



Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



# Contribuições na Teoria de Otimização para alguns Problemas de Programação Infinita e de Programação com Tempo Contínuo

**Valeriano Antunes de Oliveira**

Doutorado em Matemática Aplicada

Este trabalho teve apoio financeiro do CNPq e do programa BIG/UNICAMP

# Contribuições na Teoria de Otimização para alguns Problemas de Programação Infinita e de Programação com Tempo Contínuo

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Valeriano Antunes de Oliveira** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 02 de março de 2007

---

Prof. Dr. **Marko Antonio Rojas Medar**  
Orientador

## Banca examinadora:

Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar  
Profa. Dra. Maria Aparecida Diniz Ehrhardt  
Prof. Dr. Adilson José Vieira Brandão  
Prof. Dr. Roberto Andreani  
Prof. Dr. Fernando Manuel Ferreira Lobo Pereira

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática Aplicada**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**  
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Oliveira, Valeriano Antunes de  
OL4c Contribuições na teoria de otimização para alguns problemas de  
programação infinita e de programação com tempo contínuo / Valeriano  
Antunes de Oliveira -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Marko Antonio Rojas-Medar  
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Otimização matemática. 2. Programação não-linear. 3. Análise  
funcional não-linear. I. Rojas-Medar, Marko Antonio. II. Universidade  
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Contributions in the optimization theory for some infinite programming problems and continuous time programming problems.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Mathematical optimization. 2. Non-linear programming. 3. Non-linear functional analysis.

Área de concentração: Análise Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

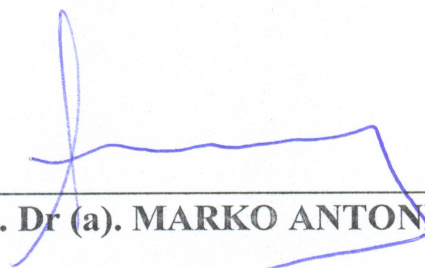
Banca examinadora: Prof. Dr. Marko Antonio Rojas-Medar (IMECC-UNICAMP)  
Profª. Dra. Maria Aparecida Diniz Ehrhardt (IMECC-UNICAMP)  
Prof. Dr. Adilson José Vieira Brandão (UFABC)  
Prof. Dr. Roberto Andreani (IMECC-UNICAMP)  
Prof. Dr. Fernando Manuel F. Lobo Pereira (Univ. do Porto/Portugal)

Data da defesa: 02/03/2007

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática Aplicada

**Tese de Doutorado defendida em 02 de março de 2007 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



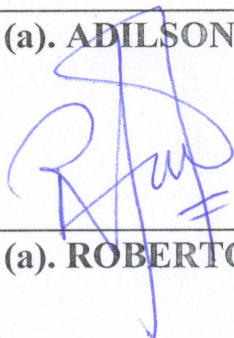
**Prof. (a). Dr (a). MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR**



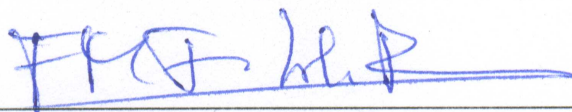
**Prof. (a). Dr (a). MARIA APARECIDA DINIZ EHRHARDT**



**Prof. (a). Dr (a). ADILSON JOSÉ VIEIRA BRANDÃO**



**Prof. (a). Dr (a). ROBERTO ANDREANI**



**Prof. (a) Dr. (a) FERNANDO MANUEL FERREIRA LOBO PEREIRA**

À minha família  
*Dedico*



---

# AGRADECIMENTOS

- À minha família e à minha namorada, pela compreensão e apoio.
- Aos colegas, professores e funcionários do IMECC.
- Ao Prof. Dr. Marko Rojas-Medar que me orientou neste trabalho.
- À banca examinadora pelas sugestões e críticas.
- Ao CNPq e ao programa BIG/UNICAMP pelo apoio financeiro.
- À Deus acima de tudo.



---

# RESUMO

Neste trabalho de tese são estudados dois tipos de problemas de otimização abstrata. O primeiro corresponde ao problema de programação infinita. Tal problema consiste em minimizar um funcional sujeito a um número infinito de restrições, onde as funções envolvidas são definidas em um espaço de Banach. O segundo diz respeito ao problema de programação com tempo contínuo, o qual consiste em minimizar um funcional, dado na forma integral, sujeito a um número finito de restrições de desigualdade. Foram abordados os problemas mono e multi-objetivos. Os resultados estabelecidos fornecem condições de otimalidade para tais problemas. Condições suficientes foram obtidas usando a noção de invexidade e também usando uma relaxação de invexidade, a KT-invexidade. Sob hipóteses de qualificação de restrição, KT-invexidade se torna também uma condição necessária de otimalidade. São também apresentados alguns resultados de dualidade.

**Palavras-chave:** programação infinita, programação com tempo contínuo, condições de otimalidade, soluções de Kuhn-Tucker, soluções fracamente eficientes, soluções propriamente eficientes, invexidade, KT-invexidade, dualidade.



---

# ABSTRACT

In this thesis work it is regarded two type of abstract optimization problems. The first one corresponds to the infinite programming problem. A such problem consists in minimizing a functional subject to an infinite number of constraints, where the functions involved are defined in a Banach space. The second one is the continuous time programming problem, which consists in to minimize a functional, given in the integral form, subject to a finite number of inequalities constraints. It were studied the mono and multi-objective problems. The established results furnish optimality conditions for these problems. Sufficient conditions were obtained using the notion of invexity and also a relaxation of invexity, the KT-invexity. Under constraint qualifications assumptions, KT-invexity becomes also a necessary optimality condition. Some results about duality are also presented.

**Keywords:** infinite programming, continuous time programming, optimality conditions, Kuhn-Tucker solutions, weakly efficient solutions, properly efficient solutions, invexity, KT-invexity, duality.



---

# SUMÁRIO

|                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introdução</b>                                                  | <b>1</b>  |
| <b>Considerações sobre Convexidade Generalizada</b>                | <b>7</b>  |
| <b>1 Problemas de Programação Infinita</b>                         | <b>15</b> |
| 1.1 Notações & Hipóteses . . . . .                                 | 15        |
| 1.2 Aplicações . . . . .                                           | 16        |
| <b>2 Problemas de Otimização Abstratos</b>                         | <b>21</b> |
| 2.1 Condições de Otimalidade . . . . .                             | 21        |
| 2.2 Teorema de Alternativa . . . . .                               | 29        |
| <b>3 Problemas de Programação Infinita Mono-Objetivo</b>           | <b>39</b> |
| 3.1 Condições Necessárias . . . . .                                | 39        |
| 3.2 Condições Suficientes . . . . .                                | 45        |
| 3.3 Dualidade . . . . .                                            | 50        |
| <b>4 Problemas de Programação Infinita Multi-Objetivo</b>          | <b>55</b> |
| 4.1 Condições de Otimalidade para Eficiência Fraca . . . . .       | 56        |
| 4.2 Eficiência Própria e Problemas Escalares . . . . .             | 62        |
| <b>5 Problemas de Programação com Tempo Contínuo</b>               | <b>67</b> |
| 5.1 Notações & Hipóteses . . . . .                                 | 67        |
| 5.2 Aplicações . . . . .                                           | 68        |
| <b>6 Problemas de Programação com Tempo Contínuo Mono-Objetivo</b> | <b>71</b> |

|                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>7 Problemas de Programação com Tempo Contínuo Não-Suaves</b>     | <b>79</b> |
| <b>8 Problemas de Programação com Tempo Contínuo Multi-Objetivo</b> | <b>87</b> |
| 8.1 KT-Pseudo-Invexidade e Condições de Otimalidade . . . . .       | 88        |
| 8.2 KT-Invexidade e o Problema Escalar Associado . . . . .          | 91        |
| <b>Trabalhos Futuros</b>                                            | <b>95</b> |
| <b>Referências Bibliográficas</b>                                   | <b>97</b> |

---

# INTRODUÇÃO

Em [23], Martin estabeleceu um interessante resultado relativo à caracterização de minimizadores globais de problemas de programação matemática. Ele introduziu o conceito de KT-invexidade e mostrou que vale a propriedade de que todo ponto estacionário (ou ponto de Kuhn-Tucker) é minimizador global se e somente se o problema é KT-invexo. A KT-invexidade é uma relaxação da invexidade, que por sua vez, sob certo ponto de vista, é uma generalização da convexidade. A invexidade, assim como a convexidade, desempenha um papel importante quanto a condições suficientes de otimalidade. É bem conhecido na teoria de otimização que em problemas convexos vale a propriedade de que todo ponto estacionário é minimizador global. Esta propriedade também é válida para problemas invexos. Logo vê-se que a convexidade e a invexidade são condições suficientes para a validade de tal propriedade. O resultado de Martin diz que a KT-invexidade é também uma condição suficiente para valer esta propriedade. Mas o que é interessante no resultado de Martin é que ele diz que vale a recíproca, ou seja, a KT-invexidade é também uma condição necessária para valer esta propriedade. Portanto, o resultado de Martin mostra que a maior classe de problemas onde é válida esta propriedade é a classe dos problemas KT-invexos.

Um dos objetivos desta tese foi o de generalizar o resultado de Martin [23] para alguns problemas de otimização abstratos, ou problemas de otimização em espaços de dimensão infinita. Os problemas abordados foram os problemas de programação infinita e os problemas de programação com tempo contínuo.

Um problema de programação infinita é dado na forma abaixo:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & \left. \begin{array}{l} g_{\alpha}(x) \leq 0, \alpha \in A, \\ h_{\beta}(x) = 0, \beta \in B, \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (\text{PPI})$$

onde  $f, g_\alpha, h_\beta : X \rightarrow \mathbb{R}$  para  $\alpha \in A$  e  $\beta \in B$ ,  $X$  é um espaço real de Banach e  $A$  e  $B$  são conjuntos de índices. Usualmente,  $A$  e  $B$  são subconjuntos de espaços Euclidianos.

Na formulação acima, o problema de programação infinita foi estudado em poucos trabalhos. Por exemplo, Schirotzek [33] e Tapia e Trosset [35]. Schirotzek considerou  $X$  como um espaço topológico de Hausdorff localmente convexo, mas ele abordou o problema com restrições somente de desigualdade. Tapia e Trosset consideraram  $X$  como um espaço de Hilbert. Contudo, (PPI) pode ser visto como um problema de otimização entre espaços de Banach, e para estes existe uma extensa bibliografia. Por exemplo, Ben-Tal e Zowe [4], Brandão [5], Brandão *et al.* [6], Craven [11], Guignard [17], Luenberger [21], Robinson [27], Santos [29], Santos *et al.* [31] e [32] e Varaiya [36].

Em [4], Ben-Tal e Zowe estudaram um problema de otimização abstrato, do qual o problema de programação infinita, sob certas condições, é um caso particular. Assim sendo, os resultados de Ben-Tal e Zowe em [4] podem ser aplicados a (PPI).

Condições necessárias de otimalidade de primeira e segunda ordens para o problema acima foram dadas em [4] por Ben-Tal e Zowe. Nesta tese, a teoria de Ben-Tal e Zowe foi usada para estabelecer condições necessárias de primeira e segunda ordens para (PPI). As condições de primeira ordem obtidas são semelhantes àquelas dadas por Schirotzek [33] e Tapia e Trosset [35], mas sob hipóteses diferentes. Em relação às condições de segunda ordem, não foram encontradas referências onde elas fossem estudadas especificamente para o problema (PPI). A teoria existente é apenas para problemas gerais; como o problema estudado por Ben-Tal e Zowe em [4].

Ainda em relação às condições necessárias, são apresentadas algumas qualificações de restrição e uma caracterização de otimalidade do tipo Kuhn-Tucker é obtida.

Ben-Tal e Zowe também apresentaram uma condição suficiente de segunda ordem. Neste trabalho, também são dadas condições suficientes, mas não usando os resultados de Ben-Tal e Zowe. Aqui as condições suficientes são obtidas usando invexidade. Além disso, é generalizado para os problemas de programação infinita a noção de KT-invexidade e é obtido um resultado similar ao de Martin [23].

A demonstração de que KT-invexidade é uma condição suficiente para que toda solução estacionária (ou de Kuhn-Tucker) seja uma solução ótima global é direta. Em [23] Martin usou o Teorema de Alternativa de Motzkin (ver Mangasarian [22]) para obter a recíproca, isto é, para provar que KT-invexidade é uma condição necessária para que toda solução estacionária seja uma solução ótima global. Aqui é desenvolvido um teorema de alternativa adequado para o ambiente de programação infinita. Isto é feito usando a teoria de Ben-Tal e Zowe.

Em relação aos resultados de dualidade é considerado um problema dual do tipo Wolfe e estabelecidos os teoremas de dualidade fraca, de dualidade forte e de dualidade inversa. Estes resultados são obtidos, também, usando o conceito de invexidade.

Um problema de programação com tempo contínuo é da forma:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimizar } \phi(x) = \int_0^T f(t, x(t)) dt \\ \text{sujeito a } \quad g(t, x(t)) \leq 0 \text{ q.s. em } [0, T], \\ \quad \quad \quad x \in X, \end{array} \right\} \quad (\text{PTC})$$

onde  $X$  é um subconjunto aberto, convexo e não-vazio do espaço de Banach  $L_\infty^n[0, T]$ ,  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t, x(t)) = \xi(x)(t)$  e  $g(t, x(t)) = \gamma(x)(t)$ , com  $\xi : X \rightarrow \Lambda_1^1[0, T]$  e  $\gamma : X \rightarrow \Lambda_1^m[0, T]$ .  $L_\infty^n[0, T]$  denota o espaço de todas as funções vetoriais  $n$ -dimensionais que são Lebesgue mensuráveis e essencialmente limitadas definidas no intervalo compacto  $[0, T] \subset \mathbb{R}$ , com norma  $\|\cdot\|_\infty$  definida por

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \text{ess sup}\{|x_j(t)|, 0 \leq t \leq T\},$$

onde para cada  $t \in [0, T]$ ,  $x_j(t)$  é a  $j$ -ésima componente de  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  e  $\Lambda_1^m[0, T]$  denota o espaço de todas as funções vetoriais  $m$ -dimensionais que são essencialmente limitadas e Lebesgue mensuráveis, definidas em  $[0, T]$ , com a norma  $\|\cdot\|_1$  definida por

$$\|y\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \int_0^T |y_j(t)| dt.$$

Este problema de programação com tempo contínuo não pode ser visto como caso particular do problema de programação infinita e também não pode ser tratado como um caso especial de um problema de programação abstrato, pois o espaço  $\Lambda_1^m[0, T]$  não é completo e seu cone não-negativo  $\{y \in \Lambda_1^m[0, T] : y(t) \geq 0 \text{ q.s. em } [0, T]\}$  possui interior vazio. Estas propriedades são invariavelmente admitidas em formulações abstratas.

O primeiro autor a estudar o problema com tempo contínuo foi Bellman em [3]. Ele estudou um tipo de problema de otimização, que agora é conhecido como problema de programação linear com tempo contínuo. Depois disso, vários outros autores estudaram problemas com tempo contínuo mais gerais, considerando, por exemplo, problemas não-lineares. Em [38], Zalmai obteve condições de otimalidade do tipo Kuhn-Tucker. Os resultados de Zalmai são generalizações naturais das condições de Kuhn-Tucker em dimensão finita. O caso não-diferenciável foi estudado, por exemplo, em Brandão [5], Brandão *et al.* [8], Rojas-Medar *et al.* [28], Santos [29] e Santos *et al.* [30]. Uma boa lista de referências sobre problemas com tempo contínuo pode ser encontrada em [38].

Neste trabalho de tese, é introduzida a noção de KT-inxexidade para os problemas de programação com tempo contínuo e é generalizado o resultado de Martin [23] para (PTC) tanto no caso diferenciável como no caso não-diferenciável.

Nesta tese também são estudados problemas de otimização com múltiplos objetivos.

Nos trabalhos [24] e [25], Osuna-Gómez *et al.* fizeram um estudo similar ao de Martin para problemas de programação multi-objetivo. Foi introduzida a noção de KT-pseudo-invexidade e mostrado que toda solução vetorial de Kuhn-Tucker é uma solução fracamente eficiente se e somente se o problema é KT-pseudo-invexo. Osuna-Gómez *et al.* também introduziram a noção de KT-invexidade e fizeram um estudo relacionando as soluções fracamente eficientes do problema vetorial (multi-objetivo) com as soluções ótimas de um problema escalar associado. Foi mostrado que toda solução vetorial de Kuhn-Tucker é uma solução fracamente eficiente e resolve um problema escalar com pesos se e somente se o problema é KT-invexo.

Outro objetivo deste trabalho foi o de generalizar alguns resultados de Osuna-Gómez *et al.* [24] e [25] para os problemas de programação infinita e com tempo-contínuo no caso multi-objetivo.

Da mesma forma que o problema de programação infinita é um caso particular do problema abstrato estudado por Ben-Tal e Zowe no caso mono-objetivo, assim o é no caso multi-objetivo. Neste caso, a noção de otimalidade usada por Ben-Tal e Zowe coincide com a noção de eficiência fraca para o problema multi-objetivo. Assim, usando a teoria de Ben-Tal e Zowe, são obtidas condições necessárias de primeira e segunda ordens para soluções fracamente eficientes. São também estudadas qualificações de restrições e obtida uma caracterização do tipo Kuhn-Tucker para soluções fracamente eficientes. São obtidas condições suficientes para eficiência fraca e eficiência própria via invexidade. Mais, é generalizado para os problemas de programação infinita a noção de KT-invexidade e é estabelecido um resultado similar ao de Osuna-Gómez *et al.* [25].

Em [15], Geoffrion também faz um estudo relacionando o conjunto das soluções propriamente eficientes de um programa multi-objetivo com o conjunto das soluções ótimas de um programa escalar associado. Geoffrion usa hipóteses de convexidade e um teorema de alternativa. Aqui é obtido um resultado similar usando um teorema de alternativa adequado (desenvolvido no Capítulo 2) e invexidade ao invés de convexidade.

Em relação aos problemas de programação com tempo contínuo multi-objetivo, foram generalizadas as noções de KT-invexidade e de KT-pseudo-invexidade (introduzidas em [24]) e resultados semelhantes são estabelecidos.

Esta tese está dividida em duas partes. A primeira parte, onde são estudados os problemas de programação infinita, é formada pelos Capítulos 1 ao 4. No Capítulo 1 são feitas as preliminares da primeira parte e apresentadas algumas aplicações dos problemas de programação infinita. O Capítulo 2 traz a teoria de Ben-Tal e Zowe. Neste capítulo é também desenvolvido um teorema de alternativa, que é útil nos Capítulos 3 e 4. O caso mono-objetivo é estudado no Capítulo 3 e o caso multi-objetivo no Capítulo 4. A segunda parte, Capítulos 5 ao 8, é dedicada aos problemas de programação com tempo contínuo. Algumas notações

e hipóteses referentes a esta segunda parte, além de algumas aplicações, são dadas no Capítulo 5. No Capítulo 6 são estudados os problemas com tempo contínuo no caso diferenciável. O caso não-diferenciável é estudado no Capítulo 7. No Capítulo 8 é abordado o problema multi-objetivo.

Houve uma tentativa de se escrever esta tese de modo que os capítulos sejam o mais independente possível entre si. Assim, o leitor interessado em algum capítulo específico poderá ir direto a ele sem precisar ter lido os capítulos anteriores. Exceção aos Capítulos 1 e 2, que é indispensável para a leitura dos Capítulos 3 e 4, e ao Capítulo 5, necessário para a leitura dos Capítulos 6 ao 8. De antemão prevenimos o leitor disposto em ler o texto inteiro que há definições, teoremas e demonstrações que são, de certa forma, repetitivos. É o preço a se pagar pela independência entre os capítulos.

A leitura deste texto exige algum conhecimento de Análise Funcional e Teoria da Medida. Para estes assuntos, o leitor pode consultar Brézis [9] e Folland [14]. Além disso, ao leitor não familiarizado com a teoria de otimização, mesmo em dimensão finita, recomenda-se, para uma melhor compreensão dos conceitos aqui tratados, a leitura de algum livro de programação não-linear. Por exemplo, Bazaraa e Shetty [2] ou Izmailov e Solodov [19] ou Mangasarian [22].

Antes de iniciar especificamente o estudo dos problemas em dimensão infinita, temos algumas considerações sobre convexidade generalizada e resultados relacionados, em dimensão finita.



---

# Considerações sobre Convexidade Generalizada

---

---

## Definições e Relações

---

Iniciemos com as definições dos vários tipos de convexidade generalizada. Depois passemos às relações entre eles.

Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável, onde  $D$  é um subconjunto aberto e não-vazio.

### Definições:

1.  $f$  é dita ser *convexa* em  $u \in D$  se

$$f(x) - f(u) \geq \nabla f(u)(x - u) \quad \forall x \in D.$$

2.  $f$  é dita ser *quasiconvexa* em  $u \in D$  se

$$f(x) \leq f(u) \Rightarrow \nabla f(u)^T(x - u) \quad \forall x \in D.$$

3.  $f$  é dita ser *pseudoconvexa* em  $u \in D$  se

$$\nabla f(u)^T(x - u) \Rightarrow f(x) \geq f(u) \quad \forall x \in D.$$

4.  $f$  é dita ser *invexa* em  $u \in D$  se existe uma aplicação  $\eta : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$f(x) - f(u) \geq \nabla f(u)^T \eta(x, u) \quad \forall x \in D.$$

5.  $f$  é dita ser *quasinvexa* em  $u \in D$  se existe uma aplicação  $\eta : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$f(x) \leq f(u) \Rightarrow \nabla f(u)^T \eta(x, u) \leq 0 \quad \forall x \in D.$$

6.  $f$  é dita ser *pseudoinvexa* em  $u \in D$  se existe uma aplicação  $\eta : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$\nabla f(u)^T \eta(x, u) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(u) \quad \forall x \in D.$$

Quando  $f$  é convexa (quasiconvexa, pseudoconvexa, invexa, quasinvexa, pseudoinvexa) em cada ponto de  $D$ , diz-se que  $f$  é simplesmente convexa (quasiconvexa, pseudoconvexa, invexa, quasinvexa, pseudoinvexa).

Em [12], Craven mostrou que uma função  $f$  é invexa se  $f = h \circ \phi$ , com  $h$  convexa,  $\phi$  diferenciável e tal que a matriz jacobiana  $J\phi(x)$  tem posto completo (ou seja, é inversível). Portanto algumas funções invexas podem ser obtidas de funções convexas por uma transformação adequada do espaço domínio. Tais transformações destroem a propriedade de convexidade, mas não a de invexidade. A nomenclatura *invexo* (do inglês *invex*), que vem de *invariante convexo*, foi introduzida em [12] para expressar esse fato. Sejam  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Tome  $f = h \circ \phi$  e  $x, u \in \mathbb{R}^n$ . Temos

$$\begin{aligned} f(x) - f(u) &= h(\phi(x)) - h(\phi(u)) \\ &\geq \nabla h(\phi(x))^T [\phi(x) - \phi(u)] \\ &= \nabla f(x)^T [J\phi(x)]^{-1} [\phi(x) - \phi(u)] \\ &= \nabla f(x)^T \eta(x, u), \end{aligned}$$

onde  $\eta(x, u) = [J\phi(x)]^{-1} [\phi(x) - \phi(u)]$ .

### Definições:

1.  $u \in D$  é dito ser um *ponto estacionário* de  $f$  se  $\nabla f(u) = 0$ .
2.  $u \in D$  é dito ser um *mínimo global* de  $f$  se  $f(x) \geq f(u)$  para todo  $x \in D$ .

### Teorema:

1. Convexidade implica pseudoconvexidade que por sua vez implica quasiconvexidade. As recíprocas são falsas.
2. Pseudoconvexidade implica invexidade. A recíproca não é verdadeira. Além disso, existem funções invexas que não são quasiconvexas e funções quasiconvexas que não são invexas.

3. A classe das funções pseudoinvexas coincide com a classe das funções invexas.
4. Quasiconvexidade implica quasivexidade. Invexidade implica quasinvexidade. As recíprocas não são verdadeiras.
5. A classe das funções pseudoconvexas é igual a intersecção da classe das funções quasiconvexas com a classe das funções invexas.
6.  $f$  é invexa em  $D$  se e somente se todo ponto estacionário de  $f$  é um mínimo global.
7. Se  $f$  não tem pontos estacionários então  $f$  é invexa.

Para ver as demonstrações, consulte Brandão *et al.* [7].

Observemos que convexidade implica invexidade com  $\eta(x, u) = x - u$ . A recíproca não é verdadeira.

Abaixo reproduzimos alguns exemplos de Brandão *et al.* [7].

### Exemplos:

1. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1 - \exp(-x^2)$ . Vê-se claramente que  $f$  não é convexa. Mas  $f$  é invexa com

$$\eta(x, u) = \begin{cases} \frac{-\exp(-x^2) + \exp(-u^2)}{2u \exp(-u^2)} & \text{se } u \neq 0 \\ 0 & \text{se } u = 0. \end{cases}$$

2. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^3$ .  $f$  é claramente quasiconvexa, mas não é pseudoinvexa e nem invexa. De fato,  $f'(0)(-1 - 0) = 0$  e  $-1 = f(-1) < f(0) = 0$ , de modo que  $f$  não é pseudoconvexa. O único ponto estacionário de  $f$  é  $u = 0$ , que não é mínimo global. Logo  $f$  não é invexa.
3. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x + x^3$ .  $f$  claramente não é convexa, mas é pseudoconvexa. De fato, se  $f'(u)(x - u) = (1 + 3u^2)(x - u) \geq 0$  então  $x \geq u$ , de modo que  $f(x) = x + x^3 \geq u + u^3 = f(u)$ .
4. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x + x^3 - 10y^3 - y$ .  $f$  é invexa, mas não é pseudoconvexa. De fato,  $\nabla f(x, y) = (1 + 3x^2, -30y^2 - 1)^T \neq (0, 0)^T \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , de modo que  $f$  não possui pontos estacionários. Logo  $f$  é invexa. Por outro lado,  $\nabla f(0, 0)^T[(2, 1) - (0, 0)]^T = (1, -1)(2, 1)^T = 1 > 0$  e  $f(2, 1) = -1 < 0 = f(0, 0)$ .

5. Seja  $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sin^3 x$ .  $f$  é quasinvexa, mas não é quasiconvexa e nem invexa. De fato,  $f$  é quasinvexa com  $\eta(x, u) = (\cos u)(\sin x - \sin u)$ . Porém,  $f(3\pi/4) = f(\pi/4)$  e  $f'(\pi/4)(3\pi/4 - \pi/4) = 3\pi/8 > 0$ , donde  $f$  não é quasiconvexa. O único ponto estacionário de  $f$  é  $u = \pi/2$ , que não é mínimo global. Portanto  $f$  não é invexa.

Na Figura 1 temos um diagrama que resume as relações entre os diversos tipos de convexidade generalizada apresentados nesta seção.

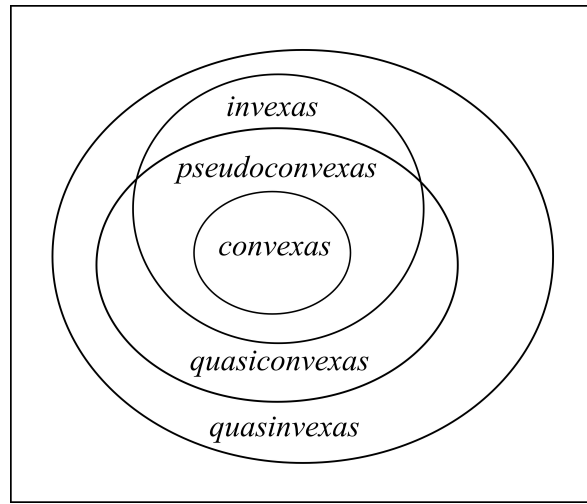


Figura 1: Relações entre as classes de funções convexas generalizadas.

---

## Aplicações

---

Considere o seguinte problema de programação matemática:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \end{array} \right\} \quad (\text{P})$$

onde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , são funções diferenciáveis e  $D$  é um conjunto aberto.

**Definição:** Um ponto  $u \in D$  tal que  $g_i(u) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , é dito ser um ponto esta-

cionário (ou ponto de Kuhn-Tucker) de  $(P)$  se existe  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$\nabla f(u) + \sum_i^m \lambda_i \nabla g_i(u) = 0, \quad (1)$$

$$\lambda_i g_i(u) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

**Definição:** Um ponto  $u \in D$  é dito ser um minimizador global de  $(P)$  se  $f(x) \geq f(u)$  para todo  $x$  tal que  $g_i(x) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

É bem conhecido na teoria de otimização o resultado que diz que se os dados do problemas são convexos, ou seja, se

$$f(x) - f(u) \geq \nabla f(u)^T(x - u), \quad (4)$$

$$g_i(x) - g_i(u) \geq \nabla g_i(u)^T(x - u), \quad i \in I(u) = \{i : g_i(u) = 0\}, \quad (5)$$

para todos  $x, u \in D$ , então todo ponto estacionário é minimizador global. De fato, seja  $u$  um ponto estacionário. De (3), (4) e (5) segue que

$$f(x) - f(u) \geq \nabla f(u)^T(x - u) + \sum_{i \in I(u)} \lambda_i \nabla g_i(u)^T(x - u) + \sum_{i \in I(u)} \lambda_i [-g_i(x) + g_i(u)]$$

para todos  $x, u \in D$ . Levando em conta (1) e (2), obtém-se

$$f(x) - f(u) \geq - \sum_{i \in I(u)} \lambda_i g_i(x) \quad \forall x \in D.$$

Logo para  $x \in D$  tal que  $g_i(x) \leq 0$ ,  $i \in I(u)$ , tem-se  $f(x) - f(u) \geq 0$ . Portanto  $u$  é um minimizador global.

Esta é uma propriedade bastante interessante e é desejável estender a classe de problemas onde ela é válida. Em Mangasarian [22] está provado que ela continua sendo válida se as condições em (4)-(5) forem trocadas por

$$\begin{aligned} \nabla f(u)^T(x - u) &\Rightarrow f(x) \geq f(u), \\ g_i(x) \leq g_i(u) &\Rightarrow \nabla g_i(u)^T(x - u), \quad i \in I(u). \end{aligned}$$

As condições acima significam que  $f$  é pseudoconvexa e que  $g_i$  é quasiconvexa, para cada  $i \in I(u)$ . Pseudoconvexidade e quasiconvexidade são generalizações de convexidade, ou seja, a classe de problemas que satisfazem as condições acima é maior que a classe de problemas convexos.

Em 1981, Hanson [18] observou que o fator  $x - u$  não desempenha nenhum papel na demonstração acima. Então, ele considerou problemas para os quais existe uma função  $\eta : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfazendo

$$\begin{aligned} f(x) - f(u) &\geq \nabla f(u)^T \eta(x, u), \\ g_i(x) - g_i(u) &\geq \nabla g_i(u)^T \eta(x, u), \quad i \in I(u), \end{aligned}$$

para todos  $x, u \in D$ , e mostrou que tais problemas também possuem a propriedade de que todo ponto estacionário é um minimizador global. Estes problemas são chamados de problemas invexos.

