OPERADORES INTEGRAIS SINGULARES VETORIAIS
E
ESPAÇOS DE FUNÇÕES EM CORPOS LOCAIS

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Sergio Antonio Tozoni e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 11 de Dezembro de 1986.

Prof. Dr. DICESAR LASS FERNANDEZ
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Dedico esta tese a meus pais Guilherme e Ana.

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Dicesar Lass Fernandez pela dedicação e incentivo durante toda a orientação.

A minha esposa Pascoa e meus filhos Juliana e Tiago pela compreenção e paciência no meu envolvimento com a matemática e por me propiciarem condições de realizar este trabalho.

A Elda pelo exelente trabalho datilográfico e pela sua compreenção principalmente no final da redação.

Ao Criador do Universo pela vida e por ter me dado coragem e perseverança em todos os momentos que necessitei.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é desenvolver a teoria dos operadores integrais singulares, com núcleos variáveis e à valores num espaço de operadores, no contexto dos corpos locais, bem como apresentar algumas aplicações.

As referências básicas foram o trabalho recente de J. L. Rubio de Francia - F. J. Ruiz - J. L. Torrea [13], pelo lado dos operadores integrais singulares, e o livro de M. H. Taibleson [18], pelo lado da análise de Fourier sobre corpos locais.

Procuramos fazer uma redação auto-suficiente. Desta forma alguns Capítulos ou Seções de Capítulos são expositórios e não apresentam resultados originais.

Passemos a fazer uma descrição do conteúdo dos diversos Capítulos.

No Capítulo 1 relembramos os conceitos e resultados sobre corpos locais que são usados no trabalho.

O Capítulo 2 tem como objetivo fixar para referência posterior as propriedades básicas da função maximal de Hardy-Littlewood, o teorema de diferenciação de Lebesgue e o lema de decomposição de Calderón-Zygmund no contexto dos corpos locais. A única novidade é a consideração de funções à valores vetoriais, mas a passagem aqui, do caso escalar para o caso vetorial, é absolutamente trivial. Os resultados deste Capítulo foram tomados de [18].

Nossa contribuição original começa no Capítulo 3. Estudamos os espaços BMO(E) (Bounded Mean Oscilation) das funções de oscilação média limitada definidas num produto finito de corpos locais. Apresentamos com detalhes as propriedades básicas. Os principais resultados são uma desigualdade relacionando a função maximal aguda com a função maximal de Hardy-Littlewood e o teorema de interpolação de Marcinkiewicz-Riviere que interpola L^p entre L^r e BMO, $r \leq p < \infty$. Estes resultados são fundamentais na teoria dos operadores integrais singulares.

O Capítulo principal do trabalho é o Capítulo 4 onde desenvolvemos a teoria dos operadores integrais singulares. Os núcleos $K(x,y)$ dos operadores considerados serão à valores num espaço de aplicações lineares $L(E,F)$. Aqui, mesmo no caso em que $E = F = \mathbb{R}$, os operadores que consideramos são mais gerais dos que os considerados por M. H. Taibleson em [11].

No Capítulo 5 começamos a fazer as aplicações da teoria dos operadores integrais singulares com núcleos à valores em espaços de operadores. O objetivo é estabelecer, no contexto dos corpos locais, uma desigualdade do tipo Fefferman-Stein para a função maximal de Hardy-Littlewood. Acreditamos que esta desigualdade é nova (em corpos locais !) ou pelo menos não temos referências.

Voltamos no Capítulo 6 a ter um capítulo expositório sem resultados originais. Apresentamos os resultados básicos das teorias $L^1(\mathbb{K}^n)$ e $L^2(\mathbb{K}^n)$ da transformada de Fourier e das distribuições sobre $\mathbb{K}^n$ que necessitaremos nos capítulos posteriores.

O Capítulo 7 tem como objetivo, utilizando as técnicas do Capítulo 5, recuperar os resultados de K. Phillips - M. H. Taibleson [11] sobre integrais singulares com núcleos clássicos do tipo Calderón-Zygmund. Em particular estudamos a transformada de Hilbert em corpos locais (já estudada por K. Phillips em [10] sobre os corpos dos números p-ádicos e das p-séries). Aqui ficou uma frustração: não conseguimos "instrumentalizar" a transformada de Hilbert como acontece no caso real. Entretanto acreditamos que seja possível e fica um problema em aberto. Por enquanto a transformada de Hilbert é um mero exemplo de operador integral singular. Ainda neste Capítulo apresentamos dois resultados de caracter geral: a desigualdade de Fefferman-Stein e a desigualdade de Cotlar envolvendo maximais. Acreditamos que no contexto dos corpos locais estes resultados são novos. Vale salientar que os resultados "clássicos" foram recuperados de forma sistemática e mais simples que a "clássica".

Os multiplicadores de Fourier são tratados no Capítulo 8. A versão do teorema de multiplicadores de Hörmander-Mihlin para funções escalares foi obtida por M. H. Taibleson ([18] e [17]) sem a teoria dos operadores integrais singulares. Nós consideramos aqui multiplicadores diagonais de $L^p(\mathbb{K}^n, \ell^q)$ e a demonstração é baseada nos resultados do Capítulo 4, ou seja, na teoria dos operadores integrais singulares com núcleos à valores num espaço de operadores. Damos também uma demonstração bastante simplificada de um teorema do tipo Littlewood-Paley obtido por M. H. Taibleson ([18] e [16]).

Finalmente no Capítulo 9 introduzimos os espaços de Besov $B^s_{p,r}$ e os espaços de Hardy-Sobolev $H^s_{p,r}$ no contexto dos corpos locais. Estes espaços generalizam os espaços $\Lambda^s_{p,r}$ e L^s_p introduzidos respectivamente por M. L. Saloff Coste [14] e M. H. Taibleson [18]. Não objetivamos neste Capítulo desenvolver a teoria completa desses espaços, que será objeto de um trabalho posterior, mas mostrar aplicações de teoremas obtidos no Capítulo anterior.

CAPITULO 1

CORPOS LOCAIS

Neste Capítulo daremos dois exemplos de corpos locais e alguns resultados sobre os corpos locais que serão utilizados nos Capítulos posteriores.

Um tratamento cuidadoso do desenvolvimento dos números p-ádicos pode ser encontrado em [8] e [1]. Os resultados da Seção 1.2 podem ser verificados facilmente e por isso não damos uma referência. As demais seções fazem parte do Capítulo 1 do livro de M. H. Taibleson [18].

1.1. O CORPO DOS NÚMEROS p-ÁDICOS

O desenvolvimento dos números p-ádicos que aqui apresentamos é baseado no livro de N. Koblitz [8]. A demonstração de cada um dos resultados desta seção pode ser encontrada em [8].

1.1.1. DEFINIÇÃO. *Seja* p *um número primo positivo. Se* $n \in \mathbb{Z}$ *e* $n = p^r a$ *onde* $(a,p) = 1$ *(isto é,* $p \nmid a$*), dizemos que* r *é a ordem de* n *e escrevemos* $\operatorname{ord}_p(n) = r$*. Se* $x = n/m \in \mathbb{Q}$*, definimos* $\operatorname{ord}_p(x) = \operatorname{ord}_p(n) - \operatorname{ord}_p(m)$.

1.1.2. TEOREMA. *Para todo* x *e* y *em* $\mathbb{Q}$ *temos:*

(1) $$\operatorname{ord}_p(xy) = \operatorname{ord}_p(x) + \operatorname{ord}_p(y)$$

e

(2) $$\operatorname{ord}_p(x + y) \geq \min\{\operatorname{ord}_p(x), \operatorname{ord}_p(y)\}.$$

1.1.3. DEFINIÇÃO. *Para* $x \in \mathbb{Q}$*, definimos* $|x|_p = p^{-\operatorname{ord}_p(x)}$ *se* $x \neq 0$ *e* $|x|_p = 0$ *se* $x = 0$.

1.1.4. DEFINIÇÃO. *Um valor absoluto não-arquimediano sobre um corpo*

$(\mathbb{F},+,\cdot)$, *é uma aplicação* $x \mapsto |x|$, *definida sobre* $\mathbb{F}$ *e com valores* $\mathbb{R}$, *tal que:*

(1) $|x| \geq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{F}$;

(2) $|x| = 0$ *se e somente se* $x = 0$;

(3) $|x \cdot y| = |x||y|$ *para todo* $x, y \in \mathbb{F}$;

(4) $|x + y| \leq \max |x|, |y|\}$ *para todo* $x, y \in \mathbb{F}$.

1.1.5. TEOREMA. *A aplicação* $x \mapsto |x|_p$ *é um valor absoluto sobre* $\mathbb{Q}$.

1.1.6. TEOREMA. *O completamento de* $\mathbb{Q}$ *com respeito ao valor absoluto* $|\cdot|_p$, *possui uma estrutura de corpo, que tem* $\mathbb{Q}$ *como subcorpo.*

1.1.7. DEFINIÇÃO. *O completamento de* $\mathbb{Q}$ *com respeito ao valor absoluto* $|\cdot|_p$ *é denotado por* $\mathbb{Q}_p$ *e é chamado de corpo dos números p-ádicos.*

1.1.8. OBSERVAÇÃO. Os elementos de $\mathbb{Q}_p$ são definidos como classes de equivalência de sequências de Cauchy. Os elementos de $\mathbb{Q}$ são identificados com as classes de equivalência, que têm como representante, uma sequência constante.

1.1.9. TEOREMA. *O corpo* $\mathbb{Q}_p$ *está munido de um valor absoluto não-arquimediano, que estende aquele considerado sobre* $\mathbb{Q}$.

1.1.10. NOTAÇÃO. O valor absoluto não-arquimediano sobre $\mathbb{Q}_p$, que estende $|\cdot|_p$, também será denotado por $|\cdot|_p$. Vamos considerar $\mathbb{Q}_p$ munido da métrica $d_p(x,y) = |x - y|_p$ induzida pela norma $|\cdot|_p$.

1.1.11. TEOREMA. *O corpo* $\mathbb{Q}_p$ *é um corpo não-arquimediano, completo, separável, localmente compacto e totalmente desconexo.*

1.1.12. TEOREMA. *Para cada* $x \in \mathbb{Q}_p$, *existe uma única série* $\sum_{k=\ell}^{\infty} a_k p^k$ *com* $\ell, a_k \in \mathbb{Z}$ *e* $0 \leq a_k < p$, *tal que a sequência das somas parciais* *seja um representante de* x.

1.1.13. OBSERVAÇÃO. A série $\sum_{k=\ell}^{\infty} a_k p^k$ de 1.1.12 converge para x em $\mathbb{Q}_p$ e é chamada de desenvolvimento de Hensel de x.

1.1.14. NOTAÇÃO. Denotaremos por A_p o conjunto formado por todos os desenvolvimentos de Hensel de elementos de $\mathbb{Q}_p$, isto é,

$$A_p = \{ \sum_{k=\ell}^{\infty} a_k p^k : \ell, a_k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq a_k < p \}.$$

1.1.15. OBSERVAÇÃO. É natural o corpo não-arquimediano $\mathbb{Q}_p$ ser identificado com o conjunto A_p, que consideramos munido de uma estrutura de corpo e do valor absoluto não-arquimediano $|\cdot|_p$. Se $x = \sum_{k=\ell}^{\infty} a_k p^k \in A_p$, $0 < a_\ell < p$, então temos que $|x| = p^{-\ell}$. O conjunto

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x| \leq 1\} = \{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k : a_k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq a_k < p\}$$

é um sub-anel compacto de $\mathbb{Q}_p$, conhecido como anel dos inteiros p-ádicos.

1.2. O CORPO DAS p-SÉRIES

Definiremos sobre o conjunto A_p de 1.1.14, duas novas operações da seguinte forma.

1.2.1. DEFINIÇÃO. *Para* $x = \sum_{k=\ell}^{\infty} a_k p^k$ *e* $y = \sum_{k=\ell}^{\infty} b_k p^k$ *pertencentes a* A_p, *definimos:*

(1) $$x \oplus y = \sum_{k=\ell}^{\infty} c_k p^k,\ c_k = a_k + b_k \ (\textit{módulo}\ p)$$

e

(2) $$x \odot y = \sum_{k=2\ell}^{\infty} d_k p^k,\ d_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\geq\ell}} a_i b_j \ (\textit{módulo}\ p).$$

Se $x = \sum_{k=\ell}^{\infty} a_k p^k$, $y = \sum_{k=r}^{\infty} b_k p^k \in A_p$ *e* $r > \ell$, *tomamos* $b_k = 0$ *para* $\ell \leq k < r$, *escrevemos* $y = \sum_{k=\ell}^{\infty} b_k p^k$ *e definimos* $x \oplus y$ *e* $x \odot y$ *usando* (1) *e* (2).

1.2.2. TEOREMA. *O conjunto* A_p *munido das operações definidas em* 1.2.1 *é um corpo.*

1.2.3. DEFINIÇÃO. *O corpo* $(A_p, \oplus, \odot)$ *é chamado de corpo das p-séries e é denotado por* S_p.

1.2.4. TEOREMA. *A aplicação* $x \mapsto |x|_p$ *de* 1.1.15 *é um valor absoluto não-arquimediano sobre* S_p.

1.2.5. OBSERVAÇÃO. Consideramos sempre S_p munido da métrica $d_p'(x,y) = |x \ominus y|_p$ induzida pela norma $|\cdot|_p$.

1.2.6. TEOREMA. *As métricas* d_p *e* d_p' *consideradas sobre* $\mathbb{Q}_p$ *e* S_p *são iguais.*

1.2.7. COROLÁRIO. *O corpo* S_p *é um corpo não-arquimediano, completo, separável, localmente compacto e totalmente desconexo.*

1.2.8. NOTAÇÃO. O subgrupo aditivo compacto

$$\{x \in S_2 : |x| \leq 1\} = \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k 2^k : a_k = 0 \text{ ou } 1\}$$

do corpo das 2-séries, é conhecido como grupo de Walsh-Paley.

