

**Universidade Estadual de Campinas**

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

---

Tese de Doutorado

**Sobre problemas de Ambrosetti-Prodi para  
sistemas elípticos com crescimento crítico  
unilateral**

por

**Bruno Henrique Carvalho Ribeiro** <sup>†</sup>

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

**Orientador: Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo**

**Co-orientador: Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó**

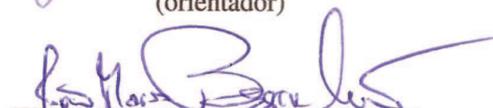
<sup>†</sup>Este trabalho contou com o suporte financeiro do CNPq.

SOBRE PROBLEMAS DE AMBROSETTI-PRODI PARA SISTEMAS ELÍPTICOS COM  
CRESCIMENTO CRÍTICO UNILATERAL

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Bruno Henrique Carvalho Ribeiro e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 27 de agosto de 2010

  
Prof. Dr: Djalro Guedes de Figueiredo  
(orientador)

  
Prof. Dr: João Marcos Bezerra do Ó  
(co-orientador)

Banca Examinadora:

- 1 Dr. Djalro Guedes de Figueiredo
- 2 Dr. Marcelo Martins dos Santos
- 3 Dr. Marcelo da Silva Montenegro
- 4 Dr. Marco Aurelio Soares Souto
- 5 Dr. Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**  
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Ribeiro, Bruno Henrique Carvalho

R354s Sobre problemas de Ambrosetti-Prodi para sistemas elípticos com crescimento crítico unilateral/Bruno Henrique Carvalho Ribeiro--Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientadores: Djairo Guedes de Figueiredo ; João Marcos Bezerra do Ó

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Equações diferenciais parciais. 2.Equações diferenciais elípticas. 3.Princípios variacionais. I. Figueiredo, Djairo Guedes de. II. Do Ó, João Marcos Bezerra. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: On Ambrosetti-Prodi type problems for elliptic systems with unilateral critical growth

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Partial differential equations. 2. Elliptic differential equations. 3. Variational principles.

Área de concentração: Análise

Titulação: Doutor em Matemática

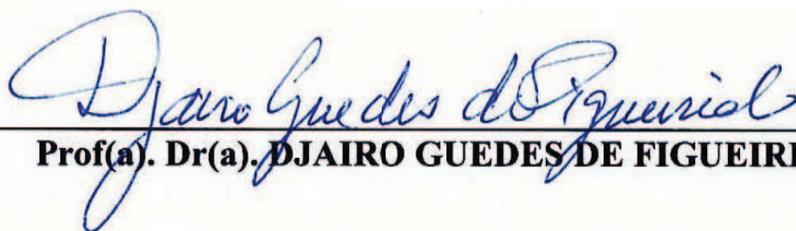
Banca examinadora: Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo (IMECC – UNICAMP)  
Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos (IMECC – UNICAMP)  
Prof. Dr. Marcelo Silva Montenegro (IMECC – UNICAMP)  
Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto (UFCG)  
Prof. Dr. Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira (UFC)

Data da defesa: 27/08/2010

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

**Tese de Doutorado defendida em 27 de agosto de 2010 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof(a). Dr(a). DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO**



---

**Prof(a). Dr(a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS**



---

**Prof(a). Dr(a). MARCELO DA SILVA MONTENEGRO**



---

**Prof(a). Dr(a). MARCO AURELIO SOARES SOUTO**



---

**Prof(a). Dr(a). EDUARDO VASCONCELOS OLIVEIRA TEIXEIRA**

*A meu vô Juarez (in memorian)*

---

# AGRADECIMENTOS

A meu orientador Djairo Guedes de Figueiredo por todos os momentos dedicados ao aperfeiçoamento deste trabalho, através de críticas, sugestões e conselhos sempre úteis e motivantes.

A meu orientador na graduação e mestrado e co-orientador deste trabalho, João Marcos Bezerra do Ó, pela fundamental importância em todos meus objetivos acadêmicos realizados até hoje.

A minha esposa Elisandra, minha fonte de inspiração e motivação.

A minha família, à qual devo minha eterna gratidão não apenas por mais essa conquista.

A Fátima e Jessé, meu suporte familiar em Campinas, por tamanha hospitalidade e apoio nessa caminhada.

Aos colegas da Universidade Federal da Paraíba: Everaldo, Uberlândio e Flávia que me acompanharam com apoio incondicional por uma longa jornada desde a graduação.

Aos professores Eduardo Teixeira, Marcelo Santos, Marcelo Montenegro e Marco Aurélio, pela participação na banca examinadora.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do IMECC-UNICAMP.

Aos colegas do curso de doutorado e agora amigos: Allan, Anne, José Anderson, Carlos, Cíntia, Edcarlos, Evandro, Henrique, Luís, Taísa e Márcio, dentre outros, por todos os momentos que passamos juntos, ora estudando, ora nem tanto.

Aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação do IMECC-UNICAMP pela atenção, cordialidade e prontidão no atendimento.

Enfim, ao CNPq pelo suporte financeiro.

---

# RESUMO

Estudamos problemas do tipo Ambrosetti-Prodi para classes de sistemas elípticos gradientes com não-linearidades em crescimento crítico unilateral de Sobolev e de Trudinger-Moser. Com uso de métodos variacionais, provamos multiplicidade de solução para problemas homogêneos sem ressonância na parte linear e existência de solução não-trivial para problemas homogêneos com ressonância.

*Palavras-chave:* equações diferenciais parciais, equações diferenciais elípticas, princípios variacionais.

---

# ABSTRACT

We study Ambrosetti-Prodi problems for classes of gradient elliptic systems with nonlinearities in the critical growth range of Sobolev and Trudinger-Moser types. Using variational methods, we prove multiplicity of solutions for nonhomogeneous problems without resonance in the linear part and homogeneous problems involving resonance.

*Keywords:* partial differential equations, elliptic differential equations, variational principles.

---

# LISTA DE SÍMBOLOS

Neste trabalho usaremos as seguintes notações:

- $c, C, C_0, C_1, \dots$  : constantes positivas (possivelmente diferentes);
- $\Omega$  sempre denotará um aberto limitado de fronteira suave em  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ ;
- $|\cdot|$  : norma euclidiana em  $\mathbb{R}^N$ ;
- $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^N}$  : produto interno euclidiano em  $\mathbb{R}^N$ ;
- $\text{supp}(f)$  : suporte da função  $f$ ;
- $\rightharpoonup, \rightarrow$  : convergências fraca e forte, respectivamente, num espaço normado  $X$ ;
- $u_+ \equiv \max\{u, 0\}$  e  $u_- \equiv \min\{u, 0\}$ ;
- $\chi_\Omega$  : função característica do conjunto  $\Omega$ ;
- $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$  denota o gradiente da função  $u$ ; alguns “abusos” de notação são adotados, por conveniência:  $\nabla u \nabla v \equiv (\nabla u, \nabla v)_{\mathbb{R}^N}$ . Além disso, se  $U = (u_1, u_2)$  e  $V = (v_1, v_2)$  então  $\nabla U \nabla V = \nabla u_1 \nabla v_1 + \nabla u_2 \nabla v_2$ ;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$  : o laplaciano de  $u$ ;
- $\Delta U \equiv \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$  para  $U = (u, v)$ ;

- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty \right\}$ , para  $1 \leq p < \infty$ , com norma dada por

$$\|u\|_p = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p};$$

- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty\}$  com norma dada por

$$\|u\|_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\};$$

- $C(\Omega)$  : espaço das funções contínuas em  $\Omega$ ;
- $C_0(\Omega)$  : funções contínuas de suporte compacto em  $\Omega$ ;
- $C^k(\Omega)$ ,  $k \geq 1$  inteiro, denota o espaço das funções  $k$  vezes continuamente diferenciáveis sobre  $\Omega$  e  $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 1} C^k(\Omega)$ ;
- $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ ;
- $H_0^1(\Omega)$  : Fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  com respeito ao espaço

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \left| \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^2(\Omega) \text{ tais que} \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } i = 1, \dots, N \end{array} \right. \right\}$$

com norma dada por

$$\|u\|_{H^1} = \left[ \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \right]^{1/2}.$$

A norma considerada em  $H_0^1(\Omega)$  é dada por

$$\|u\|_{H_0^1} = \left[ \int_{\Omega} (|\nabla u|^2) dx \right]^{1/2};$$

- $H^{-1}$  : o dual de  $H_0^1(\Omega)$ ;
- O expoente crítico de Sobolev é dado por

$$2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2} & \text{se } 1 \leq N \leq 3 \\ \infty & \text{se } N = 2; \end{cases}$$

- $E \equiv H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  com a norma

$$\|(u, v)\| = (\|u\|_{H_0^1}^2 + \|v\|_{H_0^1}^2)^{1/2}.$$

---

# SUMÁRIO

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Problemas do Tipo Ambrosetti-Prodi para sistemas elípticos críticos</b>	<b>7</b>
1.1 Introdução . . . . .	7
1.2 Hipóteses e resultados principais . . . . .	8
1.3 As soluções negativas e reformulações dos problemas . . . . .	15
1.4 Resultados Preliminares . . . . .	20
1.5 Demonstrações dos Teoremas . . . . .	24
1.5.1 Geometria do Passo da Montanha . . . . .	24
1.5.2 Geometria de Linking . . . . .	28
1.5.3 Controle do nível minimax . . . . .	36
1.5.4 Conclusão das demonstrações . . . . .	41
<b>2 Problemas de Ambrosetti-Prodi para sistemas críticos em dimensão 2</b>	<b>43</b>
2.1 Introdução . . . . .	43
2.2 Hipóteses e resultados principais . . . . .	44
2.3 O Caso Subcrítico . . . . .	49
2.3.1 Preliminares . . . . .	49
2.3.2 A condição de Palais-Smale . . . . .	52
2.3.3 Condições geométricas e a demonstração do Teorema 2.2 . . . . .	56

2.4	O caso crítico . . . . .	61
2.4.1	Preliminares . . . . .	61
2.4.2	Condições geométricas para os níveis minimax . . . . .	63
2.4.3	Controle dos níveis minimax . . . . .	68
2.4.4	Conclusão da demonstração do Teorema 2.3 . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Sistemas críticos unilaterais com ressonância</b>	<b>77</b>
3.1	Introdução . . . . .	77
3.2	Hipóteses, teoremas e preliminares . . . . .	79
3.3	O caso $N \geq 3$ . . . . .	83
3.4	O caso $N = 2$ . . . . .	95
	<b>Referências</b>	<b>103</b>

---

# INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como tema principal o estudo de problemas do Tipo Ambrosetti-Prodi para sistemas elípticos. Problemas deste tipo são conhecidos, estudados e explorados na literatura há pelo menos trinta anos e são motivados pelo trabalho pioneiro de Ambrosetti-Prodi em [2]: neste artigo, é considerada uma classe de problemas dados por

$$-\Delta u = f(u) + g(x) \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \quad (1)$$

onde  $\Omega$  é um domínio limitado de  $\mathbb{R}^N$  com  $N \geq 2$ ,  $f$  é uma função de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}$  satisfazendo  $f'' > 0$  e

$$0 < \lim_{s \rightarrow -\infty} f'(s) < \lambda_1 < \lim_{s \rightarrow +\infty} f'(s) < \lambda_2,$$

com  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  denotando os autovalores de  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ . Os autores provaram que existe uma subvariedade  $M$  de classe  $C^1$  em  $C^{0,\alpha}(\Omega)$  que divide este espaço em dois subconjuntos disjuntos abertos  $S_1$  e  $S_2$  de forma que se  $g \in S_1$  o problema tem exatamente duas soluções, se  $g \in M$  o problema tem exatamente uma solução e se  $g \in S_2$  o problema não possui soluções. A novidade consiste exatamente em supor que a imagem de  $f'$  cruza autovalores, pois já era bastante conhecido, mesmo na época, que se  $f'(\mathbb{R}) \subset (\lambda_k, \lambda_{k+1})$  com  $k \geq 0$  e denotando  $\lambda_0 = 0$ , então (1) possui uma única solução (vide Dolph [30]).

Após o trabalho de Ambrosetti-Prodi, diversos outros exploraram uma enorme quantidade de variações e generalizações possíveis de tais resultados. Mesmo com o perigo de omitirmos alguns trabalhos importantes, citemos um breve histórico de alguns,

principalmente aqueles que se aproximam dos que abordamos nesta pesquisa. Podemos atribuir a Berger-Podolak em [5] a abordagem que motivou muitos trabalhos a partir de então: primeiramente, os autores generalizam a discussão para funções  $g \in H^{-1}(\Omega)$  e a procura por soluções em  $H_0^1(\Omega)$ . Além disso, e mais importante, consideram uma estrutura cartesiana na subvariedade  $M$  de  $H^{-1}(\Omega)$ : supondo  $g = h + t\phi_1$ , onde  $\phi_1$  designa uma autofunção positiva associada a  $\lambda_1$ ,  $h \perp \phi_1$  e  $t \in \mathbb{R}$ , provam que existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que (1) possui exatamente duas, uma ou nenhuma solução, conforme  $t < t_0$ ,  $t = t_0$  e  $t > t_0$ , respectivamente. Posteriormente, Kazdan-Warner [35] relaxaram as hipóteses de diferenciabilidade e convexidade e supondo apenas

$$f_- \equiv \limsup_{u \rightarrow -\infty} \frac{f(u)}{u} < \lambda_1 < \liminf_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} \equiv f_+$$

onde tais limites poderiam ser  $-\infty$  e  $+\infty$ , desde que  $f$  fosse assintoticamente polinomial (o grau deste polinômio era limitado por  $(N+1)/(N-1)$ ), provaram um resultado de existência e multiplicidade relativamente mais fraco: existem “ao menos” duas, uma ou nenhuma solução caso  $t < t_0$ ,  $t = t_0$  ou  $t > t_0$  respectivamente. Esta limitação no expoente para o crescimento de  $f$  é imposta por um resultado de estimativa a priori devido a Brezis-Turner [8] e foi melhorada por de Figueiredo [18] e de Figueiredo - Solimini [22], para potências subcríticas até  $2^* - 1$ , onde  $2^* = 2N/(N-2)$  é o expoente crítico de Sobolev da imersão  $L^p(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ .

Obviamente,  $\sup \limsup_{u \rightarrow +\infty} f(u)/u^\sigma \leq C$  pode implicar que  $f_+ = \infty$  o que faz, no caso de  $f$  diferenciável,  $f'(\mathbb{R})$  cruzar infinitos autovalores. No entanto, o estudo dos casos assintoticamente lineares onde  $-\infty < f_- < \lambda_1 < \dots \leq \lambda_k < f_+ < \lambda_{k+1}$  iniciou-se no trabalho de Lazer-Mckenna [37]. Neste artigo, prova-se que se  $\lambda_2$  é simples e  $\lambda_2 < f_+ < \lambda_3$  então o problema possui ao menos três soluções. Mais tarde, os mesmos autores conjecturaram que se  $f_- < \lambda_1$  e  $\lambda_n < f_+ < \lambda_{n+1}$ , existe  $t_0$  tal que (1) possui pelo menos  $2n$  soluções se  $t < t_0$ . Tal conjectura foi demonstrada para o caso unidimensional em [36] e refutada por Dancer [14]. No entanto, resultados de existência de quatro soluções (Hofer [34]) e até seis soluções (Solimini [51]) para certos casos particulares, motivaram recentes trabalhos iniciados por Dancer-Yan [15], que trazem respostas verdadeiras à conjectura sob variadas possibilidades.

Referimo-nos a [47] e [16] para detalhes históricos a respeito deste problema, eventualmente aqui omitidos.

Aproximando-nos de uma outra linha de pesquisa e interesse, mais voltada para os objetivos de nosso trabalho, surge a questão natural de se supor, por exemplo, que

$\lambda_k < f_- < \lambda_{k+1} < f_+$ . Ou seja, o cruzamento de autovalores ocorrendo apenas para ordem superior. Este tipo de hipótese é abordada pioneiramente em de Figueiredo [17]. Neste caso, perde-se o resultado de não existência e inverte-se o sinal no caso de existência: há pelo menos duas soluções se  $t > t_0$ . Enfatizamos portanto o caso  $f_- \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$  e  $f_+ = \infty$ , onde  $k \geq 0$  e  $\lambda_0 \equiv 0$  por definição. Esta situação pode ser abordada variacionalmente pelo Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz [3] quando  $k = 0$  ou por variações do Teorema de Linking de Rabinowitz [46] quando  $k \geq 1$  e foi estudada em [17] e Ruf-Srikanth [50] com  $f$  admitindo crescimento subcrítico polinomial. Seguindo estes artigos, casos críticos foram naturalmente questionados e investigados: em de Figueiredo-Jianfu [20] (veja também [26] para resultados relacionados) os autores estudaram  $f(u) = \lambda u + u_+^{2^*-1}$  (crescimento crítico unilateral) e provaram a existência de duas soluções para alguns termos  $g$  apenas quando  $N \geq 7$ . O problema consistia em provar que o nível mini-max do funcional associado evitava os níveis de não-compacidade, e isto pôde ser feito apenas impondo restrições na dimensão. Tal restrição é natural quando não linearidades de crescimento crítico estão presentes uma vez que é sabido que dimensões menores apresentam comportamentos diferentes (vide Brezis-Nirenberg [7]). No entanto, é de certa forma surpreendente encontrar dificuldades em  $N = 4, 5, 6$ . Mais recentemente, fazendo uso de técnicas aparentemente introduzidas em [32], Calanchi-Ruf [9] melhoraram os resultados de [20] para  $N \geq 6$  e, ao adicionar um termo subcrítico positivo conveniente, também discutiram os casos  $N = 3, 4$  e  $5$ .

O objetivo do Capítulo 1 é obter, para uma classe de sistemas de equações elípticas dadas por

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v + H_u(u_+, v_+) + G_u(u_+, v_+) + f_1(x) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = b(x)u + c(x)v + H_v(u_+, v_+) + G_v(u_+, v_+) + f_2(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0, v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

alguns dos resultados alcançados em [9] para o caso escalar, onde supomos  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$  limitado e suave. Baseados também em [20] e de Moraes Filho-Souto [25], provamos a existência de duas soluções, uma delas negativa, dependendo dos termos  $f_1$  e  $f_2$ . Os métodos utilizados seguem ideias em [9] mas tivemos que cruzar muitas dificuldades técnicas que surgem, por exemplo, ao considerarmos termos críticos generalizados que envolvem produtos do tipo  $u_+^\alpha v_+^\beta$  com  $\alpha + \beta = 2^*$ . Os resultados obtidos são divididos em quatro teoremas que

dependem das condições impostas sobre a matriz

$$A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & c(x) \end{pmatrix} \in C(\overline{\Omega}, M_{2 \times 2}(\mathbb{R})),$$

mas que podemos resumir da seguinte forma: Se  $A$  é constante e supondo  $f_1 = p_1 + s\phi_1$  e  $f_2 = p_2 + s\phi_1$  então a interação dos autovalores de  $A$  com o espectro de  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$  vão gerar regiões  $S$  em  $\mathbb{R}^2$  tais que existem duas soluções para (2) caso  $(s, t) \in S$ . Caso  $A \in C(\overline{\Omega}, M_{2 \times 2}(\mathbb{R}))$  então a parametrização de (2) é feita a um parâmetro apenas e provamos a existência de duas soluções em uma semirreta apropriada de  $\mathbb{R}$ . Ambas as possibilidades, quer seja uma região ilimitada de  $\mathbb{R}^2$  quer seja uma semirreta de  $\mathbb{R}$  são obtidas como os conjuntos para os quais o problema linear

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v + f_1(x) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = b(x)u + c(x)v + f_2(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0, v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3)$$

admite uma solução negativa. A “unilateralidade” imposta sobre  $H$  e  $G$  significa que estas funções são definidas apenas no quadrante positivo de  $\mathbb{R}^2$  e garante que tal solução, denotada por  $\Phi = (\phi, \psi)$  é também solução de (2). A partir de então passamos a estudar uma “translação” do problema original “em torno” de  $\Phi$ , considerando o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v + (H_u + G_u)((u + \phi)_+, (v + \psi)_+) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = b(x)u + c(x)v + (H_v + G_v)((u + \phi)_+, (v + \psi)_+) & \text{em } \Omega, \\ u = 0, v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4)$$

no qual passamos a buscar solução não trivial, obtendo, via uma nova translação, a segunda solução procurada para (2).

Postergamos o resumo e explicação das técnicas desenvolvidas na obtenção de solução fraca de (4) para o início do Capítulo 1.

Parte dos resultados deste Capítulo estão contidos em [48].

Já no Capítulo 2, consideramos o caso bidimensional de (2), onde a função crítica  $H$  é do tipo Trudinger-Moser. O principal objetivo da função  $G$  no Capítulo 1 é perturbar, via uma potência subcrítica, o funcional associado ao problema para que o nível minimax do mesmo esteja abaixo dos níveis de não compactidade. Portanto, uma vez que crescimento do

tipo Trudinger-Moser é exponencial, tal  $G$  não altera a natureza do problema. Sendo assim, consideramos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v + H_u(u_+, v_+) + f_1(x) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = b(x)u + c(x)v + H_v(u_+, v_+) + f_2(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0, v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5)$$

com  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  limitado e suave. Notamos que tal problema é motivado pelo trabalho de Calanchi-Ruf-Zhang [10] para o caso escalar. Porém, apesar de utilizarmos algumas técnicas lá desenvolvidas, fazemos uma abordagem relativamente diferente, tornando mais clara a demonstração de certas afirmações cruciais para a obtenção dos resultados.

O estudo desse capítulo consiste das peculiaridades do crescimento de Trudinger-Moser de forma que a parte linear é a mesma do Capítulo 1: ao parametrizarmos  $f_1$  e  $f_2$  adequadamente (a dois parâmetros se a matriz  $A$  é constante, ou a um parâmetro caso a matriz  $A = A(x)$ ) demonstramos a existência de regiões do plano (para o caso de  $A$  constante) ou semirretas (para o caso de  $A = A(x)$ ) onde existem duas soluções para o problema (5).

Um dos pontos cruciais na prova dos teoremas contidos neste capítulo é que ao estudarmos o problema transladado

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v + H_u((u + \phi)_+, (v + \psi)_+) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = b(x)u + c(x)v + H_v((u + \phi)_+, (v + \psi)_+) & \text{em } \Omega, \\ u = 0, v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6)$$

onde  $(\phi, \psi)$  é a solução negativa de (3), surge a necessidade de estimar a norma  $L^1(\Omega)$  de termos como  $H_u((z_m^r + \phi)_+, (z_m^r + \psi)_+)$ . Aqui  $z_m^r$  denota a função de Moser (vide [41]), utilizada, normalmente, na obtenção de hipóteses geométricas de teoremas de pontos críticos para funcionais relacionados a problemas envolvendo crescimento do tipo Trudinger-Moser. Para conseguirmos tais estimativas, fazemo-nos valer do fato que a norma  $L^\infty$  de  $(\phi, \psi)$  é pequena próxima a  $\partial\Omega$ . Daí se considerarmos  $(\phi, \psi)$  como uma “perturbação” na função  $H$ , a mesma torna-se controlável se trouxermos o suporte de  $z_m^r$  para regiões pequenas próximas a  $\partial\Omega$ .

O Capítulo 3 traz um problema homogêneo

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v + H_u(x, u_+, v_+) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = b(x)u + c(x)v + H_v(x, u_+, v_+) & \text{em } \Omega, \\ u = 0, v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7)$$

no qual supomos ressonância. Isto é, admitimos a existência de uma solução não trivial para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = b(x)u + c(x)v & \text{em } \Omega, \\ u = 0, v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (8)$$

que deve mudar de sinal. Em outras palavras, admitimos ressonância apenas em autovalores de ordem superior, pois a mudança de sinal para soluções de (8) torna-se crucial em nossos argumentos. O problema (7) admite a solução trivial  $U = 0$  e nossos resultados consistem em provar que existe uma solução não trivial tanto para o caso de crescimento crítico de Sobolev quanto de Trudinger-Moser. A ressonância, como é de se esperar, impõe algumas dificuldades que são superadas por análise mais cuidadosa e refinada em relação àquelas dos capítulos anteriores. Além disso, algumas hipóteses restritivas impostas devido à perturbação causada pelos termos não-homogêneos  $f_1$  e  $f_2$ , são melhoradas neste último capítulo.

Enfatizamos ainda que, até onde vai o conhecimento do autor, o resultado do Capítulo 3 é novo inclusive para o caso escalar, dado pelo problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_k u + g(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $k \geq 2$  e  $\lambda_k$  denota o  $k$ -ésimo autovalor de  $-\Delta$  com condição de fronteira de Dirichlet homogênea.  $g$  é uma não-linearidade de crescimento crítico (de Sobolev ou de Trudinger-Moser) em  $+\infty$ .

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## PROBLEMAS DO TIPO AMBROSETTI-PRODI PARA SISTEMAS ELÍPTICOS CRÍTICOS

---

### 1.1 Introdução

---

Neste capítulo estudaremos o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v + H_u(u_+, v_+) + G_u(u_+, v_+) + f_1(x) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = b(x)u + c(x)v + H_v(u_+, v_+) + G_v(u_+, v_+) + f_2(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0, v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $\Omega$  é um domínio limitado de fronteira suave em  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ . Sendo  $2^* = 2N/(N - 2)$  o expoente crítico da imersão de Sobolev, supomos que  $H$  é uma função  $2^*$ -homogênea de classe  $C^1$  e  $G$  uma perturbação subcrítica que terá uma relevante importância ao tratarmos o problema em dimensões menores. Denotamos  $w_+ = \max\{w, 0\}$  e assumimos  $f_1, f_2 \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N$ . Em análise de alguns resultados deste capítulo, exploramos a interação dos autovalores da matriz

$$A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & c(x) \end{pmatrix} \in C(\bar{\Omega}, M_{2 \times 2}(\mathbb{R}))$$

com o espectro de  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ .

Provamos a existência de duas soluções, uma delas negativa, dependendo dos termos  $f_1$  e  $f_2$ . Os métodos aqui utilizados seguem ideias em [9] mas tivemos que cruzar muitas dificuldades técnicas que surgem, por exemplo, ao considerarmos termos críticos generalizados. Nossa intenção inicial é estudar o sistema com termos críticos do tipo

$$H(u, v) = a_1 u^{2^*} + a_{k+1} v^{2^*} + \sum_{i=2}^k a_i u^{\alpha_i} v^{\beta_i}, \quad (1.2)$$

onde  $a_i \geq 0$ ,  $k \geq 0$  e  $\alpha_i, \beta_i > 1$  satisfazem  $\alpha_i + \beta_i = 2^*$ . Este tipo de função crítica foi considerada primeiramente em [25] diretamente para o p-Laplaciano e nos dá a possibilidade de abordagem única para problemas ora com termos críticos desacoplados (como em [43]) ou acoplados (como em [24]). Os resultados obtidos aqui também melhoram aqueles em [24] e [43] com respeito à dimensão  $N$ , já que lá, os autores trabalham numa extensão de [20] e também generalizam os resultados obtidos para a matriz  $A$  pois os mesmos trabalham com  $A$  constante. Veremos a seguir que o resultado foi melhorado para o caso de  $A$  constante e estendido para  $A \in C(\overline{\Omega}, M_{2 \times 2}(\mathbb{R}))$ . Devemos também fazer referência a alguns trabalhos anteriores envolvendo problemas do tipo Ambrosetti-Prodi para sistemas elípticos considerando outros tipos de hipóteses, como [12, 23, 40].

---

## 1.2 Hipóteses e resultados principais

---

Podemos reescrever (1.1) em sua forma vetorial, do seguinte modo:

$$\begin{cases} -\Delta U = A(x)U + \nabla(H(U_+) + G(U_+)) + F(x) & \text{em } \Omega, \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

onde  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ,  $U_+ = \begin{pmatrix} u_+ \\ v_+ \end{pmatrix}$  e

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \in L^r(\Omega) \times L^r(\Omega).$$

Estabelecemos primeiramente condições necessárias para a matriz  $A(x)$ . Como as demonstrações dos resultados de existência a serem provados dependem muito das hipóteses

sobre a matriz  $A$ , principalmente na forma como temos a interação com o espectro de  $-\Delta$ , iremos trabalhar com três tipos de hipóteses distintas, que afetarão significativamente o resultado a ser obtido. Denote por  $\mu_1(x), \mu_2(x)$  seus autovalores, para cada  $x \in \Omega$  (note que os mesmos sempre são reais, contando multiplicidade, pois  $A(x)$  é simétrica). Supomos três casos distintos:

(**A<sub>1</sub>**)  $A$  é constante e  $\mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1$ ;

ou

(**A<sub>2</sub>**)  $A$  é constante e existe  $k \geq 1$  tal que  $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$ ;

ou

(**A<sub>3</sub>**)  $a, b, c \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ ,  $b(x) \geq 0$  para todo  $x \in \Omega$  e  $\max_{x \in \Omega} \max\{a(x), c(x)\} > 0$ ;

As seguintes desigualdades são bastante úteis e serão usadas ao longo de todo o capítulo:

$$\mu_1|U|^2 \leq (AU, U)_{\mathbb{R}^2} \leq \mu_2|U|^2 \quad \forall U \in \mathbb{R}^2, \quad (1.4)$$

onde  $(, )_{\mathbb{R}^2}$  denota o produto interno usual do  $\mathbb{R}^2$ .

Voltamos nossa atenção para as não-linearidades. Para a parte crítica do problema, supomos as seguintes hipóteses:

(**H<sub>1</sub>**)  $H \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+)$  e  $H, H_u, H_v \geq 0$ ,  $H \neq 0$ ;

(**H<sub>2</sub>**)  $H(\lambda u, \lambda v) = \lambda^{2^*} H(u, v) \quad \forall \lambda > 0$  (ou seja,  $H$  é  $2^*$  homogênea, positivamente);

(**H<sub>3</sub>**)  $H_u(0, 1) = H_v(1, 0) = 0$ ;

(**H<sub>4</sub>**)  $(s, t) \mapsto H(s^{1/2^*}, t^{1/2^*})$  é côncava.

**Observação 1:** No que diz respeito à condição ( $H_4$ ), é importante dizer que a mesma vem da necessidade de termos uma desigualdade do tipo Hölder dada por

$$\int_{\Omega} H(u, v) \leq H(\|u\|_{2^*}, \|v\|_{2^*}), \quad \text{para todo } u, v \in L^{2^*}(\Omega), u, v \geq 0, \quad (1.5)$$

e ( $H_2$ ) e ( $H_4$ ) garantem (1.5) (veja [10, Proposição 4]). Esta é a única vez que iremos usar esta condição que infelizmente é, na verdade, uma restrição aparentemente grande em  $H$ : apesar de termos outros exemplos de funções que satisfazem ( $H_1$ ) – ( $H_3$ ) além de polinômios

como (1.2), estes são os únicos exemplos que podemos encontrar para os quais  $(H_1) - (H_4)$ . Apesar disto tais polinômios já nos dão uma generalização interessante, de acordo com o que já mencionamos na introdução.

Já para a perturbação  $G$ , também pedimos homogeneidade, mas de grau subcrítico. Não precisaremos de uma condição como  $(H_4)$  para  $G$ .

**(G<sub>1</sub>)**  $G \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+)$  e  $G, G_u, G_v \geq 0$ ;

**(G<sub>2</sub>)** Existe  $2 < p < 2^*$  tal que  $G(\lambda u, \lambda v) = \lambda^p G(u, v) \quad \forall \lambda > 0$  (isto é,  $G$  é  $p$ -homogênea positivamente);

**(G<sub>3</sub>)**  $G_u(0, 1) = G_v(1, 0) = 0$ ;

**Observação 2:** Notemos aqui que  $(H_3, G_3)$  nos permitem redefinir  $H$  e  $G$  em todo o plano tomando  $H(u, v) = H(u_+, v_+)$ ,  $G(u, v) = G(u_+, v_+)$  e ainda teremos  $H, G \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Portanto, a partir de agora estaremos considerando  $H$  e  $G$  como estas extensões.

Iremos buscar soluções em  $E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  munido da norma usual

$$\|(u, v)\|^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 + \|v\|_{H_0^1}^2.$$

Isto é,  $U = (u, v) \in E$  será uma solução (fraca) para (1.3) se

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} \nabla v \nabla \psi - \int_{\Omega} (A(u, v), (\varphi, \psi))_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} (\nabla H(U_+), (\varphi, \psi))_{\mathbb{R}^2} \\ & - \int_{\Omega} (\nabla G(U_+), (\varphi, \psi))_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} (F(x), (\varphi, \psi))_{\mathbb{R}^2} = 0 \quad \text{para todo } (\varphi, \psi) \in E, \end{aligned}$$

onde estamos fazendo um abuso de notação  $\nabla u \nabla v = (\nabla u, \nabla v)_{\mathbb{R}^2}$  bastante convencional.

O problema (1.3) será parametrizado de acordo com as condições sobre a matriz  $A(x)$ . Inicialmente, supomos que  $A$  seja constante, satisfazendo  $(A_1)$  ou  $(A_2)$ . Fixe

$$P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \end{pmatrix} \in L^r(\Omega) \times L^r(\Omega), \quad (1.6)$$

$T = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$  e defina

$$F_T(x) = P(x) + T e_1(x), \quad (1.7)$$

onde  $e_1$  denota a primeira autofunção associada a  $-\Delta$  positiva e normalizada em  $L^2(\Omega)$ . Considere então o problema

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + \nabla(H(U_+) + G(U_+)) + F_T(x) & \text{em } \Omega, \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.8)$$

Os primeiros dois resultados provam a existência de uma região ilimitada do plano tal que se  $T$  está nessa região, então (1.8) possui duas soluções. Definamos ainda uma ordem parcial em  $\mathbb{R}^2$ :  $(s_1, t_1) < (s_2, t_2)$  se  $s_1 < s_2$  e  $t_1 < t_2$ . Estamos aptos agora a enunciar nossos principais resultados deste capítulo.

**Teorema 1.1.** *Suponha  $(A_1)$ ,  $(H_1) - (H_4)$  e  $(G_1) - (G_3)$ . Se  $N \geq 6$  existem duas retas  $\alpha_1, \alpha_2$  e uma região ilimitada  $R = R(\alpha_1, \alpha_2) \subset \mathbb{R}^2$  tais que se  $(s, t) \in R$  então o problema (1.8) possui pelo menos duas soluções, uma delas negativa. Mais ainda, se  $N = 3, 4, 5$  então supondo*

$$(\mathbf{G}_4) \quad G(U) > 0 \text{ se } |U_+| > 0 \text{ e } p/2^* > 2/3(1 + 1/N),$$

*obtemos o mesmo resultado.*

**Observação 3:** Temos que  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $R$  são caracterizadas por

(i) Se  $b > 0$ .  $\alpha_1 = \alpha_1(s)$ ,  $\alpha_2 = \alpha_2(s)$  com coeficiente angular negativo não-paralelas e

$$R = \{(\theta, \tau) \in \mathbb{R}^2; \tau < \alpha_1(\theta), \tau < \alpha_2(\theta)\};$$

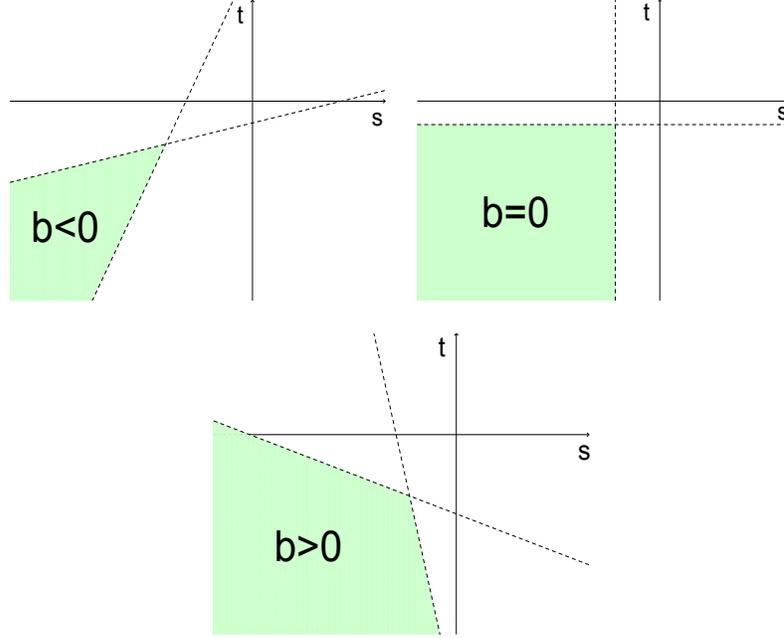
(ii) Se  $b = 0$ . Existem  $C_1, C_2 > 0$  tais que  $\alpha_1 = \alpha_1(s) = -C_1$  e  $\alpha_2 = \alpha_2(t) = -C_2$  e

$$R = \{(\theta, \tau) \in \mathbb{R}^2; \theta < -C_2, \tau < -C_1\};$$

(iii) Se  $b < 0$ .  $\alpha_1 = \alpha_1(s)$ ,  $\alpha_2 = \alpha_2(s)$  com coeficiente angular positivo não-paralelas e

$$R = \{(\theta, \tau) \in \mathbb{R}^2; \tau < \alpha_1(\theta), \tau > \alpha_2(\theta)\}.$$

As figuras abaixo apresentam graficamente a situação descrita no Teorema 1.1. As regiões sombreadas nos gráficos abaixo esboçam o conjunto no  $\mathbb{R}^2$  onde encontramos solução para (1.8), de acordo com os valores possíveis para  $b$ .