Se as condições acima forem trocadas por

$$\begin{aligned} \nabla f(u)^T \eta(x, u) &\Rightarrow f(x) \geq f(u), \\ g_i(x) \leq g_i(u) &\Rightarrow \nabla g_i(u)^T \eta(x, u), \quad i \in I(u), \end{aligned}$$

a propriedade continua válida, como pode ser facilmente verificado. Estas condições significam que  $f$  é pseudoinvexa e que  $g_i$  é quasinvexa, para cada  $i \in I(u)$ , que são generalizações de invexidade.

Em [23], Martin fez as algumas observações em relação ao conceito de invexidade, duas das quais são citadas a seguir. A primeira é que para um problema sem restrições, invexidade é também uma condição necessária para valer a propriedade de que todo ponto estacionário é minimizador global. De fato, sejam  $x, u \in D$ . Se  $f(x) \geq f(u)$ , tome  $\eta(x, u) = 0$ . Se  $f(x) < f(u)$ , tome  $\eta(x, u) = [f(x) - f(u)] \|\nabla f(u)\|^{-2} \nabla f(u)$ . Assim,

$$f(x) - f(u) \geq \nabla f(u) \cdot \eta(x, u) \quad \forall x, u \in D.$$

Isto mostra que, para problemas sem restrições, invexidade não deve ser vista como uma condição suficiente forte para valer a propriedade citada acima, mas simplesmente como uma maneira diferente de enunciar esta propriedade. Na verdade são coisas equivalentes.

A segunda observação é que ao examinar a demonstração de Hanson de que invexidade é uma condição suficiente para valer tal propriedade, mas com “necessidade” em mente, vemos que, em relação às restrições, há o que Martin chamou de *surplus fat* (gordura excedente, em português) na definição de invexidade. Martin, então, retirou esta “gordura excedente” e introduziu a noção de KT-invexidade para o problema (P). KT-invexidade é, deste modo, uma relaxação de invexidade que, além de ser uma condição suficiente para valer a propriedade de que todo ponto estacionário (ou ponto de Kuhn-Tucker) é minimizador global, é também uma condição necessária para tal. Assim, no problema (P) todo ponto estacionário é um minimizador global se e somente se (P) é KT-invexo. KT-invexidade vem de Kuhn-Tucker invexidade, e dizemos que (P) é KT-invexo se existir uma função  $\eta : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfazendo

$$f(x) - f(u) \geq \nabla f(u) \cdot \eta(x, u),$$

$$0 \geq \nabla g_i(u) \cdot \eta(x, u), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

para todas soluções factíveis  $x, u$  de (P), ou seja, para  $x, u \in \{x \in D : g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m\}$ .

O resultado de Martin mostra que não é possível estender mais a classe de problemas onde a propriedade é válida, já que a KT-invexidade é também uma condição necessária para a validade da propriedade. Portanto a maior classe de problemas onde vale a propriedade é a classe dos problemas KT-invexos.

Este último tipo de invexidade e o resultado de Martin serão os principais objetos desta tese. Eles serão generalizados para alguns problemas de programação em dimensão infinita, nomeadamente, os problemas de programação infinita e de programação com tempo contínuo.

Para finalizar este capítulo, temos mais dois exemplos. O Primeiro é de um problema não-convexo mas invexo. O segundo é de um problema KT-invexo mas não invexo.

### Exemplos:

1. Considere o problema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & x_1 - \text{sen } x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & \text{sen } x_1 - 4\text{sen } x_2 \leq 0, \\ & 2\text{sen } x_1 + 7\text{sen } x_2 + x_1 - 6 \leq 0, \\ & 2x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0, \\ & 4x_1^2 + 4x_2^2 - 9 \leq 0, \\ & -\text{sen } x_1 \leq 0, \\ & -\text{sen } x_2 \leq 0, \\ & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Este problema claramente não é convexo. No entanto, ele é invexo com

$$\eta(x, y) = \left( \frac{\text{sen } x_1 - \text{sen } y_1}{\cos y_1}, \frac{\text{sen } x_2 - \text{sen } y_2}{\cos y_2} \right),$$

onde  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$ .

2. Considere o problema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) = -\exp(-x) \\ \text{sujeito a} \quad & g(x) = -x \leq 0. \end{aligned}$$

Tome  $\lambda = 1$ . Então  $f'(0) + \lambda g'(0) = 0$ , de modo que  $u = 0$  é um ponto estacionário. É fácil ver que  $u = 0$  é mínimo global. Suponha que exista um outro ponto estacionário  $x \neq 0$ . Então existe  $\lambda \geq 0$  tal que

$$\begin{aligned} f'(x) + \lambda g'(x) &= \exp(-x) - \lambda = 0, \\ \lambda g(x) &= -\lambda x = 0. \end{aligned}$$

De  $\lambda x = 0$  e  $x \neq 0$  segue que  $\lambda = 0$ , donde  $\exp(-x) = 0$ , o que é um absurdo. Logo todo ponto estacionário é minimizador global. Assim, pelo resultado de Martin, o problema é KT-invexo. Suponha que o problema é invexo. Então, existe uma função  $\eta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} -\exp(-x) + \exp(-u) &= f(x) - f(u) \geq f'(u)\eta(x, u) = \exp(-u)\eta(x, u), \\ -x + u &= g(x) - g(u) \geq g'(u)\eta(x, u) = -\eta(x, u), \end{aligned}$$

para todos  $x, u \in D$ . Daí

$$\begin{aligned} f(x) - f(u) - f'(x)(x - u) &= -\exp(-x) + \exp(-u) - \exp(-u)(x - u) \\ &\geq -\exp(-x) + \exp(-u) - \exp(-u)\eta(x, u) \\ &\geq 0 \quad \forall x, u \in D. \end{aligned}$$

Mas, claramente  $f$  não é convexa. Logo a desigualdade acima é uma contradição. Portanto o problema não é invexo.

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## Problemas de Programação Infinita

---

### 1.1 Notações & Hipóteses

---

Nesta primeira parte da tese serão estudados problemas de programação infinita dados na forma abaixo:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \\ \text{sujeito a} & g_\alpha(x) \leq 0, \alpha \in A, \\ & h_\beta(x) = 0, \beta \in B, \end{array}$$

onde  $f, g_\alpha, h_\beta : X \rightarrow \mathbb{R}$  para  $\alpha \in A$  e  $\beta \in B$ ,  $X$  é um espaço real de Banach e  $A$  e  $B$  são os conjuntos de índices. Geralmente,  $A$  e  $B$  são subconjuntos de espaços Euclidianos.

No Capítulo 3 é abordado o problema acima no caso mono-objetivo, ou seja, com  $p = 1$ . O caso geral, isto é, o caso multi-objetivo, é abordado no Capítulo 4. O Capítulo 2 é dedicado à exposição da teoria de Ben-Tal e Zowe [4], necessária para a obtenção das condições necessárias, e ao desenvolvimento do teorema de alternativa, necessário em algumas demonstrações nos Capítulos 3 e 4.

Abaixo temos uma coleção de hipóteses que serão usadas nos Capítulos 3 e 4.  
Hipóteses:

(H1)  $f, g_\alpha, \alpha \in A$ , e  $h_\beta, \beta \in B$ , são Fréchet diferenciáveis;

(H2)  $f$  e  $g_\alpha, \alpha \in A$ , são Fréchet diferenciáveis e  $h_\beta, \beta \in B$ , são continuamente Fréchet diferenciáveis;

(H3)  $f, g_\alpha, \alpha \in A$ , e  $h_\beta, \beta \in B$ , são duas vezes Fréchet diferenciáveis;

(H4)  $\alpha \mapsto g_\alpha(x)$ ,  $\alpha \mapsto g'_\alpha(x)d$ ,  $\beta \mapsto h_\beta(x)$  e  $\beta \mapsto h'_\beta(x)d$  são contínuas para todos  $x, d \in X$ ;

(H5)  $\alpha \mapsto g_\alpha(x)$ ,  $\alpha \mapsto g'_\alpha(x)d$ ,  $\alpha \mapsto g''_\alpha(x)(d, z)$ ,  $\beta \mapsto h_\beta(x)$ ,  $\beta \mapsto h'_\beta(x)d$  e  $\beta \mapsto h''_\beta(x)(d, z)$  são contínuas para todos  $x, d, z \in X$ ;

Em (H4) e (H5), o apóstrofe “ ’ ” denota a derivada em relação à  $x$ , e não em relação à  $\alpha$  ou  $\beta$ .

Vamos supor em toda esta parte que os conjuntos de índices  $A$  e  $B$  são espaços de Hausdorff compactos. Denotemos por  $\mathcal{M}(A)$  o conjunto de todas as medidas de Radon definidas em  $A$  e por  $\mathcal{M}(B)$  o conjunto de todas as medidas de Radon definidas em  $B$ .

Denotemos por  $\mathcal{C}(A)$  o espaço das funções contínuas definidas em  $A$  equipado com a norma do supremo e por  $\mathcal{C}(B)$  o espaço das funções contínuas em  $B$  com a norma do supremo.

Denotemos por  $\mathbb{F}$  o conjunto de todas as soluções factíveis do problema:

$$\mathbb{F} = \{x \in X : g_\alpha(x) \leq 0, \alpha \in A, h_\beta(x) = 0, \beta \in B\}.$$

Dado  $\bar{x} \in \mathbb{F}$ , denotemos por  $A(\bar{x})$  o conjunto de índices das restrições ativas em  $\bar{x}$ :

$$A(\bar{x}) = \{\alpha \in A : g_\alpha(\bar{x}) = 0\}.$$

Seja  $X$  um espaço normado. Dizemos que uma função Fréchet diferenciável  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é *invexa* em  $\bar{x} \in X$  se existe uma aplicação  $\eta : X \times X \rightarrow X$  tal que

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq f'(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \quad \forall x \in X.$$

Dizemos que  $f$  é *invexa* se  $f$  é invexa em cada  $\bar{x} \in X$ . Dizemos que  $f$  é *estritamente invexa* em  $\bar{x} \in X$  se existe  $\eta : X \times X \rightarrow X$  tal que

$$f(x) - f(\bar{x}) > f'(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \quad \forall x \in X, x \neq \bar{x}.$$

Dizemos que  $f$  é *estritamente invexa* se  $f$  é estritamente invexa em cada  $\bar{x} \in X$ .

## 1.2 Aplicações

Nesta seção são apresentadas algumas aplicações para os problemas de programação infinita.

### Análise de Estabilidade

Considere o problema de programação não-linear

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ &&& x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Em muitos problemas é interessante considerar o problema com perturbações nas restrições. Isto é devido ao fato de que em problemas reais, muitas vezes, as restrições são obtidas através de medições, que estão sujeitas a erros.

O problema com perturbações nas restrições é dado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && g_i(x, \lambda) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \lambda \in [0, 1], \\ &&& x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

onde  $g_i(x, 0) = g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

O problema perturbado é claramente um problema de programação infinita. Assim, a teoria desenvolvida neste trabalho pode ser útil para o estudo da estabilidade de soluções de problemas de programação não-linear.

## Estatística

Será exposto um um problema de estimação da densidade de probabilidade, o qual é bem conhecido da literatura estatística. Este problema aparece como um exemplo em Tapia e Trosset [35].

O problema consiste em minimizar a média integrada do erro ao quadrado de um estimador de núcleo de densidade de probabilidade. Especificamente,

$$\min_{K_n \in L_2(-\infty, +\infty)} E \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_n(x - \chi_i) - \delta(x) \right]^2 dx,$$

onde  $\chi_1, \dots, \chi_n$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função densidade de probabilidade  $\delta$ .

O problema assim posto pode ter soluções que não são não-negativas em todo ponto, o que resulta em estimativas que não são densidades de probabilidade. Para contornar isto, re-colocamos o problema como

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && E \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_n(x - \chi_i) - \delta(x) \right]^2 dx \\ &\text{sujeito a} && K_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty), \\ &&& \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(x) dx = 1, \\ &&& K_n \in L_2(-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

Podemos reformular o problema acima como um problema de programação infinita, como segue.

Considere o espaço de Sobolev  $H^1[\alpha_1, \alpha_2]$ , que é definido como sendo o espaço vetorial  $\{x : x^{(j)} \in L_2[\alpha_1, \alpha_2] \text{ para } j = 0, 1\}$  dotado do produto interno

$$\langle x, y \rangle = \langle x^{(0)}, y^{(0)} \rangle_{L_2[\alpha_1, \alpha_2]} + \langle x^{(1)}, y^{(1)} \rangle_{L_2[\alpha_1, \alpha_2]},$$

que o torna um espaço de Hilbert. Vale observar que neste espaço as derivadas são tomadas no sentido das distribuições.

Consideramos então o problema abaixo, que é um problema de programação infinita.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } f(x_n) &= E \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}_n(\alpha - \chi_i) - \delta(\alpha) \right]^2 d\alpha \\ \text{sujeito a } g_\alpha(x_n) &= x_n(\alpha) \geq 0, \quad \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2], \\ h(x_n) &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x_n(\alpha) d\alpha - 1 = 0, \\ x_n &\in H^1[\alpha_1, \alpha_2], \end{aligned}$$

onde  $\bar{x}_n$  denota a extensão de  $x_n$  a  $(-\infty, +\infty)$  dada por  $\bar{x}_n(\alpha) = 0$  se  $\alpha \notin [\alpha_1, \alpha_2]$ , e a esperança é tomada em relação às variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas  $\chi_1, \dots, \chi_n$  com função densidade de probabilidade  $\delta \in H^1(-\infty, +\infty)$ . Note que se  $\delta \in H^1(-\infty, +\infty)$ , então a restrição de  $\delta$  a  $[\alpha_1, \alpha_2]$  é um elemento de  $H^1[\alpha_1, \alpha_2]$ . Para mais detalhes sobre o espaço  $H^1(-\infty, +\infty)$ , o leitor pode consultar Tapia e Thompson [34].

## Economia

O problema apresentado aqui é um modelo geral de equilíbrio do crescimento da economia dado em El-Hodiri [13]. Este modelo é um caso particular do problema de programação com tempo contínuo multi-objetivo.

Considere uma economia com  $n$  bens,  $m$  processos de produção,  $p$  processos de investimento e  $q$  consumidores. Seja  $r_{ij}(t, u_j(t))$  o resultado em termos do bem  $i$ , do processo operativo  $j$  no nível  $u_j$  no tempo  $t$ . Neste exemplo será mantida a convenção de que  $r_{ij} \leq 0$  se o bem  $i$  é uma entrada do processo  $j$  e  $r_{ij} > 0$  se o bem  $i$  é uma saída do processo  $j$ . A presença de  $t$  de forma explícita como argumento de  $g_{ij}$  indica a possibilidade de mudanças tecnológicas. Por processos de investimento entenda grupos de projetos de investimento. Eles são descritos por meio de funções requerimento e funções adição-para-capacidade.

Seja  $s_{ik}(t, v_k(t))$  o requerimento em termos do bem  $i$ , quando o processo  $k$  é operado no nível  $v_k$  no tempo  $t$ , e seja  $S_{kj}(t, v_k)$  a adição bruta à capacidade do processo de produção  $j$  quando o processo de investimento  $k$  é operado no nível  $v_k$  no tempo  $t$ . A capacidade de um processo de produção,  $z_j(t)$ , é definida como sendo o nível máximo no qual o processo pode ser operado. Denote o consumo do bem  $i$  no tempo  $t$  pelo consumidor  $l$  por  $c_i^l(t)$ , e seja  $c_i(t) = (c_i^1(t), \dots, c_i^q(t))$ . Suponha que todos os períodos de planejamento dos responsáveis

pelas decisões sejam o intervalo de tempo  $[0, T]$ . A taxa de mudança na capacidade de produção do processo de produção  $j$  é dado por

$$\dot{z}_j(t) = \sum_k S_{kj}(t, v_k(t)) - \alpha_j z_j(t), \quad j = 1, \dots, m,$$

onde  $\alpha_j$  é a taxa (constante) de depreciação na capacidade do processo  $j$ . Sejam  $z(0) = (z_1(0), \dots, z_m(0)) = z_0$  uma capacidade inicial e  $z(T) = (z_1(T), \dots, z_m(T)) = z_T$  uma capacidade terminal. Denotemos por  $Z_0$  e  $Z_1$  os conjuntos de capacidades inicial e terminal, respectivamente.  $Z_1$  representa as metas do plano.

Seja  $\phi^l(t, c^l(t))$  a função utilidade instantânea do consumidor  $l$ , onde  $c^l = (c_1^l, \dots, c_n^l)$ . Suponha que o pedido de caminhos de consumo do consumidor  $l$  seja representado pelo funcional

$$I(c^l) = \int_0^T \phi^l(t, c^l(t)) dt.$$

O problema é então posto da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} \quad \left( \int_0^T \phi^1(t, c^1(t)) dt, \dots, \int_0^T \phi^q(t, c^q(t)) dt \right) \\ &\text{sujeito a} \quad \dot{z}_j(t) = \sum_k S_{kj}(t, v_k(t)) - \alpha_j z_j(t), \quad t \in [0, T], \quad j = 1, \dots, m, \\ &\quad \sum_j r_{ij}(t, u_j(t)) - \sum_k s_{ik}(t, v_k(t)) - \sum_l c_i^l(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, n, \\ &\quad u_j(t) \leq z_j(t), \quad t \in [0, T], \quad j = 1, \dots, m, \\ &\quad c_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad v_j(t) \geq 0, \quad u_j(t) \geq 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad t \in [0, T], \\ &\quad z_0 \in Z_0, \quad z_1 \in Z_1. \end{aligned}$$

A primeira restrição, como já foi dito acima, representa a taxa de mudança na capacidade do processo de produção. A segunda restrição significa que nenhum bem é usado além do que está disponível, a terceira quer dizer que nenhum processo é operado além de sua capacidade e a quarta diz que o consumo e os níveis de processos nunca são negativos.

As restrições acima podem ser indexadas usando-se  $t$  como índice. Por exemplo, em relação à primeira restrição, podemos definir

$$g_t^j(v, z) = \dot{z}_j(t) - \sum_k S_{kj}(t, v_k(t)) + \alpha_j z_j(t), \quad t \in [0, T], \quad j = 1, \dots, m.$$

Deste modo, este problema é um problema de programação infinita multi-objetivo.



---

## CAPÍTULO 2

---

# Problemas de Otimização Abstratos

Neste capítulo é apresentado, de forma concisa, a teoria de condições de otimalidade para problemas de otimização abstratos, dada por Ben-Tal e Zowe em [4]. Esta teoria será usada para o desenvolvimento de um teorema de alternativa assim como para obtenção de condições necessárias de otimalidade para problemas de programação infinita mono e multi-objetivos. O teorema de alternativa será útil em demonstrações nos capítulos seguintes.

---

### 2.1 Condições de Otimalidade

---

No que segue, é apresentada a teoria de Ben-Tal e Zowe [4] sobre condições de otimalidade de primeira e segunda ordens para problemas extremos, ou problemas de otimização abstratos.

Ben-Tal e Zowe estudaram o seguinte problema:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & F(y) \\ \text{sujeito a} & G(y) \in -K, \\ & H(y) = 0, \end{array} \right\} \quad (P)$$

onde  $F : Y \rightarrow U$ ,  $G : Y \rightarrow V$  e  $H : Y \rightarrow W$  são aplicações contínuas,  $Y, U, V$  e  $W$  são espaços vetoriais topológicos reais,  $K$  é um cone convexo em  $V$  com interior não-vazio e  $U$  é ordenado por um cone próprio  $C$  com interior não-vazio.

Dado um subconjunto  $Q$  de um espaço vetorial topológico  $E$ , o interior de  $Q$  será denotado por  $\text{int}(Q)$  e o fecho de  $Q$  por  $\text{cl}(Q)$ . Se  $Q$  for um cone próprio com interior não-vazio, seguindo a convenção usual, escrevemos  $u_1 \geq u_2$  quando  $u_1 - u_2 \in Q$  e  $u_1 > u_2$  quando  $u_1 - u_2 \in \text{int}(Q)$ .

**Definição 2.1.** Dizemos que  $y \in Y$  é uma solução factível de  $(P)$  se  $G(y) \in -K$  e  $H(y) = 0$ .

**Definição 2.2.** Dizemos que uma solução factível  $\bar{y}$  é uma solução ótima global de (P) se

$$F(y) \notin F(\bar{y}) - \text{int}(C)$$

para toda solução factível  $y$ .

No Problema (P), se  $U = \mathbb{R}$  e  $C = \mathbb{R}_+ = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$ , então uma solução ótima no sentido da Definição 2.2 coincide com uma solução ótima no sentido usual da otimização. De fato,  $F(y) \notin F(\bar{y}) - \text{int}(C)$  é equivalente a  $F(y) - F(\bar{y}) \notin -\text{int}(C) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda < 0\}$ , ou seja,  $F(y) - F(\bar{y}) \geq 0$ .

As definições 2.3, 2.4 e 2.5 abaixo são devidas a Girsanov [16].

**Definição 2.3.** Dizemos que  $d \in Y$  é uma direção de descida de  $F$  em  $\bar{y} \in Y$  se existem escalares  $a < 0$  e  $T > 0$  e uma vizinhança  $N(d)$  de  $d$  tais que

$$F(\bar{y} + t\bar{d}) \leq F(\bar{y}) + ta \quad \forall \bar{d} \in N(d), \quad 0 < t \leq T.$$

O conjunto de todas as direções de descida de  $F$  em  $\bar{y}$  é um cone aberto, que é denotado por  $D_F^<(\bar{y})$ .

**Definição 2.4.** Dizemos que  $d \in Y$  é uma direção factível de  $G$  em  $\bar{y} \in Y$  se existem um escalar  $T > 0$  e uma vizinhança  $N(d)$  de  $d$  tais que

$$G(\bar{y} + t\bar{d}) \in -K \quad \forall \bar{d} \in N(d), \quad 0 < t \leq T.$$

O conjunto de todas as direções factíveis de  $G$  em  $\bar{y}$  é um cone aberto, que é denotado por  $D_G^<(\bar{y})$ .

**Definição 2.5.** Dizemos que  $d \in Y$  é uma direção tangente de  $H$  em  $\bar{y} \in Y$  se existem uma função  $r(\cdot) : (0, \infty) \rightarrow Y$  e  $T > 0$  tais que

$$H(\bar{y} + td + r(t)) = 0, \quad 0 < t \leq T,$$

e  $r(\cdot)$  é tal que para toda vizinhança  $N$  da origem em  $Y$  existe  $T_1 > 0$  com

$$\frac{r(t)}{t^2} \in N, \quad 0 < t \leq T_1.$$

O conjunto de todas as direções tangentes de  $H$  em  $\bar{y}$  é um cone, que é denotado por  $T_H(\bar{y})$ .

As definições a seguir são devidas a Ben-Tal e Zowe [4].

**Definição 2.6.** Dizemos que  $d \in Y$  é uma direção de quasidescida de  $F$  em  $\bar{y} \in Y$  se para todo  $u \in \text{int}(C)$  existe  $T > 0$  tal que

$$F(\bar{y} + td) \leq F(\bar{y}) + tu, \quad 0 < t \leq T.$$

O conjunto de todas as direções de quasidescida de  $F$  em  $\bar{y}$  é um cone, que é denotado por  $D_F(\bar{y})$ .

**Definição 2.7.** Dizemos que  $d \in Y$  é uma direção quasifactível de  $G$  em  $\bar{y} \in Y$  se para todo  $v \in \text{int}(K)$  existe  $T > 0$  tal que

$$G(\bar{y} + td) \in -K + tv, \quad 0 < t \leq T.$$

O conjunto de todas as direções quasifactíveis de  $G$  em  $\bar{y}$  é um cone, que é denotado por  $D_G(\bar{y})$ .

**Definição 2.8.** Dizemos que  $z \in Y$  é uma direção de descida de segunda ordem de  $F$  em  $\bar{y} \in Y$  em relação a um dado  $d \in Y$  se existe  $u \in \text{int}(C)$ , uma vizinhança  $N(z)$  de  $z$  e  $T > 0$  tais que

$$F(\bar{y} + td + t^2 \bar{z}) \leq F(\bar{y}) - t^2 u \quad \forall \bar{z} \in N(z), \quad 0 < t \leq T.$$

O conjunto de todas as direções de descida de segunda ordem de  $F$  em  $\bar{y}$  em relação a  $d$  é um conjunto aberto e é denotado por  $Q_F(\bar{y}, d)$ .

**Definição 2.9.** Dizemos que  $z \in Y$  é uma direção factível de segunda ordem de  $G$  em  $\bar{y} \in Y$  em relação a  $d \in Y$  se existe  $v \in \text{int}(K)$ , uma vizinhança  $N(z)$  de  $z$  e  $T > 0$  tais que

$$G(\bar{y} + td + t^2 \bar{z}) \in -K - t^2 v \quad \forall \bar{z} \in N(z), \quad 0 < t \leq T.$$

O conjunto de todas as direções factíveis de segunda ordem de  $G$  em  $\bar{y}$  em relação a  $d$  é um conjunto aberto e é denotado por  $Q_G(\bar{y}, d)$ .

Note que  $Q_F(\bar{y}, 0)$  e  $Q_G(\bar{y}, 0)$  coincidem com os cones de direções de descida (de primeira ordem) de  $F$  em  $\bar{y}$  e das direções factíveis (de primeira ordem) de  $G$  em  $\bar{y}$ , respectivamente, dados nas definições 2.3 e 2.4 acima. Ademais, não é difícil verificar que para  $d \in D_F^<(\bar{y}) = Q_F(\bar{y}, 0)$  tem-se  $Q_F(\bar{y}, d) = X$  e para  $d \in D_G^<(\bar{y}) = Q_G(\bar{y}, 0)$  tem-se  $Q_G(\bar{y}, d) = X$ .

Assim, na teoria de segunda ordem é interessante considerar os conjuntos de segunda ordem  $Q_F(\bar{y}, d)$  (e  $Q_G(\bar{y}, d)$ ) para  $d$  pertencente a  $D_F(\bar{y})$  ( $D_G(\bar{y})$ ) mas não a  $D_F^<(\bar{y})$  ( $D_G^<(\bar{y})$ ). O conjunto de tais direções, denotado por  $D_F^=(\bar{y})$ , é chamado de *cone crítico* de  $F$  em  $\bar{y}$ :

$$D_F^=(\bar{y}) = D_F(\bar{y}) \setminus D_F^<(\bar{y}).$$

Analogamente define-se

$$D_G^=(\bar{y}) = D_G(\bar{y}) \setminus D_G^<(\bar{y}).$$

**Definição 2.10.** Dizemos que  $z \in Y$  é uma direção tangente de segunda ordem de  $H$  em  $\bar{y} \in Y$  em relação a  $d \in Y$  se existem uma função  $r(\cdot) : (0, \infty) \rightarrow Y$  e  $T > 0$  tais que

$$H(\bar{y} + td + t^2 z + r(t)) = 0, \quad 0 < t \leq T,$$

e  $r(\cdot)$  é tal que para toda vizinhança  $N$  da origem em  $Y$  existe  $T_1 > 0$  com

$$\frac{r(t)}{t^2} \in N, \quad 0 < t \leq T_1.$$

O conjunto de todas as direções tangentes de segunda ordem de  $H$  em  $\bar{y}$  em relação a  $d$  é denotado por  $V_H(\bar{y}, d)$ .

Note que  $V_H(\bar{y}, 0) = T_H(\bar{y})$ , isto é,  $V_H(\bar{y}, 0)$  coincide com o cone das direções tangentes (de primeira ordem) de  $H$  em  $\bar{y}$  dado na definição 2.5.

**Definição 2.11.** *Seja  $D \subset Y$ . O funcional suporte  $\delta^*(\cdot|D) : Y^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  associado com  $D$  é definido em  $y^* \in Y^*$  por*

$$\delta^*(y^*|D) = \sup_{y \in D} y^*(y).$$

Se  $D = \emptyset$ , por convenção,  $\delta^*(\cdot|D) = -\infty$ . O domínio efetivo de  $\delta^*(\cdot|D)$ , denotado por  $\Lambda(D)$ , é definido por

$$\Lambda(D) = \{y^* \in Y^* : \delta^*(y^*|D) < \infty\}.$$

Quando  $D$  é um cone, pode ser facilmente verificado que

$$\delta^*(y^*|D) = \begin{cases} 0 & \text{se } y^* \in \Lambda(D), \\ \infty & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e  $\Lambda(D) = -D^+$ , onde  $D^+ = \{y^* \in Y^* : y^*(y) \geq 0 \ \forall y \in D\}$  é o cone dual (ou polar) de  $D$ .

O resultado abaixo, devido a Ben-Tal e Zowe, fornece condições necessárias de primeira e segunda ordens.

**Teorema 2.12.** *Seja  $\bar{y}$  uma solução ótima de  $(P)$ . Então, para todo*

$$d \in D_F(\bar{y}) \cap D_G(\bar{y}) \cap T_H(\bar{y}), \quad (2.1)$$

*tal que  $Q_F(\bar{y}, d)$ ,  $Q_G(\bar{y}, d)$  e  $V_H(\bar{y}, d)$  são conjuntos convexos e não-vazios, correspondem funcionais lineares contínuos em  $Y$*

$$l_F \in \Lambda(Q_F(\bar{y}, d)), \ l_G \in \Lambda(Q_G(\bar{y}, d)), \ l_H \in \Lambda(V_H(\bar{y}, d)),$$

*nem todos nulos, que satisfazem a equação de Euler-Lagrange*

$$l_F + l_G + l_H = 0 \quad (2.2)$$

*e a desigualdade de Legendre*

$$\delta^*(l_F|Q_F(\bar{y}, d)) + \delta^*(l_G|Q_G(\bar{y}, d)) + \delta^*(l_H|V_H(\bar{y}, d)) \leq 0. \quad (2.3)$$

O corolário abaixo traz as condições de primeira ordem.