1.3. CLASSIFICAÇÃO DOS CORPOS LOCAIS

Seja $\mathbb{K}$ um corpo munido de uma topologia. Se o grupo aditivo $\mathbb{K}^+$ e o grupo multiplicativo $\mathbb{K}^*$ de $\mathbb{K}$ forem grupos abelianos localmente compactos, então dizemos que $\mathbb{K}$ é um corpo localmente compacto.

1.3.1. NOTAÇÃO. Seja p um número primo positivo e $c \in \mathbb{N}^*$. Como quaisquer dois corpos finitos com mesmo número de elementos são isomorfos, usaremos a notação $GF(p^c)$ para designar um corpo qualquer que tenha p^c elementos.

1.3.2. TEOREMA. *Seja* $\mathbb{K}$ *um corpo localmente compacto, não-discreto e topologicamente completo. Então:*

(i) *Se* $\mathbb{K}$ *é conexo, então* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

(ii) *Se* $\mathbb{K}$ *é desconexo, então* $\mathbb{K}$ *é totalmente desconexo.*

(iii) *Se* $\mathbb{K}$ *é desconexo e tem característica* $p \neq 0$, *então* $\mathbb{K}$ *é um corpo de séries formais sobre um corpo finito* $GF(p^c)$. *Se* $c = 1$, $\mathbb{K}$ *é o corpo das* p-*séries e se* $c \neq 1$, $\mathbb{K}$ *é uma extensão algébrica finita de grau* c *do corpo das* p-*séries.*

(iv) *Se* $\mathbb{K}$ *é desconexo e tem característica zero, então* $\mathbb{K}$ *é um corpo de números* p-*ádicos, ou uma extensão algébrica finita de um tal corpo.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [21], pg. 11.

1.3.2. DEFINIÇÃO. *Um corpo local é qualquer corpo localmente compacto, não-discreto, topologicamente completo e totalmente desconexo.*

1.3.3. NOTAÇÃO. Escolhemos uma medida de Haar dx sobre $\mathbb{K}^+$, a qual posteriormente será normalizada. Denotamos por $|A|$ a medida do subconjunto mensurável A de $\mathbb{K}$, com respeito a medida de Haar dx.

Se $\lambda \in \mathbb{K}^*$, então denotaremos por $d(\lambda x)$, a medida de Haar sobre $\mathbb{K}^+$ que verifica

$$\int_A d(\lambda x) = |\lambda A|$$

para todo $A \subset \mathbb{K}$, A mensurável.

1.3.4. OBSERVAÇÃO. Se $\lambda \in \mathbb{K}^*$, então $d(\lambda x)$ é uma medida de Haar sobre $\mathbb{K}^+$ e portanto existe um único número $\mathrm{mod}_{\mathbb{K}^+}(\lambda) \in \mathbb{R}_+$, chamado de módulo de λ em relação a $\mathbb{K}^+$, tal que $|\lambda A| = \mathrm{mod}_{\mathbb{K}^+}(\lambda)\,|A|$ para todo $A \subset \mathbb{K}$, A mensurável.

1.3.5. DEFINIÇÃO. *Para* $\lambda \in \mathbb{K}$, *definimos* $|\lambda| = \mathrm{mod}_{\mathbb{K}^+}(\lambda)$ *se* $\lambda \neq 0$ *e* $|\lambda| = 0$ *se* $\lambda = 0$.

1.3.6. TEOREMA. *A aplicação* $\lambda \leftrightarrow |\lambda|$ *definida em* 1.3.5, *é um valor absoluto não-arquimediano sobre* $\mathbb{K}$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [21].

1.4. PROPRIEDADES DOS CORPOS LOCAIS

As demonstrações dos resultados desta Seção e das Seções posteriores deste Capítulo estão em [18].

1.4.1. TEOREMA. *Se* $|x| \neq |y|$ *então* $|x + y| = \max\{|x|, |y|\}$.

1.4.2. DEFINIÇÃO. *O anel dos inteiros de* $\mathbb{K}$ *é o conjunto*

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{K} : |x| \leq 1\}.$$

1.4.3. EXEMPLO. Se $\mathbb{K}$ for o corpo dos números p-ádicos, então $\mathbb{D}$ será o anel dos inteiros p-ádicos, e se $\mathbb{K}$ for o corpo das 2-séries, então $\mathbb{D}$ será o grupo de Walsh-Paley.

1.1.4. TEOREMA. *O anel* $\mathbb{D}$ *dos inteiros de* $\mathbb{K}$, *é o único sub-anel maximal compacto do corpo* $\mathbb{K}$.

1.4.5. DEFINIÇÃO. *O ideal primo de* $\mathbb{K}$ *é o conjunto*

$$\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{K} : |x| < 1\}.$$

1.4.6. EXEMPLO. Se $\mathbb{K}$ for o corpo dos números p-ádicos ou das p-séries, então

$$\{\sum_{k=1}^{\infty} a_k p^k : a_k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq a_k < p\}$$

é o ideal primo de $\mathbb{K}$.

1.4.7. TEOREMA. *O ideal primo de* $\mathbb{K}$ *é o único ideal maximal de* $\mathbb{D}$ *e é principal.*

1.4.8. DEFINIÇÃO. *Dizemos que* $a \in \mathbb{K}$ *é um elemento primo de* $\mathbb{K}$ *se* $a \in \mathbb{B}$ *e* a *é um elemento de valor absoluto maximo em* $\mathbb{B}$.

De agora em diante consideramos fixo um elemento primo π de $\mathbb{K}$. Temos que π é um gerador do ideal principal $\mathbb{B}$, isto é, $\pi\mathbb{D} = \mathbb{B}$.

1.4.9. EXEMPLO. Se $\mathbb{K}$ for o corpo dos números p-ádicos ou das p-séries, então o número primo p é um elemento primo de $\mathbb{K}$.

1.4.10. TEOREMA. *O corpo* $\mathbb{D}/\mathbb{B}$ *é um corpo finito com* p^c *elementos, para algum número primo positivo* p *e algum* $c \in \mathbb{N}^*$.

1.4.11. OBSERVAÇÃO. A medida de Haar dx é normalizada de forma que $|\mathbb{D}| = 1$.

1.4.12. TEOREMA. *A medida* $|x|^{-1}dx$ *é uma medida de Haar sobre o grupo multiplicativo* $\mathbb{K}^*$. *Em particular* $|\lambda B| = |\lambda||B|$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e todo subconjunto mensurável* B *de* $\mathbb{K}$.

1.4.13. OBSERVAÇÃO. De agora em diante $q = p^c$ será o número de elementos de $\mathbb{D}/\mathbb{B}$.

1.4.14. TEOREMA. *Temos que* $|\mathbb{B}| = |\pi| = q^{-1}$.

1.4.15. COROLÁRIO. *Para todo* $x \in \mathbb{K}^*$ *existe um* $j \in \mathbb{Z}$ *tal que* $|x| = q^j$.

1.4.16. DEFINIÇÃO. *O conjunto*

$$\mathbb{B}^k = \pi^k \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{K} : |x| \leq q^{-k}\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

é chamado de ideal fracionário de $\mathbb{K}$.

1.4.17. OBSERVAÇÃO. O ideal francionário $\mathbb{B}^k$ é compacto, aberto, é um subgrupo de $\mathbb{K}^+$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ e é um ideal primo de $\mathbb{D}$ para $k \geq 0$. Além disso, a coleção $\{\mathbb{B}^k : k \in \mathbb{Z}\}$ constitui um sistema fundamental de vizinhanças de 0 e $|\mathbb{B}^k| = q^{-k}$.

1.4.18. NOTAÇÃO. Denotaremos por U uma parte $\{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$ de $\mathbb{D}$ tal que $a_1 \in \mathbb{B}$, $|a_i| = 1$, $1 < i \leq q$ e $\mathbb{D}/\mathbb{B} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_q\}$.

1.4.19. TEOREMA. *Todo elemento* $x \in \mathbb{K}$ *pode se expressar de maneira única na forma*

$$x = \sum_{j=k}^{\infty} b_j \pi^j,$$

onde $k \in \mathbb{Z}$ *e* $b_j \in U$.

1.5. O ESPAÇO VETORIAL $\mathbb{K}^n$

1.5.1. DEFINIÇÃO. *Para* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, *definimos*

$$|x| = |(x_1, x_2, \ldots, x_n)| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

1.5.2. TEOREMA. *A aplicação* $x \mapsto |x|$ *definida sobre* $\mathbb{K}^n$, *é uma norma que verifica as seguintes propriedades:*

(1) $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ *para* $x, y \in \mathbb{K}^n$;

(2) $|x + y| = \max\{|x|, |y|\}$ *para* $x, y \in \mathbb{K}^n$, $x \neq y$.

1.5.3. OBSERVAÇÃO. Vamos considerar sempre $\mathbb{K}^n$ munido da norma definida em 1.5.2 e da medida produto $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$. A medida de um conjunto mensurável B de $\mathbb{K}^n$ com respeito a dx será denotada por $|B|$. Como $|x_i|^{-1} dx_i$ é uma medida de Haar sobre o grupo multiplicativo $\mathbb{K}^*$ para $1 \leq i \leq n$, então se $f(x)|x|^{-n} \in L^1(\mathbb{K}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{K}^*$ temos

$$\int_{\mathbb{K}^n} f(\alpha x)\frac{dx}{|x|^n} = \int_{\mathbb{K}^n} f(x)\frac{dx}{|x|^n}$$

1.5.4. NOTAÇÃO. Por um abuso de notação, denotaremos a bola de raio q^{-k} e centro em 0 de $\mathbb{K}^n$ por $\mathbb{B}^k$, $k \in \mathbb{Z}$, sendo que $\mathbb{B} = \mathbb{B}^1$ e $\mathbb{D} = \mathbb{B}^0$.

1.5.5. OBSERVAÇÃO. Denotando a bola $\mathbb{B}^k$ de $\mathbb{K}^n$ por $\mathbb{B}^k_n$, então podemos escrever $\mathbb{B}^k_n$ como o produto cartesiano $\mathbb{B}^k_1 \times \mathbb{B}^k_1 \times \ldots \times \mathbb{B}^k_1$ de n bolas de $\mathbb{K}$. Portanto as bolas de $\mathbb{K}^n$ são cubos e $|\mathbb{B}^k| = q^{-kn}$.

1.5.6. TEOREMA. *Se* B *e* R *são duas bolas de* $\mathbb{K}^n$ *tais que* $B \cap R \neq \phi$ *e* $|B| \leq |R|$, *então* $B \subset R$.

1.5.7. OBSERVAÇÃO. Se B e R são duas bolas de $\mathbb{K}^n$ tais que $B \cap R \neq \phi$ e $|B| = |R|$, então o Teorema 1.5.6 implica que $B = R$. Se $|x - y| \leq q^{-k}$, então pelo mesmo teorema temos que $x + \mathbb{B}^k = y + \mathbb{B}^k$.

1.5.8. TEOREMA. *Seja* $\mathbb{K}$ *um corpo local. Então, para cada* $k \in \mathbb{Z}$, *existe uma única sequência de bolas* $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *com raio* q^k, *que determina uma partição de* $\mathbb{K}^n$. *Em particular, o conjunto de todas as bolas de* $\mathbb{K}^n$ *é enumerável.*

1.6. O DUAL DE $\mathbb{K}^+$ E O DUAL DE $\mathbb{K}^n$

1.6.1. NOTAÇÃO. Denotaremos por $\hat{\mathbb{K}}^+$ o grupo dos caracteres de $\mathbb{K}^+$ e por $\hat{\mathbb{K}}^n$ o grupo dos caracteres de $\mathbb{K}^n$.

1.6.2. EXEMPLOS. Se $x = x_o + \sum_{k=\ell}^{-1} a_k p^k \in S_p$, $x_o \in \mathbb{D}$, então

$$\chi(x) = \exp(2\pi i p^{-1} a_{-1})$$

é um caracter sobre S_p , trivial sobre $\mathbb{D}$ mas não trivial sobre $\mathbb{B}^{-1}$.

Se $x = x_o + \sum_{k=\ell}^{-1} a_k p^k \in \mathbb{Q}_p$, $x_o \in \mathbb{D}$, então

$$\chi(x) = \exp(2\pi i \sum_{k=\ell}^{-1} a_k p^k)$$

é um caracter sobre $\mathbb{Q}_p$, trivial sobre $\mathbb{D}$ mas não trivial sobre $\mathbb{B}^{-1}$.

1.6.3. OBSERVAÇÃO. Se $\mathbb{K}$ é um corpo local, então existe um caracter não trivial sobre $\mathbb{K}^+$. De fato, se $\hat{\mathbb{K}}^+ = \{\hat{1}\}$, então segue pelo teorema de dualidade de Pontryagin que $\mathbb{K}^+ \approx (\hat{\mathbb{K}}^+)\hat{} = \{\hat{1}\} \approx \{1\}$, o que é um absurdo.

1.6.4. DEFINIÇÃO. *Se* $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{K}^n$ *então definimos*

$$x \cdot y = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n .$$

1.6.5. DEFINIÇÃO. *Se* χ *é um caracter sobre* $\mathbb{K}^+$ *e* $y \in \mathbb{K}^n$, *então definimos* χ_y *por* $\chi_y(x) = \chi(x \cdot y)$ *para todo* $x \in \mathbb{K}^n$.

1.6.6. TEOREMA. *Os grupos topológicos* $\mathbb{K}^n$ *e* $\hat{\mathbb{K}}^n$ *são isomorfos. O isomorfismo topológico é dado pela aplicação* $y \leftrightarrow \chi_y$, *onde* χ *é um caracter não trivial sobre* $\mathbb{K}^+$.

CAPITULO 2

A FUNCAO MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD E A DECOMPOSICAO DE CALDERÓN-ZYGMUND

Neste Capítulo definiremos e enunciaremos as propriedades básicas da função maximal de Hardy-Littlewood , o teorema de diferenciação de Lebesgue e a decomposição de Calderón-Zygmund no contexto dos corpos locais. Nosso objetivo é ter uma referência explícita de resultados que serão aplicados nos capítulos posteriores.