A demonstração desse Teorema será feita utilizando-se o Teorema do Passo da Montanha sem a condição PS. O segundo resultado diz respeito   condição  $(A_2)$ . Nele, faremos uso do Teorema de Linking.

**Teorema 1.2.** *Suponha  $(A_2)$ ,  $(G_1) - (G_3)$  e que existam  $\vartheta, \sigma > 0$  tais que*

$$H(u, v) = \vartheta u_+^{2^*} + \sigma v_+^{2^*} + \tilde{H}(u, v), \text{ para todo } (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

onde  $\tilde{H}$  satisfaz  $(H_1) - (H_4)$ . Então existem retas  $\beta_1$  e  $\beta_2$  e uma região ilimitada  $S = S(\beta_1, \beta_2) \subset \mathbb{R}^2$  tais que se  $(s, t) \in S$  então valem os mesmos resultados do Teorema 1.1.

**Observa o 4:** Novamente, fazemos uma descrição geométrica das possíveis regiões citadas no Teorema 1.2.  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $S$  são caracterizadas por

- (i) Se  $b > 0$ .  $\beta_1 = \beta_1(s)$ ,  $\beta_2 = \beta_2(s)$  com coeficientes angulares positivos não-paralelas e

$$S = \{(\theta, \tau) \in \mathbb{R}^2; \tau > \beta_1(\theta), \tau < \beta_2(\theta)\};$$

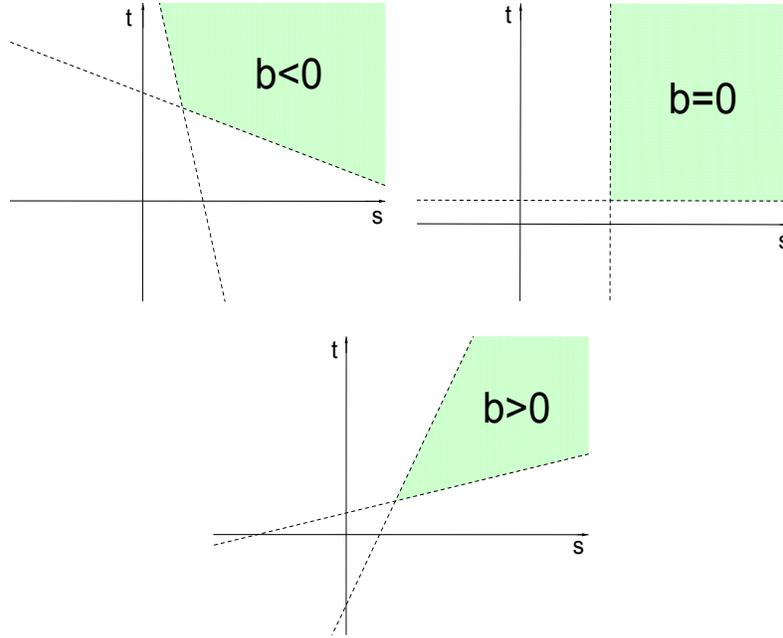
- (ii) Se  $b = 0$ . Existem  $C_1, C_2 > 0$  tais que  $\beta_1 = \beta_1(s) = C_1$  e  $\beta_2 = \beta_2(t) = C_2$  e

$$S = \{(\theta, \tau) \in \mathbb{R}^2; \theta > C_2, \tau > C_1\};$$

(iii) Se  $b < 0$ .  $\beta_1 = \beta_1(s)$ ,  $\beta_2 = \beta_2(s)$  com coeficientes angulares negativos não-paralelas e

$$S = \{(\theta, \tau) \in \mathbb{R}^2; \tau > \beta_1(\theta), \tau > \beta_2(\theta)\},$$

Na figura abaixo temos um esboço dessas regiões



**Observação 5:** As hipóteses do Teorema 1.1 ou 1.2 permitem-nos aplicar o resultado obtido em [23], que garante a existência de uma curva Lipschitziana  $\Gamma$  em  $\mathbb{R}^2$  dividindo o plano em duas regiões disjuntas e ilimitadas  $\mathbb{R}^2 = R_1 \cup \Gamma \cup R_2$  tais que (1.8) possui

1. nenhuma solução se  $T \in R_1$
2. pelo menos uma solução se  $T \in R_2$ .

Isto pode ser demonstrado utilizando-se do método de sub e super-solução e referimo-nos a [23] para os detalhes. No nosso caso, não podemos dizer o que acontece sobre a curva  $\Gamma$  uma vez que estimativas a priori parecem ser necessárias e crescimentos críticos impõem várias dificuldades na tentativa de obtenção destas estimativas.

Claramente, as regiões onde encontramos soluções nos teoremas acima estão contidas em  $R_2$ .

Os próximos dois teoremas são versões do mesmo resultado para matrizes não constantes satisfazendo  $(A_3)$ . Optamos por separar estes resultados uma vez que apesar de  $A(x)$  ser

uma matriz de funções contínuas e limitadas, a hipótese  $(A_3)$  impede de reproduzirmos todo o resultado que obtemos para matrizes constantes “ipsis litteris”. Além disso, uma nova parametrização mais apropriada será apresentada e alguns resultados anteriores serão necessários. Dado  $\lambda \in \mathbb{R}$ , considere o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta U = \lambda A(x)U & \text{em } \Omega, \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.9)$$

A condição  $(A_3)$  nos permite aplicar a teoria de operadores compactos e auto-adjuntos (vide [19, 27]) bem como alguns resultados obtidos em [13] para garantir a existência de uma sequência ilimitada de autovalores

$$0 < \lambda_1^A < \lambda_2^A \leq \lambda_3^A \leq \dots$$

(e autofunções associadas  $\Phi_1^A, \Phi_2^A, \dots$ ) tal que o primeiro autovalor é simples (ou seja, a dimensão do auto espaço associado é 1) e principal (admite autofunção estritamente positiva). Além disso é o único autovalor principal do problema. Na próxima sessão, detalhamos algumas propriedades destes autovalores.

A fim de discutir existência e multiplicidade de soluções para o problema (1.3) sob a condição  $(A_3)$  precisaremos de uma nova parametrização, desta vez a apenas um parâmetro.

Fixado novamente  $P(x)$  dado em (1.6) e dado  $t \in \mathbb{R}$  defina

$$F_t(x) = P(x) + tA(x)\Phi_1^A(x). \quad (1.10)$$

Considere então o problema parametrizado em  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} -\Delta U = A(x)U + \nabla(H(U_+) + G(U_+)) + F_t(x) & \text{em } \Omega, \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.11)$$

Podemos enunciar os dois últimos teoremas deste capítulo

**Teorema 1.3.** *Suponha  $(A_3)$ ,  $(H_1) - (H_4)$  e  $(G_1) - (G_3)$ . Além disso suponha  $1 < \lambda_1^A$ . Se  $N \geq 6$  existe  $C_1 > 0$  tal que se  $t \leq -C_1$  então o problema (1.11) possui pelo menos duas soluções, uma delas negativa. Mais ainda, se  $N = 3, 4, 5$  então supondo*

**(G<sub>4</sub>)**  $G(U) > 0$  se  $|U_+| > 0$  e  $p/2^* > 2/3(1 + 1/N)$ ,

*obtemos o mesmo resultado.*

**Teorema 1.4.** *Suponha  $(A_3)$ ,  $(G_1) - (G_3)$  e que existam  $\vartheta, \sigma > 0$  tais que*

$$H(u, v) = \vartheta u_+^{2^*} + \sigma v_+^{2^*} + \tilde{H}(u, v), \text{ para todo } (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

onde  $\tilde{H}$  satisfaz  $(H_1) - (H_4)$ . Se

$$\lambda_k^A < 1 < \lambda_{k+1}^A$$

para algum  $k \geq 1$  então existe  $C_2 > 0$  tal que se  $t \geq C_2$ , valem os mesmos resultados do Teorema 1.3.

**Observação 6:** Note que nos quatro teoremas acima não estamos descartando  $G = 0$  para  $N \geq 6$  mas fazemos isto para dimensões menores, pois precisamos de  $(G_4)$ . Esta condição aparece devido à necessidade de “baixar” o nível mini-max do funcional associado a (1.3) para os níveis de compacidade do mesmo. Veremos em detalhes mais a frente.

## 1.3 As soluções negativas e reformulações dos problemas

As regiões do plano (para o caso dos Teoremas 1.1 ou 1.2) ou da reta (para o caso dos Teoremas 1.3 ou 1.4) serão as mesmas para as quais for possível encontrarmos uma solução negativa para (1.8) ou (1.11), pois a segunda solução será encontrada utilizando-se de um problema modificado com auxílio da solução negativa. Basicamente, se for possível encontrar uma solução negativa então provaremos que existirá uma outra solução além dela.

Seja  $\Phi_0 = (\phi_0, \psi_0)$  a solução do sistema linear

$$\begin{cases} -\Delta U = A(x)U + P(x) & \text{em } \Omega, \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.12)$$

onde podemos supor qualquer uma das hipóteses entre  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  ou  $(A_3)$ . Nesse último caso, devemos supor ainda que 1 não faz parte do espectro do problema (1.9). A existência e unicidade de solução fica garantida pela “Alternativa de Fredholm”.

**Proposição 1.5.** *Sob as condições do Teorema 1.1 existem duas retas  $\alpha_1, \alpha_2$  e uma região ilimitada  $R$ , caracterizadas na Observação 3, tais que se  $(s, t) \in R$  então (1.8) possui uma solução negativa  $\Phi_T$ .*

**Prova.** Considere uma matriz  $2 \times 1$   $\mu(T)$  tal que  $\mu(T)e_1$  resolve

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + Te_1(x) & \text{em } \Omega, \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Um cálculo direto mostra que

$$\mu(T) = \frac{1}{\det(\lambda_1 I - A)} \begin{pmatrix} (\lambda_1 - c)s + bt \\ bs + (\lambda_1 - a)t \end{pmatrix}.$$

Definindo

$$\phi_T = \frac{(\lambda_1 - c)s + bt}{\det(\lambda_1 I - A)} e_1 + \phi_0$$

e

$$\psi_T = \frac{bs + (\lambda_1 - a)t}{\det(\lambda_1 I - A)} e_1 + \psi_0,$$

é obvio que  $\Phi_T = (\phi_T, \psi_T)$  satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta \Phi_T = A\Phi_T + F_T(x) & \text{em } \Omega, \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.13)$$

onde  $F_T$  está definido em (1.7).

Precisamos agora encontrar os parâmetros  $T$  tais que  $\Phi_T$  é negativo, sendo portanto uma solução de (1.8).

Lembramos que  $P \in L^r(\Omega) \times L^r(\Omega)$  com  $r > N$ . Sendo assim  $\Phi_0 \in C^{1,\nu} \times C^{1,\nu}$  para algum  $0 < \nu < 1$  por argumentos de regularidade elíptica (vide [33]). Então

$$\left\| \frac{\det(\lambda_1 I - A)}{(\lambda_1 - c)s + bt} \phi_T - e_1 \right\|_{C^1} = \left\| \frac{\det(\lambda_1 I - A)}{(\lambda_1 - c)s + bt} \phi_0 \right\|_{C^1}$$

e

$$\left\| \frac{\det(\lambda_1 I - A)}{bs + (\lambda_1 - a)t} \psi_T - e_1 \right\|_{C^1} = \left\| \frac{\det(\lambda_1 I - A)}{bs + (\lambda_1 - a)t} \psi_0 \right\|_{C^1}.$$

Seja  $\varepsilon > 0$  tal que se  $\|\phi - e_1\|_{C^1} < \varepsilon$  então  $\phi > 0$ ; a fim de obtermos  $\phi_T, \psi_T < 0$  precisamos que sejam válidas as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} (c - \lambda_1)s - bt &> \varepsilon^{-1} \det(\lambda_1 I - A) \|\phi_0\|_{C^1}; \\ -bs + (a - \lambda_1)t &> \varepsilon^{-1} \det(\lambda_1 I - A) \|\psi_0\|_{C^1}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Como  $\mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1$  temos que  $a, c < \lambda_1$  e então as desigualdades em (1.14) serão satisfeitas da seguinte forma:

1. Se  $b > 0$ :

$$t < \left( \frac{c - \lambda_1}{b} \right) s - (\varepsilon b)^{-1} \det(\lambda_1 I - A) \|\phi_0\|_{C^1}, \quad (1.15)$$

$$t < \left( \frac{b}{a - \lambda_1} \right) s - [\varepsilon(\lambda_1 - a)]^{-1} \det(\lambda_1 I - A) \|\psi_0\|_{C^1}. \quad (1.16)$$

2. Se  $b = 0$ :

$$s < -[\varepsilon(\lambda_1 - c)]^{-1} \det(\lambda_1 I - A) \|\phi_0\|_{C^1}, \quad (1.17)$$

$$t < -[\varepsilon(\lambda_1 - a)]^{-1} \det(\lambda_1 I - A) \|\psi_0\|_{C^1}. \quad (1.18)$$

3. Se  $b < 0$ :

$$t > \left( \frac{c - \lambda_1}{b} \right) s + (-\varepsilon b)^{-1} \det(\lambda_1 I - A) \|\phi_0\|_{C^1}, \quad (1.19)$$

$$t < \left( \frac{b}{\lambda_1 - a} \right) s - [\varepsilon(\lambda_1 - a)]^{-1} \det(\lambda_1 I - A) \|\psi_0\|_{C^1}. \quad (1.20)$$

Observe que estamos utilizando o fato que  $\mu_1 \leq a, c \leq \mu_2 < \lambda_1$ . As desigualdades (1.15) até (1.20) representam exatamente as regiões descritas na Observação 3, como queríamos demonstrar. ■

Analogamente, podemos enunciar uma proposição que trata da solução negativa para o problema (1.8) no caso das condições do Teorema 1.2.

**Proposição 1.6.** *Sob as condições do Teorema 1.2 existem duas retas  $\beta_1, \beta_2$  e uma região ilimitada  $S$ , caracterizadas na Observação 4 tais que se  $(s, t) \in S$  então (1.8) possui uma solução negativa  $\Phi_T$ .*

**Prova.** A demonstração é inteiramente análoga. A única diferença é que agora como  $\mu_2 \geq \mu_1 > \lambda_1$  então devemos ter  $a, c > \lambda_1$  e portanto as desigualdades encontradas de (1.15) até (1.20) ficam invertidas e delimitam a região  $S$  procurada, como descrito na Observação 4. ■

A situação torna-se um pouco diferente e na verdade até mais simples em se tratando dos Teoremas 1.3 e 1.4. A próxima proposição trata simultaneamente desses casos.

**Proposição 1.7.** *(i) Sob as condições do Teorema 1.3 existe uma constante  $C_1 > 0$  tal que se  $t < -C_1$  então (1.11) possui uma solução negativa  $\Phi_t$ .*

(ii) Sob as condições do Teorema 1.4 existe uma constante  $C_2 > 0$  tal que se  $t > C_2$  então (1.11) possui uma solução negativa  $\Phi_t$ .

**Prova.** Seja novamente  $\Phi_0$  dada pela solução de (1.12) e considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta U = A(x)U + tA(x)\Phi_1^A(x) & \text{em } \Omega, \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Note ainda que

$$\frac{t}{\lambda_1^A - 1} \Phi_1^A$$

é solução para o problema acima. Obviamente temos que

$$\Phi_t = \Phi_0 + \frac{t}{\lambda_1^A - 1} \Phi_1^A$$

resolve (1.11) desde que esta seja negativa. Para tanto observe que

$$\left\| \frac{\lambda_1^A - 1}{t} \Phi_t - \Phi_1^A \right\|_{C^1 \times C^1} = \left| \frac{\lambda_1^A - 1}{t} \right| \|\Phi_0\|_{C^1 \times C^1}.$$

Observemos agora que  $\Phi_1^A = (\phi_1^A, \psi_1^A)$  é tal que  $\partial\phi_1^A/\partial\nu, \partial\psi_1^A/\partial\nu < 0$ , onde estamos denotando  $\partial h/\partial\nu$  a derivada normal interior de  $h$  na fronteira de  $\Omega$ . De fato, uma vez que  $\phi_1^A, \psi_1^A > 0$  e  $a \in L^\infty(\Omega)$  e tomando  $a(x) = \max\{a(x), 0\} + \min\{a(x), 0\} = a_+(x) + a_-(x)$ , temos

$$-\Delta\phi_1^A = (a_+(x) + a_-(x))\phi_1^A + b(x)\psi_1^A \Rightarrow (-\Delta + K)\phi_1^A \geq 0$$

onde tomamos  $0 \leq -a_-(x) \leq K$  para todo  $x \in \Omega$ . Sendo assim, como  $\phi_1^A > 0$  em  $\Omega$  e  $\phi_1^A = 0$  sobre  $\partial\Omega$  o Lema de Hopf (vide [33]) garante que  $\partial\phi_1^A/\partial\nu < 0$  para todo  $x \in \partial\Omega$ . O mesmo procedimento pode ser seguido para provar que  $\partial\psi_1^A/\partial\nu < 0$ . Portanto, seja  $\varepsilon > 0$  tal que se  $\|\Phi - \Phi_1^A\|_{C^1 \times C^1} < \varepsilon$  então  $\Phi > 0$ . Assim precisamos ter

$$\frac{1 - \lambda_1^A}{t} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{1 - \lambda_1^A}{t} \|\Phi_0\|_{C^1 \times C^1} < \varepsilon.$$

Portanto, para o caso (i), como  $1 < \lambda_1^A$ , temos que  $t < -\varepsilon^{-1} \|\Phi_0\|_{C^1 \times C^1} (\lambda_1^A - 1) \equiv C_1$  e para o caso (ii), como  $1 > \lambda_1^A$ , devemos ter  $t > \varepsilon^{-1} \|\Phi_0\|_{C^1 \times C^1} (1 - \lambda_1^A) \equiv C_2$ , como queríamos demonstrar. ■

A partir de agora, trabalharemos apenas nas regiões do plano ou da reta estabelecidas nas proposições acima. Daqui para frente, os parâmetros nessas regiões serão fixados e a partir

da solução negativa encontrada, provaremos a existência de uma segunda solução. Quando não houver perigo de confusão, denotaremos  $\Phi$  a solução negativa  $\Phi_T$  de (1.8), para o caso dos Teoremas 1.1 ou 1.2 ou a solução negativa  $\Phi_t$  de (1.11), para o caso dos Teoremas 1.3 ou 1.4. Considere assim o problema

$$\begin{cases} -\Delta V = A(x)V + \nabla H((V + \Phi)_+) + \nabla G((V + \Phi)_+) & \text{em } \Omega, \\ V = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.21)$$

Sendo  $\Phi$  uma solução negativa do problema (1.3) (em qualquer uma de suas formas parametrizadas (1.8) ou (1.11)), é fácil ver que se  $V$  é uma solução não trivial para (1.21) então  $U = V + \Phi$  resolverá o problema (1.3), como queremos.

Portanto, devemos procurar solução não-trivial para (1.21). Em [20] e posteriormente em [24, 43], teoremas de pontos críticos foram usados diretamente para o funcional associado a (1.21). Nestes trabalhos, os autores encontraram dificuldades técnicas ao tentar provar que as sequências  $PS$  obtidas pelo método minimax de fato convergiam para uma solução não-trivial. Tais dificuldades só foram superadas ao supor  $N \geq 7$ . Propomos aqui as ideias e técnicas introduzidas em [9]. Iremos separar os suportes da solução negativa  $\Phi$  e as conhecidas funções de Talenti, que são bastante utilizadas ao tratar-se de problemas críticos, conseguindo assim estimativas mais fáceis de trabalhar. Fazemos isso ao “cortar” a função  $\Phi$  criando um pequeno “buraco” nesta função e posteriormente trazemos as funções de Talenti para dentro deste “buraco”. Este tipo de aproximação pode ser feita de forma que o erro cometido seja de fácil controle.

Consideremos

$$\begin{aligned} m &\in \mathbb{N} \\ x_m &\in \Omega \end{aligned} \quad (1.22)$$

tais que  $B_{4/m}(x_m) \subset \Omega$ ,  $|\Phi(x)| \leq C/m$ ,  $|e_1(x)|, |e_2(x)|, \dots, |e_k(x)| \leq C/m$  (caso estejamos sob as hipóteses do Teorema 1.2) e  $|\Phi_1^A(x)|, |\Phi_2^A(x)|, \dots, |\Phi_k^A(x)| \leq C/m$  (caso sejam consideradas as hipóteses do Teorema 1.4) para todo  $x \in B_{4/m}(x_m)$  e para algum  $C > 0$ . Isto tudo é possível uma vez que as funções  $\Phi, e_i, \Phi_i^A$  são todas Lipschitzianas e se anulam em  $\partial\Omega$  (e portanto podemos escolher  $m$  suficientemente grande e  $x_m$  suficientemente próximo da fronteira). Note que uma vez escolhido um primeiro  $m_0$  e seu respectivo ponto  $x_{m_0}$ , então qualquer  $m > m_0$  pode também ser escolhido satisfazendo as condições acima.

Mais para frente veremos porque estamos impondo estas estimativas também nas

autofunções. Considere então  $\eta_m \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  tal que:  $0 \leq \eta_m \leq 1$ ,  $|\nabla \eta_m(x)| \leq 2m$  e

$$\eta_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in B_{1/m}(x_m) \\ 1 & \text{se } x \in \Omega \setminus B_{2/m}(x_m). \end{cases}$$

Tome agora  $\begin{pmatrix} \varphi^m \\ \psi^m \end{pmatrix} := \Phi^m := \eta_m \Phi$  e

$$F^m = \begin{pmatrix} f_1^m \\ f_2^m \end{pmatrix}$$

satisfazendo

$$-\Delta \Phi^m = A(x)\Phi^m + F^m \quad \text{in } \Omega, \quad (1.23)$$

onde  $F$  é dado no problema (1.3) e  $A(x)$  satisfaz qualquer uma das hipóteses dos Teoremas 1.1, 1.2, 1.3 ou 1.4. O que fizemos dessa forma foi “furar” a função  $\Phi$  de forma que a nova função se anulasse em um aberto de  $\Omega$ . O objetivo, como já dito, consiste em utilizar-se deste “buraco” para trabalhar com funções apropriadas (as funções de Talenti) suportadas nele. Finalmente, considere então o problema

$$\begin{cases} -\Delta U = A(x)U + \nabla H((U + \Phi^m)_+) + \nabla G((U + \Phi^m)_+) + F - F^m & \text{em } \Omega, \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.24)$$

Note que  $\Phi - \Phi^m$  é trivialmente uma solução para este problema e se  $U \neq \Phi - \Phi^m$  é uma outra solução, então é imediato mostrar que  $V = U - \Phi + \Phi^m$  resolve (1.21). Nosso trabalho consistirá em provar que para  $m$  suficientemente grande existe tal  $U$ , solução de (1.24), para qualquer um dos casos dos teoremas deste capítulo.

---

## 1.4 Resultados Preliminares

---

Começamos estimando o erro criado na aproximação feita na função  $\Phi$  para o problema (1.24), ou seja  $\Phi - \Phi^m$  e  $F - F^m$ . O próximo lema trata desse resultado

**Lema 1.8.** *Para todo  $m$  suficientemente grande, existem  $c_1, c_2 > 0$  tais que*

$$\|\Phi - \Phi^m\| \leq c_1 m^{-N/2}; \quad (1.25)$$

e para todo  $\Psi = (\psi_1, \psi_2) \in E$ ,

$$\left| \int_{\Omega} (f_1 - f_1^m) \psi_1 \right| + \left| \int_{\Omega} (f_2 - f_2^m) \psi_2 \right| \leq c_2 \|\Psi\| m^{-N/2}. \quad (1.26)$$

**Prova.** Para (1.25), precisamos provar que  $\|\varphi - \varphi^m\|_{H_0^1} \leq cm^{-N/2}$  e  $\|\psi - \psi^m\|_{H_0^1} \leq cm^{-N/2}$ . Mas este é exatamente o caso escalar que foi provado em [9] e nos referimos a este artigo para os detalhes.

Para (1.26), precisamos apenas observar que uma vez que  $\Phi - \Phi^m$  resolve o problema (1.24), então para cada  $\psi_1 \in H_0^1(\Omega)$  temos

$$\left| \int_{\Omega} (f_1 - f_1^m) \psi_1 \right| = \left| \int_{\Omega} \nabla(\varphi - \varphi^m) \nabla \psi_1 - a \int_{\Omega} (\varphi - \varphi^m) \psi_1 - b \int_{\Omega} (\psi - \psi^m) \psi_1 \right|$$

e portanto, a desigualdade de Hölder, os teoremas de imersão de Sobolev e (1.25) nos dão

$$\left| \int_{\Omega} (f_1 - f_1^m) \psi_1 \right| \leq c \|\psi_1\|_{H_0^1} m^{-N/2}.$$

O mesmo pode ser feito para  $\left| \int_{\Omega} (f_2 - f_2^m) \psi_2 \right|$ . ■

Vamos agora destacar algumas das propriedades mais importantes (e que iremos usar) das funções homogêneas. Seja  $\alpha \geq 1$  e  $L$  uma função diferenciável  $\alpha$ -homogênea positivamente definida em  $\mathbb{R}^2$ , i. e.,  $L(\lambda s, \lambda t) = \lambda^\alpha L(s, t)$  para todo  $\lambda \geq 0$ . Então temos

- (Lema de Euler) Para todo  $s$  e  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$sL_s(s, t) + tL_t(s, t) = \alpha L(s, t); \tag{1.27}$$

- Seja

$$M_L = \sup\{|L(s, t)| : |s|^\alpha + |t|^\alpha = 1\}. \tag{1.28}$$

Então

$$|L(s, t)| \leq M_L(|s|^\alpha + |t|^\alpha) \tag{1.29}$$

e existe  $(s_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$  tal que

$$\begin{aligned} |s_0|^\alpha + |t_0|^\alpha &= 1 \\ |L(s_0, t_0)| &= M_L; \end{aligned} \tag{1.30}$$

- $L_u$  e  $L_v$  são  $\alpha - 1$  homogêneas (positivamente).

Dado  $\epsilon > 0$  considere a função

$$u_\epsilon(x) = \left[ \frac{\sqrt{N(N-2)}\epsilon}{\epsilon^2 + |x|^2} \right]^{(N-2)/2}. \tag{1.31}$$

É sabido que  $u_\epsilon$  realiza a melhor constante da imersão de Sobolev  $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$  dada por

$$S = \inf_{u \neq 0} \frac{\|u\|_{H_0^1}^2}{\|u\|_{2^*}^2}. \quad (1.32)$$

Definamos agora a seguinte constante

$$S_H = \inf_{(u,v) \in E \setminus \{0\}} \frac{\|(u,v)\|^2}{\left(\int_\Omega H(u,v)\right)^{2/2^*}}. \quad (1.33)$$

Tal definição é possível devido a (1.29) aplicada a  $H$ .

Considere a função 2-homogênea (positivamente) dada por

$$\overline{H}(u,v) = H(u,v)^{2/2^*}. \quad (1.34)$$

O próximo resultado mostra uma relação entre  $S$  e  $S_H$  que será usada na demonstração dos resultados principais deste capítulo.

**Lema 1.9.** *(de Moraes Filho-Souto, [25])* *Seja  $\overline{H}$  dado em (1.34) e  $M_{\overline{H}}$  como em (1.28). Se  $H$  satisfaz (1.5) então*

$$S_H = \frac{1}{M_{\overline{H}}} S.$$

Tomemos  $\zeta_m \in C_0^\infty(B_{1/m}(x_m), [0, 1])$  uma sequência de funções “cut-off” tal que  $\zeta_m = 1$  em  $B_{1/2m}(x_m)$  e  $\|\zeta_m\|_\infty \leq 4m$  e definamos

$$u_\epsilon^m(x) = \zeta_m(x) u_\epsilon(x - x_m). \quad (1.35)$$

Esta sequência de funções suportadas dentro do “buraco” que foi feito na solução negativa  $\Phi$  servirá para provar que o funcional associado ao problema (1.24) satisfaz uma certa geometria adequada. Precisaremos de algumas estimativas devidas a Brezis-Nirenberg:

**Lema 1.10.** *(Brezis-Nirenberg, [7])* *Fixe  $m \in \mathbb{N}$ . Então,*

1.  $\|u_\epsilon^m\|_{H_0^1}^2 = S^{N/2} + O(\epsilon^{N-2});$
2.  $\|u_\epsilon^m\|_{2^*}^2 = S^{N/2} + O(\epsilon^N);$
3.  $\|u_\epsilon^m\|_2^2 = K\epsilon^2 + O(\epsilon^{N-2})$  se  $N \geq 5;$

4.  $\|u_\epsilon^m\|_k^k \geq K\epsilon^{N-(N-2)k/2}$  para todo  $\epsilon \leq 1/2m$  e  $k \geq 1$ .

Para  $m \rightarrow \infty$  e  $\epsilon = o(1/m)$ , temos também (vide [32])

5.  $\|u_\epsilon^m\|_{H_0^1}^2 = S^{N/2} + O((\epsilon m)^{N-2});$

6.  $\|u_\epsilon^m\|_{2^*}^{2^*} = S^{N/2} + O((\epsilon m)^N).$

Citamos [9] para uma demonstração do item (4).

Lembramos que o espaço de funções considerado para o estudo dos problemas será  $E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  munido da norma usual

$$\|(u, v)\|^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 + \|v\|_{H_0^1}^2.$$

No restante desta sessão, apresentamos alguns resultados que utilizaremos para o problema parametrizado (1.11), que está sob a condição  $(A_3)$ . Precisamos de algumas estimativas com respeito aos autovalores  $\lambda_k^A$  que são análogas àquelas conhecidas para os autovalores do  $-\Delta$  sob condição de fronteira de Dirichlet. Para detalhes a respeito de como obter tais desigualdades vide [12, 19, 27]. No caso das condições  $(A_1)$  ou  $(A_2)$ , utilizamos os resultados clássicos envolvendo a sequência de autovalores  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots$  do operador  $-\Delta$  e suas autofunções  $e_1, e_2 \dots$  e definimos

$$\begin{aligned} H_0 &= \{0\} \\ H_k &= \text{span}\{(e_i, 0), (0, e_i); 1 \leq i \leq k\}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

É bem conhecido que para todo  $k \geq 1$  temos

$$\begin{aligned} \|V\|^2 &\leq \lambda_k \int_{\Omega} (V, V)_{\mathbb{R}^2}, \text{ para todo } V \in H_k \\ \|V\|^2 &\geq \lambda_{k+1} \int_{\Omega} (V, V)_{\mathbb{R}^2}, \text{ para todo } V \in H_k^\perp. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Considerando a hipótese  $(A_3)$ , a geometria de Linking será provada utilizando uma decomposição diferente de  $E = H_k \oplus H_k^\perp$ . Denotando

$$\begin{aligned} E_0 &= \{0\}, \\ E_k &= \text{span}\{\Phi_1^A, \dots, \Phi_k^A\} \end{aligned} \tag{1.38}$$

então para qualquer  $k \geq 1$  são válidas as seguintes desigualdades análogas a (1.37):

$$\begin{aligned} \|V\|^2 &\leq \lambda_k^A \int_{\Omega} (A(x)V, V)_{\mathbb{R}^2}, \text{ para todo } V \in E_k \\ \|V\|^2 &\geq \lambda_{k+1}^A \int_{\Omega} (A(x)V, V)_{\mathbb{R}^2}, \text{ para todo } V \in E_k^{\perp}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

---

## 1.5 Demonstrações dos Teoremas

---

Primeiramente, comecemos determinando a estrutura variacional que será adotada. Definimos em  $E$  o funcional associado a (1.24). Seja

$$\begin{aligned} J(U) &= \frac{1}{2} \|U\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A(x)U, U)_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} H((U + \Phi^m)_+) \\ &\quad - \int_{\Omega} G((U + \Phi^m)_+) - \int_{\Omega} (F - F^m, U)_{\mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

Omitimos a dependência nítida de  $J = J_m$  com o objetivo de “limpar” as notações na apresentação do trabalho e cientes que perigos de confusão serão evitados. Lembre-se sempre que faremos uma abordagem única nas demonstrações dos Teoremas até quando for possível, fazendo as distinções apropriadas quando necessário. Devemos encontrar pontos críticos para o funcional  $J$ . Para tanto, comecemos provando que este funcional satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha (vide [3]) para o caso dos Teoremas 1.1 e 1.3 ou o Teorema de Linking (vide [45]) para o caso dos Teoremas 1.2 e 1.4. Uma vez que temos crescimento crítico, faremos uso das hipóteses geométricas destes teoremas apenas para garantir, via princípio variacional de Ekeland, a existência de uma sequência PS associada a  $J$  (isto é, uma sequência  $(U_n) \in E$  tal que  $J(U_n) \rightarrow c$  e  $J'(U_n) \rightarrow 0$ ). O que faremos depois é provar que esta sequência PS converge para um nível de energia  $c$  suficientemente baixo, evitando os níveis de não compacidade do funcional  $J$ .

### 1.5.1 Geometria do Passo da Montanha

Nesta subseção, iremos provar que se estamos sob as condições dos Teoremas 1.1 ou 1.3 então podemos provar que  $J$  satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha.

**Teorema do Passo da Montanha (sem a condição de Palais-Smale):** Seja  $E$  um Espaço de Banach e  $J \in C^1(E; \mathbb{R})$ . Seja  $B_r = \{x \in E ; \|x\| < r\}$ . Suponha que  $J$  satisfaz

(a) existe  $r > 0$  tal que  $J(v) \geq \delta$  para todo  $v \in \partial B_r$ .

(b) existem  $w \in \partial B_1$  e  $R > r$  tais que  $J(Rw) \leq 0$ .

Então é possível construir uma sequência  $PS$  no nível  $\bar{c} \geq \delta$  definido por

$$\bar{c} = \inf_{v \in \Upsilon} \sup_{w \in v(E)} J(w)$$

onde  $\Upsilon = \{v \in C(E, E) : v(0) = 0 \text{ e } v(Rw) = Rw\}$ .

Faremos isso nos dois lemas que seguem.

**Lema 1.11.** *Sob as hipóteses do Teorema 1.1 ou 1.3, existem  $r, \delta > 0$  tais que*

$$J(V) \geq \delta \text{ para todo } V \in \partial B_r(0).$$

**Prova.** Tomando  $V = (v, w) \in E$  se supomos  $(A_1)$  então por (1.4) temos

$$\|V\|^2 - \int_{\Omega} (AV, V)_{\mathbb{R}^2} \geq \left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_1}\right) \|V\|^2 \geq C\|V\|^2 \quad (1.40)$$

e analogamente se supomos  $(A_3)$  e  $1 < \lambda_1^A$  então por (1.39) temos

$$\|V\|^2 - \int_{\Omega} (A(x)V, V)_{\mathbb{R}^2} \geq \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^A}\right) \|V\|^2 \geq C\|V\|^2. \quad (1.41)$$

Assim, lembrando das desigualdades (1.29) para  $H$  e  $G$  e (1.26), temos

$$\begin{aligned} J(V) &\geq C\|V\|^2 - \int_{\Omega} H((v + \varphi^m)_+, (w + \psi_m)_+) - \int_{\Omega} G((v + \varphi^m)_+, (w + \psi_m)_+) - Cm^{-N/2}\|V\| \\ &\geq C\|V\|^2 - M_H \left( \int_{\Omega} v_+^{2^*} + \int_{\Omega} w_+^{2^*} \right) - M_G \left( \int_{\Omega} v_+^p + \int_{\Omega} w_+^p \right) - Cm^{-N/2}\|V\| \\ &\geq C\|V\|^2 - C\|V\|^{2^*} - C\|V\|^p - Cm^{-N/2}\|V\|, \end{aligned}$$

para qualquer um dos casos (1.40) ou (3.7). Uma vez que podemos controlar o termo de menor ordem tomando  $m$  suficientemente grande, o Lema fica demonstrado. Além disso, é importante observar que tais  $r, \delta > 0$  são independentes de  $m$  grande. ■

Devemos agora encontrar  $W \in E$  e  $R > 0$  tais que  $\|RW\| > r$  e  $J(RW) \leq 0$ . Para o caso escalar é padrão escolher  $u_\epsilon$ , uma vez que será na sua direção que seremos capazes de “trazer para baixo” o nível do minimax do funcional  $J$ . No nosso caso, estamos trabalhando

com um termo crítico diferente do tradicional e a relação entre  $S$  e  $S_H$  dada no Lema 1.9 sugere que tomemos

$$U_\epsilon^m = (\gamma u_\epsilon^m, \kappa u_\epsilon^m) \quad (1.42)$$

onde  $\gamma, \kappa \geq 0$  são constantes não-negativas satisfazendo

$$\begin{aligned} \gamma^2 + \kappa^2 &= 1 \\ \overline{H}(\gamma, \kappa) &= M_{\overline{H}} \end{aligned} \quad (1.43)$$

e  $u_\epsilon^m$  definida em (3.8). Aqui,  $\overline{H}$  e  $M_{\overline{H}}$  estão definidos em (1.34) e (1.28) aplicado a  $\overline{H}$ .