**Corolário 2.13.** *Seja  $\bar{y}$  uma solução ótima de  $(P)$ . Suponha que os conjuntos  $D_F^<(\bar{y})$ ,  $D_G^<(\bar{y})$  e  $V_H(\bar{y})$  são convexos. Então existem funcionais lineares contínuos em  $Y$*

$$l_F \in D_F^<(\bar{y})^+, \ l_G \in D_G^<(\bar{y})^+, \ l_H \in T_H^<(\bar{y})^+,$$

*nem todos nulos, que satisfazem*

$$l_F + l_G + l_H = 0.$$

Sob hipóteses de diferenciabilidade os conjuntos usados no teorema acima podem ser descritos em uma maneira mais adequada. Nos resultados que seguem, serão utilizadas derivadas direcionais de primeira e segunda ordens. No caso dos conjuntos de direções tangentes será utilizado a Fréchet diferenciabilidade. Dada uma aplicação  $F : Y \rightarrow U$ , a *derivada direcional (de primeira ordem)* de  $F$  em  $\bar{y} \in Y$  na direção  $d \in Y$  é dada por

$$F'(\bar{y}; d) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{F(\bar{y} + \varepsilon d) - F(\bar{y})}{\varepsilon}.$$

A *derivada direcional de segunda ordem* de  $F$  é dada por

$$F''(\bar{y}, d; z) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{F(\bar{y} + \varepsilon d + \varepsilon^2 z) - F(\bar{y})}{\varepsilon} - F'(\bar{y}; d) \right] \text{ para } z \in X.$$

Analogamente se define as derivadas direcionais para  $G : Y \rightarrow V$ . Suponha que  $W$  é um espaço normado. Dizemos que  $H : Y \rightarrow W$  é *Fréchet diferenciável* em  $\bar{y} \in Y$  se existe  $\Lambda \in \mathcal{L}(Y, W)$  tal que em uma vizinhança de  $\bar{y}$ ,  $H$  pode ser representada sob a forma

$$H(\bar{y} + h) = H(\bar{y}) + \Lambda h + o(h)\|h\|$$

onde  $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|o(h)\| = \|o(0)\| = 0$ .  $\Lambda$  é chamada *derivada de Fréchet* da aplicação  $H$  em  $\bar{y}$ , e é denotada por  $H'(\bar{y})$ . Se  $H$  é Fréchet diferenciável em cada  $\bar{y} \in Y$ , então  $H'(\bar{y}) : Y \rightarrow \mathcal{L}(Y, W)$  que a cada  $\bar{y} \in Y$  associa a aplicação  $H'(\bar{y})$  está bem definida, e  $H''(\bar{y}) = (H')'(\bar{y}) \in \mathcal{L}(Y, \mathcal{L}(Y, W))$ .

**Proposição 2.14.** *Suponha que  $Y, U, V$  e  $W$  são espaços normados e seja  $\bar{y} \in Y$ . Suponha que  $F'(\bar{y}; d)$ ,  $G'(\bar{y}; d)$ ,  $F''(\bar{y}, d; z)$  e  $G''(\bar{y}, d; z)$  existem para todas direções  $d, z \in Y$  e que  $H$  é duas vezes Fréchet diferenciável em uma vizinhança de  $\bar{y}$ . Então*

$$(i) \quad D_F^<(\bar{y}) = \{d \in Y : F'(\bar{y}; d) < 0\};$$

$$D_F(\bar{y}) = \{d \in Y : F'(\bar{y}; d) \leq 0\};$$

$$\text{Se } F'(\bar{y})d \leq 0,$$

$$Q_F(\bar{y}, d) = \{z \in Y : F''(\bar{y}, d; z) + aF'(\bar{y}; d) < 0, \ a \geq 0\};$$

$$(ii) \quad \text{Se } -G(\bar{y}) \in K,$$

$$D_G^<(\bar{y}) = \{d \in Y : -G'(\bar{y}; d) \in \text{int}(K + \{aG(\bar{y}) : a \geq 0\})\}$$

e

$$D_G(\bar{y}) = \{d \in Y : -G'(\bar{y}; d) \in \text{cl}(K + \{aG(\bar{y}) : a \geq 0\})\};$$

$$\text{Se } -G(\bar{y}) \in K \text{ e } -G'(\bar{y}; d) \in \{a(k + G(\bar{y})) : k \in K, \ a \geq 0\},$$

$$Q_G(\bar{y}, d) = \{z \in Y : -G''(\bar{y}, d; z) \in \text{int}(K) + \{aG(\bar{y}) + bG'(\bar{y})d : a \geq 0, \ b \geq 0\}\};$$

(iii) Se  $Y$  e  $W$  são espaços de Banach,  $H'(\bar{y})$  é sobrejetiva e  $H(\bar{y}) = 0$ ,

$$T_H(\bar{y}) = \{d \in Y : H'(\bar{y})d = 0\}$$

e

$$V_H(\bar{y}, d) = \{z \in Y : H'(\bar{y})z + \frac{1}{2}H''(\bar{y})(d, d) = 0\} \text{ para } d \in T_H(\bar{y}).$$

Quando  $U$  e  $V$  são espaços normados, define-se de maneira análoga as derivadas de Fréchet de  $F : Y \rightarrow U$  e  $G : Y \rightarrow V$ . Neste caso, para  $\bar{y} \in Y$ , tem-se

$$F'(\bar{y}; d) = F'(\bar{x})d \text{ e } F''(\bar{y}, d; z) = F'(\bar{y})d + \frac{1}{2}F''(\bar{y})(d, d) \quad \forall d, z \in Y.$$

Analogamente para  $G$ .

**Observação 2.15.** No caso quando  $Y = \mathbb{R}^n$ ,  $U = \mathbb{R}$  e  $C = \mathbb{R}_+$ , pela proposição acima, o conjunto das direções de descida de  $F$  em  $\bar{y}$  é formado pelas direções que possuem um ângulo maior que  $90^\circ$  com o vetor gradiente de  $F$  em  $\bar{y}$ , o qual indica a direção de maior crescimento de  $F$ . O conjunto das direções de quasidescida contém o conjunto das direções de descida mais as direções que são ortogonais ao gradiente de  $F$  em  $\bar{y}$ . O cone crítico é formado pelas direções ortogonais ao gradiente de  $F$  em  $\bar{y}$ .

**Observação 2.16.** Quando  $Y = \mathbb{R}^n$ ,  $V = \mathbb{R}^m$  e  $K = \mathbb{R}_+^m$ , pela proposição acima, o conjunto das direções factíveis de  $G$  em  $\bar{y}$  é formado pelas direções que possuem um ângulo maior que  $90^\circ$  com todos os vetores gradiente das restrições ativas em  $\bar{x}$  ao mesmo tempo. O conjunto das direções quasifactíveis contém o conjunto das direções factíveis e é formado pelas direções que possuem um ângulo maior ou igual a  $90^\circ$  com todos os vetores gradiente das restrições ativas em  $\bar{x}$  ao mesmo tempo. Logo se  $N$  é o cone gerado pelos vetores gradiente das restrições ativas em  $\bar{y}$ , o cone das direções quasifactíveis é igual a  $\Lambda(N) = -N^+$ .

**Observação 2.17.** Se  $Y = \mathbb{R}^n$  e  $W = \mathbb{R}^k$ , a proposição anterior diz que, quando a matriz jacobiana de  $H$  em  $\bar{y}$  tem posto completo, o cone das direções tangentes de  $H$  em  $\bar{y}$  é igual ao núcleo da matriz jacobiana de  $H$  em  $\bar{y}$ . Ou seja, o conjunto das direções tangentes é formado pelas direções que são ortogonais ao espaço gerado pelos vetores gradientes das restrições de igualdade.

**Observação 2.18.** Observe que na definição dos cones de primeira ordem é levado em consideração as variações de primeira ordem das aplicações. Os conjuntos de segunda ordem levam em conta também as variações de segunda ordem, ou seja, a curvatura das aplicações.

Os cones de primeira ordem formam uma aproximação linear do conjunto factível. Os conjuntos de segunda ordem, uma aproximação de segunda ordem, e portanto descrevem melhor o conjunto factível.

**Proposição 2.19.** *Suponha que  $Y, U, V$  e  $W$  são espaços normados e que  $F, G$  e  $H$  são duas vezes Fréchet diferenciáveis. Sejam  $\bar{y}, d \in Y$ .*

(i) *Se  $-F'(\bar{y})d \in C$  e  $Q_F(\bar{y}, d) \neq \emptyset$ , então para  $l_F \in \Lambda(Q_F(\bar{y}, d))$  existe  $u^* \in C^+$  tal que*

$$\begin{aligned} l_F &= u^* \circ F'(\bar{y}), \quad u^* F'(\bar{y})d = 0, \\ \delta^*(l_F|_{Q_F(\bar{y}, d)}) &= -\frac{1}{2}u^* F''(\bar{y})(d, d); \end{aligned}$$

(ii) *Se  $-G(\bar{y}) \in K$ ,  $-G'(\bar{y})d \in \{a(k + G(\bar{y})) : k \in K, a \geq 0\}$  e  $Q_G(\bar{y}, d) \neq \emptyset$ , então para  $l_G \in \Lambda(Q_G(\bar{y}, d))$  existe  $v^* \in K^+$  tal que*

$$\begin{aligned} l_G &= v^* \circ G'(\bar{y}), \quad v^* G'(\bar{y})d = 0, \quad v^* G(\bar{y}) = 0, \\ \delta^*(l_G|_{Q_G(\bar{y}, d)}) &= -\frac{1}{2}v^* G''(\bar{y})(d, d); \end{aligned}$$

(iii) *Se  $Y$  e  $W$  são espaços de Banach,  $H'(\bar{y})$  é sobrejetiva,  $H(\bar{y}) = 0$  e  $H'(\bar{y})d = 0$ , então para  $l_H \in \Lambda(V_H(\bar{y}, d))$  existe  $w^* \in W^*$  tal que*

$$\begin{aligned} l_H &= w^* \circ H'(\bar{y}), \\ \delta^*(l_H|_{V_H(\bar{y}, d)}) &= -\frac{1}{2}w^* H''(\bar{y})(d, d). \end{aligned}$$

O próximo resultado é obtido usando o Teorema 2.12, a Proposição 2.14 e a Proposição 2.19.

**Teorema 2.20.** *Seja  $\bar{y}$  uma solução ótima de  $(P)$ . Suponha que  $Y$  e  $W$  são espaços de Banach e que  $U$  e  $V$  são espaços normados. Suponha também que  $F, G$  e  $H$  são duas vezes Fréchet diferenciáveis e que a imagem de  $H'(\bar{y})$  é um conjunto fechado. Então para toda  $d$  satisfazendo*

$$-F'(\bar{y})d \in C, \quad G'(\bar{y})d \in -\{a(k + G(\bar{y})) : k \in K, a \geq 0\}, \quad H'(\bar{y})d = 0, \quad (2.4)$$

*correspondem funcionais lineares contínuos  $u^* \in C^+$ ,  $v^* \in K^+$  e  $w^* \in W^*$ , nem todos nulos, tais que*

$$u^* F'(\bar{y})d = 0, \quad v^* G(\bar{y}) = 0, \quad v^* G'(\bar{y})d = 0, \quad (2.5)$$

$$u^* \circ F'(\bar{y}) + v^* \circ G'(\bar{y}) + w^* \circ H'(\bar{y}) = 0, \quad (2.6)$$

$$(u^* \circ F''(\bar{y}) + v^* \circ G''(\bar{y}) + w^* \circ H''(\bar{y}))(d, d) \geq 0. \quad (2.7)$$

A teoria apresentada nesta seção, a princípio, pode parecer muito abstrata. Contudo, todas as definições dadas são generalizações de definições correspondentes em espaços de dimensão finita, as quais são fundamentadas em conceitos geométricos. O leitor não familiarizado com tais conceitos é aconselhado a consultar Ben-Tal e Zowe [4] e Girsanov [16], onde a teoria é exposta de forma mais detalhada e ilustrada com alguns exemplos. Abaixo é apresentado um destes exemplos de [4].

**Exemplo 2.21.** *Considere o problema*

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && F(y) = (y_1 - 1)^2 + y_2^2 \\ & \text{sujeito a} && G(y) = |y_1| - \frac{1}{k}y_2^2 \leq 0, \end{aligned}$$

onde  $k$  é um parâmetro positivo. Para que valores de  $k$  o ponto  $\bar{y} = (0, 0)^T$  pode ser uma solução ótima?

Pela Proposição 2.14-(i), temos

$$\nabla F(\bar{y}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 F(\bar{y}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} D_F^<(\bar{y}) &= \{d : d^T \nabla F(\bar{y}) < 0\} = \{d = (d_1, d_2)^T : d_1 > 0\}, \\ D_F(\bar{y}) &= \{d : d^T \nabla F(\bar{y}) \leq 0\} = \{d = (d_1, d_2)^T : d_1 \geq 0\}, \\ D_F^=(\bar{y}) &= \{d : d^T \nabla F(\bar{y}) = 0\} = \{(0, d_2)^T : d_2 \in \mathbb{R}\}, \\ Q_F(\bar{y}, d) &= \{z : z^T \nabla F(\bar{y}) + \frac{1}{2}d^T \nabla^2 F(\bar{y})d + ad^T \nabla F(\bar{y}) < 0, \ a \geq 0\} \\ &= \{z = (z_1, z_2)^T : -2z_1 + d_2^2 < 0\} \text{ para } d \in D_F^=(\bar{y}). \end{aligned}$$

Fica claro que  $Q_F(\bar{y}, d)$  é convexo. Pela Proposição 2.19-(i), para  $d \in D_F^=(\bar{y})$ ,

$$\begin{aligned} \delta^*(l | Q_F(\bar{y}, d)) &= \begin{cases} -\frac{1}{2}\bar{\lambda}d^T \nabla F(\bar{y})d & \text{se } l = \bar{\lambda}\nabla F(\bar{y}) \text{ para algum } \bar{\lambda} \geq 0, \\ \infty & \text{caso contrário,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\bar{\lambda}d_2^2 & \text{se } l = \bar{\lambda}\nabla F(\bar{y}), \ \bar{\lambda} \geq 0, \\ \infty & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.14-(ii), temos

$$\begin{aligned} D_G(\bar{y}) &= \{d : G'(\bar{y}; d) \leq 0\} = \{d = (d_1, d_2)^T : \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon|d_1| - \varepsilon^2 d_2^2/k}{\varepsilon} \leq 0\} \\ &= \{(0, d_2) : d_2 \in \mathbb{R}\}, \\ D_G^<(\bar{y}) &= \{d : G'(\bar{y}; d) < 0\} = \emptyset, \\ D_G^=(\bar{y}) &= D_G(\bar{y}), \\ Q_G(\bar{y}, d) &= \{z : G''(\bar{y}, d; z) < 0\} = \{(z_1, z_2)^T : |z_1| < \frac{1}{k}d_2^2, \ z_2 \in \mathbb{R}\} \text{ para } d \in D_G^=(\bar{y}). \end{aligned}$$

É fácil ver, direto da definição, que

$$\delta^*(l | Q_G(\bar{y}, d)) = \begin{cases} \frac{1}{k}|l_1|d_2^2 & \text{se } l = (l_1, 0)^T, \ l_1 \in \mathbb{R}, \\ \infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É óbvio que  $Q_G(\bar{y}, d)$  é convexo para  $d = (d_1, d_2)^T$  com  $d_2 \neq 0$ . Assim, a equação de Euler-Lagrange (2.2) fica

$$\bar{\lambda} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\lambda} \geq 0, \quad l_1 \in \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

e a desigualdade de Legendre (2.3) fica

$$-\bar{\lambda}d_2^2 + \frac{1}{k}|l_1|d_2^2 \leq 0, \quad d_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

De (2.8) segue que  $|l_1| = 2\bar{\lambda}$ . Substituindo em (2.9), obtemos

$$\bar{\lambda}d_2^2 \left(1 - \frac{2}{k}\right) \geq 0.$$

Logo  $k \geq 2$  é a resposta da questão colocada no início do exemplo.

Observemos que no exemplo acima, as condições de primeira ordem dadas no Corolário 2.13 não fornecem nenhuma informação pois  $D_{\bar{G}}(\bar{y}) = Q_G(\bar{y}, 0) = \emptyset$  (para qualquer  $k$ ), de modo que a equação de Euler-Lagrange vale trivialmente.

---

## 2.2 Teorema de Alternativa

---

Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $\psi_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , e  $\gamma_\beta$ ,  $\beta \in B$  funções reais definidas em  $X$ , onde  $A$  e  $B$  são conjuntos de índices. Considere o problema

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \Phi(x) = \max_{1 \leq i \leq p} \varphi_i(x) \\ \text{sujeito a} & \begin{array}{l} \psi_\alpha(x) \leq 0, \quad \alpha \in A, \\ \gamma_\beta(x) = 0, \quad \beta \in B. \end{array} \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

Seja  $\mathcal{F} = \{x \in X : \psi_\alpha(x) \geq 0, \alpha \in A, \gamma_\beta(x) = 0, \beta \in B\}$  o conjunto de todas as soluções factíveis do problema acima.

Para estabelecer o teorema de alternativa, precisamos antes encontrar condições necessárias de otimalidade de primeira ordem para este problema. Para isto usaremos o Corolário 2.13.

As seguintes hipóteses serão necessárias:

- $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , e  $\psi_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , são Fréchet diferenciáveis e  $\gamma_\beta$ ,  $\beta \in B$ , são continuamente Fréchet diferenciáveis;
- $\alpha \mapsto \psi_\alpha(x)$ ,  $\alpha \mapsto \psi'_\alpha(x)d$ ,  $\beta \mapsto \gamma_\beta(x)$  e  $\beta \mapsto \gamma'_\beta(x)d$  são contínuas para todos  $x, d \in X$ ;

- $A$  e  $B$  são espaços de Hausdorff compactos.

Acima,  $\psi'_\alpha(x)$  e  $\gamma'_\beta(x)$  expressam as derivadas de  $\psi_\alpha$  e  $\gamma_\beta$  em relação à  $x$ , respectivamente, e não em relação à  $\alpha$  ou  $\beta$ .

Defina  $\Psi : X \rightarrow \mathcal{C}(A)$  e  $\Gamma : X \rightarrow \mathcal{C}(B)$  respectivamente por

$$\Psi(x)(\alpha) = \psi_\alpha(x) \text{ e } \Gamma(x)(\beta) = \gamma_\beta(x).$$

Podemos reescrever o problema acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \Phi(x) \\ &\text{sujeito a} && \Psi(x) \in -K, \\ &&& \Gamma(x) = 0, \end{aligned}$$

onde  $K = \{k \in \mathcal{C}(A) : k(\alpha) \geq 0, \alpha \in A\}$ . Iremos aplicar o Corolário 2.13. Antes, é preciso calcular os cones  $D_\Phi^\leq(\bar{x})$ ,  $D_\Psi^\leq(\bar{x})$  e  $T_\Gamma(\bar{x})$  assim como caracterizar os respectivos cones duais. É claro que, relativo ao Problema (P), será considerado  $U = \mathbb{R}$  e  $C = \mathbb{R}_+$ .

**Lema 2.22.** *Seja  $\bar{x} \in \mathcal{F}$ . Então*

- (i)  $D_\Phi^\leq(\bar{x}) = \{z \in X : \varphi'_i(\bar{x})z < 0, i \in I(\bar{x})\}$ , onde  $I(\bar{x}) = \{i : \varphi_i(\bar{x}) = \Phi(\bar{x})\}$ ;
- (ii)  $D_\Psi^\leq(\bar{x}) = \{z \in X : \Psi'(\bar{x})z \in -\text{int}(K + \{a\Psi(\bar{x}) : a \geq 0\})\}$ ;
- (iii) se  $\Gamma'(\bar{x})$  é sobrejetiva,  $T_\Gamma(\bar{x}) = \{z \in X : \Gamma'(\bar{x})z = 0\}$ .

*Demonstração.* Do Exemplo 7.4 na página 50 de Girsanov [16] obtemos (i). As partes (ii) e (iii) seguem, respectivamente, da Proposição 2.14-(ii) e (iii).  $\square$

**Teorema 2.23** (Teorema de Minkowski-Farkas). *Seja  $P : E_1 \rightarrow E_2$  um operador linear, onde  $E_1$  e  $E_2$  são espaços vetoriais topológicos. Sejam  $K_1 = \{x \in E_1 : Px \in K_2\}$ , onde  $K_2$  um cone convexo em  $E_2$ . Se existir  $\tilde{x} \in E_1$  tal que  $P\tilde{x} \in \text{int}(K_2)$ , então  $\Lambda(K_1) = P^*\Lambda(K_2)$ , onde  $P^*$  denota o operador adjunto de  $P$ .*

*Demonstração.* Ver página 70 de Girsanov [16].  $\square$

**Lema 2.24.** *Seja  $\bar{x} \in \mathcal{F}$ . Então*

- (i) se  $D_\Phi^\leq(\bar{x}) \neq \emptyset$ , para  $l_\Phi \in \Lambda(D_\Phi^\leq(\bar{x}))$  existem  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ , tais que

$$l_\Phi(z) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi'_i(\bar{x})z \quad \forall z \in X$$

$$\text{e } \lambda_i = 0, \quad i \notin I(\bar{x});$$

(ii) se  $D_{\Psi}^{\leq}(\bar{x}) \neq \emptyset$ , para  $l_{\Psi} \in \Lambda(D_{\Psi}^{\leq}(\bar{x}))$  existe  $v^* \in K^+$  tal que

$$l_{\Psi}(z) = v^*(\Psi'(\bar{x})z) \quad \forall z \in X \text{ e } v^*(\Psi(\bar{x})) = 0;$$

(iii) se  $\Gamma'(\bar{x})$  é sobrejetiva, para  $l_{\Gamma} \in \Lambda(T_{\Gamma}(\bar{x}))$  existe  $w^* \in \mathcal{C}(B)^*$  tal que

$$l_{\Gamma}(z) = w^*(\Gamma'(\bar{x})z).$$

*Demonstração.* Vamos aplicar o Teorema de Minkowski-Farkas. Tome  $P : X \rightarrow \mathbb{R}^{\#I(\bar{x})}$  dado por  $Pz = (\varphi'_i(\bar{x})z)_{i \in I(\bar{x})}$  e  $K_2 = \mathbb{R}_+^{\#I(\bar{x})}$  (onde  $\#I(\bar{x})$  é a cardinalidade de  $I(\bar{x})$ ). Logo, pelo Lema 2.22-(i),  $K_1 = \{z \in X : Pz \in -K_2\} = D_{\Phi}^{\leq}(\bar{x})$ . Como  $D_{\Phi}^{\leq}(\bar{x}) \neq \emptyset$ , existe  $\tilde{z} \in X$  tal que  $P\tilde{z} \in \text{int}(-K_2)$ . Temos claramente que  $\Lambda(-K_2) = K_2$ . Segue, então, que existe  $\lambda \in K_2$  tal que  $l_{\Phi} = P^*\lambda$ . Daí

$$l_{\Phi}(z) = \langle P^*\lambda, z \rangle = \langle \lambda, Pz \rangle = \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \varphi'_i(\bar{x})z.$$

Tomando  $\lambda_i = 0$ ,  $i \notin I(\bar{x})$ , obtemos (i).

As partes (ii) e (iii) seguem, respectivamente, da Proposição 2.19-(ii) e (iii).  $\square$

O teorema abaixo é a primeira forma geométrica do Teorema de Separação de Hahn-Banach e será utilizado na demonstração do Teorema 2.27 a seguir.

**Teorema 2.25.** *Sejam  $P$  e  $Q$  subconjuntos convexos e disjuntos de um espaço vetorial normado  $E$ , sendo que um deles é aberto. Então eles são separáveis, ou seja, existem um funcional linear contínuo e não-nulo  $L$  e um escalar  $a$  tais que  $L(x) \geq a$ , para  $x \in P$ , e  $L(x) \leq a$ , para  $x \in Q$ .*

*Demonstração.* Ver Brézis [9].  $\square$

Abaixo temos o Teorema de Representação de Riesz. Ele também será utilizado na demonstração do Teorema 2.27 e de outros teoremas na sequência.

**Teorema 2.26.** *Sejam  $\mathcal{C}(E)$  o conjunto das funções contínuas definidas em  $E$  e  $\mathcal{M}(E)$  o conjunto de todas as medidas de Radon definidas em  $E$ , onde  $E$  um espaço de Hausdorff compacto.*

(i) *Seja  $v^* \in \mathcal{C}(E)^*$  um funcional linear positivo, isto é, tal que  $v^*(f) \geq 0$  quando  $f \geq 0$ . Então existe uma única medida de Radon positiva  $\mu \in \mathcal{M}(E)$  tal que*

$$v^*(f) = \int_E f d\mu \quad \forall f \in \mathcal{C}(E);$$

(ii) Seja  $w^* \in \mathcal{C}(E)^*$  um funcional linear. Então existe uma única medida de Radon com sinal  $\nu \in \mathcal{M}(E)$  tal que

$$w^*(f) = \int_E f d\nu \quad \forall f \in \mathcal{C}(E);$$

*Demonstração.* Ver Folland [14]. □

Denotemos por  $R(\Gamma'(x))$  o conjunto imagem de  $\Gamma'(x)$ ,  $x \in X$ .

**Teorema 2.27.** *Seja  $\bar{x}$  uma solução ótima do problema em (2.10). Suponha que  $R(\Gamma'(\bar{x}))$  é um conjunto fechado. Então existem um vetor  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ , uma medida positiva  $\mu \in \mathcal{M}(A)$  e uma medida com sinal  $\nu \in \mathcal{M}(B)$ , nem todos nulos, tais que*

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi'_i(\bar{x})z + \int_A \psi'_\alpha(\bar{x})z \mu(d\alpha) + \int_B \gamma'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X, \quad (2.11)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad \lambda_i = 0, \quad i \notin I(\bar{x}), \quad (2.12)$$

$$\int_A \psi_\alpha(\bar{x}) \mu(d\alpha) = 0. \quad (2.13)$$

*Demonstração.* Se  $\Gamma'(\bar{x})$  não for sobrejetiva então, dado que  $R(\Gamma'(\bar{x}))$  é fechado, existe um conjunto aberto e convexo  $G \in \mathcal{C}(B)$  tal que  $R(\Gamma'(\bar{x})) \cap G = \emptyset$ . Então, pelo Teorema 2.25, existem  $w^* \in \mathcal{C}(B)^*$ ,  $w^* \neq 0$ , e um escalar  $a$ , tais que

$$w^*(\Gamma'(\bar{x})z) \geq a \quad \forall z \in X.$$

Suponhamos que  $w^*(\Gamma'(\bar{x})\tilde{z}) < 0$  para algum  $\tilde{z} \in X$ . Então

$$w^*(\Gamma'(\bar{x})t\tilde{z}) = tw^*(\Gamma'(\bar{x})\tilde{z}) < 0 \quad \forall t > 0.$$

Assim para  $t$  suficientemente grande, teremos

$$w^*(\Gamma'(\bar{x})t\tilde{z}) < a,$$

o que é uma contradição. Logo

$$w^*(\Gamma'(\bar{x})z) \geq 0 \quad \forall z \in X.$$

Pela linearidade de  $w^*$  e de  $\Gamma'(\bar{x})$  segue que

$$w^*(\Gamma'(\bar{x})z) = 0 \quad \forall z \in X.$$

Pelo Teorema 2.26-(ii) existe  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tal que

$$w^*(\Gamma'(\bar{x})z) = \int_B \Gamma'(\bar{x})z d\nu = \int_B \gamma'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) \quad \forall z \in X.$$

Definindo  $\lambda = 0$  e  $\mu = 0$  obtemos (2.11)-(2.13).

Agora suponhamos que  $\Gamma'(\bar{x})$  é sobrejetiva. Suponhamos também que  $D_{\Phi}^<(\bar{x}) \neq \emptyset$  e  $D_{\Psi}^<(\bar{x}) \neq \emptyset$ . Pelo Lema 2.22,  $T_{\Gamma}(\bar{x}) \neq \emptyset$  (dado que  $0 \in T_{\Gamma}(\bar{x})$ ). Pelo Lema 2.22 vemos também que  $D_{\Phi}^<(\bar{x})$ ,  $D_{\Psi}^<(\bar{x})$  e  $T_{\Gamma}(\bar{x})$  são convexos. Segue do Corolário 2.13 e do Lema 2.24 (lembrando que  $\Lambda(D) = -D^+$  quando  $D$  é um cone) que existem  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ ,  $v^* \in K^+$  e  $w^* \in \mathcal{C}(B)^*$ , nem todos nulos, tais que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi'_i(\bar{x})z + v^*(\Psi'(\bar{x})z) + w^*(\Gamma'(\bar{x})z) &= 0, \\ \lambda_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad \lambda_i = 0, \quad i \notin I(\bar{x}), \\ v^*(\Psi(\bar{x})) &= 0. \end{aligned}$$

Como  $v^* \in K^+$ , é fácil ver que  $v^*$  é um funcional positivo. Assim, pelo Teorema 2.26-(i) existe uma medida positiva  $\mu \in \mathcal{M}(A)$ , tal que

$$v^*(\Psi'(\bar{x})z) = \int_A \Psi'(\bar{x})z d\mu = \int_A \psi'_\alpha(\bar{x})z \mu(d\alpha) \quad \forall z \in X,$$

e

$$v^*(\Psi(\bar{x})) = \int_A \Psi(\bar{x}) d\mu = \int_A \psi_\alpha(\bar{x}) \mu(d\alpha).$$

Pelo Teorema 2.26-(ii) existe  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tal que

$$w^*(\Gamma'(\bar{x})z) = \int_B \Gamma'(\bar{x})z d\nu = \int_B \gamma'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) \quad \forall z \in X.$$

Logo existem  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mu \in \mathcal{M}(A)$  e  $\nu \in \mathcal{M}(B)$ , nem todos nulos, satisfazendo (2.11)-(2.13).

Por fim consideremos o caso quando  $D_{\Psi}^<(\bar{x}) = \emptyset$  (se  $D_{\Phi}^<(\bar{x}) = \emptyset$ , um argumento similar se aplica). Neste caso, pelo Lema 2.22,

$$\{\Psi'(\bar{x})z : z \in X\} \cap (-\text{int}(K + \{a\Psi(\bar{x}) : a \geq 0\})) = \emptyset.$$

Dado que estes conjuntos são não-vazios e convexos e  $\text{int}(K + \{a\Psi(\bar{x}) : a \geq 0\})$  é aberto, pelo Teorema 2.25 existe  $v^* \in \mathcal{C}(A)^*$ ,  $v^* \neq 0$ , tal que

$$v^*(\Psi'(\bar{x})z) \geq v^*(-k - a\Psi(\bar{x})) \quad \forall z \in X, \quad \forall k \in \text{int}(K) \text{ e } \forall a \geq 0. \quad (2.14)$$

Para  $z = 0$  e  $a = 0$ , temos

$$v^*(-k) \leq 0 \quad \forall k \in \text{int}(K).$$

Logo  $v^* \in \text{int}(K)^+ = K^+$ . Então, como  $-\Psi(\bar{x}) \in K$ ,  $v^*(\Psi(\bar{x})) \leq 0$ . Suponha que  $v^*(\Psi(\bar{x})) < 0$ . Para  $z = 0$ ,  $k \in \text{int}(K)$  fixo e  $a > 0$  suficientemente grande temos

$$v^*(-k - a\Psi(\bar{x})) = v^*(-k) - av^*(\Psi(\bar{x})) > 0,$$

que contradiz (2.14) com  $z = 0$ . Portanto  $v^*(\Psi(\bar{x})) = 0$ . Assim, por (2.14),

$$v^*(\Psi'(\bar{x})z) \geq v^*(-k) \quad \forall k \in \text{int}(K) \text{ e } \forall z \in X.$$

Daí

$$v^*(\Psi'(\bar{x})z) \geq \sup_{k \in \text{int}(K)} v^*(-k) = \delta^*(-v^*|\text{int}(K)) \quad \forall z \in X.$$

Mas  $v^* \in \text{int}(K)^+ = -\Lambda(\text{int}(K)) \Rightarrow \delta^*(-v^*|\text{int}(K)) = 0$ , de modo que

$$\begin{aligned} v^*(\Psi'(\bar{x})z) &\geq 0 \quad \forall z \in X \\ \Rightarrow v^*(\Psi'(\bar{x})z) &= 0 \quad \forall z \in X. \end{aligned}$$

Usando o Teorema de Representação de Riesz e tomando  $\lambda = 0$  e  $\nu = 0$  obtemos (2.11)-(2.13).  $\square$

Note que se  $B$  for finito, digamos com  $n$  elementos, então devemos tomar  $W = \mathbb{R}^n$ . Deste modo  $\Gamma : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $R(\Gamma'(\bar{x}))$  é fechado, independentemente de  $\Gamma$ .

