

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

**Existência e Unicidade de
Solução Fraca Global das Equações de
Navier-Stokes em uma dimensão para
Fluidos Isentrópicos Compressíveis com a
Viscosidade Dependente da Densidade**

por

Edson José Teixeira

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos



EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO FRACA GLOBAL DAS EQUAÇÕES DE
NAVIER-STOKES EM UMA DIMENSÃO PARA FLUIDOS ISENTRÓPICOS
COMPRESSÍVEIS COM A VISCOSIDADE DEPENDENTE DA DENSIDADE.

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por **Edson José Teixeira** e
aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de setembro de 2009



Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos

Orientador

Banca Examinadora:

1 Marcelo Martins dos Santos

2 Gabriela del Valle Planas

3 Wladimir Augusto das Neves

Dissertação apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Computação
Científica, UNICAMP, como requisito
parcial para obtenção do Título de
MESTRE em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Teixeira, Edson José

T235e Existência e unicidade de solução fraca global das equações de Navier-Stokes em uma dimensão para fluidos isentrópicos compressíveis com a viscosidade dependente da densidade/Edson José Teixeira-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : Marcelo Martins dos Santos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

I.Navier-Stokes, Equações de. 2.Solução fraca. 3.Fluidos compressíveis. I. Santos, Marcelo Martins dos. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: On global weak solutions to 1D compressible isentropic Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Equations, Navier-Stokes. 2. Weak solution. 3. Compressive flow.

Área de concentração: Análise, Equações Diferenciais Parciais

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos (IMECC - UNICAMP)
Profª. Dra. Gabriela Del Valle Planas (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Wladimir Augusto das Neves (IM - UFRJ)

Data da defesa: 25/09/2009

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 25 de setembro de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.


Prof.(a). Dr(a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS


Prof. (a). Dr (a). GABRIELA DEL VALLE PLANAS


Prof. (a). Dr (a). WLADIMIR AUGUSTO DAS NEVES

RESUMO

Este trabalho consiste de uma exposição detalhada do resultado provado no artigo “*Global weak solutions to 1D compressible isentropic Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity*” de S. Jiang, Z. P. Xin e P. Zhang (Methods Appl. Anal. - 2005), sobre a existência e unicidade de solução fraca para o sistema de Navier-Stokes unidimensional de um fluido isentrópico compressível com viscosidade dependente da densidade e com fronteira livre em coordenadas lagrangianas,

$$\begin{cases} \rho_t + \rho^2 u_x = 0 & 0 < x < 1, t > 0 \\ u_t + (P(\rho))_x = (\rho\mu(\rho)u_x)_x & 0 < x < 1, t > 0 \end{cases},$$

onde ρ , u , $P(\rho)$ e $\mu(\rho)$ são a densidade, velocidade, pressão e viscosidade do fluido, e exigiremos que este fluido satisfaça a condição de fronteira $(-P(\rho) + \rho\mu(\rho)u_x) = 0$. Trataremos do caso particular onde consideramos $P(\rho) = A\rho^\gamma$ e $\mu(\rho) = B\rho^\alpha$, onde $A, B > 0$, $\gamma > 1$ e $0 < \alpha < 1$ são constantes. Acrescentaremos uma condição inicial (ρ_0, u_0) .

ABSTRACT

The present work makes a well-detailed exposition about the main results given in the paper “*Global weak solutions to 1D compressible isentropic Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity*” by S. Jiang, Z. P. Xin and P. Zhang (Methods Appl. Anal. - 2005). The problem in this paper has a free boundary but in lagrangian coordinates the equations are the following,

$$\begin{cases} \rho_t + \rho^2 u_x = 0 & 0 < x < 1, t > 0 \\ u_t + (P(\rho))_x = (\rho\mu(\rho)u_x)_x & 0 < x < 1, t > 0 \end{cases},$$

and the boundary becomes the fixed points $x = 0$ and $x = 1$; Here, ρ , u , $P(\rho)$ and $\mu(\rho)$ are, respectively, the density, velocity, pressure and the viscosity of the fluid. The boundary condition, at $x = 0$ and $x = 1$, is given by $(-P(\rho) + \rho\mu(\rho)u_x) = 0$. Although the pressure and viscosity may have more general forms, to be more specific, the authors consider only the special case $P(\rho) = A\rho^\gamma$ e $\mu(\rho) = B\rho^\alpha$, with $A, B > 0, \gamma > 1$ and $0 < \alpha < 1$ being constants. An initial condition (ρ_0, u_0) is also given at time $t = 0$.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, por mais esta oportunidade de aprendizado e por sempre estar presente na minha vida.

À minha família, em especial aos meu pais José de Assis e Maria Imaculada por sempre me apoiar e incentivar, a quem podia recorrer nas horas difíceis.

Ao meu orientador, Prof. Marcelo Martins dos Santos, pelo apoio e confiança depositada em mim, além das inúmeras contribuições na redação deste trabalho.

Ao Jorge Orlando, sua esposa Áurea Cristina e seus filhos pelo incentivo, amizade e acolhimento em sua casa em Viçosa.

Agradeço também aos meus tios João Bastista e Elaine, que me incentivaram e ajudaram em minha estada em Campinas.

À Prof. Simone Maria de Moraes, minha orientadora de iniciação científica, pelo encorajamento e incentivo.

Aos meus amigos do IMECC/UNICAMP, tanto da graduação quanto da pós-graduação, em particular ao Paulo e Rafael colegas de sala e ao Luís Miranda pelas discursões e auxílios de temas de minha dissertação.

Aos amigos de Graduação de Viçosa, pelo companherismo, pelas palavras de apoio e incentivo nos momentos difíceis, pelas longas risadas que me proporcionaram durante nossa convivência e pelas discussões matemáticas.

Aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação do IMECC/UNICAMP, pela paciência que sempre tem me atendido.

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

daremos um noção de integral em um espaço de Banach qualquer, denominadas integrais de Bochner. Finalizando o estudo dos conceitos preliminares, serão apresentados quatro resultados importantes e que serão de grande utilidade posteriormente, a saber, o lema de Gronwall, o lema de Aubin-Lions, o teorema de Arzelà-Ascoli, e um resultado sobre a existência, unicidade e estimativa de soluções para equações lineares parabólicas em espaços de Hölder.

No segundo capítulo, estudaremos com mais detalhes o artigo [7]. Primeiramente será feita uma breve apresentação do problema, com um breve comentário sobre a dedução das equações, bem como uma motivação sobre as condições de fronteira, para logo em seguida fazer a mudança de coordenadas adequada para se trabalhar com o problema. A partir daí poderemos começar a buscar solução para o mesmo, começando com solução local no tempo com dados iniciais com uma certa regularidade (dados iniciais suaves). A extensão global não será estabelecida, porém assumida. Tendo em mãos a existência da solução global suave, serão estabelecidas estimativas sobre ela. Posteriormente, será feita a construção da solução fraca a partir de aproximação de soluções suaves. Para finalizar, acrescentando mais uma condição sobre um dos dados iniciais, pode-se garantir que a solução construída é única.

SUMÁRIO

Resumo	iv
Abstract	iv
Agradecimentos	v
Introdução	vi
1 Conceitos Preliminares	3
1.1 Noções de Espaços de Sobolev	5
1.1.1 Regularização	5
1.1.2 Derivada Fraca	9
1.1.3 Densidade em Espaços de Sobolev	15
1.1.4 Imersões de Sobolev (Imersões Contínuas)	16
1.1.5 Imersões de Sobolev (Imersão Compacta)	27
1.2 Integral de Bochner	29
1.3 Quatro Resultados Importantes	31
2 Existência e Unicidade de Solução	35
2.1 Sobre a Dedução das Equações	36
2.1.1 O Teorema do Transporte	40

2.2	Apresentação do problema	41
2.3	Solução Suave	46
2.4	Estimativas sobre a Solução Suave	54
2.5	Existência de Solução Fraca	64
2.6	Unicidade de Solução	71
	Bibliografia	82

INTRODUÇÃO

As equações de Navier-Stokes são equações diferenciais que descrevem o movimento de um fluido, sendo portanto equações de muita importância descrevendo fluxo de água em canais, deslocamento de massas de ar, aerodinâmica, como fluxo de ar em aerofólios, propagação de fumaça no ar ou de óleo no mar, dentre várias outras aplicações que estão presentes em nosso cotidiano.

Nesta Dissertação consideramos as equações de Navier-Stokes para um fluido isentrópico em uma dimensão espacial, com a viscosidade dependente da densidade, como apresentadas no principal artigo estudado para este trabalho, [7], “*Global weak solutions to 1D compressible isentropic Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity*” de S.Jiang, Z. P. Xin e P. Zhang (Methods Appl. Anal. - 2005).

O trabalho está composto de dois capítulos, sendo que no primeiro estabeleceremos as ferramentas básicas para o desenvolvimento do seguinte.

O primeiro capítulo é totalmente voltado ao estudo de conceitos essenciais para a compreensão do trabalho aqui desenvolvido. Para isso, nós nos propomos a expor uma noção de espaços de Sobolev, partindo desde o conceito de derivada fraca, conceito fundamental para esta teoria, passando por propriedades de densidade em espaços com maior regularidade, onde é mais fácil trabalhar e obter estimativas, chegando a apresentar algumas imersões mais conhecidas e utilizadas no decorrer do capítulo seguinte. Será apresentado também neste capítulo uma breve abordagem de regularização de funções com algumas de suas propriedades que serão de grande utilidade no momento em que for necessário que os dados iniciais sejam suaves. Ainda neste capítulo

CAPÍTULO 1

CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos os conceitos preliminares que serão necessários para o desenvolvimento do capítulo 2.

Antes de mais nada façamos algumas considerações sobre a notação. Trabalharemos sempre no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $B(x, r)$ ou $B_r(x)$ a bola aberta de centro x e raio r

$$B(x; r) = \{y \in \mathbb{R}^n; |y - x| < r\}.$$

Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ uma n -upla de números inteiros não negativos. Chamaremos α de multi-índice e denotaremos

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Derivadas de ordem superior serão denotadas por

$$D^\alpha \equiv D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

onde $D_i \equiv \partial/\partial x_i$. Também utilizaremos as notações $\partial/\partial x_i = \partial_i \equiv u_{x_i}$ para as derivadas de primeira ordem. O gradiente de uma função com valores reais u será denotada por

$$Du(x) = (D_1 u(x), \dots, D_n u(x)).$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Denotaremos por $C^0(\Omega)$ o conjunto de todas as funções reais contínuas em Ω . Mais geralmente, se k é um inteiro não negativo ou ∞ , denotaremos por $C^k(\Omega)$ o conjunto

$$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n; D^\alpha u \in C^0(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq k\}.$$

Dada uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, denotaremos o seu suporte por $\text{supp}u$, i.e. $\text{supp}u$ denotará o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$. Denotaremos por $C_0^k(\Omega)$ o subconjunto das funções em $C^k(\Omega)$ com suporte compacto em Ω . Mais ainda, denotaremos por $C^k(\overline{\Omega})$ o seguinte conjunto:

$$C^k(\overline{\Omega}) = C^k(\Omega) \cap \{u; D^\alpha u \text{ tem uma extensão contínua a } \overline{\Omega}, 0 \leq |\alpha| \leq k\}.$$

Sejam $\gamma, \beta \in (0, 1)$. Diremos que u é Hölder contínua em Ω com expoente γ se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma,$$

para todos $x, y \in \Omega$. Denotaremos o espaço das funções com esta propriedade por $C^\gamma(\Omega)$, dotado da norma

$$\|u\|_{C^\gamma(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| + \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\gamma},$$

o qual é um espaço de Banach. Denotaremos por $C^{k+\gamma}(\Omega)$ o espaço de Banach

$$C^{k+\gamma}(\Omega) = \{u; D^\alpha u \in C^\gamma(\Omega), |\alpha| \leq k\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{C^{k+\gamma}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=0}^k \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|D^\alpha u(x_1) - D^\alpha u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\gamma}.$$

Sejam k e m inteiros não-negativos, possivelmente ∞ , e $\gamma, \beta \in (0, 1)$. Denotaremos por $Q_T = \Omega \times (0, T)$ e por $C^{k+\gamma, m+\beta}(Q_T)$ o espaço de Banach de todas as funções $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $u(., t) \in C^{k+\gamma}(\Omega)$ e $u(x, .) \in C^{m+\beta}((0, T))$ para quaisquer $x \in \Omega$ e $t \in (0, T)$, munido da norma

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{k+\gamma, m+\beta}(Q_T)} &= \sum_{|\alpha|=0}^k \sup_{(x,t) \in Q_T} |D_x^\alpha u(x, t)| + \sum_{j=1}^m \sup_{(x,t) \in Q_T} |D_t^j u(x, t)| \\ &+ \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|D_x^k u(x_1, t) - D_x^k u(x_2, t)|}{|x_1 - x_2|^\gamma} + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|D_x^k u(x, t_1) - D_x^k u(x, t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta} \\ &+ \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|D_t^m u(x_1, t) - D_t^m u(x_2, t)|}{|x_1 - x_2|^\gamma} + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|D_t^m u(x, t_1) - D_t^m u(x, t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}, \end{aligned}$$

onde $D_x^\alpha u \equiv D^\alpha u(., t)$ e $D_t^j u \equiv D^j u(x, .)$.

Denotaremos a norma dos espaços $L^p \equiv L^p(\Omega)$ por $\|\cdot\|_p$ ou $\|\cdot\|_{p;\Omega}$. Por $L_{\text{loc}}^1 \equiv L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ entenderemos o conjunto das funções localmente integráveis (a Lebesgue) em Ω , sem fazer a

identificação por classes de equivalência de funções iguais q.t.p. Dada $u \in L^1_{\text{loc}}$, outra função que coincida com u q.t.p. será dita um *representante* de u .

A medida de um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ mensurável (a Lebesgue) será indicada por $|E|$. A notação padrão q.t.p., já usada acima, significa ‘em todo ponto fora de um conjunto de medida (de Lebesgue) nula’.

1.1 Noções de Espaços de Sobolev

Nesta seção apresentaremos noções sobre os espaços de Sobolev, uma ferramenta importante para a compreensão deste trabalho e com grande utilidade no estudo de soluções fracas. Esta seção contará com subseções onde estudaremos conceitos e propriedades de grande importância como regularização, derivada fraca, densidade dos espaços de Sobolev e algumas imersões contínuas e compactas. A referência principal para esta seção é o livro de William P. Ziemer [18]. Usamos também outras referências, como por exemplo, [4] e [1].

1.1.1 Regularização

O objetivo principal desta seção é definir regularização de uma função e obter propriedades sobre tal regularização. Como veremos no capítulo 2, construiremos nossa solução por aproximação de soluções suaves que são garantidas apenas para dados iniciais com certa regularidade. Esta regularidade poderá ser obtida fazendo uso da teoria aqui apresentada.

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$. Denotaremos por Ω_ε o conjunto

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função real, não-negativa, com a propriedade de que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1 \quad \text{e} \quad \text{supp} \varphi \subset B(0, 1),$$

por exemplo,

$$\varphi(x) = \begin{cases} C e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases},$$

onde C é uma constante tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx = 1$. Definimos a função $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$, a qual pertence a $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ e satisfaz $\text{supp} \varphi_\varepsilon \subset B(0; \varepsilon)$.

Definição 1.1. Chamaremos φ_ε de uma função regularizante padrão e dado $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, definimos o seu regularizador u^ε por

$$u^\varepsilon := \varphi_\varepsilon * u \quad \text{em } \Omega_\varepsilon,$$

isto é,

$$u^\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)dy,$$

para todo $x \in \Omega_\varepsilon$.

Definição 1.2. Seja $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Diremos que x é um ponto de Lebesgue de u se $\int_{B_r(x)} |u(y) - u(x)|dy \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$.

Teorema 1.3. Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então

- (i) Para todo $\varepsilon > 0$, $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ e $D^\alpha(\varphi_\varepsilon * u)(x) = ((D^\alpha \varphi_\varepsilon) * u)(x)$ para cada multi-índice α e para todo $x \in \Omega_\varepsilon$. Em particular, $u^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.
- (ii) Se x é um ponto de Lebesgue, então $u^\varepsilon(x) \rightarrow u(x)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.
- (iii) Se $u \in C(\Omega)$, então u^ε converge uniformemente a u em subconjuntos compactos de Ω .
- (iv) Se $1 \leq p < \infty$ e $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, então $u^\varepsilon \rightarrow u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$.

Demonstração. Vamos proceder por indução sobre $|\alpha|$ para a prova de (i). Seja $x \in \Omega_\varepsilon$ e consideremos $\{e_1, \dots, e_n\}$, a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Tomemos h de tal forma que $x + he_i \in \Omega_\varepsilon$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{u^\varepsilon(x + he_i) - u^\varepsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\Omega} \frac{1}{h} \left(\varphi\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon}\right) - \varphi\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) \right) u(y) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_V \frac{1}{h} \left(\varphi\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon}\right) - \varphi\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) \right) u(y) dy \end{aligned}$$

para algum aberto V tal que $V \subset\subset \Omega$. Já que

$$\frac{1}{h} \left(\varphi\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon}\right) - \varphi\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) \right)$$

converge uniformemente a

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right)$$

em V , temos que $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}(x)$ existe e

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)u(y)dy.$$

Suponhamos que tenhamos

$$D^\alpha u^\varepsilon = \int_{\Omega} D^\alpha \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)dy$$

para todo α satisfazendo $|\alpha| = k$ e para todo $x \in \Omega_\varepsilon$.

Seja agora α tal que $|\alpha| = k+1$. Daí, $\alpha = \beta + \gamma$, com $|\beta| = k$ e $|\gamma| = 1$. Assim, temos pela hipótese de indução e usando o mesmo argumento anterior que

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\varepsilon(x) &= D^{\gamma+\beta} u^\varepsilon(x) = D^\gamma (D^\beta u^\varepsilon)(x) \\ &= D^\gamma \left(\int_{\Omega} D^\beta \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)dy \right) \\ &= \int_{\Omega} D^\alpha \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)dy. \end{aligned}$$

Segue daí o resultado desejado do item (i). Em particular se $\Omega = \mathbb{R}^n$, temos que $u^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Para a prova de (ii) fixemos um ponto de Lebesgue $x \in \Omega$. Então, temos

$$\begin{aligned} |u^\varepsilon(x) - u(x)| &= \left| \int_{B(x;\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(x-y)(u(y) - u(x))dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x;\varepsilon)} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)|u(y) - u(x)|dy \\ &\leq C \int_{B_\varepsilon(x)} |u(y) - u(x)|dy \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Desta maneira temos demonstrado (ii). (Poderíamos ter demonstrado o resultado em quase todo ponto de Ω sem falar em ponto de Lebesgue, já que para uma função localmente integrável quase todo ponto do seu domínio é um ponto de Lebesgue.)

Passemos à prova de (iii). Se $u \in C(\Omega)$ e x pertence a um conjunto compacto K , dado $\eta > 0$, existe $\delta > 0$, podendo depender de K mas independente de x tal que $|u(x) - u(y)| < \eta$ sempre que $|y - x| < \delta$. Logo, tomando $\varepsilon < \delta$, pela última estimativa do item anterior, temos que

$$|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)| \leq \left(\sup_{B(x;1)} \varphi \right) C \eta$$

para todo $x \in K$, onde C é uma constante. Portanto u^ε converge uniformemente para u em K . Com isso, temos provado (iii).

Passemos à demonstração do último item. Seja $V \subset\subset \Omega$. Podemos tomar $\varepsilon > 0$ de maneira que para $x \in V$, tenhamos $B(x; \varepsilon) \subset V$. Daí, pela definição de regularizador e pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} |u^\varepsilon(x)| &= \left| \int_{B(x;\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{B(0;1)} \varphi(z) u(x - \varepsilon z) dz \right| \\ &\leq \int_{B(0;1)} \varphi(z) |u(x - \varepsilon z)| dz \\ &\leq \left(\int_{B(0;1)} \varphi(z) dz \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B(0;1)} \varphi(z) |u(x - \varepsilon z)|^p dz \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Daí como $V \subset\subset \Omega$ e $\varepsilon < \text{dist}(V, \partial\Omega)/2$, temos pelo Teorema de Fubini e de $\int_{B(0;1)} \varphi(z) dz = 1$

$$\begin{aligned} \int_V |u^\varepsilon(x)|^p dx &\leq \int_V \int_{B(0;1)} \varphi(z) |u(x - \varepsilon z)|^p dz dx \\ &= \int_{B(0;1)} \varphi(z) \int_V |u(x - \varepsilon z)|^p dx dz \\ &\leq \int_{B(0;1)} \varphi(z) \left(\int_W |u(y)|^p dy \right) dz \\ &= \int_W |u(y)|^p dy, \end{aligned}$$

onde $W = V \cup \{x \in \mathbb{R}^n; \text{dist}(x, \partial V) < \varepsilon\}$. Logo temos que

$$\|u^\varepsilon\|_{L^p(V)} \leq \|u\|_{L^p(W)}.$$

Fixemos $V \subset\subset W \subset\subset \Omega$ e $\delta > 0$. Tomemos $v \in C(W)$ tal que

$$\|u - v\|_{L^p(W)} < \delta.$$

Então,

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u\|_{L^p(V)} &\leq \|u^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|v^\varepsilon - v\|_{L^p(V)} + \|v - u\|_{L^p(V)} \\ &\leq 2\|u - v\|_{L^p(W)} + \|v^\varepsilon - v\|_{L^p(V)} \\ &\leq 2\delta + \|v^\varepsilon - v\|_{L^p(V)}. \end{aligned}$$

Como $v^\varepsilon \rightarrow v$ uniformemente em V , temos que $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - u\|_{L^p(V)} \leq 2\delta$. Logo, temos que $u^\varepsilon \rightarrow u$ em $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. $\square$

1.1.2 Derivada Fraca

Apresentaremos nesta seção um novo tipo de derivada, elemento fundamental dos espaços de Sobolev. A definição de tal derivada é motivada pelo método de integração por partes. Nesta mesma seção começaremos a trabalhar com espaços de Sobolev.

Seja $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Para um multi-índice α , uma função $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ é chamada α -ésima *derivada fraca* (ou *derivada generalizada*) de u se

$$\int_{\Omega} \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Neste caso, escrevemos $v = D^{\alpha} u$. Temos que esta derivada é única a menos de um conjunto de medida nula. De fato, sejam $v, \tilde{v} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ satisfazendo

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \varphi \tilde{v} dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \varphi v dx = \int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx$$

para toda $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Então

$$\int_{\Omega} (v - \tilde{v}) \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Logo, $v = \tilde{v}$ q.t.p..

Apresentaremos agora um teorema que nos fornece uma condição necessária e suficiente para a existência da i -ésima derivada fraca $\partial_i u \equiv \partial u / \partial x_i$ ($i \in \{1, \dots, n\}$). V. [18, Teorema 2.1.4].