**Lema 1.12.** *Sob as hipóteses dos Teoremas 1.1 ou 1.3, considere  $r$  dado no Lema 1.11. Existe  $R_0 > 0$  tal que  $\|R_0 U_\epsilon^m\| > r$  e*

$$J(RU_\epsilon^m) \leq 0 \text{ para todo } R \geq R_0.$$

**Prova.** Primeiramente note que

$$\int_{\Omega} (F^m, sU_\epsilon^m)_{\mathbb{R}^2} = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

e isto pode ser provado notando-se que  $F^m = -\Delta\Phi^m - A\Phi^m$  e  $\text{supp}\Phi^m \cap \text{supp}U_\epsilon^m = \emptyset$ .

Na desigualdade abaixo, enfatizamos a importância de separar os suportes de  $\Phi^m$  e  $U_\epsilon^m$ . Mais precisamente, uma vez que estas funções possuem suporte disjunto, vale a seguinte igualdade:

$$\int_{\Omega} H((R\gamma u_\epsilon^m + \varphi^m)_+, (R\kappa u_\epsilon^m + \psi^m)_+) = R^{2^*} H(\gamma, \kappa) \int_{\Omega} (u_\epsilon^m)^{2^*}.$$

Sendo assim, as estimativas 1 e 2 do Lema 1.10, nos dão

$$\begin{aligned} J(RU_\epsilon^m) &\leq C \frac{R^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon^m|^2 - CR^{2^*} \int_{\Omega} (u_\epsilon^m)^{2^*} + CR \\ &\leq CR + CR^2 - CR^{2^*}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Portanto, podemos tomar  $R_0$  suficientemente grande para que  $J(RU_\epsilon^m) \leq 0$  para cada  $R \geq R_0$ . ■

Podemos então definir o nível minimax do funcional  $J$  associado ao problema (1.24), tanto sob as hipóteses do Teorema 1.1, como supondo as condições do Teorema 1.3.

$$\tilde{c} = \inf_{v \in \Upsilon} \sup_{W \in v(E)} J(W) \quad (1.45)$$

onde  $\Upsilon = \{v \in C(E, E) : v(0) = 0 \text{ e } v(RU_\epsilon^m) = RU_\epsilon^m\}$ ,  $R$  dado no Lema 1.12.

Portanto, existe uma seqüência  $(V_n) \subset E$  tal que  $J(V_n) \rightarrow \tilde{c}$  e  $J'(V_n) \rightarrow 0$ .

O próximo resultado mostra que tal seqüência deve ser limitada.

**Proposição 1.13.** *A seqüência PS  $(V_n)$  obtida a partir dos Lemas 1.11 e 1.12 é limitada em  $E$ .*

**Prova.** Denote  $V_n = (v_{1,n}, v_{2,n})$ . Um cálculo direto com o auxílio das relações (1.27 para  $H$  e  $G$ ,  $H_3$ ,  $G_3$ ) nos mostra que

$$\begin{aligned} J(V_n) - \frac{1}{2}J'(V_n)V_n &= \frac{2}{N-2} \int_{\Omega} H((V_n + \Phi^m)_+) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} H_u((V_n + \Phi^m)_+)\varphi^m \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} H_v((V_n + \Phi^m)_+)\psi^m + \left(\frac{p}{2} - 1\right) \int_{\Omega} G((V_n + \Phi^m)_+) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} G_u((V_n + \Phi^m)_+)\varphi^m - \frac{1}{2} \int_{\Omega} G_v((V_n + \Phi^m)_+)\psi^m \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (F - F^m, V_n)_{\mathbb{R}^2} \end{aligned}$$

Note, no entanto, que  $\Phi^m < (0, 0)$ . Sendo assim, uma vez que  $|J(V_n)| \leq C$  e  $|J'(V_n)V_n| \leq C\|V_n\|$ , temos, fazendo uso de (1.26,  $H_1$ ,  $G_1$ ),

$$\int_{\Omega} H((V_n + \Phi^m)_+) + \int_{\Omega} G((V_n + \Phi^m)_+) \leq C_1 + C_2\|V_n\|. \quad (1.46)$$

De forma inteiramente análoga, podemos ainda obter as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} H_u((V_n + \Phi^m)_+)\varphi^m &\leq C_1 + C_2\|V_n\|; \\ - \int_{\Omega} H_v((V_n + \Phi^m)_+)\psi^m &\leq C_1 + C_2\|V_n\|; \\ - \int_{\Omega} G_u((V_n + \Phi^m)_+)\varphi^m &\leq C_1 + C_2\|V_n\|; \\ - \int_{\Omega} G_v((V_n + \Phi^m)_+)\psi^m &\leq C_1 + C_2\|V_n\|. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Observe agora que a partir de (1.40, 3.7 e 1.27) temos

$$\begin{aligned}
J'(V_n)V_n &\geq C\|V_n\|^2 - 2^* \int_{\Omega} H((V_n + \Phi^m)_+) + \int_{\Omega} H_u((V_n + \Phi^m)_+)\varphi^m \\
&\quad + \int_{\Omega} H_v((V_n + \Phi^m)_+)\psi^m + \int_{\Omega} G_u((V_n + \Phi^m)_+)\varphi^m \\
&\quad + \int_{\Omega} G_v((V_n + \Phi^m)_+)\psi^m - p \int_{\Omega} G((V_n + \Phi^m)_+) - \int_{\Omega} (F - F^m, V_n)_{\mathbb{R}^2}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, por (1.46, 1.47 e 1.26) vemos que

$$\|V_n\|^2 \leq C_1 + C_2\|V_n\|,$$

o que completa a demonstração. ■

## 1.5.2 Geometria de Linking

Esta subseção está dedicada a provar que o funcional associado ao problema (1.24) sob as hipóteses dos Teorema 1.2 ou 1.4 possui as condições geométricas do Teorema de Linking. Provaremos também que a sequência  $PS$  do nível minimax definido por essa geometria é limitada.

**Teorema de Linking (sem a condição de Palais-Smale):** Seja  $E$  um Espaço de Banach. Suponha que  $E = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ , onde  $\mathcal{V}$  é um espaço de dimensão finita e  $J \in C^1(E; \mathbb{R})$ . Seja  $B_r = \{x \in E ; \|x\| < r\}$ . Suponha que  $J$  satisfaz

- (a) existem constantes  $\rho, \beta > 0$  tais que  $J|_{\partial B_\rho \cap \mathcal{W}} \geq \beta$ ;
- (b) existem  $w \in \partial B_1 \cap \mathcal{W}$ ,  $\alpha < \beta$  e  $R > \rho$  tais que se

$$Q := (\overline{B_R} \cap \mathcal{V}) \oplus \{sw ; 0 \leq s \leq R\}$$

então  $J|_{\partial Q} \leq \alpha$ .

Então é possível construir uma sequência  $PS$  no nível  $\tilde{c} \geq \beta$  definido por

$$\tilde{c} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in Q} J(\gamma(u))$$

onde  $\Gamma = \{h \in C(Q, E) ; h(u) = u \text{ se } u \in \partial Q\}$ .

Naturalmente, a decomposição de  $E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  que utilizaríamos seria  $E = H_k \oplus H_k^\perp$  onde  $H_k$  está definido em (1.36) para o caso do Teorema 1.2 ou  $E = E_k \oplus E_k^\perp$  com  $E_k$  definido em (1.38) para o caso do Teorema 1.4. Porém tais decomposições tornam difícil o trabalho de estimar o funcional  $J$  aplicado em termos como  $V + U_\epsilon^m$  com  $V \in H_k$  ou  $V \in E_k$ . A ideia consiste em notar que se tivéssemos os suportes dessas funções disjuntos, então as estimativas necessárias para provarmos as hipóteses (a) e (b) dadas no teorema acima seriam muito mais fáceis de serem obtidas. O que faremos portanto é novamente criar “buracos” nas autofunções de  $H_k$  ou  $E_k$  criando aproximações destas autofunções cujos suportes se separem do suporte de  $U_\epsilon^m$ .

Considere então  $m$  e  $x_m$  dados em (1.22) e  $\zeta_m \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  tal que:  $0 \leq \zeta_m \leq 1$ ,  $|\nabla \zeta_m(x)| \leq 2m$  e

$$\zeta_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in B_{2/m}(x_m) \\ 1 & \text{se } x \in \Omega \setminus B_{3/m}(x_m). \end{cases}$$

Defina portanto

$$\begin{aligned} e_i^m &= \zeta_m e_i \\ \Phi_i^m &= \zeta_m \Phi_i^A \end{aligned}$$

e considere os seguintes espaços de dimensão finita

$$\begin{aligned} H_k^m &= \text{span}\{(e_i^m, 0), (0, e_i^m); 1 \leq i \leq k\} \\ E_k^m &= \text{span}\{\Phi_i^m; 1 \leq i \leq k\}. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Valem então as seguintes estimativas

**Lema 1.14.** *Se  $m \rightarrow \infty$  então  $e_i^m \rightarrow e_i$  em  $H_0^1(\Omega)$  e  $\Phi_i^m \rightarrow \Phi_i^A$  em  $E$  para todo  $1 \leq i \leq k$ . Além disso para todo  $m$  suficientemente grande, temos*

$$(i) \text{ Existe } c_k > 0 \text{ tal que } \|V\|^2 \leq \left(\lambda_k + \frac{c_k}{m^N}\right) \int_\Omega |V|^2, \text{ para todo } V \in H_k^m.$$

$$(ii) \text{ Existe } c_k > 0 \text{ tal que } \|V\|^2 \leq \left(\lambda_k^A + \frac{c_k}{m^N}\right) \int_\Omega (A(x)V, V)_{\mathbb{R}^2}, \text{ para todo } V \in E_k^m.$$

A demonstração deste Lema pode ser feita seguindo passos inteiramente análogos àqueles encontrados em [32].

Observe que como  $e_i^m \rightarrow e_i$  e  $\Phi_i^m \rightarrow \Phi_i^A$  temos que para  $m$  suficientemente grande podemos tomar as seguintes decomposições (que não serão ortogonais) de  $E$ : Para o caso do

Teorema 1.2,  $E = H_k^m \oplus H_k^\perp$  e para o caso do Teorema 1.4 podemos escolher  $E = E_k^m \oplus E_k^\perp$ . Iremos provar a geometria de Linking para  $J$  com respeito a cada decomposição.

**Lema 1.15.** *Sob as condições do Teorema 1.2 temos que 0 é mínimo local para  $J$  restrito a  $H_k^\perp$ . Se supomos as condições do Teorema 1.4 então 0 é mínimo local para  $J$  restrito a  $E_k^\perp$ .*

**Prova.** Se supomos  $(A_2)$  então temos

$$\|V\|^2 - \int_{\Omega} (AV, V)_{\mathbb{R}^2} \geq \left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right) \|V\|^2 \geq C\|V\|^2 \quad \text{para todo } V \in H_k^\perp \quad (1.49)$$

e analogamente se supomos  $(A_3)$  e  $\lambda_k^A < 1 < \lambda_{k+1}^A$  então por (1.39) temos

$$\|V\|^2 - \int_{\Omega} (A(x)V, V)_{\mathbb{R}^2} \geq \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}^A}\right) \|V\|^2 \geq C\|V\|^2. \quad (1.50)$$

Assim considerando  $V \in H_k^\perp$  para o caso das hipóteses do Teorema 1.2 ou  $V \in E_k^\perp$  caso suponhamos as condições do Teorema 1.4, de maneira idêntica ao Lema 1.11 temos

$$\begin{aligned} J(V) &\geq C\|V\|^2 - \int_{\Omega} H((v + \varphi^m)_+, (w + \psi_m)_+) - \int_{\Omega} G((v + \varphi^m)_+, (w + \psi_m)_+) - Cm^{-N/2}\|V\| \\ &\geq C\|V\|^2 - M_H \left( \int_{\Omega} v_+^{2^*} + \int_{\Omega} w_+^{2^*} \right) - M_G \left( \int_{\Omega} v_+^p + \int_{\Omega} w_+^p \right) - Cm^{-N/2}\|V\| \\ &\geq C\|V\|^2 - C\|V\|^{2^*} - C\|V\|^p - Cm^{-N/2}\|V\|, \end{aligned}$$

para qualquer um dos casos (1.49) ou (1.50). Uma vez que podemos controlar o termo de menor ordem tomando  $m$  suficientemente grande, o Lema fica demonstrado.  $\blacksquare$

**Observação 7:** Da forma como escolhemos  $H_k^m$  e  $E_k^m$ , dados em (1.48), podemos mostrar que para qualquer  $s \geq 0$  temos

$$J(V + sU_\epsilon^m) = J(V) + J(sU_\epsilon^m) \quad \text{para todo } V \in H_k^m \text{ ou } V \in E_k^m. \quad (1.51)$$

Este fato será muito útil e facilitará várias estimativas necessárias mais a frente. Obviamente, utilizamos crucialmente o fato que os suportes das autofunções “furadas” e o suporte de  $U_\epsilon^m$  são disjuntos.

**Prova de (1.51):** Mostraremos apenas que

$$\int_{\Omega} H((V + sU_\epsilon^m + \Phi^m)_+) = \int_{\Omega} H((V + \Phi^m)_+) + \int_{\Omega} H((sU_\epsilon^m + \Phi^m)_+)$$

pois o mesmo argumento funcionará para  $G$ . Para os termos restantes do funcional  $J$  a demonstração é evidente. Uma vez que  $\text{supp}(V + \Phi^m) \cap \text{supp}(U_\epsilon^m) = \emptyset$  e  $\Phi^m \leq (0, 0)$  temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} H((V + sU_\epsilon^m + \Phi^m)_+) &= \int_{\text{supp}(V + \Phi^m)} H((V + sU_\epsilon^m + \Phi^m)_+) + \int_{\text{supp}(U_\epsilon^m)} H((V + sU_\epsilon^m + \Phi^m)_+) \\ &= \int_{\text{supp}(V + \Phi^m)} H((V + \Phi^m)_+) + \int_{\text{supp}(U_\epsilon^m)} H((sU_\epsilon^m)_+) \\ &= \int_{\Omega} H((V + \Phi^m)_+) + \int_{\Omega} H((sU_\epsilon^m + \Phi^m)_+), \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Fixemos  $m$  suficientemente grande para que seja verdadeiro o Lema 1.15 e

$$\left( \frac{\mu_1}{\lambda_k + c_k/m^N} - 1 \right), \left( \frac{1}{\lambda_k^A + c_k/m^N} - 1 \right) > 0.$$

Definamos agora os conjuntos

$$\begin{aligned} P_m^R &= (\overline{B_R} \cap H_k^m) \oplus \{sU_\epsilon^m; 0 \leq s \leq R\} \\ Q_m^R &= (\overline{B_R} \cap E_k^m) \oplus \{sU_\epsilon^m; 0 \leq s \leq R\}. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Assim como no caso da Geometria do Passo da Montanha, escolhemos  $W = U_\epsilon^m$  dado em (1.42) como direção a seguir na demonstração da Geometria de Linking. Observe que temos  $U_\epsilon^m$  ortogonal a  $H_k^m$  e  $E_k^m$ . Porém, vemos que  $U_\epsilon^m$  não pertence ao espaço  $H_k^\perp$  ou  $E_k^\perp$ . No entanto, uma vez que 0 é mínimo local de  $J$  restrito aos espaços  $H_k^\perp$  e  $E_k^\perp$  e  $J(sU_\epsilon^m) \rightarrow 0$  quando  $s \rightarrow 0$ , tal geometria pode ser obtida ao provarmos o seguinte lema:

**Lema 1.16.** *Dado  $\epsilon > 0$  existe  $R_\epsilon > 0$  tal que*

(i) *Sob as hipóteses do Teorema 1.2, se  $V \in \partial P_m^{R_\epsilon}$  então  $J(V) \leq 0$ .*

(ii) *Sob as hipóteses do Teorema 1.4, se  $V \in \partial Q_m^{R_\epsilon}$  então  $J(V) \leq 0$ .*

Além disso  $R_\epsilon \rightarrow \infty$  se  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Prova.** Uma vez que temos (1.51), começamos estimando separadamente  $J(V)$ , para todo  $V \in H_k^m$  ou  $E_k^m$  e  $J(sU_\epsilon^m)$  com  $s \geq 0$ .

Observamos aqui que escolhemos as funções cut-off  $\eta_m$  para gerar a função  $\Phi^m$  e funções cut-off levemente diferentes  $\zeta_m$  para “furar” as autofunções em  $H_k$  e  $E_k$ . Da forma como

foram escolhidos estes cut-off's, temos  $\Phi^m = \Phi$  em  $\text{supp}(V)$  para qualquer  $V \in H_k^m$  ou  $E_k^m$ . Sendo assim, sempre teremos  $\int_{\Omega}(F - F^m)V = 0$  pois  $F^m = F$  em  $\text{supp}(V)$ . Obtemos então

$$\begin{aligned} J(V) &= \frac{1}{2}\|V\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A(x)V, V)_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} (H + G)(V + \Phi^m) \\ &\leq \frac{1}{2}\|V\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A(x)V, V)_{\mathbb{R}^2} \end{aligned}$$

para qualquer  $V \in H_k^m$  ou  $V \in E_k^m$ . Nas hipóteses do Teorema 1.2, tomamos  $V \in H_k^m$  e notamos que pelo Lema 1.14 temos

$$\begin{aligned} J(V) &\leq \frac{1}{2}\|V\|^2 - \frac{1}{2}\mu_1 \int_{\Omega} |V|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\mu_1}{\lambda_k + c_k/m^N} \right) \|V\|^2. \end{aligned}$$

Analogamente, sob as condições do Teorema 1.4, tomamos  $V \in E_k^m$  e fazendo uso do Lema 1.14 vemos que

$$\begin{aligned} J(V) &\leq \frac{1}{2}\|V\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A(x)V, V)_{\mathbb{R}^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_k^A + c_k/m^N} \right) \|V\|^2. \end{aligned}$$

Como  $\mu_1 > \lambda_k$  e  $1 > \lambda_k^A$ , por hipóteses, podemos tomar  $C_1 > 0$  tal que

$$C_1 < \begin{cases} \left( \frac{\mu_1}{\lambda_k + c_k/m^N} - 1 \right) \\ \left( \frac{1}{\lambda_k^A + c_k/m^N} - 1 \right) \end{cases}$$

para todo  $m$  suficientemente grande. Portanto, fazendo sempre a distinção necessária dos espaços considerados ( $H_k^m$  para o Teorema 1.2 e  $E_k^m$  para o Teorema 1.4) temos que

$$J(V) \leq -C_1\|V\|^2 \text{ para todo } V \in H_k^m \text{ ou } E_k^m. \quad (1.53)$$

Já para  $sU_{\epsilon}^m$ , uma vez que

$$\int_{\Omega} (F^m, sU_{\epsilon}^m)_{\mathbb{R}^2} = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

pois  $\text{supp}(\Phi^m) \cap \text{supp}(U_{\epsilon}^m) = \emptyset$ , temos

$$J(sU_{\epsilon}^m) \leq Cs^2 \int_{\Omega} |\nabla u_{\epsilon}^m|^2 - H(\gamma, \kappa)s^{2^*} \int_{\Omega} (u_{\epsilon}^m)^{2^*} + Cs. \quad (1.54)$$

Seguindo argumentos tradicionais, quebramos  $\partial P_m^R$  e  $\partial Q_m^R$  em três diferentes conjuntos, cada. Consideramos

$$\begin{aligned}\partial P_m^R &= P_1 \cup P_2 \cup P_3 \\ \partial Q_m^R &= Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}P_1 &= H_k^m \cap \overline{B_R} \\ P_2 &= \{V + RU_\epsilon^m; V \in H_k^m \cap \overline{B_R}\} \\ P_3 &= \{V + sU_\epsilon^m; V \in H_k^m, \|V\| = R \text{ e } 0 \leq s \leq R\}\end{aligned}$$

e  $Q_1, Q_2, Q_3$  definidos de maneira análoga, apenas substituindo  $E_k^m$  por  $H_k^m$  nas definições acima.

Se  $V \in P_1$  ou se  $V \in Q_1$  temos por (1.53) que  $J(V) \leq 0$  para todo  $R > 0$ .

Se  $W \in P_2$  ou se  $W \in Q_2$  então  $W = V + RU_\epsilon^m$  e por (1.53) e (1.54) temos

$$\begin{aligned}J(W) &= J(V) + J(RU_\epsilon^m) \\ &\leq CR^2 \int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon^m|^2 - H(\gamma, \kappa)R^{2^*} \int_{\Omega} (u_\epsilon^m)^{2^*} + CR \\ &= -C_1R^{2^*} + C_2R^2 + C_3R + C_4\epsilon^{N-2}\end{aligned}$$

onde utilizamos os itens 1 e 2 do Lema 1.10. Portanto,  $J(W) \leq 0$  para todo  $R$  suficientemente grande (independentemente de  $\epsilon$  pequeno) e para todo  $W \in P_2$  ou  $Q_2$ .

A estimativa mais delicada é feita em  $P_3$  e  $Q_3$ . Se  $W \in P_3$  ou  $W \in Q_3$  temos que  $W = V + sU_\epsilon^m$  com  $\|V\| = R$  e  $0 \leq s \leq R$ . Daí temos, novamente por (1.53) e (1.54) e pelo Lema 1.10,

$$\begin{aligned}J(W) &= J(V) + J(sU_\epsilon^m) \\ &\leq -C_1R^2 + C_2s^2 \int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon^m|^2 - H(\gamma, \kappa)s^{2^*} \int_{\Omega} (u_\epsilon^m)^{2^*} + Cs \\ &\leq -C_1R^2 + S^{N/2}(C_2s^2 - H(\gamma, \kappa)s^{2^*}) + C_2s^2O(\epsilon^{N-2}) - H(\gamma, \kappa)s^{2^*}O(\epsilon^N) + Cs \\ &\leq -C_1R^2 + C_2R + C_3 + C_4\epsilon^{N-2}R^{2^*}.\end{aligned}$$

Tomamos portanto  $R_\epsilon = \max\{R; -C_1R^2 + C_2R + C_3 + C_4\epsilon^{N-2}R^{2^*} = 0\}$ . É fácil ver que  $R_\epsilon$  existe e que  $R_\epsilon \rightarrow \infty$  se  $\epsilon \rightarrow 0$ . ■

Para cada um dos Teoremas 1.2 ou 1.4, podemos definir o nível minimax da geometria de linking do funcional  $J$ . Para as hipóteses do Teorema 1.2 defina

$$\tilde{c}_1 = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{W \in \gamma(P_m^{R\epsilon})} J(W) \quad (1.55)$$

onde  $\Gamma = \{h \in C(P_m^{R\epsilon}, E) ; h(u) = u \text{ se } u \in \partial P_m^{R\epsilon}\}$  e para as condições do Teorema 1.4 defina

$$\tilde{c}_2 = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{W \in \gamma(Q_m^{R\epsilon})} J(W), \quad (1.56)$$

com  $\Gamma$  analogamente definido.

Para finalizar esta subseção, resta-nos demonstrar que as sequências  $PS$  obtidas nestes níveis minimax são limitadas. Vale a pena observar aqui que a hipótese adicional que impomos na criticalidade  $H$  para os Teoremas 1.2 e 1.4 só serão necessárias neste próximo resultado. A técnica que utilizamos para provar que as sequências  $PS$  são limitadas requer que controlemos a norma  $L^{2^*}$  de cada componente  $u_n$  e  $v_n$  das sequências  $PS$  dadas por  $V_n = (u_n, v_n)$ .

**Proposição 1.17.** *As sequências  $PS$  dos níveis minimax dados em (1.55) e (1.56) são limitadas.*

**Prova.** Seja  $(V_n) = (u_n, v_n) \subset E$  tal que  $J(V_n) \rightarrow c$  e  $J'(V_n) \rightarrow 0$ , onde  $c = \tilde{c}_1$  sob as hipóteses do Teorema 1.2 ou  $c = \tilde{c}_2$  sob as hipóteses do Teorema 1.4. As estimativas (1.46) e (1.47) obtidas na Proposição 1.13 são obviamente válidas também aqui, uma vez que ao fazermos  $J(V_n) - (1/2)J'(V_n)V_n$  nós ignoramos a parte linear do funcional. Note agora que dessa forma, a hipótese adicional para a criticalidade  $H$  nos Teoremas 1.2 e 1.4 implica que

$$\int_{\Omega} (u_n + \varphi^m)_+^{2^*} + \int_{\Omega} (v_n + \psi^m)_+^{2^*} \leq C_1 + C_2 \|V_n\|. \quad (1.57)$$

Suponha então agora que estamos sob as condições do Teorema 1.2. Então temos  $A(x) = A$  constante e  $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_2$ . Tomemos então a decomposição  $E = H_k + H_k^\perp$  dada em (1.36). Assim, seja  $V_n = V_n^k + V_n^\perp$  tal decomposição. Vemos que

$$J'(V_n)V_n^k = \|V_n^k\|^2 - \int_{\Omega} (AV_n^k, V_n^k)_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} (\nabla(H + G)((V_n + \Phi^m)_+), V_n^k)_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} (F - F^m, V_n^k)_{\mathbb{R}^2}.$$

Logo fazendo uso de (1.37), (1.4), (1.26) e (1.29) para as funções  $H_u$ ,  $H_v$ ,  $G_u$  e  $G_v$ , temos

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\mu_1}{\lambda_k} - 1 \right) \|V_n^k\|^2 \\
& \leq -J'(V_n)V_n^k - \int_{\Omega} (\nabla(H+G)((V_n + \Phi^m)_+), V_n^k)_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} (F - F^m, V_n^k)_{\mathbb{R}^2} \\
& \leq \int_{\Omega} (H_u + G_u)((V_n + \Phi^m)_+) |u_n^k| + \int_{\Omega} (H_v + G_v)((V_n + \Phi^m)_+) |v_n^k| + C_1 \|V_n^k\| \\
& \leq M_{H_u} \left( \int_{\Omega} (u_n + \varphi^m)_+^{2^*-1} |u_n^k| + \int_{\Omega} (v_n + \psi^m)_+^{2^*-1} |u_n^k| \right) \\
& \quad + M_{H_v} \left( \int_{\Omega} (u_n + \varphi^m)_+^{2^*-1} |v_n^k| + \int_{\Omega} (v_n + \psi^m)_+^{2^*-1} |v_n^k| \right) \\
& \quad + M_{G_u} \left( \int_{\Omega} (u_n + \varphi^m)_+^{p-1} |u_n^k| + \int_{\Omega} (v_n + \psi^m)_+^{p-1} |u_n^k| \right) \\
& \quad + M_{G_v} \left( \int_{\Omega} (u_n + \varphi^m)_+^{p-1} |v_n^k| + \int_{\Omega} (v_n + \psi^m)_+^{p-1} |v_n^k| \right) + C_1 \|V_n^k\|.
\end{aligned}$$

Utilizando desigualdades de Hölder e Young e as imersões de Sobolev vemos ainda que

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\mu_1}{\lambda_k} - 1 \right) \|V_n^k\|^2 \\
& \leq C \|V_n^k\| + M_{H_u} \left( 2\epsilon \left( \int_{\Omega} |u_n^k|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} + C_{\epsilon} \left[ \left( \int_{\Omega} (u_n + \varphi^m)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} + \left( \int_{\Omega} (v_n + \psi^m)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} \right] \right) \\
& \quad + M_{H_v} \left( 2\epsilon \left( \int_{\Omega} |v_n^k|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} + C_{\epsilon} \left[ \left( \int_{\Omega} (u_n + \varphi^m)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} + \left( \int_{\Omega} (v_n + \psi^m)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} \right] \right) \\
& \quad + M_{G_u} \left( 2\epsilon \left( \int_{\Omega} |u_n^k|^{\frac{2^*}{2^*-p+1}} \right)^{\frac{2(2^*-p+1)}{2^*}} + C_{\epsilon} \left[ \left( \int_{\Omega} (u_n + \varphi^m)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(p-1)}{2^*}} + \left( \int_{\Omega} (v_n + \psi^m)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(p-1)}{2^*}} \right] \right) \\
& \quad + M_{G_v} \left( 2\epsilon \left( \int_{\Omega} |v_n^k|^{\frac{2^*}{2^*-p+1}} \right)^{\frac{2(2^*-p+1)}{2^*}} + C_{\epsilon} \left[ \left( \int_{\Omega} (u_n + \varphi^m)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(p-1)}{2^*}} + \left( \int_{\Omega} (v_n + \psi^m)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(p-1)}{2^*}} \right] \right) \\
& \leq C_1 \epsilon \|V_n^k\|^2 + C_2 \|V_n^k\| + C_3 \left[ \left( \int_{\Omega} (u_n + \varphi^m)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} + \left( \int_{\Omega} (v_n + \psi^m)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} \right] \\
& \quad + C_4 \left[ \left( \int_{\Omega} (u_n + \varphi^m)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(p-1)}{2^*}} + \left( \int_{\Omega} (v_n + \psi^m)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(p-1)}{2^*}} \right].
\end{aligned}$$

Tomando  $\epsilon$  suficientemente pequeno e levando em conta (1.57) deduzimos que

$$\|V_n^k\|^2 \leq C_1 \|V_n^k\| + C_2 (1 + \|V_n\|)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} + C_3 (1 + \|V_n\|)^{\frac{2(p-1)}{2^*}}.$$

De forma completamente análoga podemos também estimar  $\|V_n^\perp\|$ , concluindo que

$$\|V_n^\perp\|^2 \leq C_1 \|V_n^\perp\| + C_2 (1 + \|V_n\|)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} + C_3 (1 + \|V_n\|)^{\frac{2(p-1)}{2^*}}.$$

Somando-se estas duas últimas estimativas, obtemos

$$\|V_n\|^2 \leq C_1 \|V_n\| + C_2 (1 + \|V_n\|)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} + C_3 (1 + \|V_n\|)^{\frac{2(p-1)}{2^*}}.$$

Mas

$$0 \leq \frac{2(p-1)}{2^*} < \frac{2(2^*-1)}{2^*} < 2$$

e portanto  $\|V_n\|$  deve ser limitada, como queríamos.

A demonstração do caso do Teorema 1.4 é praticamente idêntica. A única diferença consiste em tomar a decomposição apropriada do espaço  $E = E_k \oplus E_k^\perp$  onde  $E_k$  é dado em (1.38). As estimativas da parte linear do funcional  $J$  são feitas utilizando as desigualdades (1.39) ao invés de (1.37). ■

### 1.5.3 Controle do nível minimax

Os argumentos que utilizamos no restante do capítulo são válidos para todas as diferentes hipóteses nos Teoremas 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4. Portanto, uniformizamos então a notação:  $(V_n)$  sempre denotará qualquer uma das sequências  $PS$  obtidas nas subseções anteriores, bem como o nível  $\bar{c}$  denotará qualquer um dos níveis minimax dessas sequências, obtidos seja via Passo da Montanha, seja via Linking, e definidos em (1.45), (1.55) e (1.56). Como costume, uma vez que  $V_n$  é limitada podemos supor então (passando a uma subsequência, se necessário)

$$V_n \rightharpoonup V \in E \text{ e } \|V_n - V\| \text{ convergente.}$$

Lembrando que  $H_u$  e  $H_v$  são  $(2^* - 1)$ -homogêneas e  $G_u$  e  $G_v$  são  $(p - 1)$ -homogêneas, por argumentos tradicionais podemos provar que  $V = (v_1, v_2)$  deve ser uma solução de (1.24). Precisamos, no entanto, mostrar que  $V \neq \Phi_T - \Phi^m$ .

Notemos que obviamente não temos necessariamente  $V_n \rightarrow V$  em  $E$ . O primeiro passo consiste em provar que o nível  $J(V)$  difere do nível  $\bar{c}$  proporcionalmente à “distância que a sequência  $(V_n)$  fica de  $V$ ”. Esse é o resultado contido no próximo lema.

**Lema 1.18.** *Seja  $K := \lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n - V\|^2$ . Então*

$$J(V) + \frac{K}{N} = \bar{c}. \quad (1.58)$$

*Além disso, se  $K > 0$  então  $K \geq (1/2^*)^{(N-2)/2} S_H^{N/2}$ , onde  $S_H$  é dado em (1.33).*

**Prova.** Começemos mostrando alguns fatos preliminares. Todos eles são consequências diretas da convergência fraca  $V_n \rightharpoonup V$ :

(1) Utilizamos um resultado devido a de Morais Filho - Souto [25] o qual é uma extensão do Lema de Brezis-Lieb (vide [6]) para funções homogêneas. No nosso caso, garantimos que

$$\int_{\Omega} H((V_n + \Phi^m)_+) - \int_{\Omega} H((V + \Phi^m)_+) = \int_{\Omega} H((V_n - V)_+) + o(1).$$

(2) Uma vez que  $E$  é espaço de Hilbert, temos

$$\|V_n\|^2 = \|V_n - V\|^2 + \|V\|^2 + o(1).$$

(3) Sendo  $p < 2^*$  também obtemos

$$\int_{\Omega} G((V_n + \Phi^m)_+) = \int_{\Omega} G((V + \Phi^m)_+) + o(1).$$

(4) Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e lembrando que  $H_u$  e  $H_v$  são  $(2^* - 1)$ -homogêneas e  $G_u$  e  $G_v$  são  $(p - 1)$ -homogêneas, deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} H_u((V_n + \Phi^m)_+) \varphi^m &= \int_{\Omega} H_u((V + \Phi^m)_+) \varphi^m + o(1); \\ \int_{\Omega} H_v((V_n + \Phi^m)_+) \psi^m &= \int_{\Omega} H_v((V + \Phi^m)_+) \psi^m + o(1); \\ \int_{\Omega} G_u((V_n + \Phi^m)_+) \varphi^m &= \int_{\Omega} G_u((V + \Phi^m)_+) \varphi^m + o(1); \\ \int_{\Omega} G_v((V_n + \Phi^m)_+) \psi^m &= \int_{\Omega} G_v((V + \Phi^m)_+) \psi^m + o(1). \end{aligned}$$

Agora, uma vez que  $J'(V_n) \rightarrow 0$ , temos

$$\begin{aligned} &\|V_n\|^2 - \int_{\Omega} (AV_n, V_n)_{\mathbb{R}^2} + \int_{\Omega} H_u((V_n + \Phi^m)_+) \varphi^m + \int_{\Omega} H_v((V_n + \Phi^m)_+) \psi^m \\ &- 2^* \int_{\Omega} H((V_n + \Phi^m)_+) - p \int_{\Omega} G((V_n + \Phi^m)_+) + \int_{\Omega} G_u((V_n + \Phi^m)_+) \varphi^m \\ &+ \int_{\Omega} G_v((V_n + \Phi^m)_+) \psi^m - \int_{\Omega} (F_T - F_T^m, V_n)_{\mathbb{R}^2} = o(1). \end{aligned}$$

Invocando (1), (2), (3), (4) e  $J'(V)V = 0$  na equação acima, vem

$$\|V_n - V\|^2 = 2^* \int_{\Omega} H((V_n - V)_+) + o(1). \quad (1.59)$$

Similarmente, a partir de  $J(V_n) \rightarrow \bar{c}$ , (1), (2) e (3), vemos que

$$\bar{c} + o(1) = J(V) + \frac{1}{2} \|V_n - V\|^2 - \int_{\Omega} H((V_n - V)_+). \quad (1.60)$$

Daí obtemos (1.58) de (1.59) e (1.60).

Para finalizar essa demonstração, suponha  $K > 0$ . Então, por (1.59),

$$\|V_n - V\|^2 \geq S_H \left( \int_{\Omega} H((V_n - V)_+) \right)^{\frac{N-2}{N}} = S_H \left( \frac{1}{2^*} \|V_n - V\|^2 + o(1) \right)^{\frac{N-2}{N}}$$

e tomando  $n \rightarrow \infty$  temos  $K \geq (1/2^*)^{(N-2)/2} S_H^{N/2}$ , como queríamos demonstrar.  $\blacksquare$

A partir de agora, assim como em [9], será conveniente tomar  $0 < d < 1$  (que será escolhido mais precisamente posteriormente) e  $\epsilon^d = 1/2m$ . Isto facilitará a obtenção das estimativas necessárias; notamos que essa escolha de  $\epsilon$  é necessária para que possamos utilizar os itens (4), (5) e (6) do Lema 1.10 .

**Lema 1.19.** *Fixe  $\epsilon^d = 1/2m$ . Então*

$$J(\Phi - \Phi^m) \leq C\epsilon^{dN}.$$

**Prova.** Por definição, vemos que

$$\int_{\Omega} (F - F^m, \Phi - \Phi^m)_{\mathbb{R}^2} = \|\Phi - \Phi^m\|^2 - \int_{\Omega} (A(x)(\Phi - \Phi^m), \Phi - \Phi^m)_{\mathbb{R}^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} J(\Phi - \Phi^m) &= \frac{1}{2} \|\Phi - \Phi^m\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A(x)(\Phi - \Phi^m), \Phi - \Phi^m)_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} (F - F^m, \Phi - \Phi^m)_{\mathbb{R}^2} \\ &= \frac{1}{2} \|\Phi - \Phi^m\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A(x)(\Phi - \Phi^m), \Phi - \Phi^m)_{\mathbb{R}^2} \\ &\quad - \left( \|\Phi - \Phi^m\|^2 - \int_{\Omega} (A(x)(\Phi - \Phi^m), \Phi - \Phi^m)_{\mathbb{R}^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \|\Phi - \Phi^m\|^2 - \int_{\Omega} (A(x)(\Phi - \Phi^m), \Phi - \Phi^m)_{\mathbb{R}^2} \right) \\ &\leq C \|\Phi - \Phi^m\|^2. \end{aligned}$$

Consequentemente, temos por (1.25)

$$J(\Phi - \Phi^m) \leq Cm^{-N} \leq C\epsilon^{dN}.$$

■

Seja  $e > 0$  tal que

$$\frac{1}{e} + \frac{1}{r} + \frac{1}{2} = 1, \quad (1.61)$$

onde  $r > N$  é dado em (1.6). Isto implica que  $2 < e < 2^*$ .