Um espaço de Banach arbitrário será denotado aqui pela letra E.

2.1. A FUNÇÃO MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD

2.1.1. DEFINIÇÃO. *Seja* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{K}^n, E)$. *A função maximal de Hardy--Littlewood de* f *é definida para todo* $x \in \mathbb{K}^n$ *por*

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B \|f(y)\|_E \, dy = \sup_{k \in \mathbb{Z}} q^{kn} \int_{|y-x| \leq q^{-k}} \|f(y)\|_E \, dy$$

onde os conjuntos B *são bolas de* $\mathbb{K}^n$.

2.1.2. TEOREMA. *Seja* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{K}^n, E)$. *Então* $Mf(x)$ *é mensurável. Se* f *é integrável temos*

$$(1) \qquad |\{x : Mf(x) > \lambda\}| \leq \lambda^{-1} \|f\|_{L^1(E)}, \lambda > 0.$$

Mais ainda, se $1 < p \leq \infty$, *então existe uma constante* C_p, *dependendo somente de* p, *tal que*

$$(2) \qquad \|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_{L^p(E)}, \quad f \in L^p(\mathbb{K}^n, E).$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [18], pag. 29 e 173 .

2.2. O TEOREMA DE DIFERENCIAÇÃO DE LEBESGUE

2.2.1. DEFINIÇÃO. *Seja* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{K}^n)$. *Um ponto* $x \in \mathbb{K}^n$ *é chamado ponto regular de* f *se*

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x) ,$$

onde

$$f_k(x) = q^{kn} \int_{|y-x| \leq q^{-k}} f(y)\,dy .$$

2.2.2. TEOREMA. *Se* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{K}^n, E)$, *então quase todo* $x \in \mathbb{K}^n$ *é um ponto regular de* f.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [18], pag. 29.

2.2.3. COROLÁRIO. *Se* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{K}^n, E)$, *então para quase todo* $x \in \mathbb{K}^n$ *temos*

$$(1) \qquad \|f(x)\|_E = \lim_{k \to \infty} q^{kn} \int_{|y-x| \leq q^{-k}} \|f(y)\|_E \, dy$$

e

$$(2) \qquad \|f(x)\|_E \leq Mf(x) .$$

DEMONSTRAÇÃO. Consequência imediata da aplicação de 2.2.2. à função $x \mapsto \|f(x)\|_E$.

2.2.4. TEOREMA. *Seja* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{K}^n)$. *Então todo ponto de continuida-de de* f *é um ponto regular de* f.

DEMONSTRAÇÃO. Imediata.

2.3. O LEMA DE DECOMPOSIÇÃO DE CALDERÓN-ZYGMUND

2.3.1. TEOREMA. *Se* $f \in L^1(\mathbb{K}^n, E)$ *e* $\lambda > 0$, *então existe uma sequência de bolas disjuntas* $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *e uma decomposição*

$$f = g + b = g + \sum_{j=1}^{\infty} b_j$$

com as seguintes propriedades:

(1) $\|g(x)\|_E \leq q^n\lambda$ q.t.x;

(2) $\|g\|_{L^1(E)} \leq \|f\|_{L^1(E)}$ e $\|b\|_{L^1(E)} = \sum_{j=1}^{\infty} \|b_j\|_{L^1(E)} \leq 2\|f\|_{L^1(E)}$;

(3) $\sum_{j=1}^{\infty} |B_j| \leq \lambda^{-1} \|f\|_{L^1(E)}$;

(4) $\operatorname{supp} b_j \subset B_j$ e $\int_{B_j} b_j(x)dx = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. O caso real é dado pelos resultados 7.6 e 7.9 do Capítulo III de [18]. A demonstração do caso vetorial é obtida quando trocamos valor absoluto por norma na demonstração do caso real.

2.3.2. OBSERVAÇÃO. Se f pertence a $L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$, então as funções g e b de 2.3.1, também pertencem a $L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$.

CAPÍTULO 3

O ESPAÇO BMO(E)

Neste Capítulo introduzimos os conceitos de função maximal aguda e de espaço das funções de oscilação média limitada com valores num espaço de Banach E, que denotamos por BMO(E), no contexto dos espaços $\mathbb{K}^n$. Demonstramos algumas propriedades da função maximal aguda e do espaço BMO(E) que coincidem com aquelas verificadas no caso do $\mathbb{R}^n$.

A desigualdade de Fefferman-Stein, relacionando a função maximal de Hardy-Littlewood com a função maximal aguda, e o teorema de interpolação de Marcinkiewicz-Riviere, são também demonstrados nos espaços $\mathbb{K}^n$, pois serão utilizados posteriormente.

Os trabalhos [5], [19] e [9] são referências para o caso do $\mathbb{R}^n$.

Um espaço de Banach arbitrário será denotado aqui pela letra E.

3.1. A FUNÇÃO MAXIMAL AGUDA

3.1.1. DEFINIÇÃO. *O operador de translação* τ_h *é definido para todo* $h \in \mathbb{K}^n$ *por* $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$, *onde* f *é uma função sobre* $\mathbb{K}^n$.

3.1.2. NOTAÇÃO. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, Φ_k será a função característica da bola $\mathbb{B}^k$ de $\mathbb{K}^n$. Assim, a função característica da bola $x + \mathbb{B}^k$ é dada por $\tau_x \Phi_k$.

3.1.3. DEFINIÇÃO. *A função maximal aguda de uma função* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{K}^n, E)$ *é definida para todo* $x \in \mathbb{K}^n$ *por*

$$M^{\#}f(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B \|f(y) - f_B\|_E dy$$

$$= \sup_{k \in \mathbb{Z}} q^{kn} \int_{|y-x| \leq q^{-k}} \|f(y) - f_k(x)\|_E dy$$

onde os conjuntos B *são bolas de* $\mathbb{K}^n$ *e*

$$f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(y)\,dy, \quad f_k(x) = q^{kn}\int_{|y-x|\le q^{-k}} f(y)\,dy.$$

3.1.4. TEOREMA. *Se* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{K}^n, E)$, *então:*

(1) $$M^{\#}f(x) \le 2\sup_{k\in\mathbb{Z}}\ \inf_{\alpha\in E} q^{kn}\int_{|y-x|\le q^{-k}} \|f(y)-\alpha\|_E\,dy \le 2M^{\#}f(x);$$

(2) $$M^{\#}(\|f(x)\|_E) \le 2M^{\#}f(x);$$

(3) $$M^{\#}f(x) \le 2Mf(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. PARTE 1: Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B \|f(y)-f_B\|_E\,dy &= \frac{1}{|B|}\int_B \|f(y)-\alpha) - (f_B-\alpha)\|_E\,dy \\
&\le \frac{1}{|B|}\int_B \|f(y)-\alpha\|_E\,dy + \frac{1}{|B|}\int_B \|f_B-\alpha\|_E\,dy \\
&= \frac{1}{|B|}\int_B \|f(y)-\alpha\|_E\,dy + \|f_B-\alpha\|_E \\
&= \frac{1}{|B|}\int_B \|f(y)-\alpha\|_E\,dy + \Big\|\frac{1}{|B|}\int_B (f(y)-\alpha)\,dy\Big\|_E \\
&\le \frac{1}{|B|}\int_B \|f(y)-\alpha\|_E\,dy + \frac{1}{|B|}\int_B \|f(y)-\alpha\|_E\,dy \\
&= 2\,\frac{1}{|B|}\int_B \|f(y)-\alpha\|_E\,dy,
\end{aligned}$$

para toda bola B de $\mathbb{K}^n$ e todo $\alpha \in E$, e portanto

$$\frac{1}{|B|}\int_B \|f(y)-f_B\|_E\,dy \le 2\inf_{\alpha\in E}\frac{1}{|B|}\int_B \|f(y)-\alpha\|_E\,dy.$$

Segue então que

$$M^{\#}f(x) \leq 2 \sup_{x\in B} \inf_{\alpha\in E} \frac{1}{|B|} \int_B \|f(y) - \alpha\|_E dy.$$

Por outro lado, para toda bola B, temos

$$\inf_{\alpha\in E} \frac{1}{|B|} \int_B \|f(y) - \alpha\|_E dy \leq \frac{1}{|B|} \int_B \|f(y) - f_B\|_E dy$$

e assim

$$\sup_{x\in B} \inf_{\alpha\in E} \frac{1}{|B|} \int_B \|f(y) - \alpha\|_E dy \leq M^{\#}f(x).$$

PARTE 2. Para toda bola B, temos

$$\inf_{\alpha\in E} \frac{1}{|B|} \int_B |\|f(y)\|_E - \alpha| dy \leq \frac{1}{|B|} \int_B |\|f(y)\|_E - \|f_B\|_E| dy$$

e portanto

$$M^{\#}(\|f(x)\|_E) \leq 2 \sup_{x\in B} \inf_{\alpha\in E} \frac{1}{|B|} \int_B |\|f(y)\|_E - \alpha| dy$$

$$\leq 2 \sup_{x\in B} \frac{1}{|B|} \int_B |\|f(y)\|_E - \|f_B\|_E| dy$$

$$\leq 2 \sup_{x\in B} \frac{1}{|B|} \int_B \|f(y) - f_B\|_E dy$$

$$= 2M^{\#}f(x).$$

PARTE 3. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$M^{\#}f(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{|B|} \int_B \|f(y) - f_B\|_E dy$$

$$\leq \sup_{x\in B} \frac{1}{|B|} \int_B (\|f(y)\|_E + \|f_B\|_E) dy$$

$$\leq \sup_{x\in B} \frac{1}{|B|}\int_B \|f(y)\|_E dy + \sup_{x\in B} \frac{1}{|B|}\int_B \|f_B\|_E dy$$

$$= Mf(x) + \sup_{x\in B} \|f_B\|_E$$

$$= Mf(x) + \sup_{x\in B} \left\|\frac{1}{|B|}\int_B f(y)dy\right\|_E$$

$$\leq Mf(x) + \sup_{x\in B} \frac{1}{|B|}\int_B \|f(y)\|_E dy$$

$$= 2Mf(x).$$

3.1.5. TEOREMA. *Seja* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{K}^n,E)$. *Então* f *é constante se e somente se* $M^{\#}f(x) = 0$ *para algum* $x \in \mathbb{K}^n$.

DEMONSTRAÇÃO. PARTE 1. Suponhamos que $M^{\#}f(x) = 0$ para algum $x \in \mathbb{K}^n$.

Se $|x| = q^{\ell}$, então $x \in \mathbb{B}^k$ para $k \leq -\ell$, e consequentemente $x + \mathbb{B}^k = \mathbb{B}^k$ para $k \leq -\ell$ (ver 1.5.7). Então para $k \leq -\ell$, temos

$$f_k(x) = q^{kn}\int_{|y-x|\leq q^{-k}} f(y)dy = q^{kn}\int_{x+\mathbb{B}^k} f(y)dy$$

$$= q^{kn}\int_{\mathbb{B}^k} f(y)dy = f_k(0),$$

e como $M^{\#}f(x) = 0$, vamos ter

$$0 = \int_{|y-x|\leq q^{-k}} \|f(y) - f_k(x)\|_E dy = \int_{x+\mathbb{B}^k} \|f(y) - f_k(0)\|_E dy$$

$$= \int_{\mathbb{B}^k} \|f(y) - f_k(0)\|_E dy = \int_{\mathbb{K}^n} \|f(y)\Phi_k(y) - f_k(0)\Phi_k(y)\|_E dy.$$

Consequentemente

(1) $$f(y)\Phi_k(y) = f_k(0)\Phi_k(y), \text{ q.t.y e } k \leq -\ell.$$

Agora, para $t < k \leq -\ell$, temos por (1) que

$$f(y)\Phi_k(y) = (f(y)\Phi_t(y))\Phi_k(y) = (f_t(0)\Phi_t(y))\Phi_k(y) = f_t(0)\Phi_k(y)$$

para quase todo y, donde podemos concluir que $f_k(0) = f_t(0)$. Como $\mathbb{K}^n$ é reunião das bolas $\mathbb{B}^k$ para $k \leq -\ell$, então devemos ter $f(y) = f_{-\ell}(0)$, q.t.y.

Se $M^{\#}f(0) = 0$, usando o procedimento acima obtemos (1) para todo $k \in \mathbb{Z}$ e da mesma forma vemos que f é constante quase sempre.

PARTE 2. Suponhamos que $f(y) = C$ para quase todo $y \in \mathbb{K}^n$. Então para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{K}^n$, temos

$$f_k(x) = q^{kn} \int_{x+\mathbb{B}^k} f(y)dy = q^{kn}|x + \mathbb{B}^k|C = C$$

e portanto

$$\begin{aligned} M^{\#}f(x) &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} q^{kn} \int_{x+\mathbb{B}^k} \|f(y) - f_k(x)\|_E dy \\ &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} q^{kn} \int_{x+\mathbb{B}^k} \|C - C\|_E dy = 0. \end{aligned}$$

3.2. O ESPAÇO BMO(E)

3.2.1. DEFINIÇÃO. *O espaço* BMO(E) *das funções de oscilação média limitada com valores no espaço de Banach* E, *é formado pelas funções* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{K}^n, E)$ *tais que* $M^{\#}f \in L^\infty(\mathbb{K}^n)$.