Teorema 1.4. *Sejam $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $i \in \{1, \dots, n\}$. Então existe a i -ésima derivada fraca $\partial_i u$ se, e somente se, u tem um representante (existe uma função que coincide com u q.t.p. em Ω) que é absolutamente contínuo em quase todo (em relação à medida de Lebesgue $(n-1)$ dimensional) segmento de reta paralelo ao i -ésimo eixo coordenado e que tem a i -ésima derivada (clássica) em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.*

Demonstração. Suponhamos que exista a derivada fraca $\partial_i u \equiv \partial u / \partial x_i$. Temos, pela própria definição de derivada fraca, que $\partial_i u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Consideremos regularizadores u^{ε} , $(\partial_i u)^{\varepsilon}$ (v. Definição 1.1). Não é difícil verificar que o regularizador comuta com a derivada, i.e. $(\partial_i u)^{\varepsilon} = \partial_i(u^{\varepsilon})$. (Com efeito, $(\partial_i u)^{\varepsilon}(x) = \int \varphi_{\varepsilon}(x-y) \partial_i u(y) dy = - \int [\partial_{y_i} \varphi_{\varepsilon}(x-y)] u(y) dy = \int [\partial_{x_i} \varphi_{\varepsilon}(x-y)] u(y) dy = \partial_{x_i} \int \varphi_{\varepsilon}(x-y) u(y) dy$.) Seja A a união dos pontos de Lebesgue de u e $\partial_i u$. Pelo Teorema 1.3, temos que $u^{\varepsilon}(x) \rightarrow u(x)$ e $(\partial_i u)^{\varepsilon}(x) \rightarrow (\partial_i u)(x)$ para todo $x \in \Omega/A$ e também que $u^{\varepsilon} \rightarrow u$ e $\partial_i u^{\varepsilon} \rightarrow \partial_i u$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Escrevamos Ω como uma união de uma quantidade enumerável de

retângulos $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \Omega$. Identifiquemos um ponto $x \in R$ como $x = (x', x_i)$, onde $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $x_i \in [a_i, b_i]$. Definamos também $R' = [a_1, b_1] \times \dots \times [\widehat{a_i, b_i}] \times \dots \times [a_n, b_n]$, de forma que $R = R' \times [a_i, b_i]$. Sem perda de generalidade, podemos supor que a interseção de cada hiperfície $R' \times \{a_i\}$ com o conjunto A tem medida de Lebesgue $(n-1)$ dimensional nula, pois dado um retângulo $R = R' \times [a_i, b_i] \subset \Omega$, como a medida n dimensional de A é nula, pelo Teorema de Fubini, temos que a medida $(n-1)$ dimensional de cada fatia $(R' \times \{x_i\}) \cap A$ é nula para quase todo x_i em $[a_i, b_i]$, logo, se se a medida de $(R' \times \{x_i\}) \cap A$ não for nula, podemos tomar um outro a_i arbitrariamente próximo, de forma que isso não aconteça, e ainda teremos Ω como sendo a união enumerável de retângulos $R = R' \times [a_i, b_i]$ tais que a medida $(n-1)$ dimensional de cada conjunto $(R' \times \{a_i\}) \cap A$ seja nula. Também pelo Teorema de Fubini, temos

$$\int_{R'} \left[\int_{a_i}^{b_i} |u^\varepsilon(x', x_i) - u(x', x_i)| dx_i \right] dx' = \int_R |u^\varepsilon(x) - u(x)| dx \rightarrow 0$$

e

$$\int_{R'} \left[\int_{a_i}^{b_i} |\partial_i u^\varepsilon(x', x_i) - \partial_i u(x', x_i)| dx_i \right] dx' = \int_R |\partial_i u^\varepsilon(x) - \partial_i u(x)| dx \rightarrow 0$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Como a convergência de uma sequência em L^1 implica a convergência em quase todo ponto de uma subsequência, daí temos que existe uma sequência $u_m \equiv u^{\varepsilon_m}$ tal que

$$\int_{a_i}^{b_i} |u_m(x', x_i) - u(x', x_i)| dx_i \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

e

$$\int_{a_i}^{b_i} |\partial_i u_m(x', x_i) - \partial_i u(x', x_i)| dx_i \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

quando $m \rightarrow \infty$, para quase todo $x' \in R'$, digamos para todo $x' \in R' \setminus Z$, onde $Z \subset R'$ tem medida nula em R' . Fixemos um $x' \in R' \setminus (Z \cup \pi_i(R' \times \{a_i\}) \cap A)$ qualquer, onde π_i denota a projeção $\pi_i(x', x_i) = x'$. Notemos que o conjunto $Z \cup \pi_i(R' \times \{a_i\}) \cap A$ ainda tem medida $(n-1)$ dimensional nula. A sequência $\{u_m(x', \cdot)\}$ é limitada em $[a_i, b_i]$. De fato, como vale (1.2) e as funções u_m são continuamente diferenciáveis, dado um $\eta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $t \in [a_i, b_i]$ e todo $m > n_0$, temos

$$\begin{aligned} |u_m(x', t) - u_m(x', a_i)| &= \left| \int_{a_i}^t \partial_i u_m(x', x_i) dx_i \right| \\ &\leq \int_{a_i}^{b_i} |\partial_i u_m(x', x_i) - \partial_i u(x', x_i)| dx_i + \int_{a_i}^{b_i} |\partial_i u(x', x_i)| dx_i \\ &< \int_{a_i}^{b_i} |\partial_i u(x', x_i)| dx_i + \eta \end{aligned}$$

e a sequência $u_m(x', a_i)$ é limitada (convergente) já que $(x', a_i) \notin A$. Além disso, como temos a convergência (1.2) em $L^1([a_i, b_i])$, segue-se que dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\int_E |\partial_i u_m(x', x_i)| dx_i < \varepsilon \quad (1.3)$$

para qualquer conjunto mensurável (a Lebesgue) $E \subset [a_i, b_i]$ com $|E| < \delta$. (Com efeito, de (1.2), existe um m_0 tal que $\int_{a_i}^{b_i} |\partial_i u_m(x', x_i) - \partial_i u(x', x_i)| dx_i < \varepsilon/2$ para todo $m > m_0$ e, pela ‘continuidade da integral em relação à medida’ [6, Corolário 3.6], podemos obter um $\delta > 0$ tal que $\int_E |\partial_i u(x', x_i)| dx_i < \varepsilon/2$ e $\int_E |\partial_i u_m(x', x_i)| dx_i < \varepsilon/2$, para $m = 1, \dots, m_0$, qualquer que seja o conjunto mensurável E com $|E| < \delta$.) Assim, se $|t - s| < \delta$ segue-se que

$$|u_m(x', t) - u_m(x', s)| \leq \int_s^t |\partial_i u_m(x', x_i)| dx_i < \varepsilon$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo, em particular temos que a sequência $\{u_m(x', \cdot)\}$ é equicontínua, e também é limitada (como vimos acima), então, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli (Teorema 1.36) existe uma subsequência, a qual ainda denotaremos por $\{u_m(x', \cdot)\}$, que converge uniformemente em $[a_i, b_i]$ para uma função contínua $\bar{u}(x', \cdot)$. De (1.3) segue-se que $\bar{u}(x', \cdot)$ é absolutamente contínua. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, se $[s_j, t_j]$, $j = 1, \dots, k$, são subintervalos de $[a_i, b_i]$ tais que $\sum_{j=1}^k (t_j - s_j) < \delta$, então tomando $E = \cup_{j=1}^k [s_j, t_j]$, de (1.3) obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k |u_m(x', t_j) - u_m(x', s_j)| &= \sum_{j=1}^k \left| \int_{s_j}^{t_j} \partial_i u_m(x', x_i) dx_i \right| \leq \sum_{j=1}^k \int_{s_j}^{t_j} |\partial_i u_m(x', x_i)| dx_i \\ &= \int_E |\partial_i u_m(x', x_i)| dx_i < \varepsilon, \end{aligned}$$

donde, tomando o limite quando $m \rightarrow \infty$ no primeiro termo, $\sum_{j=1}^k |\bar{u}(x', t_j) - \bar{u}(x', s_j)| \leq \varepsilon$. Como convergência uniforme implica em convergência em L^1 , segue-se de (1.1) que $\bar{u}(x', \cdot) = u(x', \cdot)$ q.t.p. em $[a_i, b_i]$. Então, para todo retângulo R temos uma subsequência $u_m \equiv u^{\varepsilon_m}$ tal que existe o limite $\bar{u}(x', x_i) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x', x_i)$ em quase todo ponto (x', x_i) de $R = R' \times [a_i, b_i]$ e $\bar{u} = u$ q.t.p. em R . (De fato, essa convergência vale em todo ponto $(x', x_i) \notin (Z \cup \pi_i(R' \times \{a_i\} \cap A)) \times [a_i, b_i]$ e $\bar{u}(x', x_i) = u(x', x_i)$ para todo $(x', x_i) \in R$ com $x' \notin Z \cup \pi_i(R' \times \{a_i\} \cap A)$ e x_i fora de um conjunto de medida nula em $[a_i, b_i]$.) Além disso $\bar{u}$ é absolutamente contínua em quase todo segmento em R paralelo ao i -ésimo eixo coordenado. Daí, pelo processo da diagonalização, obtemos uma nova subsequência com essa propriedade em todo retângulo R , ou seja, uma função $\bar{u}$ definida em Ω e uma subsequência u_m ($u_m = u^{\varepsilon_m}$ para algum $\varepsilon_m \rightarrow 0$) tal que, para todo retângulo R como acima, $\bar{u}|_R = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m|_R$ e $\bar{u}|_R = u|_R$, q.t.p. em R , e $\bar{u}|_R$ é absolutamente contínua em quase

todo segmento em R paralelo ao i -ésimo eixo coordenado. Como Ω é a união enumerável desses retângulos, segue-se que $\bar{u} = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m$ e $\bar{u} = u$, q.t.p. em Ω , e tomando um segmento $\{x'\} \times [a_i, b_i]$ com x' não pertencente ao conjunto $Z \cup \pi_i(R' \times \{a_i\} \cap A)$, qualquer que seja o retângulo R , temos que $\bar{u}$ restrita ao segmento $(\{x'\} \times [a_i, b_i]) \cap \Omega$ é absolutamente contínua, pois $\bar{u}|((\{x'\} \times [a_i, b_i]) \cap R)$ é absolutamente contínua para qualquer um dos retângulos tal que $(\{x'\} \times [a_i, b_i]) \cap R \neq \emptyset$. Finalmente, como $\bar{u} = u$ q.t.p. e a derivada fraca $\partial_i u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ temos que $\partial_i \bar{u} = \partial_i u$ também pertence a $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Reciprocamente, suponhamos que u tenha um representante $\bar{u}$ que seja absolutamente contínuo em quase todo segmento de reta em Ω paralelo ao i -ésimo eixo coordenado com sua i -ésima derivada clássica $\partial_i \bar{u}$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. (Lembramos que toda função absolutamente contínua, de uma variável, tem derivada clássica bem definida q.t.p.. V. e.g. [6, Teorema 3.35].) Logo, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\bar{u}\varphi$ também é uma função absolutamente contínua em quase todo segmento de reta em Ω paralelo ao i -ésimo eixo coordenado, e temos que

$$\int (\bar{u} \partial_i \varphi)(x', x_i) dx_i = - \int \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \bar{u}(x', x_i) \right] \varphi(x', x_i) dx_i,$$

para quase todo $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ (podemos estender os integrandos por zero fora de Ω) onde usamos a fórmula de integração por partes para funções absolutamente contínuas (v. e.g. [6, Teorema 3.36]) e que φ tem suporte compacto. Daí, usando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\int_{\Omega} u \partial_i \varphi dx = \int_{\Omega} \bar{u} \partial_i \varphi dx = \int \int \bar{u} \partial_i \varphi(x', x_i) dx_i dx' = - \int \int (\partial_i \bar{u}) \varphi dx_i dx' = \int_{\Omega} (\partial_i \bar{u}) \varphi dx.$$

Portanto, u tem a i -ésima derivada fraca ($= \partial_i \bar{u}$). □

Corolário 1.5. *Uma função $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ é fracamente diferenciável, no sentido de que possui todas derivadas fracas de primeira ordem $\partial_i u$, $i = 1, \dots, n$, se, e somente se, u tem um representante que é absolutamente contínuo em quase todos os segmentos de reta paralelos aos eixo coordenados e com as derivadas parciais (clássicas) de primeira ordem em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.*

Demonstração. Se u é fracamente diferenciável, pelo Teorema 1.4, para cada $i = 1, \dots, n$, existe uma função u_i que coincide com u q.t.p., que é absolutamente contínua em quase todo segmento de reta paralelo ao i -ésimo eixo coordenado e com a derivada fraca $\partial_i u_i$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Sejam $E_i \subset \Omega$ um conjunto de medida nula tal que $u = u_i$ em $\Omega \setminus E_i$ e $E = \cup_{i=1}^n E_i$. Definindo $\bar{u} = u$ em $\Omega \setminus E$ (e de forma arbitrária em E) temos que $\bar{u}$ é um representante de u com as propriedades desejadas. Reciprocamente, dado um representante $\bar{u}$ de u com essas propriedades, pelo Teorema 1.4 temos que u é fracamente diferenciável. □

Passaremos agora à definição e notação para os Espaços de Sobolev.

Definição 1.6. Para $p \geq 1$ e k inteiro não-negativo, definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ por

$$W^{k,p}(\Omega) = L^p(\Omega) \cap \{u; D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ com } |\alpha| \leq k\}.$$

Este espaço é dotado da norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}$$

que é equivalente a

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{p,\Omega}.$$

Definição 1.7. Definimos $W_0^{k,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$, com a norma induzida de $W^{k,p}(\Omega)$.

Proposição 1.8. O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Primeiramente mostremos quer

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}$$

é uma norma. De fato, claramente temos que $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \geq 0$ e $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$ se, e somente se, $u = 0$ q.t.p.. Além disso,

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha(\lambda u)\|_p^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |\lambda|^p \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

A desigualdade triangular é consequência da desigualdade de Minkowski

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_p^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^\alpha u\|_p + \|D^\alpha v\|_p)^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_p^p \right)^{1/p} \\ &= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Resta mostrar agora que $W^{k,p}(\Omega)$ é completo. Seja $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $W^{k,p}(\Omega)$. Desta forma, temos que $\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq k$. Já que $L^p(\Omega)$ é completo, temos que existe $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que

$$D^\alpha u_m \rightarrow u_\alpha$$

em $L^p(\Omega)$, para cada $|\alpha| \leq k$. Em particular

$$u_m \rightarrow u_{(0,\dots,0)} =: u$$

em $L^p(\Omega)$. Mostremos agora que $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e $D^\alpha u = u_\alpha$. De fato, seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx &= \int_{\Omega} \lim_{m \rightarrow \infty} (u_m D^\alpha \varphi) dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_m D^\alpha \varphi) dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (D^\alpha u_m) \varphi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_\alpha \varphi dx. \end{aligned}$$

Assim, $D^\alpha u = u_\alpha$. Além disso, temos que

$$D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u$$

em $L^p(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq k$. Logo, $u_m \rightarrow u$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Portanto, $W^{k,p}(\Omega)$ é completo. $\square$

Da mesma forma que tínhamos convergência do regularizador u^ε para u em $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$, teremos essa convergência no espaço de Sobolev, como trata o seguinte teorema:

Teorema 1.9. *Seja $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Então o regularizador u^ε de u é tal que*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} = 0,$$

para qualquer $\Omega' \subset\subset \Omega$. No caso de $\Omega = \mathbb{R}^n$, podemos tomar $\Omega' = \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Já que $\Omega' \subset\subset \Omega$, temos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $d(\Omega', \partial\Omega) > \varepsilon_0$. Seja $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\begin{aligned}
 D^\alpha u^\varepsilon(x) &= D_x^\alpha \left(\int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(x-y) u(y) dy \right) \\
 &= \int_{\Omega} D_x^\alpha [\varphi_\varepsilon(x-y) u(y)] dy \\
 &= \varepsilon^{-n} \int_{\Omega} D_x^\alpha \varphi \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) u(y) dy \\
 &= (-1)^{|\alpha|} \varepsilon^{-n} \int_{\Omega} D_y^\alpha \varphi \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) u(y) dy \\
 &= \varepsilon^{-n} \int_{\Omega} \varphi \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) D_y^\alpha u(y) dy \\
 &= \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(x-y) D_y^\alpha u(y) dy \\
 &= (D^\alpha u)^\varepsilon(x), \quad \forall x \in \Omega'.
 \end{aligned}$$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned}
 \|u^\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} &= \left(\int_{\Omega'} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha(u^\varepsilon - u)|^p dx \right)^{1/p} \\
 &= \left(\int_{\Omega'} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha(u^\varepsilon) - (D^\alpha u)|^p dx \right)^{1/p} \\
 &= \left(\int_{\Omega'} \sum_{|\alpha| \leq k} |(D^\alpha u)^\varepsilon - D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}.
 \end{aligned}$$

Como $(D^\alpha u)^\varepsilon = D^\alpha u^\varepsilon$, segue-se que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} = 0.$$

□

1.1.3 Densidade em Espaços de Sobolev

Nesta seção provaremos um resultado de grande utilidade, principalmente para a prova das desigualdades de Sobolev. Para isso faremos uso do Teorema de Partição da Unidade.

Teorema 1.10. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Então*

$$C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$$

é denso em $W^{k,p}(\Omega)$.

Demonstração. Considere $\{\Omega_m\}$ uma sequência crescente de subconjuntos abertos de Ω satisfazendo $\Omega_m \subset\subset \Omega_{m+1}$ e $\cup \Omega_m = \Omega$. Seja $\{\psi_m\}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{\Omega_{m+1} - \overline{\Omega_{m-1}}\}$, considerando Ω_0 e Ω_{-1} como sendo o conjunto vazio. Então dados $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$ podemos tomar $0 < \varepsilon_m \leq \{dist(\Omega_{m+1}, \partial\Omega_{m+2}), dist(\Omega_{m-2}, \partial\Omega_{m-1})\}$ satisfazendo

$$\|(\psi_m u)_{\varepsilon_m} - \psi_m u\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Definamos $v_m = (\psi_m u)_{\varepsilon_m}$ e notemos que exceto por um número finito, todos os v_m se anulam em qualquer $\Omega' \subset\subset \Omega$. Assim, $v = \sum v_m$ está definida e pertence a $C^\infty(\Omega)$. Além disso,

$$\|v - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left\| \sum (\psi_m u)_{\varepsilon_m} - \left(\sum \psi_m \right) u \right\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \sum \|(\psi_m u)_{\varepsilon_m} - \psi_m u\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon.$$

□

Em geral não se consegue garantir o teorema anterior substituindo $C^\infty(\Omega)$ por $C^\infty(\overline{\Omega})$, mas exigindo certas condições sobre $\partial\Omega$, essa substituição torna-se verdadeira como nos garante o próximo teorema. Antes disso, façamos a seguinte definição:

Definição 1.11. Um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição do cone interior se para todo $x \in \partial\Omega$, existe $\varepsilon > 0$ e um vetor não-nulo $v_x \in \mathbb{R}^n$ tais que se $y \in B_\varepsilon(x) \cap \overline{\Omega}$, então $y + tv_x \in \Omega$ para todo $0 < t < 1$.

Teorema 1.12. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto que satisfaz a condição do cone interior. Então $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{k,p}(\Omega)$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [1].

□

1.1.4 Imersões de Sobolev (Imersões Contínuas)

Esta seção é dedicada ao estudo de algumas desigualdades dos Espaços de Sobolev que são bastante úteis para obtenção de estimativas e de regularidades adicionais de soluções no estudo de EDP.

Definição 1.13. Seja E um subespaço vetorial normado de um espaço normado F (a norma em E não precisa necessariamente ser a norma induzida de F). Dizemos que a inclusão $E \subset F$ é uma imersão contínua se a aplicação inclusão $I : E \rightarrow F$ definida por $I(x) = x$ for contínua. Denotaremos a imersão contínua de E em F por

$$E \hookrightarrow F.$$

Como a aplicação inclusão é linear, o fato de existir uma imersão $E \hookrightarrow F$ é equivalente à existência de uma constante $C > 0$ tal que $\|x\|_F \leq C\|x\|_E$ para todo $x \in E$.

Antes de começarmos com a apresentação dessas imersões, façamos, a cargo de motivação, uma investigação que induz na primeira destas imersões. Trabalhando em $\mathbb{R}^n$, gostaríamos de descobrir, dado $1 \leq p < n$, qual valor de q para que seja válida a desigualdade da forma

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, com uma constante C independente de u . Fixemos $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qualquer, não nula, e definamos para $\lambda > 0$

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x).$$

Desta forma,

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda(x)|^q dx \right)^{1/q} = \left(\lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy \right)^{1/q} = \lambda^{-n/q} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|Du_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\lambda Du(\lambda x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\lambda^{p-n} \int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^p dy \right)^{1/p} = \lambda^{1-n/p} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Como $\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, segue-se que

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\lambda^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}} \|Du_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Suponhamos $1 + \frac{n}{q} - \frac{n}{p} \neq 0$.

- Se $1 + \frac{n}{q} - \frac{n}{p} > 0$, façamos $\lambda \rightarrow 0$;
- Se $1 + \frac{n}{q} - \frac{n}{p} < 0$, façamos $\lambda \rightarrow \infty$.

Em ambos os casos obteremos $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 0$, o que é uma contradição pois tomamos inicialmente $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ não nula. Portanto, teremos necessariamente $1 + \frac{n}{q} - \frac{n}{p} = 0$, ou seja,

$$q = \frac{np}{n-p}.$$

Com esta motivação, a definição de p^* abaixo já é esperada.

Teorema 1.14. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Se $1 \leq p < n$, então existe uma constante $C = C(n, p)$ tal que para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)},$$

onde $p^* = \frac{np}{n-p}$.

Demonstração. Provemos primeiramente o resultado para funções $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Desta forma, já que u tem suporte compacto podemos escrevê-la da seguinte forma

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) dy_i;$$

consequentemente

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_i.$$

Assim,

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Agora integraremos esta desigualdade sucessivamente em relação as variáveis $x_1, \dots, x_n$ e utilizaremos a desigualdade de Hölder generalizada

$$\left\| \prod_{i=1}^{n-1} f_i \right\|_1 \leq \prod_{i=1}^{n-1} \|f_i\|_{p_i}, \text{ com } \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{p_i} = 1$$

para obtermos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_i dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Agora integrando em relação a variável x_2 , temos

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \right\} dx_2 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \right\} dx_2 \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |du| dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dx_2 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Continuando desta maneira, obteremos no final

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du_i| dx \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du| dx \right)^{\frac{n}{n-1}},$$

ou seja,

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq \|Du\|_{L^1}$$

que é a desigualdade desejada para o caso $p = 1$.

Para $1 < p < n$ façamos $|u|^\gamma$ no lugar de $|u|$ na inequação anterior, para algum $\gamma > 1$ que escolheremos adequadamente. Assim, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (|u|^\gamma)^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |D|u|^\gamma| dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |Du| dx \leq \| |u|^{\gamma-1} \|_{\frac{p}{p-1}} \|Du\|_p.$$

Seja γ tal que

$$\frac{\gamma n}{n-1} = \frac{(\gamma-1)p}{p-1},$$

ou seja,

$$\gamma = p \frac{n-1}{n-p} > 1,$$

de forma que

$$\frac{\gamma n}{n-1} = \frac{(\gamma-1)p}{p-1} = \frac{np}{n-p}.$$

Daí, dividindo a desigualdade anterior por $\| |u|^{\gamma-1} \|_{\frac{p}{p-1}}$, temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \gamma \|Du\|_p = p \frac{n-1}{n-p} \|Du\|_p = C(n, p) \|Du\|_p.$$

Isto foi feito para $u \in C_0^\infty(\Omega)$ que é denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo, o resultado é válido para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

De fato, seja $\{u_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ uma sequência tal que $u_k \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Aplicando o resultado a $u_k - u_l$, temos

$$\|u_k - u_l\|_{p^*} \leq C \|Du_k - Du_l\|_p \leq C \|u_k - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

ou seja, $\{u_k\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^{p^*}(\Omega)$ e portanto $u_k \rightarrow u_l$ em $L^{p^*}(\Omega)$. Assim,

$$\|u\|_{p^*} \leq C \|Du\|_p, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

□

Notemos que, pela demonstração acima, a constante C do Teorema 1.14 pode ser dada por

$$C = p^{\frac{n-1}{n-p}}.$$

Em geral para o caso de estarmos trabalhando com o espaço $W^{k,p}(\Omega)$, denotaremos $p^* = \frac{np}{n-kp}$.

Teorema 1.15. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Se $1 \leq p < n$, então para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ existe $C = C(n, p)$ tal que*

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Demonstração. Segue imediatamente do fato de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, que

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|Du\|_p \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

□

Teorema 1.16. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < n$, então existe $C = C(n, p)$ tal que*

$$\|u\|_q \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad q \in [p, p^*].$$

Demonstração. Pela própria definição da norma de $W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que $\|u\|_p \leq C\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ e pelo teorema anterior vale também

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

A propriedade de interpolação dos espaços L^p nos garante que para quaisquer $p < q < p^*$

$$L^p(\Omega) \cap L^{p^*}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

e

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^\lambda \|u\|_{p^*}^{1-\lambda},$$

onde λ é dado por $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{p^*}$. Por essa propriedade temos que

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^\lambda \|u\|_{p^*}^{1-\lambda} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^\lambda \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{1-\lambda}.$$

Logo,

$$\|u\|_q \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall p \leq q \leq p^*,$$

tomando $C \geq 1$.

□

Passemos agora ao caso mais geral de imersão de Sobolev de $W_0^{k,p}(\Omega)$ e $kp < n$, descrito no seguinte teorema.

Teorema 1.17. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Se $p \geq 1$, $k < \frac{n}{p}$ e $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$, então existe $C = C(n, k, p) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

onde $p^* = \frac{np}{n-kp}$.

Demonstração. Para obtermos este resultado faremos iteração do caso $W_0^{1,p}(\Omega)$. Definamos para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{p_j^*} = \frac{1}{p} - \frac{j}{n},$$

ou seja

$$p_j^* = \frac{np}{n-jp}.$$

Da maneira como definimos p_j^* , temos que $(p_j^*)^* = p_{j+1}^*$. De fato,

$$(p_j^*)^* = \frac{np_j^*}{n - p_j^*} = \frac{n \frac{np}{n-jp}}{n - \frac{np}{n-jp}} = \frac{np}{n - (j+1)p} = p_{j+1}^*.$$

Agora seja $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$. Então $D^\alpha u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq k-1$. Fazendo uso da desigualdade já provada para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\|D^\alpha u\|_{p_1^*} \leq C\|D^\alpha u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Logo, temos a imersão

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k-1,p_1^*}(\Omega).$$

Usando o mesmo argumento, segue-se que

$$W_0^{k-1,p_1^*}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k-2,(p_1^*)^*}(\Omega) = W_0^{k-2,p_2^*}(\Omega).$$

Procedendo desta maneira k vezes, temos que

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p_{k-1}^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{(p_{k-1}^*)^*}(\Omega) = L^{p_k^*}(\Omega) = L^{p^*}(\Omega).$$

□

Corolário 1.18. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Se $p \geq 1$, $k < \frac{n}{p}$ e $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$, então existe $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_q \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}, \quad \forall p \leq q \leq p^*.$$

Demonstração. A desigualdade é sempre verdadeira para $q = p$ pela própria definição e o caso $q = p^*$ é também verdadeira pelo teorema anterior. O caso $p < q < p^*$ é idêntica ao caso provado para $W_0^{1,p}(\Omega)$ utilizando a propriedade de interpolação dos espaços L^p . $\square$

Corolário 1.19. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se $p \geq 1$, $k < \frac{n}{p}$ e $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$, então existe $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_q \leq \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

para todo $1 \leq q \leq p^*$.

Demonstração. Basta observar que sendo Ω limitado temos que $L^{p^*}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq p^*$. $\square$

Em geral $W_0^{k,p}(\Omega)$ não pode ser simplesmente substituído por $W^{k,p}(\Omega)$. Mas para uma determinada classe de abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ as imersões continuam sendo válidas, enunciadas no seguinte teorema.

Teorema 1.20. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto que satisfaz a condição do cone interior. Se $p \geq 1$ e $k < \frac{n}{p}$, então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para todo $p \leq q \leq p^*$.

Demonstração. Ver [1]. $\square$

Como consequência imediata deste último teorema podemos afirmar que se além de satisfazer a condição do cone interior, Ω for também limitado, então

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para todo $1 \leq q \leq p^*$, já que neste caso temos a imersão contínua $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para $q \leq p$.