O próximo resultado demonstra que os níveis minimax estão limitados por cima por uma constante que será crucial para demonstrarmos que  $V \neq \Phi - \Phi^m$ .

**Proposição 1.20.** (i) *Suponha  $N \geq 6$ . Se  $e/N < d < 1 - 2/(N - 2)$  então*

$$\bar{c} < \frac{(1/2^*)^{(N-2)/2}}{N} S_H^{N/2} - C\epsilon^2.$$

(ii) *Suponha  $N = 3, 4, 5$ . Se  $2^* - p < d < p/2 - 2/(N - 2)$  então*

$$\bar{c} < \frac{(1/2^*)^{(N-2)/2}}{N} S_H^{N/2} - C\epsilon^{N-(N-2)p/2}.$$

**Prova.** Notamos inicialmente que a estimativa (1.44), apesar de ter sido obtida sob as hipóteses dos Teoremas 1.1 e 1.3, é igualmente válida nas condições dos Teoremas 1.3 e 1.4. De posse desta, para cada  $\epsilon > 0$  podemos escolher  $s_\epsilon > 0$  tal que

$$\sup_{s \geq 0} J(sU_\epsilon^m) = J(s_\epsilon U_\epsilon^m).$$

Além disso, podemos provar que  $s_\epsilon \geq l$  para algum  $l > 0$  e para todo  $\epsilon > 0$ . Sendo assim, note que para  $\tilde{c}$  definido em (1.45)

$$\tilde{c} \leq J(s_\epsilon U_\epsilon^m).$$

Além disso, observe ainda que  $J(V) \leq 0$  para todo  $V \in H_m^k$  ou todo  $V \in E_k^m$ . Portanto, se  $\tilde{c}_i$  com  $i = 1$  ou  $i = 2$  é dado em (1.55) ou (1.56) e utilizando (1.51) temos

$$\begin{aligned} \tilde{c}_i &\leq \sup\{J(V + sU_\epsilon^m) ; V \in V_k^m, s \geq 0\} \\ &= \sup\{J(V) + J(sU_\epsilon^m) ; V \in V_k^m, s \geq 0\} \\ &\leq \sup_{s \geq 0} J(sU_\epsilon^m) = J(s_\epsilon U_\epsilon^m), \end{aligned}$$

onde  $V_k^m = H_k^m$  se  $i = 1$  e  $V_k^m = E_k^m$  se  $i = 2$ .

Conseqüentemente, precisamos apenas mostrar que

$$J(s_\epsilon U_\epsilon^m) < \begin{cases} \frac{(1/2^*)^{(N-2)/2}}{N} S_H^{N/2} - C\epsilon^2 & \text{se } N \geq 6; \\ \frac{(1/2^*)^{(N-2)/2}}{N} S_H^{N/2} - C\epsilon^{N-(N-2)p/2} & \text{se } N = 3, 4, 5. \end{cases}$$

Então, fixe  $\epsilon > 0$ . Utilizando o Lema 1.10 nos itens (5) e (6), (1.43) e a relação (1.61) temos

$$\begin{aligned} J(s_\epsilon U_\epsilon^m) &\leq \frac{s_\epsilon^2}{2} (\gamma^2 + \kappa^2) \int_\Omega |\nabla u_\epsilon^m|^2 - s_\epsilon^{2^*} H(\gamma, \kappa) \int_\Omega (u_\epsilon^m)^{2^*} \\ &\quad + s_\epsilon \left( \int_{B_{1/m}} |\gamma f_1 + \kappa f_2| u_\epsilon^m \right) - C(\|u_\epsilon^m\|_2^2 + G(\gamma, \kappa) \|u_\epsilon^m\|_p^p) \\ &\leq \left( \frac{s_\epsilon^2}{2} - s_\epsilon^{2^*} H(\gamma, \kappa) \right) [S^{N/2} + O((\epsilon m)^{N-2})] \\ &\quad + C|B_{1/m}|^{1/e} \|u_\epsilon^m\|_2 - C(\|u_\epsilon^m\|_2^2 + G(\gamma, \kappa) \|u_\epsilon^m\|_p^p). \end{aligned}$$

Agora tomemos

$$f(r) = \frac{r^2}{2} - r^{2^*} H(\gamma, \kappa).$$

Podemos provar que  $f$  atinge seu máximo em

$$r_0 = \left( \frac{1}{2^* H(\gamma, \kappa)} \right)^{(N-2)/4}.$$

Portanto, devido à escolha de  $\gamma$  e  $\kappa$  em (1.43),

$$f(s_\epsilon) \leq f(r_0) = \frac{1}{N(2^* H(\gamma, \kappa))^{(N-2)/2}} = \frac{1}{N} \left( \frac{1}{2^*} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left( \frac{1}{M_H} \right)^{\frac{N}{2}}.$$

Utilizando essa última desigualdade na estimativa sobre  $J(s_\epsilon U_\epsilon^m)$  acima, e lembrando o Lema 1.9 obtemos

$$\begin{aligned} J(s_\epsilon U_\epsilon^m) &\leq \frac{(1/2^*)^{(N-2)/2} S_H^{N/2}}{N} + C_1(\epsilon m)^{N-2} + C_2 m^{-N/e} \|u_\epsilon^m\|_2 \\ &\quad - C(\|u_\epsilon^m\|_2^2 + G(\gamma, \kappa) \|u_\epsilon^m\|_p^p). \end{aligned} \tag{1.62}$$

A partir de agora distinguimos os casos  $N \geq 6$  e  $N = 3, 4, 5$ .

Se  $N \geq 6$ .

Não iremos precisar de  $G(\gamma, \kappa)\|u_\epsilon^m\|_p^p$  em (1.62). Invocando o Lema 1.10 nos itens (3) e (4) (onde escolhemos  $k=2$ ) vemos que  $K_1\epsilon^2 \leq \|u_\epsilon^m\|_2^2 \leq K_2\epsilon^2$ , onde lembramos que tomamos  $\epsilon^d = 1/2m$ . Inserir estas relações em (1.62) implica que

$$J(s_\epsilon U_\epsilon^m) \leq \frac{(1/2^*)^{(N-2)/2} S_H^{N/2}}{N} + C_1\epsilon^{(1-d)(N-2)} + C_2\epsilon^{1+dN/e} - C\epsilon^2.$$

Dessa forma, tomando  $e/N < d < 1 - 2/(N - 2)$  (possível apenas se  $N \geq 6$ ) temos  $(1 - d)(N - 2), 1 + dN/e > 2$  o que significa que para  $\epsilon$  suficientemente pequeno podemos escolher  $C > 0$  tal que  $J(s_\epsilon U_\epsilon^m) \leq (1/2^*)^{(N-2)/2} S_H^{N/2}/N - C\epsilon^2$ , demonstrando (i).

Se  $N = 3, 4, 5$

Neste caso, descartamos o termo  $\|u_\epsilon^m\|_2^2$  em (1.62). Note que a hipótese adicional ( $G_4$ ) garante que  $G(\gamma, \kappa) > 0$ .

Para as dimensões 3 e 4 não podemos usar o Lema 1.10 item (3). No entanto, precisaremos apenas que  $\|u_\epsilon^m\|_2 \leq C$ . Utilizando dessa vez o Lema 1.10 item (4) com  $k = p$ , concluímos

$$J(s_\epsilon U_\epsilon^m) \leq \frac{(1/2^*)^{(N-2)/2} S_H^{N/2}}{N} + C_1\epsilon^{(1-d)(N-2)} + C_2\epsilon^{dN/e} - C\epsilon^{N-(N-2)p/2}.$$

Isto prova (ii) apenas se  $(1 - d)(N - 2), dN/e > N - (N - 2)p/2$ , isto é, temos que escolher  $d$  tal que

$$2^* - p < d < \frac{p}{2} - \frac{2}{N - 2}$$

e isto pode ser feito devido à condição ( $G_4$ ). ■

### 1.5.4 Conclusão das demonstrações

Só falta-nos demonstrar que  $V \neq \Phi - \Phi^m$ , onde  $V$  é o limite fraco da sequência  $PS$  no nível minimax  $\bar{c}$ . Observamos que se tivéssemos  $K = 0$  ( $K$  dado no Lema 1.18), significaria que  $(V_n)$  convergia para  $V$  fortemente em  $E$  e portanto  $J(V) = \bar{c}$ . Sendo assim, poderíamos escolher  $\epsilon$  suficientemente pequeno para que  $J(V) = \bar{c} \geq \delta > C\epsilon^{dN} \geq J(\Phi_T - \Phi^m)$ , devido ao Lema 1.19, o que provaria que  $V \neq \Phi - \Phi^m$ . Logo, suponha  $K > 0$ . Se  $V = \Phi - \Phi^m$  temos, pelos Lemas 1.18 e 1.19

$$\frac{(1/2^*)^{(N-2)/2} S_H^{N/2}}{N} - C\epsilon^{dN} \leq \frac{K}{N} + J(V) = \bar{c}$$

mas o Lema 1.20 nos diz que

$$\bar{c} < \begin{cases} \frac{(1/2^*)^{(N-2)/2} S_H^{N/2}}{N} - C\epsilon^2 & \text{se } N \geq 6; \\ \frac{(1/2^*)^{(N-2)/2} S_H^{N/2}}{N} - C\epsilon^{N-(N-2)p/2} & \text{se } N = 3, 4, 5. \end{cases}$$

E isto é impossível devido à escolha de  $d$  no Lema 1.20. ■

---

# CAPÍTULO 2

---

## PROBLEMAS DE AMBROSETTI-PRODI PARA SISTEMAS CRÍTICOS EM DIMENSÃO 2

---

### 2.1 Introdução

---

Dedicamos este capítulo a estudar uma versão para o caso exponencial em dimensão 2 do problema (1.1). Nosso objetivo consiste em reproduzir aqueles resultados para uma classe de problemas com crescimento exponencial subcrítico e crítico. Baseados no trabalho de Calanchi-Ruf-Zhang [10], consideramos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v + H_u(x, u_+, v_+) + f_1(x) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = b(x)u + c(x)v + H_v(x, u_+, v_+) + f_2(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0, v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $\Omega$  é um domínio limitado de fronteira suave em  $\mathbb{R}^2$ . Supomos  $H$  uma função  $C^1(\Omega, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  com crescimento exponencial  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  uniforme em  $\Omega$ . Denotando

$w_+ = \max\{w, 0\}$  e admitimos  $f_1, f_2 \in L^r(\Omega)$ ,  $r > 2$ . Estudamos a interação dos autovalores da matriz  $A \in C(\overline{\Omega}, M_{2 \times 2}(\mathbb{R}))$  dada pelas funções  $a, b$  e  $c$  com o espectro de  $(-\Delta, H_0^1)$ .

No que diz respeito à parte linear, em nada vamos alterar o que já foi feito no primeiro capítulo. Concentraremos-nos em estudar as peculiaridades do caso exponencial, tanto subcrítico quanto crítico. O problema é claramente motivado pelo artigo supracitado [10]. No entanto, devido à dificuldade em aplicar as técnicas lá exploradas para o caso de sistemas, optamos por abordar o problema inspirados nos métodos desenvolvidos em [1, 28], remodelados e adaptados para nosso caso. Tal abordagem trás o benefício de tornarem mais diretos os argumentos contidos nas demonstrações. Porém, ao estudar o caso crítico, uma hipótese um pouco mais forte que aquela encontrada em [10] na criticalidade se fez necessária. Mais à frente, após apresentarmos tal hipótese, explicaremos a motivação desta.

---

## 2.2 Hipóteses e resultados principais

---

Reescrevemos (2.1) em sua forma vetorial, do seguinte modo:

$$\begin{cases} -\Delta U = A(x)U + \nabla H(x, U_+) + F(x) & \text{em } \Omega, \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ,  $U_+ = \begin{pmatrix} u_+ \\ v_+ \end{pmatrix}$ ,  $A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & c(x) \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  para todo  $x \in \Omega$  e

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \in L^r(\Omega) \times L^r(\Omega).$$

Estamos ainda denotando

$$\nabla H(x, U_+) = \begin{pmatrix} H_u(x, U_+) \\ H_v(x, U_+) \end{pmatrix}.$$

As condições impostas na matriz  $A$  serão exatamente as mesmas do Capítulo 1. Denote novamente por  $\mu_1(x), \mu_2(x)$  seus autovalores, para cada  $x \in \Omega$ . Para melhor apresentação do capítulo, reescrevemos quatro hipóteses distintas:

(1)  $A$  é constante e

(A<sub>1</sub>)  $\mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1$  ou

(A<sub>2</sub>) existe  $k \geq 1$  tal que  $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$ ;

ou

(2)  $b(x) \geq 0$  para todo  $x \in \Omega$  e  $\max_{x \in \Omega} \max\{a(x), c(x)\} > 0$  e

(A<sub>3</sub>)  $1 < \lambda_1^A$  ou

(A<sub>4</sub>) existe  $k \geq 1$  tal que  $\lambda_k^A < 1 < \lambda_{k+1}^A$ .

Onde estamos denotando  $\lambda_i^A$  os autovalores associados ao problema (1.9).

A função  $H$  é suposta não-negativa, com derivadas parciais não negativas e crescendo exponencialmente em  $+\infty$ . Consideremos, mais precisamente, as seguintes hipóteses.

(H<sub>0</sub>)  $H \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ ,  $H_u, H_v \geq 0$ ;

(H<sub>1</sub>) (i)  $\nabla H$  é subcrítica:  $\lim_{|U| \rightarrow \infty} \frac{|\nabla H(x, U)|}{e^{\alpha|U|^2}} = 0$  para todo  $\alpha > 0$  uniformemente em  $x \in \Omega$ .

(ii)  $\nabla H$  é crítica: Existe  $\alpha_0 > 0$  tal que

$$\lim_{|U| \rightarrow \infty} \frac{|\nabla H(x, U)|}{e^{\alpha|U|^2}} = \begin{cases} 0 & \text{para todo } \alpha > \alpha_0 \\ +\infty & \text{para todo } \alpha < \alpha_0 \end{cases}$$

uniformemente em  $x \in \Omega$ .

A fim de estabelecer uma estrutura variacional para (2.1) consideramos também as seguintes hipóteses adicionais sobre  $H$ :

(H<sub>2</sub>)  $H_u(x, 0, v) = H_v(x, u, 0) = 0 \quad \forall u, v \geq 0$ ;

(H<sub>3</sub>)  $\lim_{|U| \rightarrow \infty} \frac{H(x, U) + |\nabla H(x, U)|}{(\nabla H(x, U), U)_{\mathbb{R}^2}} = 0$ , uniformemente em  $x \in \Omega$ ;

(H<sub>4</sub>)  $|\nabla H(x, U)| = o(|U|)$  quando  $|U| \rightarrow 0$  uniformemente em  $x \in \Omega$ .

**Observação 1:** Como no Capítulo 1, observamos que (H<sub>2</sub>) permite-nos redefinir  $H$  em todo o plano, tomando  $H(x, u, v) = H(x, u_+, v_+)$  e ainda assim teremos  $H \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2)$  satisfazendo (H<sub>0</sub>)-(H<sub>4</sub>). Sempre consideramos, portanto, essa extensão.

**Observação 2:** Damos aqui exemplos de  $H$  que satisfazem as condições  $(H_0)$ - $(H_4)$ . Os dois primeiros são exemplos onde  $H_u$  e  $H_v$  são dependentes apenas de  $u$  e  $v$ , respectivamente. Os outros nos dão exemplos de funções mais complicadas, quando ambas as derivadas  $H_u$  e  $H_v$  dependem efetivamente de  $u$  e  $v$ .

(i)  $H(x, u, v) = e^u + e^v - (u^2 + v^2)/2 - (u + v) - 2$  ( $H$  subcrítica desacoplada);

(ii)  $H(x, u, v) = \gamma(u) + \gamma(v)$  onde  $\gamma(s) = \int_0^s t_+ e^{t^2+t} dt$  ( $H$  crítica desacoplada);

(iii)  $H(x, u, v) = e^{u+v} + ue^v + ve^u - (u + v)^2/2 - 1$  ( $H$  subcrítica acoplada);

(iv)  $H(x, u, v) = \gamma(u) + \gamma(v) + \gamma(u)\gamma(v)$  ( $H$  crítica acoplada).

**Observação 3:** A hipótese  $(H_3)$  é equivalente à condição de Ambrosetti-Rabinowitz para  $H$  e para  $|\nabla H|$  para todo  $\theta > 0$ . Em outras palavras, para todo  $\theta > 0$  existe  $s_\theta \geq 0$  tal que

$$H(x, S) + |\nabla H(x, S)| \leq \frac{1}{\theta} (\nabla H(x, S), S)_{\mathbb{R}^2}, \quad \text{para todo } x \in \Omega \text{ e } |S| \geq s_\theta.$$

Observe ainda que para o caso escalar, não é necessário exigir uma condição do “tipo Ambrosetti-Rabinowitz” na derivada, uma vez que tal crescimento é evidentemente satisfeito.

Novamente, provaremos a existência de soluções em  $E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  munido da norma usual

$$\|(u, v)\|^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 + \|v\|_{H_0^1}^2.$$

Isto é,  $U = (u, v) \in E$  será uma solução (fraca) para (2.2) se

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} \nabla v \nabla \psi - \int_{\Omega} (A(u, v), (\varphi, \psi))_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} (\nabla H(x, u_+, v_+), (\varphi, \psi))_{\mathbb{R}^2} \\ & - \int_{\Omega} (F(x), (\varphi, \psi))_{\mathbb{R}^2} = 0 \quad \text{para todo } (\varphi, \psi) \in E. \end{aligned}$$

onde estamos fazendo um abuso de notação  $\nabla u \nabla v = (\nabla u, \nabla v)_{\mathbb{R}^2}$  bastante convencional.

Assim como no Capítulo 1, temos vários resultados idênticos para diferentes hipóteses sobre a matriz  $A$ . As hipóteses envolvem a possibilidade de parametrização a dois parâmetros para o problema (2.2) caso estejamos supondo  $(A_1)$  ou  $(A_2)$  e a parametrização a um parâmetro apenas, caso estejamos supondo  $(A_3)$  ou  $(A_4)$ . Em ambos os casos, temos a

possibilidade de trabalharmos com a Geometria do Passo da Montanha ou a Geometria de Linking. Ao invés de apresentarmos os resultados em quatro teoremas distintos, como fizemos no capítulo anterior, optamos por rerepresentá-los em apenas dois teoremas. Isso porque, como havíamos dito, enfatizamos o crescimento exponencial e trabalhamos com as mesmas hipóteses na parte linear do problema.

Considere o problema linear auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta U = A(x)U + F(x) & \text{em } \Omega, \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.3)$$

Claramente, uma solução negativa para este problema será também solução para (2.2).

O resultado abaixo já foi provado no Capítulo 1, Seção 1.3, e encerra o nosso estudo de (2.3).

**Proposição 2.1.** *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *se  $(A_1)$  é satisfeita então o problema (2.3) admite uma solução negativa  $\Phi_T$  para  $F = F_T$  satisfazendo (1.7) com  $T \in R$ , onde  $R$  é uma região ilimitada em  $\mathbb{R}^2$  dada no Teorema 1.1;*
- (ii) *se  $(A_2)$  é satisfeita então o problema (2.3) admite uma solução negativa  $\Phi_T$  para  $F = F_T$  satisfazendo (1.7) com  $T \in S$ , onde  $S$  é uma região ilimitada em  $\mathbb{R}^2$  dada no Teorema 1.2;*
- (iii) *se  $(A_3)$  é satisfeita então existe  $C_1 \geq 0$  tal que o problema (2.3) admite uma solução negativa  $\Phi_t$  para  $F = F_t$  satisfazendo (1.10) com  $t \leq -C_1$ ;*
- (iv) *se  $(A_4)$  é satisfeita então existe  $C_2 \geq 0$  tal que o problema (2.3) admite uma solução negativa  $\Phi_t$  para  $F = F_t$  satisfazendo (1.10) com  $t \geq C_2$ .*

Os principais resultados deste capítulo afirmam que é possível encontrar uma segunda solução para (2.2) caso já tenhamos uma solução negativa. Juntamente com a proposição acima, esses teoremas são análogos para o caso bidimensional, portanto, àqueles do Capítulo 1.

**Teorema 2.2.** *Seja  $F \in L^r(\Omega) \times L^r(\Omega)$  com  $r > 2$  tal que a solução  $\Phi = (\phi, \psi)$  de (2.3) é negativa. Suponha  $(H_0)$ ,  $(H_1)$  item (i),  $(H_2) - (H_4)$  e qualquer uma dentre as hipóteses  $(A_1) - (A_4)$ . Então (2.2) admite uma segunda solução.*

A demonstração desse teorema será feita por métodos variacionais, utilizando-se o Teorema do Passo da Montanha para o caso das hipóteses  $(A_1)$  e  $(A_3)$  ou o Teorema de Linking se supormos  $(A_2)$  ou  $(A_4)$ . Uma vez que a não-linearidade é subcrítica, o funcional associado ao problema satisfaz a condição de compacidade (PS), o que facilita bastante o trabalho. Para o caso de termos um crescimento crítico em  $H$  temos:

**Teorema 2.3.** *Seja  $F \in L^r(\Omega) \times L^r(\Omega)$  com  $r > 2$  tal que a solução  $\Phi = (\phi, \psi)$  de (2.3) é negativa. Suponha  $(H_0)$ ,  $(H_1)$  item (ii),  $(H_2) - (H_4)$  e qualquer uma dentre as hipóteses  $(A_1) - (A_4)$ . Além disso considere a seguinte hipótese*

$(H_5)$  *Para todo  $\gamma \geq 0$  existe  $c_\gamma \geq 0$  tal que*

$$(\nabla H(x, s, s), (s, s))_{\mathbb{R}^2} \geq \gamma h(x, s) e^{\alpha_0 s^2} \text{ para todo } s \geq c_\gamma, \quad x \in \Omega,$$

onde  $h : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma função de Carathéodory tal que

- $\liminf_{s \rightarrow +\infty} \frac{\log(h(x, s))}{s} > 0$ , uniformemente em  $x \in \Omega$ .

Então (2.2) admite uma segunda solução.

Explicuemos aqui o motivo da condição adicional  $(H_5)$ : como é bem sabido, a principal dificuldade de problemas envolvendo crescimento crítico é a perda de compacidade. Variacionalmente, temos que o funcional  $J$  associado a (2.2) não satisfaz a condição de Palais-Smale para certos níveis  $c$ . No entanto, veremos que para o nosso caso, se tivermos  $c < 2\pi/\alpha_0$ , onde  $\alpha_0$  é dado na condição  $(H_1)$  item (ii), é possível recuperar tal condição. Para que o nível minimax tanto da Geometria do Passo da Montanha quanto da Geometria de Linking satisfaça isto, precisamos de uma hipótese cujo objetivo é tão somente “trazer para baixo” este nível. Da mesma forma que no Capítulo 1 adicionamos uma parcela subcrítica  $G$  ao problema em dimensões menores, aqui acrescentamos um “fator subcrítico”  $h(x, s)$ , cujo modelo padrão é dado por  $h(x, s) = e^s$ .

Em ambos os teoremas, supomos que  $F$  seja tal que (2.2) admita uma solução negativa  $\Phi$ . Uma segunda solução pode ser dada por  $V + \Phi$  onde  $V$  é uma solução não trivial do problema

$$\begin{cases} -\Delta V = A(x)V + \nabla H(x, (V + \Phi)_+) & \text{em } \Omega, \\ V = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

Nosso trabalho será portanto provar a existência de uma solução não trivial para (2.4) tanto sob as hipóteses do Teorema 2.2 como sob as hipóteses do Teorema 2.3. Faremos isso em duas seções distintas neste capítulo.

Uma vez que faremos uso de técnicas variacionais, utilizaremos a famosa desigualdade de Trudinger-Moser: em dimensão 2, alguns tipos de crescimento exponencial nas não-linearidades podem ser tratadas variacionalmente devido à desigualdade de Trudinger-Moser (vide [41, 52]) dada por

$$\sup_{u \in B} \int_{\Omega} e^{\beta u^2} \begin{cases} < +\infty & \text{se } \beta \leq 4\pi \\ = +\infty & \text{se } \beta > 4\pi. \end{cases} \quad (2.5)$$

Aqui  $B$  denota a bola unitária em  $H_0^1(\Omega)$ .

---

## 2.3 O Caso Subcrítico

---

Esta seção é dedicada à demonstração do Teorema 2.2. Ao longo desta, estaremos supondo as condições  $(H_0)$ ,  $(H_1)$  item (i),  $(H_2)$ - $(H_4)$ .

Na subseção 2.3.1 enunciamos os dois teoremas de ponto crítico a serem utilizados, bem como uma estimativa técnica útil com respeito ao funcional associado ao problema; dedicamos então a subseção 2.3.2 para provar que o funcional  $J$  do problema (2.4) satisfaz a condição de compacidade exigida por esses teoremas e na última subseção demonstramos que o mesmo funcional possui as propriedades geométricas requeridas, finalizando a demonstração.

### 2.3.1 Preliminares

Para o caso das condições  $(A_1)$  ou  $(A_3)$  o teorema de ponto crítico que utilizaremos será o Teorema do Passo da Montanha, que em sua forma clássica (vide [3, 45]) nos diz que

**Teorema do Passo da Montanha:** *Seja  $E$  um espaço de Banach e  $J \in C^1(E; \mathbb{R})$  um funcional satisfazendo a condição de Palais-Smale (PS). Denote  $S_r = \{x \in E ; \|x\| = r\}$  e*

suponha que existem  $e \in E$  e  $\rho > 0$  tais que  $\|e\| > \rho$  e

$$\alpha = \max\{\gamma(0), \gamma(e)\} < \inf_{u \in S_\rho} J(u) = \beta.$$

Então  $J$  possui um valor crítico  $c \geq \beta$  que é caracterizado por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0,1])} J(u)$$

onde  $\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], E) ; \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$ .

Caso estivermos supondo as condições  $(A_2)$  ou  $(A_4)$ , faremos uso do Teorema de Linking (vide [45, 46]).

**Teorema de Linking:** *Seja  $E$  um espaço de Banach. Suponha que  $E = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ , onde  $\mathcal{V}$  é um espaço de dimensão finita e seja  $J \in C^1(E; \mathbb{R})$  funcional satisfazendo a condição de Palais-Smale (PS). Denote  $B_r = \{x \in E ; \|x\| < r\}$  e suponha que  $J$  satisfaz*

- (a) *existem constantes  $\rho, \beta > 0$  tais que  $J|_{\partial B_\rho \cap \mathcal{W}} \geq \beta$ ;*
- (b) *existem  $w \in \partial B_1 \cap \mathcal{W}$ ,  $\alpha < \beta$  e  $R > \rho$  tais que se*

$$Q := (\overline{B_R} \cap \mathcal{V}) \oplus \{sw ; 0 \leq s \leq R\}$$

*então  $J|_{\partial Q} \leq \alpha$ .*

Então  $J$  possui um valor crítico  $c \geq \beta$  que é caracterizado por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in Q} J(\gamma(u))$$

onde  $\Gamma = \{h \in C(Q, E) ; h(u) = u \text{ se } u \in \partial Q\}$ .

Na busca por uma melhor exposição, se  $U = (u, v) \in E$  denotaremos

$$\begin{aligned} \tilde{U} &:= (U + \Phi)_+ \\ \tilde{u} &= (u + \phi)_+, \quad \tilde{v} = (v + \psi)_+. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Provaremos a existência de um ponto crítico para o funcional  $J : E \rightarrow \mathbb{R}$  associado a (2.4) dado por

$$J(U) = \frac{1}{2} \|U\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A(x)U, U)_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} H(x, \tilde{U}). \tag{2.7}$$

Primeiramente, precisamos garantir que  $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ . Referimo-nos a resultados contidos em [29], que mostram que tal funcional está bem definido e é contínuo. Provar que é de classe  $C^1$  pode ser feito por argumentos tradicionais seguindo ideias, por exemplo, em [4] e [11]. Os detalhes, para o caso de funcionais em  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  podem ser encontrados em [44].

O lema abaixo servirá para provarmos que o funcional  $J$  satisfaz as condições geométricas necessárias em ambos os teoremas de ponto crítico acima:

**Lema 2.4.** *Suponha  $(H_0)$ - $(H_4)$ . Então, para todo  $\varepsilon > 0$  e  $\alpha > 0$  (caso  $H$  tenha crescimento crítico, temos  $\alpha > \alpha_0$ ) existe  $K_\varepsilon > 0$  tal que*

$$H(x, u, v) \leq \varepsilon(u^2 + v^2) + K_\varepsilon(u^3 + v^3)e^{\alpha(u^2+v^2)} \quad \text{para todo } x \in \Omega \text{ e } (u, v) \geq (0, 0).$$

**Prova.** Todas as desigualdades e limites abaixo são uniformes em  $x \in \Omega$ .

Por  $(H_4)$  vemos que

$$\lim_{|(u,v)| \rightarrow 0} \frac{H_u(x, u, v)}{|(u, v)|} = 0 = \lim_{|(u,v)| \rightarrow 0} \frac{H_v(x, u, v)}{|(u, v)|}.$$

Portanto, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $c_\varepsilon > 0$  tal que  $H_u(x, u, v) \leq \varepsilon|(u, v)|$  e  $H_v(x, u, v) \leq \varepsilon|(u, v)|$  se  $|(u, v)| \leq c_\varepsilon$ . Como  $|(u, v)| \leq c_\varepsilon$  implica  $\|(s, v)\| \leq c_\varepsilon$  para  $0 \leq s \leq u$ , temos que

$$H(x, u, v) - H(x, 0, v) = \int_0^u H_u(x, s, v) ds \leq \varepsilon \int_0^u |(s, v)| ds \leq \varepsilon C \int_0^u (s+v) ds = \varepsilon C \left( \frac{u^2}{2} + uv \right).$$

Também

$$H(x, u, v) - H(x, u, 0) = \int_0^v H_v(x, u, t) dt \leq \varepsilon C \left( \frac{v^2}{2} + uv \right) \Rightarrow H(x, 0, v) \leq \varepsilon C \frac{v^2}{2}.$$

Assim obtemos

$$H(x, u, v) \leq \varepsilon C \left( \frac{u^2}{2} + uv + \frac{v^2}{2} \right) \leq \varepsilon C(u^2 + v^2) = \varepsilon C|(u, v)|^2 \quad \text{se } |(u, v)| \leq c_\varepsilon.$$

Seja  $s_\varepsilon > 0$  tal que  $H_u(x, u, v) + H_v(x, u, v) \leq \varepsilon e^{\alpha|(u,v)|^2}$  sempre que  $|(u, v)| \geq s_\varepsilon$ . Seja  $C > 0$  tal que  $|(u, v)| \geq C$  e  $u, v \geq 0$  implique  $u + v \geq 1$ . Daí, se  $|(u, v)| \geq \max\{s_\varepsilon, C\}$ , temos

$$\begin{aligned} H_u(x, u, v) + H_v(x, u, v) &\leq (H_u(x, u, v) + H_v(x, u, v))(u + v) \\ &\leq \varepsilon e^{\alpha|(u,v)|^2}(u + v) \leq \varepsilon C e^{\alpha|(u,v)|^2}(u^3 + v^3). \end{aligned}$$

Seja ainda  $c$  tal que  $H(x, u, v) \leq M(H_u(x, u, v) + H_v(x, u, v))$  para todo  $|(u, v)| \geq c$ . Então, se  $|(u, v)| \geq \max\{s_\varepsilon, C, c\}$ , temos

$$H(x, u, v) \leq \varepsilon MC e^{\alpha|(u,v)|^2} (u^3 + v^3).$$

Tomemos  $\tilde{c}_\varepsilon = \max\{c, s_\varepsilon, C\}$  e  $\tilde{k}_\varepsilon$  tal que

$$H(x, u, v) \leq \tilde{k}_\varepsilon e^{\alpha|(u,v)|^2} (u^3 + v^3) \quad \text{para todo } |(u, v)| \in [c_\varepsilon, \tilde{c}_\varepsilon].$$

Portanto, tomando  $k_\varepsilon = \max\{\tilde{k}_\varepsilon, \varepsilon MC\}$  temos

$$H(x, u, v) \leq \varepsilon(u^2 + v^2) + k_\varepsilon e^{\alpha|(u,v)|^2} (u^3 + v^3) \quad \text{para todo } (u, v) \geq (0, 0).$$

■

### 2.3.2 A condição de Palais-Smale

Uma vez que estamos supondo nessa seção um crescimento exponencial subcrítico em  $H$ , podemos provar que a condição de compacidade requerida para o uso dos teoremas de ponto crítico é de fato satisfeita. Acontece que a demonstração desse resultado é bastante simples para o caso das condições  $(A_1)$  ou  $(A_3)$ , pois estas envolvem apenas a interação com o primeiro autovalor de  $-\Delta$  e um pouco mais trabalhosa nos outros casos. De qualquer forma, apesar de adotarmos métodos distintos de acordo com as hipóteses sobre a matriz  $A$  na hora de provar a condição (PS), optamos por agrupar todas as demonstrações no seguinte

**Lema 2.5.** *Sob as hipóteses do Teorema 2.2, o funcional (2.7) satisfaz a condição de Palais-Smale.*

**Prova.** Seja  $\{U_n\} = \{(u_n, v_n)\} \subset E$  uma sequência (PS). Isto é, temos

$$\left| \frac{1}{2} \|U_n\|^2 - \int_{\Omega} (A(x)U_n, U_n)_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} H(x, \tilde{U}_n) \right| \leq C \quad (2.8)$$

e

$$\left| \int_{\Omega} \nabla U_n \nabla \Psi - \int_{\Omega} (A(x)U_n, \Psi)_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} (\nabla H(x, \tilde{U}_n), \Psi)_{\mathbb{R}^2} \right| \leq \epsilon_n \|\Psi\| \quad \forall \Psi \in E. \quad (2.9)$$

Por  $(H_3)$ , tomemos  $c \geq 0$  tais que

$$H(x, S) \leq \frac{1}{4} (\nabla H(x, S), S)_{\mathbb{R}^2} \quad \text{para todo } x \in \Omega \text{ e } |S| \geq c.$$

Assim por (2.8, 2.9),

$$\begin{aligned}
C + \frac{\epsilon_n}{2} \|U_n\| &\geq - \int_{\Omega} H(x, \widetilde{U}_n) + \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} H_u(x, \widetilde{U}_n) u_n + \int_{\Omega} H_v(x, \widetilde{U}_n) v_n \right) \\
&= - \int_{\{\widetilde{U}_n \geq c\}} H(x, \widetilde{U}_n) + \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} H_u(x, \widetilde{U}_n) u_n + \int_{\Omega} H_v(x, \widetilde{U}_n) v_n \right) - \int_{\{\widetilde{U}_n \leq c\}} H(x, \widetilde{U}_n) \\
&\geq - \frac{1}{4} \int_{\{\widetilde{U}_n \geq c\}} (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), \widetilde{U}_n)_{\mathbb{R}^2} + \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} H_u(x, \widetilde{U}_n) u_n + \int_{\Omega} H_v(x, \widetilde{U}_n) v_n \right) - C \\
&\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), \widetilde{U}_n)_{\mathbb{R}^2} - C.
\end{aligned}$$

A última desigualdade acima é devido a  $\phi < 0$  e  $\psi < 0$ . Consequentemente

$$\int_{\Omega} (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), \widetilde{U}_n)_{\mathbb{R}^2} \leq C + \epsilon_n \|U_n\|. \quad (2.10)$$

Porém, nos métodos aqui desenvolvidos, necessitamos estimar também a norma  $L^1$  de  $\nabla H(\cdot, \widetilde{U}_n)$ : por  $(H_3)$ , existem  $C_1, C_2 > 0$  tais que

$$|\nabla H(x, S)| \leq C_1 + C_2 (\nabla H(x, S), S)_{\mathbb{R}^2}, \quad \text{para todo } S \in \mathbb{R}^2.$$

Sendo assim, temos que

$$\int_{\Omega} |\nabla H(x, \widetilde{U}_n)| \leq C + C \int_{\Omega} (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), \widetilde{U}_n)_{\mathbb{R}^2},$$

donde obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla H(x, \widetilde{U}_n)| \leq C + \epsilon_n \|U_n\|. \quad (2.11)$$

Convém-nos agora fazer estimativas diferentes para as possíveis hipóteses sobre a matriz  $A(x)$ . Começamos com as hipóteses  $(A_1)$  ou  $(A_3)$ , ou seja, aquelas cuja interação com o espectro de  $-\Delta$  se dá no primeiro autovalor.