Denotemos por  $A(\bar{x})$  o conjunto de índices das restrições ativas em  $\bar{x} \in X$ , i.e.,

$$A(\bar{x}) = \{\alpha \in A : \psi_\alpha(\bar{x}) = 0\}.$$

Agora estamos em condições de enunciar e provar o teorema de alternativa. A seguinte qualificação de restrição é necessária.

**Definição 2.28.** Dizemos que  $\psi_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , e  $\gamma_\beta$ ,  $\beta \in B$ , satisfazem (QR) em  $\bar{x} \in X$  se

(i) não existe uma medida não-nula  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tal que

$$\int_B \gamma'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X;$$

(ii) existe  $z \in X$  tal que

$$\begin{aligned} \psi'_\alpha(\bar{x})z &< 0, \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ \gamma'_\beta(\bar{x})z &= 0, \quad \beta \in B. \end{aligned}$$

Observe que se  $X = \mathbb{R}^n$  e  $B = \{1, \dots, m\}$ , a condição (i) na definição acima seria: não existem escalares  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , nem todos nulos, tais que

$$\sum_{i=1}^m a_i \nabla \gamma_i(\bar{x}) = 0.$$

Isto é equivalente a dizer que os gradientes das restrições de igualdade são vetores linearmente independentes.

**Teorema 2.29.** *Suponha que o sistema*

$$\begin{aligned}\varphi_i(x) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ \psi_\alpha(x) &\leq 0, \quad \alpha \in A, \\ \gamma_\beta(x) &= 0, \quad \beta \in B,\end{aligned}$$

*possui uma solução  $\bar{x} \in X$ . Se  $\varphi_i$ ,  $i \in I(\bar{x})$ ,  $\psi_\alpha$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ ,  $\gamma_\beta$  e  $-\gamma_\beta$ ,  $\beta \in B$ , são invexas em  $\bar{x}$  com uma mesma  $\eta$ ,  $\psi_\alpha$ ,  $\alpha \in A$  e  $\gamma_\beta$ ,  $\beta \in B$ , satisfazem (QR) em  $\bar{x}$  e  $R(\Gamma'(\bar{x}))$  é fechado, então exatamente um dos seguintes sistemas é consistente:*

(I) *existe  $x \in X$  tal que*

$$\begin{aligned}\varphi_i(x) &< 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ \psi_\alpha(x) &\leq 0, \quad \alpha \in A, \\ \gamma_\beta(x) &= 0, \quad \beta \in B;\end{aligned}$$

(II) *existem  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mu \in \mathcal{M}(A)$ ,  $\mu$  positiva, e  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tais que*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i(x) + \int_A \psi_\alpha(x) \mu(d\alpha) + \int_B \gamma_\beta(x) \nu(d\beta) &\geq 0 \quad \forall x \in X, \\ \lambda_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad \lambda \neq 0.\end{aligned}$$

*Demonstração.* Se (I) possui uma solução  $\tilde{x} \in X$ , então

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i(\tilde{x}) + \int_A \psi_\alpha(\tilde{x}) \mu(d\alpha) + \int_B \gamma_\beta(\tilde{x}) \nu(d\beta) < 0$$

para todos  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mu \in \mathcal{M}(A)$  e  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tais que  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $\lambda \neq 0$  e  $\mu \geq 0$ . Conseqüentemente (II) não é consistente.

Suponha que (I) não possui solução. Defina  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\Phi(x) = \max_{1 \leq i \leq p} \varphi_i(x)$$

e consideremos o problema

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \Phi(x) \\ \text{sujeito a} & \psi_\alpha(x) \leq 0, \quad \alpha \in A, \\ & \gamma_\beta(x) = 0, \quad \beta \in B. \end{array} \right\} \quad (2.15)$$

Seja  $\mathcal{F}$  o conjunto de todas as soluções factíveis do problema acima. Temos que

$$\Phi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{F},$$

visto que (I) não possui solução. Por outro lado temos  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  e

$$\Phi(\bar{x}) \leq 0.$$

Então  $\Phi(\bar{x}) = 0$  e  $\bar{x}$  é uma solução ótima do problema em (2.15). Pelo Teorema 2.27 segue que existem  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mu \in \mathcal{M}(A)$ ,  $\mu$  positiva, e  $\nu \in \mathcal{M}(B)$ , nem todos nulos, tais que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi'_i(\bar{x})z + \int_A \psi'_\alpha(\bar{x})z \mu(d\alpha) + \int_B \gamma'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X, \quad (2.16)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad \lambda_i = 0, \quad i \notin I(\bar{x}), \quad (2.17)$$

$$\int_A \psi_\alpha(\bar{x}) \mu(d\alpha) = 0. \quad (2.18)$$

Por (2.18) temos  $\mu(A \setminus A(\bar{x})) = 0$ . Então (2.16) se torna

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi'_i(\bar{x})z + \int_{A(\bar{x})} \psi'_\alpha(\bar{x})z \mu(d\alpha) + \int_B \gamma'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X.$$

Suponha que  $\lambda = 0$ . Então temos

$$\int_{A(\bar{x})} \psi'_\alpha(\bar{x})z \mu(d\alpha) + \int_B \gamma'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X. \quad (2.19)$$

Se  $A(\bar{x}) = \emptyset$  então  $\mu(A(\bar{x})) = 0$  e temos  $\mu = 0$  dado que  $\mu(A \setminus A(\bar{x})) = 0$ . Assim, como  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\nu$  são nem todos nulos, temos  $\nu \neq 0$  e por (2.19)

$$\int_B \gamma'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X.$$

Isto contradiz (i) na Definição 2.28. Se  $A(\bar{x}) \neq \emptyset$  então  $\mu(A(\bar{x})) > 0$ , pois caso contrário  $\nu \neq 0$  e, de (2.19), temos uma contradição com (i) na Definição 2.28. Por (ii) na Definição 2.28 existe  $z \in X$  tal que

$$\begin{aligned} \psi'_\alpha(\bar{x})z &< 0, \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ \gamma'_\beta(\bar{x})z &= 0, \quad \beta \in B. \end{aligned}$$

Então, integrando,

$$\int_{A(\bar{x})} \psi'_\alpha(\bar{x})z \mu(d\alpha) + \int_B \gamma'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) < 0,$$

visto que  $\mu(A(\bar{x})) > 0$ . A última desigualdade contradiz (2.19). Portanto  $\lambda \neq 0$ .

Pelas hipóteses de invexidade existe  $\eta : X \times X \rightarrow X$  tal que

$$\begin{aligned}\varphi_i(x) - \varphi_i(\bar{x}) &\geq \varphi'_i(\bar{x})\eta(x, \bar{x}), \quad i \in I(\bar{x}), \\ \psi_\alpha(x) - \psi_\alpha(\bar{x}) &\geq \psi'_\alpha(\bar{x})\eta(x, \bar{x}), \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ \gamma_\beta(x) - \gamma_\beta(\bar{x}) &= \gamma'_\beta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}), \quad \beta \in B,\end{aligned}$$

para todos  $x \in X$ . Logo

$$\begin{aligned}&\sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i [\varphi_i(x) - \varphi_i(\bar{x})] + \int_{A(\bar{x})} [\psi_\alpha(x) - \psi_\alpha(\bar{x})] \mu(d\alpha) \\ &\quad + \int_B [\gamma_\beta(x) - \gamma_\beta(\bar{x})] \nu(d\beta) \\ &\geq \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \varphi'_i(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) + \int_{A(\bar{x})} \psi'_\alpha(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \mu(d\alpha) \\ &\quad + \int_B \gamma'_\beta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \nu(d\beta) \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$

Mas de (2.18) temos  $\mu(A \setminus A(\bar{x})) = 0$  e de (2.17),  $\lambda_i = 0$ ,  $i \notin I(\bar{x})$ . Então

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^p \lambda_i [\varphi_i(x) - \varphi_i(\bar{x})] + \int_A [\psi_\alpha(x) - \psi_\alpha(\bar{x})] \mu(d\alpha) + \int_B [\gamma_\beta(x) - \gamma_\beta(\bar{x})] \nu(d\beta) \\ &= \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i [\varphi_i(x) - \varphi_i(\bar{x})] + \int_{A(\bar{x})} [\psi_\alpha(x) - \psi_\alpha(\bar{x})] \mu(d\alpha) \\ &\quad + \int_B [\gamma_\beta(x) - \gamma_\beta(\bar{x})] \nu(d\beta).\end{aligned}$$

Assim, usando (2.16)-(2.18) com  $z = \eta(x, \bar{x})$  e lembrando que  $\psi_\alpha(\bar{x}) = 0$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ , e que  $\gamma_\beta(\bar{x}) = 0$ ,  $\beta \in B$ , dado que  $\bar{x} \in \mathcal{F}$ , obtemos

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i(x) + \int_A \psi_\alpha(x) \mu(d\alpha) + \int_B \gamma_\beta(x) \nu(d\beta) \geq \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i(\bar{x}) \quad \forall x \in X.$$

Para  $i \notin I(\bar{x})$  temos  $\lambda_i = 0$ . Para  $i \in I(\bar{x})$  temos  $\varphi_i(\bar{x}) = \Phi(\bar{x}) = 0$ . Logo o lado direito da desigualdade acima é nulo, e assim concluímos que (II) é consistente.  $\square$



---

## CAPÍTULO 3

---

# Problemas de Programação Infinita Mono-Objetivo

Este capítulo contém condições de otimalidade e dualidade para o problema de programação infinita abaixo:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & \left. \begin{array}{l} g_{\alpha}(x) \leq 0, \alpha \in A, \\ h_{\beta}(x) = 0, \beta \in B. \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (\text{PPI})$$

Na próxima seção são apresentadas as condições necessárias de otimalidade de primeira e segunda ordens. São apresentadas também qualificações de restrição, as quais são necessárias para garantir que o multiplicador associado com a função objetivo é diferente de zero. De fato, são definidas adequadamente para o problema em questão as qualificações de restrição de Slater e de Mangasarian-Fromovitz. Na Seção 3.2 são apresentadas as condições suficientes, as quais são obtidas sob hipóteses de convexidade generalizada (invexidade). Também, fazemos para (PPI) um estudo semelhante ao feito por Martin em [23] para problemas de programação matemática. A última seção é dedicada aos resultados de dualidade. Esta seção traz teoremas de dualidade fraca, de dualidade forte e de dualidade inversa. Para estabelecer tais resultados usamos o conceito de invexidade.

---

### 3.1 Condições Necessárias

---

Nesta seção aplicamos os resultados do Capítulo 2 ao problema (PPI). Obtemos condições necessárias de otimalidade de primeira e segunda ordens.

**Definição 3.1.** Dizemos que  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  é uma solução ótima global de (PPI) se  $f(x) \geq f(\bar{x})$  para todas  $x \in \mathbb{F}$ .

Se no problema (P) (ver página 21 do Capítulo 2) tomarmos,  $Y = X$ ,  $U = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathcal{C}(A)$ ,  $W = \mathcal{C}(B)$ ,  $K = \{k \in \mathcal{C}(A) : k(\alpha) \geq 0, \alpha \in A\}$ ,  $C = \mathbb{R}_+$  e definirmos  $F = f$  e  $G$  e  $H$  respectivamente por

$$G(x)(\alpha) = g_\alpha(x) \text{ e } H(x)(\beta) = h_\beta(x),$$

então (PPI) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && F(x) \\ & \text{sujeito a} && G(x) \in -K, \\ & && H(x) = 0. \end{aligned}$$

Supondo que as hipóteses (H3) e (H5) sejam válidas, é fácil ver que  $G$  e  $H$  estão bem definidas e que  $F, G$  e  $H$  são duas vezes Fréchet diferenciáveis. Ademais, uma solução ótima global de (PPI) é claramente uma solução ótima de (P) (no sentido da Definição 2.2).

Denotemos por  $R(H'(x))$  o conjunto imagem de  $H'(x)$ ,  $x \in X$ .

**Teorema 3.2.** *Seja  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  uma solução ótima global de (PPI). Suponha que as hipóteses (H3) e (H5) são válidas e que  $R(H'(\bar{x}))$  é fechado. Então para toda  $d \in X$  satisfazendo*

$$f'(\bar{x})d \leq 0, \quad g'_\alpha(\bar{x})d \leq 0, \quad \alpha \in A, \quad h'_\beta(\bar{x})d = 0, \quad \beta \in B, \quad (3.1)$$

*correspondem um número real  $\lambda \geq 0$ , uma medida de Radon positiva  $\mu \in \mathcal{M}(A)$  e uma medida de Radon com sinal  $\nu \in \mathcal{M}(B)$ , nem todos nulos, tais que*

$$\lambda f'(\bar{x})z + \int_A g'_\alpha(\bar{x})z \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X, \quad (3.2)$$

$$\int_A g_\alpha(\bar{x}) \mu(d\alpha) = 0 \quad (3.3)$$

e

$$\lambda f''(\bar{x})(d, d) + \int_A g''_\alpha(\bar{x})(d, d) \mu(d\alpha) + \int_B h''_\beta(\bar{x})(d, d) \nu(d\beta) \geq 0, \quad (3.4)$$

$$\lambda f'(\bar{x})d = 0, \quad (3.5)$$

$$\int_A g'_\alpha(\bar{x})d \mu(d\alpha) = 0. \quad (3.6)$$

*Demonstração.* Dado que  $\bar{x} \in \mathbb{F}$ ,  $g_\alpha(\bar{x}) \leq 0$ ,  $\alpha \in A$ . De (3.1) sabemos que  $g'_\alpha(\bar{x})d \leq 0$ ,  $\alpha \in A$ . Assim temos

$$\begin{aligned} g_\alpha(\bar{x}) + g'_\alpha(\bar{x})d &\leq 0, \quad \alpha \in A \Leftrightarrow -G(\bar{x}) - G'(\bar{x})d \in K \\ &\Rightarrow -G'(\bar{x})d \in K + G(\bar{x}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -G'(\bar{x})d \in \{a(k + G(\bar{x})) : k \in K, a \geq 0\}.$$

Então segue de (3.1) que as condições em (2.4) no Teorema 2.20 são válidas. Logo existem funcionais lineares contínuos  $u^* \in C^+$ ,  $v^* \in K^+$  e  $w^* \in W^*$ , nem todos nulos, tais que (2.5)-(2.7) valem. De (2.6) temos que

$$u^* \circ F'(\bar{x}) + v^* \circ G'(\bar{x}) + w^* \circ H'(\bar{x}) = 0,$$

de modo que

$$u^*(F'(\bar{x})z) + v^*(G'(\bar{x})z) + w^*(H'(\bar{x})z) = 0 \quad \forall z \in X. \quad (3.7)$$

Como  $C = \mathbb{R}_+$ , temos que  $C^+ = \mathbb{R}_+$ . Assim  $u^*$  é um número real não-negativo, que vamos renomear  $\lambda$ . Pelo Teorema de Representação de Riesz 2.26-(i) existe uma medida de Radon positiva  $\mu \in \mathcal{M}(A)$  tal que

$$v^*(v) = \int_A v(\alpha) \mu(d\alpha) \quad \forall v \in V. \quad (3.8)$$

Pelo Teorema de Representação de Riesz 2.26-(ii) existe uma medida de Radon com sinal  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tal que

$$w^*(w) = \int_B w(\beta) \nu(d\beta) \quad \forall w \in W. \quad (3.9)$$

Conseqüentemente de (3.7) temos

$$\lambda F'(\bar{x})z + \int_A G'(\bar{x})z d\mu + \int_B H'(\bar{x})z d\nu = 0 \quad \forall z \in X,$$

i.e.,

$$\lambda f'(\bar{x})z + \int_A g'_\alpha(\bar{x})z \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X.$$

Assim obtemos (3.2). De (2.5) temos que  $v^*G(\bar{x}) = 0$ . Então usando (3.8) obtemos (3.3). (3.4) segue de (2.7), (3.8) e (3.9). De (2.5) temos  $u^*F'(\bar{x})d = 0$  e  $v^*G'(\bar{x})d = 0$ . De  $u^*F'(\bar{x})d = 0$  obtemos (3.5) diretamente. De  $v^*G'(\bar{x})d = 0$ , usando (3.8), obtemos (3.6).  $\square$

A condição (3.1) no enunciado do último teorema implica que  $d \in D_f(\bar{x}) \cap D_G(\bar{x}) \cap T_H(\bar{x})$ , ou seja,  $d$  é, ao mesmo tempo, uma direção de quasidescida, quasifactível e tangente.

As condições (3.2)-(3.3) no Teorema 3.2 são as condições necessárias de primeira ordem. Evidentemente, as condições (3.4)-(3.6) são as condições de segunda ordem.

Se  $\lambda$  em (3.2)-(3.6) é igual a zero, então nenhuma informação sobre a função objetivo é levado em conta nas condições de primeira e segunda ordens dadas no Teorema 3.2. Para garantir que  $\lambda > 0$ , precisamos de algum tipo de qualificação nas restrições do problema.

**Definição 3.3.** *Suponha que (H3) é satisfeita. Dizemos que as restrições de (PPI) satisfazem a condição CQ(d) para  $d \in X$  em  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  se*

(i) não existe uma medida com sinal não-nula  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tal que

$$\int_B [h'_\beta(\bar{x})z + h''_\beta(\bar{x})(d, d)] \nu(d\beta) \geq 0 \quad \forall z \in X;$$

(ii) existe  $\hat{z} \in X$  tal que

$$\begin{aligned} g'_\alpha(\bar{x})\hat{z} + g''_\alpha(\bar{x})(d, d) &< 0, \quad \alpha \in A, \\ h'_\beta(\bar{x})\hat{z} + h''_\beta(\bar{x})(d, d) &= 0, \quad \beta \in B. \end{aligned}$$

**Corolário 3.4.** Se para  $d$  satisfazendo (3.1), a condição  $CQ(d)$  é satisfeita em  $\bar{x}$ , então  $\lambda$  em (3.2)-(3.6) é não-nulo.

*Demonstração.* Suponha que  $\lambda$  em (3.2)-(3.6) é igual a zero. Então

$$\begin{aligned} \int_A [g'_\alpha(\bar{x})z + g''_\alpha(\bar{x})(d, d)] \mu(d\alpha) \\ + \int_B [h'_\beta(\bar{x})z + h''_\beta(\bar{x})(d, d)] \nu(d\beta) \geq 0 \quad \forall z \in X. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se  $\mu(A) = 0$  então  $\nu \neq 0$  pois  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\nu$  são nem todos nulos, e por (3.10) temos uma contradição com (i) na Definição 3.3.

Se  $\mu(A) > 0$ , usando (ii) na Definição 3.3, obtemos

$$\int_A [g'_\alpha(\bar{x})\hat{z} + g''_\alpha(\bar{x})(d, d)] \mu(d\alpha) + \int_B [h'_\beta(\bar{x})\hat{z} + h''_\beta(\bar{x})(d, d)] \nu(d\beta) < 0,$$

contradizendo (3.10).

Logo  $\lambda > 0$ . □

Agora estudaremos as condições de primeira ordem separadamente. Analisemos sob que condições podemos tomar  $\lambda = 1$  em (3.2)-(3.3). Para este fim, algumas qualificações de restrição serão apresentadas. Nomeadamente, as qualificações de restrição dos tipos Slater e Mangasarian-Fromovitz para (PPI).

**Definição 3.5.** Suponha que (H1) é válida. Dizemos que uma solução factível  $\bar{x}$  é uma solução de Kuhn-Tucker (ou uma solução estacionária) se existem  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu \in \mathcal{M}(A)$ ,  $\mu \geq 0$ , e  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tais que (3.2)-(3.3) valem com  $\lambda > 0$ .

Quando existem  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu \in \mathcal{M}(A)$ ,  $\mu \geq 0$ , e  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tais que (3.2)-(3.3) valem com  $(\lambda, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0)$ , mas sem que  $\lambda$  seja necessariamente não-nulo, diz-se que  $\bar{x}$  é uma solução de Fritz-John. Logo toda solução de Kuhn-Tucker é uma solução de Fritz-John. E, sob as hipóteses do Teorema 3.2, toda solução ótima de (PPI) é uma solução de Fritz-John. Será mostrado a seguir que quando as restrições de (PPI) possuem alguma qualificação, toda solução ótima é uma solução de Kuhn-Tucker. A recíproca é verdadeira se o problema for invexo. Mas isto é assunto da próxima seção.

**Definição 3.6.** *Suponha que (H1) é satisfeita. Dizemos que as restrições de (PPI) satisfazem a qualificação de restrição do tipo Slater em  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  se*

- (i)  $g_\alpha, \alpha \in A(\bar{x}), h_\beta$  e  $-h_\beta, \beta \in B$  são invexas com uma  $\eta$  comum;
- (ii) não existe uma medida com sinal não-nula  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tal que

$$\int_B h'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X;$$

- (iii) existe  $\hat{x} \in X$  tal que

$$\begin{aligned} g_\alpha(\hat{x}) &< 0, \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ h_\beta(\hat{x}) &= 0, \quad \beta \in B. \end{aligned}$$

**Definição 3.7.** *Suponha que (H1) é satisfeita. Dizemos que as restrições de (PPI) satisfazem a qualificação de restrição do tipo Mangasarian-Fromovitz em  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  se*

- (i) não existe uma medida com sinal não-nula  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tal que

$$\int_B h'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X;$$

- (ii) existe  $\hat{z} \in X$  tal que

$$\begin{aligned} g'_\alpha(\bar{x})\hat{z} &< 0, \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ h'_\beta(\bar{x})\hat{z} &= 0, \quad \beta \in B. \end{aligned}$$

**Teorema 3.8.** *Suponha que as hipóteses (H2) e (H4) são válidas. Seja  $\bar{x}$  uma solução ótima de (PPI). Suponha que  $R(H'(\bar{x}))$  é fechado. Se as restrições de (PPI) satisfazem*

- (a) a qualificação de restrição do tipo Slater em  $\bar{x}$

ou

- (b) a qualificação de restrição do tipo Mangasarian-Fromovitz em  $\bar{x}$

então  $\bar{x}$  é uma solução de Kuhn-Tucker.

*Demonstração.* Segue do Teorema 3.2 que  $\bar{x}$  satisfaz as condições de primeira ordem (3.2)-(3.3). De (3.3) vem claramente que  $\mu(A \setminus A(\bar{x})) = 0$ . Então podemos reescrever (3.2)-(3.3) como

$$\lambda f'(\bar{x})z + \int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x})z \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X.$$

Supondo que  $\lambda = 0$  temos

$$\int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x}) z \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x}) z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X. \quad (3.11)$$

Suponha que a hipótese (a) vale.

Se  $A(\bar{x}) = \emptyset$  então  $\mu(A(\bar{x})) = 0$  e temos  $\mu = 0$  visto que  $\mu(A \setminus A(\bar{x})) = 0$ . Assim, desde que  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\nu$  são nem todos nulos, temos  $\nu \neq 0$  e por (3.11)

$$\int_B h'_\beta(\bar{x}) z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X.$$

Isto contradiz (ii) na Definição 3.6.

Se  $A(\bar{x}) \neq \emptyset$  então  $\mu(A(\bar{x})) > 0$ , pois caso contrário  $\nu \neq 0$  e, de (3.11), temos uma contradição com (ii) na Definição 3.6. Por (i) na Definição 3.6,  $g_\alpha$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ ,  $h_\beta$  e  $-h_\beta$ ,  $\beta \in B$  são invexas com uma mesma  $\eta$ . Daí para  $\hat{x} \in X$ ,

$$\begin{aligned} g_\alpha(\hat{x}) - g_\alpha(\bar{x}) &\geq g'_\alpha(\bar{x}) \eta(\hat{x}, \bar{x}), \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ h_\beta(\hat{x}) - h_\beta(\bar{x}) &= h'_\beta(\bar{x}) \eta(\hat{x}, \bar{x}), \quad \beta \in B. \end{aligned}$$

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{A(\bar{x})} [g_\alpha(\hat{x}) - g_\alpha(\bar{x})] \mu(d\alpha) + \int_B [h_\beta(\hat{x}) - h_\beta(\bar{x})] \nu(d\beta) \\ \geq \int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x}) \eta(\hat{x}, \bar{x}) \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x}) \eta(\hat{x}, \bar{x}) \nu(d\beta). \end{aligned}$$

Usando (3.11) com  $z = \eta(\hat{x}, \bar{x})$  e lembrando que  $g_\alpha(\bar{x}) = h_\beta(\bar{x}) = 0$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ ,  $\beta \in B$ , segue que

$$\int_{A(\bar{x})} g_\alpha(\hat{x}) \mu(d\alpha) + \int_B h_\beta(\hat{x}) \nu(d\beta) \geq 0. \quad (3.12)$$

Por outro lado, temos de (iii) na Definição 3.6 que existe  $\hat{x} \in X$  tal que

$$\begin{aligned} g_\alpha(\hat{x}) &< 0, \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ h_\beta(\hat{x}) &= 0, \quad \beta \in B. \end{aligned}$$

Integrando vêmos

$$\int_{A(\bar{x})} g_\alpha(\hat{x}) \mu(d\alpha) + \int_B h_\beta(\hat{x}) \nu(d\beta) < 0,$$

visto que  $\mu(A(\bar{x})) > 0$ . Mas esta desigualdade contradiz (3.12).

Agora suponha que a hipótese (b) vale.

Se  $A(\bar{x}) = \emptyset$  temos uma contradição como antes.

Se  $A(\bar{x}) \neq \emptyset$ , como antes,  $\mu(A(\bar{x})) > 0$ . Por (ii) na Definição 3.7 existe  $z \in X$  tal que

$$\begin{aligned} g'_\alpha(\bar{x})z &< 0, \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ h'_\beta(\bar{x})z &= 0, \quad \beta \in B. \end{aligned}$$

Então, integrando,

$$\int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x})z \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) < 0,$$

dado que  $\mu(A(\bar{x})) > 0$ . A última desigualdade contradiz (3.11).

Portanto  $\lambda > 0$ . □

## 3.2 Condições Suficientes

Nesta seção são apresentadas as condições suficientes de otimalidade, é generalizada a noção de KT-invexidade para (PPI) e é estabelecido um resultado mostrando que KT-invexidade é uma condição necessária e suficiente para que todo ponto estacionário seja uma solução global do problema.

Relembramos da última seção que  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  é uma solução de Kuhn-Tucker se existem medidas  $\mu \in \mathcal{M}(A)$  e  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  com  $\mu \geq 0$  tais que

$$f'(\bar{x})z + \int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x})z \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X. \quad (3.13)$$

**Teorema 3.9.** *Suponha que a hipótese (H1) é válida. Seja  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  uma solução de Kuhn-Tucker. Suponha que  $f$ ,  $g_\alpha$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ ,  $h_\beta$  e  $-h_\beta$ ,  $\beta \in B$ , são invexas em  $\bar{x}$  com uma  $\eta$  comum. Então  $\bar{x}$  é uma solução ótima global de (PPI).*

*Demonstração.* Das hipóteses de invexidade temos que existe  $\eta : X \times X \rightarrow X$  tal que

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq f'(\bar{x})\eta(x, \bar{x}), \quad (3.14)$$

$$g_\alpha(x) - g_\alpha(\bar{x}) \geq g'_\alpha(\bar{x})\eta(x, \bar{x}), \quad \alpha \in A(\bar{x}), \quad (3.15)$$

$$h_\beta(x) - h_\beta(\bar{x}) = h'_\beta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}), \quad \beta \in B, \quad (3.16)$$

para todos  $x \in X$ . Então

$$\begin{aligned} &f(x) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \\ &+ \int_{A(\bar{x})} [g_\alpha(x) - g_\alpha(\bar{x})] \mu(d\alpha) - \int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \mu(d\alpha) \\ &+ \int_B [h_\beta(x) - h_\beta(\bar{x})] \nu(d\beta) - \int_B h'_\beta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \nu(d\beta) \geq 0 \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Mas  $g_\alpha(\bar{x}) = h_\beta(\bar{x}) = 0$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ ,  $\beta \in B$ . Daí,

$$\begin{aligned} f(x) - f(\bar{x}) &\geq f'(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) + \int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \nu(d\beta) \\ &\quad - \int_{A(\bar{x})} g_\alpha(x) \mu(d\alpha) - \int_B h_\beta(x) \nu(d\beta). \end{aligned}$$

Para  $x \in \mathbb{F}$ , temos  $\int_{A(\bar{x})} g_\alpha(x) \mu(d\alpha) \leq 0$  e  $\int_B h_\beta(x) \nu(d\beta) = 0$ , dado que  $\mu$  é positiva. Logo usando (3.13) com  $z = \eta(x, \bar{x})$  segue que

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{F}.$$

Portanto  $\bar{x}$  é uma solução ótima global.  $\square$

Agora será introduzida a noção de KT-invexidade para (PPI) e será estabelecido um resultado semelhante ao de Martin [23]. As relaxações na definição abaixo são feitas observando a prova do teorema anterior. Primeiro observemos que as desigualdades em (3.14)-(3.16) só precisam valer para soluções factíveis de (PPI) e não para todos  $x \in X$ . Observemos também que a omissão dos termos  $g_\alpha(x)$  em (3.15) não afeta a conclusão.

**Definição 3.10.** *Suponha que (H1) é válida. Dizemos que (PPI) é Kuhn-Tucker invexo (ou KT-invexo) se existe uma aplicação  $\eta : X \times X \rightarrow X$  tal que*

$$\begin{aligned} f(x) - f(\bar{x}) &\geq f'(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \\ 0 &\geq g'_\alpha(\bar{x})\eta(x, \bar{x}), \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ 0 &= h'_\beta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}), \quad \beta \in B, \end{aligned}$$

para todas  $x, \bar{x} \in \mathbb{F}$ .