Se $f \in BMO(E)$ *então definimos*

(1) $$\|f\|_* = \|M^{\#}f\|_\infty .$$

3.2.2. LEMA. *A aplicação* $f \mapsto \|f\|_*$ *é uma semi-norma em* BMO(E) *e* $\|f\|_* = 0$ *se e somente se* f *é constante.*

DEMONSTRAÇÃO. PARTE 1. É claro que $\|f\|_* \geq 0$ para toda $f \in BMO(E)$. Agora, se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f \in BMO(E)$, vamos ter

$$(\lambda f)_k(x) = \int_{|y-x|\leq q^{-k}} \lambda f(y)\,dy = \lambda \int_{|y-x|\leq q^{-k}} f(y)\,dy = \lambda f_k(x).$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} M^{\#}(\lambda f)(x) &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} q^{kn} \int_{|y-x|\leq q^{-k}} \|(\lambda f)(y) - (\lambda f)_k(x)\|_E\,dy \\ &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} q^{kn} \int_{|y-x|\leq q^{-k}} \|\lambda f(y) - \lambda f_k(x)\|_E\,dy \\ &= |\lambda| \sup_{k\in\mathbb{Z}} q^{kn} \int_{|y-x|\leq q^{-k}} \|f(y) - f_k(x)\|_E\,dy \\ &= |\lambda| M^{\#}f(x) \end{aligned}$$

e

$$\|\lambda f\|_* = \|M^{\#}(\lambda f)\|_\infty = \|\,|\lambda| M^{\#} f\|_\infty = |\lambda|\,\|M^{\#}f\|_\infty = |\lambda|\,\|f\|_*.$$

Por outro lado, se $f, g \in BMO(E)$, temos também

$$\|(f(y) + g(y)) - (f+g)_k(x)\|_E \leq \|f(y) - f_k(x)\|_E + \|g(y) - g_k(x)\|_E$$

e portanto

$$\begin{aligned} M^{\#}(f+g)(x) &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} q^{kn} \int_{|y-x|\leq q^{-k}} \|(f(y)+g(y)) - (f+g)_k(x)\|_E\,dy \\ &\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} q^{kn} \int_{|y-x|\leq q^{-k}} (\|f(y) - f_k(x)\|_E + \|g(y) - g_k(x)\|_E)\,dy \\ &\leq M^{\#}f(x) + M^{\#}g(x). \end{aligned}$$

Assim

$$\|f + g\|_* = \|M^\#(g + f)\|_\infty \leq \|M^\# f + M^\# g\|_\infty$$

$$\leq \|M^\# f\|_\infty + \|M^\# g\|_\infty = \|f\|_* + \|g\|_*$$

e consequentemente $\|\cdot\|_*$ é uma semi-norma sobre BMO(E).

PARTE 2. Se f é constante, então pela demonstração de 3.1.5, segue que $M^\# f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{K}^n$ e portanto $\|f\|_* = \|M^\# f\|_\infty = 0$.

Agora, se $\|f\|_* = \|M^\# f\|_\infty = 0$, então $M^\# f(x) = 0$ q.t.x e assim por 3.1.5 f deve ser constante.

3.2.3. OBSERVAÇÃO. O espaço $L^\infty(\mathbb{K}^n, E)$ está contido em BMO(E). De fato, se $f \in L^\infty(\mathbb{K}^n, E)$, existe $C > 0$ tal que $\|f(x)\|_E \leq C$ q.t.x e por 3.1.4 (3), temos que

$$M^\# f(x) \leq 2Mf(x) = 2 \sup_{k \in \mathbb{Z}} q^{kn} \int_{|y-x| \leq q^{-k}} \|f(y)\|_E dy$$

$$\leq 2 \sup_{k \in \mathbb{Z}} q^{kn} \int_{x+\mathbb{B}^k} C dy$$

$$\leq 2 \sup_{k \in \mathbb{Z}} q^{kn} C |x + \mathbb{B}^k| = 2C,$$

implicando assim que $M^\# f \in L^\infty(\mathbb{K}^n)$, isto é, $f \in$ BMO(E).

3.2.4. EXEMPLO. A função $f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log|x|$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ não pertence a $L^\infty(\mathbb{K})$, mas está em BMO($\mathbb{R}$). Com efeito, como f não é limitada, então $f \notin L^\infty(\mathbb{K})$.

Para cada $k \in \mathbb{Z}$ seja $A^k = \mathbb{B}^k \setminus \mathbb{B}^{k+1}$ e seja R a soma da série $\sum_{j=0}^{\infty} jq^{-j}$. Portanto para todo $r \in \mathbb{Z}$, temos

$$\int_{|y| \leq q^{-r}} \log|y| dy = \sum_{k=r}^{\infty} \int_{|y|=q^{-k}} \log|y| dy = \sum_{k=r}^{\infty} \int_{A^k} \log q^{-k} dy =$$

$$= \sum_{k=r}^{\infty} |A^k| \log q^{-k} = \sum_{k=r}^{\infty} (1 - q^{-1}) q^{-k} (-k) \log q$$

$$= -(1-q^{-1})(\log q) \sum_{k=r}^{\infty} kq^{-k} = -(1-q^{-1})(\log q) \sum_{k=0}^{\infty} (j+r) q^{-(j+r)}$$

$$= -(1-q^{-1}) q^{-r} (\log q) \left(\sum_{j=0}^{\infty} jq^{-j} + r \sum_{j=0}^{\infty} q^{-j} \right)$$

$$= -(1-q^{-1}) q^{-r} (\log q) [R + r(1-q^{-1})^{-1}]$$

$$= -q^{-r} (\log q) [R(1-q^{-1}) + r].$$

Vamos ter então que

$$f_r(0) = q^r \int_{|y| \leq q^{-r}} \log|y| dy = -(\log q)[R(1-q^{-1}) + r]$$

e assim

$$(1) \quad q^r \int_{|y| \leq q^{-r}} |f(y) - f_r(0)| dy = q^r \sum_{k=r}^{\infty} \int_{|y| \leq q^{-k}} |\log|y| - f_r(0)| dy$$

$$= q^r \sum_{k=r}^{\infty} |k \log q + f_r(0)| q^{-k} (1-q^{-1})$$

$$= q^r (1-q^{-1}) \sum_{k=r}^{\infty} |k \log q + f_r(0)| q^{-k}$$

$$= q^r (1-q^{-1}) (\log q) \sum_{k=r}^{\infty} |(k-r) - R(1-q^{-1})| q^{-k}.$$

Agora, como

$$(1-q^{-1}) R = (1-q^{-1}) \sum_{j=0}^{\infty} jq^{-j} > (1-q^{-1}) \sum_{j=0}^{\infty} q^{-j}$$

$$= (1-q^{-1})(1-q^{-1})^{-1} = 1,$$

então existe um número natural t tal que $t \geq 2$ e $t-1 < R(1-q^{-1}) \leq t$.

Logo, se $k \geq r + t$, temos $(k - r) - t \geq 0$ e assim $(k-r)-R(1-q^{-1}) \geq 0$; agora, se $k < r + t$, então $k - r \leq t - 1$ e assim $R(1-q^{-1}) - (k - r) \geq 0$. Consequentemente

$$|(k - r) - R(1-q^{-1})| = \begin{cases} (k - r) - R(1 - q^{-1}), & \text{se } k \geq r + t; \\ R(1 - q^{-1}) - (k - r), & \text{se } k < r + t. \end{cases}$$

Portanto

$$\sum_{k=r}^{r+t+1} |(k - r) - R(1 - q^{-1})| q^{-k} = \sum_{k=r}^{r+t+1} [R(1 - q^{-1}) - (k - r)] q^{-k}$$

$$= \sum_{j=0}^{t-1} [R(1 - q^{-1}) - j] q^{-j} q^{-r} = q^{-r} B$$

e

$$\sum_{k=r+t}^{\infty} |(k - r) - R(1 - q^{-1})| q^{-k} = \sum_{k=r+t}^{\infty} [(k-r) - R(1-q^{-1})] q^{-k}$$

$$= \sum_{k=r+t}^{\infty} k q^{-k} - [r + R(1 - q^{-1})] \sum_{k=r+t}^{\infty} q^{-k}$$

$$= q^{-(r+t)} [R + (r+t)(1-q^{-1})] - [r + R(1-q^{-1})] q^{-(r+t)} (1-q^{-1})^{-1}$$

$$= q^{-r} [q^{-t} t (1 - q^{-1})^{-1}] = q^{-r} C$$

onde B e C são constantes que independem de r pois as constantes R e t independem de r. Logo segue por (1) que

$$(2) \qquad q^{r} \int_{|y| \leq q^{-r}} |f(y) - f_r(0)| dy = (1 - q^{-1}) (\log q) (B + C) = D$$

implicando assim que $M^{\#} f(0) \leq D$.

Se $x \neq 0$ e $|x| \leq q^{-r}$, então $x + \mathbb{B}^r = \mathbb{B}^r$, assim

$$f_r(x) = q^{r} \int_{|y-x| \leq q^{-r}} f(y) dy = q^{r} \int_{\mathbb{B}^r} f(y) dy = f_r(0)$$

e portanto por (2) temos

$$(3)\quad q^r \int_{|y-x|\leq q^{-r}} |f(y) - f_r(x)|dy = q^r \int_{\mathbb{B}^r} |f(y) - f_r(0)|dy = D.$$

Agora, se $x \neq 0$ e $|x| > q^{-r}$, então $|x+z| = \max\{|x|,|z|\} = |x|$ para $|z| \leq q^{-r}$, assim

$$f_r(x) = q^r \int_{|y-x|\leq q^{-r}} \log|y|dy = q^r \int_{|z|\leq q^{-r}} \log|x+z|dz$$

$$= q^r \int_{\mathbb{B}^r} \log|x|dz = q^r(\log|x|)|\mathbb{B}^r| = \log|x|$$

e portanto

$$(4)\quad q^r \int_{|y-x|\leq q^{-r}} |f(y) - f_r(x)|dy = q^r \int_{|y-x|\leq q^{-r}} |\log|y| - \log|x||dy$$

$$= q^r \int_{|z|\leq q^{-r}} |\log|x+z| - \log|x||dy = 0.$$

Podemos então concluir por (3) e (4) que

$$q^r \int_{|y-x|\leq q^{-r}} |f(y) - f_r(x)|dy \leq D$$

para todo $x \neq 0$ e $r \in \mathbb{Z}$. Consequentemente $M^{\#}f(x) \leq D$ para todo $x \neq 0$ e portanto $f \in BMO(\mathbb{R})$.

3.2.5. OBERVAÇÃO. A aplicação $f \leftrightarrow \|f\|_*$ é apenas uma semi-norma em BMO(E). Consideramos então BMO(E) como um espaço quociente em relação as funções constantes e assim por 3.2.2 a aplicação $f \leftrightarrow \|f\|_*$ passará a ser uma norma em BMO(E).

3.2.6. TEOREMA. *O espaço* BMO(E) *é um espaço de Banach.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja (f_j) uma sequência de Cauchy em BMO(E) e seja

$\varepsilon > 0$ dado. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| f_j - f_i \|_* < \varepsilon$$

para todo $j, i \geq N$. Em outras palavras

(1) $$q^{kn} \| \{f_j - (f_j)_k(x)\}(\tau_x \Phi_k) - \{f_i - (f_i)_k(x)\}(\tau_x \Phi_k) \|_{L^1(E)}$$

$$= q^{kn} \int_{|y-x| \leq q^{-k}} \| (f_j(y) - f_i(y)) - (f_j - f_i)_k(x) \|_E dy < \varepsilon$$

para todo $x \in \mathbb{K}^n$, $k \in \mathbb{Z}$ e $j, i \geq N$. Como estamos trabalhando com classes de funções módulo constantes, então podemos supor sem perda de generalidade que $(f_j)_o(0) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Para todo $x \in \mathbb{K}^n$ e $k \in \mathbb{Z}$, a sequência $(\{f_j - (f_j)_k(x)\}(\tau_x \Phi_k))_j$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(\mathbb{K}^n, E)$ e portanto converge em $L^1(\mathbb{K}^n, E)$ para uma função $g_{x,k}$. Tomemos $g_k = g_{0,k}$ e $h_k = g - -(g_k)_o(0)\Phi_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Se $k \leq 0$ então,

$$\begin{aligned}
\| (g_k)_o(0) - (f_j)_k(0) \|_E &= \| (g_k)_o(0) - (f_j - (f_j)_k(0))_o(0) \|_E \\
&= \| \int_{\mathbb{D}} [g_k(y) - \{f_j(y) - (f_j)_k(0)\}] dy \|_E \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} \| g_k(y) - \{f_j(y) - (f_j)_k(0)\} \|_E dy \\
&\leq \int_{\mathbb{B}^k} \| g_k(y) - \{f_j(y) - (f_j)_k(0)\} \|_E dy \\
&= \| g_k - \{f_j - (f_j)_k(0)\} \Phi_k \|_{L^1(E)}
\end{aligned}$$

e portanto $(f_j)_k(0) \to (g_k)_o(0)$ quando $j \to \infty$. Logo $(f_j)_k(0)\Phi_k$ converge em $L^1(\mathbb{K}^n, E)$ para $(g_k)_o(0)\Phi_k$ e assim

$$(2) \qquad h_k = \lim_{j\to\infty} \{f_j - (f_j)_k(0)\}\Phi_k - \lim_{j\to\infty} (f_j)_k(0)\Phi_k$$

$$= \lim_{j\to\infty} f_j\Phi_k$$

onde o limite é tomado em $L^1(\mathbb{K}^n, E)$.

Seja h a função que satisfaz $h\Phi_k = h_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, $k \leq 0$. Então h está bem definida em $\mathbb{K}^n$ por (2) e $h \in L^1_{loc}(\mathbb{K}^n, E)$. Se $x \in \mathbb{K}^n$; $k, \ell \in \mathbb{Z}$, $\ell \leq 0$ e $\max\{|x|, q^{-k}\} \leq q^{-\ell}$, então segue por (2) que

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} f_j(\tau_x\Phi_k) &= \lim_{j\to\infty} (f_j\Phi_\ell)(\tau_x\Phi_k)\\ &= \lim_{j\to\infty} h_\ell(\tau_x\Phi_k)\\ &= \lim_{j\to\infty} (h\Phi_\ell)(\tau_x\Phi_k)\\ &= h(\tau_x\Phi_k)\end{aligned}$$

onde o limite é tomado em $L^1(\mathbb{K}^n, E)$. Temos então que $(f_j)_k(x) \to (h)_k(x)$ e assim $(f_j)_k(x)(\tau_x\Phi_k)$ converge em $L^1(\mathbb{K}^n, E)$ para $(h)_k(x)(\tau_x\Phi_k)$ e $\{(f_j - f_i) - (f_j - f_i)_k(x)\}(\tau_x\Phi_k)$ converge em $L^1(\mathbb{K}^n, E)$ para $\{(h - f_i) - (h - f_i)_k(x)\}(\tau_x\Phi_k)$ quando $j \to \infty$. Portanto fazendo j tender a infinito em (1) obtemos

$$q^{kn} \int_{|y-x|\leq q^{-k}} \|(h(y) - f_i(y)) - (h - f_i)_k(x)\|_E dy < \varepsilon$$

para todo $i \geq N$, $x \in \mathbb{K}^n$ e $k \in \mathbb{Z}$. Consequentemente

$$\| h - f_i \|_* < \varepsilon$$

para $i \geq N$ e assim (f_j) converge para h em $BMO(E)$.