Notemos que, para todo  $V \in E$ , se supomos  $(A_1)$  então por (1.4) temos

$$\|V\|^2 - \int_{\Omega} (AV, V)_{\mathbb{R}^2} \geq \left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_1}\right) \|V\|^2 \geq C \|V\|^2 \quad (2.12)$$

e analogamente se supomos  $(A_3)$  então por (1.39) temos

$$\|V\|^2 - \int_{\Omega} (A(x)V, V)_{\mathbb{R}^2} \geq \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^A}\right) \|V\|^2 \geq C \|V\|^2. \quad (2.13)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\epsilon_n \|U_n\| &\geq J'(U_n)U_n \\
&\geq C\|U_n\|^2 - \left( \int_{\Omega} H_u(x, \widetilde{U}_n)u_n + \int_{\Omega} H_v(x, \widetilde{U}_n)v_n \right) \\
&\geq C\|U_n\|^2 - \int_{\Omega} (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), \widetilde{U}_n)_{\mathbb{R}^2} \\
&\geq C\|U_n\|^2 - (C + \epsilon_n \|U_n\|).
\end{aligned}$$

Ou seja,  $(U_n)$  é uma sequência limitada.

Provaremos que o mesmo vale caso supusermos  $(A_2)$  ou  $(A_4)$ . Neste caso, é conveniente decompor o espaço  $E$  em subespaços apropriados. Para o caso da hipótese  $(A_2)$  tomemos a decomposição  $E = H_k \oplus H_k^\perp$  onde  $H_k$  está definido em (1.36) e para a hipótese  $(A_4)$  tomamos a decomposição  $E = E_k \oplus E_k^\perp$ , com  $E_k$  definido em (1.38). Para todo  $V \in E$  tomemos então  $V = V^k + V^\perp$ , onde  $V^k \in H_k$  e  $V^\perp \in H_k^\perp$  para a hipótese  $(A_2)$  ou  $V^k \in E_k$  e  $V^\perp \in E_k^\perp$  para a hipótese  $(A_4)$ .

Notemos então que para todo  $V \in E$  temos que supondo  $(A_2)$  então por (1.4)

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} \nabla V \nabla V^k + \int_{\Omega} (AV, V^k)_{\mathbb{R}^2} &= -\|V^k\|^2 + \int_{\Omega} (AV^k, V^k)_{\mathbb{R}^2} \\
&\geq \left( \frac{\mu_1}{\lambda_k} - 1 \right) \|V^k\|^2 \geq C\|V^k\|^2
\end{aligned} \tag{2.14}$$

e analogamente se supomos  $(A_4)$  então por (1.39)

$$-\int_{\Omega} \nabla V \nabla V^k + \int_{\Omega} (A(x)V, V^k)_{\mathbb{R}^2} \geq \left( \frac{1}{\lambda_k^A} - 1 \right) \|V^k\|^2 \geq C\|V^k\|^2 \tag{2.15}$$

Portanto, a partir das hipóteses  $(A_2)$  ou  $(A_4)$  vemos que

$$\begin{aligned}
-\epsilon_n \|U_n^k\| &\leq J'(U_n)U_n^k \\
&= \int_{\Omega} \nabla U_n \nabla U_n^k - \int_{\Omega} (A(x)U_n, U_n^k)_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), U_n^k)_{\mathbb{R}^2} \\
&\leq -C\|U_n^k\|^2 - \int_{\Omega} (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), U_n^k)_{\mathbb{R}^2}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$C\|U_n^k\|^2 \leq \epsilon_n \|U_n^k\| - \int_{\Omega} (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), U_n^k)_{\mathbb{R}^2}. \tag{2.16}$$

De forma completamente análoga podemos obter

$$C\|U_n^\perp\|^2 \leq \epsilon_n \|U_n^\perp\| + \int_{\Omega} (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), U_n^\perp)_{\mathbb{R}^2}. \tag{2.17}$$

Assim, uma vez que  $\dim(H_k)$  e  $\dim(E_k)$  são finitas, por (2.11, 2.16) temos

$$\begin{aligned} C\|U_n^k\|^2 &\leq \epsilon_n\|U_n^k\| + \|U_n^k\|_\infty \int_\Omega |\nabla H(x, \widetilde{U}_n)| \\ &\leq \epsilon_n\|U_n^k\| + C\|U_n\| (C + \epsilon_n\|U_n\|) \\ &\leq C + C\|U_n\| + C\epsilon_n\|U_n\|^2. \end{aligned}$$

Analogamente, a partir de (2.17) podemos concluir que

$$\begin{aligned} C\|U_n^\perp\|^2 &\leq \epsilon_n\|U_n^\perp\| + \int_\Omega (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), U_n)_{\mathbb{R}^2} + \|U_n^k\|_\infty (C + \epsilon_n\|U_n\|) \\ &= \epsilon_n\|U_n^\perp\| + \int_\Omega (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), \widetilde{U}_n)_{\mathbb{R}^2} + \int_\Omega (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), |\Phi|)_{\mathbb{R}^2} + \|U_n^k\|_\infty (C + \epsilon_n\|U_n\|) \\ &\leq \epsilon_n\|U_n^\perp\| + C + \epsilon_n\|U_n\| + \|\Phi\|_\infty \int_\Omega |\nabla H(x, \widetilde{U}_n)| + C\|U_n\| (C + \epsilon_n\|U_n\|) \\ &\leq C + C\|U_n\| + C\epsilon_n\|U_n\|^2. \end{aligned}$$

Somando estas duas últimas estimativas, obtemos

$$\|U_n\|^2 \leq C + C\|U_n\| + C\epsilon_n\|U_n\|^2.$$

Portanto, como  $\epsilon_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , temos que a sequência  $(U_n)$  é limitada. Observe que todos esses argumentos são válidos para o caso em que  $H$  possua crescimento crítico. No entanto, para provar que tal sequência possui uma subsequência convergente, precisaremos de subcriticalidade.

Para concluir a demonstração, tomemos uma subsequência apropriada  $\{U_n\}$  tal que  $U_n \rightharpoonup U$  em  $E$ ,  $U_n \rightarrow U$  em  $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$  para todo  $p \geq 1$  e  $U_n \rightarrow U$  quase sempre em  $\Omega$  para algum  $U \in E$ . Claro que se tivéssemos  $\|U_n\| \rightarrow 0$  para alguma subsequência, não haveria nada a fazer. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\|U_n\| \geq k > 0$  para  $n$  suficientemente grande. Seja  $K > 0$  tal que  $\|U_n\| \leq K$  e tome  $\alpha > 0$  satisfazendo  $K^2\alpha < 2\pi$ . Então temos

$$(\nabla H(\widetilde{U}_n), U)_{\mathbb{R}^2} \rightarrow (\nabla H(\widetilde{U}), U)_{\mathbb{R}^2} \quad \text{e} \quad |(\nabla H(\widetilde{U}_n), U)_{\mathbb{R}^2}| \leq (Ce^{K^2\alpha(\|U_n\|/\|U_n\|)^2} + C)|U|,$$

quase sempre em  $\Omega$ , onde aqui utilizamos a condição de subcriticalidade  $(H_1)$  item (i). Mas o último termo na desigualdade acima pertence a  $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$  pela desigualdade de

Trudinger-Moser e pela escolha de  $\alpha$ . Assim, o Teorema da Convergência Dominada garante que

$$\int_{\Omega} (\nabla H(\widetilde{U}_n), U)_{\mathbb{R}^2} \rightarrow \int_{\Omega} (\nabla H(\widetilde{U}), U)_{\mathbb{R}^2}.$$

Tomando  $\Psi = U$  e  $n \rightarrow \infty$  em (2.9), temos

$$\|U\|^2 = \int_{\Omega} (A(x)U, U)_{\mathbb{R}^2} + \int_{\Omega} (\nabla H(\widetilde{U}), U)_{\mathbb{R}^2}.$$

Por outro lado, se  $n \rightarrow \infty$  em (2.9) com  $\Psi = U_n$ ,

$$\|U_n\|^2 \rightarrow \int_{\Omega} (A(x)U, U)_{\mathbb{R}^2} + \int_{\Omega} (\nabla H(\widetilde{U}), U)_{\mathbb{R}^2}.$$

Consequentemente  $\|U_n\| \rightarrow \|U\|$  e portanto  $U_n \rightarrow U$  em  $E$ . ■

### 2.3.3 Condições geométricas e a demonstração do Teorema 2.2

A Geometria de Passo da Montanha para o funcional  $J$ , definido em (2.7) é relativamente fácil de ser demonstrada. O próximo resultado engloba esse caso.

**Proposição 2.6.** *Suponha válidas as hipóteses  $(A_1)$  ou  $(A_3)$ ,  $(H_0)$ ,  $(H_1)$  item (i),  $(H_2)$ - $(H_4)$ . Então,*

(i) *Existem  $\rho, \beta > 0$  tais que  $J(U) \geq \beta$  se  $U \in \partial B_\rho$ .*

(ii) *Suponha que  $\Psi = (\phi_1, \phi_1)$  sob a hipótese  $(A_1)$  ou  $\Psi = \Phi_1^A$  sob a hipótese  $(A_3)$ . Então existe  $R > \rho$  tal que  $J(R\Psi) < 0$ .*

**Prova.** Uma vez que  $\mu_2 < \lambda_1$  ou  $1 < \lambda_1^A$ , respectivamente supondo  $(A_1)$  ou  $(A_3)$ , temos que

$$\frac{1}{2} \left( \|U\|^2 - \int_{\Omega} (A(x)U, U)_{\mathbb{R}^2} \right) \geq C\|U\|^2$$

para todo  $U \in E$ . Portanto, pelo Lema 2.4, tomando  $\alpha < \pi$ ,  $\|U\| \leq 1$ , temos

$$\begin{aligned} J(U) &\geq C\|U\|^2 - \varepsilon \int_{\Omega} |\widetilde{U}|^2 - K_\varepsilon \int_{\Omega} e^{\alpha|\widetilde{U}|^2} (\widetilde{u}^3 + \widetilde{v}^3) \\ &\geq \frac{1}{2} (C - C\varepsilon) \|U\|^2 - K_\varepsilon \left( \int_{\Omega} e^{2\alpha(u^2+v^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \|U\|_{L^6 \times L^6}^3 \\ &\geq C\|U\|^2 - C \left( \int_{\Omega} e^{4\alpha u^2} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \int_{\Omega} e^{4\alpha v^2} \right)^{\frac{1}{4}} \|U\|^3. \end{aligned}$$

E estas duas integrais acima são limitadas pela desigualdade de Trudinger-Moser, já que tomamos  $\alpha < \pi$  e  $\|u\|, \|v\| \leq 1$ . Portanto,

$$J(U) \geq C\|U\|^2 - C\|U\|^3,$$

para todo  $U \in E$  tal que  $\|U\| \leq 1$ , o que demonstra o item (i).

Para o item (ii), fixemos  $R_0 > \rho$  e tomemos  $\Gamma \subset \Omega$ ,  $|\Gamma| > 0$ , tal que, para  $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ , tenhamos

$$\psi_1 \geq \frac{2\|\phi\|_\infty}{R_0} \quad \text{e} \quad \psi_2 \geq \frac{2\|\psi\|_\infty}{R_0} \quad \text{quase sempre em } \Gamma. \quad (2.18)$$

Por  $(H_3)$ , é possível determinar  $\theta > 2$ ,  $C_\theta > 0$  e  $D_\theta \geq 0$  tais que

$$H(u, v) \geq C_\theta(u^\theta + v^\theta) - D_\theta \quad \text{para todo } u, v \geq 0. \quad (2.19)$$

Citamos [31] para uma demonstração dessa desigualdade.

Dessa forma fazendo uso (2.19) temos,

$$\begin{aligned} J(R\Psi) &\leq \frac{R^2}{2}\|\Psi\|^2 - \int_\Omega H((R\psi_1 + \phi)_+, (R\psi_2 + \psi)_+) \\ &\leq \frac{R^2}{2} - R^\theta C_\theta \int_\Omega \left[ \left( \psi_1 + \frac{\phi}{R} \right)_+ \right]^\theta - R^\theta C_\theta \int_\Omega \left[ \left( \psi_2 + \frac{\psi}{R} \right)_+ \right]^\theta - D_\theta. \end{aligned}$$

Portanto

$$J(R\Psi) \leq \frac{R^2}{2} - C_\theta(I_1(R) + I_2(R))R^\theta - D_\theta. \quad (2.20)$$

Onde  $I_1(R)$  e  $I_2(R)$  são as integrais que aparecem na última estimativa acima. Considere agora  $R \geq R_0$ . Então, estimemos  $I_1$  e  $I_2$  separadamente. Por (2.18),

$$\begin{aligned} I_1(R) &= \int_\Omega \left[ \left( \psi_1 + \frac{\phi}{R} \right)_+ \right]^\theta \\ &\geq \int_\Omega \left[ \left( \psi_1 - \frac{\|\phi\|_\infty}{R} \right)_+ \right]^\theta \\ &\geq \int_\Omega \left[ \left( \psi_1 - \left( \frac{\|\phi\|_\infty}{R_0} \right) \right)_+ \right]^\theta \\ &\geq \left( \frac{\|\phi\|_\infty}{R_0} \right)^\theta |\Gamma| =: \tau_1 > 0. \end{aligned}$$

Note que  $\tau_1$  não depende de  $R \geq R_0$ . Analogamente para  $I_2$ ,

$$\begin{aligned} I_2(R) &= \int_{\Omega} \left[ \left( \psi_2 + \frac{\psi}{R} \right)_+ \right]^\theta \\ &\geq \left( \frac{\|\psi\|_\infty}{R_0} \right)^\theta |\Gamma| =: \tau_2 > 0. \end{aligned}$$

Assim, inserindo essas duas estimativas para  $I_1(R)$  e  $I_2(R)$  em (2.20), obtemos

$$J(R\Psi) \leq \frac{R^2}{2} - C_\theta(\tau_1 + \tau_2)R^\theta - D_\theta.$$

Para todo  $R \geq R_0$ . Uma vez que  $\theta > 2$ , podemos escolher  $R \geq R_0$  tal que  $J(R\Psi) \leq 0$ , como queríamos.  $\blacksquare$

Para o caso da Geometria de Linking, precisamos decompor o espaço  $E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  em subespaços apropriados. Já o fizemos na demonstração da condição de Palais-Smale no Lema 2.5 e no Capítulo 1, mas repetimos aqui por conveniência. Para o caso da hipótese  $(A_2)$ , tomemos  $E = H_k \oplus H_k^\perp$ , onde  $H_k$  está definido em (1.36). Caso estivermos sob a hipótese  $(A_4)$  consideramos  $E = E_k \oplus E_k^\perp$ , onde  $E_k$  está definido em (1.38). Temos então a seguinte proposição

**Proposição 2.7.** *Suponha válidas as hipóteses  $(A_2)$  ( ou  $(A_4)$  ),  $(H_0)$ ,  $(H_1)$  item (i),  $(H_2)$ - $(H_4)$ . Então,*

(i) *Existem  $\rho, \beta > 0$  tais que  $J(U) \geq \beta$  se  $U \in \partial B_\rho \cap H_k$  ( ou  $E_k$  ).*

(ii) *Existem  $W \in H_k^\perp$  ( ou  $E_k^\perp$  ) e  $R > 0$  tais que  $R\|W\| > \rho$  e se*

$$Q := \overline{B_R} \cap H_k \text{ ( ou } E_k \text{ )} \oplus \{sW : 0 \leq s \leq R\}$$

*então  $J(U) \leq 0$  para todo  $U \in \partial Q$ .*

**Prova.** A demonstração do item (i) é idêntica àquela do item (i) do Lema 2.6. Uma vez que estamos supondo  $(A_2)$  ( ou  $A_4$  ), só é preciso observar que se  $U \in H_k$  ( ou  $E_k$  ) temos novamente, por 1.37 ( ou 1.39 ),

$$\frac{1}{2} \left( \|U\|^2 - \int_{\Omega} (A(x)U, U)_{\mathbb{R}^2} \right) \geq C\|U\|^2.$$

O restante segue exatamente igual.

Já para o caso (ii), escolhamos  $W$  da seguinte forma: fixemos  $R_0 > \rho$  e tomemos  $W = (w_1, w_2)$  em  $H_k^\perp$  ( ou  $E_k^\perp$  ) tal que

$$(i) \quad \|W\|^2 < \begin{cases} \frac{\mu_1}{\lambda_k} - 1 & \text{se supomos } (A_2); \\ \frac{1}{\lambda_k^A} - 1 & \text{se supomos } (A_4); \end{cases}$$

(ii) existe  $\Gamma \subset \Omega$ ,  $|\Gamma| > 0$ , de forma que

$$w_1 \geq 2 \left( K + \frac{\|\phi\|_\infty}{R_0} \right) \quad \text{e} \quad w_2 \geq 2 \left( K + \frac{\|\psi\|_\infty}{R_0} \right) \quad \text{quase sempre em } \Gamma,$$

onde  $K > 0$  satisfaz  $\|V\|_\infty \leq K\|V\|$  para todo  $V \in H_k$  ( ou  $E_k$  ).

Esta escolha é possível uma vez que  $H_k^\perp$  e  $E_k^\perp$  contém funções ilimitadas.

Como de costume, separamos  $\partial Q$ : tomemos  $\partial Q = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ , onde

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \overline{B}_R \cap H_k \text{ ( ou } E_k \text{ )} \\ \Sigma_2 &= \{V + sW ; \|V\| = R\} \\ \Sigma_3 &= \{V + RW ; \|V\| \leq R\} \end{aligned}$$

Se  $U \in \Sigma_1$ , por causa de 1.37 ( ou 1.39 ),

$$J(U) \leq \frac{1}{2}\|U\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A(x)U, U)_{\mathbb{R}^2} \leq 0$$

independentemente de  $R > 0$ .

Em  $\Sigma_2$ .

Supondo primeiramente a hipótese  $(A_2)$ , devido a (1.37), temos

$$\begin{aligned} J(V + sW) &\leq \frac{1}{2}\|V\|^2 + \frac{s^2}{2}\|W\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (AV, V)_{\mathbb{R}^2} \\ &\leq \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2}\|W\|^2 - \frac{\mu_1}{2} \int_{\Omega} |V|^2 \\ &\leq \frac{R^2}{2} \left( 1 - \frac{\mu_1}{\lambda_k} + \|W\|^2 \right) < 0, \end{aligned}$$

independentemente de  $R > 0$ .

Supondo agora a hipótese  $(A_4)$ , devido a 1.39, vemos que

$$\begin{aligned} J(V + sW) &\leq \frac{1}{2}\|V\|^2 + \frac{s^2}{2}\|W\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A(x)V, V)_{\mathbb{R}^2} \\ &\leq \frac{R^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_k^A} + \|W\|^2 \right) < 0, \end{aligned}$$

também independentemente de  $R > 0$ .

Para concluir, seja  $V + RW \in \Sigma_3$ . Fazendo uso de (2.19),

$$\begin{aligned} J(V + RW) &\leq \frac{R^2}{2} \|W\|^2 - \int_{\Omega} H((v_1 + R w_1 + \phi)_+, (v_2 + R w_2 + \psi)_+) \\ &\leq \frac{R^2}{2} \|W\|^2 - R^\theta C_\theta \left( \int_{\Omega} \left[ \left( w_1 + \frac{\phi + v_1}{R} \right)_+ \right]^\theta - \int_{\Omega} \left[ \left( w_2 + \frac{\psi + v_2}{R} \right)_+ \right]^\theta \right) - D_\theta, \end{aligned}$$

donde temos

$$J(V + RW) \leq \frac{R^2}{2} \|W\|^2 - R^\theta C_\theta (I_1(R) + I_2(R)) - D_\theta. \quad (2.21)$$

$I_1(R)$  e  $I_2(R)$  são as integrais que aparecem na última estimativa acima. De forma análoga ao Lema 2.6, considere agora  $R \geq R_0$ . Então

$$\begin{aligned} I_1(R) &= \int_{\Omega} \left[ \left( w_1 + \frac{\phi + v_1}{R} \right)_+ \right]^\theta \geq \int_{\Omega} \left[ \left( w_1 - \frac{\|\phi\|_\infty + \|v_1\|_\infty}{R} \right)_+ \right]^\theta \\ &\geq \int_{\Omega} \left[ \left( w_1 - \left( K + \frac{\|\phi\|_\infty}{R_0} \right) \right)_+ \right]^\theta \\ &\geq \left( K + \frac{\|\phi\|_\infty}{R_0} \right)^\theta |\Gamma| =: \tau_1 > 0. \end{aligned}$$

Note que  $\tau_1$  não depende de  $R \geq R_0$ . Analogamente para  $I_2$ :

$$\begin{aligned} I_2(R) &= \int_{\Omega} \left[ \left( w_2 + \frac{\psi + v_2}{R} \right)_+ \right]^\theta \\ &\geq \left( K + \frac{\|\psi\|_\infty}{R_0} \right)^\theta |\Gamma| =: \tau_2 > 0. \end{aligned}$$

Assim, voltando para (2.21), obtemos

$$J(V + RW) \leq \frac{R^2}{2} \|W\|^2 - R^\theta C_\theta (\tau_1 + \tau_2) - D_\theta.$$

Já que  $\theta > 2$ , temos o resultado almejado. ■

Uma vez que provamos que o funcional  $J$  satisfaz as condições geométricas e de compacidade exigidas no Teorema do Passo da Montanha ( para o caso das hipóteses  $(A_1)$  e  $(A_3)$  ) e do Teorema de Linking ( para o caso das hipóteses  $(A_2)$  e  $(A_4)$  ), temos portanto a existência de uma solução não trivial para o problema (2.4), concluindo a demonstração do Teorema 2.2.

---

## 2.4 O caso crítico

---

Esta seção é dedicada à demonstração do Teorema 2.3. Ao longo desta, estaremos supondo as condições  $(H_0)$ ,  $(H_1)$  item (ii),  $(H_2)$ - $(H_5)$ .

É bem sabido que um dos principais desafios de problemas críticos consiste em recuperar alguma “condição de compacidade” que eventualmente é perdida. A fim de provar a existência de uma solução não trivial para (2.4) via métodos variacionais, precisamos mostrar que, em certos níveis quase críticos, o funcional  $J$  associado ao problema de fato possui um ponto crítico. Veremos que estes níveis quase críticos que admitem um ponto crítico serão aqueles níveis  $c$  tais que  $c < 2\pi/\alpha_0$  onde  $\alpha_0$  é dado na condição  $(H_1)$  item (ii). Portanto, o problema então torna-se mostrar a existência de um nível quase crítico abaixo dessa constante. Daí o papel fundamental da hipótese  $(H_5)$ , que supomos no Teorema 2.3. O objetivo da função  $h$  imposta nessa condição é análogo ao objetivo da hipótese sobre a função  $G$  imposta nas condições do Capítulo 1: “trazer para baixo” o funcional  $J$ , na esperança de que o nível minimax quase crítico que encontrarmos fique abaixo dos níveis de não compacidade de  $J$ .

Organizamos essa seção em subseções: na primeira, enunciamos e organizamos alguns resultados preliminares. Na segunda, mostramos que o funcional associado ao problema satisfaz as hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha ou Teorema de Linking. Na terceira subseção, mostramos que o nível minimax construído a partir das propriedades geométricas de  $J$  de fato fica abaixo de  $2\pi/\alpha_0$ , fazendo uso da hipótese  $(H_5)$ . Por último, damos uma demonstração do Teorema 2.3 mostrando que existe um ponto crítico não trivial para  $J$  nesse nível minimax.

### 2.4.1 Preliminares

Consideremos a seguinte sequência de funções conhecida como sequência de Moser (vide [41]): Seja  $r > 0$  e  $B_1(0)$  a bola aberta de raio  $r$  em  $\mathbb{R}^2$ . Daí, para cada  $m \in \mathbb{N}$  defina

$$z_m^r(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} (\log m)^{1/2} & \text{se } 0 \leq |x| \leq \frac{r}{m} \\ \frac{\log(r/|x|)}{(\log m)^{1/2}} & \text{se } \frac{r}{m} \leq |x| \leq r \\ 0 & \text{se } |x| \geq r. \end{cases}$$

Sabemos que  $z_m^r \in H_0^1(B_r(0))$ ,  $\|z_m^r\| = 1$  e para cada  $r > 0$  fixo,  $\|z_m^r\|_{L^2} = O(1/(\log m)^{1/2})$ .

Seja agora  $r_0 \in \mathbb{R}$  suficientemente pequeno tal que exista  $x_{r_0} \in \Omega$  satisfazendo  $B_{4r_0}(x_{r_0}) \subset \Omega$ ,

$$|e_1(x)|, |e_2(x)|, \dots, |e_k(x)| \leq Cr_0 \quad (\text{sob a condi\c{c}ao } (A_2)) \text{ e}$$

$$|\Phi_1^A(x)|, |\Phi_2^A(x)|, \dots, |\Phi_k^A(x)| \leq Cr_0 \quad (\text{sob a condi\c{c}ao } (A_4))$$

para todo  $x \in B_{4r_0}(x_{r_0})$  e para algum  $C > 0$ . Isto é possível uma vez que as funções  $e_i$  e  $\Phi_i^A$  são todas Lipschitzianas e se anulam em  $\partial\Omega$  (e portanto podemos escolher  $r_0$  suficientemente pequeno e  $x_{r_0}$  suficientemente próximo da fronteira). Note que uma vez escolhido  $r_0$  e seu respectivo ponto  $x_{r_0}$ , então para qualquer  $r < r_0$  podemos escolher  $x_r$  satisfazendo as condições acima. Note que sempre podemos escolher  $x_r$  de forma que  $\text{dist}(x_r, \partial\Omega) \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow 0$ . Isso nos será útil mais a frente.

Para cada  $r \leq r_0$  defina a função  $Z_m^r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$Z_m^r(x) = (z_m^r(x - x_r), z_m^r(x - x_r)). \quad (2.22)$$

Claramente  $\text{supp}(Z_m^r) \subset \overline{B_r(x_r)} \subset B_{4r}(x_r) \subset \Omega$  e portanto  $Z_m^r \in E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  para todo  $r \leq r_0$  e  $m \in \mathbb{N}$ .

O objetivo é trazer a sequência de Moser para “dentro da bola” onde as autofunções assumem valores próximos de zero. Daí, o próximo passo será “furar” essas autofunções de forma que se anulem exatamente nas bolas onde a sequência de Moser está suportada. Fazendo isso, separamos o suporte dessas funções, o que facilitará (e muito) várias estimativas necessárias ao longo deste capítulo. Essa abordagem análoga à do Capítulo 1 é inspirada em técnicas desenvolvidas em [32] e também já utilizada em [9] e [10]. Claramente, isso só se faz necessário quando estivermos sob as hipóteses  $(A_2)$  ou  $(A_4)$ , pois teremos interação com autovalores de ordem superior.

Considere então  $r \leq r_0$  e  $x_r$  dados acima e  $\zeta_r \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  tal que:  $0 \leq \zeta_r \leq 1$ ,  $|\nabla\zeta_r(x)| \leq 2/r$  e

$$\zeta_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in B_r(x_r) \\ 1 & \text{se } x \in \Omega \setminus B_{2r}(x_r). \end{cases}$$

Defina portanto

$$\begin{aligned} e_i^r &= \zeta_r e_i \\ \Phi_i^r &= \zeta_r \Phi_i^A \end{aligned}$$

e considere os seguintes espaços de dimensão finita

$$\begin{aligned} H_k^r &= \text{span}\{(e_i^r, 0), (0, e_i^r); 1 \leq i \leq k\} \\ E_k^r &= \text{span}\{\Phi_i^r; 1 \leq i \leq k\}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

O lema abaixo é exatamente o Lema 1.14 já trabalhado no Capítulo 1 e adaptado para a notação e hipóteses deste capítulo

**Lema 2.8.** *Se  $r \rightarrow 0$  então  $e_i^r \rightarrow e_i$  em  $H_0^1(\Omega)$  e  $\Phi_i^r \rightarrow \Phi_i^A$  em  $E$  para todo  $1 \leq i \leq k$ . Além disso para todo  $r$  suficientemente pequeno, temos*

$$(i) \text{ Existe } c_k > 0 \text{ tal que } \|V\|^2 \leq (\lambda_k + c_k r^2) \int_{\Omega} |V|^2, \text{ para todo } V \in H_k^r.$$

$$(ii) \text{ Existe } c_k > 0 \text{ tal que } \|V\|^2 \leq (\lambda_k^A + c_k r^2) \int_{\Omega} (A(x)V, V)_{\mathbb{R}^2}, \text{ para todo } V \in E_k^r.$$

Finalizamos esta subseção observando que a demonstração do Lema 2.5 se aplica, até o momento em que provamos que a sequência é limitada, também ao caso crítico. A criticalidade impõe dificuldades apenas na hora de provarmos que a sequência PS limitada de fato possui subsequência convergente. Portanto, temos o seguinte resultado

**Lema 2.9.** *Sob as hipóteses do Teorema 2.3, toda sequência de Palais-Smale para o funcional (2.7) é limitada.*

## 2.4.2 Condições geométricas para os níveis minimax

Começemos supondo válidas as condições  $(A_1)$  ou  $(A_3)$ . Ambas nos colocam naturalmente em posição de fazer uso do Teorema do Passo da Montanha sem a Condição de Palais-Smale (vide, neste trabalho, a subseção 1.5.1). A proposição abaixo prova que o funcional satisfaz essa Geometria.

**Proposição 2.10.** *Suponha válidas as hipóteses  $(A_1)$  ou  $(A_3)$ ,  $(H_0)$ ,  $(H_1)$  item (ii),  $(H_2)$ - $(H_4)$ . Então,*

$$(i) \text{ Existem } \rho, \beta > 0 \text{ tais que } J(U) \geq \beta \text{ se } U \in \partial B_{\rho}.$$

$$(ii) \text{ Existe } R = R_m > \rho \text{ tal que } J(R_m Z_m^r) < 0.$$

**Prova.** A demonstração do item (i) praticamente em nada difere da demonstração do item (i) da Proposição 2.6. Só temos que tomar cuidado pois lá tomamos  $\alpha < \pi$  no uso do Lema 2.4. Como estamos supondo crescimento crítico, não podemos fazer tal escolha. No entanto, tomemos  $\alpha > \alpha_0$  neste mesmo Lema e para todo  $U \in E$  temos

$$J(U) \geq C\|U\|^2 - C \left( \int_{\Omega} e^{4\alpha u^2} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \int_{\Omega} e^{4\alpha v^2} \right)^{\frac{1}{4}} \|U\|^3.$$

Portanto, se  $\|U\| \leq \sqrt{\pi/\alpha}$  a desigualdade de Trudinger-Moser garante que

$$J(U) \geq C\|U\|^2 - C\|U\|^3,$$

o que encerra o item (i).

Para o item (ii), fixemos  $R_0 > \rho$  e  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $B_r(x_r) \in \Omega$ . Tomemos ainda  $m \in \mathbb{N}$  suficientemente grande para que

$$z_m^r(x - x_r) \geq \max \left\{ \frac{2\|\phi\|_{\infty}}{R_0}, \frac{2\|\psi\|_{\infty}}{R_0} \right\} \quad \text{quase sempre em } B_{\frac{r}{m}}(x_r) \subset \Omega, \quad (2.24)$$

Dessa forma fazendo uso (2.19) e raciocinando de maneira idêntica à demonstração do item (ii) da Proposição 2.6 temos,

$$\begin{aligned} J(RZ_m^r) &\leq \frac{R^2}{2} - \int_{\Omega} H((Rz_m^r(\cdot - x_r) + \phi)_+, (Rz_m^r(\cdot - x_r) + \psi)_+) \\ &\leq \frac{R^2}{2} - R^{\theta} C_{\theta} \left( \int_{\Omega} \left[ \left( z_m^r(\cdot - x_r) + \frac{\phi}{R} \right)_+ \right]^{\theta} + \int_{\Omega} \left[ \left( z_m^r(\cdot - x_r) + \frac{\psi}{R} \right)_+ \right]^{\theta} \right) - D_{\theta}. \end{aligned}$$

Considerando  $R \geq R_0$ , façamos, separadamente, estimativas nas duas últimas integrais acima, assim como na Proposição 2.6. Por (2.24),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \left( z_m^r(\cdot - x_r) + \frac{\phi}{R} \right)_+ \right]^{\theta} &\geq \int_{B_{\frac{r}{m}}(0)} \left[ \left( z_m^r(\cdot - x_r) - \frac{\|\phi\|_{\infty}}{R} \right)_+ \right]^{\theta} \\ &\geq \left( \frac{\|\phi\|_{\infty}}{R_0} \right)^{\theta} |B_{\frac{r}{m}}(0)| =: \tau_1 = \tau_1(m, r) > 0. \end{aligned}$$

Note que  $\tau_1$  não depende de  $R \geq R_0$ . Analogamente para  $I_2$ ,

$$\int_{\Omega} \left[ \left( z_m^r(\cdot - x_r) + \frac{\psi}{R} \right)_+ \right]^{\theta} \geq \left( \frac{\|\psi\|_{\infty}}{R_0} \right)^{\theta} |B_{\frac{r}{m}}(0)| =: \tau_2 = \tau_2(m, r) > 0.$$

Assim, obtemos

$$J(R\Psi) \leq \frac{R^2}{2} - C_\theta(\tau_1 + \tau_2)R^\theta - D_\theta.$$

Para todo  $R \geq R_0$ . Uma vez que  $\theta > 2$ , podemos escolher  $R = R(m, r) \geq R_0$  tal que  $J(RZ_m^r) \leq 0$ , como queríamos. ■

Definimos então o nível minimax do funcional  $J$  associado ao problema (2.4), supondo as hipóteses  $(A_1)$  ou  $(A_3)$  no 2.3.

$$\tilde{c} = \tilde{c}(m) = \inf_{v \in \Upsilon} \sup_{W \in v(E)} J(W) \quad (2.25)$$

onde  $\Upsilon = \{v \in C(E, E) : v(0) = 0 \text{ e } v(RZ_m^r) = RZ_m^r\}$ ,  $R$  dado no Lema 2.10.

Portanto, o Princípio Variacional de Ekeland garante a existência de uma sequência  $(V_n) \subset E$  tal que  $J(V_n) \rightarrow \tilde{c}$  e  $J'(V_n) \rightarrow 0$ .

Para provarmos as condições geométricas do Teorema de Linking para o caso das hipóteses  $(A_2)$  ou  $(A_4)$ , devemos decompor o espaço  $E$ . Observe que para  $r$  suficientemente pequeno, temos possíveis as seguintes decomposições:  $E = H_k^r \oplus H_k^\perp$  e  $E = E_k^r \oplus E_k^\perp$ , onde  $H_k^r$  e  $E_k^r$  estão definidos em (2.23).

Antes do próximo resultado, fixemos  $r$  suficientemente pequeno tal que

$$\left( \frac{\mu_1}{\lambda_k + c_k r^2} - 1 \right), \left( \frac{1}{\lambda_k^A + c_k r^2} - 1 \right) > 0. \quad (2.26)$$

e  $\delta > 0$  tal que

$$\delta^2 < \begin{cases} \frac{\mu_1}{\lambda_k + c_k r^2} - 1 & \text{se supomos } (A_2); \\ \frac{1}{\lambda_k^A + c_k r^2} - 1 & \text{se supomos } (A_4). \end{cases} \quad (2.27)$$

Temos então

**Proposição 2.11.** *Suponha válidas as hipóteses  $(A_2)$  (ou  $(A_4)$ ),  $(H_0)$ ,  $(H_1)$  item (ii),  $(H_2)$ - $(H_4)$ . Então,*

(i) *Existem  $\rho, \beta > 0$  tais que  $J(U) \geq \beta$  se  $U \in \partial B_\rho \cap H_k^\perp$  (ou  $E_k^\perp$ ).*

(ii) *Para cada  $m$  suficientemente grande, existe  $R = R(m) > 0$  tal que se*

$$Q := \overline{B_R} \cap H_k^r \text{ (ou } E_k^r) \oplus \{s\delta Z_m^r : 0 \leq s \leq R\}$$

*então  $J(U) \leq 0$  para todo  $U \in \partial Q$ . Além disso  $R = R(m) \rightarrow \infty$  quando  $m \rightarrow \infty$ .*

**Prova.** Se supomos  $(A_2)$  então temos

$$\|V\|^2 - \int_{\Omega} (AV, V)_{\mathbb{R}^2} \geq \left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right) \|V\|^2 \geq C\|V\|^2 \quad \text{para todo } V \in H_k^\perp \quad (2.28)$$

e analogamente se supomos  $(A_4)$  então por (1.39) temos

$$\|V\|^2 - \int_{\Omega} (A(x)V, V)_{\mathbb{R}^2} \geq \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}^A}\right) \|V\|^2 \geq C\|V\|^2. \quad (2.29)$$

Assim considerando  $U \in H_k^\perp$  ou  $U \in E_k^\perp$ , de maneira análoga ao Lema 2.10, item (i) temos

$$J(U) \geq C\|U\|^2 - C\|U\|^3,$$

o que demonstra o item (i).

Para o item (ii), observamos inicialmente que da forma como escolhemos  $H_k^r$  e  $E_k^r$ , dados em (2.23), podemos mostrar que para qualquer  $s \geq 0$  temos

$$J(V + s\delta Z_m^r) = J(V) + J(s\delta Z_m^r) \quad \text{para todo } V \in H_k^r \text{ ou } V \in E_k^r, \quad (2.30)$$

uma vez que o suporte das “autofunções” em  $H_k^r$  ou  $E_k^r$  é disjunto do suporte da função  $Z_m^r$ .

Inicialmente, uma vez que temos (2.30), estimamos separadamente  $J(V)$ , para todo  $V \in H_k^r$  ou  $E_k^r$ .

