $\bar{U}\xi = 0$ e $\bar{W}^t\xi = 0$. Suponha também que $\bar{U}e_3 \neq 0$ e $\bar{W}^t e_3 \neq 0$. Denote por σ o segmento de reta em $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{M}$ ligando os pontos $-(\bar{W}, \bar{U})$ e $(\bar{W}, \bar{U})$. Então, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe dois campos vetoriais suaves $U : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}$ e $W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, de divergente nulo, satisfazendo as seguintes propriedades:*

- *o suporte de U e W estão contidos em $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2_x \times \mathbb{R}_t$;*
- *a imagem de U e W estão contidas na ε-vizinhança de σ;*
- *$\int |U(y)e_3|dy \geq \alpha|\bar{U}e_3|$ e $\int |W(y)^t e_3|dy \geq \alpha|\bar{W}^t e_3|$.*

Demonstração. A parte envolvendo U já foi demonstrada em [8], na proposição 3.2. Sendo assim vamos provar a proposição apenas para W e seguiremos a estrutura da demonstração feita em [8]. Inicialmente, supomos que $\bar{W} = (0, w_2, w_3)$ com $w_3 \neq 0$. Em seguida, consideremos $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função tal que

- $|\phi| \leq 1$
- $\phi = 1$ on $B_{1/2}(0)$
- supp $(\phi) \subset B_1(0)$

e definimos

$$W(y) = \frac{1}{N^2} \begin{pmatrix} \partial^2_{12}(w_2\phi \sin(Ny_1)) + \partial^2_{13}(w_3\phi \sin(Ny_1)) \\ -\partial^2_{11}(w_2\phi \sin(Ny_1)) \\ -\partial^2_{11}(w_3\phi \sin(Ny_1)) \end{pmatrix}.$$

Note que W é um campo vetorial de divergente nulo com suporte contido em $B_1(0)$. Além disso, para $y \in B_{1/2}(0)$, temos que $W(y) = \bar{W}\sin(Ny_1)$. Portanto,

$$\int |W(y)^t e_3|dy \geq \int_{B_{1/2}(0)} |W(y)^t e_3|dy = |\bar{W}^t e_3| \int_{B_{1/2}(0)} |\sin(Ny_1)|dy \geq$$

$$\geq |\bar{W}^t e_3| \int_{B_{1/2}(0)} \sin(Ny_1)^2 dy = \alpha|\bar{W}^t e_3|,$$

para alguma constante $\alpha = \alpha(n)$ para N suficientemente grande. Esta constante surge a partir da seguinte estimativa

$$\int_{B_{1/2}(0)} \sin(Ny_1)^2 dy = \int_{B_{1/2}(0)} \frac{1+\cos(2Ny_1)}{2} dy \longrightarrow \frac{1}{2}|B_{1/2}(0)| \text{ quando } N \to \infty.$$

Agora, defina $\tilde{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \sin(Ny_1) \\ w_3 \sin(Ny_1) \end{pmatrix}$ e observe que

$$||W - \phi\tilde{W}||_\infty \leq \frac{C}{N}||\phi||_{C^2}.$$

Então, tomando N suficientemente grande, temos que $||W - \phi\tilde{W}||_\infty < \varepsilon$.

Finalmente, como $|\phi| \leq 1$ e $\tilde{W}$ toma valores em σ, então a imagem de $\phi\tilde{W}$ está contida em σ. Portanto, a imagem de W está contida na ε-vizinhança de σ.

Consideremos agora o caso geral. Seja $\bar{W}$ dado tal que $\bar{W}\xi = 0$ e $\bar{W}e_3 \neq 0$, para algum $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Claramente, ξ e e_3 são linearmente independentes. Tome $\eta \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ de tal forma que $\{\xi, \eta, e_3\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$ e considere a matriz A tal que $A\xi = e_1$, $A\eta = e_2$ e $Ae_3 = e_3$.

Defina $\bar{V} = A^t\bar{W}$. É claro que $\bar{V} \in \mathbb{R}^3$, $\bar{V}^t e_1 = 0$ e $\bar{V}^t e_3 \neq 0$. Logo, podemos utilizar as contas feitas para o caso anterior, obtendo assim um mapa suave $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com suporte compacto em $B_1(0)$ e com imagem na $||A||^{-1}\varepsilon$-vizinhança do segmento de reta τ com extremos $-\bar{V}$ e $\bar{V}$.

Agora, tome $W(y) = (A^{-1})^t V(A^t y)$. Primeiro observe que W está suportado em $(A^{-1})^t B_1(0)$. Como o isomorfismo $T : X \mapsto (A^{-1})^t X$ mapeia τ em σ temos que a imagem de W está contida na ε-vizinhança de σ. Através de um cálculo simples podemos provar que W tem divergente nulo. Temos ainda que

$$\int_{(A^{-1})^t B_1(0)} |W(y)^t e_3| dy = \int_{(A^{-1})^t B_1(0)} |((A^{-1})^t V(A^t y))^t e_3| dy =$$

$$= \int_{B_1(0)} |((A^{-1})^t V(z))^t e_3| \frac{dz}{|\det A|} \geq \frac{\alpha|((A^{-1})^t \bar{V})^t e_3|}{|detA|} = \frac{\alpha|(\bar{W})^t e_3|}{|detA|}.$$

Por fim, temos que reescalar W. Isso pode ser feito de maneira simples, veja o final demonstração da proposição 3.2, em [8]. $\square$

3.2.3 Ingredientes necessários para realizar a integração convexa

Lembre que

$$K := \{(b, v, u, M) \in \{-1, 1\} \times S^1 \times S^1 \times \mathbb{S}_0^2 : M = u \otimes u - \frac{1}{2} I_2, v = bu\}.$$

Definição 3.2.2.

$$\mathcal{U} = int(K^{co} \times [-1, 1])$$

onde int denota o interior topológico do conjunto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}_0^2 \times \mathbb{R}$ *e* K^{co} *denota a envoltória convexa de* K*.*

Lema 3.2.2. *O conjunto* $\mathcal{U}$ *não é vazio.*

Demonstração. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} T : \mathcal{C}(S^0 \times S^1) &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}_0^2 \\ \phi \quad &\longmapsto \int_{S^0} \int_{S^1} \left(b, bu, u, u \otimes u - \frac{1}{2} I_2 \right) \phi(b, u) d\mu(u) d\nu(b) \end{aligned}$$

onde μ é a medida de Haar em S^1 e ν é a medida em $S^0 = \{-1, 1\}$ definida por $\nu(\{1\}) = \nu(\{-1\}) = \frac{1}{2}$, $\nu(\{-1, 1\}) = 1$ e $\nu(\varnothing) = 0$. Logo, $T(\phi)$ pode ser reescrito como

$$T(\phi) = \frac{1}{2} \int_{S^1} \left(1, u, u, u \otimes u - \frac{1}{2} I_2 \right) \phi(1, u) d\mu(u) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{S^1} \left(-1, -u, u, u \otimes u - \frac{1}{2} I_2 \right) \phi(-1, u) d\mu(u).$$

É claro que se

$$\phi \geq 0 \text{ e } \int_{S^0} \int_{S^1} \phi(b, u) d\mu(u) d\nu(b) = 1 \text{ então } T(\phi) \in K^{co}. \tag{3.6}$$

Logo, como

$$T(1) = \frac{1}{2} \int_{S^1} \left(1, u, u, u \otimes u - \frac{1}{2} I_2 \right) d\mu(u) + \frac{1}{2} \int_{S^1} \left(-1, -u, u, u \otimes u - \frac{1}{2} I_2 \right) d\mu(u) =$$

$$= \int_{S^1} \left(0, 0, u, u \otimes u - \frac{1}{2} I_2 \right) d\mu(u) = 0$$

então $0 \in K^{co}$.

Para mostrar que $0 \in \text{int } K^{co}$ primeiro provaremos que T é uma aplicação aberta via o Teorema da Aplicação Aberta. Depois veremos que existe uma vizinhança aberta de 1 em $\mathcal{C}(S^0 \times S^1)$ que é levada por T a uma vizinhança aberta de 0 em K^{co}.

Para T estar nas hipóteses do Teorema da Aplicação Aberta só falta verificar que T é uma aplicação sobrejetora. Para isso vamos exibir os elementos $\phi \in \mathcal{C}(S^0 \times S^1)$ tal que via T eles geram $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2_0$.

(i) $\phi(b,u) = u_i$

$$T(\phi) = \frac{1}{2}\int_{S^1}\left(1, u, u, u\otimes u - \frac{1}{2}I_2\right)u_i d\mu(u) + \frac{1}{2}\int_{S^1}\left(-1, -u, u, u\otimes u - \frac{1}{2}I_2\right)u_i d\mu(u) =$$
$$= \int_{S^1}\left(0, 0, uu_i, u\otimes uu_i - \frac{1}{2}I_2 u_i\right)d\mu(u) = \beta_1(0,0,e_i,0)$$

onde $\beta_1 = \int_{S^1} u_1^2 d\mu(u)$

(ii) $\phi(b,u) = bu_i$

$$T(\phi) = \frac{1}{2}\int_{S^1}\left(1, u, u, u\otimes u - \frac{1}{2}I_2\right)u_i d\mu(u) +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{S^1}\left(-1, -u, u, u\otimes u - \frac{1}{2}I_2\right)(-u_i) d\mu(u) =$$
$$= \int_{S^1}(u_i, uu_i, 0, 0)\, d\mu(u) = \beta_1(0, e_i, 0, 0)$$

(iii) $\phi(b,u) = u_1u_2$

$$T(\phi) = \frac{1}{2}\int_{S^1}\left(1, u, u, u\otimes u - \frac{1}{2}I_2\right)u_1u_2 d\mu(u) +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{S^1}\left(-1, -u, u, u\otimes u - \frac{1}{2}I_2\right)u_1u_2 d\mu(u) =$$
$$= \int_{S^1}\left(0, 0, uu_1u_2, u\otimes uu_1u_2 - \frac{1}{2}I_2u_1u_2\right)d\mu(u) = \beta_2(0,0,0,e_1\otimes e_2 + e_2\otimes e_1)$$

onde $\beta_2 = \int_{S^1} u_1^2u_2^2 d\mu(u)$

(iv) $\phi(b,u) = bu_1u_2$

$$T(\phi) = \frac{1}{2}\int_{S^1}\left(1, u, u, u\otimes u - \frac{1}{2}I_2\right)u_1u_2 d\mu(u) +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{S^1}\left(-1, -u, u, u\otimes u - \frac{1}{2}I_2\right)(-u_1u_2) d\mu(u) =$$
$$= \int_{S^1}(u_1u_2, uu_1u_2, 0, 0)\, d\mu(u) = \beta_2(1, 0, 0, 0)$$

(v) $\phi(b,u) = u_i^2 - \frac{1}{2}$

$$T(\phi) = \int_{S^1} \left(0, 0, u\left(u_i^2 - \frac{1}{2}\right), \left(u \otimes u - \frac{1}{2} I_2\right)\left(u_i^2 - \frac{1}{2}\right)\right) d\mu(u) =$$
$$= \beta_3(0, 0, 0, e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2)$$

onde $\beta_3 = \int_{S^1} \left(u_1^2 - \frac{1}{2}\right)^2 d\mu(u)$

Temos que as imagens obtidas em (iv), (ii), (i) e $(iii) + (iv)$, nessa ordem, geram $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}_0^2$.

Afirmamos que se $\psi \in \mathcal{C}(S^0 \times S^1)$ é tal que

$$\alpha := 1 - \int_{S^0} \int_{S^1} \psi(b,u) d\mu(u) d\nu(b) \geq \|\psi\|_{\mathcal{C}(S^0 \times S^1)} \tag{3.7}$$

então $\phi = \alpha + \psi$ satisfaz (3.6) e portanto $T(\psi) \in K^{co}$. De fato, como $\phi = \alpha + \psi \geq \|\psi\|_{\mathcal{C}(S^0 \times S^1)} + \psi \geq 0$ e $\int_{S^0} \int_{S^1} \phi d\mu d\nu = 1 - \int_{S^0} \int_{S^1} \psi d\mu d\nu + \int_{S^0} \int_{S^1} \psi d\mu d\nu = 1$ então ϕ satisfaz (3.6) e portanto $T(\phi) \in K^{co}$. Além disso, temos que $T(\phi) = T(\alpha + \psi) = T(\alpha) + T(\psi) = \alpha T(1) + T(\psi) = T(\psi)$ donde segue que $T(\psi) \in K^{co}$.

Em particular, se ψ é tal que $\|\psi\|_{\mathcal{C}(S^0 \times S^1)} \leq \frac{1}{2}$ então ψ satisfaz (3.7). Portanto temos que para $A = \{\psi \in \mathcal{C}(S^0 \times S^1) : |\psi\|_{\mathcal{C}(S^0 \times S^1)} \leq \frac{1}{2}\}$, pelas contas anteriores, temos que $0 \in T(A) \subset K^{co}$ e $T(A)$ é um conjunto aberto em K^{co}. □

Lema 3.2.3. *Existe uma constante $C > 0$ tal que, para cada $(b, v, u, M, q) \in \mathcal{U}$, existe $(\bar{b}, \bar{v}, \bar{u}, \bar{M}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}_0^2$ tal que*

- *$(\bar{b}, \bar{v}, \bar{u}, \bar{M}, 0) \in \Lambda$;*

- *o segmento de reta que liga os pontos $(b, v, u, M, q) \pm (\bar{b}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{u}, 0)$ está contida em $\mathcal{U}$*

- *e*

$$|(\bar{u}, \bar{b})| \leq C(2 - (|u|^2 + |b|^2)). \tag{3.8}$$

Demonstração. Seja $h = (b, v, u, M) \in \mathrm{int} K^{co}$. Pelo teorema de Carathéodory h está no interior de simplexo em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}_0^2$ gerado por elementos K. Em outras palavras

$$h = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i h_i$$

onde $\lambda_i \in (0,1), h_i = (b_i, v_i, u_i, M_i) \in K,\ \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i = 1$ e $N = 7$ é a dimensão de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2_0$.

Suponha que $\lambda_1 = \max \lambda_i$ e defina i^* o índice tal que

$$\lambda_{i^*}^2(|u_{i^*} - u_1|^2 + |b_{i^*} - b_1|^2) = \max\{\lambda_i^2(|u_i - u_1|^2 + |b_i - b_1|^2) : i = 1, \dots, 8\}$$

Observe que como $h = \sum_{i=1}^{8} \lambda_i h_i$ e $h - h_1 = \sum_{i=2}^{8} \lambda_i(h_i - h_1)$ obtemos que

$$|(u - u_1, b - b_1)| = \left| \sum_{i=2}^{8} \lambda_i(u_i - u_1, b_i - b_1) \right| \leq$$

$$\sum_{i=2}^{8} |\lambda_i(u_i - u_1, b_i - b_1)| = \sum_{i=2}^{8} \sqrt{\lambda_i^2(|u_i - u_1|^2 + |b_i - b_1|^2)} \leq$$

$$\leq 7\sqrt{\max\{\lambda_i^2(|u_i - u_1|^2 + |b_i - b_1|^2) : i = 1, \dots, 8\}} = 7\sqrt{\lambda_{i^*}^2(|u_{i^*} - u_1|^2 + |b_{i^*} - b_1|^2)}$$

Logo,

$$|u - u_1|^2 + |b - b_1|^2 \leq 49\lambda_{i^*}^2(|u_{i^*} - u_1|^2 + |b_{i^*} - b_1|^2).$$

Então, definindo $\bar{h} := \frac{1}{2}\lambda_{i^*}(h_{i^*} - h_1)$ temos que

$$\frac{1}{196\sqrt{2}}(2 - (|u|^2 + |b|^2)) \leq \frac{1}{196\sqrt{2}}(1 - |u|^2 + 1 - |b|^2) \leq \frac{1}{196\sqrt{2}}((1 + |u|)(1 - |u|) + (1 + |b|)(1 - |b|))$$

$$\leq \frac{1}{98\sqrt{2}}((1 - |u|) + (1 - |b|)) \leq \frac{1}{98\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{(1 - |u|)^2 + (1 - |b|)^2} \leq \frac{1}{98}\sqrt{|u - u_1|^2 + |b - b_1|^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{98} 49\lambda_{i^*}\sqrt{|u_{i^*} - u_1|^2 + |b_{i^*} - b_1|^2} = \frac{1}{2}|\lambda_{i^*}(u_{i^*} - u_1, b_{i^*} - b_1)| \leq |(\bar{u}, \bar{b})|$$

Portanto,

$$\frac{1}{196\sqrt{2}}(2 - (|u|^2 + |b|^2)) \leq |(\bar{u}, \bar{b})|$$

É fácil ver que $(\bar{h}, 0) = (\bar{b}, \bar{v}, \bar{u}, \bar{M}, 0) \in \Lambda$. De fato, tome

$$\xi = \left(-\frac{u_{i^*}^2 - u_1^2}{u_{i^*}^1 - u_1^1}\xi_2,\ \xi_2\ , -\frac{u_{i^*}^1 u_1^2 - u_1^1 u_{i^*}^2}{u_{i^*}^1 - u_1^1}\xi_2 \right)$$

então

$$V\xi = \begin{bmatrix} \bar{M} + 0I_2 & \bar{u} \\ \bar{u}^t & 0 \\ \bar{v} & \bar{b} \end{bmatrix} \xi = \frac{1}{2}\lambda_{i^*} \begin{bmatrix} (u_{i^*}^1)^2 - (u_1^1)^2 & u_{i^*}^1 u_{i^*}^2 - u_1^1 u_1^2 & u_{i^*}^1 - u_1^1 \\ u_{i^*}^2 u_{i^*}^1 - u_1^2 u_1^1 & (u_{i^*}^2)^2 - (u_1^2)^2 & u_{i^*}^2 - u_1^2 \\ u_{i^*}^1 - u_1^1 & u_{i^*}^2 - u_1^2 & 0 \\ b_{i^*} u_{i^*}^1 - b_1 u_1^1 & b_{i^*} u_{i^*}^2 - b_1 u_1^2 & b_{i^*} - b_1 \end{bmatrix} \xi = 0$$

$\square$

Observação . Na prova do lema 3.2.3 mostramos que se $z_1, z_2 \in K$ então $z_1 - z_2 \in \Lambda$. Portanto, a envoltória Λ-convexa de K coincide com a envoltória convexa de K.

Definição 3.2.3. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ aberto e limitado, definimos*

$X_0 = X_0(\Omega) = \{(b, v, u, M, q) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2_x \times \mathbb{R}_t) : (i), (ii)$ *e* (iii) *abaixo valem*

(i) $supp(b, v, u, M, q) \in \Omega$,

(ii) (b, v, u, M, q) *é solução de (3.4) em* $\mathbb{R}^3$,

(iii) $(b, v, u, M, q)(t, x) \in \mathcal{U}$ *para todo* $(t, x) \in \mathbb{R}^3\}$.

Considere X_0 munido da topologia da convergência fraca em L^∞ de (b, v, u, M, q) e defina X como o fecho de X_0 nesta topologia.*

Lema 3.2.4. *O conjunto X com a topologia da convergência fraca* L^∞ é um espaço metrizável não vazio. Além disso, se $(b, v, u, M, q) \in X$ é tal que*

$$|u(t, x)| = 1, \ |b(t, x)| = 1 \quad \textit{para quase todo} \quad (t, x) \in \Omega,$$

então u, b e $p := q - \dfrac{|u|^2}{2}$ é uma solução fraca de (3.3) em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$u(t, x) = 0, \ b(t, x) = 0 \quad e \quad p(t, x) = 0 \quad \textit{para todo} \quad (t, x) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega.$$

Demonstração. A demonstração é uma adaptação trivial da demonstração do lema 4.4 de [8]. □

O resultado a seguir nos fornece as estimativas necessária para realizar a integração convexa.

Lema 3.2.5. *Existe uma constante $\beta = \beta(n) > 0$ com seguinte propriedade:*

Dado $(b_0, v_0, u_0, M_0, q_0) \in X_0$ existe uma sequência $(b_k, v_k, u_k, M_k, q_k) \in X_0$ tal que

$$\|u_k\|^2_{L^2} + \|b_k\|^2_{L^2} \geq \|u_0\|^2_2 + \|b_0\|^2_2 + \beta(2|\Omega| - (\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|b_0\|^2_{L^2(\Omega)}))^2$$

$$e \qquad (b_k, v_k, u_k, M_k, q_k) \overset{*}{\rightharpoonup} (b_0, v_0, u_0, M_0, q_0) \quad em \quad L^\infty.$$

Demonstração. **1º Passo** Seja $(b_0, v_0, u_0, M_0, q_0) \in X_0$. Observe que como $(b_0, v_0, u_0, M_0, q_0)$ tem suporte compacto então a imagem de $(b_0, v_0, u_0, M_0, q_0)$ é um conjunto compacto em $\mathcal{U}$ portanto podemos aplicar o lema 3.2.3 e obter que para todo $(t, x) \in \Omega$ existe uma direção

$$(\bar{b}, \bar{v}, \bar{u}, \bar{M})(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}_0^2$$

tal que o segmento de reta ligando os pontos

$$(b_0, v_0, u_0, M_0, q_0)(t, x) \pm (\bar{b}, \bar{v}, \bar{u}, \bar{M}, 0)(t, x)$$

está contido em $\mathcal{U}$, e

$$|\bar{u}_0(t, x)| + |\bar{b}_0(t, x)| \geq \sqrt{|\bar{u}_0(t, x)|^2 + |\bar{b}_0(t, x)|^2} \geq C(2 - (|u_0(t, x)|^2 + |b_0(t, x)|^2)).$$

Pela construção de $(\bar{b}, \bar{v}, \bar{u}, \bar{M})$ e como $(b_0, v_0, u_0, M_0, q_0)$ é uniformemente contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $(t, x),\ (x_0, t_0) \in \Omega$ com $|x - x_0| + |t - t_0| < \varepsilon$, a ε-vizinhança do segmento de reta ligando os pontos

$$(b_0, v_0, u_0, M_0, q_0)(t, x) \pm (\bar{b}, \bar{v}, \bar{u}, \bar{M}, 0)(x_0, t_0)$$

também está contido em $\mathcal{U}$.

2º Passo Para $(x_0, t_0) \in \Omega$ fixado defina

$$a = (\bar{b}, \bar{v}, \bar{u}, \bar{M}, 0)(x_0, t_0) \in \Lambda.$$

Use proposição 3.2.1 com este a e $\varepsilon > 0$ para obter uma solução suave (b, v, u, M, q) de (3.4) com as propriedades enunciadas na proposição 3.2.1, e para $r < \varepsilon$ seja

$$(b_r, v_r, u_r, M_r, q_r)(t, x) = (b, v, u, M, q)\left(\frac{x - x_0}{r}, \frac{t - t_0}{r}\right).$$

Então $(b_r, v_r, u_r, M_r, q_r)$ também é uma solução suave de (3.4), com as seguinte propriedades

- o suporte de $(b_r, v_r, u_r, M_r, q_r)$ está contido em $B_r(x_0, t_0) \subset \mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_t$,
- a imagem de $(b_r, v_r, u_r, M_r, q_r)$ está contida na ε-vizinhança do segmento de reta ligando $\pm(\bar{b}, \bar{v}, \bar{u}, \bar{M}, 0)(t, x)$,

- e

$$\int |u_r(t,x)|dxdt \geq \alpha|\bar{u}(x_0,t_0)||B_r(x_0,t_0)|,$$

$$\int |b_r(t,x)|dxdt \geq \alpha|\bar{b}(x_0,t_0)||B_r(x_0,t_0)|$$

Em particular, para todo $r < \varepsilon$ temos $(b_0, v_0, u_0, M_0, q_0) + (b_r, v_r, u_r, M_r, q_r) \in X_0$.

3º Passo. Agora, observe que como v_0 é uniformemente contínuo, existe $r_0 > 0$ tal que para todo $r < r_0$ existe uma família finita de bolas disjuntas $B_{r_j}(x_j,t_j) \subset \Omega$ com $r_j < r$ tal que

$$\int_\Omega (2 - (|u_0(t,x)|^2 + |b_0(t,x)|^2))dxdt \leq 2\sum_j (2 - (|u_0(x_j,t_j)|^2 + |b_0(x_j,t_j)|^2))|B_{r_j}(x_j,t_j)|. \quad (3.9)$$

Fixe $k \in \mathbb{N}$ com $\frac{1}{k} < \min\{r_0, \varepsilon\}$ e escolha uma família finita de bolas duas a duas disjuntas $B_{r_{k,j}}(x_{k,j},t_{k,j}) \subset \Omega$ com raio $r_{k,j} < \frac{1}{k}$ tal que (3.9) vale. Em cada bola $B_{r_{k,j}}(x_{k,j},t_{k,j})$ aplicamos a construção anterior e obtemos $(b_{k,j}, v_{k,j}, u_{k,j}, M_{k,j}, q_{k,j})$, e em particular temos então que

$$(b_k, v_k, u_k, M_k, q_k) := (b_0, v_0, u_0, M_0, q_0) + \sum_j (b_{k,j}, v_{k,j}, u_{k,j}, M_{k,j}, q_{k,j}) \in X_0$$

e

$$\int (|u_k(t,x) - u_0(t,x)| + |b_k(t,x) - b_0(t,x)|)dxdt =$$

$$= \sum_j \int (|u_{k,j}(t,x)| + |b_{k,j}(t,x)|)dxdt \geq$$

$$\geq \alpha \sum_j (|\bar{u}(x_{k,j},t_{k,j})| + |\bar{b}(x_{k,j},t_{k,j})|)|B_{r_{k,j}}(x_{k,j},t_{k,j})| \geq$$

$$\geq C\alpha \sum_j (1 - (|u_0(x_{k,j},t_{k,j})|^2 + |b_0(x_{k,j},t_{k,j})|^2))|B_{r_{k,j}}(x_{k,j},t_{k,j})| \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}C\alpha \int_\Omega (2 - (|u_0(t,x)|^2 + |b_0(t,x)|^2)dxdt. \quad (3.10)$$

Finalmente observe que fazendo $k \to \infty$, a construção produz uma sequência $(b_k, v_k, u_k, M_k, q_k) \in X_0$ tal que

$$(b_k, v_k, u_k, M_k, q_k) \overset{*}{\rightharpoonup} (b_0, v_0, u_0, M_0, q_0) \quad \text{em} \quad L^\infty.$$

Logo,

$$\liminf_{k\to\infty}(\|u_k\|_{L^2}^2+\|b_k\|_{L^2}^2)=\|u_0\|_2^2+\liminf_{k\to\infty}(2\langle u_0,(u_k-u_0)\rangle_2+\|u_k-u_0\|_2^2)+$$
$$+\|b_0\|_2^2+\liminf_{k\to\infty}(2\langle b_0,(b_k-b_0)\rangle_2+|b_k-b_0\|_2^2)=$$
$$=\|u_0\|_2^2+\liminf_{k\to\infty}\|u_k-u_0\|_2^2+\|b_0\|_2^2+\liminf_{k\to\infty}\|b_k-b_0\|_2^2\geq$$
$$\geq\|u_0\|_2^2+\|b_0\|_2^2+\frac{1}{|\Omega|}\liminf_{k\to\infty}(\|u_k-u_0\|_{L^1(\Omega)}^2+\|b_k-b_0\|_{L^1(\Omega)}^2)\geq$$
$$\geq\|u_0\|_2^2+\|b_0\|_2^2+\frac{1}{2|\Omega|}\liminf_{k\to\infty}(\|u_k-u_0\|_{L^1(\Omega)}+\|b_k-b_0\|_{L^1(\Omega)})^2. \tag{3.11}$$

Combinando (3.10) e (3.11) temos

$$\liminf_{k\to\infty}(\|u_k\|_{L^2}^2+\|b_k\|_{L^2}^2)\geq\|u_0\|_2^2+\|b_0\|_2^2+\frac{C^2\alpha^2}{4|\Omega|}(2|\Omega|-(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2+\|b_0\|_{L^2(\Omega)}^2))^2.$$

Portanto nós provamos o lema com $\beta=\frac{C^2\alpha^2}{4|\Omega|}$. □

3.2.4 Demonstração do teorema principal

Demonstração do Teorema 3.2.1: Vamos construir uma sequência $\{z_k=(b_k,v_k,u_k,M_k,q_k)\}\in X_0$ tal que

(i) existe $z=(b,v,u,M,q)\in X$ tal que $z_k\to z$ fortemente em $L^2(\mathbb{R}_x^2\times\mathbb{R}_t)$;

(ii) $\|u_{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|b_{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2\geq\|u_k\|_{L^2(\Omega)}^2+\|b_k\|_{L^2(\Omega)}^2+\beta(2|\Omega|-(\|u_k\|_{L^2(\Omega)}^2+\|b_k\|_{L^2(\Omega)}^2))^2$ para todo $k\in\mathbb{N}$.