Agora, passaremos a imersões de Sobolev onde estaremos com o caso $k > \frac{n}{p}$.

Teorema 1.21. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se $p > n$ então existe uma constante $C = C(n, p)$ tal que para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos $u \in C^0(\overline{\Omega})$ e vale*

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C |\Omega|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \|Du\|_p.$$

Demonstração. Para simplificar consideremos $|\Omega| = 1$ e definamos

$$v = \frac{|u|}{\|Du\|_p}.$$

Assim, nosso problema se reduz a mostrar que existe uma constante $C = C(n, p)$ tal que $\sup_{\Omega} |v| \leq C$.

Usaremos o fato de que $\|v\|_{\infty} = \lim_{q \rightarrow \infty} \|v\|_q$.

Seja $\gamma > 1$. Usando imersão de Sobolev já provada e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \|v^{\gamma}\|_{\gamma \frac{n}{n-1}} &\leq \|D(v^{\gamma})\|_1 \\ &= \gamma \|v^{\gamma-1} Dv\|_1 \\ &\leq \|v^{\gamma-1}\|_{\frac{p}{p-1}} \|Dv\|_p \\ &= \gamma \|v^{\gamma-1}\|_{\frac{p}{p-1}}. \end{aligned}$$

Novamente pela desigualdade de Hölder e por $|\Omega| = 1$, segue que

$$\|v\|_{\gamma \frac{n}{n-1}} \leq \gamma^{1/\gamma} \|v\|_{(\gamma-1) \frac{p}{p-1}}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \leq \gamma^{1/\gamma} \|v\|_{\gamma \frac{p}{p-1}}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Seja

$$\delta = \frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{p}{p-1}}.$$

Notemos que $\delta > 1$, pois $p > n$. Substituindo γ por δ^j para $j = 1, 2, \dots$, a desigualdade acima assume a forma

$$\|v\|_{\delta^j \frac{n}{n-1}} \leq \delta^{\frac{j}{\delta^j}} \|v\|_{(\delta^j-1) \frac{p}{p-1}}^{1 - \frac{1}{\delta^j}}.$$

Iterando, vem

$$\begin{aligned} \|v\|_{\delta^k} &\leq \|v\|_{\delta^k \frac{n}{n-1}} \\ &\leq \delta^{\sum \frac{j}{\delta^j}} \|v\|_{\frac{n}{n-1}}^{\prod (1 - \frac{1}{\delta^j})} \\ &\leq \delta^{\sum \frac{j}{\delta^j}} \|Dv\|_1^{\prod (1 - \frac{1}{\delta^j})} \\ &\leq \delta^{\sum \frac{j}{\delta^j}} \left(|\Omega|^{\frac{p-1}{p}} \|Dv\|_p \right)^{\prod (1 - \frac{1}{\delta^j})} \\ &= \delta^{\sum \frac{j}{\delta^j}} \end{aligned}$$

Agora fazendo $k \rightarrow \infty$, temos que $\|v\|_\infty \leq C$, como queríamos.

Para generalizar tirando a restrição $|\Omega| = 1$, consideramos a transformação $y = |\Omega|^{1/n}x$. Assim, teremos

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C|\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \|Du\|_p.$$

Agora, mostremos que $u \in C(\overline{\Omega})$. Seja $(u_m) \subset C(\overline{\Omega})$ sequência de Cauchy em $W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_m \rightarrow u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_m - u_k\|_p + \|Du_m - Du_k\|_p = \|u_m - u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \varepsilon,$$

para todo $m, k \geq n_0$. Pelo resultado que acabamos de mostrar vale

$$\sup_{\Omega} |u_m - u_k| \leq C(n, p) |\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \|Du_m - Du_k\|_p,$$

para todo $m, k > 0$, concluímos que

$$\sup_{\Omega} |u_m - u_k| \leq C\varepsilon, \quad \forall m, k \geq n_0.$$

Logo, (u_m) é uma sequência de Cauchy em $C(\overline{\Omega})$. E, portanto, a função limite $u \in C(\overline{\Omega})$. $\square$

Teorema 1.22. *Seja $n < p \leq \infty$. Então existe uma constante $C = C(n, p)$ tal que*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, onde $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$.

Demonstração. Primeiramente, escolhemos uma bola $B(x, r)$ em $\mathbb{R}^n$ e vamos mostrar que existe uma constante C que depende apenas de n tal que

$$\oint_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| dy \leq C \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|y - x|^{n-1}} dy. \quad (1.4)$$

Para provar esta desigualdade, fixemos um ponto $w \in \partial B(0, 1)$. Então, para $0 < s < r$, temos

$$\begin{aligned} |u(x + sw) - u(x)| &= \left| \int_0^s \frac{d}{dt} u(x + tw) dt \right| \\ &= \left| \int_0^s Du(x + tw) \cdot w dt \right| \\ &\leq \int_0^s |Du(x + tw)| dt. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0,1)} |u(x + sw) - u(x)| dS &\leq \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} |Du(x + tw)| dS dt \\ &= \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} |Du(x + tw)| \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}} dS dt. \end{aligned}$$

Seja $y = x + tw$, de forma que $t = |x - y|$. Assim, passando para coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0,1)} |u(x + sw) - u(x)| dS &\leq \int_{B(x,s)} \frac{|Du(y)|}{|x - y|^{n-1}} dy \\ &\leq \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|x - y|^{n-1}} dy. \end{aligned}$$

Multiplicando por s^{n-1} e integrando de 0 a r em relação a s , temos

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| dy \leq \frac{r^n}{n} \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|x - y|^{n-1}} dy,$$

e a desigualdade está provada.

Agora fixemos $x \in \mathbb{R}^n$ e apliquemos a desigualdade (1.4) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_{B(x,1)} |u(x) - u(y)| dy + \int_{B(x,1)} |u(y)| dy \\ &\leq C \int_{B(x,1)} \frac{|Du(y)|}{|x - y|^{n-1}} dy + C \|u\|_{p; B(x,1)} \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,1)} \frac{dy}{|x - y|^{(n-1) \frac{p}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} + C \|u\|_{p; \mathbb{R}^n} \\ &\leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Nesta última estimativa, temos que $\int_{B(x,1)} \frac{dy}{|x - y|^{(n-1) \frac{p}{p-1}}} < \infty$ pois, como $p > n$, decorre que $(n-1) \frac{p}{p-1} < n$. Como x é arbitrário, a desigualdade (1.5) implica que

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |u| \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.6}$$

Agora, escolhendo dois pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e escrevendo $r := |x - y|$ e $W := B(x, r) \cap B(y, r)$, temos

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_W |u(x) - u(z)| dz + \int_W |u(y) - u(z)| dz. \tag{1.7}$$

Mas, usando a desigualdade (1.4), temos

$$\begin{aligned}
 \oint_W |u(x) - u(z)| dz &\leq C \oint_{B(x,r)} |u(x) - u(z)| dz \\
 &\leq C \left(\int_{B(x,r)} |Du|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,r)} \frac{dz}{|x - z|^{\frac{p}{p-1}(n-1)}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
 &\leq C \left(r^{n-(n-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \|Du\|_{p;\mathbb{R}^n} \\
 &= Cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{p;\mathbb{R}^n}.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Analogamente,

$$\oint_W |u(y) - u(z)| dz \leq Cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{p;\mathbb{R}^n}.$$

Assim, substituindo esta estimativa e (1.8) em (1.7), obtemos

$$|u(x) - u(y)| \leq Cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{p;\mathbb{R}^n} = C|x - y|^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{p;\mathbb{R}^n}.$$

Portanto,

$$\sup_{x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{1-\frac{n}{p}}} \right\} \leq C \|Du\|_{p;\mathbb{R}^n}.$$

Desta desigualdade e de (1.4) temos a desigualdade desejada. $\square$

Mais geralmente, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.23. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 . Se $p \geq 1$ e $kp > n$, então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\beta}(\overline{\Omega})$$

para todo $0 \leq m < k - \frac{n}{p}$, onde

$$0 < \beta < \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}, \text{ se } \frac{n}{p} \text{ não é um inteiro,}$$

e

$$0 < \beta < 1 \text{ se } \frac{n}{p} \text{ é um inteiro.}$$

Além disso, temos a seguinte estimativa

$$\|u\|_{C^{k-\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1, \beta}(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

onde C depende somente de k, p, n, β e Ω .

Demonstração. Ver [4]. □

Enunciaremos agora um caso em que a dimensão do espaço n coincide com o produto kp , para o caso particular $p = 1$.

Teorema 1.24. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto satisfazendo a propriedade do cone interior. Existe uma constante $C > 0$ dependendo somente de n tal que para toda $u \in W^{n,1}(\Omega)$ temos*

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq C \|u\|_{W^{n,1}(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [1]. □

1.1.5 Imersões de Sobolev (Imersão Compacta)

Assim como na seção anterior serão apresentadas noções sobre imersões, porém nesta trataremos de imersões compactas.

Definição 1.25. *Uma imersão contínua de um espaço vetorial normado E em um espaço vetorial normado F diz-se compacta quando toda sequência limitada em $(E, \|\cdot\|_E)$ possui uma subsequência convergente em $(F, \|\cdot\|_F)$. Denotaremos tal imersão por*

$$E \rightharpoonup F.$$

Teorema 1.26. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se $1 \leq p < n$, então*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \rightharpoonup L^q(\Omega),$$

para todo $1 \leq q < p^*$.

Demonstração. Façamos primeiramente o caso $q = 1$. Seja (u_m) uma sequência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Para cada $\varepsilon > 0$ considere a sequência (u_m^ε) , sendo u_m^ε o regularizador de u_m . Temos que para cada $\varepsilon > 0$, (u_m^ε) é uniformemente limitada e equicontínua. De fato,

$$\begin{aligned} |u_m^\varepsilon(x)| &= \left| \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u_m(y) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^n} \left(\max_{B_1(0)} \varphi \right) \|u_m\|_{1,\Omega} \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^n} \|u_m\|_{p,\Omega}, \end{aligned}$$

para alguma constante C (dependendo de φ e Ω). Notemos que utilizamos a imersão contínua de $L^p(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$, o que é válido pois Ω é limitado. De maneira análoga,

$$\begin{aligned} |Du_m^\varepsilon(x)| &= \left| \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_\varepsilon(x)} D\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \left(\max_{B_1(0)} |D\varphi| \right) \|u_m\|_{p,\Omega}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema do Valor Médio, temos que (u_m^ε) também é equicontínua. Portanto, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli (Teorema 1.36) temos que (u_m^ε) possui uma subsequência de Cauchy em $C^0(\overline{\Omega})$, e consequentemente em $L^1(\Omega)$.

Já sabemos que $u_m^\varepsilon \rightarrow u_m$ em $L^1(\Omega)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Mais ainda, esta convergência é uniforme em relação a m . De fato,

$$\begin{aligned} |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)| &= \left| \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) [u_m(y) - u_m(x)] dy \right| \\ &\leq \int_{B_1(0)} \varphi(z) |u_m(x - \varepsilon z) - u_m(x)| dz \\ &= \int_{B_1(0)} \varphi(z) \left| \int_0^1 \frac{du_m}{dt}(x - \varepsilon z t) dt \right| dz \\ &\leq \int_{B_1(0)} \varphi(z) \int_0^1 \left| \frac{du_m}{dt}(x - \varepsilon z t) \right| dt dz \\ &= \varepsilon \int_{B_1(0)} \varphi(z) \int_0^1 |Du_m(x - \varepsilon z t) \cdot z| dt dz \\ &\leq \varepsilon \int_{B_1(0)} \varphi(z) \int_0^1 |Du_m(x - \varepsilon z t)| |z| dt dz, \end{aligned}$$

logo, integrando sobre Ω , temos

$$\begin{aligned} \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{1,\Omega} &= \int_{\Omega} |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)| dx \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 \int_{B_1(0)} \varphi(z) \int_{\Omega} |Du_m(x - t\varepsilon z)| dx dz dt \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 \int_{B_1(0)} \varphi(z) \int_{\Omega} |Du_m(y)| dy dz dt \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} |Du_m(y)| dy \\ &\leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

Desta forma, temos que para cada $\delta > 0$, existe $\varepsilon_\delta > 0$ tal que

$$\|u_m^{\varepsilon_\delta} - u_m\|_{1,\Omega} < \frac{\delta}{2}$$

para todo m . Para este ε_δ existe uma subsequência $(u_{m_j}^{\varepsilon_\delta})$ de Cauchy em $L^1(\Omega)$. Pela desigualdade triangular

$$\|u_{m_k} - u_{m_l}\|_{1,\Omega} \leq \|u_{m_k}^{\varepsilon_\delta} - u_{m_k}\|_{1,\Omega} + \|u_{m_k}^{\varepsilon_\delta} - u_{m_l}^{\varepsilon_\delta}\|_{1,\Omega} + \|u_{m_l}^{\varepsilon_\delta} - u_{m_l}\|_{1,\Omega} \leq \delta + \|u_{m_k}^{\varepsilon_\delta} - u_{m_l}^{\varepsilon_\delta}\|_{1,\Omega}.$$

Daí, $\limsup_{k,l \rightarrow \infty} \|u_{m_k} - u_{m_l}\|_{1,\Omega} \leq \delta$. Fazendo $\delta = 1, 2, \dots$ e usando o argumento da diagonal, construímos uma subsequência de Cauchy de (u_m) em $L^1(\Omega)$. Com isso, concluímos o caso $q = 1$.

O caso geral é consequência de interpolação dos espaços L^p , escrita da seguinte maneira

$$\|u\|_q \leq \|u\|_1^\lambda \|u\|_{p^*}^{1-\lambda},$$

onde λ é tal que $\frac{1}{q} = \lambda + \frac{1-\lambda}{p^*}$. Logo, pela imersão de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em L^{p^*} , temos que

$$\|u\|_q \leq \|u\|_1^\lambda \|u\|_{W^{1,p}}^{1-\lambda}.$$

Assim, se (u_m) é uma sequência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ que possui uma subsequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$, por esta desigualdade possui uma subsequência de Cauchy em $L^q(\Omega)$ $\square$

1.2 Integral de Bochner

Nesta seção daremos uma noção de integral de uma aplicação

$$f : [0, T] \rightarrow X,$$

onde $T > 0$ e X é um espaço de Banach munido da norma $\|\cdot\|_X$. As referências utilizadas nesta seção foram [4] e [17].

Definição 1.27. *Uma função $s : [0, T] \rightarrow X$ é dita simples quando existem finitos subconjuntos mensuráveis a Lebesgue $E_1, \dots, E_n \subset [0, T]$ e vetores $u_1, \dots, u_n \in X$ tais que*

$$s(t) = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i}(t) u_i,$$

para todo $t \in [0, T]$.

Definição 1.28. Diremos que $f : [0, T] \rightarrow X$ é fortemente mensurável se existe uma sequência de funções simples $s_k : [0, T] \rightarrow X$ tal que

$$s_k(t) \rightarrow f(t)$$

em quase todo ponto $0 \leq t \leq T$.

Definição 1.29. Diremos que uma função $f : [0, T] \rightarrow X$ é fracamente mensurável se para cada $u' \in X'$, a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : [0, T] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \langle u', f(t) \rangle \end{aligned}$$

é Lebesgue mensurável.

Teorema 1.30. Uma aplicação $f : [0, T] \rightarrow X$ é fortemente mensurável se, e somente se, f é fracamente mensurável e existe $N \subset [0, T]$ mensurável, com $|N| = 0$ tal que $f([0, T] \setminus N)$ é separável.

Demonstração. Ver [17]. □

Definição 1.31. (i) Se $s(t) = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i} u_i$ é simples, definimos sua integral como sendo

$$\int_0^T s(t) dt := \sum_{i=1}^m |E_i| u_i.$$

(ii) Diremos que $f : [0, T] \rightarrow X$ é integrável se existe uma sequência de funções simples $(s_k)_{k=1}^\infty$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \|s_k(t) - f(t)\|_X dt = 0.$$

(iii) Se f é integrável, definimos

$$\int_0^T f(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T s_k(t) dt.$$

Observemos que tal limite descrito neste último item da definição anterior existe uma vez que a sequência $\left(\int_0^T s_k(t) dt \right)_{k \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em X já que f é integrável, e sendo X um espaço de Banach, segue a existência de tal limite.

Teorema 1.32. (Bochner) *Uma função fortemente mensurável $f : [0, T] \rightarrow X$ é integrável se, e somente se, a aplicação*

$$\begin{aligned}\varphi : [0, T] &\rightarrow X \\ t &\mapsto \|f(t)\|_X\end{aligned}$$

é integrável. Neste caso, temos

$$\left\| \int_0^T f(t) dt \right\| \leq \int_0^T \|f(t)\|_X dt,$$

e

$$\left\langle u', \int_0^T f(t) dt \right\rangle = \int_0^T \langle u', f(t) \rangle dt,$$

para todo $u' \in X'$.

Demonstração. Ver [17]. □

1.3 Quatro Resultados Importantes

O objetivo desta seção é estabelecer quatro resultados importantes no desenvolvimento deste trabalho que são o Lema de Gronwall, o Lema de Aubin-Lions(ver [15]), o Teorema de Arzelá-Ascoli e um Teorema de Existência e Unicidade de Solução, para equações lineares parabólicas com condições inicial e de fronteira na classe das funções Hölder contínuas.

Lema 1.33. Lema de Gronwall. *Sejam u e v funções contínuas não-negativas no intervalo $[a, b]$ satisfazendo a desigualdade*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds, \quad \forall t \in [a, b],$$

para algum $\alpha \geq 0$. Então,

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}.$$

Em particular, se $\alpha = 0$ então $u \equiv 0$.

Demonstração. Sejam $\alpha > 0$ e $w(t) = \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds$. Temos que $w(a) = \alpha$ e $w(t) \geq \alpha > 0$, $\forall t \in [a, b]$. Além disso, como $u(t) \leq w(t)$ e $v \geq 0$, vem que

$$w'(t) = v(t)u(t) \leq v(t)w(t)$$

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \leq v(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

Integrando entre a e t , temos

$$\begin{aligned} \int_a^t \frac{w'(s)}{w(s)} ds &\leq \int_a^t v(s) ds \\ \ln w(t) - \ln w(a) &\leq \int_a^t v(s) ds \\ \ln \frac{w(t)}{\alpha} &\leq \int_a^t v(s) ds \\ \frac{w(t)}{\alpha} &\leq e^{\int_a^t v(s) ds}. \end{aligned}$$

Assim,

$$u(t) \leq w(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s) ds}.$$

Se $\alpha = 0$, o caso anterior implica que para todo $\alpha' > 0$,

$$u(t) \leq \alpha' e^{\int_a^t v(s) ds}, \quad \forall t \geq a.$$

Logo, $u(t) \equiv 0$. □

Este lema, no caso $\alpha > 0$, será utilizado em várias estimativas para a obtenção da solução do sistema de equações em questão (Capítulo 2). Já o caso $\alpha = 0$ terá importância no estabelecimento da unicidade dessa solução.

A seguir, enunciamos e demonstramos um resultado retirado de [13].

Lema 1.34. Lema de Aubin-Lions. *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach, $B_0 \subset B \subset B_1$, B_0 reflexivo, com $B_0 \rightarrow B$ compacta e $B \hookrightarrow B_1$ contínua. Então, para todo $\delta > 0$, existe $C_\delta > 0$ tal que*

$$\|v\|_B \leq \delta \|v\|_{B_0} + C_\delta \|v\|_{B_1},$$

para qualquer $v \in B_0$.

Demonstração. Suponhamos que existam $\delta > 0$ e uma sequência $(v_n)_{n=1}^\infty \subset B_0$, tal que $\|v_n\|_{B_0} = 1$ e

$$\|v_n\|_B \geq \delta \|v_n\|_{B_0} + n \|v_n\|_{B_1}, \quad n \geq 1.$$

Como B_0 é compactamente imerso em B , em particular essa imersão é contínua, temos que $(v_n)_{n=1}^\infty$ é limitada em B . Logo, pela desigualdade acima temos que $v_n \rightarrow 0$ em B_1 . Mais ainda, $(v_n)_{n=1}^\infty$ é limitada em B_0 que é reflexivo, ou seja possui uma subsequência convergindo fracamente $v_{n_k} \xrightarrow{w} v$ em B_0 . Novamente por B_0 ser imerso compactamente em B , temos que v_{n_k} converge a v fortemente em B . Logo, temos que $v = 0$. Logo, $v_{n_k} \rightarrow 0$ em B_0 . Isto é um absurdo, visto que $\|v_{n_k}\|_{B_0} = 1$. Portanto,

$$\|v\|_B \leq \delta \|v\|_{B_0} + C_\delta \|v\|_{B_1}.$$

□

Outro resultado importante é o Teorema de Arzelà-Ascoli, mas antes daremos a seguinte definição:

Definição 1.35. *Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, diremos que a família $\mathcal{F}$ é **equicontínua** no ponto x_0 , quando dado $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $x \in X$, $|x - x_0| < \delta$, temos $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ qualquer que seja $f \in \mathcal{F}$. A família é dita equicontínua quando é equicontínua em todos os pontos de X .*

Teorema 1.36. *Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ e seja $\mathcal{F}$ uma família de funções que são contínuas em K e assumem valores em $\mathbb{R}^m$. Então são equivalentes:*

- (i) *A família $\mathcal{F}$ é equicontínua e limitada em K*
- (ii) *Toda sequência em $\mathcal{F}$ possui uma subsequência uniformemente convergente em K .*

Demonstração. Ver [3], p.191.

□

No decorrer da demonstração da existência de solução suave das equações de Navier-Stokes, precisaremos recorrer ao teorema apresentado abaixo, retirado de [9].

Consideremos o operador linear parabólico com coeficientes reais

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,t)u,$$

onde $(x, t) \in \Omega \times (0, T) = Q_T$. Sejam $S_T = S \times (0, T)$, onde S é a fronteira de Ω , e o seguinte problema de valor inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x, t) = f(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad x \in \Omega, \\ \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) + b(x, t)u(x, t) = \phi(x, t), \quad x \in S_T. \end{cases} \quad (1.9)$$

Teorema 1.37. *Seja $\beta \in (0, 1)$. Suponhamos que os coeficientes do operador $\mathcal{L}$ estejam na classe $C^{\beta, \beta/2}(\overline{Q_T})$ e $b_i, b \in C^{1+\beta, 1+\beta/2}(\overline{S_T})$. Então para quaisquer $f \in C^{\beta, \beta/2}(\overline{Q_T})$, $\varphi \in C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$ e $\phi \in C^{1+\beta, (1+\beta)/2}(S_T)$, o problema (1.9) possui uma única solução $u \in C^{2+\beta, 1+\beta/2}(\overline{Q_T})$ e existe uma constante C , independente de u, f, φ e ϕ , tal que*

$$\|u\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}(Q_T)} \leq C \left(\|f\|_{C^{\beta, \beta/2}(Q_T)} + \|\varphi\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}(\Omega)} + \|\phi\|_{C^{1+\beta, (1+\beta)/2}(S_T)} \right).$$

Demonstração. Ver [9]. □

Observação: No Capítulo 2 usaremos que a constante C no Teorema 1.37 depende dos coeficientes de $\mathcal{L}$, de b_i, b e de T , de uma forma não-decrescente em relação às normas dos coeficientes de $\mathcal{L}$, de b_i e b , nos respectivos espaços de Hölder especificados no enunciado, bem como em relação a T . Este fato não está explicitamente afirmado em [9], mas pode ser constatado analisando-se a demonstração desse teorema no mesmo.

CAPÍTULO 2

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO

Neste capítulo estabeleceremos a existência de solução fraca para o sistema de Navier-Stokes unidimensional para um fluido isentropico compressível, no sistema de coordenadas lagrangianas, provadas em [7]. Faremos primeiramente um breve comentário sobre a dedução dessas equações. Posteriormente, desenvolvemos completamente e com bastante detalhes a existência local no tempo de solução suave para estas equações quando temos dados iniciais suaves. Em [7] consta apenas um breve resumo sobre esta parte. A existência global no tempo desta solução será assumida. A partir daí, a existência de solução fraca global será garantida através de aproximações de soluções suaves, utilizando estimativas para essas aproximações. Garantida a existência global de solução fraca, mostraremos que tal solução construída, juntamente com $u_0 \in H^1([0, 1])$, é única.

No capítulo anterior denotamos $Q_T = \Omega \times (0, T)$, mas para simplificar a notação estaremos considerando neste capítulo $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$ e denotaremos $H^m \equiv W^{m,2}$. Para o bom entendimento e desenvolvimento das demonstrações de [7], consultamos outras referências, especialmente [2, 5, 8, 12, 16].

2.1 Sobre a Dedução das Equações

Nesta seção faremos uma breve dedução das equações

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x = (\mu(\rho)u_x)_x, \end{cases} \quad (2.1)$$

modelando um fluido isentrópico em uma dimensão espacial, onde $\rho, u, P(\rho)$ e $\mu(\rho)$ são, respectivamente a densidade, a velocidade, a pressão e o coeficiente de viscosidade do fluido.

Começamos fazendo um resumo introdutório das deduções das equações de Navier-Stokes na sua forma mais geral, tendo como referência principal o livro do E. Feireisl [5].

