

SUBVARIÉDADES DE ESPAÇOS EUCLIDIANOS
COM CURVATURA NÃO NEGATIVA

YURIKO YAMAMOTO BALDIN



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

B193s

5856/BC

SUBVARIEDADES DE ESPAÇOS EUCLIDIANOS
COM CURVATURA NÃO NEGATIVA

YURIKO YAMAMOTO BALDIN

*Este exemplar corresponde a redação
final da Tese defendida pelo Sr. Yuriko Y.
Baldin e aprovada pela comissão Julgadora*

Francesco Mercuri.

Orientador

Prof. Dr. Francesco Mercuri

Dissertação apresentada ao Instituto
de Matemática, Estatística e Ciência
da Computação da Universidade Est
adual de Campinas como requisito par
cial para obtenção do título de Dou
tor em Matemática.

Agosto de 1984.

Este trabalho contou com auxílio financeiro de CAPES:PICD(1982)
e auxílio viagem (1983-84).

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Francesco Mercuri a quem devemos inestimáveis auxílios e ensinamentos, pela proposição do tema de trabalho e pela atenciosa e valiosa orientação,

Ao Prof. Alcibiades Rigas pelos valiosos ensinamentos, constantes estímulos e apoios recebidos,

Ao Prof. Janey Antonio Daccach pela delicada atenção com que nos distinguiu em inúmeras e frutíferas discussões,

Ao Departamento de Matemática da UFSCar pela concessão de condições para que este trabalho pudesse ser realizado,

A todos os colegas que nos incentivaram e apoiaram,

À minha família pela compreensão e apoio,

os nossos profundos e sinceros agradecimentos.

YURIKO YAMAMOTO BALDIN

ÍNDICE

| | | |
|--|----|----|
| INTRODUÇÃO | i | |
| CAPÍTULO I - IMERSÕES ISOMÉTRICAS E CURVATURA TOTAL | | |
| ABSOLUTA | 1 | |
| §1. Generalidades | 1 | |
| §2. Funções Altura | 5 | |
| §3. Curvatura Total Absoluta e o Teorema de Chern - Lashof | 8 | |
| CAPÍTULO II - SUBVARIEDADES COMPACTAS COM CURVATURA NÃO NEGATIVA E CODIMENSÃO BAIXA | | 14 |
| §1. O Primeiro Espaço Normal | 14 | |
| §2. Subvariedades Compactas com Curvatura Não Negativa e $\dim(N_1) \leq 2$ | 18 | |
| §3. O Grupo Fundamental | 23 | |
| §4. Subvariedades Não Orientáveis | 30 | |
| §5. Subvariedades Simplesmente Conexas | 37 | |

| | |
|--|----|
| CAPÍTULO III - SUBVARIEDADES COMPLETAS COM CURVATURA NÃO | |
| NEGATIVA E CODIMENSÃO BAIXA | 47 |
| §1. O Teorema da Alma | 47 |
| §2. Redução da Codimensão | 49 |
| §3. Outros Resultados sobre Subvariedades Completas | 54 |
| BIBLIOGRAFIA | 58 |

INTRODUÇÃO

O problema de relacionar a curvatura de uma variedade riemanniana com a sua topologia é um dos problemas centrais em Geometria Diferencial. Dentro desse problema o caso de subvariedades de espaços euclidianos ocupa um lugar de destaque por várias razões, não últimas o fator histórico, e o teorema de Nash que garante que todas as variedades riemannianas podem ser isometricamente imersas em um espaço euclidiano.

A proposta deste trabalho é estudar a topologia das variedades com curvaturas seccionais não negativas imersas isometricamente em um espaço euclidiano em codimensão baixa. As hipóteses globais que consideraremos são essencialmente duas: o caso de variedades compactas e o caso de variedades completas.

O caso de hipersuperfícies (isto é, codimensão um) é, hoje, bem compreendido, seja no caso compacto, seja completo. Uma hipersuperfície completa com curvaturas não negativas é bordo de um corpo convexo ou um cilindro sobre uma curva plana.

Quando a codimensão é dois, os resultados são mais recentes e ainda incompletos, e esse caso será o tópico principal deste trabalho. Para descrever os resultados nesta direção começaremos com o caso de variedades compactas. O ponto de partida das idéias que vamos expor é uma nota de A. Weinstein (veja [We]) na qual se observa que, se uma variedade com curvatura seccional não negativa (resp. positiva) é imersa com codimensão dois em um espaço euclidiano, então existem duas direções ortonormais no espaço normal tal que as duas

segundas formas fundamentais nestas direções são semi definidas (resp. definidas) positivas. Este fato acarreta que o operador de curvatura é não negativo (resp. positivo). Usando esta observação, C.S.Chen (veja [Ch]) determina algumas desigualdades sobre as curvaturas totais absolutas que permitem uma classificação das imersões, considerando-se hipóteses adicionais. De fato, usando as desigualdades de Chen e as clássicas de Morse, J.D.Moore (veja [M]) consegue mostrar o seguinte resultado:

TEOREMA A: Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão isométrica de uma variedade compacta, orientável, com curvaturas seccionais positivas. Então M^n é homotopicamente equivalente a S^n .

Usando essencialmente as mesmas técnicas, em [B-M] conseguimos provar a seguinte versão mais forte do teorema acima:

TEOREMA B: Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão isométrica de uma variedade compacta, orientável com curvatura seccional não negativa. Suponhamos que exista $p \in M^n$ tal que para cada 2-plano σ tangente em p , a curvatura seccional de σ seja positiva. Então M^n é homeomorfa a S^n .

Se tirarmos a hipótese que todas as curvaturas seccionais em um ponto sejam positivas, o teorema B é claramente falso, pois a imersão canônica $S^k \times S^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ obviamente verifica as outras hipóteses mas não a tese. Ainda em [B-M] consideramos também este ca

so mais geral, chegando a "mostrar" que efetivamente os "produtos de esferas" são as únicas possibilidades (além de S^n). Infelizmente a nossa demonstração é incompleta, e o resultado correto deve ser enunciado da seguinte forma:

TEOREMA C: Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão isométrica de uma variedade compacta, orientável com curvatura não negativa. Suponhamos que M^n não seja homotopicamente equivalente a S^n . Então:

- (a) se M^n não é simplesmente conexa, ou M é difeomorfa a um produto $S^1 \times M_1$ onde M_1 é homotopicamente equivalente a S^{n-1} , ou possui S^3 como recobrimento finito;
- (b) se M^n é simplesmente conexa e n é par então $M = M_1^k \times M_2^{n-k}$ (isometricamente) e existem imersões isométricas $f_1: M_1 \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, $f_2: M_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n-k+1}$ de modo que $f = f_1 \times f_2$;
- (c) se M é simplesmente conexa, $n = 2k + 1$ e M não é produto de duas variedades como em (b), então a homologia real de M é isomorfa à de S^n e a homologia inteira apresenta torção somente na dimensão k .

A este ponto estamos tentados a conjecturar que a última possibilidade (c) não pode acontecer.

Em todo o caso, a menos dessa conjetura, o caso compacto é razoavelmente claro e é natural perguntarmos o que acontece, por exemplo no teorema C, se substituirmos a condição de compacidade

pela de completeza. Esta foi a pergunta que nos levou a este trabalho. A idéia que tivemos foi a de usar o teorema da alma de Cheeger e Gromoll (veja [Ch-G]) tentando reconduzir o caso completo ao caso compacto. O teorema da alma nos garante, de fato, que uma variedade completa com curvaturas seccionais não negativas M^n possui uma subvariedade compacta $A^m \subseteq M^n$ totalmente geodésica (e de fato, totalmente convexa) tal que M^n é difeomorfa ao espaço total do fibrado normal da inclusão $A^m \hookrightarrow M^n$. Então, se tivermos uma imersão isométrica $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ podemos considerar a restrição $\bar{f} = f|_{A^m}: A^m \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$. Para esta imersão não podemos aplicar diretamente as conclusões do teorema C, pois a codimensão de A^m em \mathbb{R}^{n+2} é maior que dois. Porém observamos que, sendo A^m totalmente geodésica em M^n , o subespaço gerado pela segunda forma fundamental de \bar{f} (o primeiro espaço normal de \bar{f}) está contido no espaço normal de f , e é portanto no máximo 2-dimensional. Esta observação nos sugere generalizar os teoremas B e C substituindo a hipótese de codimensão 2 pela hipótese de que o primeiro espaço normal tenha dimensão menor ou igual a 2. Dedicamos o Capítulo II inteiro para este problema, sendo a parte mais comprida deste trabalho. (O capítulo I é um capítulo sobre notações e pré-requisitos). Os resultados obtidos podem ser enunciados da seguinte maneira:

TEOREMA B': Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade compacta com curvaturas seccionais não negativas. Suponhamos que exista um ponto $p \in M^n$ tal que para cada 2-plano σ tangente a M em p a curvatura seccional de σ seja positiva. Então, se a

dimensão do primeiro espaço normal for no máximo dois M^n é homeomorfa a S^n .

TEOREMA C': Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade compacta com curvatura não negativa tal que a dimensão do 1º espaço normal seja menor ou igual a 2. Suponhamos que M^n não seja homotopicamente equivalente a S^n . Então:

- (a) se M^n não é simplesmente conexa então, ou M^n possui S^3 como recobrimento finito, ou M é difeomorfa a $S^1 \times M_1$ onde M_1 é homotopicamente equivalente a S^{n-1} , ou, se M for não orientável, M é difeomorfa a uma "garrafa de Klein generalizada", isto é, ao espaço total do fibrado não orientável sobre S^1 com fibra homotopicamente equivalente a S^{n-1} ; ou $\mathbb{R}P^2$;
- (b) se M for simplesmente conexa e n é par então, ou $M = M_1^k \times M_2^{n-k}$ (isometricamente) com M_i homotopicamente equivalentes a esferas, ou M é homotopicamente equivalente ao plano projetivo complexo $\mathbb{C}P^2$;
- (c) se M for simplesmente conexa e $n = 2k + 1$, ou $M = M_1^k \times M_2^{n-k}$ (isometricamente) com M_i homotopicamente equivalentes a esferas, ou a homologia real de M é isomorfa à de S^n e a homologia inteira apresenta torção somente na dimensão k .

OBSERVAÇÃO: Observamos que, comparativamente ao teorema C, o teorema C' inclui o caso não orientável.

No Capítulo III consideramos uma imersão isométrica $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ onde M^n é completa, conexa com curvaturas seccionais não negativas. Uma aplicação imediata do teorema da alma e do teorema C' nos fornece então:

TEOREMA C": Nas hipóteses acima M é homotopicamente equivalente a uma variedade do tipo (a), (b) ou (c) do teorema C'.

Na tentativa de refinamento do teorema C" consideramos uma alma $A^m \subseteq M^n$ e a imersão isométrica $\tilde{f} = f|_A: A \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$. Em geral, como observamos anteriormente, $f(A)$ não está necessariamente contida em um subespaço afim $(m+2)$ -dimensional de \mathbb{R}^{n+2} pois, em geral o fibrado normal de M ao longo de A não é paralelo. Consideramos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO: Dizemos que f é *reduzível ao longo de A* se para cada $p \in A$, $X \in T_p A$, $Y \in T_p M$ com Y normal a A temos $\alpha(X, Y) = 0$, onde α é a 2ª forma fundamental de f .

Se f é reduzível ao longo de A é fácil ver (veja 3.2.1.) que $f(A)$ está contida num subespaço afim $(m+2)$ -dimensional paralelo a $T_p A \oplus (\nu M|_A)_p$. Isso acarreta como consequência (veja 3.2.4.) que M , como fibrado vetorial sobre A , é trivial. Como corolário temos então:

TEOREMA C": Se f for reduzível ao longo de A então M é difeomor

fa ao produto de uma variedade do tipo (a), (b) ou (c) do teorema C' e de um espaço euclidiano.

O caso similar ao do teorema B não pode ser tratado diretamente com estas idéias. De fato, a existência de um ponto $p \in M$ tal que todas as curvaturas seccionais em p sejam positivas não influencia diretamente o que acontece na alma (pois pode não ter almas que passem pelo ponto). No entanto, usando um resultado de Walter (veja [W]), conseguimos provar o seguinte resultado:

TEOREMA B": Seja M^n uma variedade completa de dimensão par com curvaturas seccionais não negativas e positivas em pelo menos um ponto. Se M^n admite uma imersão isométrica $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ então M é simplesmente conexa, ou tem o tipo de homotopia de $\mathbb{R}P^2$.

Os resultados apresentados neste trabalho certamente não podem ser considerados completos, e seguramente será possível obter ulteriores melhoramentos. O problema, por sua natureza, apresenta várias facetas e permite o uso de diversas técnicas diferentes. Nós temos usado as técnicas da teoria de Morse para funções altura, da teoria de Hodge para variedades com o operador de curvatura não negativo, de holonomia, etc, mas mesmo assim não conseguimos capturar todos os aspectos. Por exemplo, aplicando o teorema da alma, nós temos usado essencialmente o fato da alma ser totalmente geodésica. Provavelmente, melhores resultados poderão ser obtidos usando técnicas que capturem o fato bem mais forte que é a alma ser totalmente convexa.