3. A DESIGUALDADE DE FEFFERMAN-STEIN

O seguinte resultado é uma decomposição do tipo Calderón-Zygmund.

3.3.1. LEMA. *Seja* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{K}^n, E)$ *tal que* $Mf \in L^r(\mathbb{K}^n)$ *para algum* $0 < r < \infty$. *Então para cada* $t > 0$, *existe uma sequência de bolas disjuntas* $(B_{t,j})_{j\in\mathbb{N}}$, *tal que:*

(1) $$\frac{1}{|B|}\int_B \|f(y)\|_E dy \leq t$$

para toda bola B *tal que* $B_{t,j} \subsetneq B$;

(2) $$t < \frac{1}{|B_{t,j}|}\int_{B_{t,j}} \|f(y)\|_E dy \leq q^n t, \qquad j \in \mathbb{N};$$

(3) $$E_t = \{x \in \mathbb{K}^n : Mf(x) > t\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_{t,j};$$

(4) $$\|f(x)\|_E \leq t \quad \text{q.t.} \quad x \notin \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_{t,j}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Podemos assumir f real e positiva pois $Mf(x) = M(\|f(y)\|_E)(x)$.

PARTE 1. Fixemos $t > 0$. Se B é uma bola verificando $f_B > t$, então para todo $x \in B$ temos

$$t < f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(y)dy \leq Mf(x),$$

assim

$$t^r = \frac{1}{|B|}\int_B t^r dx \leq \frac{1}{|B|}\int_B (Mf(x))^r dx = |B|^{-1}\|Mf\|_r^r$$

e logo

(5) $$|B| \leq t^{-r}\|Mf\|_r^r .$$

Seja B uma bola tal que $f_B > t$. Se não existir uma bola maximal B' com $B \subset B'$, isto é, uma bola B' com $f_{B'} > t$ e para a qual não existe outra bola B'' tal que $B' \subset B''$ e $f_{B''} > t$, então poderemos construir uma sequência de bolas $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ satisfazendo $B_1 = B$, $B_i \subsetneqq B_{i+1}$ e $f_{B_i} > t$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim teremos $|B_{i+1}| > |B_i|$, $|B_{i+1}| \geq q^n |B_i|$ e portanto $|B_{i+1}| \geq q^{in}|B|$ para todo $i \in \mathbb{N}$, o que contradiz (5). Logo tem que existir uma bola maximal B' com $B \subset B'$.

O Teorema 1.5.8 implica que o conjunto de todas as bolas maximais é uma sequência $(B_{t,j})_{j \in \mathbb{N}}$.

Se $B_{t,j} \cap B_{t,i} \neq \phi$, então pelo Teorema 1.5.6 $B_{t,j} \subset B_{t,i}$ ou $B_{t,i} \subset B_{t,j}$, o que nos permite concluir que $B_{t,j} = B_{t,i}$, pois as bolas $B_{t,j}$ e $B_{t,i}$ são maximais. Logo a sequência $(B_{t,j})_{j \in \mathbb{N}}$ é formada por bolas disjuntas.

Se B é uma bola e $B_{t,j} \subsetneqq B$, então pelo fato de $B_{t,j}$ ser maximal, temos que $f_B \leq t$, o que demonstra (1).

PARTE 2. Sejam $B_{t,j} = x + \mathbb{B}^k$ e $B' = x + \mathbb{B}^{k-1}$. Então $B_{t,j} \subsetneqq B'$ e portanto por (1) temos

$$
\begin{aligned}
t &< \frac{1}{|B_{t,j}|} \int_{B_{t,j}} f(y)dy = \frac{q^n}{|B'|} \int_{B_{t,j}} f(y)dy \\
&\leq \frac{q^n}{|B'|} \int_{B'} f(y)dY \leq q^n t,
\end{aligned}
$$

o que demonstra (2).

PARTE 3. Se $x \in E_t$, existe uma bola B contendo x tal que $f_B > t$. Logo existe também uma bola maximal $B_{t,j}$ com $B \subset B_{t,j}$ e assim $x \in B_{t,j}$. Agora, se $x \in B_{t,j}$ para algum $j \in \mathbb{N}$, então

$$Mf(x) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|x+\mathbb{B}^k|} \int_{x+\mathbb{B}^k} f(y)\,dy$$

$$\geq \frac{1}{|B_{t,j}|} \int_{B_{t,j}} f(y)\,dy > t$$

e assim $x \in E_t$, o que demonstra (3).

PARTE 4. Como $f(x) \leq Mf(x)$ q.t.x (ver 2.2.3(2)) e

$$\{x : Mf(x) \leq t\} = (\bigcap_{j\in\mathbb{N}} B_{t,j})^c$$

por (3), então para quase todo $x \notin \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_{t,j}$ temos que $f(x) \leq$ $\leq Mf(x) \leq t$, o que demonstra (4).

3.3.2. TEOREMA. *Seja* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{K}^n, E)$ *tal que* $Mf \in L^r(\mathbb{K}^n)$ *para algum* $0 < r < \infty$. *Então para todo* $r \leq p < \infty$, *existe uma constante* C_p *dependendo somente de* p, *tal que*

(1) $$\int_{\mathbb{K}^n} (Mf(x))^p dx \leq C_p \int_{\mathbb{K}^n} (M^{\#}f(x))^p dx.$$

DEMONSTRAÇÃO. Podemos assumir f real e positiva pois $Mf(x) =$ $= M(\|f(y)\|_E)(x)$ e $M^{\#}(\|f(y)\|_E)(x) \leq M^{\#}f(x)$.

Para cada $t > 0$ consideremos uma sequência de bolas disjuntas $(B_{t,j})_{j\in\mathbb{N}}$ como no Lema 3.3.1. Então por 3.3.1(3) a função $\alpha(t)$ definida para todo $t > 0$ por

$$\alpha(t) = \sum_{j=1}^{\infty} |B_{t,j}|$$

verifica $\alpha(t) = |E_t|$.

Fixemos uma bola $B_o = B_{q^{-n-1}t,j_o}$, tomenos $A > 0$ e seja Θ_k o conjunto formado pelos $j \in \mathbb{N}$ tais que $B_{t,j} \subset B_{q^{-n-1}t,k}$. Se

$$B_o \subset \{x : M^{\#}f(x) > tA^{-1}\},$$

então

(2) $$\sum_{j \in \Theta_{j_o}} |B_{t,j}| \le |B_o|.$$

Agora, se

$$B_o \not\subset \{x : M^{\#}f(x) > tA^{-1}\},$$

então existe $x \in B_o$ tal que $M^{\#}f(x) \le tA^{-1}$ e assim

$$\frac{1}{|B_o|} \int_{B_o} |f(y) - f_{B_o}|dy \le M^{\#}f(x) \le tA^{-1}.$$

Por 3.3.1(2) temos que

$$f_{B_o} = \frac{1}{|B_{q^{-n-1}t,j_o}|} \int_{B_{q^{-n-1}t,j_o}} f(y)dy \le q^n q^{-n-1}t = q^{-1}t$$

e novamente por 3.3.1(2), segue que para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$(1 - q^{-1})t = t - q^{-1}t < \frac{1}{|B_{t,j}|} \int_{B_{t,j}} f(y)dy - f_{B_o}$$

$$= \frac{1}{|B_{t,j}|} \int (f(y) - f_{B_o})dy \le \frac{1}{|B_{t,j}|} \int_{B_{t,j}} |f(y) - f_{B_o}|dy.$$

Logo para todo $j \in \mathbb{N}$ temos

$$|B_{t,j}| \le t^{-1}(1 - q^{-1})^{-1} \int_{B_{t,j}} |f(y) - f_{B_o}|dy$$

e portanto

(3) $$\sum_{j \in \Theta_{j_o}} |B_{t,j}| \le t^{-1}(1 - q^{-1})^{-1} \sum_{j \in \Theta_{j_o}} \int_{B_{t,j}} |f(y) - f_{B_o}|dy$$

$$\leq t^{-1}(1 - q^{-1})^{-1}\int_{B_o} |f(y) - f_{B_o}|dy$$

$$= t^{-1}(1 - q^{-1})^{-1}|B_o|\left(\frac{1}{|B_o|}\int_{B_o} |f(y) - f_{B_o}|dy\right)$$

$$\leq t^{-1}(1 - q^{-1})^{-1}|B_o|tA^{-1} = A^{-1}(1 - q^{-1})^{-1}|B_o|.$$

Vamos considerar os seguintes conjuntos:

$$\Lambda_1 = \{k \in \mathbb{N} : B_{q^{-n-1}t,k} \subset \{x : M^{\#}f(x) > tA^{-1}\}\}$$

e

$$\Lambda_2 = \{k \in \mathbb{N} : B_{q^{-n-1}t,k} \not\subset \{x : M^{\#}f(x) > tA^{-1}\}\}.$$

Como $q^{-n-1}t < t$, então pela construção da sequência $(B_{q^{-n-1}t,i})_{i\in\mathbb{N}}$, para cada $j \in \mathbb{N}$, deve existir um $k \in \mathbb{N}$ tal que $B_{t,j} \subset B_{q^{-n-1}t,k}$, isto é, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $j \in \Theta_k$. Logo por (2) e (3) temos que

$$(4) \quad \alpha(t) = \sum_{j\in\mathbb{N}} |B_{t,j}| = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j\in\Theta_k} |B_{t,j}|$$

$$= \sum_{k\in\Lambda_1} \sum_{j\in\Theta_k} |B_{t,j}| + \sum_{k\in\Lambda_2} \sum_{j\in\Theta_k} |B_{t,j}|$$

$$\leq \sum_{k\in\Lambda_1} |B_{q^{-n-1}t,k}| + A^{-1}(1-q^{-1})^{-1} \sum_{k\in\Lambda_2} |B_{q^{-n-1}t,k}|$$

$$\leq |\{x : M^{\#}f(x) > tA^{-1}\}| + A^{-1}(1-q^{-1})^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} |B_{q^{-n-1}t,k}|$$

$$= |\{x : M^{\#}f(x) > tA^{-1}\}| + A^{-1}(1 - q^{-1})^{-1}\alpha(q^{-n-1}t).$$

Agora, para todo $N > 0$, o Teorema 20 do Apêndice diz que

$$I_N = \int_0^N pt^{p-1}\alpha(t)dt = \int_0^N pt^{p-r}t^{r-1}\alpha(t)dt$$

$$\leq \int_0^N pN^{p-r}t^{r-1}\alpha(t)dt$$

$$\leq pr^{-1}N^{p-r}\int_0^N rt^{r-1}|\{x : Mf(x) \geq t\}|dt$$

$$\leq pr^{-1}N^{p-r}\int_0^\infty rt^{r-1}|\{x : Mf(x) \geq t\}|dt$$

$$= pr^{-1}N^{p-r}\|Mf\|_r^r < \infty$$

e usando (4) obtemos que

$$I_N = \int_0^N pt^{p-1}\alpha(t)dt$$

$$\leq \int_0^N pt^{p-1}|\{x : M^\# f(x) > tA^{-1}\}|dt + A^{-1}(1-q^{-1})^{-1}\int_0^N pt^{p-1}\alpha(q^{-n-1}t)dt$$

$$= \int_0^N pt^{p-1}|\{x : M^\# f(x) > tA^{-1}\}|dt + A^{-1}(1-q^{-1})^{-1}q^{(n+1)p}\int_0^{Nq^{-n-1}} ps^{p-1}\alpha(s)ds$$

$$\leq \int_0^N pt^{p-1}|\{x : M^\# f(x) > tA^{-1}\}|dt + CA^{-1}I_N ,$$

onde $C = (1 - q^{-1})^{-1}q^{(n+1)p}$.

Tomando $A = 2C$ temos que

$$I_N \leq \int_0^N pt^{p-1}|\{x : M^\# f(x) > tA^{-1}\}|dt + \frac{1}{2} I_N$$

e consequentemente

(5) $$I_N \leq 2\int_0^N pt^{p-1}|\{x : M^\# f(x) > tA^{-1}\}|dt$$

$$= 2A^p \int_0^{NA^{-1}} pt^{p-1}|\{x : M^\# f(x) > t\}|dt$$

$$\leq 2A^p \int_o^{NA^{-1}} pt^{p-1}|\{x : M^{\#}f(x) \geq t\}|dt.$$

Se $M^{\#}f \notin L^p(\mathbb{K}^n)$, então a desigualdade (1) é trivialmente válida. Suponhamos então que $M^{\#}f \in L^p(\mathbb{K}^n)$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, quando fazemos N tender a infinito em ambos os membros de (5), obtemos que

$$\int_o^{\infty} pt^{p-1}\alpha(t)dt \leq 2A^p \int_o^{\infty} pt^{p-1}|\{x : M^{\#}f(x) > t\}|dt$$

e pelo Teorema 20 do Apêndice,

$$\int_{\mathbb{K}^n} (Mf(x))^p dx \leq C_p \int_{\mathbb{K}^n} (M^{\#}f(x))^p dx,$$

onde $C_p = 2A^p = 2^{p+1}(1 - q^{-1})^{-p}q^{(n+1)p^2}$.