Observemos que se não existem restrições de igualdade,  $X = \mathbb{R}^n$  e  $A$  é finito, a definição acima coincide exatamente com a definição dada por Martin. Assim a definição é de fato uma generalização da definição de Martin.

Note que se as funções  $f$ ,  $g_\alpha$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ ,  $h_\beta$  e  $-h_\beta$ ,  $\beta \in B$ , são invexas com a mesma  $\eta$ , então (PPI) é claramente KT-invexo.

No próximo exemplo temos um problema que é KT-invexo mas não é invexo e vale a propriedade de que toda solução de Kuhn-Tucker é uma solução ótima global. Isto mostra que invexidade é uma condição suficiente mas não necessária para valer esta propriedade.

**Exemplo 3.11.** *Vamos considerar  $X = \mathbb{R}$  e estudar o problema*

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp(-x) \\ \text{sujeito a} \quad & g_\alpha(x) = -\alpha x \leq 0, \quad \alpha \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Seja  $\bar{x} = 0$  e  $\mu =$  medida de Lebesgue. Então  $A(\bar{x}) = [0, 1]$  e

$$\begin{aligned} f'(\bar{x})z + \int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x})z \mu(d\alpha) &= \frac{1}{2}z + \int_0^1 (-\alpha)z \mu(d\alpha) \\ &= \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo  $\bar{x} = 0$  é uma solução de Kuhn-Tucker. Suponha que  $\hat{x} > 0$  é uma solução de Kuhn-Tucker. Então  $A(\hat{x}) = \{0\}$  e existe uma medida de Radon positiva  $\mu$  tal que

$$f'(\hat{x})z + \int_{A(\hat{x})} g'_\alpha(\hat{x})z \mu(d\alpha) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

i.e.,

$$\frac{1}{2} \exp(-\hat{x})z + \int_{\{0\}} (-\alpha)z \mu(d\alpha) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

A integral acima é igual a zero. Assim obtemos

$$\frac{1}{2} \exp(-\hat{x})z = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

o que é um absurdo. Portanto  $\bar{x} = 0$  é a única solução de Kuhn-Tucker em  $\mathbb{F} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ .

É fácil ver que  $f(x) \geq f(0)$  para toda  $x \in \mathbb{F}$ . Então  $\bar{x} = 0$  é uma solução ótima global.

Conseqüentemente a propriedade de que toda solução de Kuhn-Tucker é uma solução global vale para este problema.

Suponha que este problema é invexo. Então existe uma função  $\eta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &\geq f'(y)\eta(x, y) \\ g_\alpha(x) - g_\alpha(y) &\geq g'_\alpha(y)\eta(x, y), \quad \alpha \in [0, 1], \end{aligned}$$

para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ , isto é,

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &\geq f'(y)\eta(x, y) \\ (-\alpha)[x - y] &\geq (-\alpha)\eta(x, y), \quad \alpha \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Daí, para  $\alpha = 1$ ,

$$f(x) - f(y) - f'(y)(x - y) \geq f(x) - f(y) - f'(y)\eta(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Isto implica que  $f$  é convexa, o que é falso. Na verdade,  $f$  é côncava. Logo este problema não é invexo.

Defina  $\eta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\eta(x, y) = 1 - \exp(-x + y).$$

Assim

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - f'(y)\eta(x, y) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\exp(-x) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp(-y) \\ &\quad - \frac{1}{2}\exp(-y)(1 - \exp(-x + y)) = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sejam  $x, y \in \mathbb{F}$ . Se  $y > 0$ , então para  $\alpha \in A(y) = \{0\}$ ,

$$g'_\alpha(y)\eta(x, y) = -\alpha\eta(x, y) = 0.$$

Se  $y = 0$ , então para  $\alpha \in A(y) = [0, 1]$ ,

$$-\alpha\eta(x, y) = -\alpha\eta(x, 0) = -\alpha(1 - \exp(-x)) \leq 0,$$

visto que  $x \geq 0$ . Portanto, em qualquer caso

$$0 \geq g'_\alpha(y)\eta(x, y), \quad \alpha \in A(y). \quad (3.18)$$

De (3.17) e (3.18) concluímos que o problema é *KT-inverso*.

**Lema 3.12.** Suponha que as hipóteses (H2) e (H4) são válidas, que as restrições de (PPI) satisfazem a qualificação de restrição do tipo Mangasarian-Fromovitz em  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  e que  $R(H'(\bar{x}))$  é fechado. Se  $\bar{x}$  não é uma solução de Kuhn-Tucker, então o sistema

$$\begin{cases} f'(\bar{x})z < 0, \\ g'_\alpha(\bar{x})z \leq 0, \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ h'_\beta(\bar{x})z = 0, \quad \beta \in B, \end{cases} \quad (3.19)$$

tem uma solução  $z \in X$ .

*Demonstração.* Suponha que o sistema em (3.19) não possui solução. Defina  $\varphi, \phi_\alpha, \psi_\beta : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ ,  $\beta \in B$ , respectivamente por

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= f'(\bar{x})z, \\ \psi_\alpha(z) &= g'_\alpha(\bar{x})z, \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ \gamma_\beta(z) &= h'_\beta(\bar{x})z, \quad \beta \in B. \end{aligned}$$

Verifiquemos que as hipóteses do Teorema 2.29 são satisfeitas. Claramente  $\bar{z} = 0$  é solução de

$$\begin{aligned} \varphi(z) &\leq 0, \\ \psi_\alpha(z) &\leq 0, \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ \gamma_\beta(z) &= 0, \quad \beta \in B. \end{aligned}$$

Também é claro que  $\varphi$ ,  $\psi_\alpha$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ ,  $\gamma_\beta$  e  $-\gamma_\beta$ ,  $\beta \in B$ , são invexas em  $\bar{z}$  com uma mesma  $\eta(z, w) = z - w$ ,  $z, w \in X$ , e satisfazem (QR) em  $\bar{z}$ , já que a qualificação de restrição do tipo Mangasarian-Fromovitz é satisfeita em  $\bar{x}$ . Além disso a imagem de  $\Gamma'(\bar{z})$  coincide com a imagem de  $H'(\bar{x})$ , de modo que é um conjunto fechado. Portanto, todas as hipóteses do Teorema 2.29 são satisfeitas. Segue que existem  $\mu \in \mathcal{M}(A(\bar{x}))$ ,  $\mu$  positiva, e  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tais que

$$\varphi(z) + \int_{A(\bar{x})} \psi_\alpha(z) \mu(d\alpha) + \int_B \gamma_\beta(z) \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X,$$

ou seja,

$$f'(\bar{x})z + \int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x})z \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X.$$

Isto contradiz a hipótese de que  $\bar{x}$  não é uma solução de Kuhn-Tucker. Portanto o sistema em (3.19) é consistente.  $\square$

**Teorema 3.13.** *Suponha que as hipóteses (H2) e (H4) são válidas, que as restrições de (PPI) satisfazem a qualificação de restrição do tipo Mangasarian-Fromovitz em cada  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  e que  $R(H'(\bar{x}))$  é fechado para cada  $\bar{x} \in \mathbb{F}$ . Então, toda solução de Kuhn-Tucker é uma solução ótima global se e somente se (PPI) é Kuhn-Tucker invexo.*

*Demonstração.* Suponha que toda solução de Kuhn-Tucker é uma solução ótima global. Sejam  $x, \bar{x} \in \mathbb{F}$ .

Se  $f(x) < f(\bar{x})$  então  $\bar{x}$  não é uma solução ótima global, de modo que, por hipótese,  $\bar{x}$  não é uma solução de Kuhn-Tucker. Pelo Lema 3.12, existe  $z \in X$  tal que

$$\begin{aligned} f'(\bar{x})z &< 0, \\ g'_\alpha(\bar{x})z &\leq 0, \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ h'_\beta(\bar{x})z &= 0, \quad \beta \in B. \end{aligned}$$

Defina  $\eta(x, \bar{x}) = [f(x) - f(\bar{x})][f'(\bar{x})z]^{-1}z$ . Temos

$$f(x) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) = 0 \tag{3.20}$$

e, já que  $[f(x) - f(\bar{x})][f'(\bar{x})z]^{-1} > 0$ ,

$$0 \geq g'_\alpha(\bar{x})\eta(x, \bar{x}), \quad \alpha \in A(\bar{x}). \tag{3.21}$$

Mais,

$$0 = h'_\beta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}), \quad \beta \in B. \tag{3.22}$$

Por (3.20), (3.21) e (3.22) segue que (PPI) é Kuhn-Tucker invexo quando  $f(x) < f(\bar{x})$ .

Se  $f(x) \geq f(\bar{x})$ , defina  $\eta(x, \bar{x}) = 0$ . Temos

$$\begin{aligned} f(x) - f(\bar{x}) &\geq f'(\bar{x})\eta(x, \bar{x}), \\ 0 &= g'_\alpha(\bar{x})\eta(x, \bar{x}), \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ 0 &= h'_\beta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}), \quad \beta \in B. \end{aligned}$$

Assim (PPI) é Kuhn-Tucker invexo neste caso também.

Para  $x, \bar{x} \notin \mathbb{F}$  definimos  $\eta(x, \bar{x}) = 0$ .

Suponha que (PPI) é Kuhn-Tucker invexo. Seja  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  uma solução de Kuhn-Tucker. Assim existe uma medida positiva  $\mu \in \mathcal{M}(A)$  e uma medida com sinal  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tal que

$$f'(\bar{x})z + \int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x})z \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X. \quad (3.23)$$

Da hipótese de KT-invexidade obtemos

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq f'(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) + \int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \nu(d\beta)$$

para toda  $x \in \mathbb{F}$ . De (3.23) com  $z = \eta(x, \bar{x})$ , vêm

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{F}.$$

Portanto  $\bar{x}$  é uma solução ótima global.  $\square$

Observemos que as hipóteses do Teorema 3.13 são usadas apenas na parte “somente se” da demonstração.

### 3.3 Dualidade

Vamos supor que a hipótese (H1) é válida em toda esta seção. Consideremos o seguinte problema dual do tipo Wolfe:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Maximizar} & L(y, \mu, \nu) = f(y) + \int_A g_\alpha(y) \mu(d\alpha) + \int_B h_\beta(y) \nu(d\beta) \\ \text{sujeito a} & \left. \begin{array}{l} f'(y)z + \int_A g'_\alpha(y)z \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(y)z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X, \\ \mu \geq 0, \\ (y, \mu, \nu) \in X \times \mathcal{M}(A) \times \mathcal{M}(B). \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (\text{PD})$$

Denotemos por  $\mathbb{G}$  o conjunto de todas as soluções factíveis de (PD), i.e.,

$$\mathbb{G} = \{(y, \mu, \nu) \in X \times \mathcal{M}(A) \times \mathcal{M}(B) : f'(y)z + \int_A g'_\alpha(y)z \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(y)z \nu(d\beta) = 0 \ \forall z \in X \text{ e } \mu \geq 0\}.$$

No que segue temos, respectivamente, os teoremas de dualidade fraca, forte e inversa.

**Teorema 3.14.** *Suponha que  $f$ ,  $g_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ ,  $h_\beta$  e  $-h_\beta$ ,  $\beta \in B$ , são invexas com a mesma  $\eta$ . Então*

$$f(x) \geq L(y, \mu, \nu)$$

para todo  $x \in \mathbb{F}$  e todo  $(y, \mu, \nu) \in \mathbb{G}$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in \mathbb{F}$  e  $(y, \mu, \nu) \in \mathbb{G}$ . Pelas hipóteses de invexidade temos que

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &\geq f'(y)\eta(x, y), \\ g_\alpha(x) - g_\alpha(y) &\geq g'_\alpha(y)\eta(x, y), \ \alpha \in A, \\ h_\beta(x) - h_\beta(y) &= h'_\beta(y)\eta(x, y), \ \beta \in B. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} f(x) + \int_A g_\alpha(x) \mu(d\alpha) + \int_B h_\beta(x) \nu(d\beta) \\ - f(y) - \int_A g_\alpha(y) \mu(d\alpha) - \int_B h_\beta(y) \nu(d\beta) \\ \geq f'(y)\eta(x, y) + \int_A g'_\alpha(y)\eta(x, y) \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(y)\eta(x, y) \nu(d\beta). \end{aligned}$$

Como  $(y, \mu, \nu) \in \mathbb{G}$ , tomando  $z = \eta(x, y)$ , o lado direito da desigualdade acima se anula. Assim obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &\geq L(y, \mu, \nu) - \int_A g_\alpha(x) \mu(d\alpha) - \int_B h_\beta(x) \nu(d\beta) \\ &\geq L(y, \mu, \nu), \end{aligned}$$

dado que  $x \in \mathbb{F} (\Rightarrow g_\alpha(x) \leq 0, \ \alpha \in A, \text{ e } h_\beta(x) = 0, \ \beta \in B)$  e  $(y, \mu, \nu) \in \mathbb{G} (\Rightarrow \mu \geq 0)$ .  $\square$

**Teorema 3.15.** *Suponha que  $f$ ,  $g_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ ,  $h_\beta$  e  $-h_\beta$ ,  $\beta \in B$ , são invexas com a mesma  $\eta$ . Seja  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  uma solução ótima de (PPI). Se existem  $\bar{\mu} \in \mathcal{M}(A)$  e  $\bar{\nu} \in \mathcal{M}(B)$  tais que  $\bar{x}$  é uma solução de Kuhn-Tucker, então  $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$  é uma solução ótima de (PD) e  $f(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$ .*

*Demonstração.* Se existem  $\bar{\mu} \in \mathcal{M}(A)$  e  $\bar{\nu} \in \mathcal{M}(B)$  tais que  $\bar{x}$  é uma solução de Kuhn-Tucker então temos

$$f'(\bar{x})z + \int_A g'_\alpha(\bar{x})z \bar{\mu}(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})z \bar{\nu}(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X,$$

e

$$\int_A g_\alpha(\bar{x}) \bar{\mu}(d\alpha) = 0$$

com  $\bar{\mu} \geq 0$ . Logo  $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\nu}) \in \mathbb{G}$  e

$$\begin{aligned} L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\nu}) &= f(\bar{x}) + \int_A g_\alpha(\bar{x}) \bar{\mu}(d\alpha) + \int_B h_\beta(\bar{x}) \bar{\nu}(d\beta) \\ &= f(\bar{x}) \\ &\geq L(y, \mu, \nu) \quad \forall (y, \mu, \nu) \in \mathbb{G}, \end{aligned}$$

onde usamos o Teorema de Dualidade Fraca 3.14 na última desigualdade.  $\square$

**Teorema 3.16.** *Suponha que  $f$  é estritamente invexa e que  $g_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ ,  $h_\beta$  e  $-h_\beta$ ,  $\beta \in B$  são invexas com a mesma  $\eta$ . Seja  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  uma solução ótima de (PPI) e suponha que existem  $\bar{\mu} \in \mathcal{M}(A)$  e  $\bar{\nu} \in \mathcal{M}(B)$  tais que  $\bar{x}$  é uma solução de Kuhn-Tucker. Se  $(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\nu}) \in \mathbb{G}$  é uma solução ótima de (PD) então  $\hat{x} = \bar{x}$ , isto é,  $\hat{x}$  é uma solução ótima de (PPI). Além disso,  $f(\bar{x}) = L(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\nu})$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $\hat{x} \neq \bar{x}$ . Pelo Teorema de Dualidade Forte 3.15,  $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$  é uma solução ótima de (PD), de onde

$$L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\nu}) = L(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\nu}). \quad (3.24)$$

Pelas hipóteses de invexidade temos que

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) - f(\hat{x}) &> f'(\hat{x})\eta(\bar{x}, \hat{x}), \\ g_\alpha(\bar{x}) - g_\alpha(\hat{x}) &\geq g'_\alpha(\hat{x})\eta(\bar{x}, \hat{x}), \quad \alpha \in A, \\ h_\beta(\bar{x}) - h_\beta(\hat{x}) &= h'_\beta(\hat{x})\eta(\bar{x}, \hat{x}), \quad \beta \in B. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} &f(\bar{x}) + \int_A g_\alpha(\bar{x}) \hat{\mu}(d\alpha) + \int_B h_\beta(\bar{x}) \hat{\nu}(d\beta) \\ &\quad - f(\hat{x}) - \int_A g_\alpha(\hat{x}) \hat{\mu}(d\alpha) - \int_B h_\beta(\hat{x}) \hat{\nu}(d\beta) \\ &\quad > f'(\hat{x})\eta(\bar{x}, \hat{x}) + \int_A g'_\alpha(\hat{x})\eta(\bar{x}, \hat{x}) \hat{\mu}(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\hat{x})\eta(\bar{x}, \hat{x}) \hat{\nu}(d\beta). \end{aligned}$$

Desde que  $(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\nu}) \in \mathbb{G}$ , o lado direito da expressão acima é nulo. Logo, usando (3.24), segue que

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) + \int_A g_\alpha(\bar{x}) \hat{\mu}(d\alpha) + \int_B h_\beta(\bar{x}) \hat{\nu}(d\beta) \\ > f(\bar{x}) + \int_A g_\alpha(\bar{x}) \bar{\mu}(d\alpha) - \int_B h_\beta(\bar{x}) \bar{\nu}(d\beta). \end{aligned}$$

Como  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  ( $\Rightarrow h_\beta(\bar{x}) = 0, \beta \in B$ ) e  $(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$  é uma solução de Kuhn-Tucker ( $\Rightarrow \int_A g_\alpha(\bar{x}) \bar{\mu}(d\alpha) = 0$ ), temos

$$\int_A g_\alpha(\bar{x}) \hat{\mu}(d\alpha) > 0.$$

Por outro lado, visto que  $(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\nu}) \in \mathbb{G}$  ( $\Rightarrow \hat{\mu} \geq 0$ ) e  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  ( $\Rightarrow g_\alpha(\bar{x}) \leq 0, \alpha \in A$ ), temos

$$\int_A g_\alpha(\bar{x}) \hat{\mu}(d\alpha) \leq 0.$$

Assim temos uma contradição e portanto  $\hat{x} = \bar{x}$ .

Por (3.24) e pelos fatos de que  $\bar{x}$  é uma solução de Kuhn-Tucker ( $\Rightarrow \int_A g_\alpha(\bar{x}) \bar{\mu}(d\alpha) = 0$ ) e  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  ( $\Rightarrow h_\beta(\bar{x}) = 0, \beta \in B$ ), obtemos

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f(\bar{x}) + \int_A g_\alpha(\bar{x}) \bar{\mu}(d\alpha) + \int_B h_\beta(\bar{x}) \bar{\nu}(d\beta) \\ &= L(\bar{x}, \bar{\mu}, \bar{\nu}) \\ &= L(\hat{x}, \hat{\mu}, \hat{\nu}). \end{aligned}$$

□

O último teorema continua sendo válido se ao invés da invexidade estrita de  $f$  temos a invexidade estrita de  $g_\alpha$ , para algum  $\alpha \in A$ .

Observemos que uma condição suficiente para valerem as hipóteses dos Teoremas 3.15 e 3.16 de que existem  $\bar{\mu} \in \mathcal{M}(A)$  e  $\bar{\nu} \in \mathcal{M}(B)$  tais que  $\bar{x}$  é uma solução de Kuhn-Tucker, é que  $R(H'(\bar{x}))$  seja fechado e as restrições do problema satisfaçam uma qualificação de restrição (do tipo Slater ou Mangasarian-Fromovitz). Veja o Teorema 3.8.



---

## CAPÍTULO 4

---

# Problemas de Programação Infinita Multi-Objetivo

Vamos estudar o seguinte problema de programação multi-objetivo:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \\ \text{sujeito a} & \left. \begin{array}{l} g_\alpha(x) \leq 0, \alpha \in A, \\ h_\beta(x) = 0, \beta \in B. \end{array} \right\} \end{array} \quad (\text{PPIM})$$

Neste capítulo são obtidas condições de otimalidade para eficiência fraca de soluções factíveis e estudada a relação entre o problema multi-objetivo e um problema escalar associado. As condições de otimalidade são dadas na Seção 4.1. As condições necessárias são obtidas usando os resultados de Ben-Tal e Zowe. As condições suficientes são obtidas via invexidade. Também generalizamos alguns resultados de Osuna-Gómez *et al.* [25]: generalizamos para (PPIM) a noção de KT-invexidade e mostramos que esta noção é necessária e suficiente para toda solução vetorial de Kuhn-Tucker ser uma solução fracamente eficiente. Na última seção são apresentados resultados de eficiência própria e sobre a relação entre o problema multi-objetivo e um problema escalar associado. É mostrado que sob algumas condições, o conjunto de soluções propriamente eficientes do problema multi-objetivo coincide com o conjunto de soluções ótimas do problema escalar. Os resultados são estabelecidos sob hipóteses de invexidade.

Dados  $u, v \in \mathbb{R}^p$ ,  $u \geq v$  significa  $u_j \geq v_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , e  $u > v$  significa  $u_j > v_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , onde  $u_j$  denota a  $j$ -ésima coordenada de  $u$ .

**Definição 4.1.** Dizemos que  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  é uma solução eficiente de (PPIM) se não existe  $x \in \mathbb{F}$  tal que  $f(x) \leq f(\bar{x})$  e  $f(x) \neq f(\bar{x})$ .

Logo, uma solução factível é eficiente quando não é possível melhorar nenhum objetivo sem piorar algum outro.

**Definição 4.2.** Dizemos que  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  é uma solução fracamente eficiente de (PPIM) se não existe  $x \in \mathbb{F}$  tal que  $f(x) < f(\bar{x})$ .

Assim, uma solução factível é fracamente eficiente se não é possível melhorar todos os objetivos simultaneamente.

**Definição 4.3.** Dizemos que  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  é uma solução propriamente eficiente de (PPIM) se ela é eficiente e existe um escalar  $M > 0$  tal que, para cada  $i$ , temos

$$\frac{f_i(\bar{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\bar{x})} \leq M$$

para algum  $j$  tal que  $f_j(x) > f_j(\bar{x})$ , quando  $x \in \mathbb{F}$  e  $f_i(x) < f_i(\bar{x})$ .

Vemos então que essa forma de eficiência evita a possibilidade de ocorrer “trade-offs” ilimitados entre os vários objetivos. De outra forma dito, os quocientes entre o ganho em um objetivo e a perda com respeito aos demais é limitada.

---

## 4.1 Condições de Otimalidade para Eficiência Fraca

---

Nesta seção são obtidas as condições de otimalidade para (PPIM): condições necessárias e suficientes.

Vamos começar com as condições necessárias. São apresentadas condições necessárias de primeira e segunda ordens.

Como no caso do Capítulo 3, com  $p = 1$ , neste caso as condições necessárias de otimalidade também podem ser obtidas usando a teoria de Ben-Tal e Zowe, dada no Capítulo 2.

Tome em (P) (ver página 21 do Capítulo 2),  $Y = X$ ,  $U = \mathbb{R}^p$ ,  $V = \mathcal{C}(A)$ ,  $W = \mathcal{C}(B)$ ,  $K = \{k \in \mathcal{C}(A) : k(\alpha) \geq 0, \alpha \in A\}$ ,  $C = \mathbb{R}_+^p$  e defina  $F = f$  e  $G$  e  $H$ , respectivamente, como

$$G(x)(\alpha) = g_\alpha(x) \text{ e } H(x)(\beta) = h_\beta(x).$$

Assim (PPIM) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && F(x) \\ &\text{sujeito a} && G(x) \in -K, \\ &&& H(x) = 0. \end{aligned}$$

Supondo que as hipóteses (H3) e (H5) sejam válidas, é fácil ver que  $G$  e  $H$  estão bem definidas e que  $F, G$  e  $H$  são duas vezes Fréchet diferenciáveis. Além disso, uma solução

fracamente eficiente de (PPIM) é uma solução ótima do problema acima. De fato, se  $\bar{x}$  é uma solução fracamente eficiente de (PPIM), então não existe  $x \in \mathbb{F}$  com  $f(x) < f(\bar{x})$ , isto é, não existe  $x \in \mathbb{F}$  com  $f(x) \in f(\bar{x}) - \text{int}(C)$ . Naturalmente, isto é equivalente a dizer que  $f(x) \notin f(\bar{x}) - \text{int}(C)$  para toda  $x \in \mathbb{F}$ . Então  $\bar{x}$  é uma solução ótima de (P).

**Teorema 4.4.** *Suponha que as hipóteses (H3) e (H5) são válidas. Seja  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  uma solução fracamente eficiente de (PPIM). Suponhamos que  $R(H'(\bar{x}))$  é fechado. Então para toda  $d \in X$  satisfazendo*

$$f'_j(\bar{x})d \leq 0, \quad j \in J, \quad g'_\alpha(\bar{x})d \leq 0, \quad \alpha \in A, \quad h'_\beta(\bar{x})d = 0, \quad \beta \in B, \quad (4.1)$$

*correspondem um vetor  $\lambda \geq 0$  em  $\mathbb{R}^p$ , uma medida de Radon positiva  $\mu \in \mathcal{M}(A)$  e uma medida de Radon com sinal  $\nu \in \mathcal{M}(B)$ , nem todos nulos, tais que*

$$\sum_{j \in J} \lambda_j f'_j(\bar{x})z + \int_A g'_\alpha(\bar{x})z \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X, \quad (4.2)$$

$$\int_A g_\alpha(\bar{x}) \mu(d\alpha) = 0 \quad (4.3)$$

e

$$\sum_{j \in J} \lambda_j f''_j(\bar{x})(d, d) + \int_A g''_\alpha(\bar{x})(d, d) \mu(d\alpha) + \int_B h''_\beta(\bar{x})(d, d) \nu(d\beta) \geq 0, \quad (4.4)$$

$$\sum_{j \in J} \lambda_j f'_j(\bar{x})d = 0, \quad (4.5)$$

$$\int_A g'_\alpha(\bar{x})d \mu(d\alpha) = 0. \quad (4.6)$$

*Demonstração.* Similar à demonstração do Teorema 3.2. □

A condição (4.1) acima implica que  $d \in D_f(\bar{x}) \cap D_G(\bar{x}) \cap T_H(\bar{x})$ , ou seja,  $d$  é, ao mesmo tempo, uma direção de quasidescida, quasifactível e tangente.

Se  $\lambda$  em (4.2)-(4.6) é igual a zero, então nenhuma informação sobre a função objetivo é levado em conta nas condições de otimalidade de primeira e segunda ordens. Para garantir que  $\lambda > 0$ , precisamos lançar mão das qualificações de restrição.

**Definição 4.5.** *Suponha que (H3) é satisfeita. Dizemos que as restrições de (PPIM) satisfazem a condição CQ(d) para  $d \in X$  em  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  se*

(i) *não existe uma medida com sinal não-nula  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tal que*

$$\int_B [h'_\beta(\bar{x})z + h''_\beta(\bar{x})(d, d)] \nu(d\beta) \geq 0 \quad \forall z \in X;$$

(ii) existe  $z \in X$  tal que

$$\begin{aligned} g'_\alpha(\bar{x})z + g''_\alpha(\bar{x})(d, d) &< 0, \quad \alpha \in A, \\ h'_\beta(\bar{x})z + h''_\beta(\bar{x})(d, d) &= 0, \quad \beta \in B. \end{aligned}$$

**Corolário 4.6.** *Se para  $d$  satisfazendo (4.1) a condição  $CQ(d)$  é satisfeita em  $\bar{x}$ , então  $\lambda$  em (4.2)-(4.6) não é igual a zero.*

*Demonstração.* Semelhante à demonstração do Corolário 3.4.  $\square$

Agora vamos analisar as condições de primeira ordem separadamente. Vamos estudar quando podemos tomar  $\lambda \neq 0$  em (4.2)-(4.3). Para esta finalidade, algumas qualificações de restrição são apresentadas. Nomeadamente, as qualificações de restrição dos tipos Slater e Mangasarian-Fromovitz para (PPIM), introduzidas no Capítulo 3.

**Definição 4.7.** *Suponha que (H1) é válida. Dizemos que as restrições de (PPIM) satisfazem a qualificação de restrição do tipo Slater em  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  se*

(i)  $g_\alpha, \alpha \in A(\bar{x}), h_\beta$  e  $-h_\beta, \beta \in B$  são invexas com uma  $\eta$  comum;

(ii) não existe uma medida com sinal não-nula  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tal que

$$\int_B h'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X;$$

(iii) existe  $\hat{x} \in X$  tal que

$$\begin{aligned} g_\alpha(\hat{x}) &< 0, \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ h_\beta(\hat{x}) &= 0, \quad \beta \in B. \end{aligned}$$

**Definição 4.8.** *Suponha que (H1) é válida. Dizemos que as restrições de (PPIM) satisfazem a qualificação de restrição do tipo Mangasarian-Fromovitz em  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  se*

(i) não existe uma medida com sinal não-nula  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tal que

$$\int_B h'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X;$$

(ii) existe  $z \in X$  tal que

$$\begin{aligned} g'_\alpha(\bar{x})z &< 0, \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ h'_\beta(\bar{x})z &= 0, \quad \beta \in B. \end{aligned}$$

**Definição 4.9.** *Suponha que (H1) é válida. Dizemos que  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  é uma solução vetorial de Kuhn-Tucker se existem um vetor  $\lambda \geq 0$  em  $\mathbb{R}^p$ , uma medida de Radon positiva  $\mu \in \mathcal{M}(A)$  e uma medida de Radon com sinal  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tais que (4.2)-(4.3) valem com  $\lambda \neq 0$ .*

Quando existem  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu \in \mathcal{M}(A)$ ,  $\mu \geq 0$ , e  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tais que (4.2)-(4.3) valem com  $(\lambda, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0)$ , mas sem que  $\lambda$  seja necessariamente não-nulo, diz-se que  $\bar{x}$  é uma solução vetorial de Fritz-John. Sob as hipóteses do Teorema 4.4, toda solução fracamente eficiente de (PPIM) é uma solução vetorial de Fritz-John.

No próximo resultado é mostrado que sob uma das qualificações de restrição definidas acima, uma solução factível  $\bar{x} \in X$  satisfazendo as condições de primeira ordem (4.2)-(4.3) é uma solução vetorial de Kuhn-Tucker.

**Teorema 4.10.** *Suponha que as hipóteses (H2) e (H4) são válidas. Seja  $\bar{x}$  uma solução fracamente eficiente de (PPIM). Suponha que  $R(H'(\bar{x}))$  é fechado. Se as restrições de (PPIM) satisfazem*

(a) *a qualificação de restrição do tipo Slater em  $\bar{x}$*

*ou*

(b) *a qualificação de restrição do tipo Mangasarian-Fromovitz em  $\bar{x}$*

*então  $\bar{x}$  é uma solução vetorial de Kuhn-Tucker.*

*Demonstração.* Semelhante à demonstração do Teorema 3.8. □

Agora nos voltamos para as condições suficientes.