CAPÍTULO I

IMERSÕES ISOMÉTRICAS E CURVATURA TOTAL ABSOLUTA

§ 1. GENERALIDADES

Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana n -dimensional M^n no espaço euclidiano $(n+p)$ -dimensional, $p \geq 1$. Seja ∇ a conexão riemanniana de M^n e D a de \mathbb{R}^{n+p} . A decomposição ortogonal

$$f^*(T\mathbb{R}^{n+p}) \cong TM \oplus \nu M, \quad \nu M = (TM)^\perp \subseteq f^*(T\mathbb{R}^{n+p})$$

induz projeções

$$\begin{array}{ccc} & P^T & \longrightarrow TM \\ f^*(T\mathbb{R}^{n+p}) & \searrow & \\ & P^\perp & \longrightarrow \nu M \end{array}$$

Indicando com $\mathfrak{X}(M)$ e $\mathfrak{X}(M)^\perp$ respectivamente as secções C^∞ de TM e νM temos, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ as decomposições ortogonais associadas a P^T e P^\perp :

$$1.1.1. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{[F.G.]: } D_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y) \\ \text{[F.W.]: } D_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi \end{array} \right.$$

conhecidas como *fórmulas de Gauss e Weingarten* respectivamente. As fórmulas 1.1.1. fornecem os tensores

$$1.1.2. \quad \begin{cases} \alpha: TM \otimes TM \rightarrow \nu M, \alpha(X,Y) = P^\perp(D_X Y) \\ A: \nu M \otimes TM \rightarrow TM, A_\xi X = -P^T(D_X \xi) \end{cases}$$

chamados respectivamente de 2^a *forma fundamental* e de *operador de Weingarten*, relacionados pela identidade

$$1.1.3. \quad \langle \alpha(X,Y), \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle.$$

Também 1.1.1. define uma conexão em νM chamada *conexão normal*

$$1.1.4. \quad \nabla^\perp: \chi(M) \times \chi(M)^\perp \rightarrow \chi(M)^\perp$$

$$\nabla_X^\perp \xi = P^\perp(D_X \xi).$$

As conexões ∇, ∇^\perp , seus tensores de curvatura R, R^\perp e os tensores α, A são relacionados pelas equações fundamentais, conhecidas como as *equações de Gauss, Codazzi e Ricci*, respectivamente:

$$1.4.5. \quad \begin{cases} [\text{E.G.}]: \langle R(X,Y)Z, W \rangle = \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z) \rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W) \rangle \\ [\text{E.C.}]: (\nabla_X \alpha)(Y,Z) = (\nabla_Y \alpha)(X,Z) \\ [\text{E.R.}]: \langle R^\perp(X,Y)\xi, \eta \rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle \end{cases}$$

onde a derivada covariante da 2^a forma fundamental é definida

por:

$$1.1.6. \quad (\nabla_X \alpha)(Y, Z) = \nabla_X^\perp(\alpha(Y, Z)) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

As equações 1.1.5. governam toda a geometria da imersão f conforme o seguinte teorema fundamental das imersões isométricas:

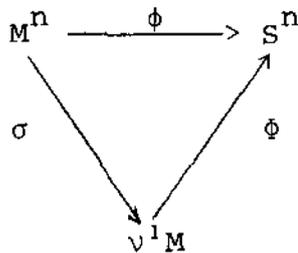
1.1.7. TEOREMA: Seja $E^p \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado vetorial p -dimensional com métrica riemanniana \langle , \rangle e uma conexão ∇^E compatível com esta métrica. Se existe uma secção diferenciável $\alpha: M \longrightarrow \text{Hom}(TM \otimes TM, E)$ do fibrado $\text{Hom}(TM \otimes TM, E)$ com $\alpha(X, Y) = \alpha(Y, X)$ que satisfaz 1.1.5. então existe uma imersão iso métrica *local* $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ tal que $E^p \xrightarrow{\pi} M$ seja iso métrico ao fibrado normal νM e α seja a 2^a forma fundamental de f . Além disso, se M é simplesmente conexa f é globalmente definida.

Indicaremos agora por $\nu^1 M$ o *fibrado normal unitário* de f , isto é, $\nu^1 M = \{(x, \xi) \in \nu M: \|\xi\| = 1\}$. A *aplicação normal de Gauss* é definida por:

$$1.1.8. \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi: \nu^1 M \longrightarrow S^{n+p-1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+p}: \|x\| = 1\} \\ \phi(x, \xi) = \xi. \end{array} \right.$$

1.1.9. OBSERVAÇÃO: No caso $p = 1$ e M conexa, $\nu^1 M$ não é nada mais que o recobrimento duplo de orientação de M . Assim, se M for

orientável, $v^1M \approx M \times \{-1,1\}$, e uma orientação em M é uma escolha de uma componente conexa $M \times \{\varepsilon\} \subseteq v^1M$, $\varepsilon = \pm 1$. A aplicação normal de Gauss restrita a esta componente fornece a usual aplicação normal de Gauss ϕ para hipersuperfícies orientadas.



onde $\sigma(x) = (x, \varepsilon)$.

Dado $(x, \xi) \in v^1M$ temos $T_{(x, \xi)} v^1M \cong \xi^\perp \cong T_\xi S^{n+p-1}$. Além disso $\xi^\perp \cong T_x M \oplus T_\xi(v^1M)$ onde $v^1_x M \cong S^{p-1}$ é a fibra de v^1M sobre x . Com estas identificações temos:

1.1.10. PROPOSIÇÃO: $(d\phi)_{(x, \xi)} = \begin{bmatrix} -A_\xi & * \\ \hline 0 & \delta_{ij} \end{bmatrix}$.

A função $G: v^1M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$1.1.11. G(x, \xi) = \det(d\phi)_{(x, \xi)} = (-1)^n \det A_\xi$$

é chamada a *curvatura de Lipschitz-Killing* de f .

§ 2. FUNÇÕES ALTURA

No estudo das imersões uma classe de funções reais aparece naturalmente e tem um papel bastante importante: as funções altura. Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão e seja $\xi \in S^{n+p-1}$. Definimos função altura na direção ξ como a função $h_\xi: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$1.2.1. h_\xi(x) = \langle f(x), \xi \rangle .$$

h_ξ é portanto a composição de f com a projeção sobre o subespaço $\text{span}\{\xi\} = \{\lambda\xi\} \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$ módulo a identificação $\text{span}\{\xi\} \cong \mathbb{R}$, $\xi \leftrightarrow 1$.

Nós usaremos as funções altura no estudo de propriedades topológico - geométricas da imersão f via a teoria de Morse. De fato, o objetivo da teoria de Morse é relacionar a estrutura do conjunto dos pontos críticos de uma função real $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ com os invariantes topológicos de M . Por outro lado, como veremos adiante, no caso de funções altura a estrutura do conjunto dos pontos críticos é relacionada com os invariantes locais da imersão.

1.2.2. DEFINIÇÃO: Dada uma função diferenciável $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ um

ponto $x \in M$ é crítico de h se $(dh)_x = 0$. Se $x \in M$ é crítico a hessiana de h em x é a forma bilinear simétrica $H_{(h,x)} = H: T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H(X, Y) = (\tilde{X}(\tilde{Y}(h)))(x)$$

onde \tilde{X} e \tilde{Y} são campos de vetores que estendem X e Y numa vizinhança de x . O ponto x é não degenerado se $H_{(h,x)}$ é não singular e o índice de um ponto não degenerado é o número de autovalores negativos da forma linear associada

$$\tilde{H}: T_x M \rightarrow T_x M, \langle \tilde{H}X, Y \rangle = H(X, Y).$$

1.2.3. OBSERVAÇÃO: É fácil ver que todos os conceitos acima são bem definidos, isto é, independentes das escolhas envolvidas.

1.2.4. OBSERVAÇÃO: O índice de um ponto crítico de h é o número de "direções independentes de máximo de h ". Em particular, um mínimo relativo tem índice 0 e um máximo relativo tem índice n .

1.2.5. DEFINIÇÃO: Uma função $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada uma *função de Morse* se todos os seus pontos críticos são não degenerados.

O resultado principal da teoria de Morse pode ser enunciado da seguinte forma (veja [Mil-2]):

1.2.6. TEOREMA: Seja $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse, própria e limitada inferiormente. Então M é homotopicamente equivalente a um complexo celular C.W. com uma célula de dimensão j para cada ponto crítico de índice j de h .

1.2.7. Seja h como em 1.2.6. e denotemos por $c_j(h)$ o número de pontos críticos de índice j de h . Seja F um corpo e $b_j = b_j(M; F)$ o j -ésimo número de Betti de M com coeficientes em F , isto é, $b_j = \dim_F H_j(M; F)$.

De 1.2.6. temos:

$$(a) \quad c_j(h) \geq b_j$$

$$(b) \quad \sum_{j=0}^n (-1)^j c_j(h) = \sum_{j=0}^n (-1)^j b_j = \chi(M) \quad (\text{característica de Euler-Poincaré de } M)$$

$$(c) \quad c_{j-1}(h) = 0 = c_{j+1}(h) \Rightarrow b_j = c_j(h).$$

Sempre como consequência de 1.2.6. temos também (veja [Mil-2]):

$$1.2.8. \quad \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} c_j(h) \geq \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} b_j.$$

1.2.9. TEOREMA: Seja M^n compacta, conexa e $h: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse cujos pontos críticos têm índices 0 ou n . Se $n \geq 2$ então:

(a) h tem somente dois pontos críticos

(b) M^n é homeomorfa a S^n .

DEMONSTRAÇÃO: (a) segue diretamente de 1.2.7.(c) tomando $F = \mathbb{Z}_2$ e para (b) veja [Mil-2] pag. 25.

Seja agora $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica e considere para um vetor $\xi \in S^{n+p-1}$ a função altura $h_\xi: M^n \rightarrow \mathbb{R}$. Temos (veja [Rod]):

1.2.10. TEOREMA :

(a) $x \in M$ é ponto crítico de $h_\xi \iff \xi \in \nu_x M$

(b) $x \in M$ é ponto crítico de $h_\xi \implies H_{(h_\xi, x)}(X, Y) = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle$

(c) h_ξ é de Morse $\iff \xi$ é valor regular da aplicação normal de Gauss $\phi: \nu^1 M \rightarrow S^{n+p-1}$.

§ 3. CURVATURA TOTAL ABSOLUTA E O TEOREMA DE CHERN-LASHOF

Em 1.1.11. temos introduzido a curvatura de Lipschitz - Killing $G: \nu^1 M \rightarrow \mathbb{R}$. Vamos ver agora como ela se relaciona com

a estrutura dos conjuntos dos pontos críticos das funções altura.

1.3.1. DEFINIÇÃO: A *curvatura total absoluta* de uma imersão $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, M^n compacta, é definida por

$$\begin{aligned} \tau(f) &= c^{n+p-1} \int_{v^1 M} |\det d\phi| dv^1 = c^{n+p-1} \int_{v^1 M} |G(x, \xi)| dv^1 = \\ &= c^{n+p-1} \int_M \int_{v_x^1 M} |\det A_\xi| dv_x^1 dM \end{aligned}$$

onde c^{n+p-1} é o inverso do volume da esfera $S^{n+p-1} \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$, dv^1 , dv_x^1 , dM são respectivamente os elementos de volume de $v^1 M$, $v_x^1 M$ e M .

Seja D o conjunto dos valores regulares de $\phi: v^1 M \rightarrow S^{n+p-1}$. Se $\xi \in D$, h_ξ é uma função de Morse, indicaremos com $\mu(\xi)$ o número de seus pontos críticos e com $\mu_k(\xi)$ o número de pontos críticos de índice k .

1.3.2. PROPOSIÇÃO: Com as notações acima

$$\tau(f) = c^{n+p-1} \int_D \mu(\xi) d\sigma$$

onde $d\sigma$ é o elemento de volume de S^{n+p-1} .

DEMONSTRAÇÃO: Veja [Rod].

1.3.3. OBSERVAÇÃO: Pelo teorema de Sard $S^{n+p-1} - D$ tem medida nula, e assim

$$\int_D d\sigma = \int_{S^{n+p-1}} d\sigma = (c^{n+p-1})^{-1}.$$

1.3.4. COROLÁRIO:

(a) $\tau(f) \geq \sum_{k=0}^n b_k(M; F)$

(b) $\tau(f) \geq 2$

(c) se $\tau(f) < 3$ então M^n é homeomorfa a S^n .

DEMONSTRAÇÃO: (a) segue integrando 1.2.7.(a). (b) é óbvia pois M é compacta e portanto $\forall \xi \in D$, h_ξ tem pelo menos dois pontos críticos. (c) segue de 1.2.9. pois se $\tau(f) < 3$ existe pelo menos um $\xi \in D$ tal que $\mu(\xi) = 2$.