Tomamos  $V \in H_k^r$  e notamos que pelo Lema 2.8 temos

$$\begin{aligned} J(V) &\leq \frac{1}{2}\|V\|^2 - \frac{1}{2}\mu_1 \int_{\Omega} |V|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_1}{\lambda_k + c_k r^2}\right) \|V\|^2. \end{aligned}$$

Analogamente, tomando  $V \in E_k^r$  e fazendo uso do mesmo Lema vemos que

$$\begin{aligned} J(V) &\leq \frac{1}{2}\|V\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A(x)V, V)_{\mathbb{R}^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_k^A + c_k r^2}\right) \|V\|^2. \end{aligned}$$

Como  $\mu_1 < \lambda_k$  e  $1 < \lambda_k^A$ , por hipóteses, podemos tomar  $C_1 > 0$  tal que

$$C_1 < \begin{cases} \left(\frac{\mu_1}{\lambda_k + c_k r^2} - 1\right) \\ \left(\frac{1}{\lambda_k^A + c_k r^2} - 1\right) \end{cases}$$

para todo  $r$  suficientemente pequeno. Portanto, fazendo sempre a distinção necessária dos espaços considerados (  $H_k^r$  para a hipótese  $(A_2)$  e  $E_k^r$  para a hipótese  $(A_4)$  ) temos que

$$J(V) \leq -C_1 \|V\|^2 \text{ para todo } V \in H_k^r \text{ ou } E_k^r. \quad (2.31)$$

Assim como na Proposição 2.7, separamos  $\partial Q$ : tomemos  $\partial Q = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ , onde

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \overline{B}_R \cap H_k^r \text{ ( ou } E_k^r \text{ )} \\ \Sigma_2 &= \{V + s\delta Z_m^r ; \|V\| = R\} \\ \Sigma_3 &= \{V + R\delta Z_m^r ; \|V\| \leq R\} \end{aligned}$$

Se  $U \in \Sigma_1$ , por causa de (2.31)

$$J(U) \leq 0$$

independentemente de  $R > 0$ .

Em  $\Sigma_2$ .

Supondo primeiramente a hipótese  $(A_2)$ , devido a (1.37) e pelas escolhas de  $r$  e  $\delta$  em (2.26) e (2.27), temos

$$\begin{aligned} J(V + s\delta Z_m^r) &= J(V) + J(s\delta Z_m^r) \\ &\leq \frac{1}{2} \|V\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (AV, V)_{\mathbb{R}^2} + \frac{s^2}{2} \delta^2 \|Z_m^r\|^2 \\ &\leq \frac{R^2}{2} - \frac{\mu_1}{2} \int_{\Omega} |V|^2 + \frac{R^2}{2} \delta^2 \\ &\leq \frac{R^2}{2} \left( 1 - \frac{\mu_1}{\lambda_k + c_k r^2} + \delta^2 \right) < 0, \end{aligned}$$

independentemente de  $R > 0$ .

Supondo agora a hipótese  $(A_4)$ , devido a 1.39, vemos que

$$\begin{aligned} J(V + s\delta Z_m^r) &\leq \frac{1}{2} \|V\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A(x)V, V)_{\mathbb{R}^2} + \frac{s^2}{2} \delta^2 \|Z_m^r\|^2 \\ &\leq \frac{R^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_k^A + c_k r^2} + \delta^2 \right) < 0, \end{aligned}$$

novamente por (2.26) e (2.27) e independentemente de  $R > 0$ .

Para concluir, seja  $V + R\delta Z_m^r \in \Sigma_3$ . Fazendo uso de (2.19),

$$\begin{aligned}
J(V + R\delta Z_m^r) &= J(V) + J(R\delta Z_m^r) \\
&\leq -C_1 \|V\|^2 + \frac{R^2}{2} \delta^2 - \int_{\Omega} H((R\delta z_m^r(\cdot - x_r) + \phi)_+, (R\delta z_m^r(\cdot - x_r) + \psi)_+) \\
&\leq \frac{\delta^2}{2} R^2 - R^\theta C_\theta \left( \int_{\Omega} \left[ \left( \delta z_m^r(\cdot - x_r) + \frac{\phi}{R} \right)_+ \right]^\theta + \left[ \left( \delta z_m^r(\cdot - x_r) + \frac{\psi}{R} \right)_+ \right]^\theta \right) - D_\theta \\
&\leq \frac{\delta^2}{2} R^2 - R^\theta C_\theta \left( \int_{B_{\frac{r}{m}}(0)} \left[ \left( \delta z_m^r - \frac{\|\phi\|_\infty}{R} \right)_+ \right]^\theta + \left[ \left( \delta z_m^r - \frac{\|\psi\|_\infty}{R} \right)_+ \right]^\theta \right) - D_\theta,
\end{aligned}$$

daí, assim como em (2.24), tomemos  $m$  suficientemente grande para que

$$\delta z_m^r(x) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \log^{\frac{1}{2}} m \geq \max \left\{ \frac{2\|\phi\|_\infty}{R_0}, \frac{2\|\psi\|_\infty}{R_0} \right\}, \quad \text{para todo } x \in B_{\frac{r}{m}}(0) \subset \Omega, \quad (2.32)$$

e conseqüentemente

$$J(V + R\delta Z_m^r) \leq \frac{\delta^2}{2} R^2 - R^\theta C_\theta \left( \int_{B_{\frac{r}{m}}(0)} \left( \frac{\|\phi\|_\infty}{R_0} \right)_+^\theta + \left( \frac{\|\psi\|_\infty}{R_0} \right)_+^\theta \right) - D_\theta,$$

Assim, obtemos

$$J(V + R\delta Z_m^r) \leq \frac{\delta^2}{2} R^2 - C_m R^\theta - D_\theta.$$

onde

$$C_m = \left[ \left( \frac{\|\phi\|_\infty}{R_0} \right)_+^\theta + \left( \frac{\|\psi\|_\infty}{R_0} \right)_+^\theta \right] \pi \left( \frac{r}{m} \right)^2 \rightarrow 0 \quad \text{quando } m \rightarrow \infty.$$

Uma vez que  $\theta > 2$ , temos o resultado almejado. ■

A partir desta Proposição, podemos definir o nível minimax

$$\hat{c} = \hat{c}(m) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{W \in \gamma(Q)} J(W) \quad (2.33)$$

onde  $\Gamma = \{h \in C(Q, E) ; h(u) = u \text{ se } u \in \partial Q\}$ . Mais uma vez, o Princípio Variacional de Ekeland garante a existência de uma sequência de Palais-Smale neste nível.

### 2.4.3 Controle dos níveis minimax

Concentremo-nos em provar que os níveis minimax dados em (2.25) e (2.33) situam-se abaixo de  $2\pi/\alpha_0$  para  $m$  suficientemente grande. É nesse momento que precisaremos da condição adicional  $(H_5)$ , exigida com o intuito de “trazer para baixo” esses níveis minimax.

**Proposição 2.12.** *Seja  $\tilde{c}(m)$  dado em (2.25). Então existe  $m$  suficientemente grande tal que*

$$\tilde{c}(m) < \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

**Prova.** Inicialmente, fixemos algumas constantes que serão utilizadas na demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade,

$$\limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{\log(h(x, s))}{s} < 0.$$

Portanto, da hipótese ( $H_5$ ) temos que existem  $0 < \varepsilon_0 < C_0 < \infty$  tais que

$$\varepsilon_0 \leq \frac{\log(h(x, s))}{s} \leq C_0 \quad (2.34)$$

para todo  $s$  suficientemente grande.

Escolhamos e fixemos também  $r$  suficientemente pequeno e o correspondente  $x_r \in \Omega$  suficientemente próximo de  $\partial\Omega$  de forma que, denotando  $\|\Phi\|_{\infty, r}$  a norma de  $\Phi$  no espaço  $L^\infty(B_r(x_r)) \times L^\infty(B_r(x_r))$ , tenhamos

$$\|\Phi\|_{\infty, r} \leq \frac{\varepsilon_0}{2\alpha_0}. \quad (2.35)$$

Finalmente, consideremos  $\gamma$  tal que

$$\gamma > \frac{4}{\alpha_0 r^2} e^{\frac{(C_0)^2}{4\alpha_0}}. \quad (2.36)$$

A demonstração será feita por argumento de contradição. Suponha que para todo  $m$  tenhamos  $\tilde{c}(m) \geq 2\pi/\alpha_0$ . Por definição, temos

$$\tilde{c}(m) \leq \max_{t \geq 0} J(tZ_m^r).$$

Mas observe que para  $t \geq R_m$ , onde  $R_m$  é dado na Proposição 2.10, temos  $J(tZ_m^r) \leq 0$  e portanto pela compacidade de  $\overline{B_{R_m}}$ , para cada  $m$  temos que existe  $t_m > 0$  tal que

$$J(t_m Z_m^r) = \max_{t \geq 0} J(tZ_m^r). \quad (2.37)$$

Logo, estamos supondo que

$$J(t_m Z_m^r) \geq \frac{2\pi}{\alpha_0}, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
t_m^2 &\geq 2 \left[ \frac{t_m^2}{2} \left( \|Z_m^r\|^2 - \int_{\Omega} (A(x)Z_m^r, Z_m^r)_{\mathbb{R}^2} \right) - \int_{\Omega} H(x, (t_m Z_m^r + \Phi)_+) \right] \\
&= 2J(t_m Z_m^r) \\
&\geq \frac{4\pi}{\alpha_0}, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Provemos que  $t_m^2 \rightarrow 4\pi/\alpha_0$ : observe que de (2.37) temos que

$$\left. \frac{d}{dt} (J(tZ_m^r)) \right|_{t=t_m} = 0.$$

Sendo assim, temos que

$$t_m \|Z_m^r\|^2 - t_m \int_{\Omega} (A(x)Z_m^r, Z_m^r)_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} (\nabla H(x, (t_m Z_m^r + \Phi)_+), Z_m^r)_{\mathbb{R}^2} = 0.$$

Logo, como  $\Phi < 0$ ,

$$\begin{aligned}
t_m^2 &\geq \int_{B_{\frac{r}{m}}(x_r)} (\nabla H(x, (t_m Z_m^r + \Phi)_+), t_m Z_m^r)_{\mathbb{R}^2} \\
&\geq \int_{B_{\frac{r}{m}}(x_r)} (\nabla H(x, (t_m Z_m^r + \Phi)_+), (t_m Z_m^r + \Phi)_+)_{\mathbb{R}^2} \\
&\geq \int_{B_{\frac{r}{m}}(x_r)} (\nabla H(x, (t_m Z_m^r - \|\Phi\|_{\infty, r})_+), (t_m Z_m^r - \|\Phi\|_{\infty, r})_+)_{\mathbb{R}^2}
\end{aligned}$$

Uma vez que  $t_m \geq 2\pi/\sqrt{\alpha_0} > 0$ , podemos tomar  $m$  suficientemente grande para que  $(t_m(\sqrt{2\pi})^{-1} \log^{1/2} m - \|\Phi\|_{\infty, r})_+ \geq c_\gamma$ , onde  $c_\gamma$  é dado na hipótese  $(H_5)$ . Como  $Z_m^r = (\sqrt{2\pi})^{-1}(\log^{1/2} m, \log^{1/2} m)$  em  $B_{\frac{r}{m}}(x_r)$ , por essa mesma hipótese, segue então que

$$t_m^2 \geq \gamma \int_{B_{\frac{r}{m}}(x_r)} h \left( x, \frac{t_m}{\sqrt{2\pi}} \log^{1/2} m - \|\Phi\|_{\infty, r} \right) e^{\alpha_0 \left( \frac{t_m}{\sqrt{2\pi}} \log^{1/2} m - \|\Phi\|_{\infty, r} \right)^2}.$$

No que segue abaixo, trocamos a notação  $e^x$  por  $\exp(x)$  para melhor apresentação das estimativas abaixo. Temos portanto

$$\begin{aligned}
t_m^2 &\geq \gamma \int_{B_{\frac{r}{m}}(x_r)} \exp \left[ \log \left[ h \left( x, \frac{t_m}{\sqrt{2\pi}} \log^{1/2} m - \|\Phi\|_{\infty,r} \right) \right] + \alpha_0 \left( \frac{t_m}{\sqrt{2\pi}} \log^{1/2} m - \|\Phi\|_{\infty,r} \right)^2 \right] \\
&= \gamma \int_{B_{\frac{r}{m}}(x_r)} \exp \left[ - \left( \frac{\log \left[ h \left( x, \frac{t_m}{\sqrt{2\pi}} \log^{1/2} m - \|\Phi\|_{\infty,r} \right) \right]}{2\sqrt{\alpha_0} \left( \frac{t_m}{\sqrt{2\pi}} \log^{1/2} m - \|\Phi\|_{\infty,r} \right)} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \alpha_0 \left( \frac{t_m}{\sqrt{2\pi}} \log^{1/2} m - \|\Phi\|_{\infty,r} + \frac{\log \left[ h \left( x, \frac{t_m}{\sqrt{2\pi}} \log^{1/2} m - \|\Phi\|_{\infty,r} \right) \right]}{2\alpha_0 \left( \frac{t_m}{\sqrt{2\pi}} \log^{1/2} m - \|\Phi\|_{\infty,r} \right)} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Mas para  $m$  suficientemente grande, segue por (2.34)

$$- \left( \frac{\log \left[ h \left( x, \frac{t_m}{\sqrt{2\pi}} \log^{1/2} m - \|\Phi\|_{\infty,r} \right) \right]}{2\sqrt{\alpha_0} \left( \frac{t_m}{\sqrt{2\pi}} \log^{1/2} m - \|\Phi\|_{\infty,r} \right)} \right)^2 \geq -\frac{(C_0)^2}{4\alpha_0}$$

e

$$\frac{\log \left[ h \left( x, \frac{t_m}{\sqrt{2\pi}} \log^{1/2} m - \|\Phi\|_{\infty,r} \right) \right]}{2\alpha_0 \left( \frac{t_m}{\sqrt{2\pi}} \log^{1/2} m - \|\Phi\|_{\infty,r} \right)} \geq \frac{\varepsilon_0}{2\alpha_0},$$

donde obtemos

$$t_m^2 \geq \gamma \pi \frac{r^2}{m^2} e^{-\frac{(C_0)^2}{4\alpha_0}} e^{\alpha_0 \left( \frac{t_m}{\sqrt{2\pi}} \log^{1/2} m - \|\Phi\|_{\infty,r} + \frac{\varepsilon_0}{2\alpha_0} \right)^2}$$

e pela escolha de  $r$  e  $x_r$  em (2.35) temos

$$\begin{aligned}
t_m^2 &\geq \gamma \pi \frac{r^2}{m^2} e^{-\frac{(C_0)^2}{4\alpha_0}} e^{\alpha_0 \frac{t_m^2}{2\pi} \log m} \\
&= e^{-\frac{(C_0)^2}{4\alpha_0}} \gamma \pi r^2 e^{\left( \alpha_0 \frac{t_m^2}{2\pi} - 2 \right) \log m}.
\end{aligned}$$

Sendo assim  $(t_m)$  é uma seqüência limitada em  $m$ . Devido a (2.38), temos por consequência que  $t_m^2 \rightarrow 4\pi/\alpha_0$ . Fazendo  $m \rightarrow \infty$  na desigualdade acima, temos

$$\gamma \leq \frac{4}{\alpha_0 r^2} e^{\frac{(C_0)^2}{4\alpha_0}},$$

contrariando a escolha de  $\gamma$  em (2.36). Esse absurdo partiu de supormos  $\tilde{c}(m) \geq 2\pi/\alpha_0$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Concluimos portanto a demonstração. ■

Analogamente para o caso das hipóteses  $(A_2)$  ou  $(A_4)$  temos

**Proposição 2.13.** *Seja  $\widehat{c}(m)$  dado em (2.33). Então existe  $m$  suficientemente grande tal que*

$$\widehat{c}(m) < \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

**Prova.** A demonstração é praticamente a mesma da Proposição 2.12, devido ao fato que separamos o suporte das funções em  $H_k^r$  e  $E_k^r$  do suporte de  $Z_m^r$ . Com efeito, suponha novamente por absurdo que para todo  $m$  tenhamos

$$\widehat{c}(m) \geq \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

Da definição de  $\widehat{c}(m)$  temos que

$$\begin{aligned} \widehat{c}(m) &\leq \max \{ J(V + tZ_m^r); V \in H_k^r(\text{ ou } E_k^r) \cap B_{R(m)}, t \geq 0 \} \\ &= \max \{ J(V) + J(tZ_m^r); V \in H_k^r(\text{ ou } E_k^r) \cap B_{R(m)}, t \geq 0 \} \\ &\leq \max \{ J(V); V \in H_k^r(\text{ ou } E_k^r) \cap B_{R(m)} \} + \max \{ J(tZ_m^r); t \geq 0 \}. \end{aligned}$$

Mas já vimos em (2.31) que  $J(V) \leq 0$  para todo  $V \in H_k^r(\text{ ou } E_k^r)$  e portanto

$$\widehat{c}(m) \leq \max \{ J(tZ_m^r); t \geq 0 \}.$$

O restante da demonstração segue “ipsis litteris” da demonstração da Proposição 2.12. ■

#### 2.4.4 Conclusão da demonstração do Teorema 2.3

No que segue,  $c(m) = \widetilde{c}(m)$ , sob as hipóteses  $(A_1)$  ou  $(A_3)$ , ou  $c(m) = \widehat{c}(m)$ , nas condições  $(A_2)$  ou  $(A_4)$ .

Tomemos  $m$  tal que  $c(m) < 2\pi/\alpha_0$ , garantidos pelas Proposições 2.12 e 2.13. Seja  $(U_n)$ ,  $U_n = (u_n, v_n)$  a sequência (PS) neste nível  $c(m)$ . Uma vez que  $(U_n)$  é limitada, tomemos uma subsequência de  $(U_n)$  e  $U \in H_0^1(\Omega)$  tais que  $U_n \rightharpoonup U$  fracamente em  $E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ ,  $U_n \rightarrow U$  em  $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$  para todo  $p \geq 1$  e q.t.p. em  $\Omega$ . Temos o seguinte resultado auxiliar, o qual se baseia no Lema de Strauss (vide [4]):

**Proposição 2.14.** *Se  $U_n \rightharpoonup U$  fracamente em  $E$  e  $(U_n)$  satisfaz (2.10) então para  $n \rightarrow \infty$  valem as seguintes convergências*

$$(i) \quad \nabla H(\cdot, \widetilde{U}_n) \rightarrow \nabla H(\cdot, \widetilde{U}) \text{ em } L^1(\Omega) \times L^1(\Omega);$$

(ii)  $H(\cdot, \widetilde{U}_n) \rightarrow H(\cdot, \widetilde{U})$  em  $L^1(\Omega)$ .

**Prova.** Podemos supor que  $\widetilde{U}_n(x) \rightarrow \widetilde{U}(x)$  para quase todo  $x \in \Omega$ . Como  $(U_n)$  é limitada, temos, por (2.10) que

$$\int_{\Omega} (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), \widetilde{U}_n)_{\mathbb{R}^2} \leq \int_{\Omega} (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), U_n)_{\mathbb{R}^2} \leq C_0. \quad (2.39)$$

Para o item (i), inspirados nos argumentos contidos no Lema 2.1 em [21], devemos provar que  $H_u(\cdot, \widetilde{U}_n) \rightarrow H_u(\cdot, \widetilde{U})$  e  $H_v(\cdot, \widetilde{U}_n) \rightarrow H_v(\cdot, \widetilde{U})$ , ambas as convergências em  $L^1(\Omega)$ . Para tanto, é suficiente provarmos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} H_u(x, \widetilde{U}_n(x)) &\rightarrow \int_{\Omega} H_u(x, \widetilde{U}(x)) \quad \text{e} \\ \int_{\Omega} H_v(x, \widetilde{U}_n(x)) &\rightarrow \int_{\Omega} H_v(x, \widetilde{U}(x)) \end{aligned}$$

(vide [49]). Provaremos apenas a convergência para  $H_u$ . A outra convergência é idêntica. Com efeito, notemos primeiramente que como  $H_u(\cdot, \widetilde{U}) \in L^1(\Omega)$ , temos que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\int_A H_u(x, \widetilde{U}(x)) < \epsilon, \quad \text{sempre que } |A| < \delta \quad (2.40)$$

Uma vez que  $|\widetilde{U}| \in L^1(\Omega)$ , tomemos  $M_0$  tal que o conjunto  $A_0 \equiv \{x \in \Omega; |\widetilde{U}| \geq M_0\}$  satisfaz

$$|A_0| < \delta. \quad (2.41)$$

Pela hipótese  $(H_3)$  podemos ainda tomar  $M_1 > 0$  tal que

$$H_u(x, S) \leq \frac{\epsilon}{C_0} (\nabla H(x, S), S)_{\mathbb{R}^2}, \quad \text{para todo } |S| \geq M_1, \quad (2.42)$$

para algum  $C_1 > 0$ .

Seja então  $M = \max\{M_0, M_1\}$ . Observemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} H_u(x, \widetilde{U}_n(x)) - \int_{\Omega} H_u(x, \widetilde{U}(x)) \right| &= \left| \int_{|\widetilde{U}_n| \geq M} H_u(x, \widetilde{U}_n(x)) - \int_{|\widetilde{U}| \geq M} H_u(x, \widetilde{U}(x)) \right. \\ &\quad \left. + \int_{|\widetilde{U}_n| < M} H_u(x, \widetilde{U}_n(x)) - \int_{|\widetilde{U}| < M} H_u(x, \widetilde{U}(x)) \right| \\ &\leq \int_{|\widetilde{U}_n| \geq M} H_u(x, \widetilde{U}_n(x)) + \int_{|\widetilde{U}| \geq M} H_u(x, \widetilde{U}(x)) \\ &\quad + \left| \int_{|\widetilde{U}_n| < M} H_u(x, \widetilde{U}_n(x)) - \int_{|\widetilde{U}| < M} H_u(x, \widetilde{U}(x)) \right| \\ &\equiv I_1 + I_2 + |I_3 - I_4|. \end{aligned}$$

Fazendo uso de (2.39), (2.42) e a escolha de  $M$ , temos que

$$I_1 \leq \frac{\epsilon}{C_0} \int_{\Omega} (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), \widetilde{U}_n)_{\mathbb{R}^2} \leq \epsilon.$$

Devido a (2.40), (2.41) também temos

$$I_2 = \int_{|\widetilde{U}| \geq M} H_u(x, \widetilde{U}(x)) \leq \int_{A_0} H_u(x, \widetilde{U}(x)) \leq \epsilon.$$

Portanto, para demonstrar o item (i), resta-nos verificar que  $|I_3 - I_4| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Como  $H_u$  é contínua, temos que para quase todo  $x \in \Omega$ ,

$$H_u(x, \widetilde{U}_n(x)) \mathcal{X}_{|\widetilde{U}_n| < M}(x) - H_u(x, \widetilde{U}(x)) \mathcal{X}_{|\widetilde{U}| < M}(x) \rightarrow 0$$

onde  $\mathcal{X}_A$  denota a função característica do conjunto  $A$ . Uma vez que

$$H_u(x, \widetilde{U}_n(x)) \mathcal{X}_{|\widetilde{U}_n| < M}(x) - H_u(x, \widetilde{U}(x)) \mathcal{X}_{|\widetilde{U}| < M}(x) \leq C$$

o resultado segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Provemos o item (ii): seguimos a demonstração do Teorema A.1 em [4] (Lema de Strauss). Como  $H$  é contínua, temos que  $H(x, \widetilde{U}_n(x)) \rightarrow H(x, \widetilde{U}(x))$ . Sendo  $|\Omega| < \infty$ , o Teorema de Ergorov nos garante que essa convergência pontual se dá também em medida. Consequentemente, o Teorema de Vitali implica que  $H(\cdot, \widetilde{U}_n) \rightarrow H(\cdot, \widetilde{U})$  em  $L^1$  ocorre quando  $H(\cdot, \widetilde{U}_n)$  é uniformemente integrável em  $n$ . Isto é, precisamos provar que dado  $\epsilon > 0$  existe  $K_\epsilon \geq 0$  tal que

$$\int_{H(x, \widetilde{U}_n) \geq K_\epsilon} H(x, \widetilde{U}_n) < \epsilon.$$

Com efeito, por  $(H_3)$  dado  $\epsilon > 0$  escolha  $c_\epsilon$  tal que

$$H(x, S) \leq \frac{\epsilon}{C_0} (\nabla H(x, S), S)_{\mathbb{R}^2} \text{ para todo } x \in \Omega \text{ e } |S| \geq c_\epsilon,$$

onde  $C_0$  é dado em (2.39). Além disso, uma vez que  $H$  é função contínua, podemos encontrar  $K_\epsilon > 0$  tal que

$$H(x, \widetilde{U}_n(x)) \geq K_\epsilon \Rightarrow |\widetilde{U}_n(x)| \geq c_\epsilon.$$

Portanto,

$$\int_{H(x, \widetilde{U}_n) \geq K_\epsilon} H(x, \widetilde{U}_n) \leq \int_{|\widetilde{U}_n| \geq c_\epsilon} H(x, \widetilde{U}_n) \leq \frac{\epsilon}{C_0} \int_{\Omega} (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), \widetilde{U}_n)_{\mathbb{R}^2} < \epsilon,$$

como queríamos. ■

**Demonstração do Teorema 2.3:** Observemos primeiramente que  $U$  é solução para o Problema (2.4). De fato, tomando  $V \in C_c^\infty(\Omega) \times C_c^\infty(\Omega)$  temos que

$$0 \leftarrow J'(U_n)V = \int_{\Omega} \nabla U_n \nabla V - \int_{\Omega} (A(x)U_n, V)_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), V)_{\mathbb{R}^2}.$$

Mas então, como  $\int_{\Omega} \nabla U_n \nabla V \rightarrow \int_{\Omega} \nabla U \nabla V$ ,  $\int_{\Omega} (A(x)U_n, V)_{\mathbb{R}^2} \rightarrow \int_{\Omega} (A(x)U, V)_{\mathbb{R}^2}$  e  $\int_{\Omega} (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), V)_{\mathbb{R}^2} \rightarrow \int_{\Omega} (\nabla H(x, \widetilde{U}), V)_{\mathbb{R}^2}$  (esta última devido à Proposição 2.14), temos que  $J'(U)V = 0$  para todo  $V \in C_c^\infty(\Omega) \times C_c^\infty(\Omega)$ . Logo  $U$  é solução de (2.4). Precisamos, no entanto, garantir que  $U \neq 0$ .

Suponha por absurdo  $U = 0$ . Observe assim que

$$\|U_n\|_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ e } \int_{\Omega} H(x, \widetilde{U}_n) \rightarrow \int_{\Omega} H(x, (\Phi)_+) = 0$$

(novamente pela Proposição 2.14). Sendo assim

$$c(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(U_n) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\|^2.$$

Portanto, como  $c(m) < 2\pi/\alpha_0$ , podemos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$\|U_n\|^2 \leq \frac{4\pi}{\alpha_0} - \delta. \quad (2.43)$$

para todo  $n$  suficientemente grande. Consideremos  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno e  $p > 1$  suficientemente próximo de 1 para que

$$p(\alpha_0 + \epsilon)(4\pi/\alpha_0 - \delta) \leq 4\pi.$$

Pela condição  $(H_1)$ , podemos tomar  $C > 0$  suficientemente grande para que

$$H_u(x, s, t) + H_v(x, s, t) \leq e^{(\alpha_0 + \epsilon)(s^2 + t^2)} + C \text{ para todo } s, t \geq 0, x \in \Omega.$$

Portanto como  $J'(U_n)U_n = o(1)$ , (isto é  $J'(U_n)U_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ ) assim como  $\int_{\Omega} (A(x)U_n, U_n)_{\mathbb{R}^2} = o(1)$ , vemos que

$$\begin{aligned} \|U_n\|^2 &= o(1) + \int_{\Omega} (\nabla H(x, \widetilde{U}_n), U_n)_{\mathbb{R}^2} \\ &= o(1) + \int_{\Omega} H_u(x, \widetilde{U}_n)u_n + \int_{\Omega} H_v(x, \widetilde{U}_n)v_n \\ &\leq o(1) + \left( \int_{\Omega} [H_u(x, \widetilde{U}_n)]^p \right)^{\frac{1}{p}} \|u_n\|_{L^{p'}(\Omega)} + \left( \int_{\Omega} [H_v(x, \widetilde{U}_n)]^p \right)^{\frac{1}{p}} \|v_n\|_{L^{p'}(\Omega)} \\ &\leq o(1) + C \left( \int_{\Omega} e^{p(\alpha_0 + \epsilon)(\widetilde{u}_n^2 + \widetilde{v}_n^2)} + C \right)^{\frac{1}{p}} (\|u_n\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|v_n\|_{L^{p'}(\Omega)}). \end{aligned}$$

Mas  $\widetilde{u}_n^2 = (u_n + \phi)_+^2 \leq u_n^2$  e  $\widetilde{v}_n^2 = (v_n + \psi)_+^2 \leq v_n^2$ . Então

$$\begin{aligned} \|U_n\|^2 &\leq o(1) + C \left( \int_{\Omega} e^{p(\alpha_0+\epsilon)(u_n^2+v_n^2)} + C \right)^{\frac{1}{p}} \|U_n\|_{L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega)} \\ &\leq o(1) + C \left( \int_{\Omega} e^{p(\alpha_0+\epsilon)\left(4\frac{\pi}{\alpha_0}-\delta\right)\left(\frac{|U_n|}{\|U_n\|}\right)^2} + C \right)^{\frac{1}{p}} \|U_n\|_{L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega)} \\ &\leq o(1) + C \left( \int_{\Omega} e^{4\pi\left(\frac{|U_n|}{\|U_n\|}\right)^2} + C \right)^{\frac{1}{p}} \|U_n\|_{L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Mas  $\|U_n\|_{L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega)} \rightarrow 0$ . Como a última integral nas estimativas acima é limitada pela desigualdade de Trudinger-Moser (observe que  $|U|/\|U\|$  é uma função em  $H_0^1(\Omega)$  com norma 1), temos que  $\|U_n\| \rightarrow 0$ . Sendo assim  $U_n \rightarrow 0$  em  $E$  e portanto  $J(U_n) \rightarrow 0 = c(m)$ . O que é um absurdo pois por definição de  $c(m)$  temos que  $c(m) \geq \rho > 0$  para todo  $m$ . Consequentemente  $U \neq 0$  é a solução procurada. ■

---

---

# CAPÍTULO 3

---

## SISTEMAS CRÍTICOS UNILATERAIS COM RESSONÂNCIA

---

### 3.1 Introdução

---

Neste capítulo, estudamos um sistema elíptico homogêneo em  $\mathbb{R}^N$  onde a não-linearidade possui um crescimento crítico unilateral (exponencial para o caso  $N = 2$ ) e ressonância em autovalores de ordem superior. Fazendo uso de técnicas variacionais, provamos a existência de uma solução não trivial para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v + H_u(x, u_+, v_+) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = b(x)u + c(x)v + H_v(x, u_+, v_+) & \text{em } \Omega, \\ u = 0, v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é limitado com fronteira suave,  $H$  é uma não-linearidade de crescimento crítico. As hipóteses para  $H$  são detalhadas na próxima seção. Supomos que 1 é um autovalor de

ordem superior para o problema de autovalor com peso dado em (1.9), onde

$$A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & c(x) \end{pmatrix} \in C(\overline{\Omega}, M_{2 \times 2}(\mathbb{R})).$$

Problemas elípticos críticos unilaterais têm sido objeto de interesse de alguns pesquisadores nos anos recentes. Normalmente envolvendo termos não-homogêneos, essas não linearidades críticas unilaterais surgem primeiramente em [20] para problemas do tipo Ambrosetti-Prodi, propostos pioneiramente em [2], onde os autores provam a existência de duas soluções para o problema de Dirichlet  $-\Delta u = \lambda u + u_+^{2^*-1} + f$  para uma classe particular de funções  $f$  apenas em dimensões  $N \geq 7$ . Posteriormente [9] melhora o resultado contido em [20] para dimensões menores  $N \geq 3$ , com algumas hipóteses adicionais em dimensões 3, 4 e 5, problema este que estendemos para uma classe de sistemas no Capítulo 1 e para o caso  $N = 2$  podemos encontrar um resultado equivalente em [10], o qual trazemos para o contexto de sistemas no Capítulo 2. Quando  $f = -s\phi_1$  onde  $\phi_1$  denota a primeira autofunção positiva de  $-\Delta$  com condições de fronteira de Dirichlet, temos alguns resultados relacionados a conjectura de Lazer-McKenna [37] que podem ser encontrados em [38, 39]. Estudamos neste trabalho um caso homogêneo com ressonância inspirados principalmente em técnicas introduzidas em [1, 9, 10, 20]. Citamos ainda [42] para um resultado semelhante, envolvendo ressonância em sistemas elípticos.

Diferentemente dos capítulos anteriores, exploramos aqui um problema homogêneo, com ressonância em autovalores de ordem superior. A diferença é, portanto, na dificuldade que naturalmente surge com essa ressonância. Superamo-a através de uma análise mais refinada na obtenção das estimativas necessárias. Observamos que, até onde vai o conhecimento do autor, este resultado é novo inclusive para o caso escalar

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_k u + g(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $k \geq 2$  e  $\lambda_k$  denota o  $k$ -ésimo autovalor de  $-\Delta$  com condição de fronteira de Dirichlet homogênea.  $g$  é uma não-linearidade de crescimento crítico em  $+\infty$ .

---

## 3.2 Hipóteses, teoremas e preliminares

---

Reescrevemos o problema (3.1) em sua forma vetorial: Se  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ,  $U_+ = \begin{pmatrix} u_+ \\ v_+ \end{pmatrix}$  e

$$\nabla H(x, U_+) = \begin{pmatrix} H_u(x, U_+) \\ H_v(x, U_+) \end{pmatrix},$$

temos

$$\begin{cases} -\Delta U = A(x)U + \nabla H(x, U_+) & \text{em } \Omega, \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.2)$$

Como já previamente mencionado, supomos

(A<sub>1</sub>)  $a, b, c \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ ,  $b(x) \geq 0$  para todo  $x \in \Omega$ ,  $\max_{x \in \Omega} \max\{a(x), c(x)\} > 0$ ; Além disso  $\lambda_k^A = 1$ , onde  $\lambda_k^A$  é o  $k$ -ésimo autovalor associado ao problema (1.9) com  $k \geq 2$ .

A abordagem para o caso de dimensão  $N \geq 3$  difere significativamente daquela para o caso bidimensional, uma vez que a criticalidade possui crescimento polinomial no primeiro caso e exponencial no segundo. O que fazemos aqui é juntar as ideias e hipóteses dos Capítulos 1 e 2, acrescentando às mesmas uma hipótese de ressonância não abordada anteriormente. No entanto, retiramos o termo não homogêneo e nosso estudo consta na prova de existência de solução não trivial para o problema (3.1).

Suponha  $p > 1$  e para cada função  $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  considere as seguintes hipóteses:

(h<sub>1</sub>)  $F \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+} \times \overline{\mathbb{R}_+})$  e  $F, F_u, F_v \geq 0$ ;

(h<sub>2</sub>)  $F(\lambda u, \lambda v) = \lambda^p F(u, v) \quad \forall \lambda > 0$  (ou seja,  $F$  é  $p$  homogênea, positivamente);

(h<sub>3</sub>)  $F_u(0, 1) = F_v(1, 0) = 0$ ;

(h<sub>4</sub>)  $(s, t) \mapsto F(s^{1/p}, t^{1/p})$  é côncava.

(h<sub>5</sub>) Existem constantes positivas  $\vartheta$  e  $\sigma$  tais que  $F(u, v) = \vartheta u_+^{2^*} + \sigma v_+^{2^*} + \tilde{F}(u, v)$ , com  $\tilde{F} \geq 0$ .

Podemos então enunciar o primeiro teorema deste capítulo.

**Teorema 3.1.** *Suponha  $(A_1)$  e  $H = F \neq 0$  satisfazendo  $(h_1)$ - $(h_5)$  com  $p = 2^*$ . Se  $N \geq 6$  então (3.1) admite uma solução não trivial. Caso  $H = F + G$  com  $G \neq 0$  satisfazendo  $(h_1)$ - $(h_3)$  e  $N/(2N - 2) < p/2^* < 1$ , então o mesmo resultado vale para  $N \geq 3$ .*

**Observação:** Notemos que podemos sempre supor  $H = F + G$ , tanto para  $N = 3, 4$  e  $5$  ou  $N \geq 6$ . A diferença é que podemos permitir, para  $N \geq 6$ , que  $G = 0$ . Portanto, a fim de evitar analisar essas dimensões separadamente, sempre admitiremos  $H = F + G$ . A hipótese  $G \neq 0$  só será utilizada nas dimensões  $3, 4$  e  $5$  e seu objetivo é perturbar o funcional associado ao problema de forma a baixar os níveis de energia do mesmo para valores apropriados. Notemos ainda que a hipótese sobre  $p$  é ligeiramente melhor (menos restritiva) que a hipótese análoga feita no Capítulo 1.

A demonstração desse Teorema segue a mesma linha de raciocínio explorada no Capítulo 1. A diferença aqui é que a ressonância impõe algumas dificuldades que são superadas via estimativas mais delicadas.