Então, usando (i) podemos passar ao limite em (ii) de tal forma a obter

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2+\|b\|_{L^2(\Omega)}^2\geq\|u\|_{L^2(\Omega)}^2+\|b\|_{L^2(\Omega)}^2+\beta(2|\Omega|-(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2+\|b\|_{L^2(\Omega)}^2))^2$$

e portanto $\|u\|_{L^2(\Omega)}^2+\|b\|_{L^2(\Omega)}^2=2|\Omega|$. Como $|u|\leq 1$, $|b|\leq 1$ em Ω e eles tem suporte em Ω, concluímos que $|u|=1_\Omega=|b|$. Claramente $(b,v,u,M)\in K^{co}$ q.t.p. $(t,x)\in\Omega$ pois $(b,v,u,M,q)\in X$. Isto implica que $(b,v,u,M)\in K$ q.t.p. $(t,x)\in\Omega$.

Agora falta construir uma sequência $\{z_k\}\in X_0$ satisfazendo (i) e (ii). Construímos indutivamente uma sequência $(b_k,v_k,u_k,M_k,q_k)\in X_0$ e uma sequência de números $\eta_k>0$ como segue. Seja ρ_ε o molificador usual em $\mathbb{R}_x^2\times\mathbb{R}_t$ e tome $(b_1,v_1,u_1,M_1,q_1)\equiv 0$ em $\mathbb{R}_x^2\times\mathbb{R}_t$.

Depois de obtidos $z_j := (b_j, v_j, u_j, M_j, q_j)$ para $j \leq k$ e $\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}$ escolhemos

$$\eta_k < 2^{-k} \tag{3.12}$$

de tal forma que

$$\|z_k - z_k * \rho_{\eta_k}\|_{L^2(\Omega)} < 2^{-k}. \tag{3.13}$$

Então aplicamos o lema (3.2.5) para obter que $z_{k+1} = (b_{k+1}, v_{k+1}, u_{k+1}, M_{k+1}, q_{k+1}) \in X_0$ tal que

$$\|u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|b_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \|u_k\|^2_{L^2(\Omega)} + \|b_k\|^2_{L^2(\Omega)} + \beta(2|\Omega| - (\|u_k\|^2_{L^2(\Omega)} + \|b_k\|^2_{L^2(\Omega)}))^2 \tag{3.14}$$

e

$$\|(z_{k+1} - z_k) * \rho_{\eta_j}\|_{L^2(\Omega)} < 2^{-k} \quad \text{for all} \quad j \leq k. \tag{3.15}$$

Como a sequência $\{z_k\}$ é limitada em $L^\infty(\mathbb{R}^2_x \times \mathbb{R}_t)$ podemos assumir, tomando uma subsequência, que

$$z_k \overset{*}{\rightharpoonup} z \quad \text{in} \quad L^\infty(\mathbb{R}^2_x \times \mathbb{R}_t)$$

para algum $z = (b, v, u, M, q) \in X$, e que a sequência $\{z_k\}$ e a sequência $\{\eta_k\}$ correspondente satisfazem as propriedades (3.12), (3.13), (3.14) e (3.15). Então para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\|z_k * \rho_{\eta_k} - z * \rho_{\eta_k}\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|z_{k+j} * \rho_{\eta_k} - z_{k+j+1} * \rho_{\eta_k}\|_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(k+j)} \leq 2^{-k+1},$$

e como

$$\|z_k - z\|_{L^2(\Omega)} \leq \|z_k - z_k * \rho_{\eta_k}\|_{L^2(\Omega)} + \|z_k * \rho_{\eta_k} - z * \rho_{\eta_k}\|_{L^2(\Omega)} + \|z * \rho_{\eta_k} - z\|_{L^2(\Omega)},$$

concluímos que $z_k \to z$ fortemente em $L^2(\Omega)$. $\square$

3.3 Aplicação às equações da magnetohidrodinâmica

Nesta seção veremos que soluções fracas das equações da magnetohidrodinâmica ideais e incompressíveis em três dimensões (MHD 3D) não são únicas. Este resultado é um corolário do teorema 3.2.1. Preferimos esta ordem de apresentação apesar da ordem cronológica da demonstração de tais resultados estar trocada. Inicialmente havíamos tentado provar o resultado de não-unicidade para MHD 3D entretanto a técnica não se aplicava de maneira direta. A ideia então foi demonstrar a não-unicidade dentro de uma classe de solução que preservavam uma certa simetria. Obtivemos que a redução das equações MHD 3D com respeito a esta simetria especial podia ser interpretada como as equações de Euler com um traçador passivo.

Considere as equações MHD 3D,

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u - (rot\ b) \times b + \nabla p = 0 \\ \partial_t b - rot\ (u \times b) = 0 \\ div\ u = 0 \\ div\ b = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

onde $u = u(t,x) \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade, $b = b(t,x) \in \mathbb{R}^3$ é a densidade do escoamento magnético, $p = p(t,x) \in \mathbb{R}$ é a pressão e $(t,x) \in \mathbb{R}^4$.

O sistema (3.16) descreve o movimento de um fluido ideal incompressível condutor interagindo com um campo magnético. Observe que se tomarmos $b = 0$ em (3.16) nós obtemos as equações de Euler. Portanto é natural tentar estender os resultados conhecidos das equações de Euler para (3.16).

A definição de solução fraca de (3.16) que utilizamos foi a seguinte,

Definição 3.3.1. *Um campo vetorial* $(u,b) = (u,b)(t,x) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ *é uma solução fraca das equações MHD 3D se, para toda função teste* $\varphi = \varphi(t,x) \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$, $\psi = \psi(t,x) \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$, $\Phi = \Phi(t,x) \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ *tal que* div $\Phi = 0$ *e* $\Psi = \Psi(t,x) \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ *tal que* div $\Psi = 0$ *tivermos que:*

$$\int\int -\left[u \cdot \partial_t \Phi + (u \otimes u - b \otimes b) \cdot D\Phi\right] dxdt = 0$$

$$\int\int -\left[b\cdot\partial_t\Psi + (u\otimes b - b\otimes u)\cdot D\Psi\right] dxdt = 0$$

$$\int\int (u\cdot\nabla\varphi) dxdt = 0$$

$$\int\int (b\cdot\nabla\psi) dxdt = 0.$$

O sistema (3.16) pode ser expresso como uma inclusão diferencial, no entanto quando tentamos adaptar o tralhado feito em [8] para este caso obtivemos um cone de onda Λ e um conjunto de restrições $\mathcal{K}$ para os quais não conseguimos provar que a envoltória Λ-convexa de $\mathcal{K}$ é igual a envoltória convexa de K. Por isso, tentamos nos restringir a uma classe de soluções que preservam a seguinte simetria:

$$u = u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), 0),$$

$$b = b(t,x) = (0,0,b(t,x)),$$

$$(t,x) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2_x \times \mathbb{R}_t.$$

A redução de (3.16) por esta simetria é:

$$\begin{cases} \partial_t u + (u\cdot\nabla)u + \nabla\left(p + \dfrac{|b|^2}{2}\right) = 0 \\ \partial_t b + (u\cdot\nabla)b = 0 \\ div\ u = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

Observe que esta equação pode ser reescrita como no formato das equações de Euler com traçador passivo e com isso, pelo teorema 3.2.1, concluímos que as soluções fracas destas equações não são únicas. Em particular, soluções de (3.17) são soluções da MHD 3D, donde concluímos que soluções fracas das equações MHD 3D não são únicas.

Capítulo 4

Euler 3D com simetria helicoidal

Nos capítulos 2 e 3 vimos exemplos de escoamentos irregulares que implicavam na não unicidade de soluções fracas das equações de Euler e Euler com traçador passivo. Com o objetivo de continuar o estudo de soluções irregulares, neste capítulo, demonstraremos existência global no tempo de soluções fracas das equações de Euler tridimensionais com simetria helicoidal sem rodopio (ou seja, quando a velocidade é ortogonal às hélices), com vorticidade inicial em L^p, para todo $p > 4/3$, com suporte compacto nos planos axiais e periódica na direção axial. Este resultado é uma melhoria do resultado demonstrado por B. Ettinger e E. Titi em [15], onde os autores provam existência e unicidade global de soluções fracas para o mesmo problema, porém em domínios limitados e com vorticidade inicial limitada.

4.1 Notação

Usaremos a notação clássica para o espaço das distribuições $\mathcal{D}'$. Os espaços de Sobolev em L^2 com k derivadas serão denotados por H^k.

Seja $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que $u \in \mathcal{D}'$ é periódica, com período T, se $\langle u(\cdot), \phi(\cdot)\rangle = \langle u(\cdot), \phi(\cdot + T)\rangle$ para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ e para todo $t \in \mathbb{R}$.

Seja $\Omega = \mathbb{R}^2 \times [-\kappa\pi, \kappa\pi]$. Abaixo definimos os espaços de funções que serão utilizados ao longo deste capítulo.

- $L^p_{c,per}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : u$ tem suporte compacto em $\tilde{x}$ e é periódica em $x_3\}$;
- $L^p_{per}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : u$ é periódica em $x_3\}$;
- $H^k_{per} = \{u \in H^k(\Omega) : u$ tem suporte compacto em $\tilde{x}$ e é periódica em $x_3\}$;
- $V^k_{per}(\Omega) = \{u \in H^k_{per}(\Omega) : \text{div } u = 0\}$.

4.2 Definições e resultados no sentido das distribuições

Na seção 1.6 introduzimos o conceito de simetria helicoidal e escoamentos com e sem rodopio para funções suaves. Nosso objetivo agora é estender estas conceitos para funções nos espaços L^q, para qualquer $1 \leq q \leq \infty$. Para isso, escreveremos as definições no sentido das distribuições.

Ao longo de todo o capítulo, denotaremos o domínio das funções por Ω, onde $\Omega = \mathbb{R}^2 \times [-\kappa\pi, \kappa\pi]$.

Definição 4.2.1. *Um campo vetorial $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $u \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^3)$, tem simetria helicoidal se, para toda função teste $\Psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega; \mathbb{R}^3)$, tivermos que*

$$\int_\Omega \Psi(S_{-\theta}x) \cdot u(x) dx = \int_\Omega R_{-\theta}\Psi(x) \cdot u(x) dx \text{ para todo } \theta \in \mathbb{R}.$$

Observe que se $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ é helicoidal então u é periódico em x_3 (com período $2\pi\kappa$) no sentido das distribuições.

Definição 4.2.2. *Um campo vetorial $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $u \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^3)$, é ortogonal às hélices se*

$$u(x) \cdot \xi(x) = 0 \ \ q.t.p. \text{ em } \Omega,$$

onde $\xi(x) = (x_2, -x_1, \kappa)$.

Como já observado na seção 1.6, a condição acima é análoga à condição de velocidade de rodopio ser nula no caso de escoamentos com simetria axial, caso em que $\kappa = 0$.

Lema 4.2.1. *Seja $u \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^3)$. Então, u tem simetria helicoidal se e somente se*

$$\int_\Omega D\Psi(x)\xi(x)\cdot u(x)dx = \int_\Omega \mathcal{R}\Psi(x)\cdot u(x)dx, \tag{4.1}$$

para toda $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$.

Demonstração. Suponha que u tenha simetria helicoidal. Logo, para toda $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$, temos que

$$\int_\Omega \Psi(S_{-\theta}x)\cdot u(x)dx = \int_\Omega R_{-\theta}\Psi(x)\cdot u(x)dx \quad \text{para todo } \theta \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Agora, diferenciamos o lado esquerdo da última expressão em relação a θ e avaliamos em $\theta = 0$. Logo, obtemos que

$$\frac{d}{d\theta}\int_\Omega \Psi(S_{-\theta}x)\cdot u(x)dx\bigg|_{\theta=0} = \int_\Omega \frac{d}{d\theta}\Psi(S_{-\theta}x)\bigg|_{\theta=0}\cdot u(x)dx =$$

$$= \int_\Omega D\Psi(S_{-\theta}x)\frac{dS_{-\theta}x}{d\theta}\bigg|_{\theta=0}\cdot u(x)dx = \int_\Omega D\Psi(x)(-\xi(x))\cdot u(x)dx.$$

Procedendo da mesma forma no lado direito da expressão (4.2) obtemos o seguinte

$$\frac{d}{d\theta}\int_\Omega \Psi(S_{-\theta}x)\cdot u(x)dx\bigg|_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta}\int_\Omega R_{-\theta}\Psi(x)\cdot u(x)dx\bigg|_{\theta=0} =$$

$$= \int_\Omega \frac{d}{d\theta}R_{-\theta}\bigg|_{\theta=0}\Psi(x)\cdot u(x)dx = \int_\Omega (-\mathcal{R})\Psi(x)\cdot u(x)dx.$$

Das duas últimas expressões segue que, para toda $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$,

$$\int_\Omega D\Psi(x)\xi(x)\cdot u(x)dx = \int_\Omega \mathcal{R}\Psi(x)\cdot u(x)dx,$$

como queríamos.

Reciprocamente, suponha que

$$\int_\Omega D\Psi(x)\xi(x)\cdot u(x)dx = \int_\Omega \mathcal{R}\Psi(x)\cdot u(x)dx,$$

para toda $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$. Fixe uma $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$ qualquer e defina

$$\Phi_1(x) = \left(\frac{\Psi_1(x)+\Psi_2(x)}{2}, \frac{-\Psi_1(x)+\Psi_2(x)}{2}, 0\right)$$

$$\Phi_2(x) = \left(\frac{\Psi_1(x) - \Psi_2(x)}{2}, \frac{\Psi_1(x) + \Psi_2(x)}{2}, 0\right)$$

$$\Phi_3(x) = (0, 0, \Psi_3(x)).$$

Defina também

$$F_i(\theta) = \int_\Omega \Phi_i(S_{-\theta}x) \cdot u(x)dx, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.3}$$

Então, temos que

$$\frac{d}{d\theta}F_i(\theta) = \int_\Omega D\Phi_i(S_{-\theta}x)\frac{dS_{-\theta}x}{d\theta} \cdot u(x)dx = \int_\Omega D\Phi_i(S_{-\theta}x)\begin{pmatrix} -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \\ -x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \\ -\kappa \end{pmatrix} \cdot u(x)dx =$$

$$= -\int_\Omega D\Phi_i(S_{-\theta}x)\xi(S_{-\theta}x) \cdot u(x)dx = -\int_\Omega \mathcal{R}\Phi_i(S_{-\theta}x) \cdot u(x)dx.$$

Para obter a última igualdade usamos a hipótese que

$$\int_\Omega D\Psi(x)\xi(x) \cdot u(x)dx = \int_\Omega \mathcal{R}\Psi(x) \cdot u(x)dx$$

com $\Psi(x) = \Phi_i(S_{-\theta}x)$ (observe que $D\Psi(x)\xi(x) = D\Phi_i(S_{-\theta}x)\xi(S_{-\theta}x)$).

Com isso, obtivemos o seguinte sistema de EDO's

$$\begin{cases} \dot{F}_1(\theta) = -F_2(\theta) \\ \dot{F}_2(\theta) = F_1(\theta) \\ \dot{F}_3(\theta) = 0 \\ F_i(0) = \int_\Omega \Phi_i(x) \cdot u(x)dx, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{4.4}$$

Usando o teorema de existência e unicidade de soluções para EDO's concluímos que

$$F_1(\theta) = F_1(0)\cos(\theta) - F_2(0)\sin(\theta),$$

$$F_2(\theta) = F_1(0)\sin(\theta) + F_2(0)\cos(\theta),$$

$$F_3(\theta) = F_3(0).$$

Portanto, obtemos que

$$F_1(\theta) + F_2(\theta) + F_3(\theta) = \int_\Omega R_{-\theta}\Psi(x) \cdot u(x)dx.$$

Por outro lado, como $\Phi_1(x) + \Phi_2(x) + \Phi_3(x) = \Psi(x)$ e por (4.3), temos que

$$F_1(\theta) + F_2(\theta) + F_3(\theta) = \int_\Omega \Psi(S_{-\theta}x) \cdot u(x)dx.$$

Logo, para toda $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ temos que

$$\int_\Omega \Psi(S_{-\theta}x) \cdot u(x)dx = \int_\Omega R_{-\theta}\Psi(x) \cdot u(x)dx$$

que é a definição de u ter simetria helicoidal. □

4.3 Função de Green

Nosso objetivo nesta seção é exprimir a função de Green correspondente ao seguinte problema:

(P) Seja $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ uma distribuição periódica em x_3 com período $2\pi\kappa$. Suponha também que $F \in L^2(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ e $\int_\Omega F(x)dx = 0$. Nosso problema é encontrar uma distribuição N que seja solução da equação $\Delta N = F$ no sentido das distribuições.

Vamos abordar o problema usando Análise de Fourier. Seguem abaixo os espaços e as definições que iremos utilizar ao longo desta seção.

Definição 4.3.1. *Seja $1 \leq p < \infty$, denotamos o espaço das sequência complexas cuja a soma da p-ésima potência é limitada por $l^p = l^p(\mathbb{Z})$, ou seja,*

$$l^p(\mathbb{Z}) = \{u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u(n)|^p < \infty\}$$

Definimos também o seguinte espaço

$$\mathcal{L}^p = \{u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^3 : \forall n \in \mathbb{Z}\ u(\cdot, n) \in L^p(\mathbb{R}^2)\ e\ \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^2\ u(\tilde{x}, \cdot) \in l^p(\mathbb{Z})\}$$

Definição 4.3.2. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ uma função em $L^1_{per}(\Omega)$. A transformada de Fourier de f é definida por*

$$\hat{f}(\eta, n) = \frac{1}{(2\pi\kappa)^2} \int_{-\pi\kappa}^{\pi\kappa} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-\frac{i}{\kappa}\eta\tilde{x}} e^{-\frac{i}{\kappa}nx_3} dx,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $\eta \in \mathbb{R}^2$.

Definição 4.3.3. *Seja $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^3$ uma função em $\mathcal{L}^1$. A transformada inversa de Fourier de g é definida por*

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}_\eta^{-1}g)(\tilde{x}, n)e^{\frac{i}{\kappa}nx_3}$$

onde

$$(\mathcal{F}_\eta^{-1}g)(\tilde{x}, n) = \frac{1}{2\pi\kappa}\int_{\mathbb{R}^2} f(\eta, n)e^{\frac{i}{\kappa}\eta\tilde{x}}d\eta.$$

Teorema 4.3.1. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ uma função em $L^1_{per}(\Omega) \cap L^2_{per}(\Omega)$ tal que $\hat{f} \in \mathcal{L}^1$. Então $\mathcal{F}^{-1}\hat{f} = f$ q.t.p., isto é,*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\kappa}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\hat{f}(\eta, n)e^{\frac{i}{\kappa}\eta\tilde{x}}d\eta\right)e^{\frac{i}{\kappa}nx_3}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Demonstração. Sabemos da teoria clássica de transformada de Fourier (veja [16], capítulo 7) que se $h \in L^1(\mathbb{R}^2)$ e $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ então vale a fórmula de inversão, isto é, $\mathcal{F}^{-1}(\hat{h}) = h$ q.t.p. Além disso, existe uma única extensão para a transformada de Fourier de L^2 para L^2, onde a fórmula de inversão ainda é válida. Já para séries de Fourier temos o teorema de Carleson-Hunt (veja [20]), que diz que: se $g \in L^p([-\pi, \pi])$, para algum $1 < p \leq \infty$, então $g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{g}(n)e^{inz}$, q.t.p. $z \in [-\pi, \pi]$, onde $\hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi\kappa}^{\pi\kappa} g(z)e^{-inz}dz.$

Como $f \in L^1_{per}(\Omega) \cap L^2_{per}(\Omega)$, então $f(\cdot, x_3) \in L^1_{per}(\Omega) \cap L^2_{per}(\Omega)$, q.t.p. $x_3 \in [-2\kappa\pi, \kappa\pi]$ e $f(\tilde{x}, \cdot) \in L^1_{per}(\Omega) \cap L^2_{per}(\Omega)$, q.t.p. $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$. Isso segue facilmente do fato que se uma função tem integral finita então o conjunto onde a função tem valor infinito tem medida zero.

Com isso temos que, pela fórmula de inversão para transformada de Fourier clássica,

$$f(\tilde{x}, x_3) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\cdot, x_3))(\tilde{x}) = \int_{\mathbb{R}^2}\hat{f}(\eta, x_3)e^{\frac{i}{\kappa}\eta\tilde{x}}d\eta, \text{ q.t.p. } \tilde{x} \in \mathbb{R}^2,$$

onde $\hat{f}(\eta, x_3) = \frac{1}{(2\pi\kappa)^2}\int_{\mathbb{R}^2} f(\tilde{y}, x_3)e^{-\frac{i}{\kappa}\tilde{y}\eta}d\tilde{y}$, e , pelo teorema de Carleson-Hunt,

$$f(\tilde{x}, x_3) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\tilde{x}, n)e^{\frac{i}{\kappa}nx_3}, \text{ q.t.p. } \tilde{x} \in \mathbb{R}^2,$$

onde $\hat{f}(\tilde{x}, n) = \frac{1}{2\pi\kappa}\int_{-\kappa\pi}^{\kappa\pi} f(\tilde{x}, z)e^{-\frac{i}{\kappa}zn}dz.$

Portanto, usando as identidades acima e o Teorema de Fubini (veja, por exemplo, [3]), temos que

$$
\begin{aligned}
f(\tilde{x},x_3) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{2\pi\kappa}\int_{-\pi\kappa}^{\pi\kappa} f(\tilde{x},z)e^{-inz}dz\right)e^{\frac{i}{\kappa}nx_3} = \\
&= \frac{1}{2\pi\kappa}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_{-\pi\kappa}^{\pi\kappa}\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\cdot,z))(\tilde{x})e^{-inz}dz\right)e^{\frac{i}{\kappa}nx_3} = \\
&= \frac{1}{2\pi\kappa}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_{-\pi\kappa}^{\pi\kappa}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\hat{f}(\eta,x_3)e^{\frac{i}{\kappa}\tilde{x}\eta}d\eta\right)e^{-inz}dz\right)e^{\frac{i}{\kappa}nx_3} = \\
&= \frac{1}{2\pi\kappa}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_{-\pi\kappa}^{\pi\kappa}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}f(\tilde{y},x_3)e^{-\frac{i}{\kappa}\eta\tilde{y}}d\tilde{y}\right)e^{\frac{i}{\kappa}\tilde{x}\eta}d\eta\right)e^{-inz}dz\right)e^{\frac{i}{\kappa}nx_3} = \\
&= \frac{1}{2\pi\kappa}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{-\pi\kappa}^{\pi\kappa}\int_{\mathbb{R}^2}f(\tilde{y},x_3)e^{-\frac{i}{\kappa}\eta\tilde{y}}e^{-inz}d\tilde{y}dz\right)e^{\frac{i}{\kappa}\tilde{x}\eta}d\eta\right)e^{\frac{i}{\kappa}nx_3} = \\
&= \frac{1}{2\pi\kappa}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\hat{f}(\eta,n)e^{\frac{i}{\kappa}\eta\tilde{x}}d\eta\right)e^{\frac{i}{\kappa}nx_3}, \text{ q.t.p. } x\in\Omega.
\end{aligned}
$$

□

Proposição 4.3.1. *Seja $f \in L^1_{per}(\Omega)\cap L^2_{per}(\Omega)$, então $\hat{f}\in\mathcal{L}^2$ e a transformada de Fourier, definida em 4.3.2, restrita a $L^1_{per}\cap L^2_{per}$, possue uma única extensão para um isomorfismo unitário de $L^2_{per}(\Omega)$ para $\mathcal{L}^2(\Omega)$.*

Demonstração. Basta combinar o teorema de Plancharel para a transforma de Fourier e para a série de Fourier. □

Agora, podemos definir a transforma de Fourier para qualquer $f \in L^2_{per}(\Omega)$ utilizando a proposição anterior. Com isso, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.3.1. *Seja $f:\Omega\to\mathbb{R}^3$ uma função em $L^2_{per}(\Omega)$. Então $\bar{\mathcal{F}}^{-1}(\bar{\mathcal{F}}f) = f$ q.t.p., onde $\bar{\mathcal{F}}: L^2_{per}\to\mathcal{L}^2$ é o único isomorfismo unitário tal que $\bar{\mathcal{F}}\big|_{L^1_{per}\cap L^2_{per}}$ coincide com a transformada de Fourier definida em 4.3.2.*

Aplicando a transformada de Fourier à equação $\Delta N = F$ obtemos que

$$-\frac{1}{\kappa^2}(|\eta|^2+n^2)\hat{N}(\eta,n) = \hat{F}(\eta,n). \tag{4.5}$$

Então, para todo $\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, temos que

$$\hat{N}(\eta, n) = -\kappa^2 \frac{\hat{F}(\eta, n)}{|\eta|^2 + n^2}. \tag{4.6}$$

Como, por hipótese, $\hat{F}(0,0) = \int_\Omega F(x)dx = 0$ então a equação acima está bem definida para $\eta = 0$ e $n = 0$.