A proposição 1.3.2. sugere a introdução do conceito de *k-ésima curvatura total absoluta* de uma imersão $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$:

1.3.5. $\tau_k(f) = c^{n+p-1} \int_D \mu_k(\xi) d\sigma$; $\tau(f) = \sum_{k=0}^n \tau_k(f)$.

Integrando 1.2.7. e 1.2.8. temos

$$1.3.6. (a) \quad \tau_k(f) \geq b_k(M;F)$$

$$(b) \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \tau_k(f) = \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k(M;F) = \chi(M)$$

$$(c) \quad \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \tau_j(f) \geq \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} b_j(M;F).$$

A k -ésima curvatura total absoluta pode ser expressa de uma maneira similar à curvatura total absoluta dada pela definição 1.3.1. Consideremos os conjuntos

$$A = \{(x, \xi) \in v^1M: (x, \xi) \text{ é ponto regular de } \Phi\}, \text{ isto é, } \Phi(A) = D$$

$$A^k = \{(x, \xi) \in A: x \text{ é ponto crítico de índice } k \text{ de } h_\xi\}.$$

É claro que $\bigcup_{k=0}^n A^k = A.$

1.3.7. PROPOSIÇÃO: Com A^k dados como acima

$$\tau_k(f) = c^{n+p-1} \int_{A^k} |\det A_\xi| dv^1.$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma coleção de abertos conexos de v^1M tal que $\bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda$ seja A a menos de um conjunto de medida zero, e tal que $\phi|_{U_\lambda}$ seja injetora para cada $\lambda \in I$. Logo, se $\mu_k(U_\lambda, \xi)$ denota o número de pontos x em M críticos de índice k de h_ξ tal que $(x, \xi) \in U_\lambda$, é claro que $\mu_k(U_\lambda, \xi) = 1$ se e somente se existe $(x, \xi) \in U_\lambda \cap A^k$, isto é, $\xi \in \phi(U_\lambda \cap A^k)$. Temos

$$\begin{aligned} \int_{A^k} |\det A_\xi| dv^1 &= \int_{A^k \cap \left(\bigcup_{\lambda} U_\lambda\right)} |G(x, \xi)| dv^1 = \sum_{\lambda} \int_{A^k \cap U_\lambda} |G(x, \xi)| dv^1 = \\ &= \sum_{\lambda} \int_{\phi(A^k \cap U_\lambda)} 1 d\sigma = \sum_{\lambda} \int_{\phi(A^k \cap U_\lambda)} \mu_k(U_\lambda, \xi) d\sigma. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $U_\lambda \cap A = \bigcup_{j=0}^n (U_\lambda \cap A^j)$, a menos de um conjunto de medida zero,

$$\begin{aligned} \int_D \mu_k(\xi) d\sigma &= \int_{\phi\left(\bigcup_{\lambda} U_\lambda\right)} \mu_k(\xi) d\sigma = \sum_{\lambda} \int_{\phi(U_\lambda)} \mu_k(\xi) d\sigma = \\ &= \sum_{\lambda} \sum_{j=0}^n \int_{\phi(U_\lambda \cap A^j)} \mu_k(\xi) d\sigma. \end{aligned}$$

Como para cada λ , $\mu_k(\xi) = 0$ se $\xi \in \phi(U_\lambda \cap A^j)$, $j \neq k$, e $\mu_k(\xi) = 1$ se $\xi \in \phi(U_\lambda \cap A^k)$, segue

$$\int_D \mu_k(\xi) d\sigma = \sum_\lambda \int_{\phi(U_\lambda \cap A^k)} \mu_k(U_\lambda, \xi) d\sigma.$$

Isto completa a demonstração.

O seguinte teorema descreve as imersões isométricas cuja curvatura total absoluta é a mínima possível. (veja [Ch-L]).

1.3.8. TEOREMA (CHERN-LASHOF): Seja M^n uma variedade compacta, $n \geq 2$ e $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão tal que $\tau(f) = 2$. Então existe um subespaço afim $L \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$ de dimensão $n + 1$ tal que $f(M^n) \subseteq L$, f é um mergulho e $f(M^n)$ é bordo de um corpo convexo em L .

CAPÍTULO II

SUBVARIÉDADES COMPACTAS COM CURVATURA NÃO NEGATIVA E CODIMENSÃO BAIXA

§ 1. O PRIMEIRO ESPAÇO NORMAL

Dada uma imersão isométrica $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ chamaremos de *primeiro espaço normal de f* o subespaço de νM gerado pela imagem da 2ª forma fundamental:

$$\begin{aligned} 2.1.1. \quad N_1M &= \text{span} \{ \alpha(X, Y) : X, Y \in TM \} = \\ &= \{ \xi \in \nu M : A_\xi = 0 \}^\perp. \end{aligned}$$

Se existir um subespaço afim $L^{n+k} \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$ de dimensão $n+k$ tal que $f(M) \subseteq L^{n+k}$ então $\dim N_1M \leq k$. Em geral N_1M não é um subfibrado de νM pois não tem necessariamente dimensão constante. Mesmo no caso em que N_1M é um subfibrado de νM , digamos de dimensão k , não é em geral possível achar um subespaço afim $(n+k)$ -dimensional $L^{n+k} \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$ tal que $f(M) \subseteq L^{n+k}$. Denotemos por $\Gamma(N)$ o conjunto das secções C^∞ de um fibrado N . Erbacher provou em [Er] o seguinte resultado:

2.1.2. TEOREMA: Seja N um subfibrado k -dimensional de νM tal que

$$(a) N \supseteq N_1 M$$

$$(b) \forall \xi \in \Gamma(N) \quad e \quad \forall X \in TM, \quad \nabla_X \xi \in \Gamma(N).$$

Então existe um subespaço afim L^{n+k} tal que $f(M) \subseteq L^{n+k}$.

Muitos teoremas relativos a hipersuperfícies estendem facilmente ao caso no qual o primeiro espaço normal tem dimensão ≤ 1 . Por exemplo, o teorema de Sacksteder para hipersuperfícies compactas com curvatura não negativa, como veremos.

2.1.3. LEMA: Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica de variedade com curvatura de Ricci não negativa e primeiro espaço normal de dimensão ≤ 1 . Então M^n tem curvaturas seccionais não negativas.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x \in M$. Se $\dim(N_1)_x = 0$ nada temos para demonstrar, pois pela equação de Gauss $K \equiv 0$ em x . Se $\dim(N_1)_x = 1$, seja ξ um vetor unitário que gera $(N_1)_x$ e A_ξ o operador de Weingarten associado. Seja agora $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base que diagonaliza A_ξ e $\lambda_i = \langle A_\xi X_i, X_i \rangle$ o autovalor relativo a X_i .

Pela equação de Gauss temos:

$$\text{Ricci}(X_i) = \sum_{j \neq i} \lambda_i \lambda_j, \quad K(X_i, X_j) = \lambda_i \lambda_j.$$

É suficiente mostrar que todos os λ_i 's têm o mesmo sinal. Suponhamos $\lambda_1, \dots, \lambda_s < 0, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n \geq 0$. Se $s = 0$ nada a mostrar. Se $s = 1$, $\text{Ricci}(X_1) = \sum_{j \geq 2} \lambda_1 \lambda_j \geq 0$ implica $\lambda_j = 0, \forall j \geq 2$ e o resultado é obtido. Suponhamos portanto $s \geq 2$. Se

$$\sum_{i \leq s} |\lambda_i| \leq \sum_{j > s} \lambda_j$$

então temos

$$\text{Ricci}(X_1) = - \sum_{2 \leq i \leq s} \lambda_1 |\lambda_i| + \sum_{j > s} \lambda_1 \lambda_j = \lambda_1 \left(\sum_{j > s} \lambda_j - \sum_{2 \leq i \leq s} |\lambda_i| \right) < 0$$

o que contradiz a hipótese. Logo temos:

$$\sum_{i \leq s} |\lambda_i| > \sum_{j > s} \lambda_j.$$

Se um dos λ_j for estritamente positivo, digamos λ_n , teríamos

$$\text{Ricci}(X_n) = \sum_{i \leq s} \lambda_n \lambda_i + \sum_{s < j < n} \lambda_n \lambda_j = \lambda_n \left(\sum_{s < j < n} \lambda_j - \sum_{i \leq s} |\lambda_i| \right) < 0$$

ainda contradizendo a nossa hipótese. Portanto $\lambda_j = 0, j > s$ e todos os autovalores de A_ξ são não positivos.

2.1.4. TEOREMA: Seja $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade $M^n, n \geq 2$, conexa, compacta e curvatura de Ricci não negativa. Então as condições abaixo são equivalentes:

- (a) o primeiro espaço normal tem dimensão ≤ 1 ;
- (b) os operadores de Weingarten A_ξ são semi-definidos $\forall \xi \in \nu M$;
- (c) $\tau(f) = 2$ (e portanto por 1.3.8. $f(M^n)$ está contida em um subespaço afim $(n+1)$ -dimensional L^{n+1} e é bordo de um corpo convexo de L^{n+1}).

DEMONSTRAÇÃO: (a \Rightarrow b): Seja $x \in M^n$. Se $\dim(N_1)_x = 0$ nada temos a demonstrar. Suponhamos $\dim(N_1)_x = 1$ e seja ξ um vetor unitário que gera $(N_1)_x$. Pelo lema 2.1.3. A_ξ é semi-definido. Se $\eta \in \nu_x M$ então

$$\eta = \langle \eta, \xi \rangle \xi + \bar{\eta}$$

com $\bar{\eta} \in (N_1)_x^\perp$. Portanto $A_\eta = \langle \eta, \xi \rangle A_\xi$ e é também semi-definido.

(b \Rightarrow c) Seja $\xi \in S^{n+p-1}$ um valor regular da aplicação normal de Gauss e h_ξ a função altura relativa a ξ . Se x é um ponto crítico de h_ξ , então $(x, \xi) \in \nu^1 M$ e o hessiano de h_ξ em x é a forma bilinear associada a A_ξ , e portanto é definido (positivo ou negativo) pela hipótese. Portanto h tem somente pontos críticos de índice 0 ou n e por 1.2.9. $\mu(\xi) = 2$. Integrando sobre $D \subseteq S^{n+p-1}$ segue $\tau(f) = 2$.

(c \Rightarrow a) imediato.

§ 2. SUBVARIEDADES COMPACTAS COM CURVATURA NÃO NEGATIVA E
 $\text{DIM}(N_1) \leq 2$

Neste parágrafo queremos generalizar alguns resultados que apareceram em [B-M]. Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade conexa e compacta com curvaturas seccionais não negativas. Suponhamos $\text{dim } N_1 \leq 2$ e seja $x \in M$. Pela equação de Gauss, se X e Y são dois vetores tangentes em x , linearmente independentes, temos

$$K(X, Y) = \frac{1}{\|X \wedge Y\|^2} (\langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \|\alpha(X, Y)\|^2).$$

Portanto, se $K(X, Y) \geq 0$ os vetores $\alpha(X, X)$ e $\alpha(Y, Y)$ formam um ângulo menor ou igual a $\pi/2$. Sendo $\text{dim}(N_1)_x \leq 2$ é possível escolher um referencial ortonormal e_1, \dots, e_p em $v_x M$ tal que

$$\alpha(X, X) = a e_1 + b e_2, \quad a, b \geq 0, \quad \forall X \in T_x M.$$

Os operadores A_{e_1} e A_{e_2} são então semi-definidos positivos. O lema a seguir nos permitirá estimar as curvaturas totais absolutas:

2.2.1. LEMA (veja [Ch]): Sejam $A_0, A_{\pi/2}$ operadores simétricos semi-definidos positivos e $A_\theta = \cos \theta A_0 + \sin \theta A_{\pi/2}$. Então

$$|\det A_{\pi-\theta}| \leq |\det A_\theta|, \quad \forall \theta \in [0, \pi/2].$$

2.2.2. TEOREMA: Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, $n \geq 2$, uma imersão isométrica de M^n conexa, compacta com curvaturas seccionais não negativas. Se $\dim(N_1) \leq 2$ então temos:

$$(a) \tau_0(f) + \tau_n(f) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i(f).$$

Além disso, se existir um ponto $x \in M$ tal que $K(X,Y) > 0$, $\forall X, Y \in T_x M$ linearmente independentes, temos

$$(b) \tau_0(f) + \tau_n(f) > \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i(f).$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $A_x^\ell = \{\xi \in v_x^1 M : A_\xi \text{ tem exatamente } \ell \text{ autovalores negativos}\}$. Temos então (cf. pag 12):

$$\tau_\ell = \tau_\ell(f) = \int_M \left(\int_{A_x^\ell} |\det A_\xi| dv_x^1 \right) dM.$$

Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ uma base ortonormal de $v_x M$ tal que $\forall x \in T_x M$, $\langle \alpha(x,x), e_i \rangle = 0$ para $i = 3, \dots, p$ e $\langle \alpha(x,x), e_j \rangle \geq 0$ para $j = 1, 2$. (cf. observações anteriores ao lema 2.2.1.). Considere

$$\bar{A} = \{\xi \in v_x^1 M : \langle \xi, e_1 \rangle \langle \xi, e_2 \rangle \geq 0\}$$

$$\bar{B} = v_x^1 M - \bar{A}.$$

Temos então

$$i) A_X^0 \cup A_X^n \supseteq \bar{A} \quad e \quad A_X^1 \cup \dots \cup A_X^{n-1} \subseteq \bar{B} .$$

Consideremos $\psi: \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ definida por $\psi(\sum_i a_i e_i) = -a_1 e_1 + \sum_{i>1} a_i e_i$. Claramente ψ é uma isometria. Se $\xi \in \bar{A}$ e $a_i = \langle \xi, e_i \rangle$ temos

$$\begin{aligned} |\det A_\xi| &= |\det A_{a_1 e_1 + a_2 e_2}| = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2} \left| \det A_{(a_1 e_1 + a_2 e_2) (a_1^2 + a_2^2)^{-1/2}} \right| \geq \\ &\geq (a_1^2 + a_2^2)^{1/2} \left| \det A_{(-a_1 e_1 + a_2 e_2) (a_1^2 + a_2^2)^{-1/2}} \right| = \left| \det A_{\psi(\xi)} \right| . \end{aligned}$$

Portanto temos

$$\begin{aligned} ii) \tau_0 + \tau_n &= \int_M \int_{A_X^0 \cup A_X^n} |\det A_\xi| dv_X^1 dM \geq \int_M \int_{\bar{A}} |\det A_\xi| dv_X^1 dM \geq \\ &\geq \int_M \int_{\psi(\bar{A})} |\det A_{\psi(\xi)}| dv_X^1 dM = \int_M \int_{\bar{B}} |\det A_\xi| dv_X^1 dM \geq \\ &\geq \int_M \int_{A_X^1 \cup \dots \cup A_X^{n-1}} |\det A_\xi| dv_X^1 dM = \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i . \end{aligned}$$

A parte (a) do nosso teorema está provada. No caso em que existe $x \in M$ tal que $K(X, Y) > 0, \forall X, Y \in T_x M$ linearmente independentes,

observamos que as inclusões (i) são estritas e também existe $\xi \in A_X^0 \cup A_X^n - \bar{A}$ tal que A_ξ é não singular. Portanto a primeira de igualdade de (ii) é estrita e podemos concluir

$$\tau_0 + \tau_n > \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i.$$

2.2.3. COROLÁRIO: Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, $n \geq 2$, uma imersão isométrica de M^n conexa, compacta com curvaturas seccionais não negativas. Suponhamos $\dim(N_1) \leq 2$, F um corpo tal que M seja orientável sobre F e $b_i = b_i(M; F)$ o i -ésimo número de Betti de M com coeficientes em F . Então

$$(a) \quad 2 = b_0 + b_n \geq \sum_{k=1}^{n-1} b_k - \sum_{k=2}^{n-2} (b_k - c_k) \geq \sum_{k=1}^{n-1} b_k.$$

Além disso, se existir um ponto $x \in M$ tal que $K(X, Y) > 0$, $\forall X, Y \in T_x M$ linearmente independentes, então

$$(b) \quad 2 = b_0 + b_n > \sum_{k=1}^{n-1} b_k - \sum_{k=2}^{n-2} (b_k - c_k) \geq \sum_{k=1}^{n-1} b_k.$$

DEMONSTRAÇÃO: De 1.3.6.(c) temos $b_1 - b_0 \leq \tau_1 - \tau_0$ e portanto $b_1 \leq \tau_1 - \tau_0 + b_0$. Pela orientabilidade de M sobre F temos $b_0 = b_n$ e $b_1 = b_{n-1}$. Além disso temos $\tau_j = \tau_{n-j}$ pois $\mu_j(\xi) = \mu_{n-j}(-\xi)$. Logo $b_{n-1} \leq \tau_{n-1} - \tau_n + b_n$. Temos então

$$b_1 + b_{n-1} + \sum_{k=2}^{n-2} \tau_k \leq (\tau_1 - \tau_0) + b_0 + (\tau_{n-1} - \tau_n) + b_n + \sum_{k=2}^{n-2} \tau_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k - (\tau_0 + \tau_n) + (b_0 + b_n) \leq b_0 + b_n$$

onde a última desigualdade segue de 2.2.2. (a). Isso prova a parte (a) e a parte (b) segue usando 2.2.2. (b) na última desigualdade.

2.2.4. COROLÁRIO: Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, $n \geq 2$, uma imersão isométrica de M^n conexa, compacta com curvaturas seccionais não negativas e $\dim(N_1) \leq 2$. Se M^n for não orientável então, ou $n = 2$ e M^n é homeomorfa a $\mathbb{R}P^2$ ou $\forall x \in M$ existem $X, Y \in T_x M$ linearmente independentes de modo que $K(X, Y) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Podemos aplicar 2.2.3. (b) com $F = \mathbb{Z}_2$.

Observamos que a não orientabilidade de M implica $b_1(M; \mathbb{Z}_2) \geq 1$ e por outro lado todas as variedades são orientáveis sobre \mathbb{Z}_2 .

Consideramos agora o operador de curvatura $\rho: \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$ dado por

$$2.2.5. \quad \langle \rho(X \wedge Y), Z \wedge W \rangle = \langle R(X, Y)W, Z \rangle.$$

ρ é um operador simétrico e aplicando um resultado de Weinstein (ve

ja [We]) é imediato verificar que se $\dim(N_1) \leq 2$ a positividade de ρ é equivalente à positividade das curvaturas seccionais. Podemos aplicar o teorema de Gallot-Meyer (veja [G-M]) para concluirmos o seguinte:

2.2.6. TEOREMA: Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica, $n \geq 2$, de M^n compacta, simplesmente conexa, com curvatura não negativa e $\dim(N_1) \leq 2$. Então M^n é produto riemanniano de subvariedades M^{n_i} dos seguintes tipos:

$$(GM 1) \quad H^*(M^{n_i}; \mathbb{R}) \cong H^*(S^{n_i}; \mathbb{R}) \quad e \quad H(M^{n_i}) \cong SO(n_i)$$

$$(GM 2) \quad H^*(M^{n_i}; \mathbb{R}) \cong H^*(\mathbb{C}P^{n_i/2}; \mathbb{R}) \quad e \quad H(M^{n_i}) \cong U(n_i/2)$$

(GM 3) M^{n_i} é espaço simétrico do tipo compacto

onde $H(M^{n_i})$ denota o grupo de holonomia de M^{n_i} . Além disso, se existir um ponto $x \in M$ tal que $K(X, Y) > 0$ para $\forall X, Y \in T_x M$ linearmente independentes então M é do tipo (GM 1).

§ 3. O GRUPO FUNDAMENTAL

Neste parágrafo continuaremos o estudo das propriedades topológicas das variedades compactas, conexas e orientáveis imersas em

espaço euclidiano com $\dim(N_1) \leq 2$ e curvaturas seccionais não negativas.

2.3.1. TEOREMA: Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica nas hipóteses acima. Então $\pi_1(M)$ é grupo cíclico. Além disso:

(a) se $n > 2$ e existir um ponto $x \in M$ tal que $K(X,Y) > 0, \forall X,Y \in T_x M$ linearmente independentes então $\pi_1 M = 0$.

(b) se $n > 3$ e $\pi_1(M) \neq 0$ então $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$.

DEMONSTRAÇÃO:

AFIRMAÇÃO 1: Se, para algum corpo $F, b_1(M,F) \neq 0$ então $\pi_1(M)$ é cíclico. Se $n \neq 3$ então $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$.

De fato, de 1.3.6.(c) temos $\tau_1 - \tau_0 \geq b_1 - b_0 \geq 0$, e $\tau_{n-1} - \tau_n \geq b_{n-1} - b_n \geq 0$ por dualidade. Por outro lado, por 2.2.2.(a) temos

$$\tau_0 + \tau_n \geq \tau_1 + \tau_{n-1} + \sum_{i=2}^{n-2} \tau_i.$$

Portanto

$$\tau_0 = \tau_1 = \tau_n = \tau_{n-1} \text{ e } \tau_i = 0, 2 \leq i \leq n-2.$$

Também temos para $\xi \in D \subseteq S^{n+p-1}$ as desigualdades $\mu_1(\xi) - \mu_0(\xi) \geq 0$

e $\mu_{n-1}(\xi) - \mu_n(\xi) \geq 0$. Portanto $\tau_0 - \tau_1 = 0$ implica $\int_D (\mu_1(\xi) - \mu_0(\xi)) d\sigma = 0$

e logo $\mu_1(\xi) = \mu_0(\xi)$ para quase todos $\xi \in D$. Analogamente

$$\mu_0(\xi) = \mu_1(\xi) = \mu_{n-1}(\xi) = \mu_n(\xi) \quad \text{e} \quad \mu_i(\xi) = 0 \quad 2 \leq i \leq n-2$$

para quase todos $\xi \in D$.

Usando os teoremas de cancelamento (veja [Mil-1], theorem 8.1.) podemos modificar uma função h_ξ , com ξ como acima, perto de seus pontos críticos de maneira a obter uma função de Morse $\phi: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ com somente quatro pontos críticos de índices respectivamente $0, 1, n-1, n$. Pelo teorema 1.2.6. M^n tem o tipo de homotopia de um complexo celular M^* cujo esqueleto 1-dimensional é um círculo. A inclusão do esqueleto 1-dimensional $i: S^1 \rightarrow M^*$ induz, pelo teorema da aproximação celular, um epimorfismo $i_\# : \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(M^*)$. Portanto $\pi_1(M^*) \cong \mathbb{Z}/\ker i_\#$ é cíclico, o que prova a primeira parte da afirmação. Agora, se $n > 3$ o esqueleto 2-dimensional de M^* coincide com o esqueleto 1-dimensional pois M^* não contém células 2-dimensionais ($c_2(\phi) = 0$). Portanto, ainda pelo teorema de aproximação celular, $i_\#$ é um isomorfismo o que prova a segunda parte da afirmação.

Agora, por um teorema de Cheeger-Gromoll (cf. [Ch-G] Theorem 9.3.), se M é completa com curvaturas seccionais não negativas então $\pi = \pi_1(M)$ contém um subgrupo normal finito Φ tal que $\pi^* = \pi/\Phi$ con

têm um subgrupo normal abeliano livre $\Gamma^r \cong \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ (r - vezes) de índice finito.

AFIRMAÇÃO 2: $r = 0$ ou 1 .

Consideramos o seguinte diagrama comutativo com linhas e colunas exatas ($\psi = \pi^*/\Gamma^r$):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & \phi & \rightarrow & T & \rightarrow & \Gamma^r & \rightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow i & & \\
 0 & \rightarrow & \phi & \rightarrow & \pi & \xrightarrow{p} & \pi^* & \rightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow q & & \\
 & & & & \psi & & \psi & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

onde $T = \ker(q \circ p) = p^{-1}(i(\Gamma^r))$. Consideremos o recobrimento riemanniano $t: M_{[T]} \rightarrow M$ tal que $\pi_1(M_{[T]}) \cong T$. Então $M_{[T]}$ é compacta pois T tem índice finito em π , e claramente é orientável. Além disso $\phi \supseteq [T, T]$ pois $T/\phi \cong \Gamma^r$ é abeliano. Temos então:

$$H_1(M_{[T]}; \mathbb{Z}) \cong T/[T, T] \supseteq T/\Phi \cong \Gamma^r.$$

Consideremos agora a imersão isométrica $f \circ t: M_{[T]} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$. Esta imersão, de acordo com as considerações acima, está nas hipóteses do corolário 2.2.3. e portanto $2 \geq \sum_{i=1}^{n-1} b_i(M_{[T]}; \mathbb{F})$. Mas $b_1(M_{[T]}; \mathbb{R}) \geq r$ o que implica $r = 0$ ou 1 .

AFIRMAÇÃO 3: Se $r = 1$ então $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$.

Primeiramente observamos que $H_1(M_{[T]}; \mathbb{Z})$ contém um grupo cíclico livre abeliano $\Gamma^1 \cong \mathbb{Z}$. Pela afirmação 1, $\pi_1(M_{[T]}) \cong T$ é cíclico (pois $b_1(M_{[T]}; \mathbb{R}) \geq 1$). Por outro lado, $T \cong T/[T, T] \cong H_1(M_{[T]}; \mathbb{Z})$ contém um grupo livre abeliano e não pode ser finito. Portanto, sendo T infinito cíclico abeliano, $T \cong \mathbb{Z}$.