**Teorema 4.11.** *Suponha que a hipótese (H1) é válida. Seja  $\bar{x}$  uma solução vetorial de Kuhn-Tucker para (PPIM). Suponha que  $f_j$ ,  $j \in J$ ,  $g_\alpha$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ ,  $h_\beta$  e  $-h_\beta$ ,  $\beta \in B$ , são invexas em  $\bar{x}$  com uma  $\eta$  comum. Então  $\bar{x}$  é uma solução fracamente eficiente de (PPIM).*

*Demonstração.* Suponha que existe uma solução factível  $x$  tal que  $f(x) < f(\bar{x})$ . Pela invexidade de  $f$  obtemos

$$f'_j(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) < 0, \quad j \in J. \quad (4.7)$$

Como  $\bar{x}$  é uma solução vetorial de Kuhn-Tucker, existem  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mu \in \mathcal{M}(A)$  e  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  com  $\lambda_j \geq 0$ ,  $j \in J$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $\mu \geq 0$  e

$$\sum_{j \in J} \lambda_j f'_j(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) + \int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \nu(d\beta) = 0. \quad (4.8)$$

Desde que  $\lambda_j \geq 0$ ,  $j \in J$ , e  $\lambda \neq 0$ , de (4.7) vem

$$\sum_{j \in J} \lambda_j f'_j(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) < 0.$$

Então, por (4.8),

$$\int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \nu(d\beta) > 0. \quad (4.9)$$

Pela invexidade de  $g_\alpha$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ ,  $h_\beta$  e  $-h_\beta$ ,  $\beta \in B$ , temos

$$\begin{aligned} & \int_{A(\bar{x})} [g_\alpha(x) - g_\alpha(\bar{x})] \mu(d\alpha) + \int_B [h_\beta(x) - h_\beta(\bar{x})] \nu(d\beta) \\ & \geq \int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \nu(d\beta), \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{F}$ , visto que  $\mu$  é positiva. Mas  $g_\alpha(\bar{x}) = 0$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ , e  $x, \bar{x} \in \mathbb{F}$  implicam que  $g_\alpha(x) \leq 0$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ , e  $h_\beta(x) = h_\beta(\bar{x}) = 0$ ,  $\beta \in B$ , de modo que

$$\int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \nu(d\beta) \leq 0,$$

o que contradiz (4.9). Logo  $\bar{x}$  é uma solução fracamente eficiente.  $\square$

Abaixo temos a generalização da noção de KT-invexidade para o problema (PPIM). Esta noção foi introduzida em Osuna-Gómez [25] para problemas multi-objetivo em espaços de dimensão finita.

**Definição 4.12.** *Suponha que (H1) é satisfeita. O problema (PPIM) é dito ser Kuhn-Tucker invexo ou (KT-invexo) se existe uma aplicação  $\eta : X \times X \rightarrow X$  tal que*

$$\begin{aligned} f_j(x) < f_j(\bar{x}) &\Rightarrow f'_j(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) < 0, \quad j \in J, \\ 0 &\geq g'_\alpha(\bar{x})\eta(x, \bar{x}), \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ 0 &= h'_\beta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}), \quad \beta \in B, \end{aligned}$$

para todos  $x, \bar{x} \in \mathbb{F}$ .

Observe que se  $f_j$ ,  $j \in J$ ,  $g_\alpha$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ ,  $h_\beta$  e  $-h_\beta$ ,  $\beta \in B$ , são invexas com uma  $\eta$  comum, então (PPIM) é KT-invexo.

O próximo teorema mostra que KT-invexidade continua sendo uma condição suficiente para uma solução vetorial de Kuhn-Tucker ser uma solução fracamente eficiente. Além disso, este resultado mostra que KT-invexidade é também uma condição necessária para que toda solução vetorial de Kuhn-Tucker seja uma solução fracamente eficiente para (PPIM).

**Teorema 4.13.** *Suponha que as hipóteses (H2) e (H4) sejam válidas, que as restrições de (PPIM) satisfazem a qualificação de restrição do tipo Mangasarian-Fromovitz em cada  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  e que  $R(H'(\bar{x}))$  é fechado para cada  $\bar{x} \in \mathbb{F}$ . Então toda solução vetorial de Kuhn-Tucker é uma solução fracamente eficiente de (PPIM) se e somente se (PPIM) é KT-invexo.*

*Demonstração.* Suponha que toda solução vetorial de Kuhn-Tucker é uma solução fracamente eficiente de (PPIM). Sejam  $x, \bar{x} \in \mathbb{F}$ .

Se  $f_j(x) < f_j(\bar{x})$ ,  $j \in J$ , então  $\bar{x}$  não é uma solução fracamente eficiente, de modo que, por hipótese,  $\bar{x}$  não é uma solução vetorial de Kuhn-Tucker. Consequentemente não existem  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mu \in \mathcal{M}(A)$  e  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tais que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \lambda_j f'_j(\bar{x})z + \int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x})z \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) &= 0 \quad \forall z \in X, \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j \in J, \quad \lambda \neq 0, \\ \mu &\geq 0. \end{aligned}$$

Verifiquemos que as hipóteses do Teorema 2.29 são satisfeitas. Tome  $\varphi_j(z) = f'_j(\bar{x})z$ ,  $j \in J$ ,  $\psi_\alpha(z) = g'_\alpha(\bar{x})z$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ , e  $\gamma_\beta(z) = h'_\beta(\bar{x})z$ ,  $\beta \in B$ . O sistema

$$\begin{aligned} \varphi_j(z) &\leq 0, \quad j \in J, \\ \psi_\alpha(z) &\leq 0, \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ \gamma_\beta(z) &= 0, \quad \beta \in B, \end{aligned}$$

claramente possui uma solução  $\bar{z} = 0$ . Dado que  $\varphi_j$ ,  $\psi_\alpha$  e  $\gamma_\beta$  são lineares elas são invexas em  $\bar{z}$  com a mesma  $\eta(z, w) = z - w$ ,  $z, w \in X$ . Também, a imagem de  $\Gamma'(\bar{z})$ , que coincide com  $R(H'(\bar{x}))$ , é fechado e a condição (QR) é satisfeita em  $\bar{z}$ , já que as restrições satisfazem a qualificação de restrição do tipo Mangasarian-Fromovitz em  $\bar{x}$ . Portanto todas as hipóteses do Teorema 2.29 são satisfeitas. Segue que existe  $z \in X$  tal que

$$\begin{aligned} \varphi_j(z) &= f'_j(\bar{x})z < 0, \quad j \in J, \\ \psi_\alpha(z) &= g'_\alpha(\bar{x})z \leq 0, \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ \gamma_\beta(z) &= h'_\beta(\bar{x})z = 0, \quad \beta \in B. \end{aligned}$$

Defina  $\eta(x, \bar{x}) = z$  para  $x, \bar{x} \in \mathbb{F}$  e  $\eta(x, \bar{x}) = 0$  caso contrário. Portanto existe  $\eta : X \times X \rightarrow X$  tal que

$$\begin{aligned} f_j(x) &< f_j(\bar{x}) \Rightarrow f'_j(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) < 0, \quad i \in J, \\ 0 &\geq g'_\alpha(\bar{x})\eta(x, \bar{x}), \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ 0 &= h'_\beta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}), \quad \beta \in B, \end{aligned}$$

para todos  $x, \bar{x} \in \mathbb{F}$ . Consequentemente (PPIM) é KT-invexo.

Reciprocamente, suponha que (PPIM) é KT-invexo. Seja  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  uma solução vetorial de Kuhn-Tucker. Então existem  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mu \in \mathcal{M}(A)$  e  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tais que  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $\mu \geq 0$  e

$$\sum_{j \in J} \lambda_j f'_j(\bar{x})z + \int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x})z \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X. \quad (4.10)$$

Se existe  $x \in \mathbb{F}$  tal que  $f(x) < f(\bar{x})$ , então, pela KT-invexidade,

$$f'_j(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) < 0, \quad j \in J.$$

Logo, usando (4.10) com  $z = \eta(x, \bar{x})$ ,

$$\int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \nu(d\beta) > 0. \quad (4.11)$$

Por outro lado, da KT-invexidade, temos

$$\int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \nu(d\beta) \leq 0,$$

contradizendo (4.11). Portanto não existe  $x \in \mathbb{F}$  com  $f(x) < f(\bar{x})$ , de modo que  $\bar{x}$  é uma solução fracamente eficiente de (PPIM).  $\square$

Observemos que as hipóteses do Teorema 4.13 são usadas apenas na parte “somente se” da demonstração.

---

## 4.2 Eficiência Própria e Problemas Escalares

---

Aqui são dadas condições suficientes para eficiência própria de uma solução vetorial de Kuhn-Tucker e é mostrado que o conjunto de todas as soluções propriamente eficientes de (PPIM) coincide com o conjunto de todas as soluções ótimas de um problema escalar relacionado.

Evidentemente, uma solução propriamente eficiente é uma solução fraca. Assim os Teoremas 4.4 e 4.10 fornecem condições necessárias para eficiência própria.

**Teorema 4.14.** *Suponha que a hipótese (H1) é válida. Seja  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  uma solução vetorial de Kuhn-Tucker com  $\lambda > 0$ . Suponha que  $f_j$ ,  $j \in J$ ,  $g_\alpha$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ ,  $h_\beta$  e  $-h_\beta$ ,  $\beta \in B$ , são invexas em  $\bar{x}$  com uma  $\eta$  comum. Então  $\bar{x}$  é uma solução propriamente eficiente.*

*Demonstração.* Existem  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mu \in \mathcal{M}(A)$  e  $\nu \in \mathcal{M}(B)$  tais que  $\lambda > 0$ ,  $\mu \geq 0$  e

$$\sum_{j \in J} \lambda_j f'_j(\bar{x})z + \int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x})z \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x})z \nu(d\beta) = 0 \quad \forall z \in X. \quad (4.12)$$

Primeiro vamos mostrar que  $\bar{x}$  é uma solução eficiente. Suponha que existe  $x \in \mathbb{F}$  tal que  $f(x) \leq f(\bar{x})$  e  $f(x) \neq f(\bar{x})$ . Então

$$\sum_{j \in J} \lambda_j f_j(x) < \sum_{j \in J} \lambda_j f_j(\bar{x}),$$

onde a desigualdade vale estritamente pois  $\lambda > 0$ . Pela invexidade de  $f_j$ ,  $j \in J$ , temos

$$\sum_{j \in J} \lambda_j f'_j(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) < 0.$$

De (4.12) segue que

$$\int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) \nu(d\beta) > 0. \quad (4.13)$$

Pela invexidade de  $g_\alpha$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ ,  $h_\beta$  e  $-h_\beta$ ,  $\beta \in B$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{A(\bar{x})} [g_\alpha(x) - g_\alpha(\bar{x})] \mu(d\alpha) + \int_B [h_\beta(x) - h_\beta(\bar{x})] \nu(d\beta) \\ & \geq \int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) \nu(d\beta), \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{F}$ , dado que  $\mu \geq 0$ . Para  $x, \bar{x} \in \mathbb{F}$  temos  $g_\alpha(x) \leq 0$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ , e  $h_\beta(x) = h_\beta(\bar{x}) = 0$ ,  $\beta \in B$ . Para  $\alpha \in A(\bar{x})$  temos  $g_\alpha(\bar{x}) = 0$ . Daí

$$\int_{A(\bar{x})} g'_\alpha(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) \mu(d\alpha) + \int_B h'_\beta(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) \nu(d\beta) \leq 0,$$

o que contradiz (4.13). Portanto  $\bar{x}$  é uma solução eficiente de (PPIM). Suponha que  $\bar{x}$  não é uma solução propriamente eficiente. Então para  $M = (p-1) \max\{\lambda_j/\lambda_i : i, j \in J\}$  ( $p \geq 2$ ) existem  $x \in \mathbb{F}$  e  $i \in J$ , tais que  $f_i(x) < f_i(\bar{x})$  e

$$\frac{f_i(\bar{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\bar{x})} > M$$

para todo  $j$  tal que  $f_j(x) > f_j(\bar{x})$ . Para  $j \neq i$  tal que  $f_j(x) \leq f_j(\bar{x})$  tem-se

$$f_i(\bar{x}) - f_i(x) > 0 \geq \frac{p-1}{\lambda_i} \lambda_j [f_j(x) - f_j(\bar{x})].$$

Segue então que

$$f_i(\bar{x}) - f_i(x) > \frac{p-1}{\lambda_i} \lambda_j [f_j(x) - f_j(\bar{x})] \quad \forall j \neq i,$$

isto é,

$$\frac{\lambda_i}{p-1} [f_i(\bar{x}) - f_i(x)] > \lambda_j [f_j(x) - f_j(\bar{x})] \quad \forall j \neq i.$$

Somando sobre  $j \neq i$  obtemos

$$\lambda_i [f_i(\bar{x}) - f_i(x)] > \sum_{j \neq i} \lambda_j [f_j(x) - f_j(\bar{x})].$$

Assim

$$\sum_{j \in J} \lambda_j [f_j(x) - f_j(\bar{x})] < 0.$$

Da invexidade de  $f_j$ ,  $j \in J$ , segue que

$$\sum_{j \in J} \lambda_j f'_j(\bar{x}) \eta(x, \bar{x}) < 0,$$

desde que  $\lambda > 0$ . Como antes isto leva a uma contradição. Logo  $\bar{x}$  é uma solução propriamente eficiente de (PPIM).  $\square$

Os dois teoremas a seguir relacionam o problema multi-objetivo (PPIM) e o problema escalar abaixo:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & s(x) = \sum_{j \in J} \omega_j f_j(x) \\ \text{sujeito a} & \left. \begin{array}{l} g_\alpha(x) \leq 0, \alpha \in A, \\ h_\beta(x) = 0, \beta \in B. \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (\text{PPIE})$$

**Teorema 4.15.** *Suponha que (H1) é satisfeita. Se  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  é uma solução ótima global de (PPIE) com  $\omega_j > 0$ ,  $j \in J$ , então  $\bar{x}$  é uma solução propriamente eficiente de (PPIM).*

*Demonstração.* Suponhamos que  $\bar{x}$  não é uma solução propriamente eficiente de (PPIM). Procedendo como na segunda parte do Teorema 4.14 obtemos

$$\sum_{j \in J} \omega_j [f_j(x) - f_j(\bar{x})] < 0,$$

o que contradiz a otimalidade de  $\bar{x}$  para (PPIE). Conseqüentemente  $\bar{x}$  é uma solução propriamente eficiente.  $\square$

Adicionando hipóteses de invexidade obtemos a recíproca do teorema acima.

**Teorema 4.16.** *Seja  $\bar{x} \in \mathbb{F}$ . Suponha que (H2) e (H4) são válidas, que  $f_j$ ,  $j \in J$ ,  $g_\alpha$ ,  $\alpha \in A(\bar{x})$ ,  $h_\beta$  e  $-h_\beta$ ,  $\beta \in B$ , são invexas em  $\bar{x}$  com uma mesma  $\eta$ , que as restrições satisfazem a qualificação de restrição do tipo Mangasarian-Fromovitz em  $\bar{x}$  e que  $R(H'(\bar{x}))$  é fechado. Então  $\bar{x}$  é uma solução propriamente eficiente de (PPIM) se e somente se  $\bar{x}$  é uma solução ótima global de (PPIE) com  $\omega_j > 0$ ,  $j \in J$ .*

*Demonstração.* A parte “se” segue do Teorema 4.15. Vamos provar a parte “somente se”.

Suponha que  $\bar{x}$  é uma solução propriamente eficiente de (PPIM). Então, para cada  $i \in J$ , o seguinte sistema não possui solução  $x \in X$ :

$$\begin{aligned} f_i(x) &< f_i(\bar{x}), \\ f_i(x) + Mf_j(x) &< f_i(\bar{x}) + Mf_j(\bar{x}), \quad j \neq i, \\ g_\alpha(x) &\leq 0, \quad \alpha \in A, \\ h_\beta(x) &= 0, \quad \beta \in B, \end{aligned}$$

onde  $M$  é a constante da Definição 4.3. De fato, se este sistema possuir uma solução  $x \in X$ , então  $x \in \mathbb{F}$  e  $f_i(x) < f_i(\bar{x})$ . Conseqüentemente, dado que  $\bar{x}$  é uma solução propriamente eficiente,

$$\frac{f_i(\bar{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\bar{x})} \leq M$$

para algum  $j$  tal que  $f_j(x) > f_j(\bar{x})$ . O conjunto  $\{j : f_j(x) > f_j(\bar{x})\}$  é não-vazio, pois caso contrário

$$f_j(x) \leq f_j(\bar{x}) \quad \forall j \in J,$$

o que implica que  $\bar{x}$  não é uma solução eficiente, já que  $f_i(x) < f_i(\bar{x}) \Rightarrow f(x) \neq f(\bar{x})$ . Portanto

$$f_i(x) + Mf_j(x) \geq f_i(\bar{x}) + Mf_j(\bar{x}),$$

o que contradiz a segunda desigualdade do sistema.

Tome

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= f_i(x) - f_i(\bar{x}), \\ \varphi_j(x) &= f_i(x) + Mf_j(x) - f_i(\bar{x}) - Mf_j(\bar{x}), \quad j \neq i, \\ \psi_\alpha(x) &= g_\alpha(x), \quad \alpha \in A(\bar{x}), \\ \gamma_\beta(x) &= h_\beta(x), \quad \beta \in B. \end{aligned}$$

É fácil ver que todas as hipóteses do Teorema 2.29 são satisfeitas. Segue que para cada  $i \in J$  existem  $\lambda^i \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mu^i \in \mathcal{M}(A(\bar{x}))$  e  $\nu^i \in \mathcal{M}(B)$  tais que  $\lambda^i \geq 0$ ,  $\lambda^i \neq 0$ ,  $\mu^i \geq 0$  e

$$\sum_{j \in J} \lambda_j^i \varphi_j(x) + \int_{A(\bar{x})} \psi_\alpha(x) \mu^i(d\alpha) + \int_B \gamma_\beta(x) \nu^i(d\beta) \geq 0 \quad \forall x \in X.$$

Como  $\lambda^i \geq 0$  e  $\lambda^i \neq 0$ , podemos supor que  $\sum_{j \in J} \lambda_j^i = 1$ . Assim

$$\begin{aligned} f_i(x) + M \sum_{j \neq i} \lambda_j^i f_j(x) + \int_{A(\bar{x})} g_\alpha(x) \mu^i(d\alpha) + \int_B h_\beta(x) \nu^i(d\beta) \\ \geq f_i(\bar{x}) + M \sum_{j \neq i} \lambda_j^i f_j(\bar{x}) \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Para  $x \in \mathbb{F}$  temos

$$f_i(x) + M \sum_{j \neq i} \lambda_j^i f_j(x) \geq f_i(x) + M \sum_{j \neq i} \lambda_j^i f_j(x) + \int_{A(\bar{x})} g_\alpha(x) \mu^i(d\alpha) + \int_B h_\beta(x) \nu^i(d\beta),$$

de modo que

$$f_i(x) + M \sum_{j \neq i} \lambda_j^i f_j(x) \geq f_i(\bar{x}) + M \sum_{j \neq i} \lambda_j^i f_j(\bar{x}) \quad \forall x \in \mathbb{F} \quad \forall i \in J.$$

Somando sobre  $i \in J$  obtemos

$$\sum_{j \in J} \omega_j f_j(x) \geq \sum_{j \in J} \omega_j f_j(\bar{x}) \quad \forall x \in \mathbb{F},$$

onde

$$\omega_j = 1 + M \sum_{i \neq j} \lambda_j^i, \quad j \in J.$$

Logo  $\bar{x}$  é uma solução ótima de (PPIE) com  $\omega_j > 0$ ,  $j \in J$ . □

---

## CAPÍTULO 5

---

# Problemas de Programação com Tempo Contínuo

---

### 5.1 Notações & Hipóteses

---

Os problemas de programação com tempo contínuo a serem estudados são da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } \phi(x) &= \left( \int_0^T f_1(t, x(t))dt, \dots, \int_0^T f_p(t, x(t))dt \right) \\ \text{sujeito a } g_i(t, x(t)) &\leq 0 \text{ q.s. em } [0, T], \quad i = 1, \dots, m, \\ x &\in X, \end{aligned}$$

onde  $X$  é um subconjunto aberto, convexo e não-vazio do espaço de Banach  $L_\infty^n[0, T]$ ,  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_j(t, x(t)) = \xi_j(x)(t)$ ,  $g_i(t, x(t)) = \gamma_i(x)(t)$ ,  $\xi_j : X \rightarrow \Lambda_1^1[0, T]$ ,  $j \in J := \{1, \dots, p\}$ , e  $\gamma_i : X \rightarrow \Lambda_1^1[0, T]$ ,  $i \in I := \{1, \dots, m\}$ , onde  $L_\infty^n[0, T]$  denota o espaço de todas as funções vetoriais  $n$ -dimensionais definidas no intervalo compacto  $[0, T] \subset \mathbb{R}$ , que são Lebesgue mensuráveis e essencialmente limitadas, com a norma  $\|\cdot\|_\infty$  definida por

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \text{ess sup}\{|x_j(t)|, 0 \leq t \leq T\},$$

onde para cada  $t \in [0, T]$ ,  $x_j(t)$  é a  $j$ -ésima componente de  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ .  $\Lambda_1^m[0, T]$  denota o espaço de todas as funções vetoriais  $m$ -dimensionais que são essencialmente limitadas e Lebesgue mensuráveis, definidas em  $[0, T]$ , com a norma  $\|\cdot\|_1$  definida por

$$\|y\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \int_0^T |y_j(t)|dt.$$

Nos Capítulos 6 e 7 é estudado o caso mono-objetivo, com  $p = 1$ . O caso multi-objetivo é estudado no Capítulo 8. Na sequência são feitas algumas preliminares desta parte.

Seja  $V$  um subconjunto aberto e convexo de  $\mathbb{R}^n$  contendo o conjunto  $\{x(t) \in \mathbb{R}^n : x \in X, t \in [0, T]\}$ .

Vamos supor que  $f_j$ ,  $j \in J$ , e  $g_i$ ,  $i \in I$ , são funções reais definidas em  $V \times [0, T]$  e que as funções  $t \mapsto f_j(t, x(t))$ ,  $j \in J$ , e  $t \mapsto g_i(t, x(t))$ ,  $i \in I$ , são Lebesgue mensuráveis e integráveis para todo  $x \in X$ .

Seja  $\mathbb{F}$  o conjunto de todas as soluções factíveis do problema acima, i.e., seja

$$\mathbb{F} = \{x \in X : g_i(t, x(t)) \leq 0 \text{ q.s. em } [0, T], i \in I\}.$$

Dado  $x \in \mathbb{F}$ , para cada  $i \in I$  denotemos por  $A_i(x)$  o subconjunto de  $[0, T]$  onde a  $i$ -ésima restrição é ativa, i.e.,

$$A_i(x) = \{t \in [0, T] : g_i(t, x(t)) = 0\}.$$

Nesta parte, todos os vetores são vetores coluna. Dado  $w \in \mathbb{R}^l$ ,  $w \leq 0$  significa  $w_i \leq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, l$ , e  $w < 0$  significa  $w_i < 0$  para  $i = 1, 2, \dots, l$ . Denotamos o transposto de  $w$  por  $w'$ .

---

## 5.2 Aplicações

---

Problemas de programação com tempo contínuo podem ser tomados como modelos realistas para uma variedade de processos de decisão ótima nas áreas de economia, pesquisa operacional e engenharia. Abaixo, serão expostos problemas de controle ótimo que são casos particulares do problema de programação com tempo contínuo. Nestes problemas estão presentes restrições de igualdade, o que não acontece no problema de programação com tempo contínuo considerado neste trabalho. Entretanto, restrições de igualdade podem ser consideradas como sendo duas restrições de desigualdade.

O problema a seguir é um problema de controle ótimo com dinâmica linear, restrições de igualdade lineares e restrições de desigualdade não-lineares tanto nas variáveis de estado quando nas variáveis de controle:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt \\ &\text{sujeito a} \quad \frac{d}{dt} x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + a(t), \\ &\quad C(t)x(t) + D(t)u(t) + \int_0^t K_s(t, \tau)x(\tau) d\tau + \int_0^t K_c(t, \tau)u(\tau) d\tau = b(t), \\ &\quad g(t, x(t), u(t)) \leq c(t) + \int_0^t h(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau, \\ &\quad t \in [0, T], x(0) \text{ dado.} \end{aligned}$$

O próximo problema é também um problema de controle ótimo. Este possui dinâmica não-linear, com restrições nas variáveis de estado e de controle:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} \quad \int_0^T \psi(t, x(t), u(t)) dt \\
 &\text{sujeito a} \quad \alpha_i(t, x(t), u(t)) = \beta_i(t) + \int_0^t \gamma_i(t, s, x(s), u(s)) ds \text{ q.s. em } [0, T], \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 &\quad \quad \quad \lambda_i(t, x(t), u(t)) \leq \mu_i(t) + \int_0^t \nu_i(t, s, x(s), u(s)) ds \text{ q.s. em } [0, T], \quad i = 1, 2, \dots, k, \\
 &\quad \quad \quad x \in X, \quad u \in U.
 \end{aligned}$$

Estes modelos foram dados como aplicações de programação com tempo contínuo em Zalmai [38] e [39].



---

---

## CAPÍTULO 6

---

# Problemas de Programação com Tempo Contínuo Mono-Objetivo

Este capítulo contém condições de otimalidade para o problema:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimizar } \phi(x) = \int_0^T f(t, x(t))dt \\ \text{sujeito a } \left. \begin{array}{l} g_i(t, x(t)) \leq 0 \text{ q.s. em } [0, T], \ i \in I, \\ x \in X. \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (\text{PTC})$$

Vamos supor que as funções  $f$  e  $g_i$ ,  $i \in I$ , são continuamente diferenciáveis em relação à seus segundo argumento sobre  $[0, T]$ .

No que segue, é lembrado a noção de invexidade para (PTC) e generalizada para o contexto de tempo contínuo a noção de KT-invexidade, introduzida por Martin em [23] para problemas de programação matemática. Também, é dado um exemplo de problema KT-invexo.

KT-invexidade é uma noção mais fraca de invexidade e sua definição é inspirada na demonstração de Kuhn-Tucker suficiência, isto é, na demonstração de que as condições de Kuhn-Tucker sob hipóteses de invexidade são suficientes à otimalidade. Abaixo é repetida tal demonstração, ou seja, é mostrado que se (PTC) é invexo e  $y$  é uma solução de Kuhn-Tucker, então  $y$  é uma solução ótima global. Antes é lembrado a noção de invexidade para (PTC) dada em Brandão *et al.* [8].

**Definição 6.1.** Dizemos que (PTC) é invexo se existir uma função  $\eta : [0, T] \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$

tal que  $t \mapsto \eta(t, x(t), y(t)) \in L_\infty^n[0, T]$ ,

$$\phi(x) - \phi(y) \geq \int_0^T \nabla f'(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) dt \quad (6.1)$$

e

$$g_i(t, x(t)) - g_i(t, y(t)) \geq \nabla g'_i(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) \text{ q.s em } [0, T], \quad i \in I, \quad (6.2)$$

para todas  $x, y \in X$ .

**Definição 6.2.** Dizemos que  $y \in \mathbb{F}$  é uma solução de Kuhn-Tucker se existir  $\lambda \in L_\infty^m[0, T]$  tal que

$$\int_0^T \left[ \nabla f'(t, y(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \right] z(t) dt = 0 \quad \forall z \in L_\infty^n[0, T], \quad (6.3)$$

$$\lambda_i(t) g_i(t, y(t)) = 0 \text{ q.s. em } [0, T], \quad i \in I, \quad (6.4)$$

$$\lambda_i(t) \geq 0 \text{ q.s. em } [0, T], \quad i \in I. \quad (6.5)$$

**Definição 6.3.** Dizemos que  $y \in \mathbb{F}$  é uma solução ótima global de (PTC) se

$$\phi(x) \geq \phi(y) \quad \forall x \in \mathbb{F}.$$

O próximo teorema foi demonstrado em [28]. A definição da KT-invexidade é feita observando esta demonstração. Por esta razão, ela será repetida aqui.

**Teorema 6.4.** Suponha que (PTC) é invexo. Então toda solução de Kuhn-Tucker é solução ótima global.

*Demonstração.* Seja  $y$  uma solução de Kuhn-Tucker e suponha que (PTC) é invexo. De (6.1), (6.2) e (6.5), temos

$$\begin{aligned} & \int_0^T [f(t, x(t)) - f(t, y(t))] dt - \int_0^T \nabla f'(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) dt \\ & + \int_0^T \sum_{i \in I} \lambda_i(t) [g_i(t, x(t)) - g_i(t, y(t)) - \nabla g'_i(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t))] dt \geq 0, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \int_0^T [f(t, x(t)) - f(t, y(t))] dt & \geq \int_0^T \left[ \nabla f'(t, y(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \right] \eta(t, x(t), y(t)) dt \\ & - \int_0^T \left[ \sum_{i \in I} \lambda_i(t) [g_i(t, x(t)) - g_i(t, y(t))] \right] dt. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, usando (6.3) e (6.4) obtemos

$$\int_0^T [f(t, x(t)) - f(t, y(t))] dt \geq - \int_0^T \left[ \sum_{i \in I} \lambda_i(t) g_i(t, x(t)) \right] dt.$$

Por fim, segue de (6.5) que

$$\int_0^T [f(t, x(t)) - f(t, y(t))] dt \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{F}. \quad (6.6)$$

Logo  $\phi(x) \geq \phi(y) \quad \forall x \in \mathbb{F}$ , ou seja,  $y$  é uma solução ótima global de (PTC).  $\square$

Observando esta demonstração, podemos ver que as desigualdades em (6.1) e (6.2) só precisam valer para soluções factíveis de (PTC), isto é, apenas para  $x, y \in \mathbb{F}$ , e que não é necessário que (6.2) seja válida para  $t \notin A_i(y)$ ,  $i \in I$ , por causa da condição (6.4). Também é fácil ver que a omissão dos termos  $g_i(t, x(t))$ ,  $i \in I$ , em (6.2) não afeta a conclusão (6.6). Com isto em mente é introduzida uma relaxação de invexidade, a qual é chamada de *KT-invexidade*.

**Definição 6.5.** *O problema (PTC) é dito ser Kuhn-Tucker invexo (ou KT-invexo) se existir uma função  $\eta : [0, T] \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $t \mapsto \eta(t, x(t), y(t)) \in L_\infty^n[0, T]$ ,*

$$\phi(x) - \phi(y) \geq \int_0^T \nabla f'(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) dt \quad (6.7)$$

e

$$-\nabla g'_i(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) \geq 0 \quad \text{q.s. em } A_i(y), \quad i \in I, \quad (6.8)$$

para todas  $x, y \in \mathbb{F}$ .

O exemplo a seguir traz um problema que não é invexo mas que é KT- invexo. Isto mostra que a noção de KT-invexidade é mais fraca que a noção de invexidade. Além disso, este exemplo mostra que invexidade não é uma condição necessária para valer a propriedade de que toda solução de Kuhn-Tucker é uma solução ótima global.