3.3.3. OBSERVAÇÃO. A desigualdade 3.3.2(1) não é verdadeira quando $p = \infty$. Com efeito, a função $f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log|x|$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ não pertence a $L^{\infty}(\mathbb{K})$, mas está em $BMO(\mathbb{R})$ (ver 3.2.4); logo $\|Mf\|_{\infty} = \infty$ pois $|f(x)| \leq Mf(x)$ q.t.x e $\|M^{\#}f\|_{\infty} = \|f\|_{BMO(\mathbb{R})} < \infty$. Consequentemente a desigualdade 3.3.2(1) não é satisfeita para essa função quando $p = \infty$.

3.4. O TEOREMA DE INTERPOLAÇÃO DE MARCINKIEWICZ-RIVIERE

3.4.1. DEFINIÇÃO. *Sejam* E, F *espaços de Banach e* T *um operador linear definido em* $L_c^{\infty}(\mathbb{K}^n, E)$ *com valores em* $M(\mathbb{K}^n, F)$. *Diremos que* T *é do tipo forte* (L^{∞}, BMO) *se existir uma constante* $C > 0$, *tal que*

$$\|Tf\|_{BMO(F)} \leq C\|f\|_{L^{\infty}(E)} \tag{1}$$

para toda $f \in L_c^{\infty}(\mathbb{K}^n, E)$.

3.4.2. TEOREMA. *Sejam* E, F *espaços de Banach e* T *um operador linear* *de* $L^\infty(\mathbb{K}^n, E)$ *em* $M(\mathbb{K}^n, F)$, *do tipo forte* (r,r) *para algum* $1 < r < \infty$ *e do tipo forte* (L^∞, BMO). *Então* T *é do tipo forte* (p,p) *para todo* $r \le p < \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Por T ser um operador do tipo forte (r,r), do tipo forte (L^∞, BMO) e por 2.1.2(2), existem constantes C_1, C_2 e C_3, tais que

$$\|Mg\|_r \le C_1 \|g\|_{L^r(F)},$$

$$\|Tf\|_{L^r(F)} \le C_2 \|f\|_{L^r(E)}$$

e

$$\|Tf\|_{BMO(F)} \le C_3 \|f\|_{L^\infty(E)}$$

para toda $f \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$ e $g \in L^r(\mathbb{K}^n, F)$. Logo por 3.1.4(3) temos que

$$\|(M^\# \circ T)f\|_r = \|M^\#(Tf)\|_r \le 2\,\|M(Tf)\|_r$$

$$\le 2C_1 \|Tf\|_{L^r(F)} \le 2\,C_1 C_2 \|f\|_{L^r(E)}$$

e

$$\|(M^\# \circ T)f\|_\infty = \|M^\#(Tf)\|_\infty = \|Tf\|_{BMO(F)}$$

$$\le C_3 \|f\|_{L^\infty(E)}$$

para toda $f \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$, isto é, o operador $M^\# \circ T$ é do tipo forte (r,r) e (∞,∞).

Como $M^\# \circ T$ é um operador sublinear de $L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$ em $M(\mathbb{K}^n, \mathbb{R})$ que é do tipo forte (r,r) e (∞,∞), então o teorema de interpolação de Marcinkiewicz permite-nos concluir que, para todo $r \le p < \infty$, existe uma constante D_p dependendo somente de p, tal que

(1) $$\|M^\# \circ T\|_p \le D_p \|f\|_{L^p(E)}$$

para toda $f \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n,E)$.

Por outro lado, temos

$$\|M(Tf)\|_r \leq C_1 \|Tf\|_{L^r(F)} \leq C_1C_2 \|f\|_{L^r(E)}$$

para toda $f \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$. Assim, por 3.3.2, para cada $r \leq p < \infty$, existe uma constante C_p dependendo somente de p, tal que

$$\| M(Tf)\|_p \leq C_p \| M^\#(Tf)\|_p$$

para toda $f \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$. Logo por 2.2.3(2) e (1), temos que

$$\|Tf\|_{L^p(F)} \leq \|M(Tf)\|_p \leq C_p \| M^\#(Tf)\|_p \leq C_pD_p \|f\|_{L^p(E)}$$

para toda $f \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n,E)$, isto é, T é do tipo forte (p,p).

CAPÍTULO 4

OPERADORES INTEGRAIS SINGULARES VETORIAIS

Este Capítulo é o capítulo central deste trabalho. Nele estudamos operadores integrais singulares, cujos núcleos são aplicações definidas em $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \setminus \Delta$ e tomando valores no espaço de operadores lineares $L(E,F)$, onde E e F são espaços de Banach. No Teorema 4.1.4, damos condições sobre o núcleo, suficientes para que o operador seja do tipo fraco (1,1), tipo forte (L^∞, BMO) e tipo forte (p,p) $1 < p < \infty$. Em seguida, no Teorema 4.2.3, damos condições sobre a sequência de núcleos (K_j), associada a uma sequência de operadores integrais singulares (T_j), uniformemente limitados de $L^r(\mathbb{K}^n, E)$ em $L^r(\mathbb{K}^n, F)$ para algum $1 < r < \infty$, suficientes para que o operador diagonal $(f_j) \mapsto (T_j f_j)$ seja do tipo fraco $(L^1(\ell^q(E)), L^1(\ell^q(F)))$ e do tipo forte $(L^p(\ell^q(E)), L^p(\ell^p(F)))$, para todo $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$. Finalmente no Teorema 4.2.5, demonstramos que a extensão sequencial $(f_j) \mapsto (Tf_j)$ de um operador T satisfazendo as condições do Teorema 4.1.4, é do tipo fraco $(L^1(\ell^q(E)), L^1(\ell^q(F)))$ e do tipo forte $(L^p(\ell^q(E)), L^p(\ell^q(F)))$, para todo $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$.

Os trabalhos [5], [19], [12], [13] e [6] são referências para o caso do $\mathbb{R}^n$.

4.1. OPERADORES INTEGRAIS SINGULARES VETORIAIS

4.1.1. DEFINIÇÃO. *Sejam* E, F *espaços de Banach. Um operador linear* T *definido em* $L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$ *com valores em* $M(\mathbb{K}^n, F)$ *é um operador integral singular (de núcleo variável) se as seguintes condições estiverem satisfeitas:*

(IS1) *O operador* T *é limitado de* $L^r(\mathbb{K}^n, E)$ *em* $L^r(\mathbb{K}^n, F)$, *para algum* $1 < r \leq \infty$;

(IS2) *existe um núcleo localmente integrável* K, *definido em* $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \setminus \Delta$ *com valores em* $L(E,F)$, *tal que*

(1) $$Tf(x) = \int_{\mathbb{K}^n} K(x,y) f(y)\, dy$$

para toda $f \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$ *e para quase todo* $x \notin \operatorname{supp} f$.

4.1.2. DEFINIÇÃO. *Seja* T *um operador integral singular com núcleo* K. *Diremos que* K *verifica* (H_1) *se*

(1) $$\int_{|x-y'|>|y-y'|} \|K(x,y) - K(x,y')\|_{L(E,F)} dx \le C$$

para todo $y \neq y'$, *e diremos que* K *verifica* (H_∞) *se*

(2) $$\|K(x,y) - K(x,y')\|_{L(E,F)} \le C \frac{|y-y'|}{|x-y'|^{n+1}}$$

para $|x - y'| > |y - y'|$. *Mais ainda, diremos que* K *verifica* (H_r'), *para* $r = 1$ *ou* $r = \infty$, *se* $K'(x,y) = K(y,x)$ *verifica* (H_r).

4.1.3. OBSERVAÇÃO. A condição (H_∞) implica a condição (H_1). De fato, se $|y - y'| = q^\ell$ e $|x - y'| > |y - y'|$, então

$$\int_{|x-y'|>|y-y'|} \|K(x,y) - K(x,y')\|_{L(E,F)} dx \le C \int_{|x-y'|>|y-y'|} \frac{|y-y'|}{|x-y'|^{n+1}} dx$$

$$= C|y-y'| \int_{|x-y'|>|y-y'|} \frac{dx}{|x-y'|^{n+1}} = Cq^\ell \int_{|z|\ge q^{\ell+1}} \frac{dz}{|z|^{n+1}}$$

$$= Cq^\ell \sum_{k=\ell+1}^{\infty} \int_{|z|=q^k} \frac{dz}{|z|^{n+1}} = Cq^\ell \sum_{k=\ell+1}^{\infty} q^{-k(n+1)} |\{z : |z| = q^k\}|$$

$$= Cq^\ell \sum_{k=\ell+1}^{\infty} q^{-k(n+1)} (1 - q^{-n}) q^{kn} = Cq^\ell (1 - q^{-n}) \sum_{k=\ell+1}^{\infty} q^{-k}$$

$$= Cq^\ell (1 - q^{-n}) \sum_{j=0}^{\infty} (q^{-1})^{\ell+1+j} = Cq^{-1}(1 - q^{-n}) \sum_{j=0}^{\infty} (q^{-1})^j$$

$$= Cq^{-1}(1 - q^{-n})(1 - q^{-1})^{-1}.$$

Analogamente (H'_∞) implica (H'_1).

4.1.4. TEOREMA. *Seja* T *um operador integral singular com núcleo* K.

(i) *Se* K *satisfaz* (H_1), *então* T *é do tipo fraco* (1,1) *e do tipo forte* (p,p), *para* $1 < p \leq r$.

(ii) *Se* K *satisfaz* (H'_1), *então* T *é do tipo forte* (L^∞, BMO) *e do tipo forte* (p,p), *para* $r \leq p < \infty$.

(iii) *Se* K *satisfaz* (H_1) *e* (H'_1), *então* T *é do tipo forte* (p,p), *para* $1 < p < \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. PARTE 1. Se K satisfaz (H_1) então T é do tipo fraco (1,1). Com efeito, dada $f \in L^\infty_c(\mathbb{K}^n, E)$ e $\lambda > 0$ queremos estimar a medida do conjunto

$$\{x : \|Tf(x)\|_F > \lambda\}.$$

Seja $f = g + b = g + \sum_{j=1}^{\infty} b_j$ uma decomposição de Calderón - Zygmund de f associada a λ e $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de bolas disjuntas como em 2.3.1. Vamos então obter estimativas para as medidas de

$$\{x : \|Tg(x)\|_F > \lambda/2\} \quad \text{e} \quad \{x : \|Tb(x)\|_F > \lambda/2\}.$$

Suponhamos inicialmente que $1 < r < \infty$. Pela condição (IS1), existe uma constante $C_1 > 0$, tal que

$$\|Th\|_{L^r(F)} \leq C_1 \|h\|_{L^r(E)}$$

para toda $h \in L^\infty_c(\mathbb{K}^n, E)$. Como $g \in L^\infty_c(\mathbb{K}^n, E)$ (ver 2.3.2), então

$$(1)\quad |\{x : \|Tg(x)\|_F > \lambda/2\}| = |\{x : \|Tg(x)\|_F^r > \lambda^r 2^{-r}\}|$$

$$\leq 2^r\lambda^{-r}\int_{\mathbb{K}^n}\|Tg(x)\|_F^r dx$$

$$\leq 2^r\lambda^{-r}C_1^r\int_{\mathbb{K}^n}\|g(x)\|_E^r dx$$

$$= 2^r\lambda^{-r}C_1^r\int_{\mathbb{K}^n}\|g(x)\|_E^{r-1}\|g(x)\|_E dx$$

$$\leq 2^r\lambda^{-r}C_1^r(q^n\lambda)^{r-1}\|g\|_{L^1(E)}$$

$$\leq (2^r q^{n(r-1)}C_1^r)\lambda^{-1}\|f\|_{L^1(E)} .$$

Por outro lado, como $|b(x)| = \Sigma_j|b_j(x)|$ para todo $x \in \mathbb{K}^n$ e $b = f - g \in L^r(\mathbb{K}^n, E)$ pois $f, g \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$, então segue pelo Teorema da Convergência Dominada que $b = \Sigma_j b_j$ em $L^r(\mathbb{K}^n, E)$. Mas, T é por (IS1) um operador contínuo de $L^r(\mathbb{K}^n, E)$ em $L^r(\mathbb{K}^n, F)$ e assim $Tb = \Sigma_j Tb_j$ em $L^r(\mathbb{K}^n, F)$. Consequentemente $Tb(x) = \Sigma_j Tb_j(x)$ e $|Tb(x)| \leq \Sigma_j|Tb_j(x)|$, em quase todo ponto x.