Seja agora $\xi \in D \subseteq S^{n+p-1}$ e consideremos $h_\xi: M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\tilde{h}_\xi: M_{[T]} \longrightarrow \mathbb{R}$ as funções altura na direção ξ relativas a M e $M_{[T]}$ respectivamente. Claramente $\tilde{h}_\xi = h_\xi \circ t$ e logo y é ponto crítico de índice k de \tilde{h}_ξ se e somente se $t(y)$ é crítico de índice k de h_ξ . Usando o argumento da afirmação 1, \tilde{h}_ξ tem o mesmo número de pontos críticos de índices $0, 1, n-1, n$ e não tem pontos críticos de índices $i, 2 \leq i \leq n-2$. Portanto, pela observação acima, o mesmo ocorre para h_ξ . Assim segue ainda do argumento da afirmação 1 que $\pi_1(M)$ é cíclico. Por outro lado

$$\pi_1(M) \supseteq t_* (\pi_1(M_{[T]})) \cong \pi_1(M_{[T]}) \cong \mathbb{Z}$$

portanto $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$.

AFIRMAÇÃO 4: Se $r = 0$ então $\pi_1(M) = 0$ quando $n > 3$ e $\pi_1(M)$ é cíclico finito quando $n = 3$ (eventualmente nulo).

Neste caso $T \cong \Phi$ é finito. Suponha $\pi_1(M) \neq \{0\}$. Existe então um número primo $p > 1$ e um elemento $a \in \pi_1(M)$ de período p . Seja $[a] \cong \mathbb{Z}_p$ o subespaço cíclico gerado por a , e $t: M_{[a]} \rightarrow M$ o recobrimento riemanniano tal que $\pi_1(M_{[a]}) \cong [a]$. Claramente $M_{[a]}$ satisfaz as mesmas hipóteses de M . Temos portanto $b_1(M_{[a]}; \mathbb{Z}_p) = 1$ e o argumento da afirmação 1 aplicado à imersão $M_{[a]} \xrightarrow{t} M \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{n+p}$ implica que para quase todos ξ , a função altura $\tilde{h}_\xi: M_{[a]} \rightarrow \mathbb{R}$ tem o mesmo número de pontos críticos de índices $0, 1, n-1, n$ e nenhum de índices $i, 2 \leq i \leq n-2$. Agora, o argumento da afirmação 3 implica que para quase todos ξ , $h_\xi: M \rightarrow \mathbb{R}$ tem também a mesma propriedade. Isso nos permite concluir que $\pi_1(M)$ seja cíclico pelo argumento da afirmação 1. Como $r = 0$ temos $\pi_1(M)$ finito e portanto $\pi_1(M)$ é cíclico finito se não for nulo. Suponha agora $n > 3$. Se $\pi_1(M) \neq \{0\}$ então $b_1(M; \mathbb{Z}_p) \geq 1$ para algum primo p , e pela afirmação 1 segue que $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$ o que contradiz a finitude de $\pi_1(M)$. Portanto, se $n > 3$, $\pi_1(M) = 0$.

AFIRMAÇÃO 5: Se existir $x \in M$ tal que $K(X, Y) > 0, \forall X, Y \in T_x M$ linearmente independentes então $\pi_1(M) = 0$ ($n > 2$).

De fato, temos visto que se $\pi_1(M) \neq \{0\}$ então $\pi_1(M)$ é cíclico. Em particular, existe um primo p tal que $b_1(M; \mathbb{Z}_p) \neq 0 \neq b_{n-1}(M; \mathbb{Z}_p)$. Sendo $n > 2$ temos $n-1 \neq 1$ e portanto $\sum_{i=1}^{n-1} b_i(M; \mathbb{Z}_p) \geq 2$ o que contradiz 2.2.3. (b).

2.3.2. COROLÁRIO: Seja M^n nas hipóteses do teorema 2.3.1. Temos:

(a) se $\pi_1(M^n) \cong \mathbb{Z}$ então M é difeomorfa a $M^{n-1} \times S^1$ onde M^{n-1} é uma esfera de homotopia.

(b) se existir $x \in M^n$ tal que $K(X, Y) > 0, \forall X, Y \in T_x M$ linearmente independentes então M^n é homeomorfa a S^n .

DEMONSTRAÇÃO: (a) O fato que M é difeomorfa a $M^{n-1} \times S^1$ segue diretamente do teorema 9.2. de [Ch-G]. O fato que M^{n-1} é uma esfera de homotopia segue do fato que M^{n-1} é simplesmente conexa (ainda pelo mesmo teorema) e $\sum_{i=1}^{n-1} b_i(M) \leq 2$.

(b) Pelo teorema 2.2.6. a característica de Euler - Poincaré de M é par. Portanto por 2.2.3.(b), para qualquer corpo $F, \sum_{i=1}^{n-1} b_i(M; F) = 0$ o que implica $H_*(M; \mathbb{Z}) \cong H_*(S^n; \mathbb{Z})$. Como M é simplesmente conexa pelo teorema 2.3.1.(a), o teorema de Hurewicz garante que o homomorfismo de Hurewicz $\phi_n: \pi_n(M) \rightarrow H_n(M)$, definido por $\phi_n([\alpha]) = \alpha_*(i_n)$ onde i_n é um gerador de $H_n(S^n, \mathbb{Z})$, é um isomorfismo. Então, obviamente

$\alpha: S^n \rightarrow M^n, [\alpha] = 1 \in \pi_n(M^n)$ induz isomorfismo na homologia inteira e portanto, pelo teorema de Whitehead (usando a conexão simples de M), α é uma equivalência de homotopia. Se $n \geq 4$, pela conjectura generalizada de Poincaré, M^n é homeomorfa a S^n .

Seja então $n = 3$. Se $\xi \in D \subseteq S^{n+p-1}$ é um valor regular da aplicação normal de Gauss, temos por 1.2.8. $\mu_0 - \mu_1 \leq b_0 - b_1 = 1$. Por outro lado, se tivéssemos $\mu_0 - \mu_1 \leq 0$ para qualquer $\xi \in D$, teríamos $\tau_0 - \tau_1 \leq 0$ e logo $\tau_3 - \tau_2 \leq 0$, o que contradiz 2.2.2.(b). Existe portanto $\xi \in D$ tal que $\mu_0(\xi) - \mu_1(\xi) = 1$. Logo $\mu_2(\xi) - \mu_3(\xi) = \chi(M) - (\mu_0(\xi) - \mu_1(\xi)) = -1$. Usando o teorema de cancelamento ([Mil-1], theorem 8.1.) para h_ξ construímos uma função $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ com apenas dois pontos críticos o que nos garante que M^3 é homeomorfa a S^3 .

§ 4. SUBVARIETADES NÃO ORIENTÁVEIS

Seja $M^n, n \geq 3$, uma variedade riemanniana conexa, compacta com curvaturas seccionais não negativas e $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica com $\dim(N_1) \leq 2$ em todos os pontos. Suponhamos M^n não orientável e consideremos o primeiro grupo de homologia inteira de M^n

$$H_1(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{p_1}^{r_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k}^{r_k}$$

soma de um grupo livre de posto s e de um subgrupo de torção. Usan

do o teorema de coeficientes universais temos

$$H_1(M; Z_2) \cong H_1(M; Z) \otimes Z_2$$

pois $H_0(M; Z)$ é livre de torção. Além disso

$$H_1(M; Z_2) \cong H^1(M; Z_2) \neq 0$$

pois M é não orientável e portanto a primeira classe de Stiefel - Whitney $w_1(M) \in H^1(M; Z_2)$ é não nula.

2.4.1. LEMA: Se $n > 3$ então $H_1(M; Z)$ não tem 2-torção.

DEMONSTRAÇÃO: Lembramos que a torção de $H_1(M; Z)$ é isomorfa à torção de $H^2(M; Z)$. Portanto, se $H_1(M; Z)$ tem 2-torção, $H^2(M; Z)$ também tem. Neste caso, pelo teorema dos coeficientes universais $H^2(M; Z_2) \neq 0$ e portanto $H_2(M; Z_2) \cong H^2(M; Z_2) \neq 0$. Se $n > 3$ então $2 \neq n-1$ e portanto

$$b_1(M; Z_2) + b_2(M; Z_2) + b_{n-1}(M; Z_2) \geq 3$$

o que contradiz 2.2.3. (Obviamente todas as variedades são orientáveis sobre Z_2 !).

2.4.2. COROLÁRIO: $s = \text{posto}(H_1(M;Z)) \neq 0, n > 3.$

DEMONSTRAÇÃO: De fato, $H_1(M;Z)$ não tem 2-torção e portanto

$$0 \neq b_1(M;Z_2) = s = \text{posto}(H_1(M;Z)).$$

Vamos considerar o recobrimento duplo de orientação de M , $\theta: \bar{M} \rightarrow M$ com a métrica de recobrimento. Pelo corolário anterior segue que $\pi_1(\bar{M}) \neq 0$ e portanto $\pi_1(\bar{M}) \cong Z$ pelo teorema 2.3.1. A aplicação $\theta_{\#}: \pi_1(\bar{M}) \rightarrow \pi_1(M)$ é injetora e $\theta_{\#}(\pi_1(\bar{M}))$ tem índice 2 em $\pi_1(M)$ (em particular, é normal em $\pi_1(M)$). Existe portanto uma sequência exata:

$$0 \rightarrow Z \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow Z_2 \rightarrow 0.$$

2.4.3. PROPOSIÇÃO: $\pi_1(M) \cong Z$ e $\theta_{\#}: \pi_1(\bar{M}) \rightarrow \pi_1(M)$ é multiplicação por ± 2 .

DEMONSTRAÇÃO:

AFIRMAÇÃO 1: Seja G um grupo que admite um subgrupo cíclico infinito de índice 2. Então G é isomorfo a Z ou ao produto semi-direto $Z \rtimes_{\phi} Z_2$ onde $\phi: Z_2 \rightarrow \text{Aut}(Z) \cong Z_2$ é um homomorfismo.

A demonstraçãõ da afirmaçãõ acima pode ser feita atravẽs do cãlculo dos grupos de cohomologia $H^2(Z_2; Z)$ que classificam as ex tensões de Z por Z_2 . De fato, $H^2(Z_2; Z) \cong Z_2$ ou $H^2(Z_2; Z) = \{0\}$ de pendendo se a açãõ de Z_2 sobre Z ẽ trivial ou nãõ. Podemos tambẽm usar um argumento direto como vamos fazer agora.

Se G for abeliano, um simples argumento usando o teorema de estrutura (claramente G ẽ finitamente gerado) mostra que $G \cong Z$ ou $G \cong Z \times Z_2$. Se G nãõ for abeliano, G ẽ gerado por dois elementos a, b tais que a gera um grupo cıclico infinito (o subgrupo isomor fo a Z) e b tem imagem nãõ nula em Z_2 . Segue entãõ que existem $s, t \in Z$ tais que

$$\text{i) } b^2 = a^s \qquad \text{ii) } b a b^{-1} = a^t.$$

De ii) temos

$$b^2 a b^{-2} = b a^t b^{-1} = (b a b^{-1})^t$$

e portanto

$$a = a^{t^2}$$

o que implica $t = \pm 1$. Como G ẽ nãõ abeliano temos $t = -1$. Tambẽm

$$a^s = b^2 = b b^2 b^{-1} = b a^s b^{-1} = (b a b^{-1})^s = a^{st} = a^{-s}$$

e portanto $s = 0$.

A esta altura fica claro que G é isomorfa ao grupo diedral generalizado $Z \rtimes_{\phi_1} Z_2$ onde $\phi_1: Z_2 \rightarrow \text{Aut}(Z) \cong Z_2$ é a identidade.

AFIRMAÇÃO 2: O subgrupo dos comutadores de $G = Z \rtimes_{\phi_1} Z_2$ é $\{(2m, 0) : m \in Z\}$ e $G/[G, G] \cong Z_2 \times Z_2$.

De fato, a estrutura de grupo em $Z \rtimes_{\phi_1} Z_2$ é, por definição,

$$(m, a) \cdot (n, b) = (m + \phi_1(a)(n), a + b)$$

e $\phi_1(a)(n) = n$ se $a = 0$, $\phi_1(a)(n) = -n$ se $a = 1$ ($Z_2 = \{0, 1\}$).

Logo temos

$$(m, 0)^{-1} = (-m, 0) \quad \text{e} \quad (m, 1)^{-1} = (m, 1)$$

e portanto o subgrupo dos comutadores é gerado por

$$[(m, 0), (n, 0)] = (m, 0) \cdot (n, 0) \cdot (m, 0)^{-1} \cdot (n, 0)^{-1} = (0, 0)$$

$$[(m, 0), (n, 1)] = (2m, 0)$$

$$[(m, 1), (n, 0)] = (-2n, 0)$$

$$[(m, 1), (n, 1)] = (2(m-n), 0).$$

Portanto temos $[G,G] = \{(2m,0) : m \in \mathbb{Z}\}$. Para a segunda parte da afirmação observamos que $G/[G,G]$ é um grupo abeliano de ordem 4 e as classes laterais de $(1,0)$ e $(0,1)$ têm período 2 em $G/[G,G]$ e portanto $G/[G,G] \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

CONCLUSÃO: A esta altura basta observar que se $\pi_1(M) \neq \mathbb{Z}$ então $H_1(M; \mathbb{Z})$ teria 2-torção o que contradiz o lema 2.4.1.