**Exemplo 6.6.** *Consideremos o seguinte problema de programação não-linear com tempo contínuo:*

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } \phi(x) &= \int_0^T [1 - \exp(-x(t))] dt \\ \text{sujeito a } x(t) &\geq 0 \quad \text{q.s. em } [0, T], \end{aligned}$$

onde  $x \in L_\infty[0, T]$ . Tomemos  $f(t, x(t)) = 1 - \exp(-x(t))$  e  $g(t, x(t)) = -x(t)$ . Temos que  $\bar{x} \equiv 0$  é a única solução de Kuhn-Tucker. De fato, tomando  $\lambda(t) = \nabla f(\bar{x}(t), t) = 1$  temos

$$\int_0^T [\nabla f(\bar{x}(t), t) + \lambda(t) \nabla g(\bar{x}(t), t)] z(t) dt = 0,$$

para toda  $z \in L_\infty[0, T]$ . Logo  $\bar{x} \equiv 0$  é uma solução de Kuhn-Tucker. Agora mostremos que é única. Seja  $x$  tal que  $x(t) > 0$  em  $P \subseteq [0, T]$ , onde  $P$  é um conjunto Lebesgue mensurável com medida positiva. Suponhamos que  $x$  seja uma solução de Kuhn-Tucker. Assim existe  $\lambda \in L_\infty[0, T]$  tal que

$$\int_0^T [\nabla f(t, x(t)) + \lambda(t) \nabla g(t, x(t))] z(t) dt = 0 \quad \forall z \in L_\infty[0, T], \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \lambda(t) g(t, x(t)) &= 0 \text{ q.s. em } [0, T], \\ \lambda(t) &\geq 0 \text{ q.s. em } [0, T]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Tomemos

$$z(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in P, \\ 0 & \text{se } t \notin P. \end{cases}$$

É claro que  $z \in L_\infty[0, T]$ . De (6.9) vêem

$$\int_0^T [\exp(-x(t)) - \lambda(t)] z(t) dt = \int_P [\exp(-x(t)) - \lambda(t)] dt = 0.$$

De (6.10) segue que  $\lambda(t) = 0$  q.s. em  $P$ . Então temos

$$\int_P \exp(-x(t)) dt = 0,$$

o que é um absurdo.

É fácil verificar que  $\phi(x) \geq \phi(\bar{x}) \quad \forall x \in \mathbb{F}$ , isto é,  $\bar{x} \equiv 0$  é uma solução ótima global do problema.

Portanto toda solução de Kuhn-Tucker é solução ótima global.

Mas será que este problema é um problema invexo? Suponhamos que sim. Então existe uma função  $\eta : [0, T] \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para  $x, y \in X$  temos

$$\begin{aligned} \int_0^T [f(t, x(t)) - f(t, y(t))] dt &\geq \int_0^T \nabla f(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) dt \\ -x(t) + y(t) &\geq -\eta(t, x(t), y(t)) \text{ q.s. em } [0, T]. \end{aligned}$$

Mas isto implica em

$$\begin{aligned} \int_0^T [f(t, x(t)) - f(t, y(t))] dt - \int_0^T \nabla f(t, y(t)) [x(t) - y(t)] dt \\ \geq \int_0^T [f(t, x(t)) - f(t, y(t))] dt - \int_0^T \nabla f(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) dt \geq 0 \end{aligned}$$

dado que  $\nabla f(t, y(t)) = \exp(-y(t)) > 0$  q.s. em  $[0, T]$ . Daí

$$\phi(x) - \phi(y) \geq D\phi(y)(x - y),$$

onde  $D\phi(y)$  denota a derivada de Fréchet de  $\phi$  em  $y$ . Logo este problema é invexo se e somente se ele é convexo. Mas é fácil ver que este problema não é convexo. Portanto ele não é invexo.

Vemos então que invexidade não é uma condição necessária para valer a propriedade de que toda solução de Kuhn-Tucker é solução ótima global.

Por fim, mostremos que o problema é KT-invexo. Defina  $\eta : [0, T] \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\eta(t, x(t), y(t)) = 1 - \exp(-x(t) + y(t)).$$

Então

$$\begin{aligned} \phi(x) - \phi(y) - \int_0^T \nabla f(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) dt \\ = \int_0^T [-\exp(-x(t)) + \exp(-y(t))] dt - \int_0^T \exp(-y(t)) [1 - \exp(-x(t) + y(t))] dt \\ = \int_0^T \{[-\exp(-x(t)) + \exp(-y(t))] - [\exp(-y(t)) - \exp(-x(t))]\} dt = 0. \end{aligned}$$

Agora tomemos  $x, y \in \mathbb{F}$ , isto é, tomemos  $x, y$  tais que  $x(t), y(t) \geq 0$  q.s. em  $[0, T]$ . Para  $t \in A(y) = \{t \in [0, T] : y(t) = 0\}$ , temos

$$\begin{aligned} -\nabla g(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) &= \eta(t, x(t), y(t)) = 1 - \exp(-x(t) + y(t)) \\ &= 1 - \exp(-x(t)) \geq 0, \end{aligned}$$

visto que  $x(t) \geq 0$  q.s. em  $[0, T]$ .

Abaixo temos uma qualificação de restrição no contexto de tempo contínuo. Ela será necessária para estabelecer o resultado principal deste capítulo.

**Definição 6.7.** Dizemos que  $g_i$ ,  $i \in I$ , satisfazem (QR) em  $y \in \mathbb{F}$  se não existirem  $v_i \in L_\infty[0, T]$ ,  $v_i(t) \geq 0$  q.s. em  $[0, T]$ ,  $i \in I$ , tais que  $(v_1(t), \dots, v_m(t)) \neq 0$  q.s. em  $[0, T]$  e

$$\sum_{i \in I} \int_{A_i(y)} v_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) z(t) dt = 0 \text{ para toda } z \in L_\infty^n[0, T].$$

**Observação 6.8.** A qualificação de restrição acima é uma generalização da qualificação de restrição de Mangasarian-Fromovitz no seguinte sentido. No caso de problemas de programação matemática onde as restrições são independentes do tempo, a qualificação de restrição de Mangasarian-Fromovitz é satisfeita em  $y \in \mathbb{F}$  se existir  $z \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\nabla g'_i(y)z < 0$ ,  $i \in I(y) = \{i : g_i(y) = 0\}$ . Pelo Teorema de Gordan (ver Mangasarian [22]) isto é equivalente a não existirem  $v_i \geq 0$ ,  $i \in I(y)$ , tais que  $(v_1, \dots, v_m) \neq 0$  e

$$\sum_{i \in I(y)} v_i \nabla g'_i(y) w = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^n.$$

**Lema 6.9.** *Seja  $y \in \mathbb{F}$  e suponha que  $g_i$ ,  $i \in I$ , satisfazem (QR) em  $y$ . Se  $y$  não é uma solução de Kuhn-Tucker, então existe  $z \in L_\infty^n[0, T]$  tal que*

$$\int_0^T \nabla f'(t, y(t))z(t)dt < 0, \quad (6.11)$$

$$\nabla g'_i(t, y(t))z(t) \leq 0 \text{ q.s. em } A_i(y), \quad i \in I. \quad (6.12)$$

*Demonstração.* Se o sistema em (6.11)-(6.12) não possui solução, então, claramente, o sistema

$$\begin{aligned} \int_0^T \nabla f'(t, y(t))z(t)dt &< 0, \\ \chi_i(t)\nabla g'_i(t, y(t))z(t) &\leq 0 \text{ q.s. em } [0, T], \quad i \in I, \end{aligned}$$

também não possui solução, onde  $\chi_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  é definida, para cada  $i \in I$ , por

$$\chi_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in A_i(y), \\ 0 & \text{se } t \notin A_i(y). \end{cases}$$

Segue do Corolário 3.1, página 134 em [37], que existem  $u_0 \in \mathbb{R}$  e  $u_i \in L_\infty[0, T]$ ,  $i \in I$ , com  $u_0 \geq 0$ ,  $u_i(t) \geq 0$  q.s. em  $[0, T]$ ,  $i \in I$ , tais que  $(u_0, v_1(t), \dots, v_m(t)) \neq 0$  q.s. em  $[0, T]$  e

$$\int_0^T \left[ u_0 \nabla f'(t, y(t)) + \sum_{i \in I} u_i(t) \chi_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \right] z(t)dt \geq 0 \quad \forall z \in L_\infty^n[0, T].$$

Pela linearidade da integral acima em relação a  $z$ , a desigualdade se torna uma igualdade. Assim, se  $u_0 = 0$  temos

$$\int_0^T \sum_{i \in I} u_i(t) \chi_i(t) \nabla g'_i(t, y(t))z(t)dt = 0 \quad \forall z \in L_\infty^n[0, T],$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_{i \in I} \int_{A_i(y)} u_i(t) \nabla g'_i(t, y(t))z(t)dt = 0 \quad \forall z \in L_\infty^n[0, T],$$

o que contradiz (QR). Logo,  $u_0 > 0$ . Dividindo a expressão acima por  $u_0$  e definindo  $\lambda_i = u_i \chi_i / u_0$ ,  $i \in I$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[ \nabla f'(t, y(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \right] z(t)dt &= 0 \quad \forall z \in L_\infty^n[0, T], \\ \lambda_i(t)g_i(t, y(t)) &= 0 \text{ q.s. em } [0, T], \quad i \in I, \\ \lambda_i(t) &\geq 0 \text{ q.s. em } [0, T], \quad i \in I. \end{aligned}$$

Logo,  $y$  é uma solução de Kuhn-Tucker, o que contradiz a hipótese. Portanto existe  $z \in L_\infty^n[0, T]$  satisfazendo (6.11) e (6.12).  $\square$

**Teorema 6.10.** *Suponha que  $g_i$ ,  $i \in I$ , satisfazem (QR) em cada  $y \in \mathbb{F}$ . Então toda solução de Kuhn-Tucker é solução ótima global se e somente se (PTC) é KT-invexo.*

*Demonstração.* Suponhamos que toda solução de Kuhn-Tucker é solução ótima global. Sejam  $x, y \in \mathbb{F}$ .

Se  $\phi(x) < \phi(y)$ , então  $y$  não é uma solução ótima global, e assim, por hipótese,  $y$  não é uma solução de Kuhn-Tucker. Conseqüentemente, pelo Lema 6.9, segue que existe  $z \in L_\infty^n[0, T]$  tal que

$$\int_0^T \nabla f'(t, y(t))z(t)dt < 0 \quad (6.13)$$

$$\nabla g'_i(t, y(t))z(t) \leq 0 \text{ q.s. em } A_i(y), \quad i \in I. \quad (6.14)$$

Defina

$$\eta(t, x(t), y(t)) = [\phi(x) - \phi(y)] \left[ \int_0^T \nabla f'(t, y(t))z(t)dt \right]^{-1} z(t).$$

Temos

$$\phi(x) - \phi(y) - \int_0^T \nabla f'(t, y(t))\eta(t, x(t), y(t))dt = 0. \quad (6.15)$$

Dado que  $\phi(x) < \phi(y)$ , segue de (6.13) que

$$[\phi(x) - \phi(y)] \left[ \int_0^T \nabla f'(t, y(t))z(t)dt \right]^{-1} > 0.$$

Então, de (6.14) temos

$$\nabla g'_i(t, y(t))\eta(t, x(t), y(t)) \leq 0 \text{ q.s. em } A_i(y), \quad i \in I. \quad (6.16)$$

De (6.15) e (6.16) segue que (PTC) é KT-invexo.

Se  $\phi(x) \geq \phi(y)$ , defina  $\eta(t, x(t), y(t)) = 0$ . Temos que

$$\phi(x) - \phi(y) - \int_0^T \nabla f'(t, x(t))\eta(t, x(t), y(t))dt \geq 0 \quad (6.17)$$

e

$$\nabla g'_i(t, y(t))\eta(t, x(t), y(t)) = 0 \text{ q.s. em } A_i(y), \quad i \in I. \quad (6.18)$$

De (6.17) e (6.18) concluímos que (PTC) é KT-invexo.

Nos dois casos acima não definimos  $\eta$  para  $x, y \notin \mathbb{F}$ . Mas podemos definir  $\eta(t, x(t), y(t)) = 0$  quando  $x$  ou  $y$  não é factível.

Reciprocamente, suponha que (PTC) é KT-invexo. Seja  $y \in \mathbb{F}$  uma solução de Kuhn-Tucker. Então, existem  $\lambda_i \in L_\infty[0, T]$ ,  $i \in I$ , tais que

$$\int_0^T \left[ \nabla f'(t, y(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \right] z(t) dt = 0 \quad \forall z \in L_\infty^n[0, T], \quad (6.19)$$

$$\lambda_i(t) g_i(t, y(t)) = 0 \text{ q.s. em } [0, T], \quad i \in I, \quad (6.20)$$

$$\lambda_i(t) \geq 0 \text{ q.s. em } [0, T], \quad i \in I. \quad (6.21)$$

Segue de (6.20) que  $\lambda_i(t) = 0$  q.s. em  $[0, T] \setminus A_i(y)$ ,  $i \in I$ . Assim, de (6.7), (6.8) e (6.21) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T [f(t, x(t)) - f(t, y(t))] dt &= \int_0^T \nabla f'(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) dt \\ &\quad - \int_0^T \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) dt \geq 0 \end{aligned}$$

para toda  $x \in \mathbb{F}$ . Logo,

$$\int_0^T [f(t, x(t)) - f(t, y(t))] dt \geq \int_0^T \left[ \nabla f'(t, y(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \right] \eta(t, x(t), y(t)) dt$$

para toda  $x \in \mathbb{F}$ , o que, levando em conta (6.19), se reduz a

$$\int_0^T [f(t, x(t)) - f(t, y(t))] dt \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{F},$$

e conseqüentemente  $\phi(x) \geq \phi(y)$  para toda  $x \in \mathbb{F}$ , ou seja,  $y$  é uma solução ótima global de (PTC). □

Observe que a hipótese de que  $g_i$ ,  $i \in I$ , satisfazem (QR) no último teorema é usada somente na parte “somente se” da demonstração.

---

## CAPÍTULO 7

---

# Problemas de Programação com Tempo Contínuo Não-Suaves

Neste capítulo será estudado o mesmo problema de programação não-linear com tempo contínuo do capítulo anterior, mas sem hipóteses de diferenciabilidade. Abaixo reescrevemos o problema.

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \phi(x) = \int_0^T f(t, x(t))dt, \\ \text{sujeito a} & \left. \begin{array}{l} g_i(t, x(t)) \leq 0 \text{ q.s. em } [0, T], \ i \in I, \\ x \in X. \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (\text{PTC})$$

Será introduzida a noção de Kuhn-Tucker invexidade para (PTC) no caso em que as funções não são diferenciáveis. Um resultado similar ao Teorema 6.10 do Capítulo 6 será estabelecido para o problema não-suave. Também, será apresentado um exemplo ilustrativo.

Suponhamos que dado  $a \in V$ , existem  $\varepsilon > 0$  e um número positivo  $k$  tais que para todo  $t \in [0, T]$ , e para todos  $x, y \in a + \varepsilon B$  ( $B$  denota a bola unitária do  $\mathbb{R}^n$ ) temos

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k\|x - y\|.$$

Hipóteses similares são feitas para  $g_i$ ,  $i \in I$ . Conseqüentemente,  $f(t, \cdot)$  e  $g_i(t, \cdot)$ ,  $i \in I$ , são localmente Lipschitz em  $V$  sobre  $[0, T]$ . Suponhamos também que a constante de Lipschitz é a mesma para todas as funções envolvidas.

Sejam  $y \in X$  e  $h \in L_\infty^n[0, T]$ . Então, as derivadas direcionais generalizadas de Clarke (ver Clarke [10])

$$f^\circ(t, y(t); h(t)) := \xi^\circ(y; h)(t) := \limsup_{\substack{z \rightarrow y \\ \varepsilon \downarrow 0}} \frac{\xi(z + \varepsilon h)(t) - \xi(z)(t)}{\varepsilon}$$

e

$$g_i^\circ(t, y(t); h(t)) := \gamma_i^\circ(y; h)(t) := \limsup_{\substack{z \rightarrow y \\ \varepsilon \downarrow 0}} \frac{\gamma_i(z + \varepsilon h)(t) - \gamma_i(z)(t)}{\varepsilon}, \quad i \in I,$$

são finitas q.s. em  $[0, T]$  e  $\phi^\circ(y; h)$  é finita. Para facilidade na leitura, usaremos a notação  $f^\circ(t, y(t); h(t))$  e  $g_i^\circ(t, y(t); h(t))$  ao invés de  $\xi^\circ(y; h)(t)$  e  $\gamma_i^\circ(y; h)(t)$ ,  $i \in I$ .

Segue das hipóteses que

$$\begin{aligned} t &\mapsto f^\circ(t, y(t); h(t)), \\ t &\mapsto g_i^\circ(t, y(t); h(t)), \quad i \in I, \end{aligned}$$

são Lebesgue mensuráveis e integráveis para toda  $x \in X$  e toda  $h \in L_\infty^n[0, T]$ .

Para mais detalhes sobre análise não-suave, consulte Clarke [10].

**Definição 7.1.** Dizemos que (PTC) é Kuhn-Tucker invexo (ou KT-invexo) se existe uma função  $\eta : [0, T] \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\eta(t, x(t), y(t)) \in L_\infty^n[0, T]$ ,

$$\phi(x) - \phi(y) \geq \phi^\circ(y; \eta(x, y)), \quad (7.1)$$

e

$$-g_i^\circ(t, y(t); \eta(t, x(t), y(t))) \geq 0 \text{ q.s. em } A_i(y), \quad i \in I. \quad (7.2)$$

para todas  $x, y \in \mathbb{F}$ .

Por  $\eta(x, y)$  em (7.1) entenda a aplicação de  $X \times X$  em  $L_\infty^n[0, T]$  dada por  $\eta(x, y)(t) = \eta(t, x(t), y(t))$ .

**Definição 7.2.** Dizemos que uma solução factível  $y$  é uma solução de Kuhn-Tucker se existem  $\lambda_i \in L_\infty[0, T]$ ,  $i \in I$ , tais que

$$\phi^\circ(y; h) + \int_0^T \sum_{i \in I} \lambda_i(t) g_i^\circ(t, y(t); h(t)) dt \geq 0 \quad \forall h \in L_\infty^n[0, T], \quad (7.3)$$

$$\lambda_i(t) g_i(t, y(t)) = 0 \text{ q.s. em } [0, T], \quad i \in I, \quad (7.4)$$

$$\lambda_i(t) \geq 0 \text{ q.s. em } [0, T], \quad i \in I. \quad (7.5)$$

No exemplo abaixo é estudado um problema KT-invexo que não é invexo.

**Exemplo 7.3.** Consideremos o seguinte problema de programação com tempo contínuo:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \phi(x) = \int_0^2 f(x(t)) dt \\ \text{sujeito a} \quad & g(x(t)) \leq 0 \text{ a.e. in } [0, 2], \quad x \in L_\infty[0, 2], \end{aligned}$$

onde  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são dadas respectivamente por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x) & \text{se } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e  $g(x) = -x$ . Sejam  $x, h \in \mathbb{R}$ . É fácil ver que  $f$  é Clarke regular, isto é, a derivada direcional (tradicional)  $f'(x; h)$  coincide com a derivada direcional generalizada de Clarke  $f^\circ(x; h)$  para todos  $x, h \in \mathbb{R}$  e

$$f^\circ(x; h) = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ \varepsilon \downarrow 0}} \frac{f(y + \varepsilon h) - f(y)}{\varepsilon} = \begin{cases} \exp(-x)h & \text{se } x > 0, \\ -2xh & \text{se } x < 0, \\ h & \text{se } x = 0 \text{ e } h \geq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ e } h < 0. \end{cases}$$

Usando o fato que  $f$  é Clarke regular e o Lema de Fatou (ver Folland [14]), temos

$$\begin{aligned} \phi^\circ(x; h) &= \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ \varepsilon \downarrow 0}} \frac{\phi(y + \varepsilon h) - \phi(y)}{\varepsilon} = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ \varepsilon \downarrow 0}} \int_0^2 \frac{f(y(t) + \varepsilon h(t)) - f(y(t))}{\varepsilon} dt \\ &\leq \int_0^2 \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ \varepsilon \downarrow 0}} \frac{f(y(t) + \varepsilon h(t)) - f(y(t))}{\varepsilon} dt = \int_0^2 f^\circ(x(t); h(t)) dt \\ &= \int_0^2 f'(x(t); h(t)) dt = \int_0^2 \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(x(t) + \varepsilon h(t)) - f(x(t))}{\varepsilon} dt \\ &= \int_0^2 \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(x(t) + \varepsilon h(t)) - f(x(t))}{\varepsilon} dt \leq \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^2 \frac{f(x(t) + \varepsilon h(t)) - f(x(t))}{\varepsilon} dt \\ &\leq \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ \varepsilon \downarrow 0}} \int_0^2 \frac{f(y(t) + \varepsilon h(t)) - f(y(t))}{\varepsilon} dt = \phi^\circ(x; h). \end{aligned}$$

Portanto

$$\phi^\circ(x; h) = \int_0^2 f^\circ(x(t); h(t)) dt.$$

Também,  $g^\circ(x; h) = -h$  para todos  $x, h \in \mathbb{R}$ .

Sejam  $\bar{x}(t) = 0 \in L_\infty[0, 2]$  e  $\bar{\lambda}(t) = 1 \in L_\infty[0, 2]$ . Temos que

$$\phi^\circ(\bar{x}; h) + \int_0^2 \bar{\lambda}(t) g^\circ(\bar{x}(t); h(t)) dt = \int_0^2 [f^\circ(0; h(t)) - h(t)] dt \geq 0 \quad \forall h \in L_\infty[0, 2].$$

Assim  $\bar{x} = 0$  é uma solução de Kuhn-Tucker. Suponhamos que  $y(t) > 0$ ,  $t \in P \subseteq [0, 2]$  seja outra solução de Kuhn-Tucker, onde  $P$  é um conjunto Lebesgue mensurável com medida positiva. Então existe  $\lambda \in L_\infty[0, 2]$ ,  $\lambda(t) \geq 0$  q.s. em  $[0, 2]$ , satisfazendo

$$\phi^\circ(y; h) + \int_0^2 \lambda(t) g^\circ(y(t); h(t)) dt \geq 0 \quad \forall h \in L_\infty[0, 2], \quad (7.6)$$

$$\lambda(t) g(y(t)) = 0 \quad \text{q.s. em } [0, 2]. \quad (7.7)$$

Seja  $\hat{h} : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\hat{h}(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t \in P \\ 0 & \text{se } t \notin P. \end{cases}$$

É claro que  $\hat{h} \in L_\infty[0, 2]$ . De (7.7) vemos que  $\lambda(t) = 0$  q.s. em  $P$ . Logo de (7.6) vêm

$$\begin{aligned} 0 &\leq \phi^\circ(y; \hat{h}) + \int_0^2 \lambda(t) g^\circ(y(t); \hat{h}(t)) dt \\ &= \phi^\circ(y; \hat{h}) - \int_0^2 \lambda(t) \hat{h}(t) dt = - \int_P \exp(-y(t)) dt, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Logo  $\bar{x} = 0$  é a única solução de Kuhn-Tucker deste problema.

É claro que  $\phi(x) \geq \phi(0)$  para toda  $x \in \mathbb{F} = \{x \in L_\infty[0, 2] : x(t) \geq 0 \text{ q.s. em } [0, 2]\}$ . Portanto toda solução de Kuhn-Tucker é uma solução ótima global.

Este problema não é invexo. De fato, supondo que ele é invexo chegaremos a uma contradição, como segue. Suponha que o problema é invexo. Então existe  $\eta : [0, 2] \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $t \mapsto \eta(t, x(t), y(t)) \in L_\infty[0, 2]$ ,

$$\phi(x) - \phi(y) \geq \int_0^2 f^\circ(y(t); \eta(t, x(t), y(t))) dt$$

e

$$-x(t) + y(t) \geq -\eta(t, x(t), y(t)) \text{ q.s. em } [0, 2]$$

para todas  $x, y \in L_\infty[0, 2]$ . Usando a última desigualdade, não é difícil verificar que  $f^\circ(y(t); x(t) - y(t)) \leq f^\circ(y(t); \eta(t, x(t), y(t)))$  q.s. em  $[0, 2]$  para todas  $x, y \in L_\infty[0, 2]$ . Daí

$$\begin{aligned} \phi(x) - \phi(y) &- \int_0^2 f^\circ(y(t); x(t) - y(t)) dt \\ &\geq \phi(x) - \phi(y) - \int_0^2 f^\circ(y(t); \eta(t, x(t), y(t))) dt \geq 0 \end{aligned} \tag{7.8}$$

para todas  $x, y \in L_\infty[0, 2]$ . Para  $x(t) = 0$  e  $y(t) = t$  em  $[0, 2]$  temos

$$\phi(x) - \phi(y) - \int_0^2 f^\circ(y(t); x(t) - y(t)) dt = -4 \exp(-2) < 0,$$

o que contradiz (7.8).

Agora vamos mostrar que o problema é KT-invexo. Defina  $\eta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\eta(x, y) = \begin{cases} \exp(y)(f(x) - f(y)) & \text{se } y > 0, \\ (-2y)^{-1}(f(x) - f(y)) & \text{se } y < 0, \\ f(x) - f(y) & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Sejam  $x, y \in \mathbb{F}$  e  $t \in [0, 2]$ . Temos que

$$f^\circ(y(t); \eta(x(t), y(t))) = \begin{cases} \exp(-y(t))\eta(x(t), y(t)) = f(x(t)) - f(y(t)) & \text{se } y(t) > 0, \\ -2y(t)\eta(x(t), y(t)) = f(x(t)) - f(y(t)) & \text{se } y(t) < 0, \\ \eta(x(t), y(t)) = f(x(t)) - f(y(t)) & \text{se } y(t) = 0, \end{cases}$$

de maneira que

$$\phi(x) - \phi(y) - \int_0^2 f^\circ(y(t); \eta(x(t), y(t))) dt = 0$$

e para  $t \in A(y) = \{t \in [0, 2] : y(t) = 0\}$ ,

$$-g^\circ(y(t); \eta(x(t), y(t))) = 1 - \exp(-x(t)) \geq 0.$$

Portanto este problema é *KT-inverso*.

Abaixo temos a qualificação de restrição do Capítulo 6 adaptada para o caso não-suave.

**Definição 7.4.** Dizemos que as restrições  $g_i$ ,  $i \in I$ , satisfazem *(QR)* em  $y \in \mathbb{F}$  se não existem  $u_i \in L_\infty[0, T]$ ,  $u_i \geq 0$ ,  $i \in I$ , tais que  $(u_1(t), \dots, u_m(t)) \neq 0$  q.s. em  $[0, T]$  e

$$\sum_{i \in I} \int_{A_i(y)} u_i(t) g_i^\circ(t, y(t); h(t)) dt \geq 0 \quad \forall h \in L_\infty^n[0, T].$$

**Lema 7.5.** Seja  $y \in \mathbb{F}$  e suponha que  $g_i$ ,  $i \in I$ , satisfazem *(QR)* em  $y$ . Se  $y$  não é uma solução de Kuhn-Tucker então existe  $h \in L_\infty^n[0, T]$  tal que

$$\phi^\circ(y; h) < 0, \tag{7.9}$$

$$g_i^\circ(t, y(t); h(t)) \leq 0 \quad \text{q.s. em } A_i(y), \quad i \in I. \tag{7.10}$$

*Demonstração.* Se o sistema em (7.9)-(7.10) não possui solução, em particular o sistema

$$\begin{aligned} \phi^\circ(y; h) &< 0, \\ \chi_i(t) g_i^\circ(t, y(t); h(t)) &\leq 0 \quad \text{q.s. em } [0, T], \quad i \in I, \end{aligned}$$

não possui solução, onde  $\chi_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  é definida para cada  $i \in I$  por

$$\chi_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in A_i(y), \\ 0 & \text{se } t \notin A_i(y). \end{cases}$$

Segue do Corolário 3.1, página 134 em [37], que existem  $u_0 \in \mathbb{R}$  e  $u_i \in L_\infty[0, T]$ ,  $i \in I$ , com  $u_0 \geq 0$ ,  $u_i(t) \geq 0$  q.s. em  $[0, T]$ ,  $i \in I$ , tais que  $(u_0, u_1(t), \dots, u_m(t)) \neq 0$  q.s. em  $[0, T]$  e

$$u_0 \phi^\circ(y; h) + \int_0^T \sum_{i \in I} u_i(t) \chi_i(t) g_i^\circ(t, y(t); h(t)) dt \geq 0 \quad \forall h \in L_\infty^n[0, T]. \tag{7.11}$$

Se  $u_0 = 0$  temos uma contradição com a qualificação de restrição, pois neste caso, usando a definição de  $\chi_i$ , obtemos

$$\sum_{i \in I} \int_{A_i(y)} u_i(t) g_i^\circ(t, y(t); h(t)) dt \geq 0 \quad \forall h \in L_\infty^n[0, T].$$

Logo  $u_0 > 0$ . Então dividindo a expressão em (7.11) por  $u_0$  e definindo  $\lambda_i = u_i \chi_i / u_0$ ,  $i \in I$ , obtemos

$$\phi^\circ(y; h) + \int_0^T \sum_{i \in I} \lambda_i(t) g_i^\circ(t, y(t); h(t)) dt \geq 0 \quad \forall h \in L_\infty^n[0, T].$$

Assim temos

$$\begin{aligned} \phi^\circ(y; h) + \int_0^T \sum_{i \in I} \lambda_i(t) g_i^\circ(t, y(t); h(t)) dt &\geq 0 \quad \forall h \in L_\infty^n[0, T] \\ \lambda_i(t) g_i(t, y(t)) &= 0 \text{ q.s. em } [0, T], \quad i \in I, \\ \lambda_i(t) &\geq 0 \text{ q.s. em } [0, T], \quad i \in I. \end{aligned}$$

Logo  $y$  é uma solução de Kuhn-Tucker, o que contradiz a hipótese. Portanto existe  $h \in L_\infty^n[0, T]$  satisfazendo (7.9) e (7.10).  $\square$

**Teorema 7.6.** *Suponha que  $g_i$ ,  $i \in I$ , satisfazem (QR) em cada  $y \in \mathbb{F}$ . Então toda solução de Kuhn-Tucker é solução ótima global se e somente se (PTC) é Kuhn-Tucker invexo.*

*Demonstração.* Suponhamos que toda solução de Kuhn-Tucker é solução ótima global. Sejam  $x, y \in \mathbb{F}$ .