Usando a transformada inversa de Fourier e a seguinte identidade

$$\widehat{f * g} = (2\pi\kappa)^2 \hat{f}\hat{g}$$

obtemos que

$$N(x) = -\frac{1}{4\pi^2}(G * F)(x) \tag{4.7}$$

onde $G(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\dfrac{1}{|\eta|^2 + n^2}\right)(x)$. Chamamos G de função de Green para o laplaciano em Ω e periódico em x_3.

A seguir, exprimimos a fórmula para a função de Green G em termos de funções de Bessel.

Lema 4.3.1. *Para cada $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ considere a função $G_n(\eta) = \dfrac{1}{|\eta|^2 + n^2}$. A transformada inversa de Fourier de G_n é dada por*

$$(\mathcal{F}_\eta^{-1} G_n)(\tilde{x}) = \frac{1}{4\pi\kappa^2} K_0(2\pi|\tilde{x}||n|),$$

onde K_ν é a função de Bessel modificada do segundo tipo e de ordem ν.

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Considere a função

$$g(\tilde{x}) = e^{-\frac{t|\tilde{x}|^2}{2} - \frac{n^2}{2\kappa^2 t}}.$$

Temos que

$$\hat{g}(\eta) = \frac{2\pi}{t} e^{-\frac{|\eta|^2}{2\kappa^2 t} - \frac{n^2}{2\kappa^2 t}}.$$

De fato, observe que $\dfrac{\partial g}{\partial x_i} = -t x_i g$. Portanto,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x_1} + t x_1 g = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2} + t x_2 g = 0 \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Fourier no sistema acima obtemos que

$$\begin{cases} \dfrac{i}{\kappa}\eta_1\hat{g} + ti\kappa\dfrac{\partial\hat{g}}{\partial\eta_1} = 0 \\ \dfrac{i}{\kappa}\eta_2\hat{g} + ti\kappa\dfrac{\partial\hat{g}}{\partial\eta_2} = 0 \end{cases}$$

A solução do sistema acima é,

$$\hat{g}(\eta) = \frac{2\pi}{t}e^{-\frac{|\eta|^2}{2\kappa^2 t}-\frac{n^2}{2\kappa^2 t}}.$$

Portanto, $\langle \hat{g}, \phi\rangle = \langle g, \hat{\phi}\rangle$ para toda $\phi \in \mathcal{D}'$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{2\pi}{t}e^{-\frac{|\eta|^2}{2\kappa^2 t}-\frac{n^2}{2\kappa^2 t}}\phi(\eta)d\eta = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{t|\tilde{x}|^2}{2}-\frac{n^2}{2\kappa^2 t}}\hat{\phi}(\tilde{x})d\tilde{x}.$$

Multiplicando a última expressão por $\frac{1}{t}$ e integrando em t de 0 até ∞ obtemos que

$$2\pi\int_{\mathbb{R}^2}\left[\underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{t^2}e^{-\frac{|\eta|^2}{2\kappa^2 t}-\frac{n^2}{2\kappa^2 t}}dt}_{(I)}\right]\phi(\eta)d\eta = \int_{\mathbb{R}^2}\left[\underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{t}e^{-\frac{t|\tilde{x}|^2}{2}-\frac{n^2}{2\kappa^2 t}}dt}_{(II)}\right]\hat{\phi}(\tilde{x})d\tilde{x}.$$

Para calcular (I) faremos a seguinte mudança de variáveis: $\tau = \dfrac{|\eta|^2+n^2}{2\kappa^2 t}$. Logo, temos que

$$(I) = \int_0^\infty \frac{2\kappa^2}{|\eta|^2+n^2}e^{-\tau}d\tau = \frac{2\kappa^2}{|\eta|^2+n^2}.$$

Para (II), a mudança de variáveis utilizada é:

$$\tau = \frac{t|\tilde{x}|^2}{2} + \frac{n^2}{2\kappa^2 t}, \qquad d\tau = \left(\frac{|\tilde{x}|^2}{2} - \frac{n^2}{2\kappa^2 t^2}\right)dt.$$

Observe que

$$\frac{dt}{t} = \frac{d\tau}{\frac{t|\tilde{x}|^2}{2} - \frac{n^2}{2\kappa^2 t}} = \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - \frac{n^2|\tilde{x}|^2}{\kappa^2}}}.$$

Portanto,

$$(II) = \int_{\frac{|\tilde{x}||n|}{\kappa}}^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \frac{n^2|\tilde{x}|^2}{\kappa^2}}}e^{-\tau}d\tau.$$

Agora, fazendo uma nova mudança de variáveis, $\sigma = \dfrac{\tau\kappa}{|\tilde{x}||n|}$, concluímos que

$$(II) = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\sigma^2-1}}e^{-\frac{|n||\tilde{x}|}{\kappa}\sigma}d\sigma = K_0\left(\frac{|\tilde{x}||n|}{\kappa}\right).$$

Logo,

$$2\pi \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2\kappa^2}{|\eta|^2 + n^2} \phi(\eta) d\eta = \int_{\mathbb{R}^2} K_0 \left(\frac{|\tilde{x}||n|}{\kappa} \right) \hat{\phi}(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Portanto, $\left(\frac{1}{4\pi\kappa^2} K_0 \left(\frac{|\tilde{x}||n|}{\kappa} \right) \right)\hat{}(\eta) = \frac{1}{|\eta|^2 + n^2}$. Então, $(\mathcal{F}_\eta^{-1} G_n)(\tilde{x}) = \frac{1}{4\pi\kappa^2} K_0 \left(\frac{|\tilde{x}||n|}{\kappa} \right)$. □

Lema 4.3.2. *Seja* $G_0(\eta) = \frac{1}{|\eta|^2}$ *a distribuição definida por*

$$\langle G_0, \phi \rangle = F.P. \int \frac{\phi(\eta)}{|\eta|^2} d\eta.$$

A transformada de Fourier de G_0 *é dada por*

$$\mathcal{G}_0(\tilde{x}) = -\frac{1}{2\pi\kappa^2} \log |\tilde{x}|.$$

Demonstração. Veja capítulo 10, seção 2, de [16]. □

Lema 4.3.3. *A função de Green correspondente ao problema* (P) *é dada por*

$$G(x) = \frac{1}{2\pi\kappa^2} \sum_{n=1}^{\infty} K_0 \left(\frac{|\tilde{x}|n}{\kappa} \right) \cos\left(\frac{nx_3}{\kappa} \right) - \frac{1}{2\pi\kappa^2} \log |\tilde{x}|,$$

onde a série converge pontualmente para todo $x \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times [-\pi\kappa, \pi\kappa]$ *e uniformemente em* $D_\delta = \{x \in \mathbb{R}^2 \times [-\pi\kappa, \pi\kappa] : |\tilde{x}| \geq \delta\}$*, para cada* $\delta > 0$.

Demonstração. Segue dos lemas 4.3.1 e 4.3.2 que

$$G(x) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq 0}} (\mathcal{F}_\eta^{-1} G_n)(\tilde{x}) e^{\frac{i}{\kappa} n x_3} + (\mathcal{F}_\eta^{-1} G_0)(\tilde{x}) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq 0}} \frac{1}{2\pi\kappa^2} K_0 \left(\frac{|\tilde{x}||n|}{\kappa} \right) e^{\frac{i}{\kappa} n x_3} - \frac{1}{2\pi\kappa^2} \log |\tilde{x}| =$$

$$= \frac{1}{2\pi\kappa^2} \sum_{n=1}^{\infty} K_0 \left(\frac{|\tilde{x}|n}{\kappa} \right) \cos\left(\frac{nx_3}{\kappa} \right) - \frac{1}{2\pi\kappa^2} \log |\tilde{x}|.$$

Dado $\delta > 0$, vamos verificar que a série é uniformemente convergente em D_δ. Observe que, como K_0 é uma função positiva e decrescente, temos que para todo $x \in D_\delta$ vale que

$$K_0 \left(\frac{|\tilde{x}|}{\kappa} n \right) \leq K_0 \left(\frac{\delta}{\kappa} n \right)$$

e portanto

$$\left| K_0 \left(\frac{|\tilde{x}|}{\kappa} n \right) \cos\left(\frac{x_3}{\kappa} n \right) \right| \leq K_0 \left(\frac{\delta}{\kappa} n \right)$$

Além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_0\left(\frac{\delta}{\kappa}n\right) \leq \int_0^{\infty} K_0\left(\frac{\delta}{\kappa}t\right) dt = \frac{\kappa}{\delta}\int_0^{\infty} K_0(\tau)d\tau \leq \frac{C}{\delta}.$$

$\square$

Vamos resumir os resultados obtidos na proposição a seguir.

Proposição 4.3.2. *Seja $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ uma distribuição periódica em x_3, com período $2\pi\kappa$, e com suporte compacto em $\tilde{x}$. Suponha que $F \in L^2(\Omega)$ e $\int_\Omega F(x)dx = 0$. Então, a distribuição*

$$N = -\frac{1}{4\pi^2}G * F$$

é solução da equação $\Delta N = F$ no sentido das distribuições. Onde

$$G(x) = \frac{1}{2\pi\kappa^2}\sum_{n=1}^{\infty} K_0\left(\frac{|\tilde{x}|n}{\kappa}\right)\cos\left(\frac{nx_3}{\kappa}\right) - \frac{1}{2\pi\kappa^2}\log|\tilde{x}|.$$

Demonstração. Veja os lemas 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3 e as contas que precedem os lemas. $\square$

Finalmente, obtemos uma estimativa para a função de Green G.

Lema 4.3.4. *Seja G a função de Green definida na última proposição. Então, G satisfaz a seguinte estimativa,*

$$|G(x)| \leq C\left(\frac{1}{|\tilde{x}|} + |\log|\tilde{x}||\right) \quad \forall x \in \Omega, \tilde{x} \neq 0.$$

Demonstração. Temos que a função de Bessel K_0 é positiva e decrescente, logo

$$|G(x)| \leq \frac{1}{2\pi\kappa^2}\sum_{n=1}^{\infty} K_0\left(\frac{|\tilde{x}|n}{\kappa}\right) + \frac{1}{2\pi\kappa^2}|\log|\tilde{x}|| \leq \frac{1}{2\pi\kappa^2}\int_0^{\infty} K_0\left(\frac{|\tilde{x}|t}{\kappa}\right) dt + \frac{1}{2\pi\kappa^2}|\log|\tilde{x}|| =$$

$$= \frac{1}{2\pi\kappa|\tilde{x}|}\int_0^{\infty} K_0(\tau)d\tau + \frac{1}{2\pi\kappa^2}|\log|\tilde{x}|| = \frac{1}{4\kappa|\tilde{x}|} + \frac{1}{2\pi\kappa^2}|\log|\tilde{x}||.$$

$\square$

4.4 Estimativa para o núcleo $\mathcal{K}$

Definição 4.4.1. *Definimos o núcleo $\mathcal{K}$ como sendo o gradiente da função de Green G definida no lema 4.3.3. Ou seja,*

$$\mathcal{K}(z) := \frac{1}{4\pi^2}\nabla G(z) \quad \textit{onde} \quad G(x) = \frac{1}{2\pi\kappa^2}\sum_{n=1}^{\infty} K_0\left(\frac{|\tilde{x}|n}{\kappa}\right)\cos\left(\frac{nx_3}{\kappa}\right) - \frac{1}{2\pi\kappa^2}\log|\tilde{x}|.$$

Lema 4.4.1. *O núcleo $\mathcal{K}$ satisfaz a estimativa abaixo*

$$|\mathcal{K}(x)| \leq C\left(\frac{1}{|x|^2} + \frac{1}{|\tilde{x}|}\right).$$

Além disso, $\mathcal{K} \in L^s_{loc}(\Omega)$, com $1 \leq s < \dfrac{3}{2}$.

Demonstração. Como $\mathcal{K}(z) = \dfrac{1}{4\pi^2}\nabla G(z)$ temos que

$$\mathcal{K}(z) = \frac{1}{8\pi^3\kappa^2}\nabla\left(\sum_{n=1}^{\infty} K_0\left(\frac{|\tilde{x}|n}{\kappa}\right)\cos\left(\frac{nx_3}{\kappa}\right)\right) - \frac{1}{8\pi^3\kappa^2}\frac{1}{|\tilde{x}|^2}(\tilde{x},0).$$

Portanto,

$$|\mathcal{K}(z)| \leq \frac{1}{8\pi^3\kappa^2}\left|\nabla\left(\sum_{n=1}^{\infty} K_0\left(\frac{|\tilde{x}|n}{\kappa}\right)\cos\left(\frac{nx_3}{\kappa}\right)\right)\right| + \frac{1}{8\pi^3\kappa^2}\frac{1}{|\tilde{x}|}.$$

Para estimar a série envolvendo a função de Bessel usaremos a seguinte expansão em *série de Schloeminch*,

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_0(ny)\cos(ny\tau) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\gamma y}{4\pi}\right) + \frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{y^2+(2\pi m-\tau y)^2}} - \frac{1}{2\pi m}\right] + \tag{4.8}$$

$$+\frac{\pi}{2y\sqrt{1+\tau^2}} + \frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{y^2+(2\pi m+\tau y)^2}} - \frac{1}{2\pi m}\right].$$

Aplicamos a fórmula (4.8) com $y = \dfrac{|\tilde{x}|}{\kappa}$ e $\tau = \dfrac{x_3}{|\tilde{x}|}$ para obter que

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_0\left(\frac{|\tilde{x}|}{\kappa}n\right)\cos\left(\frac{x_3}{\kappa}n\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\gamma|\tilde{x}|}{4\pi\kappa}\right) + \frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{|\tilde{x}|^2}{\kappa^2} + \left(2\pi m - \frac{x_3}{\kappa}\right)^2}} - \frac{1}{2\pi m}\right] +$$

$$+\frac{\pi\kappa}{2\sqrt{|\tilde{x}|^2+x_3^2}} + \frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{|\tilde{x}|^2}{\kappa^2} + \left(2\pi m - \frac{x_3}{\kappa}\right)^2}} - \frac{1}{2\pi m}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{\gamma}{4\pi\kappa}\right) + \ln|\tilde{x}|\right) + \frac{\pi\kappa}{2|x|} + \frac{\pi\kappa}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{|\tilde{x}|^2+(2\pi\kappa m - x_3)^2}} - \frac{1}{2\pi\kappa m}\right] + \tag{4.9}$$

$$+\frac{\pi\kappa}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{|\tilde{x}|^2+(2\pi\kappa m + x_3)^2}} - \frac{1}{2\pi\kappa m}\right].$$

Para obter a estimativa para o núcleo K precisamos estimar o gradiente da série em (4.9). Para isto, definimos

$$S^-(x) := \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{|\tilde{x}|^2+(2\pi\kappa m - x_3)^2}} - \frac{1}{2\pi\kappa m}\right] \tag{4.10}$$

e

$$S^+(x) := \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{|\tilde{x}|^2+(2\pi\kappa m + x_3)^2}} - \frac{1}{2\pi\kappa m}\right]. \tag{4.11}$$

Não é difícil ver que as séries (4.10) e (4.11) convergem pontualmente para $x \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times [-\kappa\pi, \kappa\pi]$.

A seguir provaremos que $\dfrac{\partial}{\partial x_i}S^{\pm}(x) = \sum_n \dfrac{\partial}{\partial x_i} f_n^{\pm}(x)$ para todo $i = 1,2,3$, onde $f_n^{\pm}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|\tilde{x}|^2+(2\pi\kappa n \pm x_3)^2}} - \dfrac{1}{2\pi\kappa n}$. Para isto provamos que $\sum_n \dfrac{\partial}{\partial x_i} f_n^{\pm}(x)$ é uniformemente convergente para todo $x \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times [-\pi\kappa, \pi\kappa]$.

Temos que

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_n^{\pm}(x) = \frac{-x_1}{(|\tilde{x}|^2+(2\pi\kappa n \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f_n^{\pm}(x) = \frac{-x_2}{(|\tilde{x}|^2+(2\pi\kappa n \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} f_n^{\pm}(x) = \frac{(\mp 1)(2\pi\kappa n \pm x_3)}{(|\tilde{x}|^2+(2\pi\kappa n \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Observe que

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1} f_n^{\pm}(x)\right| \le \frac{|x_1|}{(|\tilde{x}|^2+(2\pi\kappa n \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \le \frac{1}{|\tilde{x}|^2+(2\pi\kappa n \pm x_3)^2} \le \frac{1}{(2\pi\kappa n \pm x_3)^2};$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_2} f_n^{\pm}(x)\right| \le \frac{|x_2|}{(|\tilde{x}|^2+(2\pi\kappa n \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \le \frac{1}{|\tilde{x}|^2+(2\pi\kappa n \pm x_3)^2} \le \frac{1}{(2\pi\kappa n \pm x_3)^2};$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_3} f_n^{\pm}(x)\right| \le \frac{|2\pi\kappa n \pm x_3|}{(|\tilde{x}|^2+(2\pi\kappa n \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \le \frac{1}{|\tilde{x}|^2+(2\pi\kappa n \pm x_3)^2} \le \frac{1}{(2\pi\kappa n \pm x_3)^2}.$$

Como $-\pi\kappa \le x_3 \le \pi\kappa$ temos que $\pi\kappa(2n-1) \le 2\pi\kappa n \pm x_3 \le \pi\kappa(2n+1)$, logo $|2\pi\kappa n \pm x_3| \ge \pi\kappa(2n-1)$. Portanto,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1} f_n^{\pm}(x)\right| \le \frac{1}{(\pi\kappa(2n-1))^2} \Rightarrow \sum_n \frac{\partial}{\partial x_1} f_n^{\pm}(x) \text{ é uniformemente convergente;}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_2} f_n^{\pm}(x)\right| \leq \frac{1}{(\pi\kappa(2n-1))^2} \Rightarrow \sum_n \frac{\partial}{\partial x_2} f_n^{\pm}(x) \text{ é uniformemente convergente;}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_3} f_n^{\pm}(x)\right| \leq \frac{1}{(\pi\kappa(2n-1))^2} \Rightarrow \sum_n \frac{\partial}{\partial x_3} f_n^{\pm}(x) \text{ é uniformemente convergente.}$$

Portanto, temos que $\dfrac{\partial}{\partial x_i} S^{\pm}(x) = \sum_n \dfrac{\partial}{\partial x_i} f_n^{\pm}(x)$, para $i = 1, 2, 3$. Logo,

$$\nabla\left(\sum_{n=1}^{\infty} K_0\left(\frac{|\tilde{x}|}{\kappa}n\right)\cos\left(\frac{x_3}{\kappa}n\right)\right) = \frac{1}{2|\tilde{x}|^2}(\tilde{x}, 0) - \frac{\pi\kappa}{2|x|^3}x + \frac{\pi\kappa}{2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\nabla f_m^-(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\nabla f_m^+(x)\right).$$

Agora vamos estimar a série presente na última identidade. Lembre que

$$\nabla f_m^{\pm}(x) = \frac{1}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa n \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}}(-x_1, -x_2, (\mp 1)(2\pi\kappa n \pm x_3)).$$

Defina $h^{\pm}(t) = \dfrac{1}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa t \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}}$ e observe que

$$(h^{\pm})'(t) = \frac{-3}{2}\frac{2(2\pi\kappa t \pm x_3)2\pi\kappa}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa t \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{logo} \qquad (h^{\pm})'(t) \geq 0 \iff t \leq \frac{\mp x_3}{2\pi\kappa} \leq \frac{1}{2}.$$

Então, h é decrescente para todo $t \geq 1$. Agora, para $0 \leq t \leq 1$ temos que

- $t = \dfrac{\mp x_3}{2\pi\kappa} \leq \dfrac{1}{2}$ é ponto crítico;
- $h^{\pm}(0) = \dfrac{1}{(|\tilde{x}|^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$ e $h^{\pm}(1) = \dfrac{1}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Então, $h^{\pm}(0) \geq h^{\pm}(1)$ se e somente se $|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa \pm x_3)^2 \geq |\tilde{x}|^2 + x_3^2 \iff |2\pi\kappa \pm x_3| \geq |x_3|$. Como $|x_3| \leq \pi$ temos que $|2\pi\kappa \pm x_3| \geq \pi \geq |x_3|$ portanto $h(0) \geq h(1)$.

Logo, podemos estimar a série por sua integral correspondente como segue (veja figura 4.1)

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa m \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \int_0^{\infty}\frac{1}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa t \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}}dt \overset{(\tau = 2\pi\kappa t \pm x_3)}{=}$$

$$= \frac{1}{2\pi\kappa}\int_{\pm x_3}^{\infty}\frac{1}{(|\tilde{x}|^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}d\tau = \frac{1}{2\pi\kappa}\frac{1}{|\tilde{x}|^2}\frac{\tau}{\sqrt{|\tilde{x}|^2 + \tau^2}}\Bigg|_{\pm x_3}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\kappa|\tilde{x}|^2} - \frac{1}{2\pi\kappa|\tilde{x}|^2}\frac{\pm x_3}{\sqrt{|\tilde{x}|^2 + x_3^2}} = \frac{1}{2\pi\kappa|\tilde{x}|^2}\frac{|x| \pm x_3}{|x|} \leq \frac{1}{\pi\kappa|\tilde{x}|^2}.$$

Logo,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa m \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{\pi\kappa|\tilde{x}|^2}. \tag{4.12}$$

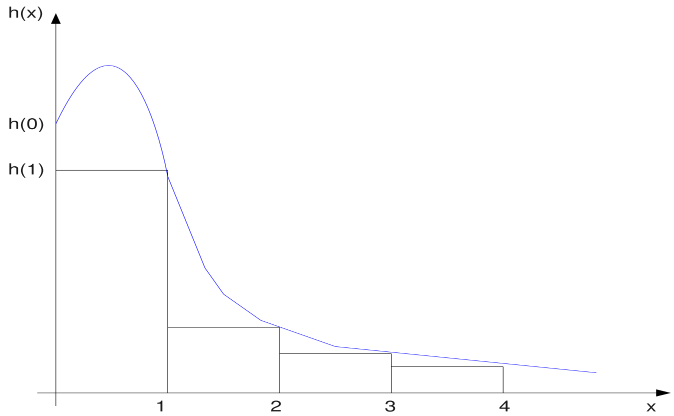


Figura 4.1: Gráfico de h

Defina $g^{\pm}(t) = \dfrac{2\pi\kappa t \pm x_3}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa t \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}}$ e observe que

$$(g^{\pm})'(t) = \frac{2\pi\kappa(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa t \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}} - (2\pi\kappa t \pm x_3)\frac{3}{2}(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa t \pm x_3)^2)^{\frac{1}{2}} 2(2\pi\kappa t \pm x_3)2\pi\kappa}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa t \pm x_3)^2)^3} =$$

$$= \frac{2\pi\kappa(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa t \pm x_3)^2)^{\frac{1}{2}}\{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa t \pm x_3)^2) - 3(2\pi\kappa t \pm x_3)^2\}}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa t \pm x_3)^2)^3} =$$

$$= \frac{2\pi\kappa(|\tilde{x}|^2 - 2(2\pi\kappa t \pm x_3)^2)}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa t \pm x_3)^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Então, $(g^{\pm})'(t) \leq 0 \Longleftrightarrow |\tilde{x}|^2 - 2(2\pi\kappa t \pm x_3)^2 \leq 0 \Longleftrightarrow t \geq \dfrac{1}{2\pi\kappa}\left(\dfrac{|\tilde{x}|}{\sqrt{2}} \mp x_3\right)$.