2.4.4. TEOREMA: Seja M^n uma variedade riemanniana conexa, compacta com curvaturas seccionais não negativas e $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica com $\dim(N_1) \leq 2$ em todos os pontos. Então, se M^n é não orientável e $n \geq 4$ M^n é uma garrafa de Klein generalizada (isto é, o fibrado não orientável sobre S^1 com fibra homotopicamente equivalente a S^{n-1}). Além disso a métrica é localmente produto.

DEMONSTRAÇÃO: Seja \bar{M} o recobrimento duplo de orientação de M com a métrica de recobrimento e $\theta: \bar{M} \rightarrow M$ a projeção de recobrimento. Então $f \circ \theta: \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ é uma imersão isométrica nas hipóteses do corolário 2.3.2. (a) e portanto \bar{M} é difeomorfa a $S^1 \times M'$ onde M' é uma esfera de homotopia. Aliás, a métrica é localmente um produto o que já prova a última afirmação.

AFIRMAÇÃO 1: M é uma fibração sobre S^1 com fibra conexa.

De fato, consideramos em $S^1 \times M'$ um campo \bar{X} de norma unitária, tangen

te em cada ponto ao fator S^1 . Sendo a métrica localmente um produto \bar{X} é campo paralelo, e se \bar{Y} é outro campo paralelo em \bar{M} temos $\bar{Y} = c \bar{X}$, pois $H^1(\bar{M}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ é gerado pela forma (paralela) dual de \bar{X} . Seja $\tau: \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ a transformação de recobrimento não trivial e definimos um campo X em M como a média das projeções de \bar{X} , isto é, se $\theta(x) = p$ definimos

$$X_p = \frac{1}{2} \{ (d\theta)_x \bar{X}_x + (d\theta)_{\tau(x)} \bar{X}_{\tau(x)} \}.$$

Claramente X_p é um campo bem definido e paralelo. Sendo X paralelo, ou $X_p \equiv 0$ ou $X_p \neq 0, \forall p \in M$. Suponhamos $X_p = 0, \forall p \in M$. Neste caso o campo \bar{X} projeta-se em um campo de linhas em M , pois $(d\theta)_x \bar{X}_x = -(d\theta)_{\tau(x)} \bar{X}_{\tau(x)} \neq 0$. As curvas integrais de um tal campo de linhas são projeções das curvas integrais de \bar{X} . Mais precisamente, seja $\theta^{-1}(p) = \{x, \tau(x)\}$ e considere γ e σ curvas integrais de \bar{X} com pontos iniciais $x, \tau(x)$ respectivamente. Se $\gamma \neq \sigma$ temos que $\theta \circ \gamma$ e $\theta \circ \sigma$ representam a mesma curva fechada em M com orientações opostas. Mas então temos $[\theta \circ \gamma] + [\theta \circ \sigma] = 0$ em $\pi_1(M)$, com $[\gamma] + [\sigma] \neq 0$ em $\pi_1(\bar{M})$ (de fato, σ e γ representam o mesmo gerador de $\pi_1(\bar{M})$). Por outro lado, se $\gamma = \sigma$, como θ é um recobrimento duplo projetando γ sobre $\theta(\gamma)$, temos que cada ponto da imagem $\theta(\gamma)$ é recoberto duas vezes com orientações opostas. Portanto ainda temos $\theta_{\#} [\gamma] = 0$ com $[\gamma] \neq 0$. Em ambos os casos as conclusões contradizem a injetividade de $\theta_{\#}$.

Portanto X é um campo paralelo não nulo em M e o pull-back $(\theta^* X^*)^*$ define um campo paralelo em $S^1 \times M'$ que coincide portan

to com \bar{X} a menos de um múltiplo. A distribuição X^\perp é integrável porque X é paralelo, e as folhas da distribuição são as imagens por θ das folhas da distribuição \bar{X}^\perp em $S^1 \times M'$, sendo portanto conexas e compactas. Agora podemos aplicar um resultado de Bourguignon - Mazet (cf.[Bo-Ma]) que garante a existência de uma fibração riemanniana $M \rightarrow S^1$ possuindo como fibras as variedades integrais de X^\perp .

AFIRMAÇÃO 3: As fibras da fibração $M \rightarrow S^1$ são esferas de homotopia.

Seja F a fibra da fibração acima. Temos $\pi_0(F) = 0$ pois F é conexa. Consideremos a sequência exata de homotopia

$$\pi_{j+1}(S^1) \rightarrow \pi_j(F) \xrightarrow{i_\#} \pi_j(M) \rightarrow \pi_j(S^1) \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 = \pi_0(F).$$

Se $j = 1$ segue que $\pi_1(F) = 0$.

Se $j > 1$, como $\pi_j(S^1) = 0$ segue que $i_\#$ é um isomorfismo e portanto $\pi_j(F) \cong \pi_j(M) \cong \pi_j(\bar{M}) \cong \pi_j(M')$ o que conclui a demonstração.

§ 5. SUBVARIETADES SIMPLEMENTE CONEXAS

No § 3. estudamos um caso de imersão de variedade simplesmente conexa, mais precisamente quando existe um ponto x em que as

curvaturas seccionais são estritamente positivas. Neste parágrafo vamos considerar o caso geral $K \geq 0$, generalizando alguns resultados de [B-M].

Primeiramente vamos fazer uma análise da álgebra de holonomia de M^n e veremos que o teorema de Bishop (cf [Bi]) se generaliza no caso que vamos considerar.

Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, $n \geq 3$, uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa. Se $x \in M$ e $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ é um referencial ortonormal do espaço normal $\nu_x M$ denotemos por A_i , $i = 1, \dots, p$ os operadores de Weingarten relativos a e_i , $i = 1, \dots, p$. A equação de Gauss (cf. 1.1.5.) permite expressar o operador de curvatura em x (cf. 2.2.5.) como:

$$2.5.1. \quad \rho_x(X \wedge Y) = \sum_{i=1}^p A_i X \wedge A_i Y.$$

2.5.2. DEFINIÇÃO: O espaço de curvatura relativa de f em x é o subespaço de $T_x M$

$$k(x) = I_m(A_1) + \dots + I_m(A_p)$$

onde $\forall i$, $i = 1, \dots, p$, $I_m(A_i)$ é $(\ker(A_i))^\perp$, isto é, o subespaço gerado pelos autovetores de autovalores não nulos de A_i .

De 2.5.1. segue imediatamente que

$$2.5.3. \quad \rho_x(\Lambda_x^2 M) \subseteq \Lambda^2 k(x).$$

Lembramos que $\Lambda_x^2 M$ é uma álgebra isomorfa à álgebra ortogonal das transformações lineares anti-simétricas de $T_x M$ através da identificação de uma 2-forma $X \wedge Y$ com a transformação

$$(X \wedge Y) Z = \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X.$$

Além disso, $\Lambda_x^2 M$ tem uma estrutura de álgebra de Lie natural induzida pelo produto interno de $T_x M$:

$$\begin{aligned} [X \wedge Y, Z \wedge W] &= \langle X, Z \rangle Y \wedge W + \langle Y, W \rangle X \wedge Z - \\ &- \langle X, W \rangle Y \wedge Z - \langle Y, Z \rangle X \wedge W. \end{aligned}$$

2.5.4. DEFINIÇÃO: Dada uma variedade riemanniana M o grupo de *holonomia em x* é o grupo de Lie constituído de transportes paralelos de $T_x M$ ao longo dos laços com ponto base x . A sua álgebra de Lie, denotada por h_x , é a *álgebra de holonomia em x* . Se M é conexa $h_x \cong h_y, \forall x, y \in M$.

Pelo teorema de Ambrose-Singer, h_x é gerada pelos transportes paralelos de todos os operadores de curvatura de M para o pon

to x . Em particular, se r_x é a álgebra gerada por ρ_x (mais precisamente, pela imagem de ρ_x) temos r_x como uma subálgebra de h_x e 2.5.3. implica obviamente que $r_x \subseteq \Lambda^2 k(x)$.

2.5.5. TEOREMA: Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, compacta tal que $\dim(N_1) \leq 2$. Então, se $n \neq 4$, a álgebra de holonomia h_x num ponto x é uma das seguintes:

(a) $h_x = 0(n)$

(b) $h_x = 0(k) \times 0(n-k)$, $k \neq 0$.

Se $n = 4$, a álgebra unitária $U(2)$ de uma estrutura complexa sobre $T_x M$ é também uma possibilidade.

DEMONSTRAÇÃO: Como M é compacta existe um ponto $x \in M$ tal que $\alpha(X, X) \neq 0$, $\forall X \in T_x M$, $X \neq 0$. Basta tomar x tal que a distância de $f(x)$ a uma origem fixada de \mathbb{R}^{n+p} seja a máxima possível. Nesse ponto $k(x)$ é obviamente $T_x M$ e portanto $r_x \subseteq \Lambda^2_x M$. Se $\dim(N_1)_x = 1$ tomemos um vetor unitário v que gera $(N_1)_x$ e temos A_v definido, o que implica ρ_x sobrejetor e portanto r_x é todo $\Lambda^2_x M$.

Suponhamos $\dim(N_1)_x = 2$. Existe um vetor $v \in (N_1)_x$ tal que x seja ponto crítico de índice 0 ou n da função altura h_v . Consideremos então um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_p\}$ de $v_x M$ tal que

$e_1 = v/||v||$ e $\text{span}\{e_1, e_2\} = (N_1)_x$. Por outro lado, uma transformação ortogonal de $v_x M$ que fixa $e_j, j > 1$ e leva e_1 para $-e_1$ torna x um ponto crítico de índice n ou 0 de A_{-e_1} conforme A_{e_1} seja positivo ou negativo definido. Então podemos escolher um referencial ortonormal de $v_x M$, denotado novamente por $\{e_1, \dots, e_p\}$, de modo que A_{e_1} seja singular e $\text{span}\{e_1, e_2\} = (N_1)_x$. Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base ortonormal de $T_x M$ de autovetores de $A_1 = A_{e_1}$ tal que $\text{span}\{X_1, \dots, X_k\} = I_m(A_1) = V$ e

$$\text{span}\{X_{k+1}, \dots, X_n\} = \ker(A_1) = W = V^\perp \neq 0.$$

AFIRMAÇÃO 1: $W \subseteq I_m(A_2)$.

De fato, temos que $\forall X_i, i > k$,

$$0 \neq \alpha(X_i, X_i) = \sum_{j=1}^2 \langle \alpha(X_i, X_i), e_j \rangle e_j = \langle A_2(X_i), X_i \rangle e_2.$$

Logo $A_2(X_i) \neq 0$ e portanto $X_i \in I_m(A_2)$.

Denotando $I_m(A_i)$ por V_i podemos escrever $k(x) = T_x M = V_1 + V_2$. Pela afirmação 1 podem ocorrer $V_1 \cap V_2 \neq 0$ ou $V_1 \cap V_2 = 0$. (nesse caso $k(x) = V_1 \oplus V_2$).

AFIRMAÇÃO 2: Se $V_1 \cap V_2 \neq 0$ então $r_x = \Lambda_x^2 M$ e se $V_1 \cap V_2 = 0$, $\dim V_1, V_2 \neq 2$ então $r_x = V_1^2 + V_2^2$. Se $n = 4$ então existe a possibilidade $r_x = U(2)$.

A demonstração é a mesma do [Bi] theorem 1(a').

CONCLUSÃO: A esta altura temos que h_x contém r_x que pela afirmação 2 pode ser ou $\Lambda_x^2 M$, ou $V_1^2 + V_2^2$ com $T_x M = V_1 \oplus V_2$, $V_1 = V_2^\perp$. O lema 5 de [Bi] mostra que nesse caso $V_1^2 + V_2^2$ é uma subálgebra maximal de $\Lambda_x^2 M$.

2.5.6. TEOREMA: Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, $n \geq 3$, uma imersão isométrica de uma variedade compacta, simplesmente conexa com curvaturas seccionais não negativas tal que $\dim(N_1) \leq 2$ e a álgebra de holonomia global é da forma $SO(k) \times SO(n-k)$, $k \neq 0$. Então M^n é produto riemanniano de esferas de homotopia $M_1^k \times M_2^{n-k}$.