As equações de Navier-Stokes modelam o movimento de um fluido do ponto de vista macroscópico, como um meio contínuo, em termos das variáveis densidade, velocidade e temperatura do fluido. Estas equações traduzem os princípios físicos de conservação de massa, momento e energia. Denota-se por $\rho(x, t)$, $u(x, t)$ e $\theta(x, t)$, respectivamente, a densidade de massa, a velocidade e a temperatura no ponto x por onde passa o fluido no instante t . Matematicamente, assumindo que u, ρ e θ são funções suficientemente integráveis e diferenciáveis (de forma que todos os cálculos abaixo sejam válidos), as leis de conservação (ou de balanço) são expressas como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \, dx &= 0 && \text{(conservação de massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} (\rho u) \, dx &= \int_{\Omega_t} (\rho f + F_{int}) \, dx && \text{(conservação de momento)} \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} E \, dx &= \int_{\Omega_t} (\rho f \cdot u + Q_{int}) \, dx && \text{(conservação de energia)} \end{aligned}$$

onde Ω_t é a região ocupada pelas partículas do fluido no instante t que estavam no tempo $t = 0$ em um domínio Ω_0 , o qual pode ser tomado relativamente arbitrário (limitado e com uma fronteira suave é suficiente para os nossos propósitos aqui), f denota a densidade de forças externas ao fluido atuando na região Ω_t , os termos $\int_{\Omega_t} F_{int} \, dx$ e $\int_{\Omega_t} Q_{int} \, dx$ representam, respectivamente, forças internas (i.e. provenientes do próprio fluido) atuando na região Ω_t e perdas de energia em Ω_t devido a fatores internos do fluido, e E representa a energia total, sendo dada pela expressão $E = \rho(|u|^2/2 + e)$, com e sendo a energia interna específica ($\rho|u|^2/2$ é a energia cinética). A temperatura θ está relacionada com e pela *Segunda Lei da Termodinâmica*, como veremos abaixo. Aplicando o *Teorema do Transporte* (v. subseção 2.1.1) chegamos a

$$\int_{\Omega_t} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) \, dx = 0$$

$$\int_{\Omega_t} (\rho u^j)_t + \operatorname{div}(\rho u^j u) dx = \int_{\Omega_t} (\rho f^j + F_{int}^j) dx, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\int_{\Omega_t} (E_t + \operatorname{div}(Eu)) dx = \int_{\Omega_t} (\rho f \cdot u + Q_{int}) dx,$$

onde u^j , f^j , F_{int}^j , $j = 1, \dots, n$, denotam, respectivamente, as coordenadas dos vetores u , f e F_{int} . Como o domínio Ω_t é arbitrário, obtemos as equações que representam os três princípios de conservação na forma diferencial:

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ (\rho u^j)_t + \operatorname{div}(\rho u^j u) = \rho f^j + F_{int}^j, & j = 1, \dots, n \\ E_t + \operatorname{div}(Eu) = \rho f \cdot u + Q_{int}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Agora, a questão delicada e sofisticada é obter expressões tratáveis matematicamente, ou modelos particulares, para os termos F_{int} e Q_{int} . Em primeiro lugar, por considerações físicas é razoável assumir que o termo $\int_{\Omega_t} F_{int} dx$ pode ser escrito como

$$\int_{\Omega_t} F_{int} dx = \int_{\partial\Omega_t} t(x, t, n) dx$$

para algum vetor $t(x, t, n)$ (*princípio de "stress" de Euler-Cauchy* (cf. [5, p.4]) onde $n = n(x)$ é a normal a $\partial\Omega_t$ unitária exterior, no ponto x . Mais particularmente, assumimos que

$$t(x, t, n) = T(x, t)n$$

onde $T(x, t)$ é uma matriz $n \times n$ simétrica (*leis de Cauchy* [5, p.4]) a qual é denominada *tensor de stress*. Assim, usando o Teorema da Divergência, vem que

$$F_{int} = \operatorname{div} T,$$

onde o divergente de uma matriz é o vetor cujas coordenadas são os divergentes das linhas da matriz. Quanto ao termo $\int_{\Omega_t} Q_{int} dx$ representando as mudanças da energia em Ω_t , temos

$$\int_{\Omega_t} Q_{int} dx = \int_{\partial\Omega_t} (Tu - q) \cdot n dx,$$

onde q é o *fluxo de calor* ou *fluxo de energia* (cf. formula (1.11) em [5, p.5]). Logo, usando novamente o Teorema da Divergência, obtemos

$$Q_{int} = \operatorname{div}(Tu - q).$$

Portanto, nessas condições, as equações (2.2) acima ficam as seguintes:

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ (\rho u^j)_t + \operatorname{div}(\rho u^j u) = (\operatorname{div} T)^j + \rho f^j, \quad j = 1, \dots, n \\ E_t + \operatorname{div}(Eu) + \operatorname{div} q = \operatorname{div}(Tu) + \rho f \cdot u. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por u^j , somando em $j = 1, 2, \dots, n$, usando a expressão resultante, e também a primeira equação (conservação de massa) na equação da energia, obtemos

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ (\rho u^j)_t + \operatorname{div}(\rho u^j u) = (\operatorname{div} T)^j + \rho f^j, \quad j = 1, \dots, n \\ (\rho e)_t + \operatorname{div}(\rho e u) + \operatorname{div} q = T : \nabla u, \end{cases}$$

também denotada mais resumidamente, como

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ (\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \operatorname{div} T + \rho f \\ (\rho e)_t + \operatorname{div}(\rho e u) + \operatorname{div} q = T : \nabla u, \end{cases}$$

onde $u \otimes u$ é o produto tensorial ou a matriz dada por $(u \otimes u)_{ij} = u^i u^j$ e $T : \nabla u$ é o produto escalar $\sum_{i,j=1}^n T_{jk} u_{x_k}^j$.

Mais particularmente ainda, assumimos que o tensor stress T é da forma

$$T = S - pI$$

(*lei de Stokes*) onde I é a matriz identidade, $p = p(x, t)$ é uma função escalar chamada de *pressão* e S chama-se o *tensor de stress viscoso*. Neste caso, reescrevemos as equações acima como

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ (\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \operatorname{div} S + \rho f \\ (\rho e)_t + \operatorname{div}(\rho e u) + \operatorname{div} q + p \operatorname{div} u = S : \nabla u. \end{cases}$$

Em modelos ditos *viscosos lineares* ou *Newtonianos*, temos

$$S = 2\mu D(u) + \lambda(\operatorname{div} u)I,$$

onde $D(u)$ é a parte simétrica da matriz Jacobiana ∇u , i.e. $D(u) = (\nabla u + (\nabla u)^t)/2$ ($(\nabla u)^t$ é a transposta da matriz ∇u) e μ e λ são coeficientes de viscosidade: μ é o “*shear viscosity coefficient*”

e $\zeta := \lambda + (2/n)\mu$ é o “*bulk viscosity coefficient*”). Estes coeficientes podem depender de ρ e θ [5, p.7]. No que se segue nos restringimos a esse tipo de fluido e a uma dimensão espacial ($n = 1$). Neste caso, e com as restrições mencionadas até o momento (faremos mais restrições) as equações de Navier-Stokes são as seguintes:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = (\zeta u_x)_x + \rho f \\ (\rho e)_t + (\rho e u)_x + q_x + p u_x = \zeta u_x^2. \end{cases}$$

A *Segunda Lei da Termodinâmica* relaciona a entropia específica s do fluido com θ, e, p e ρ pela equação

$$\theta ds = de + p dv,$$

onde v é o volume específico ($v = 1/\rho$; $dv = -\frac{1}{\rho^2}d\rho$). Assumindo que $e = e(s, \rho)$ (equação de estado) daí vem que

$$\frac{\partial e}{\partial s} = \theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial e}{\partial \rho} = \rho^{-2} p.$$

Logo $e_t = e_s s_t + e_\rho \rho_t = \theta s_t + \rho^{-2} p \rho_t = \theta s_t - \rho^{-2} p (\rho u)_x$ e $e_x = e_s s_x + e_\rho \rho_x = \theta s_x + \rho^{-2} p \rho_x = \theta s_x - \rho^{-2} p (\rho u)_x$ (cf. [14, p.338]). Substituindo estas relações na equação de energia, usando mais uma vez a primeira equação (conservação de massa) obtemos as equações de Navier-Stokes em uma dimensão com a equação de entropia:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = (\zeta u_x)_x + \rho f \\ (\rho \theta)(s_t + u s_x) + q_x = \zeta u_x^2. \end{cases}$$

O fluido é dito *isentrópico* quando $s_t + u s_x = 0$ (a entropia é constante ao longo das trajetórias de partículas do fluido) [11, p.27]. Então, neste caso, a terceira equação reduz-se a $q_x = \zeta u_x^2$. Além disso, sabe-se da termodinâmica que, para gases, a viscosidade é proporcional à raiz quadrada da temperatura θ [5, p.8] e, para os gases isentrópicos ditos perfeitos, a temperatura é uma função dependente só da densidade e a pressão é uma função dependente também só da densidade e sendo dada por $p = a\rho^\gamma$, para certas constantes a e γ [5, p.14]. Assim, as equações (2.1) descrevem, em particular, um gás nessas circunstâncias.

2.1.1 O Teorema do Transporte

Nesta seção consideramos um fluido qualquer com trajetória de partículas bem definida e manteremos algumas notações da seção anterior. As funções aqui envolvidas serão suficientemente diferenciáveis para que os cálculos abaixo façam sentido.

Sejam uma função $f(x, t)$, $x \in \Omega_t$, e $x(t)$ a trajetória da partícula de uma partícula x do fluido. Calculando a derivada desta função em relação a t , temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(x(t), t) &= \nabla f(x(t), t) \cdot \frac{dx}{dt}(x(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x(t), t) \\ &= \left(u \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t} \right)(x(t), t). \end{aligned}$$

No caso unidimensional, ∇f se resume a $\frac{\partial f}{\partial x}$ e a velocidade é um escalar, logo, a fórmula anterior toma a forma:

$$\frac{d}{dt}f(x(t), t) = (uf_x + f_t)(x(t), t).$$

Definição 2.1. Definimos a derivada material da função f por

$$\frac{Df}{Dt} = u \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Pela definição dada acima temos que a derivada material de f é a derivada de f em relação ao tempo ao longo da trajetória de uma partícula. No caso unidimensional, temos

$$\frac{Df}{Dt} = uf_x + f_t.$$

Feitas estas considerações, enunciaremos com rigor, o Teorema do Transporte:

Teorema 2.2. Teorema do Transporte. Sejam $u = u(., t)$, $t \geq 0$, um campo de vetores, definido num aberto A do $\mathbb{R}^n$, de classe $C^1(A \times [0, \infty))$, e $X(x, \cdot)$ a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = u(X(t), t), & t > 0 \\ X(0) = x \end{cases}$$

para x qualquer em A . Então para toda $f \in C^1(A \times [0, \infty))$ e qualquer $\Omega \subset\subset A$, vale a fórmula

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \left[\frac{Df}{Dt}(x, t) + (\operatorname{div} u) f \right] dx,$$

onde $\Omega_t = X(\Omega, t)$.

O Teorema do transporte é demonstrado fazendo-se a mudança de variável $y = x(t)$ e usando-se a equação $J_t = (\text{div} u)J$, onde J é o determinante da matriz jacobiana dessa mudança de variável. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [10]. No caso de uma dimensão a demonstração pode ser feita rapidamente usando-se a fórmula

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = f(b(t), t)b'(t) - f(a(t), t)a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x, t) dx$$

De fato, em uma dimensão temos que Ω_t é um intervalo da forma $(a(t), b(t))$ em que $a(t) = X(a, t)$ e $b(t) = X(b, t)$, onde $a = a(0) < b = b(0)$, e aplicando essa fórmula, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx &= f(b(t), t)u(b(t), t) - f(a(t), t)u(a(t), t) + \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x, t) dx \\ &= \int_{a(t)}^{b(t)} (fu)_x dx + \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x, t) dx \\ &= \int_{a(t)}^{b(t)} ((fu)_x + f_t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} (f_t + uf_x + u_x f) dx \\ &= \int_{a(t)}^{b(t)} \left(\frac{Df}{Dt} + u_x f \right) dx. \end{aligned}$$

2.2 Apresentação do problema

Nesta seção faremos algumas considerações sobre o problema de Navier-Stokes em uma dimensão de um fluido isentrópico, com a viscosidade e a pressão dependentes da densidade e possuindo interface com o vácuo. Inicialmente, daremos uma motivação sobre a condição de fronteira do problema, bem como a mudança para coordenadas lagrangianas.

Na seção anterior fizemos um comentário sobre a dedução destas equações que são

$$\rho_\tau + (\rho u)_\xi = 0 \quad (2.3)$$

proveniente do princípio de conservação de massa, e

$$(\rho u)_\tau + (\rho u^2 + P(\rho))_\xi = (\mu(\rho)u_\xi)_\xi, \quad (2.4)$$

resultante do princípio de conservação do momento (segunda lei de Newton), onde ρ , u , $P(\rho)$ e $\mu(\rho)$ são, respectivamente a densidade, a velocidade, a pressão o coeficiente de viscosidade. $a(\tau)$, $b(\tau)$ são as condições de fronteira, ou seja, a interface do gás com o vácuo. Aqui, usamos as variáveis

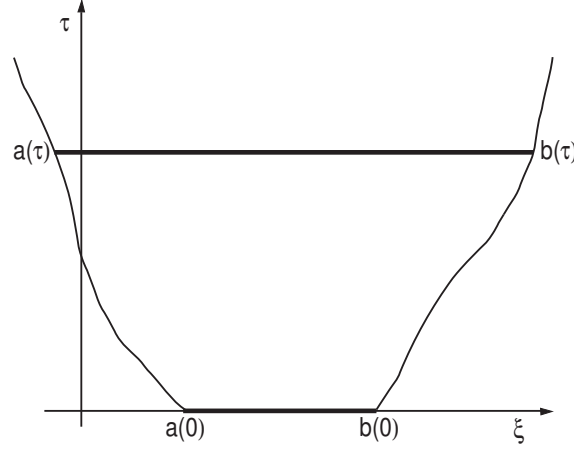


Figura 2.1: Fluido em uma dimensão com fronteira livre

τ e ξ para representar, respectivamente, o tempo e o espaço (unidimensional), pois trabalharemos em coordenadas lagrangianas, nas quais usaremos a notação convencional t, x .

Estamos interessados no fluido tendo uma interface com o vácuo. Mais precisamente, consideramos as equações (2.3) e (2.4) no domínio $\tau > 0$, $a(\tau) < \xi < b(\tau)$, onde as curvas $\xi = a(\tau)$, $\xi = b(\tau)$ representam a interface com o vácuo, no plano $\xi\tau$.

Notemos que iremos trabalhar com fronteira livre, ou seja, o gás não estará contido em um ambiente fechado, podendo expandir-se livremente.

Para motivar a condição de fronteira definida abaixo, suponhamos que seja dada uma solução (ρ, u) de (2.3) e (2.4) e que a a função definida por

$$\begin{cases} (\rho, u), & \text{se } a(\tau) \leq \xi \leq b(\tau) \\ (0, 0), & \text{se } \xi > b(\tau) \text{ ou } \xi < a(\tau) \end{cases}$$

(extensão por zero de (ρ, u) definida no domínio $\tau > 0$, $a(\tau) < \xi < b(\tau)$) seja uma solução fraca para as equações (2.3) e (2.4) em todo semi-plano $\tau > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$. Seja V uma vizinhança aberta no semi-plano $\tau > 0$ de um ponto $(a(\tau), \tau)$, $\tau > 0$. Consideremos os domínios $V^+ = \{(\xi, \tau) \in V; \xi > a(\tau)\}$ e $V^- = \{(\xi, \tau) \in V; \xi < a(\tau)\}$. Como (ρ, u) , agora estendida por zero, é uma solução fraca da equação (2.3) em todo semiplano $\tau > 0$, para toda $\varphi \in C_0^1(V)$ temos

$$\int_{V^+} (\varphi_\tau \rho + \varphi_\xi \rho u) d(\xi, \tau) + \int_{V^-} (\varphi_\tau \rho + \varphi_\xi \rho u) d(\xi, \tau) = 0.$$

Como $\rho = 0$ em V^- , ficamos com

$$\int_{V^+} (\varphi_\tau \rho + \varphi_\xi \rho u) d(\xi, \tau) = 0.$$

Suponhamos que $(\rho, u) \in C^1(\overline{V^+})$. Então, integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{V^+} (\varphi_\tau \rho + \varphi_\xi \rho u) d(\xi, \tau) = \int_{\partial V^+} \varphi(\rho u, \rho) \cdot n dS - \int_{V^+} \varphi(\rho_\tau + (\rho u)_\xi) d(\xi, \tau) \\ &= \int_0^\infty \varphi(\rho u, \rho) \cdot \frac{(-1, a'(\tau))}{\sqrt{1 + (a'(\tau))^2}} d\tau, \end{aligned}$$

onde $n = (-1, a'(\tau)) / \sqrt{1 + (a'(\tau))^2}$ é a normal unitária ao longo de $\partial V^+ \cap \{\xi = a(\tau)\}$ apontando para fora de V^+ . Logo, $-\rho(a(\tau), \tau)u(a(\tau), \tau) + \rho(a(\tau), \tau)a'(\tau) = 0$, ou seja,

$$\frac{d}{d\tau} a(\tau) = u(a(\tau), \tau),$$

assumindo que $\rho(a(\tau), \tau) \equiv \lim_{\xi \rightarrow a(\tau)^+} \rho(\xi, \tau)$ seja não-nula. Aqui também estamos fazendo a indentificação $u(a(\tau), \tau) \equiv \lim_{\xi \rightarrow a(\tau)^+} u(\xi, \tau)$. Da mesma maneira, temos que

$$\frac{d}{d\tau} b(\tau) = u(b(\tau), \tau).$$

Procedendo de forma análoga com a segunda equação, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{V^+} (\varphi_\tau \rho u + \varphi_\xi (\rho u^2 + P(\rho))) d(\xi, \tau) - \int_{V^+} \varphi_\xi (\mu(\rho) u_\xi) d(\xi, \tau) \\ &= \int_{V^+} \nabla_{(\xi, \tau)} \varphi \cdot (\rho u^2 + P(\rho) - \mu(\rho) u_\xi, \rho u) d(\xi, \tau) \\ &= \int_0^\infty \varphi(a(\tau), \tau) (\rho u^2 + P(\rho) - \mu(\rho) u_\xi, \rho u) \cdot \frac{(-1, a'(\tau))}{\sqrt{1 + (a'(\tau))^2}} d(\xi, \tau). \end{aligned}$$

Logo,

$$(-P(\rho) + \mu(\rho) u_\xi)(a(\tau), \tau) = 0.$$

De maneira análoga, obtemos que

$$(-P(\rho) + \mu(\rho) u_\xi)(b(\tau), \tau) = 0.$$

Em resumo, devemos ter a seguinte condição de fronteira

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} a(\tau) = u(a(\tau), \tau), & \frac{d}{d\tau} b(\tau) = u(b(\tau), \tau) \\ (-P(\rho) + \mu(\rho) u_\xi)(a(\tau), \tau) = 0 = (-P(\rho) + \mu(\rho) u_\xi)(b(\tau), \tau). \end{cases} \quad (2.5)$$

Para simplificar nosso problema, assumiremos que tanto a pressão quanto a viscosidade são diretamente proporcionais a uma potência da densidade. Mais precisamente, assumiremos que

$$\begin{cases} P(\rho) = A\rho^\gamma \\ \mu(\rho) = B\rho^\alpha, \end{cases}$$

onde $\gamma > 1$, $0 < \alpha < 1$, $A > 0$ e $B > 0$ são constantes.

Como o problema possui fronteira livre é conveniente aplicarmos uma mudança de coordenadas para que possamos trabalhar com um problema que possua o domínio fixo. Para isso faremos uso de coordenadas lagrangianas, descrita como se segue.

Sejam

$$\begin{cases} x = \int_{a(\tau)}^{\xi} \rho(y, \tau) dy \\ t = \tau. \end{cases}$$

Nesse novo sistema de coordenadas x representa a massa de fluido compreendido entre $a(\tau)$ e ξ .

A fronteira do problema considerado inicialmente, ou seja, as curvas $\xi = a(\tau)$ e $\xi = b(\tau)$, tornam-se

$$x = \int_{a(\tau)}^{a(\tau)} \rho(y, \tau) dy = 0 \quad \text{e} \quad x = \int_{a(\tau)}^{b(\tau)} \rho(y, \tau) dy = \int_{a(0)}^{b(0)} \rho(y, 0) dy \equiv M.$$

Esta última integral calculada tomando $\tau = 0$, indica a massa inicial total do fluido, que pelo princípio de conservação de massa é invariante no decorrer do tempo. Vamos considerar $M = 1$, sem perda de generalidade.

Façamos agora a mudança de coordenadas nas equações e vejamos como fica o nosso problema inicial nestas novas coordenadas. Para isso, assumiremos que (ρ, u) seja suficientemente diferenciável de forma que possamos usar a regra da cadeia. Então

$$\begin{aligned} \rho_\tau &= \rho_x \frac{\partial x}{\partial \tau} + \rho_t \frac{\partial t}{\partial \tau} \\ &= -\rho_x \rho u + \rho_t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\rho u)_\xi &= \rho_\xi u + \rho u_\xi = \left(\rho_x \frac{\partial x}{\partial \xi} + \rho_t \frac{\partial t}{\partial \xi} \right) u + \rho \left(u_x \frac{\partial x}{\partial \xi} + u_t \frac{\partial t}{\partial \xi} \right) \\ &= \rho_x \rho u + \rho^2 u_x. \end{aligned}$$

Assim, somando estas duas derivadas, a equação (2.3) se transforma em

$$\rho_t + \rho^2 u_x = 0. \quad (2.6)$$

Passemos à segunda equação.

$$\begin{aligned} (\rho u)_\tau &= \rho_\tau u + \rho u_\tau \\ &= \left(\rho_x \frac{\partial x}{\partial \tau} + \rho_t \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) u + \rho \left(u_x \frac{\partial x}{\partial \tau} + u_t \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) \\ &= -\rho_x \rho u^2 + \rho_t u - \rho^2 u_x u + u_t \rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\rho u^2)_\xi &= \rho_\xi u^2 + 2u \rho u_\xi \\ &= \left(\rho_x \frac{\partial x}{\partial \xi} + \rho_t \frac{\partial t}{\partial \xi} \right) u^2 + 2u \rho \left(u_x \frac{\partial x}{\partial \xi} + u_t \frac{\partial t}{\partial \xi} \right) \\ &= \rho \rho_x u^2 + 2u u_x \rho^2, \end{aligned}$$

$$(P(\rho))_\xi = (P(\rho))_x \frac{\partial x}{\partial \xi} = (P(\rho))_x \rho,$$

$$u_\xi = u_x \frac{\partial x}{\partial \xi} + u_t \frac{\partial t}{\partial \xi} = u_x \rho.$$

Assim, substituindo em (2.4), temos

$$(\rho_t + \rho^2 u_x)u + \rho u_t + (P(\rho))_x \rho = \rho(\mu(\rho)u_x \rho)_x,$$

que pela equação (2.6) reduz-se a

$$u_t + (P(\rho))_x = (\mu(\rho)u_x \rho)_x.$$

Substituindo a pressão $P(\rho) = A\rho^\gamma$ e viscosidade $\mu(\rho) = B\rho^\alpha$, a equação (2.4) se transforma em

$$u_t + A(\rho^\gamma)_x = B(\rho^{1+\alpha}u_x)_x. \quad (2.7)$$

Passemos à condição de fronteira $(-P(\rho) + \mu(\rho)u_\xi)(a(\tau), \tau) = 0$ que no novo sistema de coordenadas torna-se $(-A\rho^\gamma + B\rho^{1+\alpha}u_x)(0, t) = 0$. Da mesma forma temos que $(-P(\rho) + \mu(\rho)u_\xi)(b(\tau), \tau) = 0$ torna-se $(-A\rho^\gamma + B\rho^{1+\alpha}u_x)(1, t) = 0$, ou seja,

$$A(\rho^\gamma) = B(\rho^{1+\alpha}u_x), \text{ para } x = 0 \text{ ou } x = 1, \text{ e } t \geq 0. \quad (2.8)$$

Além disso, adicionamos uma condição inicial ao nosso problema

$$(\rho(x, 0), u(x, 0)) = (\rho_0(x), u_0(x)) \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.9)$$

onde ρ_0 e u_0 estão, respectivamente, nos espaços $W^{1,2n} \equiv W^{1,2n}((0, 1))$ e $L^{2n} \equiv L^{2n}((0, 1))$, sendo n um número natural, o qual será fixado, em toda dissertação, satisfazendo a condição $\frac{n(2n-1)}{2n^2+2n-1} > \alpha$.

Daqui em diante, trataremos só do problema (2.6)-(2.9), o que é equivalente a resolver as equações (2.3)-(2.4), com as condições de fronteira e inicial especificadas, no caso de termos uma solução diferenciável. Deixamos em aberto a discussão do caso de termos uma solução sem essa regularidade. Encerramos esta seção com a definição rigorosa de solução fraca do problema (2.6)-(2.9), sob as condições especificadas acima para ρ_0, u_0, n e demais parâmetros das equações.

Definição 2.3. *Sejam $\alpha > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Diremos que (ρ, u) é uma solução fraca de (2.6)-(2.9) se, para qualquer $T > 0$, tivermos*

$$\rho \in L^\infty([0, T], W^{1,2n}), \quad \rho_t \in L^2([0, T], L^2), \quad u \in L^\infty([0, T], L^{2n}) \cap L^2([0, T], H^1),$$

satisfazendo

$$\rho_t + \rho^2 u_x = 0, \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x),$$

para quase todo $x \in (0, 1)$ e quase todo $t > 0$ e

$$\int_0^T \int_0^1 (u \phi_t + (A \rho^\gamma - B \rho^{\alpha+1} u_x) \phi_x) dx dt + \int_0^1 u_0(x) \phi(x, 0) dx = 0,$$

para toda função $\phi \in C_0^\infty(Q)$, onde $Q = [0, 1] \times [0, T]$.