Se $\dfrac{1}{2\pi\kappa}\left(\dfrac{|\tilde{x}|}{\sqrt{2}} \mp x_3\right) \geq 1$ temos que separar a série da seguinte forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi\kappa n \pm x_3}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa n \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{d} \frac{2\pi\kappa n \pm x_3}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa n \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \sum_{n=d+1}^{\infty} \frac{2\pi\kappa n \pm x_3}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa n \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

onde $d = \left[\dfrac{1}{2\pi\kappa}\left(\dfrac{|\tilde{x}|}{\sqrt{2}} \mp x_3\right)\right]$ (aqui, $[.]$ é a função o maior inteiro menor que).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi\kappa n \pm x_3}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa n \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \leq d\frac{2\pi\kappa d \pm x_3}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa d \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_d^{\infty} \frac{2\pi\kappa t \pm x_3}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa t \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} dt =$$

$$= d\frac{2\pi\kappa d \pm x_3}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa d \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2\pi\kappa}\frac{1}{\sqrt{|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa t \pm x_3)^2}}\Bigg|_d^{\infty} =$$

$$= d\frac{2\pi\kappa d \pm x_3}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa d \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\pi\kappa}\frac{1}{\sqrt{|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa d \pm x_3)^2}} \leq d\frac{2\pi\kappa d \pm x_3}{|\tilde{x}|^3} + \frac{1}{2\pi\kappa}\frac{1}{|\tilde{x}|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi\kappa}\left(\frac{|\tilde{x}|}{\sqrt{2}} \mp x_3\right)\frac{2\pi\kappa\frac{1}{2\pi\kappa}\left(\frac{|\tilde{x}|}{\sqrt{2}} \mp x_3\right) \pm x_3}{|\tilde{x}|^3} + \frac{1}{2\pi\kappa}\frac{1}{|\tilde{x}|} = \frac{1}{2\pi\kappa}\left(\frac{|\tilde{x}|}{\sqrt{2}} \mp x_3\right)\frac{1}{\sqrt{2}|\tilde{x}|^2} + \frac{1}{2\pi\kappa}\frac{1}{|\tilde{x}|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi\kappa}\left(\frac{2|\tilde{x}|}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}|\tilde{x}|^2} + \frac{1}{2\pi\kappa}\frac{1}{|\tilde{x}|} = \frac{1}{\pi\kappa}\frac{1}{|\tilde{x}|}.$$

Para a última desigualdade observe que como $\frac{1}{2\pi\kappa}\left(\frac{|\tilde{x}|}{\sqrt{2}} \mp x_3\right) \geq 1$ então

$$\frac{|\tilde{x}|}{\sqrt{2}} \geq 2\pi\kappa \pm x_3 \geq \pi\kappa \geq \mp x_3 \;\Rightarrow\; \frac{|\tilde{x}|}{\sqrt{2}} \mp x_3 \leq \frac{2|\tilde{x}|}{\sqrt{2}}.$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi\kappa n \pm x_3}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa n \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{\pi\kappa}\frac{1}{|\tilde{x}|}. \tag{4.13}$$

Se $\frac{1}{2\pi\kappa}\left(\frac{|\tilde{x}|}{\sqrt{2}} \mp x_3\right) \leq 1$ é claro que

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\pi\kappa m \pm x_3}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa m \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{2\pi\kappa \pm x_3}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_1^{\infty}\frac{2\pi\kappa t \pm x_3}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa t \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}}dt =$$

$$= \frac{2\pi\kappa \pm x_3}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2\pi\kappa}\frac{1}{\sqrt{|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa t \pm x_3)^2}}\Bigg|_1^{\infty} =$$

$$= \frac{2\pi\kappa \pm x_3}{(|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa \pm x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\pi\kappa}\frac{1}{\sqrt{|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa \pm x_3)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa \pm x_3)^2}}\left(\frac{2\pi\kappa \pm x_3}{|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa \pm x_3)^2} + \frac{1}{2\pi\kappa}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa \pm x_3)^2}}\left(\frac{1}{2\pi\kappa \pm x_3} + \frac{1}{2\pi\kappa}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{|\tilde{x}|^2 + (2\pi\kappa \pm x_3)^2}}\frac{3}{2\pi\kappa} \leq \frac{3}{2\pi\kappa|\tilde{x}|}.$$

Finalmente, juntando (4.12) e (4.13) obtemos

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty}\nabla f_m^-(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\nabla f_m^+(x)\right| \leq 2(|x_1| + |x_2|)\frac{1}{\pi\kappa}\frac{1}{|\tilde{x}|^2} + 2\frac{3}{2\pi\kappa}\frac{1}{|\tilde{x}|} = \frac{5}{\pi\kappa}\frac{1}{|\tilde{x}|}.$$

Portanto,

$$\left|\nabla\left(\sum_{n=1}^{\infty} K_0\left(\frac{|\tilde{x}|}{\kappa}n\right)\cos\left(\frac{x_3}{\kappa}n\right)\right)\right| \leq= \frac{1}{2|\tilde{x}|} + \frac{\pi\kappa}{2|x|^2} + \frac{2}{|\tilde{x}|} \leq C\left(\frac{1}{|x|^2} + \frac{1}{|\tilde{x}|}\right).$$

e

$$|\mathcal{K}(z)| \leq C\left(\frac{1}{|x|^2} + \frac{1}{|\tilde{x}|}\right).$$

Por fim, é claro que $\mathcal{K} \in L^s_{loc}(\Omega)$, com $1 \leq s < \dfrac{3}{2}$. De fato, seja $U \in \Omega$ compacto. Logo, existe $R > 0$ tal que se $x \in U$ então $|x| \leq R$. Portanto, usando a estimativa que obtivemos acima e a desigualdade de Minkowski, obtemos que

$$\|\mathcal{K}\|_{L^s(U)} \leq C\left\|\frac{1}{|x|^2} + \frac{1}{|\tilde{x}|}\right\|_{L^s(U)} = C\left(\left(\int_U \frac{1}{|x|^{2s}}dx\right)^{1/s} + \left(\int_U \frac{1}{|\tilde{x}|^s}dx\right)^{1/s}\right).$$

Mudando para coordenadas esféricas, ou seja, $x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, x_2 = r\cos\theta\cos\varphi$ e $x_3 = r\sin\varphi$, obtemos a seguinte estimativa

$$\int_U \frac{1}{|x|^{2s}}dx = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^{\pi} \frac{1}{r^{2s}}r^2\sin\varphi d\varphi dr d\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^R \frac{1}{r^{2s}}r^2 dr = r^{3-2s}\big|_0^R = R^{3-2s}, \text{ para } 1 \leq s < \frac{3}{2}.$$

Para estimar o outro termo, observe que

$$\int_U \frac{1}{|\tilde{x}|^s}dx \leq \int_{-\kappa\pi}^{\kappa\pi}\int_{|\tilde{x}|\leq R} \frac{1}{|\tilde{x}|^s}d\tilde{x}dx_3 = 2\kappa\pi\int_{|\tilde{x}|\leq R} \frac{1}{|\tilde{x}|^s}d\tilde{x}.$$

Agora, mudando para coordenadas polares, temos que

$$\int_{|\tilde{x}|\leq R} \frac{1}{|\tilde{x}|^s}d\tilde{x} = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{1}{r^s}rdrd\theta = 2\pi\ r^{2-s}\big|_0^R = 2\pi R^{2-s}, \text{ para } 1 \leq s < 2.$$

Portanto, se $1 \leq s < \dfrac{3}{2}$, então para todo compacto $U \in \Omega$, temos que $\|\mathcal{K}\|_{L^s(U)} \leq C(U)$. Logo, $\mathcal{K} \in L^s_{loc}(\Omega)$, para $1 \leq s < \dfrac{3}{2}$. □

4.5 Lei de Biot-Savart

Lema 4.5.1. *Seja $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$ um campo vetorial periódico em x_3 com período $2\pi\kappa$ e com média nula. A integral definida por*

$$I(x) := \int_\Omega \mathcal{K}(x-y)\times\Phi(y)dy$$

se anula para $|\tilde{x}| \to \infty$. Além disso, $|I(x)| = \mathcal{O}(|\tilde{x}|^{-2})$ para $|\tilde{x}| \to \infty$.

Demonstração. Como Φ tem suporte compacto, existe $R > 0$ tal que *supp* $\Phi \subset B(0, R)$.

Lembre que

$$\mathcal{K}(x) = \frac{1}{8\pi^3\kappa^2}\nabla\left(\sum_{n=1}^{\infty} K_0\left(\frac{|\tilde{x}|n}{\kappa}\right)\cos\left(\frac{nx_3}{\kappa}\right)\right) - \frac{1}{8\pi^3\kappa^2}\frac{1}{|\tilde{x}|^2}(\tilde{x}, 0) =$$

$$= \frac{-1}{8\pi^3\kappa^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(K_1\left(\frac{|\tilde{x}|n}{\kappa}\right)\cos\left(\frac{nx_3}{\kappa}\right)\frac{n\tilde{x}}{\kappa|\tilde{x}|}, K_0\left(\frac{|\tilde{x}|n}{\kappa}\right)\sin\left(\frac{nx_3}{\kappa}\right)\frac{n}{\kappa}\right)\right) - \frac{1}{8\pi^3\kappa^2}\frac{1}{|\tilde{x}|^2}(\tilde{x}, 0) =$$
$$= \mathcal{K}_1(x) - \mathcal{K}_2(x).$$

Começamos estimando $\mathcal{K}_1$:

$$|\mathcal{K}_1(x)| \le \frac{1}{8\pi^3\kappa^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\kappa}\left(K_1\left(\frac{|\tilde{x}|n}{\kappa}\right) + K_0\left(\frac{|\tilde{x}|n}{\kappa}\right)\right) \le$$

$$\frac{1}{8\pi^3\kappa^3}\int_0^{\infty} t\left(K_1\left(\frac{|\tilde{x}|t}{\kappa}\right) + K_0\left(\frac{|\tilde{x}|t}{\kappa}\right)\right)dt = \frac{1}{8\pi^3\kappa^3}\int_0^{\infty}\frac{s\kappa}{|\tilde{x}|}\left(K_1(s) + K_0(s)\right)\frac{\kappa}{|\tilde{x}|}ds =$$
$$= \frac{1}{8\pi^3\kappa}\frac{1}{|\tilde{x}|^2}\int_0^{\infty} s\left(K_1(s) + K_0(s)\right)ds \le \frac{C}{|\tilde{x}|^2}.$$

Então,

$$\left|\int_{\Omega}\mathcal{K}_1(x-y) \times \Phi(y)dy\right| = \mathcal{O}(|\tilde{x}|^{-2}) \text{ para } |\tilde{x}| \to \infty. \tag{4.14}$$

Por outro lado, para $|\tilde{x}| \ge 2R$ temos que

$$|\tilde{x} - \tilde{y}|^{-2} = |\tilde{x}|^{-2} + \mathcal{O}(|\tilde{x}|^{-3})$$

então

$$\int_{\Omega}\mathcal{K}_2(x-y) \times \Phi(y)dy = \frac{1}{8\pi^3\kappa^2}\int_{\Omega}\frac{1}{|\tilde{x}-\tilde{y}|^2}(\tilde{x}-\tilde{y}, 0) \times \Phi(y)dy =$$
$$= \frac{1}{8\pi^3\kappa^2}\frac{1}{|\tilde{x}|^2}(\tilde{x}, 0) \times \int_{\Omega}\Phi(y)dy + \mathcal{O}(|\tilde{x}|^{-2}) = \mathcal{O}(|\tilde{x}|^{-2}).$$

Portanto, $|I(x)| = \mathcal{O}(|\tilde{x}|^{-2})$ para $|\tilde{x}| \ge 2R$. $\square$

Corolário 4.5.1. *Seja $\Phi \in L^p_{c,per}(\Omega; \mathbb{R}^3) \cap \mathcal{C}^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ para algum $p \ge 1$ e tal que $\int_{\Omega}\Phi(x)dx = 0$. Então o campo vetorial definido por*

$$u(x) := \int_{\Omega}\mathcal{K}(x-y) \times \Phi(y)dy$$

pertence a $L^r(\Omega;\mathbb{R}^3)$ *onde* $\dfrac{1}{r}+1=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{s}$ *e* $1\leq s<\dfrac{3}{2}$. *Em particular, se* $p>\dfrac{6}{5}$ *então* $u\in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$.

Demonstração. Como $\Phi\in L^p_c(\Omega;\mathbb{R}^3)$, existe $R>0$ tal que *supp* $\boldsymbol{\omega}\subset B(0,R)$. Segue da demonstração do lema 4.5.1 que $|u(x)|=\mathcal{O}(|\tilde{x}|^{-2})$ para $|\tilde{x}|\geq 2R$. Logo, $u\in L^r(\Omega\cap(B(0,2R)^c))$ para todo $r>1$. Por outro lado, aplicando a desigualdade de Young generalizada com $U=\Omega\cap B(0,3R)$ temos que, para $\mathcal{K}\in L^s(U)$ e $\boldsymbol{\omega}\in L^p(U)$ vale

$$\|\mathcal{K}*\boldsymbol{\omega}\|_{L^r(U)}\leq\|\mathcal{K}\|_{L^s(U)}\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^p(U)}$$

onde $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{s}=1+\dfrac{1}{r}$. Mas segue do lema 4.4.1 que $\mathcal{K}\in L^s(U)$ para todo s tal que $1\leq s<\dfrac{3}{2}$.

Se $p>\dfrac{6}{5}$ tome $s=\dfrac{2p}{3p-2}$ logo $s<\dfrac{3}{2}$ e $r=2$, ou seja, $u\in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$. □

Lema 4.5.2. *Sejam* $v:\Omega\to\mathbb{R}^3$, $v\in L^2_{per}(\Omega)$, *um campo vetorial suave de divergente nulo em e* $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $f\in L^2_{per}(\Omega)$, *uma função escalar suave, tais que*

$$|v(x)||f(x)|=\mathcal{O}(|\tilde{x}|^{-2}),\quad |\tilde{x}|\to\infty.$$

Então v *e* ∇f *são ortogonais em* $L^2(\Omega)$, *ou seja,*

$$\int_\Omega v\cdot\nabla f dx=0.$$

Demonstração. Pelo Teorema da Divergência temos que

$$\int_{-\kappa\pi}^{\kappa\pi}\int_{B(0,R)}v\cdot\nabla f dx=\int_{-\kappa\pi}^{\kappa\pi}\int_{S(0,R)}fv\cdot\eta dS+\int_{S(0,R)}f(\tilde{x},-\kappa\pi)v(\tilde{x},-\kappa\pi)\cdot n_1 dS+$$
$$+\int_{S(0,R)}f(\tilde{x},\kappa\pi)v(\tilde{x},\kappa\pi)\cdot n_2 dS-\int_{-\kappa\pi}^{\kappa\pi}\int_{B(0,R)}\text{div } vf dx,$$

onde $\eta(x)=\dfrac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|}$, $n_1(\tilde{x})=(0,0,-1)$ e $n_2(\tilde{x})=(0,0,1)$. Como div $v=0$ e v e f são periódicas em x_3 com período $2\kappa\pi$ temos que

$$\int_{-\kappa\pi}^{\kappa\pi}\int_{B(0,R)}v\cdot\nabla f dx=\int_{-\kappa\pi}^{\kappa\pi}\int_{S(0,R)}fv\cdot\eta dS.$$

Por outro lado,

$$\left|\int_{-\kappa\pi}^{\kappa\pi}\int_{S(0,R)}fv\cdot\eta dS\right|\leq\int_{-\kappa\pi}^{\kappa\pi}\int_{S(0,R)}|v||f||\eta|dS\leq\int_{-\kappa\pi}^{\kappa\pi}\int_{S(0,R)}C|\tilde{x}|^{-2}dS\leq CR^{-1}.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} v \cdot \nabla f dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-\kappa\pi}^{\kappa\pi} \int_{B(0,R)} v \cdot \nabla f dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-\kappa\pi}^{\kappa\pi} \int_{S(0,R)} f v \cdot \eta dS = 0.$$

□

Proposição 4.5.1. *Seja $\Phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ um campo vetorial periódico em x_3 com período $2\pi\kappa$ tal que div $\Phi = 0$ e $\int_{\Omega} \Phi dx = 0$. Então, existe uma única solução suave de*

$$\begin{cases} rot\ u = \Phi \\ div\ u = 0 \\ |u(x)| \to 0 \text{ quando } |\tilde{x}| \to 0 \\ u \text{ periódico em } x_3 \end{cases} \tag{4.15}$$

dada por

$$u(x) := \int_{\Omega} \mathcal{K}(x-y) \times \Phi(y) dy.$$

Demonstração. Como div $u = 0$, segue da decomposição de Helmholtz que existe Ψ tal que $u = -\text{rot } \Psi$. Portanto, a condição rot $u = \Phi$ pode ser reescrita como

$$-\text{rot rot } \Psi = \Phi.$$

Observe que vale a seguinte identidade,

$$-\text{ rot rot } \Psi = \Delta\Psi - \nabla \text{div } \Psi. \tag{4.16}$$

A estratégia é mostrar que $\Psi = -\frac{1}{4\pi^2} G * \Phi$, solução de $\Delta\Psi = \Phi$, é tal que $\nabla\text{div } \Psi = 0$. Com isso, concluímos que Ψ é solução de $-\text{rot rot } \Psi = \Phi$. De fato, defina $f = \nabla\text{div } \Psi$ e $g = -\text{rot rot } \Psi$. Pelo lema 4.5.1 temos que $|\text{rot } \Psi(x)| = \mathcal{O}(|\tilde{x}|^{-2})$. Observe que, como $\Phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, $\Delta(\text{div } \Psi) = \text{div } \Phi$ e $\Delta(\text{rot } \Psi) = \text{rot } \Phi$, então

$$f(x) = \nabla\left(-\frac{1}{4\pi^2} G * \text{div } \Phi\right)(x) = -\int_{\Omega} \mathcal{K}(x-y) \text{div } \Phi(y) dy$$

$$g(x) = -\text{rot } \left(-\frac{1}{4\pi^2} G * \Phi\right)(x) = \int_{\Omega} \mathcal{K}(x-y) \times \text{rot } \Phi(y) dy.$$

Portanto, ainda pelo lema 4.5.1, concluímos que $f = \mathcal{O}(|\tilde{x}|^{-2})$ e $g = \mathcal{O}(|\tilde{x}|^{-2})$. Portanto, f e g pertencem a L^2. Agora, fazemos o produto interno de $L^2(\Omega)$ entre a identidade (4.16) e f e obtemos que

$$(f, f)_2 = (\Phi, f)_2 - (g, f)_2.$$

Temos que f é o gradiente de div Ψ, div $g = 0$ e, por hipótese, div $\Phi = 0$. Logo, pelo lema 4.5.2 temos que $(\Phi, f)_2 = (g, f)_2 = 0$. Portanto, $(f, f)_2 = 0$ donde segue que $f \equiv 0$.

Com isso, temos que $u(x) = \text{rot } \Psi(x) = \int_\Omega \mathcal{K}(x-y) \times \Phi(y) dy$ é solução de (4.15).

Para mostrar que esta é a única solução suponha que temos duas soluções u_1 e u_2 de (4.15). Logo, $U := u_1 - u_2$ satisfaz

$$\begin{cases} \text{rot } U = 0 \\ \text{div } U = 0 \\ |U(x)| = \mathcal{O}(|\tilde{x}|^{-2}) \text{ quando } |\tilde{x}| \to \infty \\ U \text{ periódico em } x_3. \end{cases} \tag{4.17}$$

Novamente podemos usar que div $U = 0$ se e somente se existe Ψ tal que $U = -\text{rot } \Psi$. Portanto, o problema reduz-se a encontrar Ψ tal que $-\text{rot rot } \Psi = 0$. Mas pela identidade (4.16) temos que

$$-\text{rot rot } \Psi = \Delta \Psi - \nabla \text{div } \Psi.$$

Seja Ψ solução de $\Delta \Psi = 0$ e $|\text{rot } \Psi| = \mathcal{O}(|\tilde{x}|^{-2})$ quando $|\tilde{x}| \to \infty$. Logo, $h = \text{rot } \Psi$ satisfaz o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta h = 0 \\ |h(x)| = \mathcal{O}(|\tilde{x}|^{-2}) \text{ quando } |\tilde{x}| \to \infty \\ h \text{ periódico em } x_3. \end{cases}$$

Para cada $R > 0$, h possui um máximo em $S^1 \times B(0, R)$, onde S^1 é o círculo obtido identificando os pontos extremos do intervalo $[-\kappa\pi, \kappa\pi]$, pois h é suave. Além disso, temos que h é harmônica na variedade Riemanniana $S^1 \times \mathbb{R}^2$. Portanto, usando o Princípio do Máximo Forte (veja [29], capítulo 9) aplicado a cada $S^1 \times B(0, R)$, concluímos que h é constante em $S^1 \times B(0, R)$, para todo $R > 0$, mas como h se anula no infinito segue que $h \equiv 0$. Portanto, existe ψ tal que $\Psi = \nabla\psi$ donde segue que tal Ψ satisfaz $\Delta\Psi - \nabla\text{div }\Psi = 0$. Por fim, concluímos que $U = -\text{rot }\Psi \equiv 0$ é a única solução de (4.17). $\square$

Proposição 4.5.2. *Sejam* $\boldsymbol{\omega} \in L^p_{c,per}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ *e* $u(t,x) = (\mathcal{K} * \boldsymbol{\omega})(t,x)$. *Então, u tem simetria helicoidal e é ortogonal às hélices se e somente se* $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{1}{\kappa}(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)\xi$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{R}^3)$.

Demonstração. Primeiro observe que, como $\boldsymbol{\omega}$ =rot u em $\mathcal{D}'$, para todo $\Psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega;\mathbb{R}^3)$ temos que

$$\langle\boldsymbol{\omega},\Psi\rangle = \langle\text{rot }u,\Psi\rangle = -\int_\Omega (u_3(x)\partial_2\Psi_1(x) - u_2(x)\partial_3\Psi_1(x)+$$

$$+u_1(x)\partial_3\Psi_2(x) - u_3(x)\partial_1\Psi_2(x) + u_2(x)\partial_1\Psi_3(x) - u_1(x)\partial_2\Psi_3(x))dx = \langle u,\text{rot }\Psi\rangle$$

Suponha que u tenha simetria helicoidal e seja ortogonal às hélices no sentido das definições 4.2.1 e 4.2.2, respectivamente.

Como $u\cdot\xi = 0$ temos que

$$\langle\boldsymbol{\omega},\Psi\rangle = -\int_\Omega \left(\frac{x_2u_1(x) - x_1u_2(x)}{\kappa}\partial_2\Psi_1(x) - u_2(x)\partial_3\Psi_1(x)+\right.$$

$$\left.+u_1(x)\partial_3\Psi_2(x) - \frac{x_2u_1(x) - x_1u_2(x)}{\kappa}\partial_1\Psi_2(x) + u_2(x)\partial_1\Psi_3(x) - u_1(x)\partial_2\Psi_3(x)\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{\kappa}\int_\Omega (x_2u_1(x)\partial_2\Psi_1(x) + x_1u_2(x)\partial_1\Psi_2(x) + \kappa u_2(x)\partial_1\Psi_3(x) - \kappa u_1(x)\partial_2\Psi_3(x))\,dx- \tag{4.18}$$

$$-\frac{1}{\kappa}\int_\Omega (-x_1u_2(x)\partial_2\Psi_1(x) - \kappa u_2(x)\partial_3\Psi_1(x) + \kappa u_1(x)\partial_3\Psi_2(x) - x_2u_1(x)\partial_1\Psi_2(x))\,dx.$$

Observe que a segunda integral do lado direito de (4.18) pode ser reescrita como

$$-\frac{1}{\kappa}\int_\Omega (-x_1u_2(x)\partial_2\Psi_1(x) - \kappa u_2(x)\partial_3\Psi_1(x) + \kappa u_1(x)\partial_3\Psi_2(x) - x_2u_1(x)\partial_1\Psi_2(x))\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\kappa}\int_\Omega(-u_2(x)(-x_2\partial_1 + x_1\partial_2 + \kappa\partial_3)\Psi_1(x) + u_1(x)(-x_2\partial_1 + x_1\partial_2 + \kappa\partial_3)\Psi_2(x))dx-$$

$$-\frac{1}{\kappa}\int_\Omega(-x_2u_2(x)\partial_1\Psi_1(x) - x_1u_1(x)\partial_2\Psi_2(x))dx =$$

$$= -\frac{1}{\kappa}\int_\Omega D(\Psi_2(x),-\Psi_1(x),0)\xi(x)\cdot u(x)dx - \frac{1}{\kappa}\int_\Omega(-x_2u_2(x)\partial_1\Psi_1(x) - x_1u_1(x)\partial_2\Psi_2(x))dx =$$

$$= -\frac{1}{\kappa}\int_\Omega \mathcal{R}(\Psi_2(x),-\Psi_1(x),0)\cdot u(x)dx - \frac{1}{\kappa}\int_\Omega(-x_2u_2(x)\partial_1\Psi_1(x) - x_1u_1(x)\partial_2\Psi_2(x))dx =$$

$$= -\frac{1}{\kappa}\int_\Omega (u_1(x)\Psi_1(x) + u_2(x)\Psi_2(x) - x_2u_2(x)\partial_1\Psi_1(x) - x_1u_1(x)\partial_2\Psi_2(x))dx.$$

Agora, substituindo o que obtivemos acima em (4.18) concluímos que

$$\langle \boldsymbol{\omega}, \Psi\rangle = -\frac{1}{\kappa}\int_\Omega (x_2u_1(x)\partial_2\Psi_1(x) + x_1u_2(x)\partial_1\Psi_2(x) + \kappa u_2(x)\partial_1\Psi_3(x) - \kappa u_1(x)\partial_2\Psi_3(x))\, dx-$$

$$-\frac{1}{\kappa}\int_\Omega (u_1(x)\Psi_1(x) + u_2(x)\Psi_2(x) - x_2u_2(x)\partial_1\Psi_1(x) - x_1u_1(x)\partial_2\Psi_2(x))dx =$$

$$= -\frac{1}{\kappa}\int_\Omega (u_2(x)\partial_1(-x_2\Psi_1(x)+x_1\Psi_2(x)+\kappa\Psi_3(x)) - u_1(x)\partial_2(-x_2\Psi_1(x)+x_1\Psi_2(x)+\kappa\Psi_3(x)))dx =$$

$$= \frac{1}{\kappa}\int_\Omega (\partial_1u_2(x) - \partial_2u_1(x))\xi(x)\cdot\Psi(x)dx = \int_\Omega \frac{1}{\kappa}\omega(x)\xi(x)\cdot\Psi(x)dx = \left\langle \frac{1}{\kappa}\omega\xi, \Psi\right\rangle.$$

Portanto, para toda $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$ temos que

$$\langle \boldsymbol{\omega}, \Psi\rangle = \left\langle \frac{1}{\kappa}\omega\xi, \Psi\right\rangle.$$

Reciprocamente, suponha que $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{1}{\kappa}\omega\xi$ em $\mathcal{D}'$, onde $\omega = \partial_1u_2 - \partial_2u_1$ em $\mathcal{D}'$.

Primeiro observe que $(\text{rot }\boldsymbol{\omega})\cdot\xi = 2\omega$ em $\mathcal{D}'$. De fato,

$$\langle (\text{rot }\boldsymbol{\omega})\cdot\xi, \varphi\rangle = \int_\Omega \text{rot }\boldsymbol{\omega}(x)\cdot(\xi(x)\varphi(x))dx = \langle \text{rot }\boldsymbol{\omega}, \xi\varphi\rangle = \langle \boldsymbol{\omega}, \text{rot }(\xi\varphi)\rangle = \langle \boldsymbol{\omega}, \varphi\text{rot }\xi + \nabla\varphi\times\xi\rangle$$

$$= \langle \boldsymbol{\omega}, \varphi(0,0,2) + \nabla\varphi\times\xi\rangle = \left\langle \frac{1}{\kappa}\omega\xi, (0,0,2\varphi) + \nabla\varphi\times\xi\right\rangle = \left\langle \frac{1}{\kappa}\omega, \xi\cdot((0,0,2\varphi) + \nabla\varphi\times\xi)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{1}{\kappa}\omega, 2\kappa\varphi + \xi\cdot(\nabla\varphi\times\xi)\right\rangle = \langle 2\omega, \varphi\rangle$$

Como $\boldsymbol{\omega} = \text{rot }u$ e $\text{div }u = 0$ em $\mathcal{D}'$ temos também a seguinte identidade,

$$\text{rot }\boldsymbol{\omega} = -\triangle u \text{ em } \mathcal{D}'.$$

Como $\triangle(u\cdot\xi) = \triangle u\cdot\xi + u\cdot\triangle\xi + 2\sum_{i=1}^3 \nabla u_i\cdot\nabla\xi_i$ em $\mathcal{D}'$ e $\triangle\xi = 0$ obtemos que

$$\triangle(u\cdot\xi) = \triangle u\cdot\xi + 2\sum_{i=1}^{3}\nabla u_i\cdot\nabla\xi_i = -\text{rot }\boldsymbol{\omega}\cdot\xi + 2(\partial_1u_2 - \partial_2u_1) = 0 \text{ em } \mathcal{D}'.$$

Portanto, $u\cdot\xi$ é solução da seguinte equação em $\mathcal{D}'$

$$\begin{cases} \triangle(u\cdot\xi) = 0 \ \text{ em } \ \Omega \\ u(x)\cdot\xi(x) \to 0 \text{ quando } \tilde{x}\to\infty \\ u\cdot\xi \text{ periódica em } x_3. \end{cases}$$

Vejamos que $u{\cdot}\xi = 0$. Primeiro, como $u{\cdot}\xi$ satisfaz $\triangle(u{\cdot}\xi) = 0$ então $u{\cdot}\xi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Logo, a equação é satisfeita no sentido clássico. Além disso, segue do lema 4.5.1 que $|(u{\cdot}\xi)(x)| = \mathcal{O}(|\tilde{x}|^{-1})$ para $|\tilde{x}| \to \infty$. Portanto, podemos aplicar o Princípio do Máximo Forte (veja [29], capítulo 9) e concluir que $u \cdot \xi \equiv 0$.