Tomando agora

$$E_\lambda = \{x : \|Tb(x)\|_F > \lambda/2\} \quad \text{e} \quad D_\lambda = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j ,$$

vamos ter

$$(2)\quad |E_\lambda| = |E_\lambda \cap D_\lambda^c| + |E_\lambda \cap D_\lambda|$$

$$\leq |\{x \in D_\lambda^c : \|Tb(x)\|_F > \lambda/2\}| + |D_\lambda|$$

$$\leq 2\lambda^{-1}\int_{D_\lambda^c}\|Tb(x)\|_F dx + \lambda^{-1}\|f\|_{L^1(E)}$$

$$\leq 2\lambda^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{D_\lambda^c}\|Tb_j(x)\|_F dx + \lambda^{-1}\|f\|_{L^1(E)} .$$

Suponhamos que $B_j = y_j + \mathbb{B}^k$. Se $x \in B_j^c$ então $x \notin \operatorname{supp} b_j$ pois $\operatorname{supp} b_j \subset B_j$. Como b_j tem integral nula, então por 5.1.1(1), temos

$$\begin{aligned} Tb_j(x) &= \int_{\mathbb{K}^n} K(x,y) b_j(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{K}^n} K(x,y) b_j(y) dy - K(x,y_j) \int_{\mathbb{K}^n} b_j(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{K}^n} \{K(x,y) - K(x,y_j)\} b_j(y) dy \\ &= \int_{B_j} \{K(x,y) - K(x,y_j)\} b_j(y) dy \end{aligned}$$

e portanto pelo Corolário 8 do Apêndice, temos

$$\begin{aligned} \|Tb_j(x)\|_F &= \left\| \int_{B_j} \{K(x,y) - K(x,y_j)\} b_j(y)\, dy \right\|_F \\ &\leq \int_{B_j} \|\{K(x,y) - K(x,y_j)\} b_j(y)\|_F dy \\ &\leq \int_{B_j} \|K(x,y) - K(x,y_j)\|_{L(E,F)} \|b_j(y)\|_E dy. \end{aligned}$$

Se $x \in B_j^c$ e $y \in B_j$ então $|x - y_j| > q^k \geq |y - y_j|$; portanto segue por (H_1) que

$$\begin{aligned} \int_{B_j^c} \|Tb_j(x)\|_F dx &\leq \int_{B_j^c} \int_{B_j} \|K(x,y) - K(x,y_j)\|_{L(E,F)} \|b_j(y)\|_E dy dx \\ &= \int_{B_j} \|b_j(y)\|_E \int_{B_j^c} \|K(x,y) - K(x,y_j)\|_{L(E,F)} dx dy \\ &\leq \int_{B_j} \|b_j(y)\|_E \int_{|x-y_j| > |y-y_j|} \|K(x,y) - K(x,y_j)\|_{L(E,F)} dx dy \\ &\leq C \int_{B_j} \|b_j(y)\|_E dy \end{aligned}$$

e logo

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \int_{D_\lambda^c} \|Tb_j(x)\|_F dx \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_j^c} \|Tb_j(x)\|_F dx$$

$$\leq C \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_j} \|b_j(y)\|_E dy$$

$$= C \sum_{j=1}^{\infty} \|b_j\|_{L^1(E)}$$

$$= C \|b\|_{L^1(E)} \leq 2C \|f\|_{L^1(E)} .$$

De (2) e (3) segue então que

$$|E_\lambda| \leq (4C + 1)\lambda^{-1} \|f\|_{L^1(E)}$$

e consequentemente

$$|\{x : \|Tf(x)\|_F > \lambda\}| \leq |\{x : \|Tg(x)\|_F > \lambda/2\}| + |E_\lambda|$$

$$\leq (2^r q^{n(r-1)} C_1^r)\lambda^{-1} \|f\|_{L^1(E)} + (4C+1)\lambda^{-1} \|f\|_{L^1(E)}$$

$$\leq C'\lambda^{-1} \|f\|_{L^1(E)}$$

isto é, T é do tipo fraco $(1,1)$.

Suponhamos agora que $r = \infty$ e seja $C_1 > 0$, tal que

$$\|Th\|_{L^\infty(F)} \leq C_1 \|h\|_{L^\infty(E)}$$

para toda $h \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$. Como $\|g(x)\|_E \leq q^n\lambda$ q.t.x, então

$$\|Tg\|_{L^\infty(F)} \leq C_1 \|g\|_{L^\infty(E)} \leq C_1 q^n \lambda .$$

Além disso, a desigualdade (3) permanece verdadeira no caso $r = \infty$

e assim

$$|\{x : \|Tf(x)\|_F > 2C_1q^n\lambda\}|$$

$$\leq |\{x : \|Tb(x)\|_F > C_1q^n\lambda\}| + |\{x : \|Tg(x)\|_F > C_1q^n\lambda\}|$$

$$= |\{x : \|Tb(x)\|_F > C_1q^n\lambda\}|$$

$$\leq |\{x \in D_\lambda^c : \|Tb(x)\|_F > C_1q^n\lambda\}| + |D_\lambda|$$

$$\leq (C_1q^n)^{-1}\lambda^{-1} \int_{D_\lambda^c} \|Tb(x)\|_F dx + \lambda^{-1} \|f\|_{L^1(E)}$$

$$\leq (C_1q^n)^{-1}\lambda^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{D_\lambda^c} \|Tb_j(x)\|_F dx + \lambda^{-1} \|f\|_{L^1(E)}$$

$$\leq 2C(C_1q^n)^{-1}\lambda^{-1} \|f\|_{L^1(E)} + \lambda^{-1} \|f\|_{L^1(E)}$$

$$= C'\lambda^{-1} \|f\|_{L^1(E)}$$

isto é, T é do tipo fraco $(1,1)$.

PARTE 2. Se K satisfaz (H_1) então T é do tipo forte (p,p) para $1 < p \leq r$. De fato, como já vimos que T é do tipo fraco $(1,1)$, e por hipótese, T é do tipo forte (r,r), então pelo teorema de interpolação de Marcinkiewicz (ver Apêndice, Teorema 19) segue que T é do tipo forte (p,p), para $1 < p \leq r$.

PARTE 3. Se K satisfaz (H_1') então T é do tipo forte (L^∞, BMO). De fato, se $r = \infty$ então existe uma constante $C_1 > 0$, tal que

$$\|Th\|_{L^\infty(F)} \leq C_1 \|h\|_{L^\infty(E)}$$

para toda $h \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$. Portanto por 2.1.2(2) e 3.1.2(3), temos que

$$\|Tf\|_{BMO(F)} = \|M^{\#}(Tf)\|_{\infty} \leq \|2M(Tf)\|_{\infty} \leq$$

$$\leq 2\,\|Tf\|_{L^{\infty}(F)} \leq 2C_1\,\|f\|_{L^{\infty}(E)}$$

para toda $f \in L^{\infty}_{c}(\mathbb{K}^n, E)$, isto é, T é do tipo forte (L^{∞}, BMO).

Suponhamos agora $1 < r < \infty$ e seja $C_1 > 0$ tal que

$$\|Th\|_{L^r(F)} \leq C_1\,\|h\|_{L^r(E)}, \quad h \in L^{\infty}_{c}(\mathbb{K}^n, E).$$

Fixamos $f \in L^{\infty}_{c}(\mathbb{K}^n, E)$. Se B é a bola $x_o + \mathbb{B}^k$ de $\mathbb{K}^n$, então tomamos $f_1 = fI_B$, $f_2 = f - f_1 = fI_{B^c}$ e

$$a_B = \int_{\mathbb{K}^n} K(x_o, y)\,f_2(y)\,dy = \int_{B^c} K(x_o, y)\,f(y)\,dy.$$

Logo

$$(4) \quad \frac{1}{|B|}\int_B \|Tf(x) - a_B\|_F\,dx =$$

$$= \frac{1}{|B|}\int_B \|Tf_1(x) + Tf_2(x) - a_B\|_F\,dx$$

$$\leq \frac{1}{|B|}\int_B \|Tf_1(x)\|_F\,dx + \frac{1}{|B|}\int_B \|Tf_2(x) - a_B\|_F\,dx$$

e pela desigualdade de Hölder

$$(5) \quad \frac{1}{|B|}\int_B \|Tf_1(x)\|_F\,dx = \frac{1}{|B|}\int_B \|Tf_1(x)\|_F\,I_B(x)\,dx$$

$$\leq \frac{1}{|B|}\,\|Tf_1\|_{L^r(E)}\,\|I_B\|_{r'} \leq \frac{C_1}{|B|}\,\|f_1\|_{L^r(E)}\,|B|^{1/r'}$$

$$= C_1|B|^{-1/r}\left(\int_B \|f(x)\|_E^r\right)^{1/r}$$

$$\leq C_1|B|^{-1/r}\left(\|f\|^r_{L^{\infty}(E)}\,|B|\right)^{1/r} = C_1\,\|f\|_{L^{\infty}(E)}.$$

Se $x \in B$, então $x_o, x \notin \operatorname{supp} f_2 \subset B^c$ e portanto por 5.1.1(1), segue que

$$\|Tf_2(x) - a_B\|_F =$$

$$= \left\| \int_{\mathbb{K}^n} K(x,y) f_2(y)dy - \int_{B^c} K(x_o,y) f(y)dy \right\|_F$$

$$= \left\| \int_{B^c} \{K(x,y) - K(x_o,y)\} f(y)dy \right\|_F$$

$$\leq \int_{B^c} \|K(x,y) - K(x_o,y)\|_{L(E,F)} \|f(y)\|_E dy .$$

Porém, se $y \in B^c$ e $x \in B$ então temos $|y - x_o| > q^k \geq |x - x_o|$; assim por (H_1'), segue que

$$(6)\quad \frac{1}{|B|} \int_B \|Tf_2(x) - a_B\|_F dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{|B|} \int_B \int_{B^c} \|K(x,y) - K(x_o,y)\|_{L(E,F)} \|f(y)\|_E dydx$$

$$\leq \frac{\|f\|_{L^\infty(E)}}{|B|} \int_B \int_{B^c} \|K(x,y) - K(x_o,y)\|_{L(E,F)} dydx$$

$$\leq \frac{\|f\|_{L^\infty(E)}}{|B|} \int_B \int_{|y-x_o|>|x-x_o|} \|K(x,y) - K(x_o,y)\|_{L(E,F)} dydx$$

$$\leq \frac{\|f\|_{L^\infty(E)}}{|B|} C|B| = C\|f\|_{L^\infty(E)} .$$

Logo, pelas estimativas (4), (5) e (6), temos que

$$\frac{1}{|B|} \int_B \|Tf(x) - a_B\|_F dx \leq C_1 \|f\|_{L^\infty(E)} + C\|f\|_{L^\infty(E)} = C' \|f\|_{L^\infty(E)}$$

para toda bola B de $\mathbb{K}^n$ e para todo $x \in B$. Portanto por 3.1.4(1), temos

$$M^{\#}(Tf)(x) = 2 \sup_{x \in B} \inf_{\alpha \in F} \frac{1}{|B|} \int_B \|Tf(y) - \alpha\|_F dy$$

$$\leq 2 \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B \|Tf(y) - a_B\|_F dy$$

$$\leq 2C' \|f\|_{L^\infty(E)}$$

e consequentemente

$$\|Tf\|_{BMO(F)} = \|M^{\#}(Tf)\|_\infty \leq 2C' \|f\|_{L^\infty(E)} .$$

PARTE 4. Se K satisfaz (H_1') então T é do tipo forte (p,p) para $r \leq p < \infty$. De fato, como já vimos que T é do tipo (L^∞, BMO), e por hipótese T é do tipo forte (r,r), então segue por 3.4.2 que T é do tipo forte (p,p), para $r \leq p < \infty$.

4.1.5. COROLÁRIO. *Seja* T *um operador integral singular com núcleo* K. *Se* K *satisfaz* (H_∞), *então* T *é do tipo fraco* (1,1) *e do tipo forte* (p,p), *para* $1 < p \leq r$. *Se* K *satisfaz* (H_∞'), *então* T *é do tipo forte* (L^∞, BMO) *e do tipo forte* (p,p), *para* $r \leq p < \infty$. *Em particular, se* K *satisfaz* (H_∞) *e* (H_∞'), *então* T *é do tipo forte* (p,p), *para* $1 < p < \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Consequência imediata de 4.1.3 e 4.1.4.

4.1.6. DEFINIÇÃO. *Sejam* E, F *espaços de Banach. Um operador linear* T *definido em* $L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$ *com valores em* $M(\mathbb{K}^n, F)$ *é um operador integral singular do tipo convolução se as seguintes condições estiverem satisfeitas:*

(ISC1) *O operador* T *é limitado de* $L^r(\mathbb{K}^n, E)$ *em* $L^r(\mathbb{K}^n, F)$, *para algum* $1 < r \leq \infty$;

(ISC2) *existe um núcleo localmente integrável* K, *definido em* $\mathbb{K}^n\setminus\{0\}$ *com valores em* L(E,F), *tal que*

(1) $$Tf(x) = \int_{\mathbb{K}^n} K(x-y)f(y)dy$$

para toda $f \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$ *e para quase todo* $x \notin \operatorname{supp} f$.

4.1.7. COROLÁRIO. *Seja* T *um operador integral singular do tipo convolução com núcleo* K. *Se* K *satisfaz*

(1) $$\int_{|x|>|y|} \|K(x-y) - K(x)\|_{L(E,F)} dx \leq C, \qquad y \neq 0,$$

então T *é do tipo fraco* (1,1), *do tipo forte* (L^∞, BMO) *e do tipo forte* (p,p) *para* $1 < p < \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. PARTE 1. O núcleo $K(x,y) = K(x-y)$ é localmente integrável. De fato, K(x,y) é mensurável pois é composto de duas funções mensuráveis.

Seja $(x_o, y_o) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \setminus \Delta$. Como Δ é fechado, então existe uma bola $B = (x_o + \mathbb{B}^r) \times (y_o + \mathbb{B}^r)$ de $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ tal que $B \cap \Delta = \phi$.

Se $x \in x_o + \mathbb{B}^r$, então $x + \mathbb{B}^r = x_o + \mathbb{B}^r$ e portanto $x + y_o + \mathbb{B}^r = x_o + y_o + \mathbb{B}^r$. Se $0 \in x_o + y_o + \mathbb{B}^r$, então $x_o + y_o + \mathbb{B}^r = \mathbb{B}^r$ e portanto $x_o + \mathbb{B}^r = y_o + \mathbb{B}^r$. Assim $B \cap \Delta \neq \phi$, o que é uma contradição. Logo devemos ter $0 \notin x_o + y_o + \mathbb{B}^r$.

Como K(z) é localmente integrável e a bola $x_o + y_o + \mathbb{B}^r$ é compacta e está contida em $\mathbb{K}^n\setminus\{0\}$, então

$$\iint_B \|K(x,y)\|_{L(E;F)} dxdy = \int_{x_o+\mathbb{B}^r} \int_{y_o+\mathbb{B}^r} \|K(x-y)\|_{L(E,F)} dydx =$$

$$= \int_{x_o+\mathbb{B}^r} \int_{x+y_o+\mathbb{B}^r} \|K(z)\|_{L(E,F)} dzdx = \int_{x_o+\mathbb{B}^r} \int_{x_o+y_o+\mathbb{B}^r} \|K(z)\|_{L(E,F)} dzdx$$

$$= |x_o + \mathbb{B}^r| \int_{x_o+y_o+\mathbb{B}^r} \|K(z)\|_{L(E,F)} dz = q^{-rn} \int_{x_o+y_o+\mathbb{B}^r} \|K(z)\|_{L(E,F)} dz$$

$$< \infty,$$

e assim podemos concluir que $K(x,y)$ é localmente integrável.