DEMONSTRAÇÃO: Decorre do teorema de deRham que M^n é isométrica a um produto riemanniano $M_1^k \times M_2^{n-k}$ de variedades compactas, simplesmente conexas de curvaturas seccionais não negativas. Pelo corolário 2.2.3. (a) temos que $\sum_{j=1}^{n-1} b_j(M; F) \leq 2$ para qualquer corpo F , pois M é orientável. Portanto a fórmula de Künneth

$$\forall j, j = 0, \dots, n, H_j(M; F) \cong \bigoplus_{\ell=0}^j H_\ell(M_1; F) \otimes H_{j-\ell}(M_2; F)$$

implica que $b_i(M_1; F) = 0$ para $i \neq 0, k$ e analogamente $b_i(M_2; F) = 0$ para $i \neq 0, n-k$, para qualquer corpo F . Portanto M_i , $i = 1, 2$ são esferas de homologia real, e além disso $H^*(M_i; Z)$ $i = 1, 2$ não pode apresentar torção. O resultado segue então do teorema de Whitehead.

2.5.7. TEOREMA: Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, $n \geq 4$, n par, uma imersão isométrica de uma variedade M^n compacta, simplesmente conexa com curvaturas seccionais não negativas, tal que $\dim(N_1) \leq 2$ e a álgebra de holonomia global é da forma $SO(n)$. Então M^n é uma esfera de homotopia.

DEMONSTRAÇÃO: Pelo teorema 2.2.6. M^n é uma esfera de cohomologia real. Basta observar agora que a homologia inteira não apresenta torção. De fato, se para $0 < j < n$ e para algum número primo q , $H_j(M^n; Z)$ apresentar q -torção teremos $H_j(M; Z_q) \neq 0$ e portanto $H_{n-j}(M^n; Z_q) \neq 0$. Se $j = \frac{n}{2}$ então o subgrupo de torção de $H^{j+1}(M; Z)$ contém q -torção. Logo $H_{j-1}(M; Z_q) \neq 0$ e portanto $H_{j+1}(M; Z_q) \neq 0$ também. Mas isto contradiz a desigualdade 2.2.3. (a), com uma observação de que $j > 1$ por M ser simplesmente conexa. Analogamente, se $j < \frac{n}{2}$ teremos $H_j(M; Z_q) \neq 0$ e $H_{n-j}(M; Z_q) \neq 0$ com $n-j \neq j$. Então $H^{j+1}(M; Z_q) \neq 0$ e logo $H_{n-j-1}(M; Z_q) \neq 0$ o que contradiz novamente a desigualdade 2.2.3. (a).

2.5.8. OBSERVAÇÃO: Quando $n = 2k + 1$ e a holonomia é $SO(n)$ o argu

mento do teorema 2.5.7. não se aplica, pois pode acontecer um caso em que $H_k(M; \mathbb{Z}) \neq 0$ apresenta torção sem contradizer 2.2.3.(a). Um exemplo de variedade que é uma esfera de cohomologia real com holonomia $SO(n)$ na condição citada foi sugerido pelo Professor A.Rigas.

2.5.9. EXEMPLO: Consideremos a variedade de Stiefel $V_{n+2,2} = \frac{SO(n+2)}{SO(n)}$

de dimensão $2n + 1$, $n \geq 2$. Por ser um grupo de Lie compacto, $SO(n+2)$ possui uma métrica bi-invariante de curvatura não negativa, e como $SO(n)$ atua naturalmente sobre $SO(n+2)$ por isometrias, $V_{n+2,2}$ com a métrica quociente, é uma variedade riemanniana com curvatura não negativa.

Lembramos que $SO(n)$ se inclui em $SO(n+2)$ identificando uma matriz $A \in SO(n)$ com a matriz

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & A & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix} \quad \text{em } SO(n+2).$$

Então a ação à direita de $SO(n)$ sobre $SO(n+2)$ é interpretada como multiplicação de matrizes $XA = X.A_1$. Esta ação é livre e fixa as duas primeiras colunas de X . Logo, um elemento \bar{X} de $V_{n+2,2}$ possui $2n+4$ coordenadas reais dadas pelas duas primeiras colunas de uma

matriz representante X . Além disso, como as colunas de X são vetores unitários e ortogonais de \mathbb{R}^{n+2} , $V_{n+2,2}$ é o espaço total do fibrado tangente unitário da esfera S^{n+1} . Portanto a projeção de $\bar{X} \in V_{n+2,2}$ sobre as duas primeiras colunas de X fornece uma imersão de $V_{n+2,2}$ em \mathbb{R}^{2n+3} , com codimensão 2. É um fato conhecido que $H_i(V_{n+2,2}; \mathbb{Z}) = 0$ para $i \neq 0, n, n+1, 2n+1$, e $H_n(V_{n+2,2}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, se n é par, e $\cong \mathbb{Z}_2$, se n é ímpar. Portanto, quando n é ímpar, $V_{n+2,2}$ é uma esfera de homologia real que não é esfera de homotopia.

2.5.10. OBSERVAÇÃO: Observamos que, apesar de $V_{n+2,2}$ possuir uma métrica de curvatura não negativa e imergir em \mathbb{R}^N com codimensão 2, não sabemos se admite uma métrica de curvatura não negativa *induzida* por uma imersão em espaço euclidiano. Realizamos cálculos para $n = 3$ com a imersão citada no exemplo acima, e constatamos que a métrica induzida sobre $V_{5,2}$ não é de curvatura não negativa.

2.5.11. OBSERVAÇÃO: Resta-nos comentar sobre as variedades de dimensão 4 com a holonomia $U(2)$. O teorema 2.2.6. implica que nesse caso $H^*(M; \mathbb{R}) \cong H^*(\mathbb{C}P^2; \mathbb{R})$. Além disso, o argumento usando a desigualdade 2.2.3.(a) implica que $H^*(M; \mathbb{Z}) \cong H^*(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$. Na proposição 3.3. de [B-M] foi mostrado que uma variedade compacta, simplesmente conexa nas condições acima não pode imergir em \mathbb{R}^6 , usando argumentos puramente topológicos. Quando a codimensão é estritamente maior que 2, mesmo supondo uma imersão isométrica com $\dim(N_1) \leq 2$, o ar

gumento não se estende e não encontramos ainda uma demonstração, apesar de acreditarmos que tal caso não possa ocorrer.

CAPÍTULO III

SUBVARIEDADES COMPLETAS COM CURVATURA NÃO NEGATIVA E CODIMENSÃO BAIXA

§1. O TEOREMA DA ALMA

Neste capítulo tentaremos estender alguns dos resultados do capítulo anterior ao caso de variedades completas n -dimensionais com curvatura não negativa imersas isometricamente em \mathbb{R}^{n+p} , $p = 1, 2$. A estrutura topológico - diferencial das variedades completas com curvatura não negativa é relacionada às das variedades compactas via o teorema da alma de Cheeger - Gromoll (veja [Ch-G]) que vamos discutir agora.

3.1.1. DEFINIÇÃO: Um subconjunto C de uma variedade riemanniana M é dito *totalmente convexo* se para cada $p, q \in C$ e cada geodésica γ em M entre p e q , γ está inteiramente contida em C .

Em particular, uma subvariedade totalmente convexa em M é totalmente geodésica.

A importância da existência de subvariedades totalmente convexas de uma variedade riemanniana é mostrada pelo seguinte resultado:

3.1.2. TEOREMA: Seja M uma variedade riemanniana completa e $C \subseteq M$ uma subvariedade compacta, totalmente convexa. Então a inclusão $C \hookrightarrow M$ é uma equivalência de homotopia.

O teorema 3.1.2., cuja demonstração é uma aplicação interessante mas não difícil da teoria de Morse para variedades de Hilbert (veja [Ch-G]), nos mostra que a existência de subvariedades totalmente convexas não é comum. Por exemplo, como corolário de 3.1.2., temos que as variedades compactas não admitem subvariedades fechadas (próprias) totalmente convexas.

Se M^n é completa, com curvatura seccional não negativa, o teorema de Cheeger e Gromoll estabelece exatamente a existência de uma subvariedade compacta, totalmente convexa.

3.1.3. TEOREMA: Seja M uma variedade riemanniana, completa com curvatura não negativa. Então existe uma subvariedade $A \subseteq M$ compacta (sem bordo) e totalmente convexa tal que M é difeomorfa ao espaço total do fibrado normal $\nu^M A$ da inclusão $A \hookrightarrow M$. A é chamada *uma alma de M* . Além disso, se $p \in A$, $X \in T_p A$, $Y \in \nu_p^M A$ então $R(X, Y)Y = 0$ onde R é o tensor de curvatura de M .

DEMONSTRAÇÃO: veja [Ch-G], [M-R], [P].

3.1.4. COROLÁRIO: Se a curvatura seccional de M é estritamente positiva e M não for compacta, então uma alma de M é necessariamente

0-dimensional, e portanto, se M for conexa, M é difeomorfa a \mathbb{R}^n .

A nossa estratégia no estudo de imersões isométricas $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ onde M é completa com curvaturas seccionais não negativas é agora estudar a restrição de f a uma alma de M e tentar aplicar os resultados do capítulo anterior.

§2. REDUÇÃO DA CODIMENSÃO

Seja M^n uma variedade riemanniana completa com curvaturas seccionais não negativas e A^m uma alma de M . Se $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ é uma imersão isométrica, considere a restrição $\bar{f} = f|_A: A^m \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$. Sendo A totalmente geodésica, o primeiro espaço normal de \bar{f} , \bar{N}_1 , está contido no primeiro espaço normal de f , N_1 . Em particular, o fibrado normal $\nu M|_A$ de f restrito à alma contém o primeiro espaço normal de \bar{f} . É portanto natural perguntar se $f(A)$ está contida em um subespaço afim $(m+p)$ -dimensional de \mathbb{R}^{n+p} (cf. 2.1.2.).

3.2.1. PROPOSIÇÃO: Nas hipóteses acima, $\nu M|_A$ é paralelo se e somente se para cada $X \in TA$, $Y \in \nu^M A$, $\alpha(X, Y) = 0$.

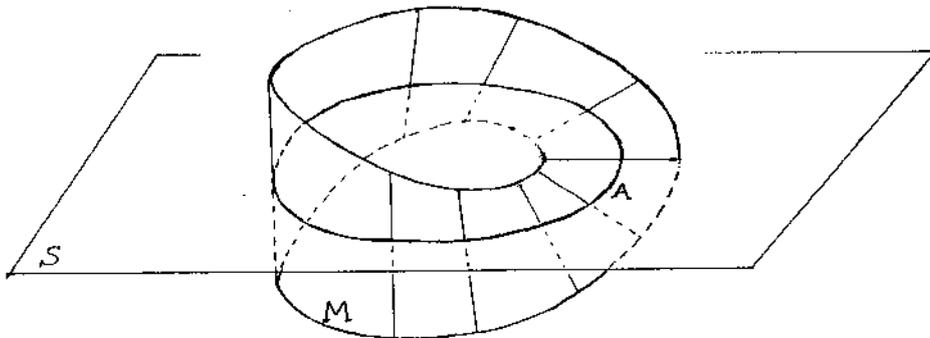
DEMONSTRAÇÃO: Seja ξ uma secção de $\nu M|_A$ e denotamos por $\bar{\nu}^\perp$ a conexão normal de \bar{f} . Sejam $X \in TA$ e $Y \in \nu^M A$. Temos

$$\langle \nabla_X^\perp \xi, Y \rangle = - \langle \xi, \nabla_X^\perp Y \rangle = - \langle \xi, D_X Y \rangle = - \langle \xi, \alpha(X, Y) \rangle = 0$$

e portanto $\nu M|_A$ é paralelo. Reciprocamente, se $\nu M|_A$ é paralelo então $f(A)$ está contida num subespaço afim S $(m+p)$ -dimensional de \mathbb{R}^{n+p} . Portanto, se X e Y são secções de TA e $\nu^M A$ respectivamente, Y se mantém normal a S ao longo de uma curva integral de X em A , e logo normal a $\nu M|_A$. Portanto $D_X Y$ é normal a $\nu M|_A$ o que implica $\alpha(X, Y) = 0$.

3.2.2. DEFINIÇÃO: Dizemos que f é *reduzível ao longo de A* se $\forall X \in TA, \forall Y \in \nu^M A, \alpha(X, Y) = 0$.

3.2.3. OBSERVAÇÃO: Dizer que f é reduzível ao longo de A é algo mais que dizer simplesmente que $f(A)$ está contida num subespaço afim $(m+p)$ -dimensional, S . Este algo mais é precisamente o fato que S é paralelo a $TA \oplus (\nu M|_A)$ (ou seja, perpendicular a $\nu^M A$). Este último fato não é consequência do primeiro fato, como podemos observar pela situação que o desenho abaixo indica:



e de fato, tem como interessante consequência o seguinte:

3.2.4. TEOREMA: Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade completa com curvatura não negativa, redutível ao longo de uma alma m -dimensional A^m . Então M é difeomorfa ao produto $A^m \times \mathbb{R}^{n-m}$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $p \in A^m$ e X_1, \dots, X_{n-m} um referencial ortonormal de $v_p^M A$. Transportando este referencial paralelamente em \mathbb{R}^{n+p} ao longo de A^m se obtém um referencial ortonormal *perpendicular* a $S \approx TA \oplus (vM|_A)$, e portanto um referencial em $v^M A$. Logo $v^M A$ é por um lado difeomorfa a $A^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, e por outro lado a M^n pelo teorema da alma (3.1.3.). Isto conclui a demonstração.