Agora provaremos que u tem simetria helicoidal. Para isso, provaremos que para toda $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$

$$\int_\Omega u(x) \cdot (D\Psi(x)\xi(x))dx = \int_\Omega u(x) \cdot (\mathcal{R}\Psi(x))dx, \tag{4.19}$$

com isso o resultado seguirá do lema (4.2.1).

Tome $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$ e considere

$$\int_\Omega u(x) \cdot D\Psi(x)\xi(x)dx = -\int_\Omega (u_1(x)(x_2\partial_1\Psi_1(x) - x_1\partial_2\Psi_1(x) + \kappa\partial_3\Psi_1(x)) + \tag{4.20}$$

$$+u_2(x)(x_2\partial_1\Psi_2(x) - x_1\partial_2\Psi_2(x) + \kappa\partial_3\Psi_2(x)) + u_3(x)(x_2\partial_1\Psi_3(x) - x_1\partial_2\Psi_3(x) + \kappa\partial_3\Psi_3(x)))dx.$$

Primeiro, provaremos que para toda $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$,

$$\int_\Omega (u_3(x)(x_2\partial_1\Psi_3(x) - x_1\partial_2\Psi_3(x) + \kappa\partial_3\Psi_3(x))dx = 0. \tag{4.21}$$

De fato, como $\boldsymbol{\omega}(x) = \dfrac{1}{\kappa}(\partial_1 u_2(x) - \partial_2 u_1(x))\xi(x)$ temos que para toda $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$

$$\int_\Omega \boldsymbol{\omega}(x) \cdot \Phi(x) = -\frac{1}{\kappa}\int_\Omega (u_2(x)(x_2\partial_1\Phi_1(x) - x_1\partial_1\Phi_2(x) - \Phi_2(x) + \kappa\partial_1\Phi_3(x)) - \tag{4.22}$$

$$-u_1(x)(x_2\partial_2\Phi_1(x) + \Phi_1(x) - x_1\partial_2\Phi_2(x) + \kappa\partial_2\Phi_3(x)))dx.$$

Por outro lado, da definição de $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } u$ temos que para toda $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3_x \times \mathbb{R}_t; \mathbb{R}^3)$

$$\int_\Omega \boldsymbol{\omega}(x) \cdot \Phi(x) = -\int_\Omega (u_3(x)\partial_2\Phi_1(x) - u_2(x)\partial_3\Phi_1(x) + \tag{4.23}$$

$$+u_1(x)\partial_3\Phi_2(x) - u_3(x)\partial_1\Phi_2(x) + u_2(x)\partial_1\Phi_3(x) - u_1(x)\partial_2\Phi_3(x))dx.$$

Agora, tome $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$ e considere $\Phi(x) = (x_1, x_2, 0)\Psi_3(x)$ então (4.22) torna-se

$$\int_\Omega \boldsymbol{\omega}(x) \cdot \Phi(x) = -\frac{1}{\kappa}\int_\Omega (u_2(x)(x_2\partial_1(x_1\Psi_3(x)) - x_1x_2\partial_1\Psi_3(x) - x_2\Psi_3(x)) -$$

$$-u_1(x)(x_2x_1\partial_2\Psi_3(x) + x_1\Phi_3(x) - x_1\partial_2(x_2\Psi_3(x)))dx = 0.$$

Por outro lado, a expressão (4.23) torna-se,

$$\int_\Omega \boldsymbol{\omega}(x)\cdot\Phi(x) = -\int_\Omega (u_3(x)x_1\partial_2\Psi_3(x) - u_2(x)x_1\partial_3\Psi_3(x)+$$

$$+u_1(x)x_2\partial_3\Psi_3(x) - u_3(x)x_2\partial_1\Psi_3(x))dx \overset{\xi\cdot u=0}{=} \int_\Omega (u_3(x)(x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + \kappa\partial_3)\Psi_3(x))dx.$$

As duas últimas identidades juntas provam (4.21). Portanto, para provar que u tem simetria helicoidal é suficiente provar que

$$-\int_\Omega (u_1(x)(x_2\partial_1\Psi_1(x) - x_1\partial_2\Psi_1(x) + \kappa\partial_3\Psi_1(x))+ \tag{4.24}$$

$$+u_2(x)(x_2\partial_1\Psi_2(x) - x_1\partial_2\Psi_2(x))dx = \int_\Omega \mathcal{R}\Psi(x)\cdot u(x)dx.$$

Como $u\cdot\xi = 0$ podemos reescrever (4.23)como,

$$\int_\Omega \boldsymbol{\omega}(x)\cdot\Phi(x) = -\frac{1}{\kappa}\int_\Omega ((x_1u_2(x) - x_2u_1(x))\partial_2\Phi_1(x) - \kappa u_2(x)\partial_3\Phi_1(x)+ \tag{4.25}$$

$$+\kappa u_1(x)\partial_3\Phi_2(x) - (x_1u_2(x) - x_2u_1(x))\partial_1\Phi_2(x) + \kappa u_2(x)\partial_1\Phi_3(x) - \kappa u_1(x)\partial_2\Phi_3(x))\, dx.$$

Agora, como (4.22) é igual a (4.25) obtemos que

$$-\frac{1}{\kappa}\int_\Omega (x_2u_2(x)\partial_1\Phi_1(x) + \kappa u_2(x)\partial_1\Phi_3(x) - u_2(x)\Phi_2(x)-$$

$$-u_1(x)\Phi_1(x) + x_1u_1(x)\partial_2\Phi_2(x) - \kappa u_1(x)\partial_2\Phi_3(x))dx =$$

$$= -\frac{1}{\kappa}\int_\Omega (x_1u_2(x)\partial_2\Phi_1(x) - \kappa u_2(x)\partial_3\Phi_1(x) + \kappa u_1(x)\partial_3\Phi_2(x) + x_2u_1(x)\partial_1\Phi_2(x)+$$

$$+\kappa u_2(x)\partial_1\Phi_3(x) - \kappa u_1(x)\partial_2\Phi_3(x))\, dx.$$

Em particular, a última expressão vale para $\Phi(x) = (\Psi_2(x), -\Psi_1(x), \Psi_3(x))$. Portanto,

$$-\frac{1}{\kappa}\int_\Omega (x_2u_2(x)\partial_1\Psi_2(x) + \kappa u_2(x)\partial_1\Psi_3(x) + u_2(x)\Psi_1(x)-$$

$$-u_1(x)\Psi_2(x) - x_1u_1(x)\partial_2\Psi_1(x) - \kappa u_1(x)\partial_2\Psi_3(x))dx =$$

$$= -\frac{1}{\kappa}\int_\Omega (x_1u_2(x)\partial_2\Psi_2(x) - \kappa u_2(x)\partial_3\Psi_2(x) - \kappa u_1(x)\partial_3\Psi_1(x) - x_2u_1(x)\partial_1\Psi_1(x)+$$

$$+\kappa u_2(x)\partial_1\Psi_3(x) - \kappa u_1(x)\partial_2\Psi_3(x))\, dx,$$

que é equivalente a

$$\int_\Omega (x_2u_2(x)\partial_1\Psi_2(x) - x_1u_1(x)\partial_2\Psi_1(x) - x_1u_2(x)\partial_2\Psi_2(x)+$$

$$+\kappa u_2(x)\partial_3\Psi_2(x) + \kappa u_1(x)\partial_3\Psi_1(x) + x_2u_1(x)\partial_1\Psi_1(x))dx =$$

$$= \frac{1}{\kappa}\int_\Omega (-u_2(x)\Psi_1(x) + u_1(x)\Psi_2(x))dx \left(= \int_\Omega \mathcal{R}\Psi(x)\cdot u(x)dx\right).$$

Agora, combinando a última expressão com (4.20) e (4.21) provamos (4.24), isto é,

$$\int_\Omega D\Psi(x)\xi(x)\cdot u(x)dx = \int_\Omega \mathcal{R}\Psi(x)\cdot u(x)dx.$$

□

4.6 Definições de solução fraca e equivalência entre elas

Nesta seção introduziremos a definição de solução fraca para as equações de Euler 3D com simetria helicoidal e sem rodopio. Usualmente, para introduzir uma noção de solução fraca, faz-se o produto interno das equações com funções teste, integra-se no tempo e no espaço e depois integra-se por partes com o objetivo de transferir as derivadas da incógnita para as funções teste. Devido a simetria do problema, seremos capazes de ir um pouco além, usando uma técnica de simetrização das integrais presentes na definição de solução fraca e com isso permitir que funções com menos regularidade sejam soluções fracas da equação.

Começaremos introduzindo a definição de solução fraca para a equação de vorticidade

$$\partial_t\omega + (u\cdot\nabla)\omega = 0$$

com dado inicial ω^0. Para isso, tome $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T)\times\Omega;\mathbb{R})$ e faça o produto interno da equação acima com esta função teste e integre no tempo e no espaço. Em seguida faça integração por partes para obter que

$$\int_0^T\int_\Omega \psi_t(t,x)\omega(t,x)dxdt + \int_0^T\int_\Omega \nabla\psi(t,x)\cdot u(t,x)\omega(t,x)dxdt + \int_\Omega \psi(x,0)\omega^0(x)dx = 0.$$

No caso em que $\displaystyle\int_\Omega \omega(t,x)dx = 0$ temos que $u(t,x) = \left(\mathcal{K} * \frac{\omega(t,\cdot)}{\kappa}\xi(\cdot)\right)(x)$ e portanto,

$$\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \nabla\psi(t,x)\cdot u(t,x)\omega(t,x)dxdt =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega \nabla\psi(t,x) \cdot \left(\mathcal{K}(x-y) \times \frac{\xi(y)}{\kappa} \omega(t,y) \right) \omega(t,x) dx dy dt.$$

Usando que $\mathcal{K}$ é uma função ímpar e que x e y são variáveis mudas, obtemos que vale a seguinte identidade

$$\int_\Omega \int_\Omega \nabla\psi(t,x) \cdot \left(\mathcal{K}(x-y) \times \frac{\xi(y)}{\kappa} \right) \omega(t,y)\omega(t,x) dx dy =$$

$$= - \int_\Omega \int_\Omega \nabla\psi(t,y) \cdot \left(\mathcal{K}(x-y) \times \frac{\xi(x)}{\kappa} \right) \omega(t,x)\omega(t,y) dx dy.$$

Agora, usando que $a \cdot (b \times c) = -b \cdot (a \times c)$ e a identidade acima, obtemos que

$$\int_\Omega \int_\Omega \nabla\psi(t,x) \cdot \left(\mathcal{K}(x-y) \times \frac{\xi(y)}{\kappa} \right) \omega(t,y)\omega(t,x) dx dy =$$

$$= \int_\Omega \int_\Omega \frac{\mathcal{K}(x-y)}{2\kappa} \cdot (\xi(y) \times (\nabla\psi(t,x) - \nabla\psi(t,y)))\omega(t,y)\omega(t,x) dx dy -$$

$$- \int_\Omega \int_\Omega \frac{\mathcal{K}(x-y)}{2\kappa} \cdot ((\xi(x) - \xi(y)) \times \nabla\psi(t,y))\omega(t,y)\omega(t,x) dx dy.$$

Defina $\mathcal{H}_\psi(t,x,y) := \dfrac{1}{2\kappa}\mathcal{K}(x-y) \cdot (\xi(y) \times (\nabla\psi(t,x) - \nabla\psi(t,y)) - (\xi(x) - \xi(y)) \times \nabla\psi(t,y))$. A regularidade que ω tem que satisfazer virá das estimativas obtidas para $\mathcal{H}_\psi$.

Introduziremos a definição de solução fraca para a equação de vorticidade associada a terceira componente guiados pelas contas formais feitas acima.

Definição 4.6.1. *Seja $\omega^0 \in L^p_{c,per}(\Omega;\mathbb{R})$, para algum $p > \dfrac{4}{3}$, tal que $\int_\Omega \omega^0(x)dx = 0$. Um campo escalar $\omega = \omega(t,x)$ é solução fraca de*

$$\frac{D\omega}{Dt} = 0 \tag{4.26}$$

com dado inicial ω^0, se

(i) $\omega \in L^\infty([0,T), L^p_{per}(\Omega;\mathbb{R}) \cap L^1_{per}(\Omega;\mathbb{R}))$,

(ii) o campo de velocidades, dado por $u(t,x) = \displaystyle\int_\Omega \mathcal{K}(x-y) \times \frac{\xi(y)}{\kappa}\omega(t,y)dy$, pertence a $L^\infty([0,T), L^2_{per}(\Omega;\mathbb{R}^3))$,

(iii) e, para toda função teste $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c([0,T) \times \Omega;\mathbb{R})$, tivermos que

$$\int_0^T \int_\Omega \psi_t(t,x)\omega(t,x)dxdt + \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\omega(t,y)\omega(t,x)dydxdt + \int_\Omega \psi(x,0)\omega^0(x)dx = 0$$

onde

$$\mathcal{H}_\psi(t,x,y) = \frac{1}{2\kappa}\mathcal{K}(x-y)\cdot(\xi(y)\times(\nabla\psi(t,x)-\nabla\psi(t,y)) - (\xi(x)-\xi(y))\times\nabla\psi(t,y))\,.$$

Analogamente, introduzimos a definição de solução fraca para a equação de vorticidade total como segue.

Definição 4.6.2. *Seja* $\boldsymbol{\omega}^0 = \boldsymbol{\omega}^0(x) = \dfrac{\omega^0(x)}{\kappa}\xi(x)$, *com* $\omega^0 \in L^p_{c,per}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, *para algum* $p > \dfrac{4}{3}$, *tal que* $\int_\Omega \omega^0(x)dx = 0$. *Um campo vetorial* $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t,x)$ *é solução fraca de*

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} - \frac{\omega}{\kappa}\mathcal{R}u = 0 \tag{4.27}$$

com dado inicial $\boldsymbol{\omega}^0$, *se*

(i) $\boldsymbol{\omega}(t,x) = \dfrac{\omega(t,x)}{\kappa}\xi(x)$ *com* $\omega \in L^\infty([0,T), L^p_{per}(\Omega;\mathbb{R}^3)\cap L^1_{per}(\Omega;\mathbb{R}))$,

(ii) o campo de velocidades $u(t,x) = \int_\Omega \mathcal{K}(x-y)\times\boldsymbol{\omega}(t,y)dy$ *pertence a* $L^\infty([0,T), L^2_{per}(\Omega;\mathbb{R}^3))$,

(iii) e, para toda função teste $\Psi \in \mathcal{C}^\infty_c([0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)$, *tivermos que*

$$\int_0^T \int_\Omega \Psi_t(t,x)\cdot\boldsymbol{\omega}(t,x)dxdt + \int_0^T \int_\Omega\int_\Omega \mathbf{H}_\Psi(t,x,y)\omega(t,y)\omega(t,x)dxdydt + \tag{4.28}$$
$$+\int_0^T \int_\Omega \mathbb{H}_\Psi(t,x,y)\omega(t,x)\omega(t,y)dxdt + \int_\Omega \Psi(0,x)\cdot\boldsymbol{\omega}^0(x)dx = 0,$$

onde $\mathbf{H}_\Psi(t,x,y) =$

$$= \frac{1}{2\kappa^2}\mathcal{K}(x-y)\cdot\sum_{i=1}^3\{\xi(y)\times(\xi_i(x)\nabla\Psi_i(t,x)-\xi_i(y)\nabla\Psi_i(t,y)) - \xi_i(y)(\xi(x)-\xi(y))\times\nabla\Psi_i(t,y)\}$$

e $\quad \mathbb{H}_\Psi(t,x,y) = \dfrac{1}{2\kappa^2}\mathcal{K}(x-y)\cdot[(\xi(y)-\xi(x))\times\mathcal{R}\Psi(t,x) - \xi(x)\times(\mathcal{R}\Psi(t,y)-\mathcal{R}\Psi(t,x))]$.

Observação . As integrais presentes nas definições (4.6.1) e (4.6.2) estão bem definidas. De fato, para as integrais abaixo, usando a desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\left|\int_0^T \int_\Omega \psi_t(t,x)\omega(t,x)dxdt + \int_\Omega \psi(x,0)\omega^0(x)dx\right| \leq \|\psi_t\|_{L^\infty(L^q)}\|\omega\|_{L^\infty(L^p)} + \|\psi(0,\cdot)\|_{L^q}\|\omega^0\|_{L^p} < \infty,$$

$$\left|\int_0^T \int_\Omega \Psi_t(t,x)\cdot\boldsymbol{\omega}(t,x)dxdt + \int_\Omega \Psi(0,x)\cdot\boldsymbol{\omega}^0(x)dx\right| \leq$$
$$\leq \|\Psi_t\cdot\xi/\kappa\|_{L^\infty(L^q)}\|\omega\|_{L^\infty(L^p)} + \|\Psi(0,\cdot)\|_{L^q}\|\boldsymbol{\omega}^0\|_{L^p} < \infty,$$

onde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Ainda falta mostrar que as seguintes integrais são limitadas,

$$\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\omega(t,y)\omega(t,x)dydxdt,\ \int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \mathbf{H}_\Psi(t,x,y)\omega(t,y)\omega(t,x)dxdydt,$$
$$\int_0^T\int_\Omega \mathbb{H}_\Psi(t,x,y)\omega(t,x)\omega(t,y)dxdt.$$

A ideia da demonstração é dividir cada uma das integrais acima em três integrais calculadas em regiões específicas, a saber, $R_1=\{(x,y)\in\Omega\times\Omega : |x-y|<\delta\}$, $R_2=\{(x,y)\in\Omega\times\Omega : |x-y|\geq\delta, |x|<R\}$ e $R_3=\{(x,y)\in\Omega\times\Omega : |x-y|\geq\delta, |x|\geq R\}$. As técnicas utilizadas para demonstrar que em cada uma dessas regiões as integrais são limitadas estão descritas em detalhes na demonstração da proposição 4.8.1, por isso estas contas serão omitidas aqui.

O resultado a seguir diz que basta resolver a equação de vorticidade para terceira componente e é esse resultado que nos permite obter existência global no tempo de soluções fracas já que a equação de vorticidade para terceira componente é uma equação de transporte.

Proposição 4.6.1. *Uma função escalar $\omega=\omega(t,x)$ é solução fraca de (4.32) (no sentido da definição 4.6.1) se e somente se $\boldsymbol{\omega}$, definida por $\boldsymbol{\omega}(t,x) := \frac{1}{\kappa}\xi(x)\omega(t,x)$, for solução fraca de (4.27) (no sentido da definição 4.6.2).*

Demonstração. Suponha que ω seja solução fraca de (4.32), então $\omega\in L^\infty([0,T), L^p_{per}(\Omega;\mathbb{R}^3)\cap L^1_{per}(\Omega;\mathbb{R}))$, o campo de velocidades $u(t,x)=\int_\Omega \mathcal{K}(x-y)\times\boldsymbol{\omega}(t,y)dy$ pertence ao espaço $L^\infty([0,T),L^2_{per}(\Omega;\mathbb{R}^3))$ e para toda função teste $\psi\in\mathcal{C}_c^\infty([0,T)\times\Omega;\mathbb{R})$ temos que

$$\int_0^T\int_\Omega \psi_t(t,x)\omega(t,x)dxdt + \int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\omega(t,y)\omega(t,x)dydxdt + \int_\Omega \psi(x,0)\omega^0(x)dx = 0.$$

Portanto, $\boldsymbol{\omega}(t,x)=\dfrac{\omega(t,x)}{\kappa}\xi(x)$ satisfaz as condições (i) e (ii) da definição 4.6.2. Assim, para mostrar que $\boldsymbol{\omega}$ é solução fraca de (4.27) resta apenas verificar que toda função tese $\Psi\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}_t;\mathbb{R}^3)$, vale a seguinte identidade,

$$\int_0^T\int_\Omega \Psi_t(t,x)\cdot\boldsymbol{\omega}(t,x)dxdt + \int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \mathbf{H}_\Psi(t,x,y)\omega(t,y)\omega(t,x)dxdt +$$

$$+\int_0^T \int_\Omega \mathbb{H}_\Psi(t,x,y)\omega(t,x)\omega(t,y)dxdydt + \int_\Omega \Psi(0,x)\cdot \boldsymbol{\omega}^0(x)dx = 0$$

Observe que,

$$\int_0^T \int_\Omega \Psi_t(t,x)\cdot \boldsymbol{\omega}(t,x)dxdt = \int_0^T \int_\Omega \Psi_t(t,x)\cdot (x_2,-x_1,\kappa)\frac{\omega(t,x)}{\kappa}dxdt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \left\{(x_2\Psi_1)_t(t,x) + (-x_1\Psi_2)_t(t,x) + (\kappa\Psi_3)_t(t,x)\right\}\frac{\omega(t,x)}{\kappa}dxdt.$$

Defina $\Phi_1(t,x) = \dfrac{1}{\kappa}x_2\Psi_1(t,x)$, $\Phi_2(t,x) = -\dfrac{1}{\kappa}x_1\Psi_2(t,x)$ e $\Phi_3(t,x) = \Psi_3(t,x)$. Substituindo Φ_1, Φ_2 e Φ_3 na última expressão obtemos que

$$\int_0^T \int_\Omega \left\{(x_2\Psi_1)_t(t,x) + (-x_1\Psi_2)_t(t,x) + (\kappa\Psi_3)_t(t,x)\right\}\frac{\omega(t,x)}{\kappa}dxdt =$$

$$\int_0^T \int_\Omega \left((\Phi_1)_t(t,x) + (\Phi_2)_t(t,x) + (\Phi_3)_t(t,x)\right)\omega(t,x)dxdt =$$

$$= \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_\Omega (\Phi_i)_t(t,x)\omega(t,x)dxdt.$$

Além disso, é fácil ver que

$$\mathbf{H}_\Psi(t,x,y) = \frac{\mathcal{K}(x-y)}{2\kappa^2}\cdot \sum_{i=1}^3 \xi(y)\times(\xi_i(x)\nabla\Psi_i(t,x) - \xi_i(y)\nabla\Psi_i(t,y)) -$$

$$-\frac{\mathcal{K}(x-y)}{2\kappa^2}\cdot \sum_{i=1}^3 (\xi(x)-\xi(y))\times \xi_i(y)\nabla\Psi_i(t,y) =$$

$$= \frac{\mathcal{K}(x-y)}{2\kappa}\cdot \sum_{i=1}^3 \xi(y)\times(\nabla\Phi_i(t,x) - \nabla\Phi_i(t,y) - \mathcal{R}(\Psi(t,x)-\Psi(t,y))) -$$

$$-\frac{\mathcal{K}(x-y)}{2\kappa}\cdot \sum_{i=1}^3 (\xi(x)-\xi(y))\times(\nabla\Phi_i(t,y) - \mathcal{R}\Psi(t,y)).$$

Portanto, da última identidade e da definição de $\mathbb{H}$ segue que

$$\int_0^T \int_\Omega\int_\Omega (\mathbf{H}_\Psi(t,x,y) + \mathbb{H}_\Psi(t,x,y))\omega(t,x)\omega(t,y)dxdydt =$$

$$= \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_\Omega\int_\Omega \frac{\mathcal{K}(x-y)}{2\kappa}\cdot(\xi(y)\times(\nabla\Phi_i(t,x) - \nabla\Phi_i(t,y)))\omega(t,y)\omega(t,x)dxdydt -$$

$$-\sum_{i=1}^{3}\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \frac{\mathcal{K}(x-y)}{2\kappa}\cdot((\xi(x)-\xi(y))\times\nabla\Phi_i(t,y))\omega(t,y)\omega(t,x)dxdydt =$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \mathcal{H}_{\Phi_i}(x,y,t)\omega(t,y)\omega(t,x)dxdydt.$$

Por fim, é claro que

$$\int_\Omega \Psi(0,t)\cdot\boldsymbol{\omega}^0(x)dx = \int_\Omega \Psi(0,x)\cdot(x_2,-x_1,\kappa)\frac{\omega^0(x)}{\kappa}dx = \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \Phi_i(0,x)\omega^0(x)dx.$$

Logo,

$$\int_0^T\int_\Omega \Psi_t(t,x)\cdot\boldsymbol{\omega}(t,x)dxdt + \int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \mathbf{H}_\Psi(t,x,y)\omega(t,y)\omega(t,x)dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_\Omega \mathbb{H}_\Psi(t,x,y)\omega(t,x)\omega(t,y)dxdydt + \int_\Omega \Psi(0,x)\cdot\boldsymbol{\omega}^0(x)dx =$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\int_0^T\int_\Omega (\Phi_i)_t(t,x)\omega(t,x)dxdt + \sum_{i=1}^{3}\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \mathcal{H}_{\Phi_i}(t,x,y)\omega(t,y)\omega(t,x)dxdydt+$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \Phi_i(0,x)\omega^0(x)dx.$$

Mas é claro que a expressão acima é igual a zero já que ω é solução fraca de (4.32) e cada uma das funções Φ_i é função teste. Portanto, $\boldsymbol{\omega}$ é solução fraca de (4.27).

Reciprocamente, suponha que $\boldsymbol{\omega}$ seja solução fraca de (4.27). Então, $\boldsymbol{\omega}(t,x) = \dfrac{\omega(t,x)}{\kappa}\xi(x)$ com $\omega \in L^\infty([0,T), L^p_{per}(\Omega;\mathbb{R}^3)\cap L^1_{per}(\Omega;\mathbb{R}))$, o campo de velocidades $u(t,x) = \int_\Omega \mathcal{K}(x-y)\times\boldsymbol{\omega}(t,y)dy$ pertence a $L^\infty([0,T), L^2_{per}(\Omega;\mathbb{R}^3))$ e para toda função teste $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)$, $\boldsymbol{\omega}$ verifica (4.28). Portanto, ω satisfaz as condições (i) e (ii) da definição 4.6.1. Assim, para mostrar que ω é solução fraca de (4.32) resta apenas verificar que toda função teste $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T)\times\Omega;\mathbb{R})$, temos que

$$\int_0^T\int_\Omega \psi_t(t,x)\omega(t,x)dxdt + \int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\omega(t,y)\omega(t,x)dydxdt + \int_\Omega \psi(x,0)\omega^0(x)dx = 0.$$

Observe que $\boldsymbol{\omega}$ verifica (4.28) para toda função teste $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)$, e em particular, para toda função teste da forma $\Psi(t,x) = (0,0,\psi(t,x))$. Portanto, para toda função teste $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T)\times\Omega;\mathbb{R})$ podemos definir $\Psi(t,x) = (0,0,\psi(t,x))$ e obter que

$$0 = \int_0^T\int_\Omega \Psi_t(t,x)\cdot\boldsymbol{\omega}(t,x)dxdt + \int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \mathbf{H}_\Psi(t,x,y)\omega(t,y)\omega(t,x)dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \mathbb{H}_\Psi(t,x,y)\omega(t,x)\omega(t,x)dxdt+\int_\Omega \Psi(0,x)\cdot\boldsymbol{\omega}^0(x)dx,$$

como, neste caso, $\mathcal{R}\Psi=0$ e $\mathbf{H}_\Psi=\mathcal{H}_\psi$, segue que

$$0=\int_0^T\int_\Omega \psi_t(t,x)\omega(t,x)dxdt+\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\omega(t,x)\omega(t,y)dxdydt+\int_\Omega \psi(0,x)\omega^0(x)dx.$$

Portanto, ω é solução fraca de (4.32). $\square$

4.7 Sequência de aproximações

Nesta seção vamos ver como construir uma sequência de soluções suaves para a equação de vorticidade e obter estimativas desta sequência com o intuito de obter convergência da sequência no espaço adequado. Com estas estimativas em mãos provaremos na próxima seção que o limite obtido será uma solução fraca do problema.