Para o caso bidimensional supomos

$$(H_1) \quad H \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+), \quad H_u, H_v \geq 0;$$

$$(H_2) \quad \nabla H \text{ é crítica: Existe } \alpha_0 > 0 \text{ tal que}$$

$$\lim_{|U| \rightarrow \infty} \frac{|\nabla H(x, U)|}{e^{\alpha|U|^2}} = \begin{cases} 0 & \text{para todo } \alpha > \alpha_0 \\ +\infty & \text{para todo } \alpha < \alpha_0 \end{cases}$$

uniformemente em  $x \in \Omega$ .

$$(H_3) \quad H_u(x, 0, v) = H_v(x, u, 0) = 0 \quad \forall u, v \geq 0;$$

$$(H_4) \quad \lim_{|U| \rightarrow \infty} \frac{H(x, U) + |\nabla H(x, U)|}{(\nabla H(x, U), U)_{\mathbb{R}^2}} = 0, \text{ uniformemente em } x \in \Omega;$$

$$(H_5) \quad |\nabla H(x, U)| = o(|U|) \text{ quando } |U| \rightarrow 0 \text{ uniformemente em } x \in \Omega.$$

$$(H_6) \quad \text{Para todo } \gamma \geq 0 \text{ existe } c_\gamma \geq 0 \text{ tal que}$$

$$(\nabla H(x, s, s), (s, s))_{\mathbb{R}^2} \geq \gamma e^{\alpha_0 s^2} \text{ para todo } s \geq c_\gamma, \quad x \in \Omega.$$

De posse dessas condições, temos o seguinte teorema.

**Teorema 3.2.** *Suponha  $(A_1)$ ,  $(H_1)$ - $(H_6)$ . Se  $N = 2$  então (3.1) admite uma solução não trivial.*

Notemos que a hipótese  $\lambda_k^A = 1$  nos induz à utilização do Teorema de Linking (sem a condição de Palais-Smale, uma vez que estamos supondo crescimento crítico), enunciado na subseção 1.5.2, para o funcional  $J : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  associado a (3.2) dado por

$$J(U) = \frac{1}{2} \left( \|U\|^2 - \int_{\Omega} (A(x)U, U)_{\mathbb{R}^2} \right) - \int_{\Omega} H(x, U_+). \quad (3.3)$$

Para tanto, assim como nos capítulos anteriores, precisamos de uma decomposição apropriada para o espaço  $E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ , onde procuramos pontos críticos deste funcional (que são as soluções fracas de (3.2)). A decomposição natural é dada por  $E = E_k \oplus E_k^\perp$  onde  $E_k = \text{span}\{\Phi_i^A; 1 \leq i \leq k\}$ . Porém, a fim de facilitar algumas estimativas no decorrer das demonstrações, faremos uso de técnicas desenvolvidas em [32], que consistem em “furar” as autofunções em  $E_k$  produzindo “buracos” nessas autofunções que serão o suporte de funções apropriadas na obtenção das condições geométricas desse teorema de ponto crítico.

Analogamente ao que fizemos no Capítulo 2, seja  $r_0 \in \mathbb{R}$  suficientemente pequeno tal que exista  $x_{r_0} \in \Omega$  satisfazendo  $B_{4r_0}(x_{r_0}) \subset \Omega$  e

$$|\Phi_1^A(x)|, |\Phi_2^A(x)|, \dots, |\Phi_k^A(x)| \leq Cr_0 \quad (3.4)$$

para todo  $x \in B_{4r_0}(x_{r_0})$  e para algum  $C > 0$ . Isto é possível uma vez que as funções  $\Phi_i^A$  são todas Lipschitzianas e se anulam em  $\partial\Omega$ . Note que uma vez escolhido  $r_0$  e seu respectivo ponto  $x_{r_0}$ , então para qualquer  $r < r_0$  podemos escolher  $x_r$  satisfazendo as condições acima. Note que sempre podemos escolher  $x_r$  de forma que  $\text{dist}(x_r, \partial\Omega) \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow 0$ .

Considere então  $r \leq r_0$  e  $x_r$  dados acima e  $\zeta_r \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  tal que:  $0 \leq \zeta_r \leq 1$ ,  $|\nabla\zeta_r(x)| \leq 2/r$  e

$$\zeta_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in B_r(x_r) \\ 1 & \text{se } x \in \Omega \setminus B_{2r}(x_r). \end{cases}$$

Defina agora

$$\Phi_i^r = \zeta_r \Phi_i^A$$

e considere o seguinte espaço de dimensão finita

$$E_k^r = \text{span}\{\Phi_i^r; 1 \leq i \leq k\}. \quad (3.5)$$

Pelo Lema 1.14 (com  $r = 1/m$ ), podemos encontrar  $\tilde{r}$  suficientemente pequeno para que

$$E = E_k^r \oplus E_k^\perp \quad (3.6)$$

para todo  $r < \tilde{r}$ .

Para uma melhor organização deste capítulo, alguns resultados cujas demonstrações são semelhantes independentemente das dimensões  $N = 2$  ou  $N \geq 3$  serão estabelecidos e demonstrados nessa seção.

Denotando  $B_\rho$  a bola de raio  $\rho$  e centro na origem do espaço  $E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ , temos o seguinte lema

**Lema 3.3.** *Sob as hipóteses do Teorema 3.1 ou 3.2 existem  $\rho, \delta > 0$  tais que*

$$J(V) \geq \delta \text{ para todo } V \in \partial B_\rho \cap E_k^\perp.$$

**Prova.** Pela hipótese  $(A_1)$  e (1.39) temos

$$\|V\|^2 - \int_{\Omega} (A(x)V, V)_{\mathbb{R}^2} \geq \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}^A}\right) \|V\|^2 \geq C\|V\|^2, \quad (3.7)$$

para todo  $V \in E_k^\perp$ . Assim, para o caso das hipóteses do Teorema 3.1 e fazendo uso da desigualdade (1.29) para  $F$  e  $G$ , temos

$$\begin{aligned} J(V) &\geq C\|V\|^2 - \int_{\Omega} F(v_+, w_+) - \int_{\Omega} G(v_+, w_+) \\ &\geq C\|V\|^2 - M_F \left( \int_{\Omega} v_+^{2^*} + \int_{\Omega} w_+^{2^*} \right) - M_G \left( \int_{\Omega} v_+^p + \int_{\Omega} w_+^p \right) \\ &\geq C\|V\|^2 - C\|V\|^{2^*} - C\|V\|^p, \end{aligned}$$

o que demonstra este lema para o caso  $N \geq 3$ .

Supondo o caso bidimensional, fixemos  $U \in E_k^\perp$ . Pelo Lema 2.4, tomando  $\alpha > \alpha_0$  e  $\|U\| \leq \sqrt{\pi/\alpha}$ , temos

$$\begin{aligned} J(U) &\geq C\|U\|^2 - \varepsilon \int_{\Omega} |U|^2 - K_\varepsilon \int_{\Omega} e^{\alpha|U|^2} (u^3 + v^3) \\ &\geq \frac{1}{2} (C - C\varepsilon) \|U\|^2 - K_\varepsilon \left( \int_{\Omega} e^{2\alpha(u^2+v^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \|U\|_{L^6 \times L^6}^3 \\ &\geq C\|U\|^2 - C \left( \int_{\Omega} e^{4\alpha u^2} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \int_{\Omega} e^{4\alpha v^2} \right)^{\frac{1}{4}} \|U\|^3. \end{aligned}$$

E estas duas integrais acima são limitadas pela desigualdade de Trudinger-Moser. Sendo assim,

$$J(U) \geq C\|U\|^2 - C\|U\|^3,$$

para todo  $U \in E_k^\perp$  tal que  $\|U\| \leq \sqrt{\pi/\alpha}$ , o que conclui a demonstração do Lema.  $\blacksquare$

O próximo resultado complementa o Lema 1.14 e assim como naquele caso a demonstração é feita de modo inteiramente análogo àquela contida em [32].

**Lema 3.4.** *Existe  $C > 0$  tal que, para todo  $r$  suficientemente pequeno temos*

$$\left| \int_{\Omega} \nabla \Phi_i^r \nabla \Phi_j^r \right| \leq \delta_{ij} + Cr^N.$$

Após o Lema 3.3 o que geralmente fazemos para a demonstração das condições geométricas do Teorema de Linking é escolher uma função apropriada  $w$  no espaço  $(E_k^r)^\perp$  a fim de obter as estimativas necessárias sobre a fronteira do conjunto  $B_R \cap E_k^r \oplus \{sw; 0 \leq s \leq R\}$ . A escolha de tal  $w$  difere significativamente nos casos  $N = 2$  e  $N \geq 3$ . Por isso, optamos por separar a discussão e demonstração dos resultados principais em duas seções que contemplam essas abordagens distintas.

---

### 3.3 O caso $N \geq 3$

---

Tomemos  $\xi_r \in C_0^\infty(B_r(x_r), [0, 1])$  uma sequência de funções “cut-off” tal que  $\xi_r = 1$  em  $B_{r/2}(x_r)$  e  $\|\xi_r\|_\infty \leq 4/r$  e definamos

$$u_\epsilon^r(x) = \xi_r(x)u_\epsilon(x - x_r). \quad (3.8)$$

Onde as funções  $u_\epsilon$  são as conhecidas funções de Talenti já definidas em (1.31) e utilizadas ao longo do Capítulo 1. Seguindo a mesma linha de raciocínio dos procedimentos deste mesmo capítulo consideramos

$$U_\epsilon^r = (\gamma u_\epsilon^r, \kappa u_\epsilon^r) \quad (3.9)$$

onde  $\gamma, \kappa \geq 0$  são constantes não-negativas satisfazendo

$$\begin{aligned} \gamma^2 + \kappa^2 &= 1 \\ \overline{F}(\gamma, \kappa) &= M_{\overline{F}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde

$$\overline{F}(U) = F(U)^{2/2^*}$$

e

$$M_{\overline{F}} = \max\{|\overline{F}(s, t)| : |s|^2 + |t|^2 = 1\}.$$

Consideramos assim o seguinte conjunto:

$$Q_r^R = (\overline{B_R} \cap E_k^r) \oplus \{sU_\epsilon^r; 0 \leq s \leq R\} \quad (3.11)$$

O seguinte lema, em conjunto com o Lema 3.3 para o caso  $N \geq 3$  nos dão a geometria de Linking necessária para a construção de uma sequência de Palais-Smale em um nível apropriado de compacidade do funcional em (3.3).

**Lema 3.5.** *Supondo as condições do Teorema 3.1, dados  $\rho, \alpha > 0$ , existe  $R > \rho$  tal que*

$$J(V) \leq \alpha, \quad \text{para todo } V \in \partial Q_r^R,$$

para quaisquer  $r, \epsilon > 0$  suficientemente pequenos.

**Prova.** A técnica que utilizamos de “furar” as autofunções de forma que as funções de Talenti possam ser suportadas nestes “furos” tem como objetivo tornar relativamente fáceis estimativas que dependem de termos como  $sU_\epsilon^r + V$  onde  $V \in E_k^r$ . Isso ocorre pois com esse procedimento, temos que

$$J(V + sU_\epsilon^r) = J(V) + J(sU_\epsilon^r), \quad \text{para todo } s \geq 0 \text{ e } V \in E_k^r. \quad (3.12)$$

Referimo-nos a (1.51) e a demonstração lá contida para a prova de (3.12).

Sendo assim, considerando a decomposição  $\partial Q_R^r = P_1 \cup P_2 \cup P_3$  onde

$$P_1 = E_k^r \cap \overline{B_R}$$

$$P_2 = \{V + RU_\epsilon^r; V \in H_k^r \cap \overline{B_R}\}$$

$$P_3 = \{V + sU_\epsilon^r; V \in H_k^r, \|V\| = R \text{ e } 0 \leq s \leq R\}$$

Em  $P_1$  utilizaremos o Lema 1.14 com  $r = 1/m$ . Temos então

$$\begin{aligned} J(V) &\leq \frac{1}{2} \left( \|V\|^2 - \int_{\Omega} (A(x)V, V)_{\mathbb{R}^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{1 + c_k r^N} \right) R^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Guardamos, por enquanto, esta estimativa.

Se  $V + RU_\epsilon^r \in P_2$ , então a hipótese de homogeneidade sobre  $F$  e as estimativas de Brezis-Nirenberg para  $u_\epsilon^r$  (mencionadas no Lema 1.10) nos dão

$$\begin{aligned}
J(V + RU_\epsilon^r) &= J(V) + J(RU_\epsilon^r) \\
&\leq \frac{R^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{1 + c_k r^N} \right) + \frac{R^2}{2} \|U_\epsilon^r\| - R^{2^*} F(\gamma, \kappa) \int_\Omega |u_\epsilon^r|^{2^*} \\
&\leq CR^2 - CR^{2^*} (S^{N/2} + C_r \epsilon^N) \\
&\leq 0,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

para  $R$  suficientemente grande e independentemente de  $r > 0$  e  $\epsilon > 0$ .

Suponhamos agora  $V + sU_\epsilon^r$  em  $P_3$ , ou seja,  $\|V\| = R$ . Temos

$$\begin{aligned}
J(V + sU_\epsilon^r) &= J(V) + J(sU_\epsilon^r) \\
&\leq J(V) + C_2 s^2 \int_\Omega |\nabla u_\epsilon^m|^2 - F(\gamma, \kappa) s^{2^*} \int_\Omega (u_\epsilon^m)^{2^*} \\
&\leq J(V) + S^{N/2} (C_2 s^2 - F(\gamma, \kappa) s^{2^*}) + C_2 s^2 O(\epsilon^{N-2}) - F(\gamma, \kappa) s^{2^*} O(\epsilon^N) \\
&\leq J(V) + C_1 + C_2 \epsilon^{N-2} R^{2^*},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

onde utilizamos as estimativas no Lema 1.10 e o fato de que  $C_2 s^2 - F(\gamma, \kappa) s^{2^*} \leq C$  para todo  $s \geq 0$ .

Vemos então a necessidade de estimar  $J(V)$  apropriadamente. Consideremos então  $V = R\bar{V}$  onde  $\|\bar{V}\| = 1$  e  $\bar{V} = \alpha V_1 + \beta V_2$  com  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ,  $V_1 \in E_l^r$  e  $V_2 \in \mathcal{V}_k^r$ , onde  $l = \max\{n; \lambda_n^A < \lambda_k^A\}$  e  $\mathcal{V}_k^r$  denota o subespaço de  $E$  obtido após as modificações feitas nas autofunções que compõem uma base para o autoespaço associado ao autovalor  $\lambda_k^A$ . Sendo assim,

$$J(V) \leq \frac{R^2}{2} \left( \|\bar{V}\|^2 - \int_\Omega (A(x)\bar{V}, \bar{V})_{\mathbb{R}^2} \right) - R^{2^*} \int_\Omega F(\bar{V}) \tag{3.16}$$

Fixemos  $\delta > 0$ . Temos que  $\bar{V} \in E_k^r \cap B_1 = \mathcal{V}_\delta \cup \mathcal{U}_\delta$  onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_\delta &\equiv \{W = \alpha W_1 + \beta W_2; W_1 \in E_l^r \cap B_1 \cap B_1, W_2 \in \mathcal{V}_k^r, \alpha^2 + \beta^2 = 1, |\alpha| \geq \delta\}, \\
\mathcal{U}_\delta &\equiv \{W = \alpha W_1 + \beta W_2; W_1 \in E_l^r \cap B_1 \cap B_1, W_2 \in \mathcal{V}_k^r, \alpha^2 + \beta^2 = 1, |\alpha| < \delta\}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Se  $\bar{V} \in \mathcal{V}_\delta$  então pelos Lemas 1.14 e 3.4, a partir de (3.16) vemos que

$$\begin{aligned}
J(V) &\leq \frac{R^2}{2} \left( \alpha^2 \int_{\Omega} \nabla V_1 \nabla V_1 + \beta^2 \int_{\Omega} \nabla V_2 \nabla V_2 - \alpha^2 \int_{\Omega} (A(x)V_1, V_1)_{\mathbb{R}^2} \right. \\
&\quad \left. - \beta^2 \int_{\Omega} (A(x)V_2, V_2)_{\mathbb{R}^2} + 2\alpha\beta \left( \int_{\Omega} \nabla V_1 \nabla V_2 - \int_{\Omega} (A(x)V_1, V_2)_{\mathbb{R}^2} \right) \right) \\
&\leq \frac{R^2}{2} \left( \alpha^2(1 + Cr^N) + \beta^2(1 + Cr^N) + 2|\alpha||\beta|Cr^N - \frac{\alpha^2}{\lambda_i^A + c_l r^N} - \frac{\beta^2}{1 + c_k r^N} \right) \\
&\leq \frac{R^2}{2} \left( \alpha^2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda_i^A + c_l r^N} \right) + Cr^N \right).
\end{aligned}$$

Assim, como  $1 = \lambda_k^A > \lambda_i^A$  e  $|\alpha| > \delta$ , podemos tomar  $r > 0$  suficientemente pequeno para que

$$J(V) \leq -C_\delta R^2, \quad \text{para todo } V = R\bar{V}, \bar{V} \in \mathcal{V}_\delta. \quad (3.18)$$

Suponhamos agora  $\bar{V} \in \mathcal{U}_\delta$ . Observemos que para obter a estimativa (3.18) não fizemos uso do termo  $R^{2^*} \int_{\Omega} F(\bar{V})$  que surge em (3.16). No entanto, uma vez que o controle na parte quadrática fica comprometido quando  $\bar{V}$  tem sua maior parcela em ressonância (que é o caso quando  $\bar{V} \in \mathcal{U}_\delta$ ), precisamos utilizar então este termo anteriormente descartado. Mostremos que existem  $\delta > 0$  e  $c_\delta > 0$  tais que

$$\int_{\Omega} F(\bar{V}) \geq c_\delta > 0 \quad \text{para todo } \bar{V} \in \mathcal{U}_\delta. \quad (3.19)$$

Com efeito, observamos primeiramente que  $\bar{V} = (\alpha y_1 + \beta w_1, \alpha y_2 + \beta w_2)$  onde  $Y = (y_1, y_2) \in E_l^r \cap B_1$  e  $W = (w_1, w_2) \in \mathcal{V}_k^r \cap B_1$ . Portanto, pelo menos uma das funções coordenadas  $w_1, w_2 \in H_0^1(\Omega)$  sempre muda de sinal, uma vez que  $k > 1$ . Provemos inicialmente que existem  $\delta > 0$  e  $d_\delta > 0$  tais que

$$\max_{i=1,2} \left\{ \max_{\Omega} \{ \alpha y_i + \beta w_i; \bar{V} \in \mathcal{U}_\delta \} \right\} \geq d_\delta > 0.$$

De fato, suponha que não. Sendo assim, é possível encontrar seqüências  $(\alpha_n), (\beta_n) \subset \mathbb{R}$  e  $(y_1^n), (w_1^n) \subset H_0^1(\Omega)$  tais que  $\alpha_n \rightarrow 0$ ,  $|\beta_n| = \sqrt{1 - \alpha_n^2} \rightarrow 1$ ,  $\|(y_1^n, y_2^n)\| = \|(w_1^n, w_2^n)\| = 1$  e

$$\max_{i=1,2} \left\{ \max_{\Omega} \{ \alpha_n y_i^n + \beta_n w_i^n \} \right\} \rightarrow 0.$$

Mas, para alguma subsequência, temos então  $\alpha_n y_i^n \rightarrow 0$  e  $\beta_n w_i^n \rightarrow w_i$  onde  $W = (w_1, w_2) \in \mathcal{V}_k^r$ , com  $\|W\| = 1$ . Portanto, obtemos  $\max_{i=1,2} \{ \max_{\bar{\Omega}} \{ w_i(x) \} \} = 0$  e portanto  $w_1 \leq 0$  e  $w_2 \leq 0$ , o que é absurdo.

Para cada  $\bar{V} = (v_1, v_2) \in \mathcal{U}_\delta$  definamos  $\Omega_+ = \{x \in \Omega; \max_{i=1,2}\{(v_i)_+\} \geq d_\delta/2\}$ . Pela equicontinuidade das funções  $\bar{V} \in \mathcal{U}_\delta$ , temos que  $|\Omega_+| \geq \varepsilon > 0$  para todo  $\bar{V} \in \mathcal{U}_\delta$ . Conseqüentemente, uma vez que  $F(s, t) \geq \vartheta s_+^{2^*} + \sigma t_+^{2^*}$ , pela condição  $(h_5)$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F(\bar{V}) &\geq \vartheta \int_{\Omega} (v_1)_+^{2^*} + \sigma \int_{\Omega} (v_2)_+^{2^*} \\ &\geq C \int_{\Omega_+} ((v_1)_+ + (v_2)_+)^{2^*} \\ &\geq C \int_{\Omega_+} \left( \max_{i=1,2}\{(v_i)_+\} \right)^{2^*} \\ &= C \left( \frac{d_\delta}{2} \right)^{2^*} |\Omega_+| \equiv c_\delta > 0 \end{aligned}$$

para todo  $\bar{V} \in \mathcal{U}_\delta$ .

A partir de (3.16) temos então

$$\begin{aligned} J(V) &\leq \frac{R^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{1 + c_k r^N} \right) - R^{2^*} \int_{\Omega} F(\bar{V}) \\ &\leq CR^2 - c_\delta R^{2^*} \end{aligned} \tag{3.20}$$

para todo  $V = R\bar{V} \in \mathcal{U}_\delta$ , onde utilizamos (3.19) na última desigualdade acima.

Precisamos agora organizar os fatos: Por (3.13), tomemos  $R_0 > 0$  independentemente de  $r$  e  $\epsilon$  para que  $J(U) \leq 0$  para todo  $U \in P_2$ . Se  $U = V + sU_\epsilon^r \in P_3$  então  $V = R\bar{V}$  onde  $\bar{V} \in \mathcal{V}_\delta$  ou  $\bar{V} \in \mathcal{U}_\delta$ . Se  $\bar{V} \in \mathcal{V}_\delta$  então por (3.15) e (3.18) podemos encontrar  $R_1 > 0$ , independentemente de  $r$  e  $\epsilon \leq 1$  tal que  $J(U) \leq 0$ . No entanto, se  $\bar{V} \in \mathcal{U}_\delta$  então por (3.15) e (3.20) temos que

$$J(U) \leq C_1 R^2 + (-c_\delta + C_2 \epsilon^{N-2}) R^{2^*} + C_3$$

e portanto podemos tomar  $\epsilon$  suficientemente pequeno e  $R > \max\{R_0, R_1, \rho\}$  suficientemente grande de forma que  $J(U) \leq 0$ .

Fixado este  $R > 0$  e voltando para (3.13) podemos encontrar  $r_0 > 0$  suficientemente pequeno para que  $J(V) \leq \alpha$  para todo  $r \leq r_0$ , concluindo a demonstração.  $\blacksquare$

A geometria de Linking para o funcional  $J$  é obtida portanto a partir dos Lemas 3.3 e 3.5. O próximo passo é demonstrar que toda sequência de Palais-Smale do funcional  $J$  é limitada.

**Proposição 3.6.** *Sob as hipóteses do Teorema 3.1, toda sequência de Palais-Smale para o funcional (3.3) é limitada.*

**Prova.** Seja  $(V_n) = (u_n, v_n) \in E$  tal que  $|J(V_n)| \leq C$  e  $J'(V_n) \rightarrow 0$ . Primeiramente, de forma usual, estimamos  $J(V_n) - (1/2)J'(V_n)V_n$ . Assim como no Capítulo 1, obtemos

$$\int_{\Omega} F((V_n)_+) + \int_{\Omega} G((V_n)_+) \leq C_1 + C_2 \|V_n\|. \quad (3.21)$$

Portanto, a hipótese  $(h_5)$  implica que

$$\int_{\Omega} (u_n)_+^{2^*} + \int_{\Omega} (v_n)_+^{2^*} \leq C_1 + C_2 \|V_n\|. \quad (3.22)$$

Tomemos então a decomposição  $E = E_l \oplus \mathcal{V}_k \oplus (E_k)^\perp$  dada em (1.38), com  $l = \max\{n; \lambda_n^A < \lambda_k^A\}$ . Assim, seja  $V_n = V_n^l + V_n^k + V_n^\perp$  tal decomposição. Vemos que

$$J'(V_n)V_n^l = \|V_n^l\|^2 - \int_{\Omega} (A(x)V_n^l, V_n^l)_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} (\nabla(F + G)((V_n)_+), V_n^l)_{\mathbb{R}^2}.$$

Logo fazendo uso de (1.39) e (1.29) para as funções  $F_u$ ,  $F_v$ ,  $G_u$  e  $G_v$ , temos

$$\begin{aligned} \left( \frac{\lambda_k^A}{\lambda_l^A} - 1 \right) \|V_n^l\|^2 &\leq -J'(V_n)V_n^l - \int_{\Omega} (\nabla(F + G)((V_n)_+), V_n^l)_{\mathbb{R}^2} \\ &\leq \int_{\Omega} (F_u + G_u)((V_n)_+) |u_n^l| + \int_{\Omega} (H_v + G_v)((V_n)_+) |v_n^l| + \epsilon_n \|V_n^l\| \\ &\leq M_{F_u} \left( \int_{\Omega} (u_n)_+^{2^*-1} |u_n^l| + \int_{\Omega} (v_n)_+^{2^*-1} |u_n^l| \right) \\ &\quad + M_{F_v} \left( \int_{\Omega} (u_n)_+^{2^*-1} |v_n^l| + \int_{\Omega} (v_n)_+^{2^*-1} |v_n^l| \right) \\ &\quad + M_{G_u} \left( \int_{\Omega} (u_n)_+^{p-1} |u_n^l| + \int_{\Omega} (v_n)_+^{p-1} |u_n^l| \right) \\ &\quad + M_{G_v} \left( \int_{\Omega} (u_n)_+^{p-1} |v_n^l| + \int_{\Omega} (v_n)_+^{p-1} |v_n^l| \right) + \epsilon_n \|V_n^l\|. \end{aligned}$$

Utilizando desigualdades de Hölder e Young e as imersões de Sobolev vemos ainda que

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\lambda_k^A}{\lambda_l^A} - 1 \right) \|V_n^l\|^2 \\
& \leq \epsilon_n \|V_n^l\| + M_{F_u} \left( 2\epsilon \left( \int_{\Omega} |u_n^l|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} + C_{\epsilon} \left[ \left( \int_{\Omega} (u_n)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} + \left( \int_{\Omega} (v_n)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} \right] \right) \\
& \quad + M_{F_v} \left( 2\epsilon \left( \int_{\Omega} |v_n^l|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} + C_{\epsilon} \left[ \left( \int_{\Omega} (u_n)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} + \left( \int_{\Omega} (v_n)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} \right] \right) \\
& \quad + M_{G_u} \left( 2\epsilon \left( \int_{\Omega} |u_n^l|^{\frac{2^*}{2^*-p+1}} \right)^{\frac{2(2^*-p+1)}{2^*}} + C_{\epsilon} \left[ \left( \int_{\Omega} (u_n)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(p-1)}{2^*}} + \left( \int_{\Omega} (v_n)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(p-1)}{2^*}} \right] \right) \\
& \quad + M_{G_v} \left( 2\epsilon \left( \int_{\Omega} |v_n^l|^{\frac{2^*}{2^*-p+1}} \right)^{\frac{2(2^*-p+1)}{2^*}} + C_{\epsilon} \left[ \left( \int_{\Omega} (u_n)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(p-1)}{2^*}} + \left( \int_{\Omega} (v_n)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(p-1)}{2^*}} \right] \right) \\
& \leq C_1 \epsilon \|V_n^l\|^2 + \epsilon_n \|V_n^l\| + C_2 \left[ \left( \int_{\Omega} (u_n)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} + \left( \int_{\Omega} (v_n)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} \right] \\
& \quad + C_3 \left[ \left( \int_{\Omega} (u_n)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(p-1)}{2^*}} + \left( \int_{\Omega} (v_n)_+^{2^*} \right)^{\frac{2(p-1)}{2^*}} \right].
\end{aligned}$$

Tomando  $\epsilon$  suficientemente pequeno, deduzimos, por (3.22),

$$\|V_n^l\|^2 \leq \epsilon_n \|V_n^l\| + C_2 (1 + \|V_n\|)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} + C_3 (1 + \|V_n\|)^{\frac{2(p-1)}{2^*}}. \quad (3.23)$$

Analogamente, estimamos  $\|V_n^{\perp}\|$  e obtemos

$$\|V_n^{\perp}\|^2 \leq \epsilon_n \|V_n^{\perp}\| + C_2 (1 + \|V_n\|)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} + C_3 (1 + \|V_n\|)^{\frac{2(p-1)}{2^*}}. \quad (3.24)$$

Denotando  $W_n = V_n^l + V_n^{\perp}$ ,  $V_n = W_n + \beta_n Y_n$  onde  $Y_n \in \mathcal{V}_k \cap \partial B_1$  e somando-se estas duas últimas estimativas, obtemos

$$\begin{aligned}
\|W_n\|^2 & \leq \epsilon_n \|W_n\| + C_2 (1 + \|V_n\|)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} + C_3 (1 + \|V_n\|)^{\frac{2(p-1)}{2^*}} \\
& \leq C_1 \|W_n\| + C_2 + C_3 (\|W_n\| + |\beta_n|)^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} + C_4 (\|W_n\| + |\beta_n|)^{\frac{2(p-1)}{2^*}}
\end{aligned}$$

Mas

$$0 \leq \frac{2(p-1)}{2^*} < \frac{2(2^*-1)}{2^*} < 2$$

e portanto

$$\|W_n\|^2 \leq \epsilon_n + C_1|\beta_n|^{\frac{2(2^*-1)}{2^*}} + C_2|\beta_n|^{\frac{2(p-1)}{2^*}}.$$

Claramente, se  $|\beta_n| \leq C$  não há nada para fazer. Supomos portanto  $|\beta_n| \rightarrow \infty$ . Consequentemente, a última estimativa acima implica que  $\|W_n/\beta_n\| \rightarrow 0$ . Portanto, podemos tomar subsequências apropriadas tais que  $W_n/\beta_n \rightarrow 0$  em  $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$  para todo  $1 \leq p < 2^*$ ,  $Y_n \rightarrow Y_0 \in \mathcal{V}_k$  em  $E$  e  $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$  para todo  $1 \leq p < 2^*$ , bem como convergências pontuais destas mesmas sequências em quase todo ponto de  $\Omega$ . Como  $Y_0 \in \mathcal{V}_k$  temos que

$$J'(V_n)Y_0 = - \int_{\Omega} (\nabla(F + G)V_n, Y_0)_{\mathbb{R}^2}$$

Mas  $J'(V_n)Y_0 = \epsilon_n \rightarrow 0$ . Logo

$$\int_{\Omega} (\nabla F(V_n), Y_0)_{\mathbb{R}^2} \leq \epsilon_n + \|Y_0\|_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla G(V_n)|.$$

A homogeneidade de  $\nabla F$  e  $\nabla G$  implicam, portanto, que

$$\int_{\Omega} (\nabla F(V_n/\beta_n), Y_0)_{\mathbb{R}^2} \leq \frac{\epsilon_n}{|\beta_n|^{2^*-1}} + \frac{|\beta_n|^{p-1}}{|\beta_n|^{2^*-1}} \|Y_0\|_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla G(V_n/\beta_n)|.$$

Além disso, uma vez que  $V_n = W_n + \beta_n Y_n$ , então temos  $V_n/\beta_n \rightarrow Y_0$  em  $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$  para todo  $1 \leq p < 2^*$  e em quase todo ponto em  $\Omega$ . Sendo assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla F(V_n/\beta_n), Y_0)_{\mathbb{R}^2} &\rightarrow \int_{\Omega} (\nabla F(Y_0), Y_0)_{\mathbb{R}^2}; \\ \int_{\Omega} |\nabla G(V_n/\beta_n)| &\rightarrow \int_{\Omega} |\nabla G(Y_0)|. \end{aligned}$$

Daí, como  $|\beta_n|^{p-1}/|\beta_n|^{2^*-1} \rightarrow 0$  pois  $p < 2^*$ , vemos que

$$\int_{\Omega} (\nabla F(Y_0), Y_0)_{\mathbb{R}^2} = 0.$$

Mas observamos que a hipótese  $(h_5)$  implica que

$$\nabla F(u, v) = (\vartheta 2^* u_+^{2^*-1}, \sigma 2^* v_+^{2^*-1}) + \nabla \tilde{F}(u, v).$$

Dessa forma, se  $Y_0 = (y_1, y_2)$  temos

$$\int_{\Omega} ((y_1)_+^{2^*-1} + (y_2)_+^{2^*-1}) = 0$$

o que é absurdo pois  $\|Y_0\| = 1$  e  $Y_0 \in \mathcal{V}_k$  e portanto pelo menos um entre  $y_1$  e  $y_2$  é não nulo e muda de sinal, concluindo a demonstração. ■

Os próximos resultados consistem em provar que a sequência  $(PS)$  obtida no nível minimax definido pelo Teorema de Linking converge (fracamente) para uma solução não trivial de (3.2). Basicamente as ideias que seguem na conclusão da demonstração do Teorema 3.1 em pouco diferem daquelas já apresentadas no Capítulo 1 e portanto exporemo-as de forma breve, evitando repetições desnecessárias.

Definamos portanto, o nível minimax

$$\bar{c} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{U \in \gamma(Q_r^R)} J(U) \quad (3.25)$$

onde  $Q_r^R$  está definido em (3.11) com  $r, R > 0$  tomados de acordo com o Lema 3.5 e  $\Gamma = \{h \in C(Q_r^R, E) ; h(u) = u \text{ se } u \in \partial Q_r^R\}$ .

Tomemos então  $(V_n) \subset E$  tal que  $J(V_n) \rightarrow \bar{c}$  e  $J'(V_n) \rightarrow 0$ . A existência de tal sequência é garantida pelo Teorema de Linking sem a condição de Palais-Smale e consequência direta dos Lemas 3.3 e 3.5. Uma vez que tal sequência é limitada em  $E$ , podemos tomar  $V \in E$  tal que

$$V_n \rightharpoonup V \in E \text{ e } \|V_n - V\| \text{ convergente}$$

(passando a uma subsequência, se necessário). É imediato provar, via Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e as condições de crescimento impostas nas funções  $F$  e  $G$  que  $V$  é um ponto crítico do funcional  $J$ . A dificuldade consiste em provar que  $V \neq 0$ .

Para a função crítica  $F$  do problema (3.2), consideremos  $S_F$  é dado em (1.33). O lema seguinte, análogo ao Lema 1.18, estima a distância que  $J(V)$  está de  $\bar{c}$ , caso  $V_n$  não convirja fortemente para  $V$ .

**Lema 3.7.** *Seja  $K := \lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n - V\|^2$ . Então*

$$J(V) + \frac{K}{N} = \bar{c}. \quad (3.26)$$

*Além disso, se  $K > 0$  então  $K \geq (1/2^*)^{(N-2)/2} S_F^{N/2}$ .*

**Prova.** Pelo Lema de Euler para funções homogêneas (1.27) temos

$$\|V_n\|^2 - \int_{\Omega} (A(x)V_n, V_n)_{\mathbb{R}^2} - 2^* \int_{\Omega} F((V_n)_+) - p \int_{\Omega} G((V_n)_+) = J'(V_n)V_n \rightarrow 0. \quad (3.27)$$

Uma vez que  $V_n \rightharpoonup V$  e devido a uma generalização do Lema de Brezis-Lieb devido a de Morais Filho - Souto [25], garantimos que

$$\int_{\Omega} F((V_n)_+) - \int_{\Omega} F((V)_+) - \int_{\Omega} F((V_n - V)_+) \rightarrow 0.$$

Pela subcriticalidade de  $G$  também temos

$$\int_{\Omega} G((V_n)_+) - \int_{\Omega} G((V)_+) \rightarrow 0.$$

Essas duas últimas convergências confrontadas com (3.27) e  $J'(V)V = 0$  nos dizem que

$$\|V_n - V\|^2 = 2^* \int_{\Omega} F((V_n - V)_+) + \epsilon_n. \quad (3.28)$$

Similarmente, a partir de  $J(V_n) \rightarrow \bar{c}$ , vemos que

$$\bar{c} + \epsilon_n = J(V) + \frac{1}{2} \|V_n - V\|^2 - \int_{\Omega} F((V_n - V)_+). \quad (3.29)$$

Daí obtemos (3.26) de (3.28) e (3.29).

Suponha então  $K > 0$ . Então, por (3.28),

$$\|V_n - V\|^2 \geq S_F \left( \int_{\Omega} F((V_n - V)_+) \right)^{\frac{N-2}{N}} = S_F \left( \frac{1}{2^*} \|V_n - V\|^2 + o(1) \right)^{\frac{N-2}{N}}$$

e tomando  $n \rightarrow \infty$  temos  $K \geq (1/2^*)^{(N-2)/2} S_F^{N/2}$ , como queríamos demonstrar.  $\blacksquare$

O próximo resultado traz uma estimativa para o nível  $\bar{c}$  que, confrontada com a igualdade obtida no Lema acima, provará que  $V \neq 0$ , concluindo a demonstração do Teorema 3.1.