2.3 Solução Suave

Nesta seção estabeleceremos a existência de solução local no tempo (ρ, u) do problema (2.6)-(2.9) satisfazendo

$$\rho, \rho_t, \rho_x, \rho_{tx}, u, u_x, u_{xx}, u_t \in C^{\beta, \beta/2}(Q_T),$$

considerando os dados iniciais $\rho_0 \in C^{1+\beta}([0, 1])$ e $u_0 \in C^{2+\beta}([0, 1])$, para um $\beta \in (0, 1)$ arbitrário. A existência global de tal solução não será tratada, mas a prova de um caso particular pode ser encontrada em [8].

Teorema 2.4. *Seja $\beta \in (0, 1)$. Se $u_0 \in C^{2+\beta}([0, 1])$ e $\rho_0 \in C^{1+\beta}([0, 1])$, temos que o problema (2.6)-(2.9) possui uma única solução clássica (ρ, u) satisfazendo $\rho, \rho_x, \rho_t, \rho_{tx}, u, u_t, u_x, u_{xx} \in C^{\beta, \beta/2}(Q_T)$, para algum $T > 0$.*

Demonstração. A existência de solução local no tempo é obtida através de uma aplicação que provaremos ser uma contração. Para isso, dados $T, c > 0$, definimos o espaço

$$X_{T,c} = \{\varphi \in C^{\beta, \beta/2}(Q_T); \varphi_x \in C^{\beta, \beta/2}(Q_T) \text{ e } \varphi \geq c > 0\},$$

que é um espaço de Banach munido da norma

$$\|\varphi\|_{X_{T,c}} = \|\varphi\|_{C^{\beta, \beta/2}} + \|\varphi_x\|_{C^{\beta, \beta/2}},$$

e consideramos o problema de fronteira e valor inicial

$$\begin{cases} u_t + A(\varphi^\gamma)_x = B(\varphi^{1+\alpha}u_x)_x & 0 < x < 1 \quad 0 < t < T \\ u_x(i, t) = \frac{A}{B}\varphi^{\gamma-1-\alpha}(i, t) & 0 \leq t \leq T \quad i = 0, 1 \\ u(x, 0) = u_{0,\varphi}(x) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad (2.10)$$

onde φ é uma função em $X_{T,c}$ e $u_{0,\varphi}$ é definido por

$$u_{0,\varphi}(x) = u_0(x) + x\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left[\frac{A}{B}\varphi^{\gamma-1-\alpha}(0, 0) - u'_0(0)\right] + \frac{x^2}{2}\left[\frac{A}{B}\varphi^{\gamma-1-\alpha}(1, 0) - u'_0(1)\right].$$

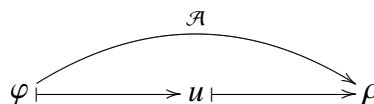
Notemos que $u_{0,\varphi}$ definido desta maneira satisfaz a condição de compatibilidade $u'_{0,\varphi}(i) = \frac{A}{B}\varphi^{\gamma-1-\alpha}(i, 0)$, para $i = 0, 1$. Além disso, se $u_0 \in C^{2+\beta}([0, 1])$, temos que $u_{0,\varphi}$ também pertence a esta classe. Pelo Teorema 1.37, temos que existe uma única solução $u \in C^{2+\beta, 1+\beta}(Q_T)$ de (2.10) satisfazendo a estimativa

$$\|u\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}(Q_T)} \leq C\left(\|\varphi_x\|_{C^{\beta, \beta/2}(Q_T)} + \|\varphi\|_{C^{\beta, \beta/2}(S_T)} + \|u_{0,\varphi}\|_{C^{2+\beta}([0, 1])}\right).$$

Encontrada $u \in C^{2+\beta, 1+\beta/2}(Q_T)$ definimos um operador $\mathcal{A}$ que associa cada $\varphi \in X_{T,c}$ tomada inicialmente à função $\rho = \mathcal{A}(\varphi)$ solução do problema

$$\begin{cases} \rho_t + \rho^2 u_x = 0 & 0 < x < 1 \quad 0 < t < T \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad (2.11)$$

onde u é a solução de (2.10), como ilustra o diagrama abaixo



Consideremos o subconjunto F de $X_{T,c}$ definido por

$$F = \{\varphi \in X_{T,c}; \|\varphi - \rho_0\|_{X_{T,c}} \leq R\},$$

onde R é qualquer número positivo fixado. Notemos que F é um subconjunto fechado de um espaço de Banach, logo F também é um espaço de Banach. Nosso intuito agora é mostrar que esta aplicação $\mathcal{A} : F \rightarrow F$ é uma contração para algum $T > 0$, garantindo-nos a existência de um ponto fixo que será nossa solução local de (2.6)-(2.9) com os dados iniciais suaves, isto é, $\rho_0 \in C^{1+\beta}([0, 1])$, $u_0 \in C^{2+\beta}([0, 1])$ e $\inf \rho_0 > 0$.

Antes de mais nada, mostremos que $\rho \in F$, para cada $\varphi \in F$. De fato, temos que a solução ρ de (2.11) é dada por

$$\rho^{-1}(x, t) = \rho_0^{-1}(x) - \int_0^t u_x(x, s) ds. \quad (2.12)$$

Assim, podemos tomar T de forma que

$$|\rho^{-1}| \geq |\rho_0^{-1}| - T\|u\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}} \geq \inf(\rho_0^{-1}) - TC_* \geq \frac{\inf(\rho_0^{-1})}{2}, \quad (2.13)$$

onde

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}} &\leq C \left(\|\varphi\|_{X_{T,c}}^\theta + \|u_0\|_{C^{2+\beta}} \right) \\ &\leq C \left((R + \|\rho_0\|_{X_{T,c}})^\theta + \|u_{0,\varphi}\|_{C^{2+\beta}} \right) =: C_*, \end{aligned}$$

uma vez que $\varphi \in F$ implica em

$$\|\varphi\|_{X_{T,c}} \leq \|\varphi - \rho_0\|_{X_{T,c}} + \|\rho_0\|_{C^{2+\beta}} \leq R + \|\rho_0\|_{C^{1+\beta}}.$$

Note que $\|u_{0,\varphi}\|_{C^{2+\beta}}$ pode ser estimada em função das normas de φ e u_0 nos seus respectivos espaços. Logo, a constante C_* depende somente de R, T, c, u_0, ρ_0 e é limitada para T limitado; cf. a Observação feita logo após o Teorema 1.37. De (2.13) temos que

$$\|\rho\|_{\infty; Q_T} \leq 2 \sup \rho_0.$$

Analogamente, podemos limitar $|\rho|$ inferiormente da seguinte forma:

$$\left| \frac{1}{\rho} \right| \leq \frac{1}{|\rho_0|} + T\|u\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}} \leq (\inf \rho_0)^{-1} + TC_* \leq C'_*,$$

onde C'_* é algum número positivo análogo a C_* . Logo, $|\rho| \geq (C'_*)^{-1} > 0$. Como ρ é contínua, não nula e $\inf \rho_0 > 0$, podemos concluir que $\rho(x, t) \geq C'$, para alguma constante $C' > 0$.

Mostremos agora que $\rho, \rho_x \in X_{T,c}$. Para simplificar as estimativas consideremos $v = 1/\rho$ e $v_0 = 1/\rho_0$. Desta forma, temos que $v(x, t) = v_0(x) - \int_0^t u_x(x, s)ds$. Como $\rho_0 \in C^\beta([0, 1])$ e $\inf_{[0,1]} \rho_0 > 0$, temos que $v_0 \in C^\beta([0, 1])$. Além disso, $u_x \in C^{\beta, \beta/2}(Q_T)$ e ρ é limitada inferiormente por uma constante positiva. Logo, podemos garantir que $\rho \in C^{\beta, \beta/2}(Q_T)$.

No caso de ρ_x , observemos que

$$v_x(x, t) = v'_0(x) - \int_0^t u_{xx}(x, s)ds.$$

Assim, como $\rho'_0(x) \in C^\beta([0, 1])$ e $\rho_0^2 v'_0 = -\rho'_0$, temos que $v'_0 \in C^\beta([0, 1])$. Além disso, $u_{xx} \in C^{\beta, \beta/2}(Q_T)$. Daí concluímos que $v_x \in C^{\beta, \beta/2}(Q_T)$. Notemos agora que, como $\rho_x = -\rho^2 v_x$, $\rho \in C^{\beta, \beta/2}(Q_T)$ e $0 < C^{-1} \leq \rho(x, t) \leq C$, podemos garantir que $\rho_x \in C^{\beta, \beta/2}(Q_T)$.

Portanto temos que $\rho = \mathcal{A}(\varphi) \in X_{T,c}$.

Mostremos agora a invariância de F pela aplicação $\mathcal{A}$, para T suficientemente pequeno. Para isso devemos mostrar que $\|\rho - \rho_0\|_{X_{T,c}} \leq R$ para um determinado $T > 0$. Notemos que

$$|\rho - \rho_0| = |\rho \rho_0 (\rho^{-1} - \rho_0^{-1})| \leq \|\rho\|_\infty \|\rho_0\|_\infty T C_* \leq 2\|\rho_0\|_\infty^2 T C_*,$$

ou seja,

$$\|\rho - \rho_0\|_\infty \leq KT,$$

para uma constante K análoga a C_* . Como $\rho, \rho_x \in C^{\beta, \beta/2}(Q_T)$, $\rho_0 \in C^{1+\beta}([0, 1])$ e $u, u_x, u_{xx} \in C^{\beta, \beta/2}(Q_T)$, podemos fazer também as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} |(\rho - \rho_0)(x_1, t) - (\rho - \rho_0)(x_2, t)| &= \left| \rho \rho_0(x_1, t) \int_0^t u_x(x_1, s)ds - \rho \rho_0(x_2, t) \int_0^t u_x(x_2, s)ds \right| \\ &\leq \left| \rho \rho_0(x_1, t) \int_0^t (u_x(x_1, s) - u_x(x_2, s))ds \right| \\ &\quad + \left| (\rho \rho_0(x_1, t) - \rho \rho_0(x_2, t)) \int_0^t u_x(x_2, s)ds \right| \\ &\leq KT|x_1 - x_2|^\beta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|(\rho - \rho_0)(x, t_1) - (\rho - \rho_0)(x, t_2)| &= \left| \rho \rho_0(x, t_1) \int_0^{t_1} u_x(x, s) ds - \rho \rho_0(x, t_2) \int_0^{t_2} u_x(x, s) ds \right| \\
&\leq \left| \rho \rho_0(x, t_1) \int_{t_1}^{t_2} (u_x(x, s) - u_x(x, s)) ds \right| \\
&\quad + \left| (\rho \rho_0(x, t_1) - \rho \rho_0(x, t_2)) \int_0^{t_2} u_x(x, s) ds \right| \\
&\leq KT |t_1 - t_2|^{\beta/2}.
\end{aligned}$$

Portanto temos que

$$\sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|(\rho - \rho_0)(x_1, t) - (\rho - \rho_0)(x_2, t)|}{|x_1 - x_2|^\beta} \leq KT$$

e

$$\sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|(\rho - \rho_0)(x, t_1) - (\rho - \rho_0)(x, t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\beta/2}} \leq KT.$$

A seguir estimamos ρ_x . Notemos que, como $(\rho - \rho_0)(x, t) = (\rho \rho_0)(x, t) \int_0^t u_x(x, s) ds$, temos que

$$(\rho - \rho_0)_x = \rho_x \rho_0 \int_0^t u_x ds + \rho \rho_{0x} \int_0^t u_x ds + \rho \rho_0 \int_0^t u_{xx} ds.$$

Podemos fazer as estimativas separadamente e teremos da mesma maneira feita anteriormente que

$$\sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|(\rho - \rho_0)_x(x_1, t) - (\rho - \rho_0)_x(x_2, t)|}{|x_1 - x_2|^\beta} \leq KT$$

e

$$\sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|(\rho - \rho_0)_x(x, t_1) - (\rho - \rho_0)_x(x, t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\beta/2}} \leq KT.$$

Das estimativas acima vemos que podemos tomar $T > 0$ de tal maneira que

$$\|\rho - \rho_0\|_{X_{T,c}} \leq KT \leq R,$$

já que a constante K é limitada para T limitado, e consequentemente, $\mathcal{A}(F) \subset F$.

Resta mostrar agora que a aplicação $\mathcal{A}$ é uma contração. Consideremos $\varphi_1, \varphi_2 \in F$ e sejam $\rho_1 = \mathcal{A}(\varphi_1)$ e $\rho_2 = \mathcal{A}(\varphi_2)$. Faremos a estimativa de $\|\rho_1 - \rho_2\|_{X_{T,c}}$, estimando separadamente a norma do supremo e a seminorma de Hölder. No que se segue, como já fizemos acima, K representará qualquer constante dependente das mesmas quantidades das quais depende C_* , isto é, dos dados ρ_0 e u_0 , de R, T e c , e limitada para T limitado.

Podemos estimar a norma do supremo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 |\rho_1 - \rho_2| &= |\rho_1| \cdot |\rho_2| \cdot |\rho_1^{-1} - \rho_2^{-1}| \\
 &\leq \|\rho_1\|_\infty \|\rho_2\|_\infty \left| \int_0^t (u_{1,x} - u_{2,x}) ds \right| \\
 &\leq \|\rho_1\|_\infty \|\rho_2\|_\infty T \|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}} \\
 &\leq KT \|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 |(\rho_1 - \rho_2)_x| &= |-\rho_1^2(\rho_1^{-1})_x + \rho_2^2(\rho_2^{-1})_x| \\
 &= \left| \rho_1^2 \int_0^t u_{1,xx}(x, s) ds - \rho_2^2 \int_0^t u_{2,xx}(x, s) ds \right| \\
 &\leq |\rho_1^2 - \rho_2^2| \left| \int_0^t u_{1,xx}(x, s) ds \right| + |\rho_2^2| \left| \int_0^t (u_{1,xx} - u_{2,xx}) ds \right| \\
 &\leq KT \|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}}.
 \end{aligned}$$

Passando à norma de Hölder e omitindo a variável t , temos:

$$\begin{aligned}
 |(\rho_1 - \rho_2)(x_1) - (\rho_1 - \rho_2)(x_2)| &\leq |\rho_1 \rho_2 (\rho_1^{-1} - \rho_2^{-1})(x_1) - \rho_1 \rho_2 (\rho_1^{-1} - \rho_2^{-1})(x_2)| \\
 &\leq \left| ((\rho_1 \rho_2)(x_1) - (\rho_1 \rho_2)(x_2)) \int_0^t (u_{1,x} - u_{2,x})(x_1, s) ds \right| \\
 &\quad + \left| (\rho_1 \rho_2)(x_2) \int_0^t ((u_{1,x} - u_{2,x})(x_1, s) - (u_{1,x} - u_{2,x})(x_2, s)) ds \right| \\
 &\leq K |x_1 - x_2|^\beta T \|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}}.
 \end{aligned}$$

De maneira análoga, omitindo a variável x , temos:

$$\begin{aligned}
 |(\rho_1 - \rho_2)(t_1) - (\rho_1 - \rho_2)(t_2)| &\leq |\rho_1 \rho_2 (\rho_1^{-1} - \rho_2^{-1})(t_1) - \rho_1 \rho_2 (\rho_1^{-1} - \rho_2^{-1})(t_2)| \\
 &\leq \left| ((\rho_1 \rho_2)(t_1) - (\rho_1 \rho_2)(t_2)) \int_0^{t_1} (u_{1,x} - u_{2,x})(s) ds \right| \\
 &\quad + \left| (\rho_1 \rho_2)(t_2) \int_{t_1}^{t_2} (u_{1,x} - u_{2,x})(s) ds \right| \\
 &\leq K |t_1 - t_2|^{\beta/2} T \|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}}.
 \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|(\rho_1 - \rho_2)(x_1, t) - (\rho_1 - \rho_2)(x_2, t)|}{|x_1 - x_2|^\beta} \leq KT \|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}}$$

e

$$\sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|(\rho_1 - \rho_2)(x, t_1) - (\rho_1 - \rho_2)(x, t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\beta/2}} \leq KT \|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}}.$$

Para estimar a norma de Hölder da derivada de $(\rho_1 - \rho_2)$, notemos que

$$(\rho_1 - \rho_2)_x(x, t) = \left(\frac{\rho'_0(x)}{\rho_0^2} - \rho_1^2(x, t) \int_0^t u_{1xx}(x, s) ds - \frac{\rho'_0(x)}{\rho_0^2} - \rho_2^2(x, t) \int_0^t u_{2xx}(x, s) ds \right).$$

Desta forma chamando $v_0 = \frac{1}{\rho_0}$ podemos escrever

$$\begin{aligned} & |(\rho_1 - \rho_2)_x(x_1, t) - (\rho_1 - \rho_2)_x(x_2, t)| \\ & \leq \left| v'_0(x_1) \rho_1^2(x_1, t) - v'_0(x_1) \rho_2^2(x_1, t) - v'_0(x_2) \rho_1^2(x_2, t) + v'_0(x_2) \rho_2^2(x_2, t) \right| \\ & + \left| \rho_1^2(x_1, t) \int_0^t u_{1xx}(x_1, s) ds - \rho_1^2(x_2, t) \int_0^t u_{1xx}(x_2, s) ds \right| \\ & + \left| \rho_2^2(x_1, t) \int_0^t u_{2xx}(x_1, s) ds - \rho_2^2(x_2, t) \int_0^t u_{2xx}(x_2, s) ds \right|. \end{aligned}$$

A tarefa agora é estimar cada parcela na soma acima separadamente. Temos que

$$\begin{aligned} & \left| \rho_1^2(x_1, t) \int_0^t u_{1xx}(x_1, s) ds - \rho_1^2(x_2, t) \int_0^t u_{1xx}(x_2, s) ds \right| \\ & \leq \left| (\rho_1^2(x_1, t) - \rho_1^2(x_2, t)) \int_0^t u_{1xx}(x_1, s) ds \right| \\ & + \left| \rho_1^2(x_2, t) \int_0^t (u_{1xx}(x_1, s) - u_{1xx}(x_2, s)) ds \right| \\ & \leq K_1 \|\rho_1 - \rho_2\|_\infty |x_1 - x_2|^\beta T + K_2 T \|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}} |x_1 - x_2|^\beta. \end{aligned}$$

Como já temos que

$$\|\rho_1 - \rho_2\|_\infty \leq \|\rho_1\|_\infty \|\rho_2\|_\infty T \|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}},$$

segue que

$$\left| \rho_1^2(x_1, t) \int_0^t u_{1xx}(x_1, s) ds - \rho_1^2(x_2, t) \int_0^t u_{1xx}(x_2, s) ds \right| \leq KT \|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}} |x_1 - x_2|^\beta. \quad (2.14)$$

Da mesma forma temos que

$$\left| \rho_2^2(x_2, t) \int_0^t u_{2xx}(x_2, s) ds - \rho_2^2(x_1, t) \int_0^t u_{2xx}(x_1, s) ds \right| \leq KT \|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}} |x_1 - x_2|^\beta. \quad (2.15)$$

Passemos à estimativa da expressão envolvendo v'_0 . Notemos que, como $\rho_0 \in C^{1+\beta}([0, 1])$ e $\inf \rho_0 > 0$, temos que $v_0 \in C^{1+\beta}([0, 1])$. Desta forma, lembrando da estimativa da norma de Hölder de $\rho_1 - \rho_2$, vem

$$\begin{aligned}
& |v'_0(x_1)(\rho_1^2 - \rho_2^2)(x_1) - v'_0(x_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2)(x_2)| \\
& \leq |v'_0(x_1)\{(\rho_1^2 - \rho_2^2)(x_1) - (\rho_1^2 - \rho_2^2)(x_2)\}| \\
& + |(v'_0(x_1) - v'_0(x_2))(\rho_1 - \rho_2)(x_2)| \\
& \leq K_1 \|v_0\|_{C^{1+\beta}} T \|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}} |x_1 - x_2|^\beta + K_2 |x_1 - x_2|^\beta T \|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}} \\
& \leq KT \|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}} |x_1 - x_2|^\beta.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Juntando (2.14), (2.15) e (2.16) temos que

$$\sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|(\rho_1 - \rho_2)_x(x_1, t) - (\rho_1 - \rho_2)_x(x_2, t)|}{|x_1 - x_2|^\beta} \leq KT \|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta}}.$$

De maneira análoga encontramos também

$$\sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|(\rho_1 - \rho_2)_x(x, t_1) - (\rho_1 - \rho_2)_x(x, t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\beta/2}} \leq KT \|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta}}.$$

Sendo assim, chegamos a conclusão que existe uma constante $K > 0$ limitada para T limitado tal que

$$\|\rho_1 - \rho_2\|_{X_{T,c}} \leq KT \|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}}. \tag{2.17}$$

Agora observemos que $u_1 - u_2$ é solução do seguinte sistema em u

$$\begin{cases} u_t - B(\varphi_1^{1+\alpha} u_x)_x = B((\varphi_1^{1+\alpha} - \varphi_2^{1+\alpha})u_{2x})_x - A(\varphi_1^\gamma - \varphi_2^\gamma)_x \\ u(x, 0) = \frac{A}{B} x \left(1 - \frac{x}{2}\right) [(\varphi_1^{\gamma-\alpha-1} - \varphi_2^{\gamma-\alpha-1})(0, 0)] + \frac{x^2}{2} \frac{A}{B} [(\varphi_1^{\gamma-\alpha-1} - \varphi_2^{\gamma-\alpha-1})(1, 0)] \\ u_x(i, t) = \frac{A}{B} [(\varphi_1^{\gamma-\alpha-1} - \varphi_2^{\gamma-\alpha-1})(i, t)], \quad i = 0, 1, t \in [0, T] \end{cases}$$

Logo, pelo Teorema 1.37, temos que $(u_1 - u_2)$ satisfaz a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}(Q_T)} & \leq C \left(\|f\|_{C^{\beta, \beta/2}(Q_T)} + \|(u_1 - u_2)(x, 0)\|_{C^{2+\beta}([0, 1])} \right) \\
& + C \left(\left\| \frac{A}{B} [(\varphi_1^{\gamma-\alpha-1} - \varphi_2^{\gamma-\alpha-1})] \right\|_{C^{1+\beta, 1+\beta/2}(S_T)} \right),
\end{aligned}$$

onde

$$f = B((\varphi_1^{1+\alpha} - \varphi_2^{1+\alpha})u_{2x})_x - A(\varphi_1^\gamma - \varphi_2^\gamma)_x.$$

Cada uma dessas parcelas pode ser estimada em termos da norma de $(\varphi_1 - \varphi_2)$, permitindo escrever a estimativa anterior como sendo

$$\|u_1 - u_2\|_{C^{2+\beta, 1+\beta/2}(Q_T)} \leq C\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{X_{T,c}}.$$

Por fim, daí e de (2.17), podemos escrever que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\mathcal{A}(\varphi_1) - \mathcal{A}(\varphi_2)\|_{X_{T,c}} = \|\rho_1 - \rho_2\|_{X_{T,c}} \leq CT\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{X_{T,c}}.$$

Portanto, podemos tomar $T > 0$ de tal maneira que $CT < 1$ e consequentemente garantir que $\mathcal{A}$ é uma contração. Sendo assim, temos que existe $\varphi \in X_{T,c}$ tal que $\mathcal{A}(\varphi) = \varphi$. Isto nos garante que (2.6)-(2.9) possui uma solução local no tempo.

Como dito anteriormente a extensão desta solução para todo $T > 0$ não será tratada neste trabalho, mas assumiremos que existe (ρ, u) solução global do nosso sistema, com $\rho, \rho_x, u, u_x, u_{xx}, u_t \in C^{\beta, \beta/2}(Q_T)$, $T > 0$. Segundo os autores de [7], tal extensão pode ser obtida fazendo-se estimativas de energia e utilizando-se a teoria de Schauder para equações parabólicas.

Além de $\rho, \rho_x \in C^{\beta, \beta/2}(Q_T)$, podemos garantir que ρ_t e ρ_{tx} também estão nesta classe, já que $\rho_t = -\rho^2 u_x$, $\rho_{tx} = -2\rho\rho_x u_x - \rho^2 u_{xx}$, e temos $u_x, u_{xx} \in C^{\beta, \beta/2}(Q_T)$.

Portanto, temos que a solução (ρ, u) do nosso sistema é tal que

$$\rho, \rho_x, \rho_t, \rho_{tx}, u, u_x, u_{xx} \in C^{\beta, \beta/2}(Q_T),$$

para qualquer $T > 0$. □

2.4 Estimativas sobre a Solução Suave

Nesta seção estabeleceremos algumas estimativas sobre a solução suave do problema (2.6)-(2.9), obtida na seção anterior, ou seja, (ρ, u) satisfazendo

$$\rho, \rho_x, \rho_t, \rho_{tx}, u, u_x, u_t, u_{xx} \in C^{\beta, \beta/2}(Q_T)$$

e

$$\rho(x, t) > 0 \text{ em } Q_T,$$

onde $\beta \in (0, 1)$ é arbitrário e $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$.

No decorrer do processo de obtenção de tais estimativas estaremos mudando a ordem de integração várias vezes sem nos preocupar em justificar os passos, visto que com as condições adicionais acima, as funções consideradas em nossas estimativas serão sempre integráveis em nosso domínio de integração, podendo portanto aplicar o Teorema de Fubini sem nos preocuparmos.

Feitas estas considerações iniciais podemos passar à dedução das estimativas, em forma de lemas, que serão necessárias mais adiante na demonstração da existência e unicidade.

Nosso primeiro lema fornece-nos informação sobre a estimativa da energia.