Considere ϱ o molificador usual em $\mathbb{R}^2$, i.e., $\varrho\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $\varrho\geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^2}\varrho(x)dx=1$, e defina $\varrho_n(x)=n^2\varrho(nx)$. Considere também $\varsigma\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tal que $\varsigma\geq 0$, $\int_{\mathbb{R}}\varsigma(t)dt=1$, com suporte compacto em $(-\kappa\pi,\kappa\pi)$ e defina

$$\varsigma_n(t)=n\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\varsigma(n(t-2\pi\kappa i)).$$

Logo, $\rho_n(x)=\varrho_n(\tilde{x})\varsigma_n(x_3)$ é um molificador em $\mathbb{R}^3$ periódico em x_3. Seja $\boldsymbol{\omega}\in L^q_{per}(\Omega)$, definimos sua molificação por $\boldsymbol{\omega}_n(x)=(\rho_n*\boldsymbol{\omega})(x)$. Temos que $\boldsymbol{\omega}_n$ satisfaz as seguintes propriedades

(i) $\boldsymbol{\omega}_n\in\mathcal{C}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$,

(ii) $\boldsymbol{\omega}_n(x)\to\boldsymbol{\omega}(x)$ em $L^q_{per}(\Omega)$.

Recordamos a notação introduzida no início do capítulo que será utilizada no teorema a seguir, $V^k_{per}(\mathbb{R}^3)=\{u\in H^k_{per}(\mathbb{R}^3): \text{div } u=0\}$.

Teorema 4.7.1. *Dada $u^0\in V^k_{per}(\Omega)$, com $k\geq 4$ existe $T^0=T^0(\|u^0\|_{H^k(\Omega)})>0$ tal que, para todo $T<T^0$ existe uma única solução $u\in\mathcal{C}^1([0,T];V^k_{per}(\Omega))$ das equações de Euler 3D. Além disso, se u^0 tiver simetria helicoidal e for ortogonal às hélices então a solução u também terá simetria helicoidal e será ortogonal às hélices.*

Demonstração. Fixe $\theta \in \mathbb{R}$ e defina $v(t,x) = R_{-\theta}u(t, S_\theta x)$ e $q(t,x) = p(t, S_\theta x)$. Observe que valem as seguintes relações

$$\partial_t v(t,x) = \partial_t(R_{-\theta}u(t,S_\theta x)) = R_{-\theta}\partial_t u(t,S_\theta x),$$

$$(v(t,x)\cdot\nabla)v(t,x) = ((R_{-\theta}u(t,S_\theta x))\cdot\nabla)(R_{-\theta}u(t,S_\theta x)) =$$

$$= R_{-\theta}((u\cdot\nabla)u)(t,S_\theta x)$$

$$\text{e } \nabla q(t,x) = \nabla(p(t,S_\theta x)) = R_{-\theta}\nabla p(t,S_\theta x).$$

Portanto,

$$\partial_t v(t,x) + (v(t,x)\cdot\nabla)v(t,x) + \nabla q(t,x) =$$

$$= R_{-\theta}[\partial_t u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p](t,S_\theta x) = 0.$$

Como u^0 tem simetria helicoidal então $u^0(x) = R_{-\theta}u^0(S_\theta x)$. Por outro lado, $v(0,x) = R_{-\theta}u^0(S_\theta x)$. Portanto, por unicidade de solução, temos que $u(t,x) = v(t,x) = R_{-\theta}u(t,S_\theta x)$ donde segue que u tem simetria helicoidal.

Agora, observe que $u\cdot\xi$ satisfaz a seguinte equação de transporte,

$$\partial_t(u\cdot\xi) + (u\cdot\nabla)(u\cdot\xi) = 0$$

com u suave e com dado inicial $(u\cdot\xi)(t=0) = u^0\cdot\xi = 0$. Então, $u\cdot\xi = 0$, ou seja, u é ortogonal às hélices. □

Teorema 4.7.2. *Seja $\{\omega_n^0\}_n$ uma sequência de campos escalares suaves em $L^p_{c,per}(\Omega,\mathbb{R}^3)$ para algum $p > \frac{4}{3}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma solução suave $\omega_n \in L^\infty([0,\infty); L^p_{c,per}(\Omega,\mathbb{R}))$ de (4.32) com dado inicial ω_n^0. Além disso, a sequência $\{\omega_n\}_n$ é uniformemente limitada em $L^\infty(\mathbb{R}_t, L^p_{per}(\Omega;\mathbb{R}))$.*

Demonstração. Par cada $n \in \mathbb{N}$ defina $u_n^0(x) = \displaystyle\int_\Omega \mathcal{K}(x-y)\times\left(\frac{1}{\kappa}\xi(y)\omega_n^0(y)\right)dy$. Então, pelo corolário 4.5.1, temos que $u_n^0 \in V^k_{per}(\Omega)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sendo assim, podemos aplicar o teorema 4.7.1 e obter que, para cada n, existe $T_n^0 > 0$ tal que, para todo $T < T_n^0$ existe uma única solução $u_n \in \mathcal{C}^1([0,T]; V^k_{per}(\Omega))$ das equações de Euler 3D. Além disso, para cada n, u_n

tem simetria helicoidal e é ortogonal às hélices. Portanto, para cada n, $\boldsymbol{\omega}_n = \text{rot } u_n$ é solução de (4.27) e portanto, pela proposição 4.6.1, ω_n é solução de (4.32). Logo, $\omega_n(t, X(\alpha, t)) = \omega_n^0(\alpha)$ onde $X(\alpha, t)$ é a trajetória de partículas definida por

$$\begin{cases} \dfrac{dX(\alpha,t)}{dt} = u(X(\alpha,t)) \\ X(\alpha,t)\,|_{t=0} = \alpha \end{cases}$$

Disso segue que

$$\int_{\Omega_t} |\omega_n(t,x)|^q dx = \int_{\Omega_0} |w_n^0(\alpha)|^q d\alpha, \quad \forall q \geq 1$$

e como Ω é um domínio material temos que

$$\|\omega_n(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} = \|\omega_n^0\|_{L^p(\Omega_0)} \leq C.$$

Além disso, temos que

$$\|\omega_n(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\omega_n^0\|_{L^\infty(\Omega_0)} \leq C(n)\|\omega^0\|_{L^p_{per}}.$$

De fato,

$$|\omega_n^0(x)| = \left|\int_\Omega \rho_n(x-y)\omega^0(y)dy\right| \leq \left(\int_\Omega |\rho_n(x-y)|^{p'}dy\right)^{1/p'} \left(\int_\Omega |\omega^0(y)|^p dy\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq n^3 \left(\int_\Omega |\varrho(n(\tilde{x}-\tilde{y}))\varsigma(n(x_3-y_3))|^{p'}dy\right)^{1/p'} \left(\int_\Omega |\omega^0(y)|^p dy\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq n^3 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\varrho(\tilde{z})\varsigma(z_3)|^{p'}\frac{1}{n^3}dz\right)^{1/p'} \left(\int_\Omega |\omega^0(y)|^p dy\right)^{1/p} \leq Cn^{3-3/p'}\|\omega^0\|_{L^p_{per}}.$$

Como Ω é um domínio material e $\|\omega^0\|_{L^p_{per}(\Omega)} \leq C$ temos que $\|\omega_n(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(n)$. Como $\boldsymbol{\omega}_n(t,x) = \dfrac{1}{\kappa}\omega_n(t,x)\xi(x)$ então,

$$\|\boldsymbol{\omega}_n(t,\cdot)\|_{L^\infty} = \frac{1}{\kappa}\|\omega_n(t,\cdot)\xi(\cdot)\|_{L^\infty} = \frac{1}{\kappa}\sup_{\alpha\in\Omega_0}|\omega_n^0(\alpha)\xi(X(t,\alpha))| =$$

$$= \frac{1}{\kappa}\sup_{\alpha\in\ supp\ w_n^0}|\omega_n^0(\alpha)\xi(X(t,\alpha))| \leq C\|\omega_n^0\|_{L^\infty}\sup_{\alpha\in\ supp\ \omega_n^0}|X(t,\alpha)|.$$

Defina $R_n(t) = \sup_{\alpha\in\ supp\ \omega_n^0}|X(t,\alpha)|$ e observe que para todo $\alpha' \in\ supp\ \omega_n^0$, temos que

$$\frac{d}{dt}|X(t,\alpha')| \leq \sup_{\alpha\in\ supp\ \omega_n^0}\frac{d}{dt}|X(t,\alpha)| \leq \sup_{\alpha\in\ supp\ \omega_n^0}\left|\frac{d}{dt}X(t,\alpha)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{\alpha \in \ supp\ w_n^0} \int_{|X(t,\alpha)-y|\leq 2R^n(t)} |\mathcal{K}(X(t,\alpha)-y)||\xi(y)||\omega_n(y)|dy \leq$$

$$\leq \sup_{\alpha \in \ supp\ w_n^0} \int_{|X(t,\alpha)-y|\leq 4\kappa\pi} |\mathcal{K}(X(t,\alpha)-y)||\xi(y)||\omega_n(y)|dy +$$

$$+ \sup_{\alpha \in \ supp\ w_n^0} \int_{4\kappa\pi \leq |X(t,\alpha)-y|\leq 2R^n(t)} |\mathcal{K}(X(t,\alpha)-y)||\xi(y)||\omega_n(y)|dy \leq$$

$$\leq \sup_{\alpha \in \ supp\ w_n^0} \int_{|X(t,\alpha)-y|\leq 4\kappa\pi} \frac{1}{|X(t,\alpha)-y)|^2} (|\tilde{y} - \tilde{X}(t,\alpha)| + |\xi(X(t,\alpha))|)|\omega_n(y)|dy +$$

$$+ \sup_{\alpha \in \ supp\ w_n^0} \int_{|X(t,\alpha)-y|\leq 4\kappa\pi} \frac{1}{|\tilde{X}(t,\alpha)-\tilde{y})|} (|\tilde{y} - \tilde{X}(t,\alpha)| + |\xi(X(t,\alpha))|)|\omega_n(y)|dy +$$

$$+C \sup_{\alpha \in \ supp\ w_n^0} \int_{4\kappa\pi \leq |X(t,\alpha)-y|\leq 2R^n(t)} |\xi(y)||\omega_n(y)|dy \leq$$

$$\leq \|\omega_n\|_{L^\infty} \sup_{\alpha \in \ supp\ w_n^0} \int_{|X(t,\alpha)-y|\leq 4\kappa\pi} \left(\frac{1}{|X(t,\alpha)-y)|} + 1 + \frac{\xi(X(t,\alpha))}{|X(t,\alpha)-y)|^2} + \frac{\xi(X(t,\alpha))}{|\tilde{X}(t,\alpha)-\tilde{y})|} \right) dy +$$

$$+CR_n(t)\|\omega_n\|_{L^1} \leq C(\|\omega_n\|_{L^\infty} + \|\omega_n\|_{L^1})R_n(t) \leq C(n)R_n(t).$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}|X(t,\alpha')| \leq C(n)R_n(t).$$

Portanto,

$$|X(t,\alpha')| \leq |X(0,\alpha')| + C(n)\int_0^t R_n(s)ds.$$

Tomando o supremo em $\alpha' \in \ supp\ w_n^0$ da identidade acima, obtemos que

$$R_n(t) \leq C + C(n)\int_0^t R_n(s)ds.$$

Assim, pelo lema de Gronwall (veja, por exemplo, [19]) temos que $R_n(t) \leq Ce^{C(n)t}$. Donde concluímos que $\|\boldsymbol{\omega}_n(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq A(n)e^{C(n)t}$.

Então,

$$\int_0^t \|\boldsymbol{\omega}_n(s,\cdot)\|_{L^\infty} ds \leq A(n)\int_0^t e^{C(n)s}ds \leq A(n)e^{C(n)t}.$$

Portanto, pelo teorema de Beale-Kato-Majda (teorema 1.4.3) concluímos que as soluções suaves $\boldsymbol{\omega}_n$ existem para todo $t \in [0, \infty)$. Disso segue que as soluções suaves ω_n de (4.32) existem globalmente no tempo para todo n. $\square$

Corolário 4.7.1. *A sequência $\{\omega_n\}_n$, obtida no último teorema, converge fraco-$*$ para ω em $L^\infty(\mathbb{R}; L^p_{per}(\Omega; \mathbb{R}^3))$. Além disso, $\|\omega(t,\cdot)\|_{L^1_{per}} \leq C$.*

Demonstração. Como temos que $\|\omega_n(t,\cdot)\|_{L^p_{per}} \leq C$ para todo t então existe um subsequência, que denotaremos por ω_n, que converge fraco-$*$ em $L^\infty(\mathbb{R}; L^p_{per}(\Omega; \mathbb{R}^3))$ para um limite ω.

Para provar que $\|\omega(t,\cdot)\|_1 \leq C$, defina $\mu_n(E) = \int_E \omega_n(x)dx$ para todo $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$,que é uma medida de Radon finitas quando $\omega_n \in L^1_{per}$. Lembre que a definição da variação total de uma medida ν é

$$|\nu|(E) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\nu(E_i)| : E_i \text{ dois a dois disjuntos }, E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i\right\}.$$

Se ν é uma medida de Radon finita a seguinte igualdade vale:

$$|\nu|(E) = \sup\left\{\int_\Omega u d\nu : u \in C_c(E), \|u\|_\infty \leq 1\right\}.$$

Primeiro provaremos que $|\mu_n|(\Omega) = \|\omega_n(t,\cdot)\|_1$. Tome $u \in C_c(\Omega)$, então

$$\int_\Omega u d\mu_n = \int_\Omega u(x)\omega_n(t,x)dx \leq \|u\|_\infty \|\omega_n(t,\cdot)\|_1 \leq \|\omega_n(t,\cdot)\|_1$$

portanto $|\mu_n|(\Omega) \leq \|\omega_n(t,\cdot)\|_1$.

Para a desigualdade oposta usaremos a definição de variação total. Considere $E_1 = \{x \in \Omega : \omega_n(x) \leq 0\}$ e $E_2 = \{x \in \Omega : \omega_n(x) > 0\}$. É claro que E_1 e E_2 são disjuntos, $E_1 \cup E_2 = \Omega$ e $|\mu_n(E_1)| + |\mu_n(E_2)| = \|\omega_n(t,\cdot)\|_1$, portanto $|\mu_n|(\Omega) \geq \|\omega_n(t,\cdot)\|_1$.

Lembre que $\mathcal{BM}$, o espaço de todas medidas de Radon finita, é fraco-$*$ compacto. Como $|\mu_n|(\Omega) = \|\omega_n(t,\cdot)\|_1 \leq C$ temos que existe uma subsequência, denotada por μ^n, que converge fraco-$*$ para μ, o que significa que para toda $u \in C_0(\Omega)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u d\mu_n = \int_\Omega u d\mu.$$

Observe que,

$$\int_\Omega u d\mu_n = \int_\Omega u(x)\omega_n(x)dx$$

e como $\omega_n(t,\cdot) \overset{*}{\rightharpoonup} \omega(t,\cdot)$ em L^p então $d\mu = \omega(x)dx$.

Como a variação total de uma medida é uma função semicontínua inferior com respeito a topologia fraca-$*$ e $\mu_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ segue que $|\mu|(\Omega) \leq \lim_{n\to} |\mu_n|(\Omega) \leq C$. Mas nós já sabemos que $\|\omega(t,\cdot)\|_1 = |\mu|(\Omega)$ portanto $\|\omega_n(t,\cdot)\|_1 \leq C$. □

4.8 Teorema de existência I: vorticidade balanceada

Nesta seção provaremos o teorema de existência de solução fraca para Euler 3D com simetria helicoidal sem rodopio como segue enunciado abaixo.

Teorema 4.8.1. *Seja $\omega^0 \in L^p_{c,per}(\Omega;\mathbb{R})$, para algum $p > \dfrac{4}{3}$, tal que $\int_\Omega \omega^0(y)dy = 0$. Então existe uma solução fraca $\omega = \omega(t,x)$ de (4.32) no sentido da definição 4.6.2.*

A condição de vorticidade balanceada é uma hipótese necessária pois apenas neste caso podemos escrever a velocidade em termos da vorticidade usando a lei de Biot-Savart introduzida na seção 4.5.

A demonstração do teorema se resume aos seguinte passos:

(i) construir uma sequência de aproximações do dado inicial;

(ii) construir uma sequência de soluções para a sequência de dados iniciais obtida no primeiro passo;

(iii) provar que a sequência de soluções converge;

(iv) provar que o limite é solução fraca do problema em questão;

Os três primeiros passos já foram feitos na seção anterior. A proposição a seguir fornecerá o último passo da demonstração.

Proposição 4.8.1. *Seja $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência suave de soluções de (4.32) satisfazendo as seguintes propriedades*

(i) $\omega_n \in L^p_{c,per}(\Omega;\mathbb{R})$, para todo n, e $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uniformemente limitada $L^\infty([0,\infty), L^p_{per}(\Omega;\mathbb{R}))$ para $p > \frac{4}{3}$;

(ii) o campo de velocidades $u_n(t,x) = \int_\Omega \mathcal{K}(x-y) \times \xi(y) \dfrac{\omega_n(t,y)}{\kappa} dy \in L^\infty([0,\infty), L^2_{per}(\Omega;\mathbb{R}^3))$, *tem simetria helicoidal (no sentido da definição 4.2.1) e é ortogonal às hélices.*

Então, $\omega_n \overset{*}{\rightharpoonup} \omega$ *em* $L^\infty([0,\infty), L^p_{per}(\Omega;\mathbb{R}))$ *e o limite* ω *é uma solução de (4.32) no sentido da definição 4.6.1. Além disso,* $u_n \to u$ *em* $L^\infty([0,\infty), L^2_{loc,per}(\Omega;\mathbb{R}^3))$ *e* $u(t,x) = \int_\Omega \mathcal{K}(x-y) \times \xi(y) \dfrac{\omega(t,y)}{\kappa} dy$.

Demonstração. Como por hipótese temos que $\|\omega^n\|_p \leq C$ uniformemente em n, então $\omega_n \overset{*}{\rightharpoonup} \omega$ em $L^\infty([0,\infty), L^p_{per}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3))$. Para ver que o limite ω é solução fraca de (4.32) observe que, como ω_n é solução de (4.32), vale a seguinte expressão

$$\int_0^\infty \int_\Omega \psi_t(t,x)\omega_n(t,x)dxdt + \int_0^\infty \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\omega_n(t,y)\omega_n(t,x)dydxdt+$$
$$+\int_\Omega \psi(0,x)\omega_n(0,x)dx = 0,$$

para toda função teste $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,\infty)\times\Omega;\mathbb{R})$. Se provarmos que podemos passar ao limite a última expressão para $n\to\infty$ e que vale a seguinte identidade

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^\infty \int_\Omega \psi_t(t,x)\omega_n(t,x)dxdt + \int_0^\infty \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\omega_n(t,y)\omega_n(t,x)dydxdt+ \right. \tag{4.29}$$
$$\left. +\int_\Omega \psi(0,x)\omega_n(0,x)dx\right\} = \int_0^\infty \int_\Omega \psi_t(t,x)\omega(t,x)dxdt+$$
$$+\int_0^\infty \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\omega(t,y)\omega(t,x)dydxdt + \int_\Omega \psi(0,x)\omega(0,x)dx.$$

então obteremos que ω é solução de (4.32) no sentido da definição 4.6.1.

Como $\omega_n \overset{*}{\rightharpoonup} \omega$ em $L^p_{per}(\Omega)$, é claro que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \int_\Omega \psi_t(t,x)\omega_n(t,x)dxdt = \int_0^\infty \int_\Omega \psi_t(t,x)\omega(t,x)dxdt$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \psi(0,x)\omega_n(0,x)dx = \int_\Omega \psi(0,x)\omega(0,x)dx$$

para toda função teste $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}\times\Omega;\mathbb{R})$.

Agora só falta passar ao limite o termo $\displaystyle\int_0^\infty \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\omega(t,y)\omega(t,x)dydxdt$.

Tome $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \Omega; \mathbb{R})$. Fixe $\rho > 0$ tal que supp $\psi \subset C(\rho)$, onde $C(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon |\tilde{x}| \leq \rho \text{ e} |x_3| \leq \pi\kappa\}$. Defina

$$\alpha_n := \frac{1}{16\pi^3\kappa^3} \int_{C(\rho)} \omega_n(x)\partial_3\psi(x)dx,$$

$$\alpha := \frac{1}{16\pi^3\kappa^3} \int_{C(\rho)} \omega(x)\partial_3\psi(x)dx,$$

É claro que $\alpha_n \to \alpha$ e do corolário 4.7.1 temos que $|\alpha| \leq C$.

Dado $0 < \delta \ll 1$ e $R \gg 2\max\{\rho, 2\pi\kappa\}$ defina as funções $\varphi_\delta : [0, \infty) \to [0, 1]$ e $\zeta_R : \Omega \to [0, 1]$ como

$$\varphi_\delta(r) = \begin{cases} 1, & r \leq \delta \\ \text{suave e } \leq 1, & \delta < r \leq 2\delta \\ 0, & r > 2\delta. \end{cases} \tag{4.30}$$

$$\zeta_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq R \\ \text{suave e } \leq 1, & R < |x| \leq 2R \\ 0, & |x| > 2R. \end{cases} \tag{4.31}$$

Agora, considere a seguinte decomposição

$$\int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t, x, y)\omega_n(t, y)\omega_n(t, x)dydx = \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t, x, y)\varphi_\delta(|x - y|)\omega_n(t, y)\omega_n(t, x)dydx +$$

$$+ \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t, x, y)(1 - \varphi_\delta(|x - y|))\omega_n(t, y)\omega_n(t, x)dydx = I_1^n + I_2^n$$

Lembre da definição de $\mathcal{H}_\psi$:

$$\mathcal{H}_\psi(t, x, y) = \frac{1}{2\kappa}\mathcal{K}(x - y) \cdot (\xi(y) \times (\nabla\psi(t, x) - \nabla\psi(t, y)) - (\xi(x) - \xi(y)) \times \nabla\psi(t, y)).$$

Observe que

$$|I_1^n| \leq \int_\Omega \int_\Omega |\mathcal{H}_\psi(t, x, y)|\varphi_\delta(|x - y|)|\omega_n(t, y)||\omega_n(t, x)|dydx \leq$$

$$\leq C \int_\Omega \int_\Omega \left(\frac{1}{|x - y|} + \frac{1}{|\tilde{x} - \tilde{y}|} + 1\right) \varphi_\delta(|x - y|)|\omega_n(t, y)||\omega_n(t, x)|dydx \leq$$

$$C \left\| \left[\left(\frac{1}{|\cdot|} + \frac{1}{|\tilde{\cdot}|} + 1 \right) \varphi_\delta(|\cdot|) * \omega_n \right] (t,\cdot) \right\|_{p'} \|\omega_n(t,\cdot)\|_p \leq$$

usando a desigualdade de Young generalizada para $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{p} = 1 + \dfrac{1}{p'}$

$$\leq C \left\| \left(\frac{1}{|\cdot|} + \frac{1}{|\tilde{\cdot}|} + 1 \right) \varphi_\delta(|\cdot|) \right\|_s \|\omega_n(t,\cdot)\|_p \|\omega_n(t,.)\|_p$$

Para $s < 2$ temos que

$$\left\| \left(\frac{1}{|\cdot|} + \frac{1}{|\tilde{\cdot}|} + 1 \right) \varphi_\delta(|\cdot|) \right\|_s \leq \int_\Omega \left(\frac{1}{|x|^s} + \frac{1}{|\tilde{x}|^s} + 1 \right) |\varphi_\delta(|x|)|^s dx =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\delta} \frac{1}{r^s} |\varphi_\delta(r)|^s r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi + \int_{-\pi\kappa}^{\pi\kappa} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\delta} \left(\frac{1}{r^s} + 1 \right) |\varphi(r + |z|)|^s r dr d\theta dz =$$

$$= 4\pi \int_0^{2\delta} |\varphi_\delta(r)|^s r^{2-s} dr + 2\pi \int_{-\pi\kappa}^{\pi\kappa} \int_0^{2\delta} \left(\frac{1}{r^s} + 1 \right) |\varphi(r + |z|)|^s r dr dz \leq$$

$$\leq 4\pi \int_0^{2\delta} r^{2-s} dr + 2\pi \int_{-\pi\kappa}^{\pi\kappa} \int_0^{2\delta} \left(\frac{1}{r^s} + 1 \right) r dr dz \leq$$

$$\leq 4\pi \left. \frac{r^{3-s}}{3-s} \right|_0^{2\delta} + 4\pi^2 \kappa \left. \left(\frac{r^{2-s}}{2-s} + \frac{r^2}{2} \right) \right|_0^{2\delta} \leq C(\delta^{2-s} + \delta^{3-s} + \delta^2).$$

Portanto, $|I_1^n| \leq C(\delta^{2-s} + \delta^{3-s} + \delta^2) \|\omega_n(t,\cdot)\|_p^2$. Lembre que para $p > \dfrac{4}{3}$ temos que $\|\omega_n(t,\cdot)\|_p \leq C$. Além disso, como $p = \dfrac{2s}{2s-1}$ (isto segue da desigualdade de Young generalizada) e $p > \dfrac{4}{3}$ temos que $s < \dfrac{3}{2}$. Portanto, $I_1 = \mathcal{O}(\delta)$.