**Proposição 3.8.** (i) *Suponha  $N \geq 6$ . Então existem  $\epsilon > 0$  e  $r = r(\epsilon) > 0$  tais que*

$$\bar{c} < \frac{(1/2^*)^{(N-2)/2}}{N} S_F^{N/2} - C\epsilon^2.$$

(ii) *Suponha  $N = 3, 4, 5$ . Então para  $N/(2N - 2) < p/2^* < 1$  existem  $\epsilon > 0$  e  $r = r(\epsilon) > 0$  tais que*

$$\bar{c} < \frac{(1/2^*)^{(N-2)/2}}{N} S_F^{N/2} - C\epsilon^{N-(N-2)p/2}.$$

**Prova.** A definição do nível  $\bar{c}$  garante que para cada  $\epsilon, r > 0$  suficientemente pequenos existem  $V_\epsilon \in E_k^r \cap B_R$  (onde  $R$  é dado no Lema 3.5 e independe de  $\epsilon, r > 0$  pequenos), e  $s_\epsilon \geq c > 0$  tais que

$$\bar{c} \leq J(V_\epsilon + s_\epsilon U_\epsilon^r)$$

Claramente, tanto  $V_\epsilon$  quanto  $s_\epsilon$  dependem também de  $r > 0$  mas tomemos agora  $r = r(\epsilon) = \epsilon^d$  onde  $0 < d < 1$  será escolhido apropriadamente mais à frente. Notemos ainda que  $J(V_\epsilon + s_\epsilon U_\epsilon^r) = J(V_\epsilon) + J(s_\epsilon U_\epsilon^r)$ . Além disso, temos

$$J(V_\epsilon) \leq Cr^N = C\epsilon^{dN}.$$

Consequentemente, torna-se suficiente mostrar que

$$C\epsilon^{dN} + J(s_\epsilon U_\epsilon^r) < \begin{cases} \frac{(1/2^*)^{(N-2)/2}}{N} S_F^{N/2} - C\epsilon^2 & \text{se } N \geq 6; \\ \frac{(1/2^*)^{(N-2)/2}}{N} S_F^{N/2} - C\epsilon^{N-(N-2)p/2} & \text{se } N = 3, 4, 5, \end{cases}$$

para uma escolha apropriada de  $0 < d < 1$ . Sendo assim, fixe  $\epsilon > 0$ . Utilizando o Lema 1.10 (com  $r=1/m$ ) nos itens (5) e (6) e (3.10) temos

$$\begin{aligned} J(s_\epsilon U_\epsilon^r) &\leq \frac{s_\epsilon^2}{2}(\gamma^2 + \kappa^2) \int_\Omega |\nabla u_\epsilon^r|^2 - s_\epsilon^{2^*} F(\gamma, \kappa) \int_\Omega (u_\epsilon^r)^{2^*} - C(\|u_\epsilon^r\|_2^2 + G(\gamma, \kappa)\|u_\epsilon^r\|_p^p) \\ &\leq \left( \frac{s_\epsilon^2}{2} - s_\epsilon^{2^*} F(\gamma, \kappa) \right) [S^{N/2} + O((\epsilon/r)^{N-2})] - C(\|u_\epsilon^r\|_2^2 + G(\gamma, \kappa)\|u_\epsilon^r\|_p^p). \end{aligned}$$

Mas

$$s_0 = \left( \frac{1}{2^* H(\gamma, \kappa)} \right)^{(N-2)/4}$$

é o máximo da função

$$s \mapsto \frac{s^2}{2} - s^{2^*} F(\gamma, \kappa).$$

Portanto, devido à escolha de  $\gamma$  e  $\kappa$  em (3.10),

$$\left( \frac{s_\epsilon^2}{2} - s_\epsilon^{2^*} F(\gamma, \kappa) \right) \leq \frac{1}{N(2^* F(\gamma, \kappa))^{(N-2)/2}} = \frac{1}{N} \left( \frac{1}{2^*} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left( \frac{1}{M_F} \right)^{\frac{N}{2}}.$$

Utilizando essa última desigualdade na estimativa sobre  $J(s_\epsilon U_\epsilon^r)$  acima, o Lema 1.9 nos diz que

$$J(s_\epsilon U_\epsilon^r) \leq \frac{(1/2^*)^{\frac{(N-2)}{2}} S_F^{N/2}}{N} + C_1(\epsilon/r)^{N-2} - C(\|u_\epsilon^r\|_2^2 + G(\gamma, \kappa)\|u_\epsilon^r\|_p^p).$$

Portanto

$$C\epsilon^{dN} + J(s_\epsilon U_\epsilon^r) \leq \frac{(1/2^*)^{\frac{(N-2)}{2}} S_F^{N/2}}{N} + C\epsilon^{dN} + C_1\epsilon^{(1-d)(N-2)} - C(\|u_\epsilon^r\|_2^2 + G(\gamma, \kappa)\|u_\epsilon^r\|_p^p). \quad (3.30)$$

Se  $N \geq 6$  ignoramos o termo  $G(\gamma, \kappa)\|u_\epsilon^r\|_p^p$  em (3.30). A partir do Lema 1.10 no item (4) (onde escolhemos  $k=2$ ) vemos que  $\|u_\epsilon^r\|_2^2 \geq K_1\epsilon^2$ . Assim

$$C\epsilon^{dN} + J(s_\epsilon U_\epsilon^r) \leq \frac{(1/2^*)^{(N-2)/2} S_F^{N/2}}{N} + C\epsilon^{dN} + C_1\epsilon^{(1-d)(N-2)} - C_2\epsilon^2.$$

Dessa forma, tomando  $2/N < d < 1 - 2/(N - 2)$  (possível apenas se  $N \geq 6$ ) temos  $(1 - d)(N - 2), dN > 2$  o que significa que para  $\epsilon$  suficientemente pequeno podemos escolher  $C > 0$  tal que  $C\epsilon^{dN} + J(s_\epsilon U_\epsilon^r) \leq (1/2^*)^{(N-2)/2} S_F^{N/2}/N - C\epsilon^2$ , demonstrando (i).

Se  $N = 3, 4, 5$  descartamos o termo  $\|u_\epsilon^r\|_2^2$  em (3.30). Note que agora temos que  $\sup G(\gamma, \kappa) > 0$  pois precisamos do termo  $\|u_\epsilon^r\|_p^p$ . Utilizando o Lema 1.10 item (4) com  $k = p$ , concluímos

$$C\epsilon^{dN} + J(s_\epsilon U_\epsilon^r) \leq \frac{(1/2^*)^{(N-2)/2} S_F^{N/2}}{N} + C\epsilon^{dN} + C_1\epsilon^{(1-d)(N-2)} - C_2\epsilon^{N-(N-2)p/2}.$$

Portanto, temos que escolher  $d$  tal que  $(1 - d)(N - 2), dN > N - (N - 2)p/2$ , isto é,

$$1 - \frac{p}{2^*} < d < \frac{p}{2} - \frac{2}{N - 2}$$

e tal escolha é possível apenas se

$$\frac{p}{2^*} > \frac{1}{2} \left( \frac{N}{N - 1} \right),$$

o que é, precisamente, a hipótese sobre  $p$  no Teorema 3.1, concluindo a demonstração.  $\blacksquare$

**Conclusão da demonstração do Teorema 3.1:** Suponha então que  $V = 0$ , onde  $V$  é a solução fraca do problema (3.2) obtida como limite fraco da sequência de Palais-Smale  $(V_n)$  no nível minimax  $\bar{c}$ . Teríamos assim, pelo Lema 3.7, que  $K/N = \bar{c}$ . Pela estimativa sobre  $K$  neste mesmo lema, teríamos ainda

$$\bar{c} \geq \frac{(1/2^*)^{(N-2)/2} S_F^{N/2}}{N},$$

contradizendo o resultado obtido na Proposição 3.8.  $\blacksquare$

---

### 3.4 O caso $N = 2$

---

Seguindo o mesmo roteiro do caso  $N \geq 3$ , mostraremos que o funcional  $J$  satisfaz as condições geométricas do Linking e depois provaremos que toda sequência de Palais-Smale desse funcional é limitada. A partir daí, temos que estimar o nível minimax obtido no Linking para que fique abaixo de uma constante apropriada, no caso,  $2\pi/\alpha_0$ , o que permitirá obtermos a não trivialidade do limite fraco da sequência de Palais-Smale desse nível minimax. Apesar de seguir um roteiro basicamente tradicional e já bastante explorado ao longo de todo este trabalho, as dificuldades decorrentes da condição de ressonância trazem ideias diferentes e novas técnicas nas demonstrações destes resultados.

Primeiramente, para cada  $r < r_0$  definido em (3.4), consideremos a sequência de funções de Moser  $(Z_m^r)$  dadas em (2.22). Estas funções desempenham papel análogo às funções de Talenti  $U_\epsilon^r$  para o caso  $N \geq 3$ , uma vez que o objetivo delas é obter as condições geométricas do Linking de forma que o nível minimax possa ser estimado adequadamente.

Definamos então

$$Q_r^R = (\overline{B_R} \cap E_k^r) \oplus \{s\epsilon Z_m^r; 0 \leq s \leq R\}. \quad (3.31)$$

A fim de se obter uma geometria onde  $\partial B_\rho \cap E_k^\perp$  e  $\partial Q_r^R$  formam um “elo” (ou linking) apropriado, só precisamos tomar  $R$  suficientemente grande. O objetivo da constante  $\epsilon > 0$  acima é para que a norma da função  $\epsilon Z_m^r$  em  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  seja apropriadamente pequena. O próximo resultado esclarece a discussão.

**Lema 3.9.** *Fixemos  $m \in \mathbb{N}$ . Supondo as condições do Teorema 3.2 e dados  $\rho, \alpha > 0$ , existem  $\epsilon > 0$  e  $R > \rho$  tais que*

$$J(V) \leq \alpha, \quad \text{para todo } V \in \partial Q_r^R,$$

*para qualquer  $r > 0$  suficientemente pequeno.*

**Prova.** Notemos que a escolha de do espaço  $E_k^r$  e das funções  $Z_m^r$  foram feitas para que o suporte dessas funções fossem disjuntos, possibilitando que  $J(V + sZ_m^r) = J(V) + J(sZ_m^r)$  para todo  $V \in E_k^r$  e todo  $s \geq 0$ .

Fixe  $s > 0$  e considere o conjunto  $B_s \cap E_k^r$ . Dado  $\delta > 0$ , cada  $V \in \partial B_s \cap E_k^r$  pode ser reescrito como  $V = s\overline{V}$  onde  $\overline{V} \in \mathcal{U}_\delta \cup \mathcal{V}_\delta$ , conjuntos definidos em (3.17). Notemos ainda que pela condição  $(H_4)$  e raciocinando de maneira idêntica a parte da demonstração do Lema

3.5, temos que dado  $\mu > 2$ , existem  $\delta > 0$  e  $C_\delta > 0$  independentemente de  $r$  suficientemente pequeno tal que

$$J(s\bar{V}) \leq \begin{cases} -C_\delta s^2 & \text{se } \bar{V} \in \mathcal{V}_\delta \\ C_r s^2 - C_\delta s^\mu + C_\mu & \text{se } \bar{V} \in \mathcal{U}_\delta, \end{cases} \quad (3.32)$$

onde  $C_r \rightarrow 0$  se  $r \rightarrow 0$ . Da mesma forma, pela definição de  $Z_m^r$  podemos estimar

$$J(sZ_m^r) \leq \frac{s^2}{2} - C_{r,m} s^\mu + C_\mu, \quad (3.33)$$

onde  $C_{r,m} \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow 0$  para cada  $m \in \mathbb{N}$  e  $C_{r,m} \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$  para cada  $r > 0$ .

Devido a (3.32), podemos tomar  $r_0$  suficientemente pequeno e  $R_0$  suficientemente grande para que

$$\left. \begin{array}{l} C_r(R_0)^2 < \alpha \\ C_r R^2 - C R^\mu + C_\mu \leq 0 \end{array} \right\} \text{ para todo } r \leq r_0 \text{ e } R \geq R_0. \quad (3.34)$$

Primeiramente, fixemos  $R > R_0$ . Assim, dado  $V \in B_R \cap E_k^r$  temos que  $V = s\bar{V}$ , com  $0 \leq s \leq R$  e  $\bar{V} \in \mathcal{V}_\delta \cup \mathcal{U}_\delta$ . Se  $s \leq R_0$  então temos

$$J(V) \leq C_r s^2 \leq C_r (R_0)^2 < \alpha,$$

para todo  $r \leq r_0$ . Agora, se  $s > R_0$  então a outra estimativa em (3.34) garante que  $J(V) \leq 0$ . Dessa forma, temos que se  $R \geq R_0$  e  $r \leq r_0$  então

$$J(V) \leq \alpha, \quad \text{para todo } V \in B_R \cap E_k^r. \quad (3.35)$$

Fixemos então  $\varepsilon > 0$  tal que  $\varepsilon^2 < 2C_\delta$  ( $C_\delta$  dado em (3.32)). Consideremos a parte de  $\partial Q_r^R$  dada pelo conjunto  $\{V + s\varepsilon Z_m^r; \|V\| = R \text{ e } 0 \leq s \leq R\}$ . Pelas estimativas (3.32) e (3.33) temos

$$J(V + s\varepsilon Z_m^r) \leq \begin{cases} \left(-C_\delta + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) R^2 & \text{se } \bar{V} \in \mathcal{V}_\delta \\ C_r R^2 - C_\delta R^\mu + \varepsilon^2 \frac{R^2}{2} + C_\mu & \text{se } \bar{V} \in \mathcal{U}_\delta, \end{cases}$$

para todo  $0 \leq s \leq R$ . Portanto, podemos tomar  $R > R_0$  suficientemente grande uniformemente em  $0 < r \leq r_0$  para que

$$J(V + s\varepsilon Z_m^r) \leq 0, \quad \text{para todo } 0 \leq s \leq R \text{ e todo } V \in \partial B_R \cap E_k^r. \quad (3.36)$$

Resta-nos apenas estimar o funcional em  $\{V + R\varepsilon Z_m^r; V \in B_R \cap E_k^r\}$ . Mas, novamente por (3.33) vemos que

$$J(V + R\varepsilon Z_m^r) \leq \left(C_r + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) R^2 - \varepsilon^\mu C_{r,m} R^\mu + D_\mu$$

e portanto, podemos escolher  $R = R(r, m)$  suficientemente grande para que

$$J(V + R\varepsilon Z_m^r) \leq 0, \quad \text{para todo } V \in B_R \cap E_k^r. \quad (3.37)$$

As estimativas dadas em (3.35), (3.36) e (3.37) concluem, portanto, a demonstração. ■

A geometria de linking, dada a partir dos Lemas 3.3 e 3.9, garante-nos a existência de uma sequência de Palais Smale no nível minimax dado por

$$\tilde{c} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{U \in \gamma(Q_r^R)} J(U) \quad (3.38)$$

onde  $Q_r^R$  está definido em (3.31) e  $\Gamma = \{h \in C(Q_r^R, E) ; h(u) = u \text{ se } u \in \partial Q_r^R\}$ .

A próxima etapa consiste em provar que toda sequência de Palais-Smale para o funcional  $J$  é limitada. Os argumentos repetidos serão omitidos e concentraremos nossa atenção apenas nas questões que envolvem a parte crítica. O desenvolvimento é o mesmo do caso  $N \geq 3$ : estimamos primeiramente a parte da sequência no espaço  $E_l$  onde não ocorre ressonância e no espaço  $E_k^\perp$ . Feito isso, voltamos para o autoespaço associado a  $\lambda_k^A = 1$ , onde raciocinando por absurdo ao supor que a parte da sequência neste subespaço é ilimitada, alcançamos uma contradição com o fato de que as autofunções associadas a autovalores de ordem superior devem sempre mudar de sinal.

**Proposição 3.10.** *Sob as condições do Teorema 3.2, toda sequência de Palais-Smale para o funcional (3.3) é limitada.*

**Prova.** Seja  $\{U_n\} = \{(u_n, v_n)\} \subset E$  uma sequência (PS). Seguindo exatamente os mesmos passos iniciais da demonstração do Lema 2.5 temos que

$$\int_{\Omega} (\nabla H(x, U_n), U_n)_{\mathbb{R}^2} \leq C + \epsilon_n \|U_n\|. \quad (3.39)$$

Por  $(H_3)$ , existem  $C_1, C_2 > 0$  tais que

$$|\nabla H(x, S)| \leq C_1 + C_2 (\nabla H(x, S), S)_{\mathbb{R}^2}, \quad \text{para todo } S \in \mathbb{R}^2.$$

Sendo assim, temos que

$$\int_{\Omega} |\nabla H(x, U_n)| \leq C + C \int_{\Omega} (\nabla H(x, U_n), U_n)_{\mathbb{R}^2},$$

donde obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla H(x, U_n)| \leq C + \epsilon_n \|U_n\|. \quad (3.40)$$

A partir de agora, fazemos a mesma decomposição de  $E$  que utilizamos na Proposição 3.6,  $E = E_l \oplus \mathcal{V}_k \oplus E_k^\perp$ , com  $E_k$  definido em (1.38). Para todo  $V \in E$  tomemos então  $V = V^l + V_k + V^\perp$ .

Temos então

$$\begin{aligned} -\epsilon_n \|U_n^l\| &\leq J'(U_n)U_n^l \\ &= \int_{\Omega} \nabla U_n \nabla U_n^l - \int_{\Omega} (A(x)U_n, U_n^l)_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} (\nabla H(x, U_n), U_n^l)_{\mathbb{R}^2} \\ &\leq -C \|U_n^l\|^2 - \int_{\Omega} (\nabla H(x, U_n), U_n^l)_{\mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

Portanto

$$C \|U_n^l\|^2 \leq \epsilon_n \|U_n^l\| - \int_{\Omega} (\nabla H(x, U_n), U_n^l)_{\mathbb{R}^2}. \quad (3.41)$$

De forma completamente análoga podemos obter

$$C \|U_n^\perp\|^2 \leq \epsilon_n \|U_n^\perp\| + \int_{\Omega} (\nabla H(x, U_n), U_n^\perp)_{\mathbb{R}^2}. \quad (3.42)$$

Daí, por (3.40, 3.41) temos

$$\begin{aligned} C \|U_n^l\|^2 &\leq \epsilon_n \|U_n^l\| + \|U_n^l\|_\infty \int_{\Omega} |\nabla H(x, U_n)| \\ &\leq \epsilon_n \|U_n^l\| + C \|U_n\| (C + \epsilon_n \|U_n\|) \\ &\leq C + C \|U_n\| + C \epsilon_n \|U_n\|^2. \end{aligned}$$

Da mesma forma, a partir de (3.42)

$$\begin{aligned} C \|U_n^\perp\|^2 &\leq \epsilon_n \|U_n^\perp\| + \int_{\Omega} (\nabla H(x, U_n), U_n)_{\mathbb{R}^2} + \|U_n^l + U_n^k\|_\infty (C + \epsilon_n \|U_n\|) \\ &\leq \epsilon_n \|U_n^\perp\| + C + \epsilon_n \|U_n\| + C \|U_n\| (C + \epsilon_n \|U_n\|) \\ &\leq C + C \|U_n\| + C \epsilon_n \|U_n\|^2. \end{aligned}$$

Somando estas duas últimas estimativas, obtemos

$$\|U_n^l + U_n^\perp\|^2 \leq C + C\|U_n\| + C\epsilon_n\|U_n\|^2.$$

Portanto, precisamos ainda estimar a parte em ressonância. Tomando  $\epsilon_n$  suficientemente pequeno vemos que

$$\|U_n^l + U_n^\perp\| \leq C + C\epsilon_n\|U_n^k\|. \quad (3.43)$$

Agora supomos por absurdo que  $\|U_n^k\| \rightarrow \infty$ . Seja então  $U_k \in \mathcal{V}_k$  tal que  $\|U_k\| = 1$  e  $U_n^k/\|U_n^k\| \rightarrow U_k$  em  $E$  (para alguma subsequência). Sendo assim, por (3.43) temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{U_n}{\|U_n^k\|} - U_k \right\| &= \left\| \frac{U_n^l + U_n^k + U_n^\perp}{\|U_n^k\|} - U_k \right\| \\ &\leq \frac{\|U_n^l + U_n^\perp\|}{\|U_n^k\|} + \left\| \frac{U_n^k}{\|U_n^k\|} - U_k \right\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Por (3.39) obtemos então

$$\int_{\Omega} \left( \nabla H(x, U_n), \frac{U_n}{\|U_n^k\|} \right)_{\mathbb{R}^2} \rightarrow 0. \quad (3.44)$$

Mas daí, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue garante então que  $\int_{\Omega} (\nabla H(x, U_k), U_k)_{\mathbb{R}^2} = 0$ , o que é absurdo pois pelo menos uma das coordenadas de  $U_k$  muda de sinal. Portanto  $(U_n^k)$  é limitada e o resultado segue a partir de (3.43). ■

Provaremos agora que o minimax  $\tilde{c}$  dado em (3.38) situa-se abaixo de  $2\pi/\alpha_0$  para  $m$  suficientemente grande.

**Proposição 3.11.** *Seja  $\tilde{c}$  dado em (3.38). Então existe  $m$  suficientemente grande tal que*

$$\tilde{c} = \tilde{c}(m) < \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

**Prova.** A demonstração será feita por argumento de contradição. Suponha que para todo  $m$  tenhamos  $\tilde{c}(m) \geq 2\pi/\alpha_0$ . Por definição, temos

$$\tilde{c}(m) \leq \max\{J(V) + J(tZ_m^r); V \in B_{R_m} \cap E_k^r, t \geq 0\}.$$

Mas observe que para  $t \geq R_m/\varepsilon$ , onde  $R_m$  é dado no Lema 3.9, temos  $J(tZ_m^r) \leq 0$  e portanto pela compacidade de  $\overline{B_{R_m}} \cap E_k^r$ , para cada  $m$  temos que existe  $t_m > 0$  e  $V_m \in B_{R_m} \cap E_k^r$  tais que

$$J(V_m) + J(t_m Z_m^r) = \max\{J(V) + J(tZ_m^r); V \in B_{R_m} \cap E_k^r, t \geq 0\}. \quad (3.45)$$

Além disso, já vimos que para  $m$  suficientemente grande teremos  $J(V_m) \leq 0$  e consequentemente estamos supondo que

$$J(t_m Z_m^r) \geq \frac{2\pi}{\alpha_0}, \text{ para todo } m \geq m_0$$

e portanto,

$$\begin{aligned} t_m^2 &\geq 2 \left[ \frac{t_m^2}{2} \left( \|Z_m^r\|^2 - \int_{\Omega} (A(x)Z_m^r, Z_m^r)_{\mathbb{R}^2} \right) - \int_{\Omega} H(x, (t_m Z_m^r + \Phi)_+) \right] \\ &= 2J(t_m Z_m^r) \\ &\geq \frac{4\pi}{\alpha_0}, \quad \text{para todo } m \geq m_0. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Provemos que  $t_m^2 \rightarrow 4\pi/\alpha_0$ : observe que de (3.45) temos que

$$J'(V_m)V_m + t_m \|Z_m^r\|^2 - t_m \int_{\Omega} (A(x)Z_m^r, Z_m^r)_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} (\nabla H(x, t_m Z_m^r), Z_m^r)_{\mathbb{R}^2} = 0. \tag{3.47}$$

Mas, mais uma vez, se  $m$  é suficientemente grande temos  $J'(V_m)V_m \leq 0$  (a demonstração desse fato segue a mesma linha daquela apresentada no Lema 3.9, para o caso em que  $J(V_m) \leq 0$  se  $m$  é grande). Logo,

$$t_m^2 \geq \int_{B_{\frac{r}{m}}(x_r)} (\nabla H(x, t_m Z_m^r), t_m Z_m^r)_{\mathbb{R}^2}$$

Fixemos então  $\gamma$  tal que

$$\gamma > \frac{4}{\alpha_0 r^2}. \tag{3.48}$$

Uma vez que  $t_m \geq c > 0$  (pelos Lemas 3.3 e 3.9), podemos tomar  $m$  suficientemente grande para que  $t_m(\sqrt{2\pi})^{-1} \log^{1/2} m \geq c_\gamma$ , onde  $c_\gamma$  é dado na hipótese  $(H_6)$ . Como  $Z_m^r = (\sqrt{2\pi})^{-1}(\log^{1/2} m, \log^{1/2} m)$  em  $B_{\frac{r}{m}}(x_r)$ , por essa mesma hipótese, segue então que

$$t_m^2 \geq \gamma \int_{B_{\frac{r}{m}}(x_r)} e^{\alpha_0 \left( \frac{t_m}{\sqrt{2\pi}} \log^{1/2} m \right)^2}.$$

donde obtemos

$$\begin{aligned} t_m^2 &\geq \gamma \pi \frac{r^2}{m^2} e^{\alpha_0 \left( \frac{t_m}{\sqrt{2\pi}} \log^{1/2} m \right)^2} \\ &= \gamma \pi r^2 e^{\left( \alpha_0 \frac{t_m^2}{2\pi} - 2 \right) \log m}. \end{aligned}$$

Sendo assim  $(t_m)$  é uma sequência limitada em  $m$ . Devido a (3.46), temos por consequência que  $t_m^2 \rightarrow 4\pi/\alpha_0$ . Fazendo  $m \rightarrow \infty$  na desigualdade acima, temos

$$\gamma \leq \frac{4}{\alpha_0 r^2},$$

contrariando a escolha de  $\gamma$  em (3.48). Esse absurdo partiu de supormos  $\tilde{c}(m) \geq 2\pi/\alpha_0$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Concluimos portanto a demonstração. ■

Tomemos  $m$  tal que  $\tilde{c}(m) < 2\pi/\alpha_0$ , garantidos pela Proposição 3.11. Seja  $(U_n)$ ,  $U_n = (u_n, v_n)$  a sequência (PS) neste nível  $\tilde{c}(m)$ . Uma vez que  $(U_n)$  é limitada, tomemos uma subsequência de  $(U_n)$  e  $U \in H_0^1(\Omega)$  tais que  $U_n \rightharpoonup U$  fracamente em  $E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ ,  $U_n \rightarrow U$  em  $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$  para todo  $p \geq 1$  e q.t.p. em  $\Omega$ . Temos o seguinte resultado auxiliar, cuja demonstração omitimos por ser praticamente a mesma do Lema 2.14, apenas substituindo  $\widetilde{U}_n$  lá utilizado por  $U_n$ :

**Proposição 3.12.** *Se  $U_n \rightharpoonup U$  fracamente em  $E$  e  $(U_n)$  satisfaz (3.39) então para  $n \rightarrow \infty$  valem as seguintes convergências*

$$(i) \quad \nabla H(\cdot, U_n) \rightarrow \nabla H(\cdot, U) \text{ em } L^1(\Omega) \times L^1(\Omega);$$

$$(ii) \quad H(\cdot, U_n) \rightarrow H(\cdot, U) \text{ em } L^1(\Omega).$$

**Demonstração do Teorema 3.2:** Novamente, a demonstração é idêntica à prova do Teorema 2.3.  $U$  é solução para o Problema (3.2) pois tomando  $V \in C_c^\infty(\Omega) \times C_c^\infty(\Omega)$  temos que

$$0 \leftarrow J'(U_n)V = \int_{\Omega} \nabla U_n \nabla V - \int_{\Omega} (A(x)U_n, V)_{\mathbb{R}^2} - \int_{\Omega} (\nabla H(x, U_n), V)_{\mathbb{R}^2}.$$

Mas então, como  $\int_{\Omega} \nabla U_n \nabla V \rightarrow \int_{\Omega} \nabla U \nabla V$ ,  $\int_{\Omega} (A(x)U_n, V)_{\mathbb{R}^2} \rightarrow \int_{\Omega} (A(x)U, V)_{\mathbb{R}^2}$  e  $\int_{\Omega} (\nabla H(x, U_n), V)_{\mathbb{R}^2} \rightarrow \int_{\Omega} (\nabla H(x, \tilde{U}), V)_{\mathbb{R}^2}$  (esta última devido à Proposição 3.12), temos que  $J'(U)V = 0$  para todo  $V \in C_c^\infty(\Omega) \times C_c^\infty(\Omega)$ . Para garantir que  $U \neq 0$ , supomos exatamente o contrário. Se  $U = 0$  então

$$\|U_n\|_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ e } \int_{\Omega} H(x, U_n) \rightarrow 0$$

(novamente pela Proposição 3.12). Portanto

$$c(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(U_n) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\|^2.$$

Tomemos então  $\delta > 0$  tal que

$$\|U_n\|^2 \leq \frac{4\pi}{\alpha_0} - \delta. \quad (3.49)$$

para todo  $n$  suficientemente grande. Consideremos  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno e  $p > 1$  suficientemente próximo de 1 para que

$$p(\alpha_0 + \epsilon)(4\pi/\alpha_0 - \delta) \leq 4\pi.$$

Uma vez que  $(U_n)$  é uma sequência de Palais-Smale, vemos que

$$\begin{aligned} \|U_n\|^2 &\leq \epsilon_n + C \left( \int_{\Omega} e^{p(\alpha_0 + \epsilon)(u_n^2 + v_n^2)} + C \right)^{\frac{1}{p}} (\|u_n\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|v_n\|_{L^{p'}(\Omega)}) \\ &\leq \epsilon_n + C \left( \int_{\Omega} e^{4\pi \left( \frac{|U_n|}{\|U_n\|} \right)^2} + C \right)^{\frac{1}{p}} \|U_n\|_{L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega)}. \end{aligned}$$

onde  $\epsilon_n \rightarrow 0$ . Porém,  $\|U_n\|_{L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega)} \rightarrow 0$ . Como a última integral nas estimativas acima é limitada pela desigualdade de Trudinger-Moser temos que  $\|U_n\| \rightarrow 0$ . Sendo assim  $U_n \rightarrow 0$  em  $E$  e portanto  $J(U_n) \rightarrow 0 = c(m)$ . O que é um absurdo, concluindo a demonstração. ■

---

# REFERÊNCIAS

- [1] Adimurthi, S. L. Yadava, *Multiplicity results for semilinear elliptic equations in a bounded domain of  $R^2$  involving critical exponents*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **17** (1990), 481-504.
- [2] A. Ambrosetti, G. Prodi, *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*, Ann. Math. Pura Appl., **93** (1972), 231-247.
- [3] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Functional Analysis, **14** (1973), 349-381.
- [4] H. Berestycki, P.-L. Lions, *Nonlinear scalar field equations I. Existence of a ground state*, Arch. Rational Mech. Anal., **82** (1983), 313-345.
- [5] M. S. Berger, E. Podolak, *On the solutions of a nonlinear Dirichlet problem*, Indiana Univ. Math. J., **24** (1975), 837-846.
- [6] H. Brezis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of integrals*, Proc. Amer. Math. Soc., **88** (1983), 486-490.
- [7] H. Brezis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math., **24** (1983), 437-477.
- [8] H. Brezis, R. E. L. Turner, *On a class of superlinear elliptic problems*, Comm. Partial Differential Equations, **2** (1977), 601-614.

- [9] M. Calanchi, B. Ruf, *Elliptic equations with one-sided critical growth*, Electron. J. Differential Equations, (2002), 1-21.
- [10] M. Calanchi, B. Ruf, Z. Zhang, *Elliptic equations in  $\mathbb{R}^2$  with one-sided exponential growth*, Commun. Contemp. Math., **6** (2004), 947-971.
- [11] J. Chabrowski, *Variational Methods for Potential Operator Equations. With Applications to Nonlinear Elliptic Equations*, de Gruyter Stud. Math., **24**, Walter de Gruyter, Berlin, 1997.
- [12] K. C. Chang, *Ambrosetti-Prodi type results in elliptic systems*, Nonlinear Anal., **51** (2002), 553-566.
- [13] K. C. Chang, *An extension of the Hess-Kato theorem to elliptic systems and its applications to multiple solutions problems*, Acta Math. Sinica, **15** (1999), 439-454.
- [14] E. N. Dancer, *A counterexample to the Lazer-McKenna conjecture*, Nonlinear Anal., **13** (1989), 19-21.
- [15] E. N. Dancer, S. Yan, *On the superlinear Lazer-McKenna conjecture*, J. Differential Equations **210** (2005), 317-351.
- [16] D. G. de Figueiredo, *Lectures on Boundary Value Problems of Ambrosetti-Prodi Type*, Atas do 12º Seminario Brasileiro de Análise, São Paulo, 1980.
- [17] D. G. de Figueiredo, *On superlinear elliptic problems with nonlinearities interacting only with higher eigenvalues*, Rocky Mountain J. Math., **18** (1988), 287-303.
- [18] D. G. de Figueiredo, *On the superlinear Ambrosetti-Prodi problem*, Nonlinear An. Theory and Appl., **8** (1984), 655-665.
- [19] D. G. de Figueiredo, *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Lecture Notes in Math., **957** (1982), 34-87.
- [20] D. G. de Figueiredo, J. Yang, *Critical superlinear Ambrosetti-Prodi problems*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **14** (1999), 59-80.

- [21] D. G. de Figueiredo, O. H. Miyagaki, B. Ruf, *Elliptic equations in  $\mathbb{R}^2$  with nonlinearities in the critical growth range*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **3** (1995), 139-153.
- [22] D. G. de Figueiredo, S. Solimini, *A variational approach to superlinear elliptic problems*, Comm. in Partial Diff. Eq., **9** (1984), 699-717.
- [23] D. C. de Morais Filho, *A variational approach to an Ambrosetti-Prodi type problem for a system of elliptic equations*, Nonlinear Anal., **26** (1996), 1655-1668.
- [24] D. C. de Morais Filho, F. R. Pereira, *Critical Ambrosetti-Prodi type problems for systems of elliptic equations*, Nonlinear Anal., **68** (2008), 194-207.
- [25] D. C. de Morais Filho, M. A. S. Souto, *Systems of  $p$ -laplacian equations involving homogeneous nonlinearities with critical Sobolev exponents degrees*, Comm. Partial Differential Equations, **24** (1999), 1537-1553.
- [26] Y. B. Deng, *On the superlinear Ambrosetti-Prodi problem involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal., **17** (1991), 1111-1124.
- [27] F. O. V. de Paiva, M. F. Furtado, *Multiplicity of solutions for resonant elliptic systems*, J. Math. Anal. Appl., **319** (2006), 435-449.
- [28] J. M. B. do Ó, *Semilinear Dirichlet problems for the  $N$ -Laplacian in  $\mathbb{R}^N$  with nonlinearities in the critical growth range*, Differential Integral Equations **9** (1996), 967-979.
- [29] J. M. B. do Ó, E. Medeiros, U. B. Severo, *A nonhomogeneous elliptic problem involving critical growth in dimension two*, J. Math. Anal. Appl., **345** (2008), 286-304
- [30] C. L. Dolph, *Nonlinear integral equations of the Hammerstein type*, Trans. Amer. Math. Soc., **66** (1949) 289-307.
- [31] P. Felmer, *Periodic Solutions of "superquadratic" Hamiltonian systems*, Journal of Differential Equations, **102** (1993), 188-207.
- [32] F. Gazzola, B. Ruf, *Lower order perturbations of critical growth nonlinearities in semilinear elliptic equations*, Adv. Differential Equations, **2** (1997), 555-572.

- [33] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [34] H. Hofer, *Variational and topological methods in partial ordered Hilbert spaces*, Math. Ann., **261** (1982), 493-514.
- [35] J. L. Kazdan, F. W. Warner, *Remarks on some quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math., **XXVIII** (1975), 567-597.
- [36] A. C. Lazer, P. J. McKenna, *On a conjecture related to the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **95** (1983), 275-283.
- [37] A. C. Lazer, P. J. McKenna, *On the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem*, J. Math. Anal. Appl. **84** (1981), 282-294.
- [38] G. Li, S. Yan, J. Yang, *The Lazer-McKenna conjecture for an elliptic problem with critical growth*, Calc. Var. **28** (2007), 471-508.
- [39] G. Li, S. Yan, J. Yang, *The Lazer-McKenna conjecture for an elliptic problem with critical growth, part II*, J. Differential Equations **227** (2006), 301-332
- [40] E. Massa, *Multiplicity results for a superlinear elliptic system with partial interference with the spectrum*, Nonlinear Anal., **67** (2007), 295-306.
- [41] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Ind. Univ. Math. J., **20** (1971), 1077-1092.
- [42] Z.-Q. Ou, C.-L. Tang, *Existence and multiplicity results for some elliptic systems at resonance*, Nonlinear Analysis **71** (2009), 2660-2666.
- [43] F. R. Pereira, *Multiple solutions for a class of Ambrosetti-Prodi type problems for systems involving critical Sobolev exponents*, Commun. Pure Appl. Anal., **7** (2008), 355-372
- [44] P. S. Rabelo, *Existência e multiplicidade de soluções para sistemas de equações de Schrödinger semilineares em  $\mathbb{R}^n$* , Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco, 2008.

- [45] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. **65**, AMS, Providence, RI (1986).
- [46] P. H. Rabinowitz, *Some critical point theorems and applications to semilinear elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **5** (1978), 215-223.
- [47] M. Ramos, *Teoremas de multiplicidade do tipo Ambrosetti-Prodi*, Textos e Notas **37**, Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais das Universidades de Lisboa, Lisboa (1988).
- [48] B. Ribeiro, *The Ambrosetti-Prodi problem for gradient elliptic systems with critical homogeneous nonlinearity*, J. Math. Anal. Appl., **363** (2010), 606-617.
- [49] H. L. Royden, *Real analysis*, The Macmillan Co., New York; Collier-Macmillan Ltd., Londres (1963).
- [50] B. Ruf, P. N. Srikanth, *Multiplicity results for superlinear elliptic problems with partial interference with spectrum*, J. Math. Anal. Appl., **118** (1986), 15-23.
- [51] S. Solimini, *Some remarks on the number of solutions of some nonlinear elliptic equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal., Non Linéaire, **2** (1985) 143-156.
- [52] N. S. Trudinger, *On imbedding into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech., **17** (1967), 473-483.