Lema 2.5. *De acordo com as condições estabelecidas anteriormente, temos que*

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{u^2(x, t)}{2} + \frac{A\rho^{\gamma-1}(x, t)}{\gamma-1} \right) dx + B \int_0^t \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x^2 dx ds \\ = \int_0^1 \left(\frac{u_0^2}{2} + \frac{A\rho_0^{\gamma-1}}{\gamma-1} \right) dx, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Demonstração. Para provar (2.18) faremos uso da equação da conservação do momento. Primeiramente multiplicando esta equação por u , temos

$$uu_t + A(\rho^\gamma)_x u = B(\rho^{1+\alpha} u_x)_x u.$$

Integrando esta equação em $(0, 1) \times (0, t)$, vem

$$\int_0^1 \int_0^t uu_s ds dx + A \int_0^1 \int_0^t (\rho^\gamma)_x u ds dx = B \int_0^1 \int_0^t (\rho^{1+\alpha} u_x)_x u ds dx.$$

Integrando por partes cada uma dessas integrais, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x, t) dx - A \int_0^t \int_0^1 \rho^\gamma u_x dx ds + B \int_0^t \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x^2 dx ds \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 u_0^2(x) dx + \int_0^t \left((Bu_x \rho^{1+\alpha} - A\rho^\gamma) u \right) \Big|_0^1 ds. \end{aligned}$$

Logo, pela condição de fronteira, obtemos

$$\frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x, t) dx - A \int_0^t \int_0^1 \rho^\gamma u_x dx ds + B \int_0^t \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x^2 dx ds = \frac{1}{2} \int_0^1 u_0^2(x) dx.$$

A equação de conservação de massa nos fornece que $\rho^2 u_x = -\rho_t$. Substituindo esta relação na equação acima temos

$$\frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x, t) dx + B \int_0^t \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x^2 dx ds + A \int_0^t \int_0^1 \rho^{\gamma-2} \rho_s ds dx = \frac{1}{2} \int_0^1 u_0^2(x) dx,$$

ou seja,

$$\int_0^1 \left(\frac{u^2(x, t)}{2} + A \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1}(x, t) \right) dx + B \int_0^t \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x^2 dx ds = \int_0^1 \left(\frac{u_0^2(x)}{2} - A \frac{\rho_0^{\gamma-1}(x)}{\gamma-1} \right) dx.$$

Com isso acabamos de demonstrar (2.18). $\square$

O próximo lema fornece a estimativa para limitação superior da densidade do fluido.

Lema 2.6. *A densidade ρ do fluido é limitada superiormente por uma constante independente de ρ , ou seja, existe uma constante $C = C(\|\rho_0\|_\infty, \|u_0\|_2)$ tal que*

$$\rho(x, t) \leq C, \quad \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, T]. \quad (2.19)$$

Demonstração. Pela equação (2.6) temos que

$$(\rho^\alpha)_t = \alpha \rho^{\alpha-1} \rho_t = -\alpha \rho^{\alpha+1} u_x.$$

Integrando em $(0, t)$, vem

$$\rho^\alpha(x, t) = \rho_0^\alpha(x) - \alpha \int_0^t \rho^{\alpha+1} u_x(x, s) ds. \quad (2.20)$$

Agora integrando (2.7) em $(0, x)$, segue-se que

$$\int_0^x u_t(y, t) dy + A \rho^\gamma(x, t) - A \rho^\gamma(0, t) = B \rho^{1+\alpha} u_x(x, t) - B \rho^{1+\alpha} u_x(0, t).$$

Pela condição de fronteira, esta relação reduz-se a

$$\int_0^x u_t(y, t) dy + A \rho^\gamma(x, t) = B \rho^{1+\alpha} u_x(x, t). \quad (2.21)$$

Substituindo (2.21) em (2.20), temos

$$\begin{aligned} \rho^\alpha(x, t) &= \rho_0^\alpha(x) - \frac{\alpha}{B} \int_0^t \left(\int_0^x u_s(y, s) dy + A \rho^\gamma(x, s) \right) ds \\ &= \rho_0^\alpha(x) - \frac{\alpha}{B} \int_0^t \int_0^x u_s(y, s) dy ds - \frac{\alpha A}{B} \int_0^t \rho^\gamma(x, s) ds \\ &= \rho_0^\alpha(x) - \frac{\alpha}{B} \int_0^x (u(y, t) - u_0(y)) dy - \frac{\alpha A}{B} \int_0^t \rho^\gamma(x, s) ds. \end{aligned}$$

Além disso, pela desigualdade de Hölder e pelo lema anterior, temos

$$\left| \int_0^x u(y, t) dy \right| \leq \int_0^x |u(y, t)| dy \leq \int_0^1 |u(y, t)| dy \leq \left(\int_0^1 u^2(y, t) dy \right)^{1/2} \leq C.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \rho^\alpha(x, t) &\leq \rho^\alpha(x, t) + \frac{A\alpha}{B} \int_0^t \rho^\gamma(x, s) ds \\ &= \left| \rho_0^\alpha(x) + \frac{\alpha}{B} \int_0^x u_0(y) dy - \frac{\alpha}{B} \int_0^x u(y, t) dy \right| \\ &\leq |\rho_0(x)|^\alpha + \frac{\alpha}{B} \int_0^1 |u_0(y)| dy + \frac{\alpha}{B} \int_0^x |u(y, t)| dy \\ &\leq C(\|\rho_0\|_\infty, \|u_0\|_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\rho(x, t) \leq C(\|\rho_0\|_\infty, \|u_0\|_2).$$

Com isso provamos (2.19). □

Passemos à próxima estimativa relevante ao nosso estudo.

Lema 2.7. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos*

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^{2n}(x, t) dx + n(2n-1) \int_0^t \int_0^1 u^{2n-2} \rho^{1+\alpha} u_x^2 dx ds \\ \leq C = C(\|\rho_0\|_\infty, \|u_0\|_{2n}, T, n), \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Demonstração. Para mostrar esta estimativa, multipliquemos a equação da conservação de momento por $2nu^{2n-1}$, obtendo

$$2nu^{2n-1}u_t + 2nA(\rho^\gamma)_x u^{2n-1} = 2nB(\rho^{1+\alpha}u_x)_x u^{2n-1}.$$

Integrando em $[0, 1] \times [0, t]$, segue que

$$\int_0^1 \int_0^t 2nu^{2n-1}u_t ds dx + 2nA \int_0^1 \int_0^t (\rho^\gamma)_x u^{2n-1} ds dx = 2nB \int_0^1 \int_0^t (\rho^{1+\alpha}u_x)_x u^{2n-1} ds dx.$$

Resolvendo cada uma dessas integrais por partes e fazendo uma mudança na ordem de integração convenientemente, teremos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^{2n} dx &= \int_0^1 u_0^{2n} dx + 2nA \int_0^t u^{2n-1} \rho^\gamma \Big|_0^1 ds - 2n(2n-1)A \int_0^t \int_0^1 \rho^\gamma u^{2n-2} u_x dx ds \\ &= 2nB \int_0^t u^{2n-1} \rho^{1+\alpha} u_x \Big|_0^1 ds - 2n(2n-1)B \int_0^t \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x^2 u^{2n-2} dx ds. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^{2n} dx &+ 2n(2n-1)B \int_0^t \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x^2 u^{2n-2} dx ds \\ &= \int_0^1 u_0^{2n} dx + 2n(2n-1)A \int_0^t \int_0^1 \rho^\gamma u^{2n-2} u_x dx ds \\ &+ 2n \left(\int_0^t (B\rho^{1+\alpha} u_x - A\rho^\gamma) u^{2n-1} \Big|_0^1 ds \right) \end{aligned}$$

que pela condição de fronteira simplifica-se em

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^{2n} dx &+ 2n(2n-1)B \int_0^t \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x^2 u^{2n-2} dx ds \\ &= \int_0^1 u_0^{2n} dx + 2n(2n-1)A \int_0^t \int_0^1 \rho^\gamma u^{2n-2} u_x dx ds. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy $\pm ab \leq \frac{1}{2\varepsilon}|a|^2 + \frac{\varepsilon}{2}|b|^2$ à segunda integral do lado direito da equação acima com $a = \rho^{\gamma-\frac{(1+\alpha)}{2}}$, $b = \rho^{\frac{(1+\alpha)}{2}} u_x$ e $\varepsilon = \frac{B}{A} > 0$, teremos

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^{2n} dx &+ 2n(2n-1)B \int_0^t \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x^2 u^{2n-2} dx ds \\ &\leq C(\|u_0\|_{2n}) + 2n(2n-1)A \int_0^t \int_0^1 \rho^{\gamma-\frac{(1+\alpha)}{2}} \rho^{\frac{(1+\alpha)}{2}} u^{2n-2} u_x dx ds \\ &\leq C + 2n(2n-1)A \left(\int_0^t \int_0^1 u^{2n-2} \left(\frac{B\rho^{1+\alpha} u_x^2}{2A} + \frac{A\rho^{2\gamma-\alpha-1}}{2B} \right) dx ds \right) \\ &= C + n(2n-1)B \int_0^t \int_0^1 u^{2n-2} \rho^{1+\alpha} u_x^2 dx ds + \frac{A^2}{B} n(2n-1) \int_0^t \int_0^1 u^{2n-2} \rho^{2\gamma-\alpha-1} dx ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^1 u^{2n} dx + n(2n-1)B \int_0^t \int_0^1 u^{2n-2} \rho^{1+\alpha} u_x^2 dx ds \leq C + \frac{A^2}{B} n(2n-1) \int_0^t \int_0^1 u^{2n-2} \rho^{2\gamma-\alpha-1} dx ds.$$

A desigualdade de Young nos garante que

$$u^{2n-2} \rho^{2\gamma-\alpha-1} \leq \frac{1}{n} \rho^{(2\gamma-\alpha-1)n} + \frac{n-1}{n} u^{2n}.$$

Daí, utilizando esta relação e (2.19) temos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^{2n} dx &+ n(2n-1)B \int_0^t \int_0^1 u^{2n-2} \rho^{1+\alpha} u_x^2 dx ds \\ &\leq C + \frac{A^2}{B} \left(n(2n-1) \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{C}{n} + \frac{n-1}{n} u^{2n} \right) dx ds \right) \\ &\leq C + C(T) + (n-1)(2n-1) \frac{A^2}{B} \int_0^t \int_0^1 u^{2n} dx ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^1 u^{2n} \leq C(T) + (n-1)(2n-1) \frac{A^2}{B} \int_0^t \int_0^1 u^{2n} dx ds.$$

Daí, pelo Lema de Gronwall, temos

$$\int_0^1 u^{2n} dx \leq C e^{(n-1)(2n-1) \frac{A^2}{B} t} \leq C(T, n).$$

Portanto,

$$\int_0^1 u^{2n} dx + n(2n-1)B \int_0^t \int_0^1 u^{2n-2} \rho^{1+\alpha} u_x^2 dx ds \leq C(\|\rho_0\|_\infty, \|u_0\|_{2n}, T, n).$$

Assim terminamos a demonstração deste lema. □

Passemos à próxima estimativa sobre a derivada da densidade.

Lema 2.8. *Existe uma constante $C = C(\|\rho_0\|_{W^{1,2n}}, \|u_0\|_{2n}, T)$ tal que*

$$\int_0^1 (\partial_x \rho^\alpha)^{2n}(x, t) dx \leq C, \quad t \in [0, T].$$

Demonstração. Multiplicando (2.6) por $\rho^{\alpha-1}$, temos

$$\rho_t \rho^{\alpha-1} + \rho^{\alpha+1} u_x = 0,$$

que é equivalente a

$$\rho^{1+\alpha} u_x = -\frac{1}{\alpha} (\partial_t \rho^\alpha).$$

Substituindo esta relação em (2.7), temos

$$u_t + A(\rho^\gamma)_x = -\frac{B}{\alpha} (\partial_t \rho^\alpha)_x.$$

Integrando em $[0, t]$ e mudando a ordem de derivação, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t u_s ds + A \int_0^t (\rho^\gamma)_x ds &= -\frac{B}{\alpha} \int_0^t (\partial_s \rho^\alpha)_x ds \\ u(x, t) - u_0(x) + A \int_0^t (\rho^\gamma)_x(x, s) ds &= \frac{B}{\alpha} (\partial_x \rho^\alpha(x, 0) - \partial_x \rho^\alpha(x, t)). \end{aligned}$$

Agora vamos multiplicar esta equação por $(\partial_x \rho^\alpha)^{2n-1}$ e posteriormente integrar em $(0, 1)$. Desta forma, pela desigualdade de Hölder e a desigualdade de Minkowski para integrais, vem que

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\partial_x \rho^\alpha)^{2n} dx &\leq \int_0^1 |\partial_x \rho_0^\alpha(x) (\partial_x \rho^\alpha)^{2n-1}| dx \\ &+ \frac{\alpha}{B} \int_0^1 \left\{ |(u - u_0)| + A \int_0^t |(\rho^\gamma)_x| ds \right\} |(\partial_x \rho^\alpha)^{2n-1}| dx \\ &\leq \left(\int_0^1 (\partial_x \rho^\alpha)^{2n} dx \right)^{\frac{2n-1}{2n}} \cdot \left\{ \left(\int_0^1 (\partial_x \rho_0^\alpha(x))^{2n} dx \right)^{1/2n} + \frac{\alpha}{B} \left(\int_0^1 (u - u_0)^{2n} dx \right)^{1/2n} \right\} \\ &+ \left(\int_0^1 (\partial_x \rho^\alpha)^{2n} dx \right)^{\frac{2n-1}{2n}} \left\{ \frac{A\alpha}{B} \left\| \int_0^t |\partial_x \rho^\gamma| ds \right\|_{2n} \right\} \\ &\leq C \left(\int_0^1 (\partial_x \rho^\alpha)^{2n} dx \right)^{\frac{2n-1}{2n}} \cdot \left\{ \|\partial \rho_0^\alpha\|_{2n} + \|u - u_0\|_{2n} + \int_0^t \|\partial_x \rho^\gamma\|_{2n} ds \right\}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\left(\int_0^1 (\partial_x \rho^\alpha)^{2n} dx \right)^{1/2n} \leq C \left\{ \|\partial_x \rho_0^\alpha\|_{2n} + \|u - u_0\|_{2n} + \int_0^t \|\partial_x \rho^\gamma\|_{2n} ds \right\}.$$

Por (2.7) temos que $\|u\|_{2n} \leq C$, então podemos escrever

$$\left(\int_0^1 (\partial_x \rho^\alpha)^{2n} dx \right)^{1/2n} \leq C + C \int_0^t \left(\int_0^1 (\partial_x \rho^\gamma)^{2n} dx \right)^{1/2n} ds.$$

Pela desigualdade de Jensen,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\partial_x \rho^\alpha)^{2n} dx &\leq C + C \left(\int_0^t \left(\int_0^1 (\partial_x \rho^\gamma)^{2n} dx \right)^{1/2n} ds \right)^{2n} \\ &\leq C + C \int_0^t \int_0^1 (\partial_x \rho^\gamma)^{2n} dx ds. \end{aligned}$$

Como $(\partial_x \rho^\gamma) = \frac{\gamma}{\alpha} \rho^{\gamma-\alpha} (\partial_x \rho^\alpha)$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\partial_x \rho^\alpha)^{2n} dx &\leq C + C \int_0^t \int_0^1 (\rho^{\gamma-\alpha} (\partial_x \rho^\alpha))^{2n} dx ds \\ &\leq C + C \int_0^t \max_{[0,1]} (\rho^{\gamma-\alpha})^{2n} \int_0^1 (\partial_x \rho^\alpha)^{2n} dx ds. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema de Gronwall, juntamente com o Lema 2.5 e o fato de termos $\gamma - \alpha > 0$, segue imediatamente que

$$\int_0^1 (\partial_x \rho^\alpha)^{2n} dx \leq C$$

e concluímos a prova do lema. $\square$

Encerramos esta seção com uma estimativa inferior para a densidade.

Lema 2.9. *Fixado $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2n^2 - n}{2n^2 + 2n - 1} > \alpha$, existe uma constante positiva $C = C(\|u_0\|_{2n}, \|\rho_0\|_{W^{1,2n}}, \inf_{[0,1]} \rho_0, T)$ tal que*

$$\rho(x, t) \geq C, \quad \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, T].$$

Demonstração. Consideremos as seguintes funções auxiliares

$$v(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} > 0 \quad \text{e} \quad V(t) = \max_{[0,1] \times [0,t]} v(x, s).$$

Observemos que o nosso problema consiste em mostrar que existe C como no enunciado tal que $v(x, t) \leq C^{-1}$, para todo $x \in [0, 1]$ e todo $t \in [0, T]$.

Utilizando a identidade $(\partial_x \rho) v^2 = \frac{1}{\alpha} (\partial_x \rho^\alpha) v^{\alpha+1}$, o Lema 2.8, a desigualdade de Hölder e Lema 2.5, teremos

$$\begin{aligned} v(x, t) - v(0, t) &= \int_0^x (\partial_x v) dx = - \int_0^x \frac{(\partial_x \rho)}{\rho^2} dx = - \int_0^x (\partial_x \rho) v^2 dx \\ &\leq \int_0^1 |\partial_x \rho| v^2 dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 |\partial_x \rho^\alpha| v^{1+\alpha} dx \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \left(\int_0^1 |\partial_x \rho^\alpha|^{2n} dx \right)^{1/2n} \left(\int_0^1 v^{(1+\alpha)q} dx \right)^{1/q} \\ &\leq C \left(\int_0^1 v \cdot v^{(1+\alpha)q-1} dx \right)^{1/q} \\ &\leq C \left(\int_0^1 v(x, t) \left(\max_{[0,1]} v(., t) \right)^{(1+\alpha)q-1} dx \right)^{1/q} \\ &\leq C \left(\int_0^1 v(x, t) dx \right)^{1/q} \left(\max_{[0,1]} v(., t) \right)^{\frac{(1+\alpha)q-1}{q}}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde $q = \frac{2n}{2n-1}$. Por outro lado podemos escrever (2.6) como $v_t = u_x$. Agora integrando em $[0, 1] \times [0, t]$,

$$\int_0^1 \int_0^t v_s(x, s) ds dx = \int_0^t \int_0^1 u_x dx ds,$$

ou seja,

$$\int_0^1 v(x, t) dx - \int_0^1 v(x, 0) dx = \int_0^t (u(1, s) - u(0, s)) ds.$$

Daí, pela desigualdade de Young

$$\begin{aligned} \int_0^1 v(x, t) dx &= \int_0^1 v(x, 0) dx + \int_0^t (u(1, s) - u(0, s)) ds \\ &\leq 2 \int_0^t \max_{[0,1]} |u(., s)| ds + \int_0^1 \frac{1}{\inf_{[0,1]} \rho_0} dx \\ &\leq \left(\int_0^t \max_{[0,1]} |u(., s)|^n ds \right)^{1/n} + C. \end{aligned}$$

Aplicaremos a imersão de Sobolev $W^{1,1}(0, 1) \hookrightarrow L^\infty(0, 1)$ e a desigualdade de Hölder para limitar a integral do lado direito desta última equação. Procedendo assim, vem

$$\begin{aligned} \int_0^t \|u^n(s)\|_\infty ds &\leq C \int_0^t \|u^n(s)\|_{W^{1,1}} ds \\ &\leq C \int_0^t \|u^{2n}(s)\|_1^{1/2} ds + C \int_0^t \int_0^1 |u|^{n-1} |u_x| dx ds \\ &= \int_0^t \left(\int_0^1 u^{2n}(x, s) dx \right)^{1/2} ds + C \int_0^t \int_0^1 |u|^{n-1} |u_x| dx ds. \end{aligned}$$

Usando (2.7) temos que $\int_0^1 u^{2n}(x, s) dx \leq C$. Logo, novamente por Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \|u^n(s)\|_\infty ds &\leq C + C \int_0^t \int_0^1 |u|^{n-1} |u_x| dx ds \\ &\leq C + C \left(\int_0^t \int_0^1 u^{2n-2} u_x^2 \rho^{1+\alpha} dx ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \int_0^1 v^{1+\alpha} dx ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Substituindo esta estimativa na desigualdade anterior, temos

$$\int_0^1 v(x, t) dx \leq C + C \left(\int_0^t \int_0^1 v^{1+\alpha} dx ds \right)^{1/2n}. \quad (2.23)$$

Notemos que podemos escrever (2.6) da seguinte maneira

$$\left(\rho^{-\frac{(1-\alpha)}{2}} \right)_t = \frac{(1-\alpha)}{2} \rho^{\frac{(1+\alpha)}{2}} u_x.$$

Integrando em $[0, t]$, temos

$$v^{\frac{(1-\alpha)}{2}}(x, t) - \rho_0^{-\frac{(1-\alpha)}{2}}(x) = \frac{1-\alpha}{2} \int_0^t \rho^{\frac{(1+\alpha)}{2}} u_x ds$$

$$v^{\frac{(1-\alpha)}{2}}(x, t) = \rho_0^{-\frac{(1-\alpha)}{2}}(x) + \frac{1-\alpha}{2} \int_0^t \rho^{\frac{(1+\alpha)}{2}} u_x ds.$$

Integrando em $(0, 1)$, usando (2.18) e a desigualdade de Jensen, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 v^{1-\alpha}(x, t) dx &\leq 2 \int_0^1 \rho_0^{-(1-\alpha)}(x) dx + C \int_0^1 \left(\int_0^t \rho^{\frac{(1+\alpha)}{2}} |u_x| ds \right)^2 dx \\ &\leq 2 \int_0^1 \rho_0^{-(1-\alpha)}(x) dx + C \int_0^1 \left(\int_0^t \rho^{(1+\alpha)} u_x^2 ds \right) dx \\ &\leq C(\|\rho_0\|_\infty, \|u_0\|_2, \inf_{[0,1]} T). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Inserindo (2.24) em (2.23), temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 v(x, t) dx &\leq C + C \left(\int_0^t \int_0^1 v^{2\alpha} v^{1-\alpha} dx ds \right)^{1/2n} \\ &\leq C + C \left(\int_0^t V^{2\alpha}(s) ds \int_0^1 v^{1-\alpha} dx ds \right)^{1/2n} \\ &\leq C + C \left(\int_0^t V^{2\alpha}(s) ds \right)^{1/2n} \\ &\leq C + C \left(\int_0^T V^{2\alpha}(T) ds \right)^{1/2n} \\ &\leq C + CV^{\alpha/n}(T). \end{aligned}$$

Substituindo esta equação em (2.22), temos

$$\begin{aligned} v(x, t) &\leq v(0, t) + \left(C + CV^{\alpha/n}(T) \right)^{1/q} (V(T))^{\frac{(1+\alpha)q-1}{q}} \\ &= v(0, t) + \left((C + CV^{\alpha/n}(T)) (V(T))^{(1+\alpha)q-1} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Como $\rho(x, t) \leq C$, temos que $\frac{1}{V(T)} \leq \frac{1}{v(x, t)} \leq C$. Daí, podemos escolher a constante C de maneira que $1 \leq CV^{\alpha/n}(T)$. Assim,

$$v(x, t) \leq v(0, t) + (CV(T))^{\frac{\alpha}{nq} + \frac{(1+\alpha)q-1}{q}}.$$

Nosso próximo passo é estimar $v(0, t)$ por alguma constante. Para isso consideremos a condição de fronteira, que combinada com (2.6) nos fornece

$$A\rho^\gamma(0, t) = -B\rho^{\alpha-1}\rho_t(0, t),$$

ou seja,

$$-\frac{A}{B}\rho^{\gamma-\alpha+1}(0, t) = \rho_t(0, t)$$

que é equivalente a

$$\frac{A}{B}\frac{1}{v^{\gamma-\alpha-1}(0, t)} = v_t(0, t).$$

Chegamos então em uma edo que resolvida nos fornece

$$v(0, t) = v(0, 0) \left(\frac{A}{B}(\gamma - \alpha)\rho_0^{\gamma-\alpha}(0)t + 1 \right)^{1/(\gamma-\alpha)} \leq C.$$

Inserindo esta limitação na equação anterior, chegamos a

$$\begin{aligned} v(x, t) &\leq v(0, 0) \left(\frac{A}{B}(\gamma - \alpha)\rho_0^{\gamma-\alpha}(0)t + 1 \right)^{1/(\gamma-\alpha)} + (CV(T))^{\frac{\alpha}{nq} + \frac{(1+\alpha)q-1}{q}} \\ &\leq C + C(V(T))^{\frac{\alpha}{nq} + \frac{(1+\alpha)q-1}{q}}. \end{aligned}$$

Já que $\frac{\alpha}{nq} + \frac{(1+\alpha)q-1}{q} < 1$, pois $\alpha < \frac{n(2n-1)}{2n^2+2n-1}$, onde $q = \frac{2n}{2n-1}$, concluímos que

$$V(T) \leq C(\|\rho_0\|_{W^{1,2n}}, \|u_0\|_{2n}, \inf_{[0,1]} \rho_0, T), \quad \forall x \in [0, 1], \forall t \in [0, T].$$

Desta maneira temos que $v(x, t) \leq C$ e completamos a prova do lema. $\square$

Observamos que o fato de termos $0 < \alpha < 1$ nos garante a existência de um natural n tal que $\frac{2n^2 - n}{2n^2 + 2n - 1} > \alpha$.

2.5 Existência de Solução Fraca

Nesta seção, a partir das estimativas obtidas para soluções suaves, garantiremos a existência de solução fraca global por aproximação destas soluções suaves. Para isso regularizaremos os dados iniciais de nosso problema a fim de garantir a regularidade necessária para a obtenção da solução suave abordada na seção anterior, além de utilizar propriedades de convergência de tal regularização. Mais ainda, terá papel fundamental nesta seção o Lema de Aubin-Lions, que nos garantirá maior regularidade da densidade.