Agora vamos estimar I_2^n. Como $\int_\Omega \omega_n(t,x)dx = 0$, podemos escrever I_2^n como

$$I_2^n = \int_\Omega \left(\int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1 - \varphi_\delta(|x-y|))\omega_n(t,y)dy - \alpha_n \right) \omega_n(t,x)dx.$$

Decompomos I_2^n como

$$I_2^n = \int_\Omega \left(\int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1 - \varphi_\delta(|x-y|))\omega_n(t,y)dy - \alpha_n \right) \zeta_R(x)\omega_n(t,x)dx +$$

$$+ \int_\Omega \left(\int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1 - \varphi_\delta(|x-y|))\omega_n(t,y)dy - \alpha_n \right) (1 - \zeta_R(x))\omega_n(t,x)dx = I_{21}^n + I_{22}^n.$$

Começaremos estimando I_{21}^n. Decompomos a integral como

$$I_{21}^n = \int_\Omega \left(\int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1 - \varphi_\delta(|x-y|))\zeta_R(y)\omega_n(t,y)dy \right) \zeta_R(x)\omega_n(t,x)dx +$$

$$+\int_\Omega \left(\int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1-\varphi_\delta(|x-y|))(1-\zeta_R(y))\omega_n(t,y)dy - \alpha_n \right) \zeta_R(x)\omega_n(t,x)dx = I^n + J^n$$

Podemos reescrever I^n como

$$I^n = \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1-\varphi_\delta(|x-y|))\zeta_R(y)\zeta_R(x)\omega_n(t,y)\omega_n(t,x)dydx.$$

Observe que a função $f(t,x,y) = \mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1-\varphi_\delta(|x-y|))\zeta_R(y)\zeta_R(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\Omega\times\Omega)$. Portanto podemos passar o limite quando $n \to \infty$ e obter que

$$\lim_{n\to\infty} I^n = \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1-\varphi_\delta(|x-y|))\zeta_R(y)\zeta_R(x)\omega(t,y)\omega(t,x)dydx$$

Vamos estimar $\mathcal{H}_\psi$ em J^n. O integrando de J^n se anula para todo $|y| \le R$. Portanto, $y \in C(\rho)^c$ e então $\mathcal{H}_\psi(t,x,y) = \dfrac{1}{2\kappa}\mathcal{K}(x-y)\cdot(\xi(y)\times\nabla\psi(t,x))$. Agora, observe que $\nabla\psi$ se anula para todo $x \in C(\rho)^c$. Portanto, é suficiente estimar $\mathcal{H}_\psi$ para $|y| > R$ e $x \in C(\rho)$. Neste caso, $|x-y| \ge |y| - |x| \ge \dfrac{|y|}{2}$ e $|\tilde{x}-\tilde{y}| \ge |x-y| - 2\pi\kappa \ge \dfrac{|y|}{4}$. Logo,

$$\mathcal{H}_\psi(t,x,y) = \frac{1}{2\kappa}\mathcal{K}(x-y)\cdot(\xi(y)\times\nabla\psi(t,x)) = \frac{1}{2\kappa}\mathcal{K}_1(x-y)\cdot(\xi(y)\times\nabla\psi(t,x)) -$$

$$-\frac{1}{2\kappa}\mathcal{K}_2(x-y)\cdot(\xi(y)\times\nabla\psi(t,x)) = G_1 - \frac{1}{16\pi^3\kappa^3}\frac{(\tilde{x}-\tilde{y},0)}{|\tilde{x}-\tilde{y}|^2}\cdot(\xi(y)\times\nabla\psi(t,x)) =$$

$$= G_1 - \frac{1}{16\pi^3\kappa^3}\frac{1}{|\tilde{x}-\tilde{y}|^2}\left((\tilde{x}-\tilde{y},0)\cdot(\tilde{y},0)\partial_3\psi(t,x) + \kappa(\tilde{x}-\tilde{y},0)\cdot(-\partial_2\psi(t,x),\partial_1\psi(t,x),0)\right) =$$

$$= G_1 - \frac{1}{16\pi^3\kappa^3}\frac{1}{|\tilde{x}-\tilde{y}|^2}\big(-|\tilde{x}-\tilde{y}|^2\partial_3\psi(t,x) + (\tilde{x}-\tilde{y},0)\cdot(\tilde{x},0)\partial_3\psi(t,x) +$$

$$+\kappa(\tilde{x}-\tilde{y},0)\cdot(-\partial_2\psi(t,x),\partial_1\psi(t,x),0)\big) = G_1 + \frac{1}{16\pi^3\kappa^3}\partial_3\psi(t,x) + G_2$$

onde

$$|G_1| = \left|\frac{1}{2\kappa}\mathcal{K}_1(x-y)\cdot(\xi(y)\times\nabla\psi(t,x))\right| \le C\frac{1}{|\tilde{x}-\tilde{y}|^2}|y| \le C\frac{1}{|y|}$$

e

$$|G_2| = \Big|\frac{1}{16\pi^3\kappa^3|\tilde{x}-\tilde{y}|^2}\left((\tilde{x}-\tilde{y},0)\cdot(\tilde{x},0)\partial_3\psi(t,x) + \right.$$

$$\left. + \kappa(\tilde{x}-\tilde{y},0)\cdot(-\partial_2\psi(t,x),\partial_1\psi(t,x),0)\right)\Big| \le C\frac{1}{|y|}.$$

Então podemos reescrever J^n como

$$J^n = \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1-\zeta_{2R}(y))\omega_n(t,y)\zeta_R(x)\omega_n(t,x)dydx - \alpha_n \int_\Omega \zeta_R(x)\omega_n(t,x)dx =$$

$$= \int_\Omega \left(\int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\zeta_R(x)\omega_n(t,x)dx \right)(1-\zeta_{2R}(y))\omega_n(t,y)dy - \alpha_n \int_\Omega \zeta_R(x)\omega_n(t,x)dx =$$

$$= \int_\Omega \left(\int_\Omega (G_1+G_2)\zeta_R(x)\omega_n(t,x)dx \right)(1-\zeta_{2R}(y))\omega_n(t,y)dy +$$

$$+ \int_\Omega \left(\int_\Omega \frac{1}{16\pi^3\kappa^3}\partial_3\psi(t,x)\zeta_R(x)\omega_n(t,x)dx \right)(1-\zeta_{2R}(y))\omega_n(t,y)dy - \alpha_n \int_\Omega \zeta_R(x)\omega_n(t,x)dx =$$

$$= \int_\Omega \left(\int_\Omega (G_1+G_2)\zeta_R(x)\omega_n(t,x)dx \right)(1-\zeta_{2R}(y))\omega_n(t,y)dy +$$

$$+ \int_\Omega \alpha_n(1-\zeta_R(y))\omega_n(t,y)dy - \alpha_n \int_\Omega \zeta_R(x)\omega_n(t,x)dx$$

e obtemos a seguinte estimativa

$$|J^n| \le \int_\Omega \int_\Omega (|G_1|+|G_2|)\zeta_R(x)|\omega_n(t,x)|(1-\zeta_{2R}(y))|\omega_n(t,y)|dxdy + \left|\alpha_n \int_\Omega \zeta_R(x)\omega_n(t,x)dx\right| \le$$

$$\le \frac{C}{R}\|\omega_n(t,.)\|_1^2 + \left|\alpha_n \int_\Omega \zeta_R(x)\omega_n(t,x)dx\right| \le \frac{C}{R} + C\left|\int_\Omega \zeta_R(x)\omega_n(t,x)dx\right|.$$

É claro que

$$\lim_n \int_\Omega \zeta_R(x)\omega_n(t,x)dx = \int_\Omega \zeta_R(x)\omega(t,x)dx.$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada e o corolário 4.7.1 obtemos que

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Omega \zeta_R(x)\omega(t,x)dx = \int_\Omega \omega(t,x)dx = 0.$$

Para estimar I_{22}^n observe que $1-\zeta_R(x)=0$ para todo $x\in\Omega$ tal que $|x|\le R$. Portanto é suficiente estimar $\mathcal{H}_\psi$ for $|x|>R$. Como $R \gg 2\rho$ temos que

$$\mathcal{H}_\psi(t,x,y) = \frac{1}{2\kappa}\mathcal{K}(x-y)\cdot(\xi(y)\times(-\nabla\psi(t,y)) - (\xi(x)-\xi(y))\times\nabla\psi(t,y)).$$

Então $\mathcal{H}_\psi(t,x,y)=0$ para todo $y\in\Omega$ tal que $y\in C(\rho)^c$.

Para $|x|>R$ e $y\in C(\rho)$ temos que $|x-y|\ge \dfrac{|x|}{2}$ e $|\tilde{x}-\tilde{y}| = |x-y|-2\pi\kappa \ge \dfrac{|x|}{4}$. Então, $1-\varphi_\delta(|x-y|)=1$.

Podemos reescrever $\mathcal{H}_\psi$ como

$$\mathcal{H}_\psi(t,x,y) = \frac{1}{2\kappa}(\mathcal{K}_1(x-y)-\mathcal{K}_2(x-y))\cdot(\xi(y)\times(-\nabla\psi(t,y)) - (\xi(x)-\xi(y))\times\nabla\psi(t,y)) =$$

$$= \frac{1}{2\kappa}(\mathcal{K}_1(x-y)\cdot(-\xi(y)\times\nabla\psi(t,y) - (\xi(x)-\xi(y))\times\nabla\psi(t,y)) + \mathcal{K}_2(x-y)\cdot\xi(y)\times\nabla\psi(t,y)) +$$

$$+\frac{1}{2\kappa}\mathcal{K}_2(x-y)\cdot((\xi(x)-\xi(y))\times\nabla\psi(t,y))=F_1+F_2.$$

Observe que para $|x|>R$ e $y\in C(\rho)$,

$$|F_1|\leq C\frac{1}{|\tilde{x}-\tilde{y}|^2}(|y|+|\tilde{x}-\tilde{y}|)+\frac{1}{|\tilde{x}-\tilde{y}|}|y|\leq C\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R}\right)$$

e $F_2=\dfrac{1}{16\pi^3\kappa^3}\dfrac{(\tilde{x}-\tilde{y},0)}{|\tilde{x}-\tilde{y}|^2}\cdot((\xi(x)-\xi(y))\times\nabla\psi(t,y)=\dfrac{1}{16\pi^3\kappa^3}\partial_3\psi(t,y).$

Logo,

$$|I_{22}^n|\leq\int_\Omega\int_{C(\rho)}|F_1||\omega_n(t,y)||(1-\zeta_R(x))||\omega_n(t,x)|dydx+$$

$$+\left|\int_\Omega\left(\int_{C(\rho)}F_2\omega_n(t,y)dy-\alpha_n\right)(1-\zeta_R(x))\omega_n(t,x)dx\right|\leq$$

$$\leq\int_\Omega\int_{C(\rho)}C\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R}\right)|\omega_n(t,y)||(1-\zeta_R(x))||\omega_n(t,x)|dydx\leq$$

$$\leq C\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R}\right)\|\omega_n(t,\cdot)\|_1^2\leq C\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R}\right)=\mathcal{O}(R^{-1}).$$

Até agora obtivemos as seguintes estimativas:

$$\int_\Omega\int_\Omega\mathcal{H}_\psi(t,x,y)\omega_n(t,y)\omega_n(t,x)dydx=I_1^n+I_2^n,$$

$$I_1^n=\mathcal{O}(\delta),$$

$$I_2^n=I_{21}^n+I_{22}^n,$$

$$I_{21}^n=I^n+J^n,$$

$$I^n=\int_\Omega\int_\Omega\mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1-\varphi_\delta(|x-y|))\zeta_R(y)\zeta_R(x)\omega_n(t,y)\omega_n(t,x)dydx,$$

$$J^n=\mathcal{O}(R^{-1})+C\left|\int_\Omega\omega_n(t,x)\zeta_R(x)dx\right|,$$

$$I_{22}^n=\mathcal{O}(R^{-1}).$$

Agora, podemos passar ao limite quando $n\to\infty$ e obter que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\int_\Omega\mathcal{H}_\psi(t,x,y)\omega_n(t,y)\omega_n(t,x)dydx=\lim_{n\to\infty}(I_1^n+I^n+J^n+I_{22}^n)=$$

$$=\mathcal{O}(\delta)+\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\int_\Omega\mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1-\varphi_\delta(|x-y|))\zeta_R(y)\zeta_R(x)\omega_n(t,y)\omega_n(t,x)dydx+$$

$$+\mathcal{O}(R^{-1}) + C \lim_{n\to\infty} \left| \int_\Omega \omega_n(t,x)\zeta_R(x)dx \right| + \mathcal{O}(R^{-1}) =$$

$$= \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1-\varphi_\delta(|x-y|))\zeta_R(y)\zeta_R(x)\omega(t,y)\omega(t,x)dydx +$$

$$+\mathcal{O}(\delta) + \mathcal{O}(R^{-1}) + C \left| \int_\Omega \omega(t,x)\zeta_R(x)dx \right|.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\omega_n(t,y)\omega_n(t,x)dydx =$$

$$= \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1-\varphi_\delta(|x-y|))\zeta_R(y)\zeta_R(x)\omega(t,y)\omega(t,x)dydx +$$

$$+\mathcal{O}(\delta) + \mathcal{O}(R^{-1}) + C \left| \int_\Omega \omega(t,x)\zeta_R(x)dx \right|.$$

Como o lado direito da última igualdade não depende de R e δ podemos passar ao limite quando $R \to \infty$ e $\delta \to 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\omega_n(t,y)\omega_n(t,x)dydx =$$

$$= \lim_{R\to\infty,\delta\to 0} \left(\int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1-\varphi_\delta(|x-y|))\zeta_R(y)\zeta_R(x)\omega(t,y)\omega(t,x)dydx \right) +$$

$$+ \lim_{R\to\infty,\delta\to 0} \left(\mathcal{O}(\delta) + \mathcal{O}(R^{-1}) + C \left| \int_\Omega \omega(t,x)\zeta_R(x)dx \right| \right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty,\delta\to 0} \left(\int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1-\varphi_\delta(|x-y|))\zeta_R(y)\zeta_R(x)\omega(t,y)\omega(t,x)dydx \right).$$

Temos que

$$\int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\omega(t,y)\omega(t,x)dydx = \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\varphi_\delta(|x-y|)\omega(t,y)\omega(t,x)dydx +$$

$$+ \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1-\varphi_\delta(|x-y|))\zeta_R(y)\zeta_R(x)\omega(t,y)\omega(t,x)dydx +$$

$$+ \int_\Omega \left(\int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1-\varphi_\delta(|x-y|))(1-\zeta_R(y))\omega(t,y)dy - \alpha \right) \zeta_R(x)\omega(t,x)dx +$$

$$+ \int_\Omega \left(\int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1-\varphi_\delta(|x-y|))\omega(t,y)dy - \alpha \right) (1-\zeta_R(x))\omega(t,x)dx =$$

usando o mesmo raciocínio usado para provar as estimativas envolvendo a sequência ω_n,

$$= \mathcal{O}(\delta) + \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1-\varphi_\delta(|x-y|))\zeta_R(y)\zeta_R(x)\omega(t,y)\omega(t,x)dydx +$$

$$+\left(\mathcal{O}(R^{-1})+C\left|\int_\Omega \omega(t,x)\zeta_R(x)dx\right|\right)+\mathcal{O}(R^{-1}).$$

Portanto,

$$\int_\Omega\int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\omega(t,y)\omega(t,x)dydx =$$

$$=\lim_{R\to\infty,\delta\to 0}\int_\Omega\int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)(1-\varphi_\delta(|x-y|))\zeta_R(y)\zeta_R(x)\omega(t,y)\omega(t,x)dydx.$$

Finalmente, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\omega_n(t,y)\omega_n(t,x)dydx = \int_\Omega\int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\omega(t,y)\omega(t,x)dydx.$$

Agora, vamos mostrar que $u_n\to u$ em $L^\infty([0,\infty),L^2_{loc,per}(\Omega;\mathbb{R}^3))$ e $u(t,x)=\int_\Omega \mathcal{K}(x-y)\times \xi(y)\dfrac{\omega(t,y)}{\kappa}dy$. Fixe $R>0$ e defina $U_R=\{x\in\Omega : |\tilde{x}|\le R\}$. Sejam $0<\delta\ll R$ e φ_δ, definida em (4.30), logo

$$\|u_n(t,\cdot)-u(t,\cdot)\|_{L^2(U_R)}=\int_{U_R}\left|\int_\Omega \mathcal{K}(x-y)\times\frac{\xi(y)}{\kappa}(\omega_n(t,y)-\omega(t,y))dy\right|^2dx\le$$

$$\le 2\int_{U_R}\left|\int_\Omega \varphi_\delta(x-y)\mathcal{K}(x-y)\times\frac{\xi(y)}{\kappa}(\omega_n(t,y)-\omega(t,y))dy\right|^2dx+$$

$$+2\int_{U_R}\left|\int_\Omega (1-\varphi_\delta(x-y))\mathcal{K}(x-y)\times\frac{\xi(y)}{\kappa}(\omega_n(t,y)-\omega(t,y))dy\right|^2dx=\mathcal{I}_1^n+\mathcal{I}_2^n.$$

Começaremos estimando $\mathcal{I}_1^n$. Observe que como o integrando em $\mathcal{I}_1^n$ é diferente de zero apenas quando $|x-y|<2\delta$ então $|\xi(y)|\le|x-y|+|x|\le 2\delta+R\le 2R$, logo

$$\mathcal{I}_1^n\le C(R)\int_{U_R}\left(\int_\Omega |\varphi_\delta(x-y)||\mathcal{K}(x-y)||\omega_n(t,y)-\omega(t,y)|dy\right)^2dx\le C(R)\|\varphi_\delta\mathcal{K}\|_{L^q}\|\omega_n-\omega\|_{L^p}$$

na última desigualdade utilizamos a desigualdade de Young generalizada, onde $1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{p}$. Como $p>\dfrac{4}{3}$ então $q<\dfrac{4}{3}<\dfrac{3}{2}$, logo $\|\varphi_\delta\mathcal{K}\|_{L^q}=\mathcal{O}(\delta^s)$, com $s>0$. Além disso, $\|\omega_n-\omega\|_{L^p}\le \|\omega_n\|_{L^p}+\|\omega\|_{L^p}\le C$. Portanto,

$$\mathcal{I}_1^n=\mathcal{O}(\delta^s)\to 0,\ \text{quando } \delta\to 0.$$

Agora vamos estimar $\mathcal{I}_2^n$. Lembre que $\mathcal{K}=\mathcal{K}_1+\mathcal{K}_2$, logo

$$\mathcal{I}_2^n\le 4\int_{U_R}\left|\int_\Omega (1-\varphi_\delta(x-y))\mathcal{K}_1(x-y)\times\frac{\xi(y)}{\kappa}(\omega_n(t,y)-\omega(t,y))dy\right|^2dx+$$

$$+4\int_{U_R}\left|\int_\Omega(1-\varphi_\delta(x-y))\mathcal{K}_2(x-y)\times\frac{\xi(y)}{\kappa}(\omega_n(t,y)-\omega(t,y))dy\right|^2dx=$$

$$=4\int_{U_R}|\mathcal{F}_n^1(t,x)|^2dx+4\int_{U_R}|\mathcal{F}_n^2(t,x)|^2dx.$$

Vejamos que $\mathcal{F}_n^1(t,x)$ e $\mathcal{F}_n^2(t,x)$ convergem a zero quando $n\to\infty$. De fato, observe que como $1-\varphi_\delta(x-y)$ é diferente de zero apenas para $|x-y|>\delta$ então

$$|(1-\varphi_\delta(x-y))\mathcal{K}_1(x-y)\times\xi(y)|=|(1-\varphi_\delta(x-y))\mathcal{K}_1(x-y)\times(\xi(y)-\xi(x)+\xi(x))\leq$$

$$\leq C\frac{1}{|\tilde{x}-\tilde{y}|^2}(|\tilde{y}-\tilde{x}|+|\xi(x)|)\leq C(R)\left(\frac{1}{|\tilde{x}-\tilde{y}|}+\frac{1}{|\tilde{x}-\tilde{y}|^2}\right).$$

Logo, $(1-\varphi_\delta(x-y))\mathcal{K}_1(x-y)\times\xi(y)\in L^r$, para todo $r>2$. Além disso, $\omega_n\stackrel{*}{\rightharpoonup}\omega$ em L^q, para todo $1<q\leq p$, logo, podemos escolher q de tal forma que $1<q\leq p$ e $q'>2$ e portanto temos que $\mathcal{F}_n^1(t,x)\to 0$ quando $n\to\infty$.

Agora vamos provar a convergência de $\mathcal{F}_n^2$. Fixe $M>0$, $M\gg R$ e considere ζ_M, definida em 4.31. Vamos dividir a integral da seguinte maneira

$$\mathcal{F}_n^2(t,x)=\int_\Omega(1-\varphi_\delta(x-y))\zeta_M(y)\mathcal{K}_2(x-y)\times\frac{\xi(y)}{\kappa}(\omega_n(t,y)-\omega(t,y))dy+$$

$$+\int_\Omega(1-\varphi_\delta(x-y))(1-\zeta_M(y))\mathcal{K}_2(x-y)\times\frac{\xi(y)}{\kappa}(\omega_n(t,y)-\omega(t,y))dy=\mathcal{J}_1^n(t,x)+\mathcal{J}_2^n(t,x)$$

Para mostrar a convergência de $\mathcal{J}_n^1$ lembre que $\omega_n\stackrel{*}{\rightharpoonup}\omega$ em L^1 e observe que $f_x(y):=(1-\varphi_\delta(x-y))\zeta_M(y)\mathcal{K}_2(x-y)\times\dfrac{\xi(y)}{\kappa}\in\mathcal{C}_0(\Omega)$ para todo $x\in U_R$, logo

$$\mathcal{J}_n^1(t,x)=\int_\Omega f_x(y)(\omega_n(t,y)-\omega(t,y))dy\to 0 \text{ quando } n\to\infty.$$

Finalmente, observe que

$$\mathcal{K}_2(x-y)\times\frac{\xi(y)}{\kappa}=\frac{1}{16\pi^3\kappa^3}\frac{1}{|\tilde{x}-\tilde{y}|^2}(\tilde{x}-\tilde{y},0)\times(\xi(y)-\xi(x)+\xi(x))=$$

$$=-\frac{1}{16\pi^3\kappa^3}+\frac{1}{16\pi^3\kappa^3}\frac{1}{|\tilde{x}-\tilde{y}|^2}(\tilde{x}-\tilde{y},0)\times\xi(x)$$

Além disso, como $x\in U_R$ então $(1-\varphi_\delta(x-y))(1-\zeta_M(y))=(1-\zeta_M(y))$. Logo,

$$|\mathcal{J}_n^2(t,x)|\leq\left|-\frac{1}{16\pi^3\kappa^3}\int_\Omega(1-\zeta_M(y))(\omega_n(t,y)-\omega(t,y))dy\right|+$$

$$+\int_{\Omega}(1-\zeta_M(y))\frac{1}{|\tilde{x}-\tilde{y}|}(|\omega_n(t,y)|+|\omega(t,y)|)dy \leq$$

$$\leq \left|-\frac{1}{16\pi^3\kappa^3}\int_{\Omega}(1-\zeta_M(y))(\omega_n(t,y)-\omega(t,y))dy\right| + \frac{C}{M}$$

Observe que, como $\int_\Omega \omega_n(t,y)dy = 0 = \int_\Omega \omega(t,y)dy$ e $\zeta_M \in L^{p'}$ então

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}(1-\zeta_M(y))(\omega_n(t,y)-\omega(t,y))dy = -\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\zeta_M(y)(\omega_n(t,y)-\omega(t,y))dy = 0.$$

Logo, $\lim_{n\to\infty}\mathcal{J}_n^2(t,x) = \mathcal{O}(M^{-1})$.

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{F}_n^2(t,x) = \lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\mathcal{J}_n^1(t,x)+\mathcal{J}_n^2(t,x)) = 0.$$

Dessa forma, mostramos que $\mathcal{F}_n^1(t,x)$ e $\mathcal{F}_n^2(t,x)$ convergem a zero quando $n\to\infty$. Além disso, segue dos cálculos anteriores que

$$|\mathcal{F}_n^1(t,x)| \leq C\|(1-\varphi_\delta)\mathcal{K}_1(x-\cdot)\times\xi\|_{L^{q'}}\|\omega_n-\omega\|_{L^q} \leq C(\delta),\ \text{onde}\ \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1,\ q\leq p \text{ e } q'>2$$

$$|\mathcal{F}_n^2(t,x)| \leq |\mathcal{J}_n^1(t,x)| + |\mathcal{J}_n^2(t,x)| \leq \left(\|f_x\|_{L^\infty}+\frac{1}{M}\right)\|\omega_n-\omega\|_{L^1} \leq C(M).$$

Portanto, pelo teorema da Convergência Dominada, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{U_R}|\mathcal{F}_n^1(t,x)|^2dx + \int_{U_R}|\mathcal{F}_n^2(t,x)|^2dx\right) = 0.$$

Finalmente, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n(t,\cdot)-u(t,\cdot)\|_{L^2(U_R)} = \lim_{n\to\infty}(\mathcal{I}_1^n+\mathcal{I}_2^n) = 0.$$

Não é difícil ver que todas estimativas utilizadas eram uniformes em t e portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\|\|u_n(t,\cdot)-u(t,\cdot)\|_{L^2(U_R)}\|_{L^\infty([0,\infty))} = 0.$$

Logo, $u_n \to u$ em $L^\infty([0,\infty);L^2_{loc,per}(\Omega,\mathbb{R}^3))$. □

4.9 Teorema de existência II: caso geral

Nesta seção, provaremos o teorema de existência de soluções fracas das equações de Euler 3D com simetria helicoidal sem rodopio no caso em que a integral da vorticidade inicial não é nula. Na seção anterior provamos o teorema de existência de solução no caso de vorticidade balanceada pois apenas neste caso podemos escrever a velocidade em termos da vorticidade usando a Lei de Biot-Savart introduzida na seção 4.5. Para lidar com este problema precisamos de uma nova definição de solução fraca no caso em que a vorticidade não é balanceada. Para isso vamos decompor a vorticidade em dois termos, um de integral nula e outro estacionário.