A título de exemplo, vamos agora discutir o caso das hipersuperfícies. Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica, M^n conexa, completa com curvaturas seccionais não negativas. Seja ξ um campo normal e considere $v_x = \dim \text{Ker}(A_\xi)_x$ o índice de nulidade relativa de f em $x \in M$. Se $v_x = 0$ em algum ponto então todas as curvaturas seccionais são positivas neste ponto, e um resultado clássico de Sacksteder (veja [S]) garante que $f(M)$ é bordo de um corpo convexo, M é difeomorfa a \mathbb{R}^n , e uma alma de M se reduz a um ponto. Se $v_x > 0$ para cada $x \in M$ e $\ell = \inf_{x \in M} v_x$ então, por um teorema clássico de Hartman (veja [H]), M é isométrica a um produto $M_1^{n-\ell} \times \mathbb{R}^\ell$ e a menos de uma isometria de \mathbb{R}^{n+1} , existem imersões

$f_1: M_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-\ell+1}$, $f_2: \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ tais que $f = f_1 \times f_2$. Além disso o índice de nulidade relativa de f_1 é zero em algum ponto. Se M_1 for não compacta, aplicando o resultado de Sacksteder, M_1 é difeomorfa a $\mathbb{R}^{n-\ell}$, e em particular uma alma de M_1 (e portanto de M) se reduz a um ponto. Se M_1 for compacta, pelo teorema 2.1.4., M_1 é difeomorfa a $S^{n-\ell}$ e $f(M_1)$ é bordo de um corpo convexo em $\mathbb{R}^{n-\ell+1}$. Em todo caso f é redutível ao longo de uma alma de M .

Um outro exemplo interessante é $M = TS^2$, o espaço tangente à esfera S^2 . É fácil construir uma métrica completa com curvaturas não negativas em TS^2 (veja [M-R]). Também temos

$$TS^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3: ||x|| = 1 \text{ e } \langle x,y \rangle = 0\}$$

e portanto TS^2 admite uma imersão natural em \mathbb{R}^6 . Porém a métrica induzida por esta imersão não tem curvaturas não negativas. Em todo caso, mesmo se admitir uma imersão isométrica em \mathbb{R}^6 com curvaturas não negativas, e mesmo que nesse caso a alma (a alma é difeomorfa a S^2) esteja contida num subespaço 3 ou 4-dimensional, esta imersão não é redutível ao longo de uma alma pois TS^2 não é difeomorfa a $S^2 \times \mathbb{R}^2$.

Seja agora $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão isométrica de M^n completa com curvatura não negativa.

3.2.5. TEOREMA: Se f for redutível ao longo de uma alma então M é

difeomorfa a um produto de um espaço euclidiano \mathbb{R}^{n-l} e uma subvariedade compacta, totalmente convexa A^l que verifica uma das condições abaixo:

- (a) A é homotopicamente equivalente a S^l ;
- (b) A é produto riemanniano de subvariedades difeomorfas a S^k e S^{l-k} ;
- (c) $l = 2k + 1$, A tem a homologia real de S^l e a homologia inteira apresenta torção eventualmente na dimensão k ;
- (d) $l = 3$ e A é um quociente de S^3 por um grupo finito;
- (e) A é não orientável (e M também) e é uma "garrafa de Klein generalizada", ou $\mathbb{R}P^2$.

DEMONSTRAÇÃO: Segue imediatamente de 3.2.4. e dos resultados do Capítulo II.

Queremos terminar este parágrafo com alguns comentários. Primeiramente, a redutibilidade de f ao longo de uma alma A permite transportar propriedades geométricas de f para propriedades análogas de \bar{f} (por exemplo, se f tem fibrado normal plano então \bar{f} tem fibrado normal plano, etc). Também podemos perguntar se existem condições mais fracas que a redutibilidade que permitem aplicar à alma os resultados do caso compacto. Mais precisamente:

3.2.6. PROBLEMA: Dadas uma imersão isométrica $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ e $A^k \subseteq M^n$ uma alma de M , existe uma imersão isométrica $f_A: A^k \rightarrow \mathbb{R}^{k+p}$?

Uma idéia para este problema é considerar o fibrado normal de M ao longo de A , $\nu M|_A$, e definir uma "conexão normal"

$$\bar{\nabla}^\perp: \chi(M) \times \Gamma(\nu M|_A) \rightarrow \Gamma(\nu M|_A)$$

por $\bar{\nabla}_X^\perp \xi =$ projeção de $\nabla_X^\perp \xi$ sobre $\nu M|_A$. Definimos também uma segunda forma fundamental $\bar{\alpha}: TA \times TA \rightarrow \nu M|_A$ por $\bar{\alpha}(X, Y) = \alpha(X, Y)$. Os dados $(\nu M|_A, \bar{\nabla}^\perp, \bar{\alpha})$ verificam claramente as equações de Gauss e Codazzi, mas infelizmente, se $p > 1$ não necessariamente as de Ricci. Em todo caso, pelo menos para $p = 1$, se A for simplesmente conexa temos uma resposta afirmativa ao nosso problema. No caso $p > 1$ seria interessante estudar condições geométricas simples com as quais os "dados" $(\nu M|_A, \bar{\nabla}^\perp, \bar{\alpha})$ verifiquem as equações de Ricci.

§3. OUTROS RESULTADOS SOBRE SUBVARIEDADES COMPLETAS

Consideramos uma variedade completa M^n com curvaturas seccionais não negativas e uma imersão isométrica $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$. Se A^k é uma alma de M podemos aplicar a $\bar{f} = f|_A$ os resultados do capítulo II pelo fato óbvio de que o primeiro espaço normal de \bar{f} tem dimensão no máximo 2. As possibilidades para A são as listadas no teorema 3.2.5. e podemos enunciar a seguinte

3.3.1. PROPOSIÇÃO: M é homotopicamente equivalente a:

- (a) um quociente finito de S^3 ou uma "garrafa de Klein generalizada" (se A for não orientável); ou $\mathbb{R}P^2$;
- (b) uma esfera S^l ;
- (c) um produto $S^k \times S^{l-k}$;
- (d) uma variedade simplesmente conexa com a homologia real de uma esfera, cuja homologia inteira apresenta torção eventual em apenas uma dimensão;
- (e) o plano projetivo complexo $\mathbb{C}P^2$.

DEMONSTRAÇÃO: Segue dos resultados do capítulo II aplicados a $\bar{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$.

Analogamente ao que foi feito no capítulo II, poderíamos tentar diminuir a nossa lista de possibilidades com a hipótese suplementar de que todas as curvaturas seccionais sejam positivas em um ponto. No entanto, este ponto não pertenceria necessariamente a alguma alma e portanto os nossos argumentos não funcionam. Um resultado parcial nesta direção é o seguinte:

3.3.2. TEOREMA: Seja M^n uma variedade completa de dimensão par com curvaturas seccionais não negativas e positivas em pelo menos um ponto, e seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão isométrica. Então M^n é

simplesmente conexa ou tem o tipo de homotopia de $\mathbb{R}P^2$.

DEMONSTRAÇÃO: Nas hipóteses do teorema temos a desigualdade de Gauss - Bonnet - Chern

$$0 < \int_M \tilde{K} \, dM \leq \chi(M)$$

onde \tilde{K} é o integrando de Gauss - Bonnet - Chern, $\chi(M)$ é a característica de Euler de M , e todos os termos são finitos (veja [W]). Seja A uma alma de M . Logo $\chi(A) = \chi(M) > 0$. Em particular, isso implica que a dimensão de A tem que ser par. Se $\dim A = 0$ não há nada a demonstrar. Se $\dim A = 2$ então A é difeomorfa a S^2 ou $\mathbb{R}P^2$ e também neste caso não temos nada a mostrar. Suponhamos $\dim A \geq 4$.

AFIRMAÇÃO: A é orientável.

De fato, se A não for orientável seu recobrimento duplo de orientação \bar{A} é difeomorfa a $S^1 \times M'$ e portanto $\chi(\bar{A}) = 0$. Mas $\chi(\bar{A}) = 2\chi(A)$, e logo $\chi(A) = 0$, o que é uma contradição.

Se A for orientável, olhando a lista da proposição 3.3.1., observamos que se A não for simplesmente conexa então A é homotopicamente equivalente a $S^1 \times S^{2\ell-1}$ ($2\ell = \dim A$) e isso contradiz a positividade da característica de Euler. Isto completa a demonstração.

Finalmente, queremos concluir este parágrafo e este trabalho com algumas observações. Claramente os resultados apresentados neste capítulo estão longes de serem completos, porém achamos que precisamos de idéias novas para estender o programa para frente. Por exemplo, a demonstração do último teorema não se transporta ao caso de variedades de dimensão ímpar. Porém, não nos parece que o teorema tenha sérias razões para não valer em dimensão ímpar e, de fato, isso está relacionado a um problema bem mais geral:

"Se M é uma variedade completa com curvaturas seccionais não negativas e positivas em um ponto, então uma alma de M é necessariamente um ponto?"

Este último problema tem sido comentado e estudado desde o aparecimento do teorema da alma, mas ainda não parece existir algum resultado nesta direção. Também o teorema 3.2.5., tem, no nosso entender, boas chances de ser verdade sem a hipótese de redutibilidade.

BIBLIOGRAFIA

- [B] Babakhanian, A.: Cohomological methods in group theory, Marcel Dekker, N.Y., 1972
- [B-M] Baldin, Y.Y. - Mercuri, F.: Isometric immersions in codimension two with non negative curvature, Math. Z. 173 (1980), 111-117.
- [Bi] Bishop, R.L.: The holonomy algebra of immersed manifolds of codimension two, J.Diff. Geom. 2(1968), 347-353.
- [Bo-Ma] Bourguignon, J.P. - Mazet, E.: Sur la structure des variétés riemanniennes qui admettent des champs de vecteurs paralleles, Compositio Mathematica, v.24,Fasc.1 (1972), 105-117.
- [C] Carmo, M.do: Geometria Riemanniana, Projeto Euclides, 1979.
- [Ca-Li-1] Carmo, M. do - Lima, E.: Immersions of manifolds with nonnegative sectional curvatures, Bol.Soc.Bras. Mat. 2 (1972), 9-22.
- [Ca-Li-2] Carmo, M.do - Lima, E.: Isometric immersions with semi-definite second quadratic forms, Archiv der Math. 20 (1969), 173-175.

- [Ch-G] Cheeger, J. - Gromoll, D.: On the structure of complete open manifolds of non negative curvature, Ann.of Math.(2) 96(1972), 413-443.
- [Ch] Chen, C.S.: On tight isometric immersions in codimension two, Amer. J.Math. 94(1972),974-990.
- [Ch-L] Chern, S.S. - Lashof, R.K.: On the total curvature of immersed manifolds, Amer.J. Math.79(1957), 306-313.
- [Er] Erbacher, J.: Reduction of the codimension of an isometric immersion, J.Diff. Geom. 5(1971), 333-340.
- [G-M] Gallot, S. - Meyer, D.: Opérateur de courbure et Laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne, J. Math. Pures et Appl. 54(1975), 259-284.
- [H] Hartman, P.: On the isometric immersions in Euclidean space of manifolds with non-negative sectional curvatures II, Trans.Amer.Math. Soc. 147(1970), 529-540.
- [J] Jonker, L.: Immersions with semi-definite second fundamental form, Can.J. Math., 27(1975), 610-617.
- [K-N] Kobayashi, S. - Nomizu, K.: Foundations of Differential Geometry, vol I, II, Interscience, N.Y., 1969.

- [M-R] Mercuri, F. - Rigas, A.: *Curvatura e Topologia*, Escola de Geometria Diferencial, Univ. Federal do Ceará, 1978.
- [Mil-1] Milnor, J.: *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1965.
- [Mil-2] Milnor, J.: *Morse theory*, Annals of Math. Studies 51, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1963.
- [M] Moore, J.D.: *Codimension two submanifolds of positive curvature*, Proc. of A.M.S. 70 (1978), 72-76.
- [P] Poor, W.: *Some results on non negatively curved manifolds*, J. Diff. Geom. 9 (1974), 583-600.
- [Rod] Rodriguez, L.: *Geometria das subvariedades*, Ed. IMPA 26, Rio de Janeiro, 1976.
- [S] Sacksteder, R.: *On hypersurfaces with non - negative sectional curvatures*, Amer. J. Math. 82 (1960), 609-630.
- [Sp] Spanier, E.H.: *Algebraic Topology*, Mc-Graw Hill, N.Y., 1966.
- [W] Walter, R.: *A generalized Allendoerfer - Weil formula and an inequality of the Cohn - Vossen type*, J. Diff. Geom. 10 (1975), 167-180.

[We] Weinstein, A.: Positively curved n -manifolds in \mathbb{R}^{n+2} , J.
Diff. Geom. 4 (1970), 1-4.