Teorema 2.10. *Sejam $\gamma > 1$ e $0 < \alpha < 1$ em (2.7) e (2.8). Suponhamos que $\inf_{[0,1]} \rho_0 > 0$, $\rho_0 \in W^{1,2n}([0, 1])$ e $u_0 \in L^{2n}([0, 1])$, para algum $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\frac{n(2n-1)}{2n^2+2n-1} > \alpha$. Então*

o problema de fronteira e valor inicial (2.6)-(2.9) possui uma solução fraca global (ρ, u) com $\rho(x, t) \geq C$ para todo $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$, onde C é uma constante que depende somente de $\|\rho_0\|_{W^{1,2n}}, \|u_0\|_{2n}, \inf_{[0,1]} \rho_0$ e T .

Demonstração. Sejam j_ε uma função regularizante padrão (v. Definição 1.1), $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$\begin{cases} \psi(x) = 1, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ \psi(x) = 0, & |x| \geq 1 \end{cases},$$

e $\psi_\varepsilon(x) = \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Para simplificar a notação ainda denotaremos por (ρ_0, u_0) a seguinte extensão de (ρ_0, u_0) em $\mathbb{R}$:

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho_0(1), & x \in (1, \infty) \\ \rho_0(x), & x \in [0, 1] \\ \rho_0(0), & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

e

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}.$$

Definamos agora $(\rho_0^\varepsilon, u_0^\varepsilon)$ da seguinte maneira:

$$\rho_0^\varepsilon(x) = (\rho_0 * j_\varepsilon)(x),$$

$$\begin{aligned} u_0^\varepsilon(x) &= (u_0 * j_\varepsilon)(x)(1 - \psi_\varepsilon(x) - \psi_\varepsilon(1 - x)) \\ &+ (u_0 * j_\varepsilon)(0)\psi_\varepsilon(x) + (u_0 * j_\varepsilon)(1)\psi_\varepsilon(1 - x) \\ &+ \frac{A}{B}(\rho_0^\varepsilon)^{\gamma-\alpha-1}(0) \int_0^x \psi_\varepsilon(y)dy - \frac{A}{B}(\rho_0^\varepsilon)^{\gamma-\alpha-1}(1) \int_x^1 \psi_\varepsilon(1 - y)dy. \end{aligned}$$

Vejamos que ρ_0^ε e u_0^ε satisfazem a condição de fronteira (2.8). Derivando u_0^ε , temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} u_0^\varepsilon(x) &= (u_0 * j_\varepsilon)'(x)\{1 - \psi_\varepsilon(x) - \psi_\varepsilon(1 - x)\} + (u_0 * j_\varepsilon)(x)\{-\psi_\varepsilon'(x) - \psi_\varepsilon'(1 - x)\} \\ &+ (u_0 * j_\varepsilon)(0)\psi_\varepsilon'(x) - (u_0 * j_\varepsilon)(1)\psi_\varepsilon'(1 - x) \\ &+ \frac{A}{B}(\rho_0^\varepsilon)^{\gamma-\alpha-1}(0)\psi_\varepsilon(x) + \frac{A}{B}(\rho_0^\varepsilon)^{\gamma-\alpha-1}(1)\psi_\varepsilon(1 - x). \end{aligned}$$

Calculando $\frac{d}{dx} u_0^\varepsilon(0)$ e $\frac{d}{dx} u_0^\varepsilon(1)$, encontramos que

$$A(\rho_0^\varepsilon)^\gamma(0) = B(\rho_0^\varepsilon)^{1+\alpha}(0) \frac{d}{dx} (u_0^\varepsilon)'(0)$$

e

$$A(\rho_0^\varepsilon)^\gamma(1) = B(\rho_0^\varepsilon)^{1+\alpha}(1) \frac{d}{dx}(u_0^\varepsilon)'(1),$$

ou seja, ρ_0^ε e u_0^ε satisfazem (2.8).

Notemos que ρ_0^ε é um regularizador (padrão) de ρ_0 (v. Definição 1.1) logo, como $\rho_0 \in W^{1,2n}$, temos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\rho_0^\varepsilon - \rho_0\|_{W^{1,2n}} = 0,$$

(ver Teorema 1.9). Embora u_0^ε aqui não seja o regularizador padrão de u_0 (v. §1.1.1), vejamos que também vale a convergência

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_0^\varepsilon - u_0\|_{2n} = 0.$$

De fato, já sabemos que $(u_0 * j_\varepsilon) \rightarrow u_0$ em L^{2n} . Desta forma, basta mostrar que as demais parcelas de u_0^ε tendem a zero em L^{2n} quando ε vai a zero. Procederemos desta maneira, como $\psi_\varepsilon(x) \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, temos que $(u_0 * j_\varepsilon)(0)\psi_\varepsilon(x) \rightarrow 0$, $(u_0 * j_\varepsilon)(1)\psi_\varepsilon(1-x) \rightarrow 0$, $\frac{A}{B}(\rho_0^\varepsilon)^{\gamma-\alpha-1}(0) \int_0^x \psi_\varepsilon(y)dy \rightarrow 0$, $\frac{A}{B}(\rho_0^\varepsilon)^{\gamma-\alpha-1}(1) \int_x^1 \psi_\varepsilon(1-y)dy \rightarrow 0$ em L^{2n} . Agora façamos o seguinte:

$$\begin{aligned} \|(u_0 * j_\varepsilon)(0)\psi_\varepsilon\|_{2n}^{2n} &= \int_{\mathbb{R}} |(u_0 * j_\varepsilon)(0)|^{2n} |\psi_\varepsilon(x)|^{2n} dx \\ &= |(u_0 * j_\varepsilon)(0)|^{2n} \int_0^\varepsilon \psi_\varepsilon^{2n}(x) dx \\ &\leq C\varepsilon \left(\int_0^\varepsilon j_\varepsilon(-y)u_0(y)dy \right)^{2n} \\ &\leq C\varepsilon \left(\int_0^\varepsilon u_0^{2n}(y)dy \right) \left(\int_0^\varepsilon j_\varepsilon^{\frac{2n}{2n-1}}(-y)dy \right)^{2n-1} \\ &\leq C \left(\int_0^\varepsilon u_0^{2n}(y)dy \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Da mesma maneira temos que $(u_0 * j_\varepsilon)(1)\psi_\varepsilon(1-x) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Logo, temos que

$$\rho_0^\varepsilon \rightarrow \rho \text{ em } W^{1,2n} \text{ e } u_0^\varepsilon \rightarrow u_0 \text{ em } L^{2n}.$$

Consideremos o problema de valor inicial e de fronteira (2.6)-(2.9) com dados iniciais (u_0, ρ_0) substituídos por $(u_0^\varepsilon, \rho_0^\varepsilon)$. Observamos que $u_0^\varepsilon \in C^{2+\beta}[0, 1]$ e $\rho_0^\varepsilon \in C^{1+\beta}[0, 1]$ para qualquer $\beta \in (0, 1)$. Com essa regularidade nos dados iniciais, dado qualquer T , podemos garantir, para cada $\varepsilon > 0$, a existência de uma solução global $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$, tal que

$$\rho^\varepsilon, \rho_x^\varepsilon, \rho_t^\varepsilon, \rho_{tx}^\varepsilon, u^\varepsilon, u_x^\varepsilon, u_t^\varepsilon, u_{xx}^\varepsilon \in C^{\beta, \beta/2}(Q_T).$$

O nosso propósito é utilizar as estimativas dos lemas da seção 2.5 para estabelecer a existência de solução fraca do nosso problema através de aproximação. Começamos observando que do Lema 2.7 podemos garantir que

$$\int_0^1 (u^\varepsilon)^{2n}(x, t) dx \leq C, \quad t \in [0, T],$$

onde C é uma constante positiva independente de ε e t , ou seja, a sequência (família) $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ é limitada em $L^\infty([0, T], L^{2n})$.

Dos Lemas 2.8 e 2.9 temos que

$$\int_0^1 (\partial_x((\rho^\varepsilon)^\alpha))^{2n} dx = \int_0^1 ((\rho^\varepsilon)^{\alpha-1} \rho_x^\varepsilon)^{2n} dx \leq C.$$

Logo,

$$\int_0^1 (\rho_x^\varepsilon)^{2n} dx \leq C, \quad t \in [0, T],$$

ou seja, a sequência $(\rho_x^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ também é limitada em $L^\infty([0, T], L^{2n})$.

Mais ainda, pelas limitações inferiores e superiores da densidade, temos que

$$C^{-1} \leq \rho^\varepsilon(x, t) \leq C, \quad t \in [0, T], x \in [0, 1],$$

para alguma constante $C > 0$ independente de ε . Também temos uma estimativa para (u_x^ε) . Com efeito, a partir da primeira igualdade do Lema 2.18, temos que

$$\int_0^T \int_0^1 (u_x^\varepsilon)^2(x, t) dx dt \leq C,$$

ou seja, $(u_x^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ é limitada em $L^2([0, T], L^2)$. A seguir observamos que pela equação de conservação da massa, $\rho_t^\varepsilon + (\rho^\varepsilon)^2 u_x^\varepsilon = 0$, e a limitação superior para a densidade, temos que

$$\int_0^T \int_0^1 (\rho_t^\varepsilon)^2 dx dt = \int_0^T \int_0^1 (\rho^\varepsilon)^4 (u_x^\varepsilon)^2(x, t) dx dt \leq C.$$

Daí, $(\rho_t^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ também é limitada em $L^2([0, T], L^2)$.

Em resumo, temos

$$\int_0^1 (u^\varepsilon)^{2n}(x, t) dx + \int_0^1 (\rho_x^\varepsilon)^{2n}(x, t) dx \leq C, \quad t \in [0, T], \quad (2.25)$$

$$C^{-1} \leq \rho^\varepsilon(x, t) \leq C, \quad x \in [0, 1], t \in [0, T], \quad (2.26)$$

$$\int_0^T \int_0^1 ((u_x^\varepsilon)^2 + (\rho_t^\varepsilon)^2)(x, t) dx dt \leq C. \quad (2.27)$$

Em virtude dos lemas apresentados neste capítulo, temos que as constantes C envolvidas nestas estimativas dependem somente das normas de ρ_0^ε e u_0^ε , que por sua vez estão limitadas pelas normas de ρ_0 e u_0 . Logo, C depende somente de $\|\rho_0\|_{W^{1,2n}}, \|u_0\|_{L^{2n}}, \inf_{[0,1]} \rho_0, T$ e n , mas não de ε . Tendo em vista estas estimativas podemos garantir a existência de uma subsequência de $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$, a qual por simplicidade ainda denotaremos por $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$, tal que

$$u^\varepsilon \xrightarrow{w^*} u \text{ em } L^\infty([0, T], L^{2n}),$$

$$\rho^\varepsilon \xrightarrow{w^*} \rho \text{ em } L^\infty([0, T], W^{1,2n}),$$

$$\rho_t^\varepsilon \xrightarrow{w} w_1 \text{ em } L^2([0, T], L^2),$$

e

$$u_x^\varepsilon \xrightarrow{w} w_2 \text{ em } L^2([0, T], L^2),$$

onde $\xrightarrow{w^*}$ e $\xrightarrow{w}$ denotam, respectivamente, convergências em relação a topologias fraca-* e fraca, e u, ρ, w_1 e w_2 são os limites das sequências indicadas, nos espaços correspondentes. Não é difícil ver que $w_1 = \rho_t$ e $w_2 = u_x$ em quase todo ponto de $[0, 1] \times [0, T]$. De fato, para toda $\phi \in C_0^\infty(Q_T)$, pelas convergências acima temos que

$$\int_{Q_T} \phi w_1 dX = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Q_T} \phi \rho_t^\varepsilon dX = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Q_T} \phi_t \rho^\varepsilon dX = - \int_{Q_T} \phi_t \rho dX = \int_{Q_T} \phi \rho_t dX.$$

Analogamente, temos que $u_x = w_2$ em quase todo ponto de Q_T . Assim,

$$\rho_t^\varepsilon \xrightarrow{w} \rho_t \text{ em } L^2([0, T], L^2), \quad (2.28)$$

e

$$u_x^\varepsilon \xrightarrow{w} u_x \text{ em } L^2([0, T], L^2). \quad (2.29)$$

Mostremos agora que (ρ, u) , tomado como o limite da subsequência $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$, é uma solução fraca do problema (2.6)-(2.9), isto é, com os dados iniciais (ρ_0, u_0) como no enunciado do Teorema 2.9. Em primeiro lugar, através da imersão de Sobolev $W^{1,2n}(0, 1) \hookrightarrow C^{1-1/n}([0, 1])$ e (2.25), segue-se, para quaisquer $x_1, x_2 \in (0, 1)$, $t \in [0, T]$, a estimativa

$$|\rho^\varepsilon(x_1, t) - \rho^\varepsilon(x_2, t)| \leq C|x_1 - x_2|^{1-1/2n}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 \|\rho^\varepsilon(t_1) - \rho^\varepsilon(t_2)\|_{L^2} &= \left(\int_0^1 |\rho^\varepsilon(t_1) - \rho^\varepsilon(t_2)|^2 dx \right)^{1/2} \\
 &= \left(\int_0^1 \left| \int_{t_1}^{t_2} \rho_t^\varepsilon(x, s) ds \right|^2 dx \right)^{1/2} \\
 &\leq |t_1 - t_2|^{1/2} \|\rho_t^\varepsilon\|_{L^2(Q_T)}^{1/2} \\
 &\leq C|t_1 - t_2|^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Daí, pelo Lema de Aubin-Lions (Lema 1.34, com $B_0 = W^{1,2n}(0, 1)$ e $B_1 = L^2(0, 1)$) e (2.25), segue-se que para todo $\delta > 0$ existe C_δ tal que

$$\|\rho^\varepsilon(t_1) - \rho^\varepsilon(t_2)\|_{L^\infty} \leq \delta \|\rho^\varepsilon(t_1) - \rho^\varepsilon(t_2)\|_{W^{1,2n}} + C_\delta \|\rho^\varepsilon(t_1) - \rho^\varepsilon(t_2)\|_{L^2} \leq C\delta + C_\delta |t_1 - t_2|^{1/2},$$

para quaisquer $t_1, t_2 \in [0, T]$. Então, dado qualquer $\eta > 0$, tomando $\delta > 0$ tal que $C\delta < \eta/3$ e (fixado este δ , $\delta = \delta(\eta)$) $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in Q_T$ tais que $|x_1 - x_2| < \left(\frac{\eta}{3C}\right)^{1/(1-1/2n)}$ e $|t_1 - t_2| < \left(\frac{\eta}{3C_\delta}\right)^2$, temos

$$\begin{aligned}
 |\rho^\varepsilon(x_1, t_1) - \rho^\varepsilon(x_2, t_2)| &\leq |\rho^\varepsilon(x_1, t_1) - \rho^\varepsilon(x_2, t_1)| + |\rho^\varepsilon(x_2, t_1) - \rho^\varepsilon(x_2, t_2)| \\
 &\leq C|x_1 - x_2|^{1-1/2n} + C\delta + C_\delta |t_1 - t_2|^{1/2} \\
 &\leq \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta.
 \end{aligned}$$

Logo, a sequência $(\rho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ é equicontínua em Q_T . Assim, tendo em vista também (2.26), pelo Teorema de Arzelá-Ascoli (Teorema 1.36), podemos extrair uma subsequência, a qual ainda denotaremos por (ρ^ε) , tal que

$$\rho^\varepsilon(x, t) \longrightarrow \rho(x, t), \quad \text{em } C^0(Q_T).$$

Fazendo $v^\varepsilon = \frac{1}{\rho^\varepsilon}$ e $v = \frac{1}{\rho}$, devido a limitação da densidade, temos também que

$$v^\varepsilon(x, t) \longrightarrow v(x, t), \quad \text{em } C^0(Q_T),$$

e a equação da conservação de massa toma a forma

$$v_t^\varepsilon - u_x^\varepsilon = 0.$$

Multiplicando-a por $\phi \in C_0^\infty((0, 1) \times (0, T))$ e integrando por partes segue-se que

$$\int_{Q_T} v^\varepsilon \phi_t dx dt - \int_{Q_T} u^\varepsilon \phi_x dx dt = 0.$$

Pela convergência uniforme de v^ε e por termos $\phi_x \in L^1(0, T; L^2)$, podemos garantir que $\int_{Q_T} v^\varepsilon \phi_t dx dt \rightarrow \int_{Q_T} v \phi_t dx dt$ e $\int_{Q_T} u^\varepsilon \phi_x dx dt \rightarrow \int_{Q_T} u \phi_x dx dt$. Logo,

$$\int_{Q_T} v \phi_t dx dt - \int_{Q_T} u \phi_x dx dt = 0.$$

Tendo em vista que $\rho_t, u_x \in L^2(Q_T)$ (ver (2.28) e (2.29)) e $\rho \geq C > 0$, podemos integrar esta última equação por partes, logo temos que $\int_{Q_T} (v_t - u_x) \phi dx dt = 0$ para toda função $\phi \in C_0^\infty((0, 1) \times (0, T))$, donde,

$$\rho_t + \rho^2 u_x = 0,$$

em quase todo ponto $(x, t) \in Q_T$. Além disso, como $\rho_0^\varepsilon(x) = \rho^\varepsilon(x, 0) \rightarrow \rho(x, 0)$ em $C^0([0, 1])$ e $\rho_0^\varepsilon \rightarrow \rho_0$ em $L^{2n}([0, 1])$, temos que $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ em quase todo ponto de $(0, 1)$.

Passemos à segunda equação. Multiplicando a equação do momento por $\phi \in C_0^\infty(Q)$, onde $Q = \{(x, t); 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq t < T\}$, temos que

$$\phi u_t^\varepsilon + A \phi ((\rho^\varepsilon)^\gamma)_x = B \phi ((\rho^\varepsilon)^{1+\alpha} u_x)_x.$$

Desta forma, integrando por partes em $[0, 1] \times [0, T)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\phi u^\varepsilon \Big|_0^T - \int_0^T u^\varepsilon \phi_t dt \right) dx + A \int_0^T \left((\rho^\varepsilon)^\gamma \phi \Big|_0^1 - \int_0^1 (\rho^\varepsilon)^\gamma \phi_x dx \right) dt \\ = B \int_0^T \left((\rho^\varepsilon)^{1+\alpha} u_x^\varepsilon \phi \Big|_0^1 - \int_0^1 (\rho^\varepsilon)^{1+\alpha} u_x^\varepsilon \phi_x dx \right) dt. \end{aligned}$$

Utilizando as condições de fronteira e valor inicial reduzimos esta expressão a:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\phi(x, T) u^\varepsilon(x, T) - \phi(x, 0) u_0^\varepsilon(x)) dx - A \int_0^T \int_0^1 (\rho^\varepsilon)^\gamma \phi_x dx dt \\ = -B \int_0^T \int_0^1 (\rho^\varepsilon)^{1+\alpha} u_x^\varepsilon \phi_x dx dt, \end{aligned}$$

que de forma melhorada escreve-se

$$\int_0^T \int_0^1 (A(\rho^\varepsilon)^\gamma - B(\rho^\varepsilon)^{1+\alpha} u_x^\varepsilon) \phi_x dx dt + \int_0^1 \phi(x, 0) u_0^\varepsilon(x) dx = 0.$$

Para finalizar, devemos tomar o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ na equação acima. Por termos que $u^\varepsilon \xrightarrow{w^*} u$ em $L^\infty(0, T; L^{2n})$ e $\phi_t \in L^1(0, T; L^{\frac{2n}{2n-1}})$, temos que

$$\int_0^T \int_0^1 u^\varepsilon \phi_t dt dx \rightarrow \int_0^T \int_0^1 u \phi_t dt dx.$$

Como $u_x^\varepsilon \xrightarrow{w} u_x$ em $L^2(Q_T)$ e $\rho^\varepsilon \rightarrow \rho$ em $C^0(Q_T)$, temos que $(\rho^\varepsilon)^{1+\alpha} u_x^\varepsilon \xrightarrow{w} \rho^{1+\alpha} u_x$ em $L^2(Q_T)$. Assim, por $\phi_x \in L^2(Q_T)$, temos que

$$\int_0^T \int_0^1 (\rho^\varepsilon)^{1+\alpha} u_x^\varepsilon \phi_x dx dt \longrightarrow \int_0^T \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x \phi_x dx dt.$$

Mais ainda, por termos $(\rho^\varepsilon)^\gamma \rightarrow \rho^\gamma$ em $C_0(Q_T)$, podemos garantir que

$$\int_0^T \int_0^1 (\rho^\varepsilon)^\gamma \phi_x dx dt \longrightarrow \int_0^T \int_0^1 \rho^\gamma \phi_x dx dt.$$

De maneira similar temos

$$\int_0^1 u_0^\varepsilon(x) \phi(x, 0) dx \longrightarrow \int_0^1 u_0(x) \phi(x, 0) dx.$$

Logo, temos que

$$\int_0^T \int_0^1 \{u \phi_t + (A \rho^\gamma - B \rho^{1+\alpha} u_x) \phi_x\} dx dt + \int_0^1 u_0(x) \phi(x, 0) dx = 0.$$

Com isso, terminamos a demonstração da existência de solução fraca global. $\square$

2.6 Unicidade de Solução

Nessa seção estabeleceremos a unicidade de solução global (ρ, u) construída anteriormente, com a condição de $u_0 \in H^1([0, 1])$. Inicialmente provaremos um lema que estabelece estimativas sobre u_t , u_x e u_{xx} . Estas estimativas serão obtidas por meio de aproximações, utilizando as mesmas regularizações empregadas no Teorema de Existência.

Lema 2.11. *Sejam (ρ, u) a solução fraca de (2.6)-(2.9) estabelecida na seção anterior. Se $u_0 \in H^1([0, 1])$, então u também satisfaz*

$$\begin{cases} u \in L^\infty([0, T], H^1) \cap L^2([0, T], H^2) \\ u_t \in L^2([0, T], L^2) \end{cases} \quad (2.30)$$

e

$$\|u_t\|_{L^2(Q_T)} + \|u_{xx}\|_{L^2(Q_T)} + \|u_x\|_{L^\infty([0, T], L^2)} \leq C(\|u_0\|_{H^1}, \|\rho_0\|_{W^{1, 2n}}, \inf_{[0, 1]} \rho_0, T), \quad (2.31)$$

onde n é tal que $\frac{n(2n-1)}{2n^2+2n-1} > \alpha$ (como no Teorema 2.9).

Demonstração. Mostremos primeiramente que $\partial_x u_0^\varepsilon \rightarrow \partial_x u_0$ em L^2 . Derivando u_0^ε , como definido no Teorema de Existência, chegamos a

$$\begin{aligned}\partial_x u_0^\varepsilon &= \partial_x(u_0 * j_\varepsilon) - \partial_x(u_0 * j_\varepsilon)(x)\psi_\varepsilon(x) - (u_0 * j_\varepsilon)(x)\partial_x(\psi_\varepsilon(x)) \\ &\quad - \partial_x(u_0 * j_\varepsilon)(x)\psi_\varepsilon(1-x) - (u_0 * j_\varepsilon)(x)\partial_x(\psi_\varepsilon(1-x)) \\ &\quad + (u_0 * j_\varepsilon)(0)\partial_x(\psi_\varepsilon(x)) + (u_0 * j_\varepsilon)(1)\partial_x(\psi_\varepsilon(1-x)) \\ &\quad + \frac{A}{B}(\rho_0^\varepsilon)^{\gamma-\alpha-1}(0)\psi_\varepsilon(x) + \frac{A}{B}(\rho_0^\varepsilon)^{\gamma-\alpha-1}(1)\psi_\varepsilon(1-x).\end{aligned}$$

Já sabemos que $\partial_x(u_0 * j_\varepsilon) \rightarrow \partial_x u_0$ em L^2 . Resta então mostrarmos que todos os demais termos aqui tendem a zero quando ε tende a zero. Por termos que $\psi_\varepsilon \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, vemos que $\partial_x(u_0 * j_\varepsilon)(x)\psi_\varepsilon(x) \rightarrow 0$, $\partial_x(u_0 * j_\varepsilon)(x)\psi_\varepsilon(1-x) \rightarrow 0$, $\frac{A}{B}(\rho_0^\varepsilon)^{\gamma-\alpha-1}(0)\psi_\varepsilon(x) \rightarrow 0$ e $\frac{A}{B}(\rho_0^\varepsilon)^{\gamma-\alpha-1}(1)\psi_\varepsilon(1-x) \rightarrow 0$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}\|((u_0 * j_\varepsilon)(x) - (u_0 * j_\varepsilon)(0))\partial_x \psi_\varepsilon(x)\|_2^2 &= \int_0^1 \{(u_0 * j_\varepsilon)(x) - (u_0 * j_\varepsilon)(0)\}^2 (\partial_x \psi_\varepsilon(x))^2 dx \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon \{(u_0 * j_\varepsilon)(x) - (u_0 * j_\varepsilon)(0)\}^2 dx \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} \max_{[0, \varepsilon]} \{(u_0 * j_\varepsilon)(x) - (u_0 * j_\varepsilon)(0)\}^2 \\ &= \frac{C}{\varepsilon} \max_{[0, \varepsilon]} \left(\int_0^x \partial_y(u_0 * j_\varepsilon)(y) dy \right)^2 \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} \left(\int_0^\varepsilon |\partial_x(u_0 * j_\varepsilon)(x)| dx \right)^2 \\ &\leq C \int_0^\varepsilon |\partial_x(u_0 * j_\varepsilon)(x)|^2 dx \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Da mesma maneira tem-se que

$$\|((u_0 * j_\varepsilon)(x) - (u_0 * j_\varepsilon)(1))\partial_x \psi_\varepsilon(1-x)\|_2^2 = \int_0^1 \{(u_0 * j_\varepsilon)(x) - (u_0 * j_\varepsilon)(1)\}^2 (\partial_x \psi_\varepsilon(1-x))^2 dx \rightarrow 0.$$

Portanto podemos concluir que $\partial_x u_0^\varepsilon \rightarrow \partial_x u_0$ em L^2 . No que se segue nesta demonstração, omitiremos o índice ε nas soluções ρ^ε , u^ε e nas suas derivadas.