O campo estacionário que iremos utilizar deve ser suave, ter simetria helicoidal, ser ortogonal às hélices e ser uma solução estacionária da equação de vorticidade. O campo que introduziremos agora satisfaz todas estas propriedades. Seja $\omega \in L^p_{per}(\Omega) \cap L^1_{per}(\Omega)$ tal que $\int_\Omega \omega(x)dx \neq 0$. Primeiro, observe que pelo Teorema de Fubini (veja, por exemplo, [3]), como $\omega \in L^p_{per}(\Omega) \cap L^1_{per}(\Omega)$ então a função definida q.t.p por

$$f(x_3) := \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\tilde{x}, x_3) d\tilde{x}$$

tem integral finita e satisfaz

$$\int_\Omega \omega(x)dx = \int_{-\kappa\pi}^{\kappa\pi} f(x_3)dx_3.$$

Seja $c \in [-\kappa\pi, \kappa\pi]$ um ponto onde f está definida e tem integral finita. Tome $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty((0,\infty))$ arbitrária tal que

$$\int_0^\infty \varphi(r)rdr = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\tilde{x}, c)d\tilde{x}.$$

A escolha de φ independe de c. De fato, isso segue facilmente da identidade abaixo

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega(\tilde{x}, a)d\tilde{x} = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\tilde{x}, b)d\tilde{x}, \text{ para quase todo } a, b \in [-\kappa\pi, \kappa\pi],$$

cuja demonstração será feita no lema 4.9.1.

Defina $\phi = \phi(x) = \varphi(|\tilde{x}|)$ e

$$\bar{u} = \left(\frac{\tilde{x}^\perp}{|\tilde{x}|^2}, \kappa \right) \int_0^{|\tilde{x}|} \varphi(r)rdr.$$

Temos que $\bar{u}$ tem simetria helicoidal, é ortogonal às hélices, é uma solução estacionária das equações de Euler e que rot $\bar{u} = \dfrac{\phi}{\kappa}\xi$. Disto segue que $\bar{u} \cdot \nabla\phi = 0$.

Lema 4.9.1. *Seja $\omega \in L^p_{per}(\Omega) \cap L^1_{per}(\Omega)$ e ϕ a função construída acima. Então,*

$$\int_\Omega \phi(x)dx = \int_\Omega \omega(x)dx.$$

Demonstração. Observe que

$$\int_\Omega \phi(x)dx = 2\pi\kappa \int_0^\infty \varphi(r)rdr = 2\pi\kappa \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\tilde{x},0)d\tilde{x}.$$

Portanto, basta verificar que

$$\int_\Omega \omega(x)dx = 2\pi\kappa \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\tilde{x},0)d\tilde{x}.$$

Para isso, vamos demonstrar que para quase todo $a, b \in [-\pi\kappa, \pi\kappa]$ vale que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega(\tilde{x},a)d\tilde{x} = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\tilde{x},b)d\tilde{x}.$$

Primeiro, observe que a transformação $x \mapsto S_\theta x$ é inversível com inversa dada por $y \to S_{-\theta}y$. Dado $y = (\tilde{y}, b)$ tome $\theta \in \mathbb{R}$ de modo que $b = \kappa\theta + a$. Defina $x = S_{-\theta}y$. Logo, $x = (\tilde{x}, a)$ com $\tilde{x} = R_{-\theta}\tilde{y}$. Além disso, como ω tem simetria helicoidal, temos que $\omega(\tilde{y}, b) = \omega(\tilde{x}, a) = \omega(R_{-\theta}\tilde{y}, a)$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega(\tilde{y},b)d\tilde{y} = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(R_{-\theta}\tilde{y},a)d\tilde{y},$$

e, fazendo a mudança de variáveis $\tilde{x} = R_{-\theta}\tilde{y}$, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega(\tilde{y},b)d\tilde{y} = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\tilde{x},a)d\tilde{x}.$$

□

Abaixo temos uma definição de solução fraca no caso em que a vorticidade não é balanceada.

Definição 4.9.1. *Dados $\omega^0 \in L^p_{c,per}(\Omega;\mathbb{R})$, para algum $p > \frac{4}{3}$, e $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c((0,\infty))$ tal que*

$$\int_0^\infty \varphi(r)rdr = \int_{\mathbb{R}^2} \omega^0(\tilde{x},0)d\tilde{x}$$

defina $\tilde{\omega}^0 = \omega^0 - \phi$, onde $\phi = \phi(x) = \varphi(|\tilde{x}|)$.

Uma função escalar $\omega = \omega(t,x)$ é solução fraca de

$$\frac{D\omega}{Dt} = 0 \tag{4.32}$$

se

(i) $\omega = \tilde{\omega} - \phi$ *e* $\tilde{\omega} \in L^\infty([0,T), L^p_{c,per}(\Omega;\mathbb{R}))$,

(ii) *o campo de velocidades dado por* $u(t,x) = \tilde{u}(t,x) + \bar{u}(x)$, *onde* $\bar{u}(x) = \left(\dfrac{\tilde{x}^\perp}{|\tilde{x}|^2}, \kappa\right) \int_0^{|\tilde{x}|} \varphi(r) r dr$ *e* $\tilde{u}(t,x) = \int_\Omega \mathcal{K}(x-y) \times \dfrac{\xi(y)}{\kappa} \tilde{\omega}(t,y) dy$ *for tal que* $\tilde{u} \in L^\infty([0,T), L^2_{per}(\Omega;\mathbb{R}^3))$,

(iii) *e* $\tilde{\omega}$ *for solução fraca de*

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\omega} + (\tilde{u}\cdot\nabla)\tilde{\omega} + (\bar{u}\cdot\nabla)\tilde{w} + (\tilde{u}\cdot\nabla)\phi = 0 \\ \tilde{u}(t,x) = \int_\Omega \mathcal{K}(x-y) \times \dfrac{\xi(y)}{\kappa}\tilde{\omega}(t,y)dy \\ \tilde{w}(0,x) = \tilde{w}^0(x), \end{cases} \tag{4.33}$$

isto é, para toda função teste $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c([0,T)\times\Omega;\mathbb{R})$

$$\int_0^T \int_\Omega \psi_t(t,x)\tilde{\omega}(t,x)dxdt + \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\tilde{\omega}(t,y)\tilde{\omega}(t,x)dydxdt +$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega \nabla\psi(t,x)\cdot\bar{u}(x)\tilde{\omega}(t,x)dxdt +$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega \nabla\psi(t,x)\cdot\left(\mathcal{K}(x-y)\times\frac{\xi(y)}{\kappa}\right)\tilde{\omega}(t,y)\phi(x)dydxdt + \int_\Omega \psi(x,0)\tilde{\omega}^0(x)dx = 0$$

onde

$$\mathcal{H}_\psi(t,x,y) = \frac{1}{2\kappa}\mathcal{K}(x-y)\cdot\left(\xi(y)\times(\nabla\psi(t,x)-\nabla\psi(t,y)) - (\xi(x)-\xi(y))\times\nabla\psi(t,y)\right).$$

Observação . A definição anterior não depende da escolha de φ. Para ver isso, considere $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty_c((0,\infty))$ tal que

$$\int_0^\infty \varphi_1(r) r dr = \int_0^\infty \varphi_2(r) r dr = \int_{\mathbb{R}^2} \omega^0(\tilde{x},0)d\tilde{x}.$$

Seja $\tilde{\omega}_i = \omega - \phi_i$ onde $\phi_i = \phi_i(x) = \varphi_i(|\tilde{x}|)$ e $\bar{u}_i = \left(\dfrac{\tilde{x}^\perp}{|\tilde{x}|^2}, \kappa\right)\int_0^{|\tilde{x}|}\varphi_i(r) r dr$, para $i = 1,2$. Agora, basta demonstrar que

$$\int_0^T \int_\Omega \psi_t(t,x)\tilde{\omega}_1(t,x)dxdt + \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\tilde{\omega}_1(t,y)\tilde{\omega}_1(t,x)dydxdt +$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega \nabla\psi(t,x)\cdot\bar{u}_1(x)\tilde{\omega}(t,x)dxdt +$$

$$+\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \nabla\psi(t,x)\cdot\left(\mathcal{K}(x-y)\times\frac{\xi(y)}{\kappa}\right)\tilde{\omega}_1(t,y)\phi_1(x)dydxdt+\int_\Omega\psi(x,0)\tilde{\omega}^0(x)dx=$$

$$\int_0^T\int_\Omega\psi_t(t,x)\tilde{\omega}_2(t,x)dxdt+\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega\mathcal{H}_\psi(t,x,y)\tilde{\omega}_2(t,y)\tilde{\omega}_2(t,x)dydxdt+$$
$$+\int_0^T\int_\Omega\nabla\psi(t,x)\cdot\bar{u}_2(x)\tilde{\omega}(t,x)dxdt+$$
$$+\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \nabla\psi(t,x)\cdot\left(\mathcal{K}(x-y)\times\frac{\xi(y)}{\kappa}\right)\tilde{\omega}_2(t,y)\phi_2(x)dydxdt+\int_\Omega\psi(x,0)\tilde{\omega}^0(x)dx=0.$$

Esta identidade pode ser verificada através de uma conta longa e tediosa que será omitida.

Precisaremos do resultado abaixo na demonstração do teorema principal.

Teorema 4.9.1. *Dado $\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty((0,\infty))$ defina $\bar{u}=\left(\frac{\tilde{x}^\perp}{|\tilde{x}|^2},\kappa\right)\int_0^{|\tilde{x}|}\varphi(r)rdr$. Seja $\tilde{u}_0\in\mathcal{C}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)\cap L^2_{per}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, tal que div $\tilde{u}_0=0$, $\tilde{u}_0$ tem simetria helicoidal e é ortogonal às hélices. Então existe única solução $\tilde{u}\in\mathcal{C}^\infty([0,\infty)\times\Omega;\mathbb{R}^3)\cap L^2_{per}([0,\infty)\times\Omega;\mathbb{R}^3)$ para o sistema de equações abaixo*

$$\begin{cases}\partial_t\tilde{u}+(\tilde{u}\cdot\nabla)\tilde{u}+(\tilde{u}\cdot\nabla)\bar{u}+(\bar{u}\cdot\nabla)\tilde{u}+\nabla\tilde{p}=0\\ \mathit{div}\ \tilde{u}=0\\ \tilde{u}(0,x)=\tilde{u}_0(x)\\ |\tilde{u}|(x)\to 0\ \mathit{quando}\ |\tilde{x}|\to\infty.\end{cases}\tag{4.34}$$

Além disso, $\tilde{u}$ tem simetria helicoidal e é ortogonal às hélices.

Demonstração. A demonstração de existência e unicidade de solução clássica para o problema acima pode ser feita através do método de energia, assim como foi feito para as equações de Euler na seção 1.5. Além disso, temos que as equações acima são invariantes pela simetria helicoidal e portanto, junto com a unicidade de solução, podemos concluir que $\tilde{u}$ é helicoidal. Sejam $\tilde{u}$ e $\tilde{p}$ solução do problema (4.34). De fato, defina $v(t,x)=R_{-\theta}\tilde{u}(t,S_\theta x)$ e $q(t,x)=p(t,S_\theta x)$. Vejamos que v e q são solução do problema

$$\begin{cases}\partial_t v+(v\cdot\nabla)v+(v\cdot\nabla)\bar{u}+(\bar{u}\cdot\nabla)v+\nabla q=0\\ \text{div }\tilde{v}=0\\ \tilde{v}(0,x)=\tilde{u}_0(x)\\ |\tilde{v}|(x)\to 0 \text{ quando } |\tilde{x}|\to\infty.\end{cases}\tag{4.35}$$

Para isso, observe que da definição de $\bar{u}$ segue que $R_{-\theta}\bar{u}(S_\theta x) = \bar{u}$. Além disso, temos que

$$\nabla(\tilde{p}(t, S_\theta x)) = R_{-\theta}\nabla\tilde{p}(t, S_\theta x)$$

$$\partial_t(R_{-\theta}\tilde{u}(t, S_\theta x)) = R_{-\theta}\partial_t\tilde{u}(t, S_\theta x)$$

$$((R_{-\theta}\tilde{u}(t, S_\theta x)) \cdot \nabla)(R_{-\theta}\tilde{u}(t, S_\theta x)) = R_{-\theta}((\tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{u})(t, S_\theta x)$$

$$((R_{-\theta}\tilde{u}(t, S_\theta x)) \cdot \nabla)\bar{u}(x) = ((R_{-\theta}\tilde{u}(t, S_\theta x)) \cdot \nabla)(R_{-\theta}\bar{u}(t, S_\theta x)) = R_{-\theta}((\tilde{u} \cdot \nabla)\bar{u})(t, S_\theta x)$$

$$(\bar{u}(x) \cdot \nabla)(R_{-\theta}\tilde{u}(t, S_\theta x)) = ((R_{-\theta}\bar{u}(S_\theta x)) \cdot \nabla)(R_{-\theta}\tilde{u}(t, S_\theta x)) = R_{-\theta}((\bar{u} \cdot \nabla)\tilde{u})(t, S_\theta x)$$

Portanto,

$$\partial_t v(t, x) + (v(t, x) \cdot \nabla)v(t, x) + (v(t, x) \cdot \nabla)\bar{u}(x) + (\bar{u}(x) \cdot \nabla)v(t, x) + \nabla q(t, x) =$$

$$= \partial_t(R_{-\theta}\tilde{u}(t, S_\theta x)) + ((R_{-\theta}\tilde{u}(t, S_\theta x)) \cdot \nabla)(R_{-\theta}\tilde{u}(t, S_\theta x)) + ((R_{-\theta}\tilde{u}(t, S_\theta x)) \cdot \nabla)\bar{u}(x) +$$

$$+ (\bar{u}(x) \cdot \nabla)(R_{-\theta}\tilde{u}(t, S_\theta x)) + \nabla(\tilde{p}(t, S_\theta x)) =$$

$$= R_{-\theta}[\partial_t\tilde{u}(t, S_\theta x) + ((\tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{u})(t, S_\theta x) + R_{-\theta}((\tilde{u} \cdot \nabla)\bar{u})(t, S_\theta x) + ((\bar{u} \cdot \nabla)\tilde{u})(t, S_\theta x) + \nabla\tilde{p}(t, S_\theta x)] =$$

$$= R_{-\theta}[\partial_t\tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \nabla)\bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla)\tilde{u} + \nabla\tilde{p}](t, S_\theta x) = 0$$

Agora, como a solução do problema 4.34 é única segue que $v \equiv u$ e portanto $u(t, x) = R_{-\theta}u(t, S_\theta x)$. Donde concluímos que u é helicoidal.

Além disso, observe que $u \cdot \xi$ satisfaz a seguinte equação

$$\partial_t(u \cdot \xi) + (u \cdot \nabla)(u \cdot \xi) = 0$$

com dado inicial $(u \cdot \xi)(t = 0) = u_0 \cdot \xi = 0$. Portanto, $u \cdot \xi = 0$, ou seja, u é ortogonal às hélices. □

Teorema 4.9.2. *Dado $\omega^0 \in L^p_{c,per}(\Omega; \mathbb{R})$, para algum $p > \dfrac{4}{3}$, existe uma solução fraca $\omega = \omega(t, x)$ de (4.32) no sentido da definição 4.6.2.*

Demonstração. Para o caso em que $\int \omega^0 dx = 0$ o teorema já foi demonstrado na seção anterior. Agora, suponha que $\int \omega^0 dx \neq 0$. Neste caso, fixe $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty((0, \infty))$ tal que

$$\int_0^\infty \varphi(r) r dr = \int_{\mathbb{R}^2} \omega^0(\tilde{x}, 0) d\tilde{x}$$

e defina $\tilde{\omega}^0 = \omega^0 - \phi$, onde $\phi = \phi(x) = \varphi(|\tilde{x}|)$. Agora, vamos definir a sequência de aproximações $\tilde{\omega}_n^0$ por

$$\tilde{\omega}_n^0 = \omega_n^0 - \phi$$

onde ω_n^0 é a sequência de molificadores definida por $\omega_n^0 = \rho_n * \omega^0$. Observe que $\int_\Omega \tilde{\omega}_n^0 dx = 0$ para todo n. Logo, para todo n podemos definir o campo de velocidades associado a ω_n^0 através da Lei de Biot-Savart,

$$\tilde{u}_n^0 = \mathcal{K} * \left(\tilde{\omega}_n^0 \frac{\xi}{\kappa} \right).$$

Pelo corolário 4.5.1 temos que, em particular, $\tilde{u}_n^0 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3) \cap L^2_{per}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ para todo n.

Observe que para cada n, $\tilde{u}_n^0$ satisfaz as condições do teorema 4.9.1, portanto, para cada n, existe uma única $\tilde{u}_n$ solução do problema (4.34). Agora defina

$$u_n = \tilde{u}_n + \bar{u} \quad \text{onde} \quad \bar{u} = \left(\frac{\tilde{x}^\perp}{|\tilde{x}|^2}, \kappa \right) \int_0^{|\tilde{x}|} \varphi(r) r dr.$$

Temos que o campo de velocidades u_n satisfaz as seguintes propriedades

(i) para cada n, u_n é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0 \\ \text{div } u = 0 \\ u(0,x) = \tilde{u}_n^0(x) + \bar{u}(x) \\ |(u_1, u_2)|(x) \to 0 \text{ e } |u_3|(x) \to \alpha \text{ quando } |\tilde{x}| \to \infty. \end{cases} \tag{4.36}$$

onde $\alpha = \kappa \int \varphi(r) r dr$ e $p = \tilde{p} + \bar{p}$.

(ii) u_n tem simetria helicoidal para todo n;

(iii) rot $u_n = \omega_n \dfrac{\xi}{\kappa}$ para todo n.

De fato, da definição de $\tilde{u}_n$ e pela proposição 4.5.2 segue que $\tilde{u}_n$ tem simetria helicoidal, é ortogonal às hélices e rot $\tilde{u}_n = \tilde{\omega}_n$. Por outro lado é fácil ver que $\bar{u}$ tem simetria helicoidal, é ortogonal às hélices e rot $\bar{u} = \phi \dfrac{\xi}{\kappa}$. Portanto, como $u_n = \tilde{u}_n + \bar{u}$, temos que u_n satisfaz (i), (ii) e (iii).

Vejamos que para cada n, u_n é única. Para isso fixe n e suponha que existe v que seja solução de (4.36). Defina $\tilde{v} = v - \bar{u}$. É claro que $\tilde{v}$ satisfaz (4.34), mas já sabemos que o problema (4.34) tem solução única $\tilde{u}_n$, logo $\tilde{v} = \tilde{u}_n$ e portanto $v = u_n$.

Retomando a sequência de aproximações temos agora definida a sequência $\{u_n\}$ de soluções das equações de Euler tal que $u_n(t,x) = \left(\mathcal{K} * \left(\tilde{\omega}_n \dfrac{\xi}{\kappa}\right)\right)(t,x) + \bar{u}(x)$.

Como $\omega_n = \tilde{\omega}_n + \phi$ é solução de (4.32) vale que

$$\int_0^T \int_\Omega \psi_t(t,x)\tilde{\omega}_n(t,x)dxdt + \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\tilde{\omega}_n(t,y)\tilde{\omega}_n(t,x)dydxdt +$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \nabla\psi(t,x) \cdot \bar{u}(x)\tilde{\omega}_n(t,x)dxdt +$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega \nabla\psi(t,x) \cdot \left(\mathcal{K}(x-y) \times \frac{\xi(y)}{\kappa}\right)\tilde{\omega}_n(t,y)\phi(x)dydxdt + \int_\Omega \psi(x,0)\tilde{\omega}_n^0(x)dx = 0.$$

Temos que provar que podemos passar o limite na última expressão para $n \to \infty$ e que vale a seguinte identidade

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^T \int_\Omega \psi_t(t,x)\tilde{\omega}_n(t,x)dxdt + \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\tilde{\omega}_n(t,y)\tilde{\omega}_n(t,x)dydxdt +\right.$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \nabla\psi(t,x) \cdot \bar{u}(x)\tilde{\omega}_n(t,x)dxdt +$$

$$\left.+ \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega \nabla\psi(t,x) \cdot \left(\mathcal{K}(x-y) \times \frac{\xi(y)}{\kappa}\right)\tilde{\omega}_n(t,y)\phi(x)dydxdt + \int_\Omega \psi(x,0)\tilde{\omega}_n^0(x)dx\right\} =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \psi_t(t,x)\tilde{\omega}(t,x)dxdt + \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega \mathcal{H}_\psi(t,x,y)\tilde{\omega}(t,y)\tilde{\omega}(t,x)dydxdt +$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \nabla\psi(t,x) \cdot \bar{u}(x)\tilde{\omega}(t,x)dxdt +$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega \nabla\psi(t,x) \cdot \left(\mathcal{K}(x-y) \times \frac{\xi(y)}{\kappa}\right)\tilde{\omega}(t,y)\phi(x)dydxdt + \int_\Omega \psi(x,0)\tilde{\omega}^0(x)dx.$$

Dessa forma obteremos que ω é solução fraca de (4.32).

Observe que como $\displaystyle\int_\Omega \tilde{w}_n dx = 0$ a demonstração de que o limite da soma dos dois primeiros termos e do último termo converge e converge para o termo certo já foi feita na demonstração do teorema 4.8.1. Para o terceiro termo basta usar desigualdade de Hölder e para o quarto termo a desigualdade de Young generalizada. □

4.10 Apêndice

Abaixo vamos enunciar algumas propriedades das funções de Bessel modificadas de segundo tipo e de ordem ν, denotadas por K_ν, que podem ser encontradas no livro [18],

- K_ν é positiva e decrescente para todo $\nu > 0$;
- $\dfrac{\partial K_0(t)}{\partial t} = -K_1(t)$;
- $\int_0^\infty K_0(t)dt = \dfrac{\pi}{2}$;
- $\int_0^\infty tK_0(t)dt = 1$;
- $\int_0^\infty tK_1(t)dt = \dfrac{\pi}{2}$.

Considerações Finais

Destacamos dois possíveis trabalhos futuros. Primeiro, gostaríamos de construir uma aproximação numérica do escoamento obtido no capítulo 3, que é uma solução das equações de Euler com traçador passivo. Com isso, poderíamos entender melhor a construção do escoamento e a técnica de integração convexa. Outro trabalho relaciona-se ao resultado de Serre (veja [31]) que estabelece que se uma solução suave u das equações de Euler 3D com simetria axial com rodopio existe globalmente no tempo, então $\omega = \text{rot } u$ não permanece limitado. O objetivo seria adaptar tal resultado para as equações de Euler 3D com simetria helicoidal com rodopio.

Referências Bibliográficas

[1] V. Arnold, *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), *16*(1966), fasc. 1, 319-361.

[2] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, Graduate Texts in Mathematics **157**, Springer Verlag, New York, 1992

[3] R. Bartle, *The Elements of Integration*, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1996.

[4] J. T. Beale, T. Kato and A. Majda, *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations*, Comm. Math. Phys. **94**(1984), no. 1, 61-66.

[5] A. C. Bronzi, M. C. Lopes Filho and H. J. Nussenzveig Lopes, *Computational visualization of Shnirelman's compactly supported weak solution*, Phys. D **237**(2008), no. 14-17, 1989-1992.

[6] A. Chorin and J. Marsden, *An introduction to Mathematical Fluid Mechanics*, Springer Verlag, New York, 1979.

[7] *http://www.claymath.org/millenium/*

[8] C. De Lellis and L. Székelyhidi, *The Euler equations as a differential inclusion*, Ann. of Math., 170 (2009), 1417-1436

[9] J-M. Delort, *Existence de nappes de tourbillon en dimension deux*, J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), 553-586.

[10] R. DiPerna and P.L. Lions, *ODE, Sobolev spaces and transport theory*, Invent. Math. **98**(1989), 511-547.

[11] R. DiPerna and A. Majda, *Oscillations and concentrations in weak solutions of the incompressible fluid equations*, Commun. Math. Phys. 108 (1987), 667-689

[12] R. DiPerna and A. Majda, *Reduced Hausdorff dimension and concentration-cancellation for two dimensional incompressible flow*, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), 59-95.

[13] A. Dutrifoy, *Existence globale en temps de solutions hélicoïdales des équations d'Euler*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I, **329**(1999), 653-656

[14] D. Ebin and J. Marsden, *Groups of Diffeomorphisms and the Motion of an Incompressible Fluid*, Ann. of Math. *92*(1970), N^o 1,102-163

[15] B. Ettinger and E. Titi, *Global existence and uniqueness of weak solutions of 3D Euler equations with helical symmetry in the absence of vorticity stretching*, SIAM J. Math. Anal. **41**(2009), n^{o}1, 269-296.

[16] G. B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1992.

[17] U. Frish, *Turbulence: the legacy of Kolmogorov*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[18] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Product*, seventh edition, Academic Press, 2007

[19] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1964.

[20] O. Jørsboe and L. Mejlbro, *The Carleson-Hunt Theorem on Fourier Series, Lecture Notes in Mathematics*, Springer Verlag, Berlin, Vol. 911, 1982.

[21] T. Kato, *Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in* $\mathbb{R}^3$, J. Funct. Anal. 9 (1972), 296-305.

[22] D. Levy and E. Tadmor, *Non-oscillatory central schemes for the incompressible 2-D Euler equations*, Math. Res. Lett., **4**(1997), 321-340.

[23] M. Lopes Filho, H. Nussenzveig Lopes and Y. Zheng, *Weak solutios for the equations of incompressible and inviscid fluid dynamics*, 22º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1999.

[24] M. Lopes Filho, H. Nussenzveig Lopes and E. Tadmor, *Aproximate solutios of the incompressible Euler equations with no concentrations*, Annales de l'IHP-analyse non-lineaire, **17**(2000), 371-412.

[25] W. Magnus, F. Oberhettinger and R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, 3rd ed. Springer–Verlag, Berlin, 1966.

[26] A. Majda, *Vorticity and Mathematical Theory of Incompressible Fluid Flow*, Commun. Pure Appl. Math., **XXXIX**(1986), S187-S220.

[27] A. Majda, *Remarks on weak solutions of vortex sheets with distinguished sign*, Indiana Univ. Math J. **42**(1993), 921-939.

[28] A. Majda and A. Bertozzi, *Vorticity and incompressible flow*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, vol. 27, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[29] P. Petersen, *Riemannian geometry*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, 171, Springer, New York, 2006.

[30] V. Scheffer, *An inviscid flow with compact support in space-time*, J. Geom. Anal., **3**(1993), 343-401.

[31] D. Serre, *La croissance de la vorticité dans les écoulements parfaits incompressibles*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.328, **I**(1999), 549-552.

[32] A. Shnirelman, *On the non-uniqueness of weak solutions of Euler equations*, Commun. Pure Appl. Math., **L**(1997), 1261-1286.

[33] A. Shnirelman, *Weak solutions with decreasing energy of incompressible Euler equations.*, Comm. Math. Phys., 210, **3**(2000),541-603.

[34] B.-W. Schulze, *Boundary value problems and singular pseudo-differential operators*, Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts.

[35] C. Villani, *Paradox de Scheffer-Shnirelman revu sous l'angle de l'intégration convexe*, Séminaire BOURBAKI, 61ème année, 2008-2009, 1001.

[36] V. Yudovich, *Non-stationary flow of an ideal, incompressible liquid*, Zh. Vych. Mat., **3**(1963), 1032-1066.