Se  $\phi(x) < \phi(y)$ , então  $y$  não é uma solução ótima global. Assim, por hipótese,  $y$  não é uma solução de Kuhn-Tucker. Segue então do Lema 7.5 que existe  $h \in L_\infty^n[0, T]$  satisfazendo (7.9) e (7.10). Defina  $\alpha = \phi^\circ(y; h)$  e  $\eta(t, x(t), y(t)) = \{\phi(x) - \phi(y)\} \alpha^{-1} h(t)$  q.s. em  $[0, T]$ . De (7.9) segue que

$$\{\phi(x) - \phi(y)\} \alpha^{-1} > 0. \quad (7.12)$$

Assim

$$\begin{aligned} \phi^\circ(y; \eta(x, y)) &= \phi^\circ(y; \{\phi(x) - \phi(y)\} \alpha^{-1} h) \\ &= \{\phi(x) - \phi(y)\} \alpha^{-1} \phi^\circ(y; h) = \phi(x) - \phi(y). \end{aligned} \quad (7.13)$$

De (7.10) e (7.12) temos que

$$\begin{aligned} g_i^\circ(t, y(t); \eta(t, x(t), y(t))) &= \{\phi(x) - \phi(y)\} \alpha^{-1} g_i^\circ(t, y(t); h(t)) \\ &\leq 0 \text{ q.s. em } A_i(y), \quad i \in I. \end{aligned} \quad (7.14)$$

De (7.13) e (7.14) concluímos que para  $x, y$  tais que  $\phi(x) < \phi(y)$ , (PTC) é Kuhn-Tucker invexo.

Se  $\phi(x) \geq \phi(y)$  defina  $\eta(t, x(t), y(t)) = 0$  q.s. em  $[0, T]$ . Temos que

$$\phi(x) - \phi(y) - \phi^\circ(y; \eta(x, y))dt \geq 0 \quad (7.15)$$

e

$$g_i^\circ(t, y(t); \eta(t, x(t), y(t))) = 0 \text{ q.s em } A_i(y), \quad i \in I. \quad (7.16)$$

Segue então de (7.15) e (7.16) que (PTC) é Kuhn-Tucker invexo.

Nos dois casos acima não definimos  $\eta$  para  $x, y \notin \mathbb{F}$ . Mas podemos definir  $\eta(t, x(t), y(t)) = 0$  quando  $x$  ou  $y$  não é factível.

Suponhamos que (PTC) é Kuhn-Tucker invexo. Seja  $y \in \mathbb{F}$  uma solução de Kuhn-Tucker. Então de (7.1), (7.2) e (7.5) temos

$$\phi(x) - \phi(y) - \phi^\circ(y; \eta(x, y)) - \int_0^T \sum_{i \in I} \lambda_i(t) g_i^\circ(t, y(t); \eta(t, x(t), y(t))) dt \geq 0,$$

para todo  $x \in \mathbb{F}$ , já que de (7.4) segue que  $\lambda_i(t) = 0$  q.s. em  $[0, T] \setminus A_i(y)$ ,  $i \in I$ . Daí

$$\phi(x) - \phi(y) \geq \phi^\circ(y; \eta(x, y)) + \int_0^T \sum_{i \in I} \lambda_i(t) g_i^\circ(t, y(t); \eta(t, x(t), y(t))) dt.$$

De (7.3) segue que  $\phi(x) \geq \phi(y) \quad \forall x \in \mathbb{F}$ , ou seja,  $y$  é solução ótima global de (PTC).  $\square$

Observe que a hipótese de que  $g_i$ ,  $i \in I$ , satisfazem (QR) no último teorema é usada somente na parte “somente se” da demonstração.



---

---

## CAPÍTULO 8

---

# Problemas de Programação com Tempo Contínuo Multi-Objetivo

Será estudado o problema de otimização multi-objetivo com tempo contínuo abaixo:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \phi(x) = \left( \int_0^T f_1(t, x(t))dt, \dots, \int_0^T f_p(t, x(t))dt \right) \\ \text{sujeito a} & \begin{array}{l} g_i(t, x(t)) \leq 0 \text{ q.s. em } [0, T], \ i = 1, \dots, m, \\ x \in X. \end{array} \end{array} \right\} \quad (\text{PTCM})$$

Suponhamos que as funções  $f_j, j \in J$ , e  $g_i, i \in I$ , são continuamente diferenciáveis em relação aos seus segundo argumento.

Neste capítulo são introduzidos alguns conceitos de invexidade generalizada para os problemas de otimização multi-objetivo com tempo contínuo, nomeadamente, os conceitos de Kuhn-Tucker invexidade e de Kuhn-Tucker pseudo-invexidade. Usando o conceito de Kuhn-Tucker invexidade, é feito um estudo sobre a relação do problema multi-objetivo com um problema escalar associado. Também, é mostrado que Kuhn-Tucker pseudo-invexidade é uma condição necessária e suficiente para uma solução vetorial de Kuhn-Tucker ser uma solução fracamente eficiente. Kuhn-Tucker pseudo-invexidade e o primeiro resultado principal são dados na Seção 8.1. A noção de Kuhn-Tucker invexidade e o segundo resultado principal são dados na Seção 8.2.

Abaixo são definidas como em [30] soluções fracamente eficientes e soluções vetoriais de Kuhn-Tucker.

**Definição 8.1.** Uma solução factível  $y$  é dita ser uma solução fracamente eficiente de (PTCM) se e somente se não existe outra solução factível  $x$  tal que  $\phi(x) < \phi(y)$ .

**Definição 8.2.** Uma solução factível  $y$  é dita ser uma solução vetorial de Kuhn-Tucker de (PTCM) se existem  $\mu \in \mathbb{R}^p$  e  $\lambda \in L_\infty^n[0, T]$  tais que

$$\int_0^T \left[ \sum_{j \in J} \mu_j \nabla f'_j(t, y(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \right] h(t) dt = 0 \quad \forall h \in L_\infty^n[0, T], \quad (8.1)$$

$$\lambda_i(t) g_i(t, y(t)) = 0 \quad \text{q.s. em } [0, T], \quad i \in I, \quad (8.2)$$

$$\lambda_i(t) \geq 0 \quad \text{q.s. em } [0, T], \quad i \in I, \quad (8.3)$$

$$\mu_j \geq 0, \quad j \in J, \quad \text{e } \mu \neq 0. \quad (8.4)$$

Por fim temos uma qualificação de restrição no contexto de tempo contínuo.

**Definição 8.3.** Dizemos que as restrições  $g_i$ ,  $i \in I$ , satisfazem (QR) em  $y \in \mathbb{F}$  se não existem  $v_i \in L_\infty[0, T]$ ,  $v_i(t) \geq 0$  q.s. em  $[0, T]$ ,  $i \in I$ , tais que  $(v_1(t), \dots, v_m(t)) \neq 0$  q.s. em  $[0, T]$  e

$$\sum_{i \in I} \int_{A_i(y)} v_i(t) \nabla g_i(t, y(t)) h(t) dt = 0 \quad \text{para toda } h \in L_\infty^n[0, T].$$

---

## 8.1 KT-Pseudo-Invexidade e Condições de Otimalidade

---

Nesta seção é introduzida a noção de Kuhn-Tucker pseudo-invexidade para o problema (PTCM). Além disso, é exposto e provado um resultado que fornece uma condição necessária e suficiente para otimalidade global de uma solução vetorial de Kuhn-Tucker.

**Definição 8.4.** O problema (PTCM) é dito ser Kuhn-Tucker pseudo-invexo (ou KT-pseudo-invexo) se existir uma função  $\eta : [0, T] \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $t \mapsto \eta(t, x(t), y(t)) \in L_\infty^n[0, T]$ ,

$$\phi(x) < \phi(y) \Rightarrow \int_0^T \nabla f'_j(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) dt < 0, \quad j \in J, \quad (8.5)$$

e

$$-\nabla g'_i(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) \geq 0 \quad \text{q.s. em } A_i(y), \quad i \in I, \quad (8.6)$$

para todas  $x, y \in \mathbb{F}$ .

**Lema 8.5.** *Seja  $y \in \mathbb{F}$  e suponha que as restrições  $g_i$ ,  $i \in I$ , satisfazem (QR) em  $y$ . Se  $y$  não é uma solução vetorial de Kuhn-Tucker, então existe  $z \in L_\infty^n[0, T]$  tal que*

$$\int_0^T \nabla f'_j(t, y(t))z(t)dt < 0, \quad j \in J, \quad (8.7)$$

$$\nabla g'_i(t, y(t))z(t) \leq 0 \text{ q.s. em } A_i(y), \quad i \in I. \quad (8.8)$$

*Demonstração.* Se o sistema em (8.7)-(8.8) não possui solução, então, claramente, o sistema

$$\begin{aligned} \int_0^T \nabla f'_j(t, y(t))z(t)dt &< 0, \quad j \in J, \\ \chi_i(t)\nabla g'_i(t, y(t))z(t) &\leq 0 \text{ q.s. em } [0, T], \quad i \in I, \end{aligned}$$

também não possui solução, onde  $\chi_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  é definida, para cada  $i \in I$ , por

$$\chi_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in A_i(y), \\ 0 & \text{se } t \notin A_i(y). \end{cases}$$

Segue do Corolário 3.1, página 134 em [37], que existem  $\mu_j \in \mathbb{R}$ ,  $j \in J$ , e  $u_i \in L_\infty[0, T]$ ,  $i \in I$ , com  $\mu_j \geq 0$ ,  $j \in J$ ,  $u_i(t) \geq 0$  q.s. em  $[0, T]$ ,  $i \in I$ , tais que  $(\mu_1, \dots, \mu_p, u_1(t), \dots, u_m(t)) \neq 0$  q.s. em  $[0, T]$  e

$$\int_0^T \left[ \sum_{j \in J} \mu_j \nabla f'_j(t, y(t)) + \sum_{i \in I} u_i(t) \chi_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \right] z(t)dt \geq 0 \quad \forall z \in L_\infty^n[0, T],$$

i.e.,

$$\int_0^T \left[ \sum_{j \in J} \mu_j \nabla f'_j(t, y(t)) + \sum_{i \in I} u_i(t) \chi_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \right] z(t)dt = 0 \quad \forall z \in L_\infty^n[0, T],$$

onde a igualdade vem da linearidade da integral em relação a  $z$ .

Se  $(\mu_1, \dots, \mu_p) = 0$ , então

$$\int_0^T \sum_{i \in I} u_i(t) \chi_i(t) \nabla g'_i(t, y(t))z(t)dt = 0 \quad \forall z \in L_\infty^n[0, T],$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_{i \in I} \int_{A_i(y)} u_i(t) \nabla g'_i(t, y(t))z(t)dt = 0 \quad \forall z \in L_\infty^n[0, T],$$

o que contradiz (QR). Logo,  $(\mu_1, \dots, \mu_p) \neq 0$ . Definindo  $\lambda_i = u_i \chi_i$ ,  $i \in I$ , obtemos

$$\int_0^T \left[ \sum_{j \in J} \mu_j \nabla f'_j(t, y(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \right] z(t)dt = 0 \quad \forall z \in L_\infty^n[0, T].$$

Então temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[ \sum_{j \in J} \mu_j \nabla f'_j(t, y(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \right] z(t) dt &= 0 \quad \forall z \in L_\infty^n[0, T], \\ \lambda_i(t) g_i(t, y(t)) &= 0 \text{ q.s. em } [0, T], \quad i \in I, \\ \lambda_i(t) &\geq 0 \text{ q.s. em } [0, T], \quad i \in I, \\ \mu_j &\geq 0, \quad j \in J, \text{ e } \mu \neq 0. \end{aligned}$$

Logo,  $y$  é uma solução vetorial de Kuhn-Tucker, o que contradiz a hipótese. Portanto existe  $z \in L_\infty^n[0, T]$  satisfazendo (8.7) e (8.8).  $\square$

**Teorema 8.6.** *Suponhamos que as restrições  $g_i$ ,  $i \in I$ , satisfazem (QR) em cada  $y \in \mathbb{F}$ . Então toda solução vetorial de Kuhn-Tucker é uma solução fracamente eficiente de (PTCM) se e somente se (PTCM) é Kuhn-Tucker pseudo-invexo.*

*Demonstração.* Seja  $y$  uma solução vetorial de Kuhn-Tucker e suponha que (PTCM) é KT-pseudo-invexo. Suponha que existe uma solução factível  $x$  tal que  $\phi(x) < \phi(y)$ . Como (PTCM) é KT-pseudo-invexo, usando (8.5), obtemos

$$\int_0^T \nabla f'_j(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) dt < 0, \quad j \in J. \quad (8.9)$$

Desde que  $y$  é uma solução vetorial de Kuhn-Tucker existem  $\mu \in \mathbb{R}^p$  e  $\lambda \in L_\infty^m[0, T]$  satisfazendo (8.1)-(8.4). Por (8.4) e (8.9) temos

$$\int_0^T \sum_{j \in J} \mu_j \nabla f'_j(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) dt < 0.$$

Usando (8.1) com  $h(t) = \eta(t, x(t), y(t))$ ,  $t \in [0, T]$ , obtemos

$$\int_0^T \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) dt > 0. \quad (8.10)$$

Por outro lado, de (8.3) e (8.6), dado que por (8.2),  $\lambda_i(t) = 0$  q.s. em  $[0, T] \setminus A_i(y)$ ,  $i \in I$ , segue que

$$\int_0^T \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) dt \leq 0,$$

o que é uma contradição a (8.10). Logo  $y$  é uma solução fracamente eficiente.

Suponhamos que toda solução vetorial de Kuhn-Tucker é uma solução fracamente eficiente. Sejam  $x, y \in \mathbb{F}$  tais que  $\phi(x) < \phi(y)$ . Então  $y$  não é uma solução fracamente

eficiente, de modo que, por hipótese,  $y$  não é uma solução vetorial de Kuhn-Tucker. Então, pelo Lema 8.5, existe  $z \in L_\infty^n[0, T]$  tal que

$$\begin{aligned} \int_0^T \nabla f'_j(t, y(t)) z(t) dt &< 0, \quad j \in J, \\ \nabla g'_i(t, y(t)) z(t) &\leq 0 \text{ q.s. em } A_i(y), \quad i \in I. \end{aligned}$$

Defina  $\eta(t, x(t), y(t)) = z(t)$  q.s. em  $[0, T]$ . Então

$$\begin{aligned} \int_0^T \nabla f'_j(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) dt &< 0, \quad j \in J, \\ -\nabla g'_i(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) &\geq 0 \text{ q.s. em } A_i(y), \quad i \in I. \end{aligned}$$

Portanto existe uma função  $\eta : [0, T] \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $t \mapsto \eta(t, x(t), y(t)) \in L_\infty^n[0, T]$ ,

$$\phi(x) < \phi(y) \Rightarrow \int_0^T \nabla f'_j(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) dt < 0, \quad j \in J,$$

e

$$-\nabla g'_i(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) \geq 0 \text{ q.s. em } A_i(y), \quad i \in I,$$

para todas  $x, y \in \mathbb{F}$ . Assim (PTCM) é Kuhn-Tucker pseudo-invexo.  $\square$

---

## 8.2 KT-Invexidade e o Problema Escalar Associado

---

Nesta seção, a noção de Kuhn-Tucker invexidade introduzida em [24] para problemas multi-objetivo finito dimensionais é generalizada para o contexto de tempo contínuo. Além disso, alguns resultados relacionando (PTCM) com um problema escalar são estabelecidos.

Vamos considerar o seguinte problema escalar associado ao problema (PTCM):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \Phi(x) = \int_0^T \sum_{j \in J} \mu_j f_j(t, x(t)) dt \\ \text{sujeito a} \quad & g_i(t, x(t)) \leq 0 \text{ q.s. em } [0, T], \quad i \in I, \\ & x \in X, \end{aligned}$$

onde  $\mu_j \in \mathbb{R}$ ,  $j \in J$ . Este é um dos mais conhecidos problemas escalares associados à problemas de otimização multi-objetivo e é chamado problema escalar com pesos.

**Teorema 8.7.** *Toda solução ótima de um problema escalar com pesos  $\mu_j \geq 0$ ,  $j \in J$ , nem todos nulos, é uma solução fracamente eficiente de (PTCM).*

*Demonstração.* Seja  $y$  uma solução ótima do problema escalar com  $\mu_j \geq 0$ ,  $j \in J$ , nem todos nulos, e vamos supor que existe  $x \in \mathbb{F}$  tal que  $\phi(x) < \phi(y)$ . Então  $\phi_j(x) < \phi_j(y)$ ,  $j \in J$ , de modo que

$$\mu_j \phi_j(x) \leq \mu_j \phi_j(y), \quad j \in J,$$

dado que  $\mu_j \geq 0$ ,  $j \in J$ . Como  $\mu_j$ ,  $j \in J$ , são nem todos nulos, existe ao menos um índice  $j \in J$  tal que  $\mu_j > 0$ . Logo pelo menos uma das desigualdades acima vale estritamente. Então somando sobre  $J$ ,

$$\sum_{j \in J} \mu_j \phi_j(x) < \sum_{j \in J} \mu_j \phi_j(y),$$

o que contradiz a otimalidade de  $y$ . □

Para estabelecer a recíproca do Teorema 8.7 precisamos de algumas qualificações nas restrições e também de hipóteses de convexidade generalizada.

**Definição 8.8.** O problema (PTCM) é dito ser Kuhn-Tucker invexo (ou KT-invexo) se existir uma função  $\eta : [0, T] \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $t \mapsto \eta(t, x(t), y(t)) \in L_\infty^n[0, T]$ ,

$$\phi_j(x) - \phi_j(y) \geq \int_0^T \nabla f_j'(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) dt, \quad j \in J, \quad (8.11)$$

e

$$-\nabla g_i'(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) \geq 0 \text{ q.s. em } A_i(y), \quad i \in I, \quad (8.12)$$

para todas  $x, y \in \mathbb{F}$ .

**Teorema 8.9.** Suponhamos que as restrições  $g_i$ ,  $i \in I$ , satisfazem (QR) em cada  $y \in \mathbb{F}$ . Se (PTCM) é Kuhn-Tucker invexo, então toda solução fracamente eficiente é solução de um problema escalar com pesos  $\mu_j \geq 0$ ,  $j \in J$ , nem todos nulos.

*Demonstração.* Seja  $y$  uma solução fracamente eficiente de (PTCM). Então, pelo Teorema 3.3, página 9 em [30], existem  $\mu \in \mathbb{R}^p$  e  $\lambda \in L_\infty^m[0, T]$  satisfazendo

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[ \sum_{j \in J} \mu_j \nabla f_j'(t, y(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \nabla g_i'(t, y(t)) \right] h(t) dt &= 0 \quad \forall h \in L_\infty^n[0, T], \\ \lambda_i(t) g_i(t, y(t)) &= 0, \text{ q.s. em } [0, T], \quad i \in I, \\ \mu_j &\geq 0, \quad j \in J, \quad \lambda_i(t) \geq 0 \text{ q.s. em } [0, T], \quad i \in I, \\ (\mu, \lambda(t)) &\neq 0 \text{ q.s. em } [0, T]. \end{aligned}$$

Se  $\mu = 0$ , então  $\lambda(t) \neq 0$  q.s. em  $[0, T]$ , e

$$\int_0^T \left[ \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \nabla g_i'(t, y(t)) \right] h(t) dt = 0 \quad \forall h \in L_\infty^n[0, T].$$

De  $\lambda_i(t)g_i(t, y(t)) = 0$ , q.s. em  $[0, T]$ ,  $i \in I$ , segue que  $\lambda_i(t) = 0$  q.s. em  $[0, T] \setminus A_i(y)$ . Assim temos

$$\sum_{i \in I} \int_{A_i(y)} \lambda_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) h(t) dt = 0 \quad \forall h \in L_\infty^n[0, T],$$

com  $\lambda_i(t) \geq 0$  q.s. em  $[0, T]$ ,  $i \in I$ , e  $(\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)) \neq 0$  q.s. em  $[0, T]$ , o que contradiz a hipótese de que (QR) vale em  $y$ . Portanto  $y$  é uma solução vetorial de Kuhn-Tucker, isto é, existe  $\mu \in \mathbb{R}^p$  e  $\lambda \in L_\infty^m[0, T]$  satisfazendo (8.1)-(8.4).

Como por (8.4),  $\mu_j \geq 0$ ,  $j \in J$ , e por (8.3),  $\lambda_i(t) \geq 0$  q.s. em  $[0, T]$ ,  $i \in I$ , usando (8.11) e (8.12) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sum_{j \in J} \mu_j [f_j(t, x(t)) - f_j(t, y(t))] dt \\ & \geq \int_0^T \sum_{j \in J} \mu_j \nabla f'_j(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) dt, \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$-\lambda_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) \geq 0 \text{ q.s. em } A_i(y), \quad i \in I, \quad (8.14)$$

para toda  $x \in \mathbb{F}$ . Relembrando que  $\lambda_i(t) = 0$  q.s. em  $[0, T] \setminus A_i(y)$ ,  $i \in I$ , integrando as desigualdades em (8.14) sobre  $[0, T]$  e somando sobre  $I$  obtemos

$$-\int_0^T \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \eta(t, x(t), y(t)) dt \geq 0. \quad (8.15)$$

De (8.13) e (8.15) segue que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sum_{j \in J} \mu_j [f_j(t, x(t)) - f_j(t, y(t))] dt \\ & \geq \int_0^T \left[ \sum_{j \in J} \mu_j \nabla f'_j(t, y(t)) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \right] \eta(t, x(t), y(t)) dt, \end{aligned}$$

para todas  $x \in \mathbb{F}$ . Tomando  $h(t) = \eta(t, x(t), y(t))$  q.s. em  $[0, T]$ , segue de (8.1) que a integral na segunda linha acima é igual a zero. Portanto  $y$  é solução de um problema escalar com pesos com  $\mu_j \geq 0$ ,  $j \in J$ , nem todos nulos.  $\square$

**Teorema 8.10.** *Se (PTCM) é Kuhn-Tucker invexo, então toda solução vetorial de Kuhn-Tucker é solução de um problema escalar pesos  $\mu_j \geq 0$ ,  $j \in J$ , nem todos nulos.*

*Demonstração.* Semelhante à demonstração do Teorema 8.9.  $\square$

Os teoremas acima mostram que sob as hipóteses de que (PTCM) é Kuhn-Tucker invexo e que as restrições satisfazem a qualificação de restrição em cada  $y \in \mathbb{F}$ , os conjuntos das soluções vetoriais de Kuhn-Tucker, das soluções fracamente eficientes e das soluções ótimas de problemas escalares com pesos são iguais. De fato, pelos Teoremas 8.7 e 8.9 vemos que o conjunto das soluções ótimas do problema escalar com pesos (onde  $\mu =$  multiplicador de Lagrange associado à função objetivo) e o conjunto das soluções fracamente eficientes são iguais. Pelo Teorema 8.10 temos que o conjunto das soluções vetoriais de Kuhn-Tucker está contido no conjunto das soluções ótimas do problema escalar. Mas a inclusão contrária também é verdadeira, pois, pelo Teorema 8.7, toda solução de um problema escalar com pesos é solução fracamente eficiente, que por sua vez, sob a hipótese de que vale a qualificação de restrição, é uma solução vetorial de Kuhn-Tucker (veja o início da demonstração do Teorema 8.9).

---

## TRABALHOS FUTUROS

Em relação aos problemas de programação infinita, uma possibilidade de trabalho futuro seria o estudo de dualidade para o caso multi-objetivo. Outra possibilidade seria tentar generalizar os resultados dos Capítulos 3 e 4 para o caso não-diferenciável.

No caso dos problema de programação com tempo contínuo, há a possibilidade de se estudar dualidade para o caso multi-objetivo. Por exemplo, tentar generalizar para o contexto de tempo contínuo alguns resultados dados em [26] por Osuna-Gómez *et al.*. Neste trabalho, Osuna-Gómez *et al.* introduzem um tipo de problema dual para um problema multi-objetivo, que possui a propriedade especial de ser um problema escalar.

Além disso, pode-se também tentar generalizar KT-invexidade para problemas de otimização abstratos, como o tratado por Ben-Tal e Zowe [4]. Ou ainda para outros tipos de problemas, como o problema de controle ótimo multi-objetivo e o problema de controle ótimo impulsivo. Para o problema de controle ótimo impulsivo, uma possibilidade menos ambiciosa seria estabelecer condições suficientes de otimalidade usando invexidade. Para o problema de controle ótimo multi-objetivo, tentar fazer um estudo relacionando-o com um problema escalar com pesos, nos moldes do que foi feito para os problemas tratados nesta tese (Capítulos 4 e 8).

Outro tipo de problemas que poderiam ser abordados são os problemas anormais ou degenerados. Problemas de otimização são assim chamados quando o multiplicador associado à função objetivo é igual a zero. Izmailov [20] obteve condições de otimalidade para um problema de otimização em espaços de Banach, mas com um número finito de restrições de desigualdade. Avakov [1] estudou um caso mais geral incluindo restrições de igualdade, mas ainda com um número finito de restrições de desigualdade. Uma possibilidade de trabalho futuro seria tentar obter condições de otimalidade para os problemas tratados nesta tese e, mais além, tentar algum estudo na direção que fez Martin para os problemas não-degenerados.



---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] E. R. Avakov. Necessary conditions for an extremum for smooth abnormal problems with constraints of equality and inequality type. *Mat. Zametki*, 45(6):3–11, 1989.
- [2] M. S. Bazaraa and C. M. Shetty. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley and Sons, New York, 1979.
- [3] R. Bellman. Bottleneck problems and dynamics programming. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 39:947–951, 1953.
- [4] A. Ben-Tal and J. Zowe. A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces. *Math. Programming Study*, 19:39–76, 1982.
- [5] A. J. V. Brandão. *Sobre algumas contribuições em otimização não diferenciável invexa*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 1998.
- [6] A. J. V. Brandão, M. A. Rojas-Medar and G. N. Silva. Optimality conditions for Pareto nonsmooth nonconvex programming in Banach spaces. *J. Optim. Theory Appl.*, 103(1):65–73, 1999.
- [7] A. J. V. Brandão, M. A. Rojas-Medar and G. N. Silva. Uma introdução às funções invexas diferenciáveis com aplicações em otimização. *Bol. Soc. Paran. Mat.*, 19(1):51–65, 1999.
- [8] A. J. V. Brandão, M. A. Rojas-Medar and G. N. Silva. Nonsmooth continuous-time optimization problems: necessary conditions. *Comp. Math. with Appl.*, 41:1477–1486, 2001.

- [9] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Masson Editeur, Paris, 1983.
- [10] F. H. Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*, volume 5 of *Classics in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, 1990.
- [11] B. D. Craven. *Mathematical programming and control theory*. Chapman and Hall, London, 1978.
- [12] B. D. Craven. Duality for generalized convex fractional programs. In S. Schaible and W. T. Ziemba, editors, *Generalized concavity in optimization and economics*, New York, 1981. Academic Press.
- [13] M. A. El-Hodiri. Constrained extrema: introduction to the differentiable case with economic applications. *Lecture notes in operations research and mathematical systems*, 56. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [14] G. B. Folland. *Real analysis*. John Wiley and Sons, New York, 1984.
- [15] A. M. Geoffrion. Proper efficiency and the theory of vector maximization. *J. Math. Anal. Appl.*, 22:618–630, 1968.
- [16] I. V. Girsanov. Lectures on mathematical theory of extremum problems. *Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems*, 67. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [17] M. Guignard. Generalized Kuhn-Tucker conditions for mathematical programming problems in a Banach space. *SIAM J. Control*, 2:232–241, 1969.
- [18] M. A. Hanson. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, 80:545–550, 1981.
- [19] A. Izmailov and M. Solodov. *Otimização: Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade*. IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [20] A. F. Izmailov. Optimality conditions for degenerate extremum problems with inequality-type constraints. *Comp. Maths. Math. Phys.*, 34(6):723–736, 1994.
- [21] D. Luenberger. *Optimization by vector space methods*. John Wiley, New York, 1969.
- [22] O. L. Mangasarian. *Nonlinear programming*, volume 10 of *Classics in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [23] D. H. Martin. The essence of invexity. *J. Optim. Theory Appl.*, 47:65–76, 1985.
- [24] R. Osuna-Gómez, A. Beato-Moreno and A. Rufián-Lizana. Generalized convexity in multiobjective programming. *J. Math. Anal. Appl.*, 233:205–220, 1999.

- [25] R. Osuna-Gómez, A. Rufián-Lizana and P. Ruiz-Canales. Invex functions and generalized convexity in multiobjective programming. *J. Optim. Theory Appl.*, 98(3):651–661, 1998.
- [26] R. Osuna-Gómez, A. Rufián-Lizana and P. Ruiz-Canales. Duality in nondifferentiable vector programming. *J. Math. Anal. Appl.*, 259:462–475, 2001.
- [27] S. M. Robinson. First order conditions for general nonlinear optimization. *SIAM J. of App. Math.*, 30:597–607, 1976.
- [28] M. A. Rojas-Medar, A. J. V. Brandão and G. N. Silva. Nonsmooth continuous-time optimization problems: sufficient conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, 227:305–318, 1998.
- [29] L. B. Santos. *Algumas contribuições em otimização multiobjetivo*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2004.
- [30] L. B. Santos, A. J. V. Brandão, R. Osuna-Gómez and M. A. Rojas-Medar. Nonsmooth continuous-time multiobjective optimization problems. Technical report, State University of Campinas, 2005.  
[http://www.ime.unicamp.br/rel\\_pesq/2005/ps/rp35-05.pdf](http://www.ime.unicamp.br/rel_pesq/2005/ps/rp35-05.pdf)
- [31] L. B. Santos, R. Osuna-Gómez, M. A. Rojas-Medar and A. R. Lizana. Generalized invexity and weakly efficient solutions of problems of optimization between Banach spaces. *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.*, 5(2):327–336, 2004.
- [32] L. B. Santos, R. Osuna-Gómez, M. A. Rojas-Medar and A. Rufián-Lizana. Preinvex functions and weak efficient solutions for some vectorial optimization problem in Banach spaces. *Comput. Math. Appl.*, 48(5–6):885–895, 2004.
- [33] W. Schirotzek. Nonasymptotic necessary conditions for nonsmooth infinite optimization problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 118:535–546, 1986.
- [34] R. A. Tapia and J. R. Thompson. *Nonparametric Probability Density Estimation*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1978.
- [35] R. A. Tapia and M. W. Trosset. An extension of the Karush-Kuhn-Tucker necessity conditions to infinite programming. *SIAM Review*, 36:1–17, 1994.
- [36] P. D. Varaiya. Nonlinear programming in Banach spaces. *SIAM J. of App. Math.*, 15, 1976.
- [37] G. J. Zalmai. A continuous-time generalization of Gordan’s transposition theorem. *J. Math. Anal. Appl.*, 110:130–140, 1985.

- [38] G. J. Zalmay. The Fritz John and Kuhn-Tucker optimality conditions in continuous-time nonlinear programming. *J. Math. Anal. Appl.*, 110:503–518, 1985.
- [39] G. J. Zalmay. Sufficient optimality conditions in continuous-time nonlinear programming. *J. Math. Anal. Appl.*, 111:130–147, 1985.