Passemos agora aos cálculos para obtenção da estimativa do Lema 2.10. Multiplicando a equação (2.7) por u_t , temos que

$$u_t^2 + Au_t(\rho^\gamma)_x = Bu_t(\rho^{1+\alpha}u_x)_x.$$

Integrando em $(0, 1) \times (0, t)$ encontramos

$$\int_0^t \int_0^1 u_s dx ds + A \int_0^t \left(\rho^\gamma u_s \Big|_0^1 - \int_0^1 \rho^\gamma u_{sx} dx \right) ds = B \int_0^t \left(\rho^{1+\alpha} u_x u_s \Big|_0^1 - \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x u_{sx} dx \right) ds,$$

que pela condição de fronteira se reduz a

$$\int_0^t \int_0^1 u_s dx ds = A \int_0^t \int_0^1 \rho^\gamma u_{sx} dx ds - B \int_0^t \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x u_{sx} dx ds.$$

Agora vamos resolver cada uma dessas integrais separadamente, notando que $u_x(x, 0) = u'_0(x)$.

Usando que $\rho_s = -\rho^2 u_x$, temos:

$$\begin{aligned} A \int_0^t \int_0^1 \rho^\gamma u_{sx} dx ds &= A \int_0^t \left(\rho^\gamma u_x \Big|_0^1 - \int_0^1 (\rho^\gamma)_s u_x dx \right) ds \\ &= A \int_0^1 \rho^\gamma u_x dx - A \int_0^1 \rho_0^\gamma u'_0(x) dx - A\gamma \int_0^t \int_0^1 \rho^{\gamma-1} \rho_s u_x dx ds \\ &= A \int_0^1 \rho^\gamma u_x dx - A \int_0^1 \rho_0^\gamma u'_0(x) dx + A\gamma \int_0^t \int_0^1 \rho^{\gamma+1} u_x^2 dx ds \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B \int_0^t \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x u_{sx} dx ds &= B \int_0^t \left(\rho^{1+\alpha} u_x^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 u_x (\rho^{1+\alpha} u_x)_s dx \right) ds \\ &= B \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x^2 dx - B \int_0^t \int_0^1 u_x ((\alpha+1)\rho^\alpha \rho_s u_x + \rho^{1+\alpha} u_{xs}) dx ds \\ &= B \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x^2 dx - B \int_0^t \rho_0^{1+\alpha} (u'_0(x))^2 dx \\ &\quad - B(1+\alpha) \int_0^t \int_0^1 \rho^\alpha \rho_s u_x^2 dx ds - B \int_0^t \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x u_{xs} dx ds. \end{aligned}$$

Daí,

$$B \int_0^t \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x u_{sx} dx ds = \frac{B}{2} \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x^2 dx - \frac{B}{2} \int_0^1 \rho_0^{1+\alpha} (u'_0(x))^2 dx + \frac{B}{2}(1+\alpha) \int_0^t \int_0^1 \rho^{2+\alpha} u_x^3 dx ds.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^1 u_s^2 dx ds + \frac{B}{2} \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x^2 dx &= \frac{B}{2} \int_0^1 \rho_0^{1+\alpha} (u'_0(x))^2 dx + A \int_0^1 \rho^\gamma u_x dx \\ &\quad - A \int_0^1 \rho_0^\gamma u'_0(x) dx + A\gamma \int_0^t \int_0^1 \rho^{1+\gamma} u_x^2 dx ds - \frac{B}{2}(1+\alpha) \int_0^t \int_0^1 \rho^{2+\alpha} u_x^3 dx ds. \end{aligned}$$

Temos que o primeiro membro desta equação é positivo, sendo igual ao seu módulo. Desta forma para limitá-lo podemos tomar o módulo, usar desigualdade triangular e limitar cada fator do segundo membro separadamente. Procedamos desta maneira.

Usando a limitação superior para ρ e (2.18), temos

$$A\gamma \int_0^t \int_0^1 \rho^{1+\gamma} u_x^2 dx = A\gamma \int_0^t \int_0^1 \rho^{\gamma+1-\alpha-1} \rho^{1+\alpha} u_x^2 dx ds \leq C \int_0^t \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x^2 dx ds \leq C.$$

Novamente usando (2.18), a limitação superior de ρ e a desigualdade $|ab| \leq (a^2 + b^2)/2$, temos

$$A \int_0^1 \rho^\gamma |u_x| dx = A \int_0^1 \rho^{\gamma-\frac{1+\alpha}{2}} \rho^{\frac{1+\alpha}{2}} |u_x| dx \leq \frac{A}{2} \int_0^1 \rho^{2\gamma-\alpha-1} dx + \frac{A}{2} \int_0^1 \rho^{1+\alpha} u_x^2 dx \leq C.$$

Por termos que $\rho_0^\varepsilon \rightarrow \rho_0$ em $W^{1,2n}$ e $\partial_x u_0^\varepsilon \rightarrow \partial_x u_0$ em L^2 , segue-se que

$$\frac{B}{2} \int_0^1 \rho_0^{1+\alpha} (u_0)_x^2 dx \leq C.$$

Novamente por $\partial_x u_0^\varepsilon \rightarrow \partial_x u_0$ em L^2 , e pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$A \int_0^1 \rho_0^\gamma |\partial_x u_0| dx \leq \frac{A}{2} \left(\int_0^1 \rho_0^{2\gamma} dx \right)^{1/2} + \frac{A}{2} \left(\int_0^1 (\partial_x u_0)^2 dx \right)^{1/2} \leq C.$$

Lembremos que nesta demonstração substituímos u_0^ε e ρ_0^ε por simplesmente por u_0 e ρ_0 , respectivamente.

Usando a limitação inferior de ρ e estas quatro estimativas anteriores, chegamos a

$$\int_0^1 u_x^2 dx + \int_0^t \int_0^1 u_s^2 dx ds \leq C + C \int_0^t \int_0^1 \rho^{2+\alpha} |u_x|^3 dx. \quad (2.32)$$

Conseguindo uma limitação para a integral do lado direito estaremos com o nosso lema parcial-

mente demonstrado, como veremos. Estimamos esta integral da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \int_0^1 \rho^{1+\alpha} |u_x|^3 dx ds &\leq \int_0^t \max_{[0,1]} |(\rho^{1+\alpha} u_x)(\cdot, s)| \int_0^1 u_x^2 dx ds \\
 &= \int_0^t \max_{[0,1]} |(B\rho^{1+\alpha} u_x - A\rho^\gamma + A\rho^\gamma)(\cdot, s)| \int_0^1 u_x^2 dx ds \\
 &\leq \int_0^t \max_{[0,1]} |(B\rho^{1+\alpha} u_x - A\rho^\gamma)(\cdot, s)| \int_0^1 u_x^2 dx ds \\
 &\quad + \int_0^t \max_{[0,1]} A\rho^\gamma(\cdot, s) \int_0^1 u_x^2 dx ds \\
 &= \int_0^t \max_{[0,1]} \left| \int_0^x (B\rho^{1+\alpha} u_x - A\rho^\gamma)_y(\cdot, s) dy \right| \int_0^1 u_x^2 dx ds + C \int_0^1 u_x^2 dx \\
 &\leq \int_0^t \int_0^1 |(B\rho^{1+\alpha} u_x - A\rho^\gamma)_x(x, s)| dx \int_0^1 u_x^2 dx ds + C \\
 &= \int_0^t \left(\int_0^1 |u_s| dx \right) \left(\int_0^1 u_x^2 dx \right) ds + C \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_0^1 |u_s| dx \right)^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_0^1 u_x^2 dx \right)^2 ds + C \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 u_s^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_0^1 u_x^2 dx \right)^2 ds + C.
 \end{aligned}$$

Retornando à estimativa (2.32), segue-se que

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 u_x^2 dx + \int_0^t \int_0^1 u_s^2 dx ds &\leq C + C \int_0^t \left(\int_0^1 u_x^2 dx \right) \left(\int_0^1 u_x^2 dx \right) ds \\
 &= C + C \int_0^t \|u_x(s)\|_2^2 \int_0^1 u_x^2 dx ds.
 \end{aligned}$$

Como já temos que $\|u_x\|_{L^2(Q_T)} \leq C$, pelo Lema de Grownwall, temos que

$$\int_0^1 u_x^2(x, t) dx + \int_0^t \int_0^1 u_t^2 dx ds \leq C.$$

Com isso temos parte da limitação desejada:

$$\|u_x\|_{L^\infty([0,T],L^2)} + \|u_t\|_{L^2(Q_T)} \leq C.$$

Para obtermos a estimativa do termo restante, $\|u_{xx}\|_{L^2(Q_T)}$, tomemos a equação de conservação do momento

$$u_t = B(1 + \alpha)\rho^\alpha \rho_x u_x + B\rho^{1+\alpha} u_{xx} - A\gamma\rho^{\gamma-1} \rho_x$$

e a multipliquemos por u_{xx} para obter

$$B\rho^{1+\alpha}u_{xx}^2 = u_t u_{xx} - B(1+\alpha)\rho^\alpha \rho_x u_x u_{xx} + A\gamma\rho^{\gamma-1}\rho_x u_{xx}.$$

Integrando em $(0, 1)$ e utilizando a desigualdade de young $(ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2})$, temos

$$\int_0^1 u_{xx}^2 dx \leq C \int_0^1 (u_t^2 + \rho_x^2 + \rho_x^2 u_x^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 u_{xx}^2 dx.$$

Integrando com respeito a t , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^1 u_{xx}^2 dx ds &= C \int_0^t \int_0^1 (u_t^2 + \rho_x^2) dx ds + C \int_0^t \int_0^1 \rho_x^2 u_x^2 dx ds \\ &\leq C + \int_0^t \|u_x(\cdot, s)\|_\infty^2 \int_0^1 \rho_x^2 dx ds \leq C. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|u_{xx}^2\|_{L^2(Q_T)} \leq C.$$

Novamente tomemos cuidado, pois estamos fazendo a identificação $\rho^\varepsilon = \rho$ e $u^\varepsilon = u$. Mas como as bolas são fechadas nas topologias fraca e fraca estrela, temos que agora considerando as funções ρ e u , podemos concluir que

$$\|u_t\|_{L^2(Q_T)} + \|u_{xx}\|_{L^2(Q_T)} + \|u_x\|_{L^\infty([0,T],L^2)} \leq C.$$

□

Teorema 2.12. *Suponhamos que $u_0 \in H^1([0, 1])$ e que as demais condições descritas no Teorema 2.9 são válidas. Então a solução de (2.6)-(2.9), construída na seção anterior é única na classe (2.30).*

Demonstração. Sejam $(\rho_1(x, t), u_1(x, t))$ e $(\rho_2(x, t), u_2(x, t))$ soluções de (2.6)-(2.9) satisfazendo (2.30)-(2.31). Notemos que com estas condições temos regularidade suficiente para fazer as derivações necessárias. Mostremos que estas soluções coincidem a menos de um conjunto de medida nula. Por conveniência, denotemos $v_i(x, t) = \frac{1}{\rho_i(x, t)}$, para $i = 1, 2$.

Pela equação (2.6) temos que $(\rho_1, u_1), (\rho_2, u_2)$ satisfazem

$$\rho_i^{1+\alpha} \partial_x u_i = -\frac{1}{\alpha} \partial_t \rho_i^\alpha \quad \text{e} \quad \partial_x u_i = \partial_t v_i, \quad i = 1, 2.$$

A equação (2.7) nos fornece

$$\begin{cases} u_{1t} + A(\rho_1^\gamma)_x = B(\rho_1^{1+\alpha} u_{1x})_x \\ u_{2t} + A(\rho_2^\gamma)_x = B(\rho_2^{1+\alpha} u_{2x})_x \end{cases}$$

Subtraindo uma equação da outra, vem

$$(u_1 - u_2)_t + A(\rho_1^\gamma - \rho_2^\gamma)_x = B(\rho_1^{1+\alpha} u_{1x} - \rho_2^{1+\alpha} u_{2x})_x.$$

Multiplicando por $(u_1 - u_2)$, temos que

$$(u_1 - u_2)(u_1 - u_2)_t + A(u_1 - u_2)(\rho_1^\gamma - \rho_2^\gamma)_x = B(u_1 - u_2)(\rho_1^{1+\alpha} u_{1x} - \rho_2^{1+\alpha} u_{2x})_x$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u_1 - u_2)^2 + A(u_1 - u_2)(\rho_1^\gamma - \rho_2^\gamma)_x = B(u_1 - u_2)(\rho_1^{1+\alpha} u_{1x} - \rho_2^{1+\alpha} u_{2x})_x.$$

Integrando em $(0, 1)$, usando a condição de fronteira temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_1 - u_2)^2 dx &= B \int_0^1 (u_1 - u_2)(\rho_1^{1+\alpha} u_{1x} - \rho_2^{1+\alpha} u_{2x})_x dx \\ &\quad - A \int_0^1 A(u_1 - u_2)(\rho_1^\gamma - \rho_2^\gamma)_x dx \\ &= B(u_1 - u_2)(\rho_1^{1+\alpha} u_{1x} - \rho_2^{1+\alpha} u_{2x}) \Big|_0^1 \\ &\quad - B \int_0^1 (u_1 - u_2)_x (\rho_1^{1+\alpha} u_{1x} - \rho_2^{1+\alpha} u_{2x}) dx \\ &\quad + A \int_0^1 (u_1 - u_2)_x (\rho_1^{1+\alpha} u_{1x} - \rho_2^{1+\alpha} u_{2x}) dx - A(u_1 - u_2)(\rho_1^\gamma - \rho_2^\gamma) \Big|_0^1 \\ &= A \int_0^1 (u_1 - u_2)_x (\rho_1^{1+\alpha} u_{1x} - \rho_2^{1+\alpha} u_{2x}) dx \\ &\quad - B \int_0^1 (u_1 - u_2)_x (\rho_1^{1+\alpha} u_{1x} - \rho_2^{1+\alpha} u_{2x}) dx \\ &= A \int_0^1 (v_1 - v_2)_t (v_1^{-\gamma} - v_2^{-\gamma}) dx - B \int_0^1 (u_{1x} - u_{2x})^2 \rho_1^{1+\alpha} dx \\ &\quad - B \int_0^1 (u_1 - u_2)_x (v_1^{-(1+\alpha)} - v_2^{-(1+\alpha)}) u_{2x} dx. \end{aligned}$$

Façamos a estimativa de cada parcela separadamente. Considere

$$a(x, t) := \frac{A\gamma}{2} \int_0^1 (v_2 + \tau(v_1 - v_2))^{-(\gamma+1)} d\tau.$$

Assim, temos que a primeira parcela pode ser escrita como sendo

$$\begin{aligned}
 A \int_0^1 (v_1 - v_2)_t (v_1^{-\gamma} - v_2^{-\gamma}) dx &= A \int_0^1 (v_1 - v_2)_t \int_0^1 \frac{d}{d\tau} ((v_2 + \tau(v_1 - v_2))^{-\gamma}) d\tau dx \\
 &= -A\gamma \int_0^1 (v_1 - v_2)_t \int_0^1 (v_2 + \tau(v_1 - v_2))^{-(\gamma+1)} (v_1 - v_2) d\tau dx \\
 &= -2 \int_0^1 (v_1 - v_2)_t (v_1 - v_2) \frac{A\gamma}{2} \int_0^1 (v_2 + \tau(v_1 - v_2))^{-(\gamma+1)} d\tau dx \\
 &= - \int_0^1 \frac{d}{dt} ((v_1 - v_2)^2) a(x, t) dx \\
 &= - \frac{d}{dt} \int_0^1 a(x, t) (v_1 - v_2)^2 dx + \int_0^1 a_t(x, t) (v_1 - v_2)^2 dx.
 \end{aligned}$$

A segunda parcela pode ser estimada da seguinte maneira

$$-B \int_0^1 (u_{1x} - u_{2x})^2 \rho_1^{1+\alpha} dx \leq -M \int_0^1 (u_{1x} - u_{2x})^2 dx,$$

onde M é uma constante de depende da limitação inferior de ρ_1 . A terceira parcela pode ser estimada aplicando a desigualdade de Cauchy da forma $\pm ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$, de forma que temos

$$\begin{aligned}
 -B(u_{1x} - u_{2x})(v_1^{-(1+\alpha)} - v_2^{-(1+\alpha)})u_{2x} &\leq \frac{M}{2}(u_{1x} - u_{2x})^2 + C(v_1^{-(1+\alpha)} - v_2^{-(1+\alpha)})^2(u_{2x})^2 \\
 &\leq \frac{M}{2}(u_{1x} - u_{2x})^2 + C(v_1 - v_2)^2(u_{2x})^2.
 \end{aligned}$$

Assim, tomando $C_0 = M - \frac{M}{2}$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_1 - u_2)^2 dx &\leq -C_0 \int_0^1 (u_{1x} - u_{2x})^2 dx + C_1 \int_0^1 (u_{2x})^2 (v_1 - v_2)^2 dx \\
 &\quad - \frac{d}{dt} \int_0^1 a(x, t) (v_1 - v_2)^2 dx + \int_0^1 a_t(x, t) (v_1 - v_2)^2 dx,
 \end{aligned}$$

onde C_0 e C_1 são constantes positivas dependendo somente de limitações superior e inferior de ρ_1 e ρ_2 .

Temos que esta aplicação $a(x, t)$ é limitada inferiormente por uma constante positiva. De fato, temos que tanto v_1 quanto v_2 são limitadas superiormente digamos por K_1 e K_2 respectivamente. Assim, tomando $K = \max\{K_1, K_2\}$ temos

$$((1 - \tau)v_2 + \tau v_1) \leq ((1 - \tau)K_1 + \tau K_2) \leq ((1 - \tau)K + \tau K) = K.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 a(x, t) &= \frac{A\gamma}{2} \int_0^1 (v_2 + \tau(v_1 - v_2))^{-(\gamma+1)} d\tau \\
 &= \frac{A\gamma}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{(v_2 + \tau(v_1 - v_2))} \right)^{\gamma+1} d\tau \\
 &\geq \frac{A\gamma}{2} \int_0^1 \frac{1}{K^{\gamma+1}} d\tau = \frac{A\gamma}{2K^{\gamma+1}} = C > 0.
 \end{aligned}$$

Além disso, podemos fazer a seguinte limitação superior:

$$\begin{aligned}
 |a_t(x, t)| &= \left| \frac{A\gamma}{2} \int_0^1 \frac{d}{dt} \left((\tau v_1 + (1 - \tau)v_2)^{-(\gamma+1)} \right) d\tau \right| \\
 &\leq \frac{A\gamma}{2} \int_0^1 |(\gamma + 1)(\tau v_1 + (1 - \tau)v_2)^{-(\gamma+2)} (\tau v_{1t} + (1 - \tau)v_{2t})| d\tau \\
 &\leq \frac{A\gamma(\gamma + 1)}{2} C \int_0^1 |v_{2t} + (v_{1t} - v_{2t})\tau| d\tau \\
 &\leq C \int_0^1 (|v_{2t}| + |v_{1t} - v_{2t}|) d\tau \\
 &= C(|v_{2t}| + |v_{1t} - v_{2t}|),
 \end{aligned}$$

onde novamente C depende somente das limitações inferior e superior de ρ_1 e ρ_2 .

Novamente usando a desigualdade de Cauchy, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 |a_t(x, t)(v_1 - v_2)^2| &\leq C(|v_{2t}| + |v_{1t} - v_{2t}|)(v_1 - v_2)^2 \\
 &= C|v_{2t}|(v_1 - v_2)^2 + C|v_{1t} - v_{2t}|(v_1 - v_2)^2 \\
 &\leq \frac{C_0}{2}(v_{1t} - v_{2t})^2 + C(1 + |v_{2t}|)(v_1 - v_2)^2.
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\int_0^1 a_t(x, t)(v_1 - v_2)^2 dx \leq \frac{C_0}{2} \int_0^1 (v_{1t} - v_{2t})^2 dx + C \int_0^1 (1 + |v_{2t}|)(v_1 - v_2)^2 dx.$$

Fazendo uso desta estimativa podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_1 - u_2)^2 dx &+ C_0 \int_0^1 (u_{1x} - u_{2x})^2 dx + \frac{d}{dt} \int_0^1 a(x, t)(v_1 - v_2)^2 dx \\
 &\leq \int_0^1 a_t(x, t)(v_1 - v_2)^2 dx \\
 &\leq \frac{C_0}{2} \int_0^1 (v_{1t} - v_{2t})^2 dx + C \int_0^1 (1 + |v_{2t}|)(v_1 - v_2)^2 dx.
 \end{aligned}$$

Agora, integrando em $(0, 1)$ e usando que

$$(\rho_1(x, 0), u_1(x, 0)) = (\rho_2(x, 0), u_2(x, 0)) = (\rho_0(x), u_0(x)),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 (u_1 - u_2)^2 dx + \int_0^t a(x, s)(v_1 - v_2)^2 dx + \frac{C_0}{2} \int_0^t \int_0^1 (u_{1x} - u_{2x})^2 \\ \leq C \int_0^t \int_0^1 (1 + |u_{2x}|)^2 (v_1 - v_2)^2 dx ds. \end{aligned}$$

Como vimos anteriormente $a(x, t) \geq C > 0$. Logo,

$$\int_0^1 (u_1 - u_2)^2 dx \leq C \int_0^t \int_0^1 (1 + |u_{2x}|)^2 (v_1 - v_2)^2 dx ds$$

e

$$\int_0^1 (v_1 - v_2)^2 dx \leq C \int_0^t \int_0^1 (1 + |u_{2x}|)^2 (v_1 - v_2)^2 dx ds,$$

consequentemente

$$\int_0^1 (u_1 - u_2)^2 dx + \int_0^1 (v_1 - v_2)^2 dx \leq C \int_0^t \int_0^1 (1 + |u_{2x}|)^2 (v_1 - v_2)^2 dx ds. \quad (2.33)$$

Já que $u_{2x} \in L^2([0, T], H^1)$, temos pela imersão de Sobolev $W^{1,p}(0, 1) \hookrightarrow C^0([0, 1])$ que $\int_0^t \|(1 + u_{2x})^2(s)\|_\infty ds < \infty$. Assim, chegamos a

$$\int_0^1 (v_1 - v_2)^2 dx \leq C \int_0^t \|(1 + u_{2x})^2(s)\|_\infty \int_0^1 (v_1 - v_2)^2 dx ds.$$

Pelo Lema de Gronwall, temos que

$$\int_0^1 (v_1 - v_2)^2 dx ds = 0.$$

Logo, $v_1 = v_2$ em quase todo ponto de $[0, 1] \times [0, T]$. Consequentemente, também temos

$$\int_0^1 (u_1 - u_2)^2 dx = 0,$$

devido a (2.33). Portanto, $u_1 = u_2$ em quase todo ponto de $[0, 1] \times [0, T]$. $\square$

Observação: Os autores em [7] afirmam que a unicidade de solução fraca é válida na classe de funções satisfazendo

$$\begin{aligned} \rho \in L^\infty([0, T], H^1), \rho_t \in L^2([0, T], L^2), u \in L^\infty([0, T], L^2) \cap L^2([0, T], H^1) \\ \rho(x, t) > 0 \text{ em } [0, 1] \times [0, T]. \end{aligned}$$

No entanto, não nos ficou claro alguns detalhes em [7] para chegar a este ponto, especialmente no que diz respeito aos cálculos com derivações que fizemos na demonstração acima. Por isso, nos restringimos aqui à unicidade na classe menor descrita por (2.30)-(2.31).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] R. A. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.
- [2] S.N. ANTONTSEV, A.V. KAZHIKHOV, V.N. MONAKHOV, *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids*, North-Holland, Amsterdam, New York, 1990.
- [3] R. G. BARTLE, *Elements of real analysis*, John Wiley & Sons, 1964.
- [4] L. C. EVANS, *Partial Differential Equation*, American Mathematical Society, GSM 19, 1998.
- [5] E. FEIREISL, *Dynamics of Viscous Compressible Fluids*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, **26**, 2004.
- [6] G. B. FOLLAND, *Real Analysis, Modern Techniques and their Applications*, John Wiley & Sons, 2nd ed., 1999.
- [7] S. JIANG, Z. P. XIN AND P. ZHANG, *Global weak solutions to 1D compressible isentropic Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity*, Methods Appl. Anal., **12** (2005) 239-251.
- [8] A. KAZHIKOV AND V. SHELUKHIN, *Unique global solutions in time of initial boundary value problems for one-dimensional equations of a viscous gas*, PMMJ Appl. Math. Mech. **41** (1977) 273-283.
- [9] O.A. LADYZENSKAJA, V.A. SOLONNIKOV AND N.N. URAL'CEVA, *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968.

- [10] SEVERINO T. MELO E F. D. MOURA NETO, *Mecânica dos Flúidos e Equações Diferenciais*, 18o. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1991.
- [11] A. NOVOTNY, I. STRASKRABA, *Introduction to the Mathematical Theory of Compressible Flow*, Oxford University Press, 2004.
- [12] Y. QIN, L. HUANG, Z. YAO, *Regularity of 1D compressible isentropic Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity*, J. Differential Equations **245** (2008) 3956-3973.
- [13] R. E. SHOWALTER, *Monotone Operator in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, SURV 49, 1997.
- [14] J. SMOLLER, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, 1982.
- [15] J. SOTOMAYOR, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides, **11**, IMPA, 1979.
- [16] T. YANG, Z.-A. YAO, C.-J. ZHU, *Compressible Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity and vacuum*, Comm. Partial Differential Equations, **26** (2001) 965-981.
- [17] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1968.
- [18] W. P. ZIEMER, *Weakly Differentiable Functions*, Springer-Verlag, New York, 1989.