PARTE 2. O núcleo $K(x,y)$ satisfaz (H_1) e (H_1'). De fato, se $y \neq y'$ tomamos $u = x - y'$, $v = y - y'$ e temos então por (1) que

$$\int_{|x-y'|>|y-y'|} \|K(x,y) - K(x,y')\|_{L(E,F)} dx =$$

$$= \int_{|x-y'|>|y-y'|} \|K(x-y) - K(x-y')\|_{L(E,F)} dx$$

$$= \int_{|u|>|v|} \|K(u-v) - K(u)\|_{L(E,F)} du$$

$$\leq C.$$

Portanto o núcleo $K(x,y)$ satisfaz (H_1). Da mesma forma mostramos que $K(x,y)$ satisfaz (H_1').

PARTE 3. Como o núcleo $K(x,y)$ satisfaz (H_1) e (H_1'), então por 4.1.4 temos que T é do tipo fraco $(1,1)$, do tipo forte (L^∞, BMO) e do tipo forte (p,p) para $1 < p < \infty$.

4.1.8. COROLÁRIO. *Seja* T *um operador integral singular do tipo convolução com núcleo* K. *Se* K *satisfaz*

$$(1) \qquad \|K(x-y) - K(x)\|_{L(E,F)} \leq C \frac{|y|}{|x|^{n+1}}, \quad |x| > |y|,$$

então T *é do tipo fraco* $(1,1)$, *do tipo forte* (L^∞, BMO) *e do tipo forte* (p,p) *para* $1 < p < \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. PARTE 1. O núcleo $K(x,y) = K(x-y)$ é localmente integrável (ver a primeira parte da demonstração de 4.1.7).

PARTE 2. O núcleo $K(x,y)$ satisfaz (H_∞) e (H'_∞). De fato, se $|x-y'| > |y-y'|$ então temos por (1) que

$$\|K(x,y) - K(x,y')\|_{L(E,F)} = \|K(x-y) - K(x-y')\|_{L(E,F)}$$

$$= \|K((x-y') - (y-y')) - K(x-y')\|_{L(E,F)}$$

$$\leq C \frac{|y-y'|}{|x-y'|^{n+1}},$$

e portanto $K(x,y)$ satisfaz (H_∞). Da mesma forma mostramos que $K(x,y)$ satisfaz (H'_∞).

PARTE 3. Como o núcleo $K(x,y)$ é localmente integrável e satisfaz (H_∞) e (H'_∞), então por 4.1.5 temos que T é do tipo fraco (1,1), do tipo forte (L^∞, BMO) e do tipo forte (p,p) para $1 < p < \infty$.

4.2. EXTENSÃO SEQUENCIAL

4.2.1. TEOREMA. *Seja* (T_j) *uma sequência de operadores integrais singulares e* (K_j) *a sequência de núcleos associados. Suponhamos que para algum* $1 < r \leq \infty$ *e para todo* $j \in \mathbb{N}$ *temos*

(1) $$\|T_j g\|_{L^r(F)} \leq C \|g\|_{L^r(E)}, \qquad g \in L^\infty_c(\mathbb{K}^n, E);$$

(2) $$\int_{|x-y'|>|y-y'|} \|K_j(x,y) - K_j(x,y')\|_{L(E,F)} dx \leq C, \qquad y \neq y'$$

e

(3) $$\int_{|y-x'|>|x-x'|} \|K_j(x,y) - K_j(x',y)\|_{L(E,F)} dy \leq C, \qquad x \neq x'.$$

Então para cada $1 \leq p \leq \infty$, *existe uma constante* A_p, *dependendo somente de* $n, r,$ C *e* p, *tal que*

(4) $$|\{x : \|T_j f(x)\|_F > \lambda\}| \leq A_1 \lambda^{-1} \|f\|_{L^1(E)} ;$$

(5) $$\|T_j f\|_{L^p(F)} \leq A_p \|f\|_{L^p(E)}, \qquad 1 < p < \infty;$$

e

(6) $$\|T_j f\|_{BMO(F)} \leq A_\infty \|f\|_{L^\infty(E)},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$ *e* $f \in L^\infty_c(\mathbb{K}^n, E)$. *Mais ainda, a desigualdade* (5) *pode ser estendida para toda* $f \in L^p(\mathbb{K}^n, E)$.

DEMONSTRAÇÃO. Consequência imediata do fato que, na demonstração do Teorema 4.1.4, as constantes A_p dependem somente de $n, r,$ C e p.

4.2.2. COROLÁRIO. *Seja* (T_j) *uma sequência de operadores integrais singulares do tipo convolução e* (K_j) *a sequência de núcleos associada. Suponhamos que para algum* $1 < r \leq \infty$ *e para todo* $j \in \mathbb{N}$ *temos*

(1) $$\|T_j g\|_{L^r(F)} \leq C \|g\|_{L^r(E)}, \qquad g \in L^\infty_c(\mathbb{K}^n, E);$$

e

(2) $$\int_{|x|>|y|} \|K_j(x - y) - K_j(x)\|_{L(E,F)} dx \leq C, \qquad y \neq 0.$$

Então para cada $1 \leq p \leq \infty$, *existe uma constante* A_p, *dependendo somente de* $n, r,$ C *e* p, *tal que*

(3) $$|\{x : \|T_j f(x)\|_F > \lambda\}| \leq A_1 \lambda^{-1} \|f\|_{L^1(E)} ;$$

(4) $$\|T_j f\|_{L^p(E)} \leq A_p \|f\|_{L^p(E)}, \qquad 1 < p < \infty;$$

e

(5) $$\|T_j f\|_{BMO(F)} \leq A_\infty \|f\|_{L^\infty(E)},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$ *e* $f \in L^\infty_c(\mathbb{K}^n, E)$. *Mais ainda, a desigualdade* (4) *pode ser estendida para toda* $f \in L^p(\mathbb{K}^n, E)$.

DEMONSTRAÇÃO. Podemos concluir como na demonstração do Corolário 4.1.7, que as condições 4.2.1(2) e 4.2.1(3) estão satisfeitas para $K_j(x,y) = K_j(x-y)$. Logo o resultado segue de 4.2.1.

4.2.3. TEOREMA. *Seja* (T_j) *uma sequência de operadores integrais singulares,* (K_j) *a sequência de núcleos associada e seja* $1 < q < \infty$. *Suponhamos que para algum* $1 < r \leq \infty$ *temos*

(1) $$\|T_j g\|_{L^r(F)} \leq C\|g\|_{L^r(E)}, \qquad g \in L^\infty_c(\mathbb{K}^n, E), \qquad j \in \mathbb{N};$$

(2) $$\int_{|x-y'|>|y-y'|} \sup_j \|K_j(x,y) - K_j(x,y')\|_{L(E,F)} dx \leq C, \qquad y \neq y'$$

e

(3) $$\int_{|y-x'|>|x-x'|} \sup_j \|K_j(x,y) - K_j(x',y)\|_{L(E,F)} dy \leq C, \qquad x \neq x'.$$

Então para cada $1 \leq p < \infty$, *existe uma constante* A_p, *dependendo somente de* n, r, C, q *e* p, *tal que*

(4) $$\left|\{x : \sum_{j=1}^{\infty} \|T_j f_j(x)\|_F^q > \lambda^q\}\right| \leq A_1 \lambda^{-1} \|(f_j)\|_{L^1(\ell^q(E))}$$

e

(5) $$\|(T_j f_j)\|_{L^p(\ell^q(F))} \leq A_p \|(f_j)\|_{L^p(\ell^q(E))}, \qquad 1 < p < \infty,$$

para todo $\lambda > 0$ *e* $f = (f_j) \in L^\infty_c(\mathbb{K}^n, \ell^q(E))$. *Mais ainda, a desigualdade* (5) *pode ser estendida para toda* $f = (f_j) \in L^p(\mathbb{K}^n, \ell^q(E))$.

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideremos o operador linear $\tilde{T}_m$ de $L_c^\infty(\mathbb{K}^n, \ell^q(E))$ em $M(\mathbb{K}^n, \ell_m^q(F))$ definido por

$$(6) \qquad \tilde{T}_m(f_j) = (T_j f_j)_{1 \leq j \leq m}, \qquad (f_j) \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, \ell^q(E)).$$

Pelo Teorema 4.2.1, existe uma constante C_q, dependendo somente de n, r, C e q, tal que

$$\|T_j g\|_{L^q(F)} \leq C_q \|g\|_{L^q(E)}, \qquad g \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E), \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Portanto, se $f = (f_j) \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, \ell^q(E))$ temos

$$(7) \qquad \|\tilde{T}_m(f_j)\|_{L^q(\ell^q(F))} = \left(\int_{\mathbb{K}^n} \sum_{j=1}^{m} \|T_j f_j(x)\|_F^q dx\right)^{1/q}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbb{K}^n} \|T_j f_j(x)\|_F^q dx\right)^{1/q}$$

$$\leq C_q \left(\int_{\mathbb{K}^n} \sum_{j=1}^{m} \|f_j(x)\|_F^q dx\right)^{1/q}$$

$$\leq C_q \|(f_j)\|_{L^q(\ell^q(E))}$$

e assim $\tilde{T}_m$ é do tipo forte (q,q).

Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideremos agora o núcleo $\tilde{K}_m$ de $\mathbb{K}^n \times \times \mathbb{K}^n \setminus \Delta$ em $L(\ell^q(E), \ell^q(F))$ definido por

$$(8) \qquad \tilde{K}_m(x,y)(\alpha_j) = (K_j(x,y)\alpha_j)_{1 \leq j \leq m}, \qquad (\alpha_j) \in \ell^q(E).$$

Temos que

$$(9) \qquad \|\tilde{K}_m(x,y)\|_{L(\ell^q(E), \ell^q(F))} =$$

$$= \sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{m} \|K_j(x,y)\alpha_j\|_F^q\right)^{1/q};\ \|(\alpha_j)\|_{\ell^q(E)} = 1\right\} \leq$$

$$\leq \sup \{ (\sum_{j=1}^{m} \|K_j(x,y)\|^q_{L(E,F)} \|\alpha_j\|^q_E)^{1/q};\ \|(\alpha_j)\|_{\ell^q(E)} = 1\}$$

$$\leq \sup_{1\leq j\leq m} \|K_j(x,y)\|_{L(E,F)}$$

e portanto $\tilde{K}_m$ é localmente integrável.

Temos também que

$$\|(K_j(x,y)f_j(y))_{1\leq j\leq m}\|_{\ell^q(F)} = (\sum_{j=1}^{m} \|K_j(x,y)f_j(y)\|^q_F)^{1/q}$$

$$\leq m^{1/q} \sup_{1\leq j\leq m} \|K_j(x,y)f_j(y)\|_F .$$

Portanto, como $y \mapsto K_j(x,y)f_j(y)$ é integrável para quase todo $x \notin$ $\notin \operatorname{supp} f$ (ver 4.1.1(1)), então $y \mapsto (K_j(x,y)f_j(y))_{1\leq j\leq m}$ também é integrável para quase todo $x \notin \operatorname{supp} f$. Logo segue pelo Corolário 11 do Apêndice que, para quase todo $x \notin \operatorname{supp} f$, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_m f(x) &= (T_j f_j(x))_{1\leq j\leq m} \\
&= (\int_{\mathbb{K}^n} K_j(x,y) f_j(y)\, dy)_{1\leq j\leq m} \\
&= \int_{\mathbb{K}^n} (K_j(x,y) f_j(y))_{1\leq j\leq m} dy \\
&= \int_{\mathbb{K}^n} \tilde{K}_m(x,y) f(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Consequentemente $\tilde{T}_m$ é um operador integral singular com núcleo $\tilde{K}_m$.

Por outro lado, da mesma forma que obtemos (9) podemos obter

$$\|\tilde{K}_m(x,y) - \tilde{K}_m(u,v)\|_{L(\ell^q(E),\, \ell^q(F))} \leq \sup_{1\leq j\leq m} \|K_j(x,y) - K_j(u,v)\|_{L(E,F)}.$$

Logo, de (2) e (3) segue que, se $y \neq y'$, então

$$(10)\qquad \int_{|x-y'|>|y-y'|} \|\tilde{K}_m(x,y) - \tilde{K}_m(x,y)\|_{L(\ell^q(E),\ell^q(F))}\,dx$$

$$\leq \int_{|x-y'|>|y-y'|} \sup_{1\leq j\leq m} \|K_j(x,y) - K_j(x,y')\|_{L(E,F)}\,dx \leq C$$

e se $x \neq x'$, então

$$(11)\qquad \int_{|y-x'|>|x-x'|} \|\tilde{K}_m(x,y) - \tilde{K}_m(x',y)\|_{L(\ell^q(E),\ell^q(F))}\,dy$$

$$\leq \int_{|y-x'|>|x-x'|} \sup_{1\leq j\leq m} \|K_j(x,y) - K_j(x',y)\|_{L(E,F)}\,dy \leq C.$$

Com as desigualdades (7), (10) e (11) mostramos que as sequências $(\tilde{T}_m)$ e $(\tilde{K}_m)$ satisfazem as condições do Teorema 5.2.1. Logo, para cada $1 \leq p < \infty$, existe uma constante A_p, dependendo somente de n, r, C_q e p, tal que

$$|\{x : \sum_{j=1}^{m} \|T_j f_j(x)\|_F^q > \lambda^q\}| \leq A_1 \lambda^{-1} \|(f_j)\|_{L^1(\ell^q(E))}$$

e

$$\|(T_j f_j)_{1\leq j\leq m}\|_{L^p(\ell^q(F))} \leq A_p \|(f_j)\|_{L^p(\ell^q(E))}, \qquad 1 < p < \infty,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$ e $f = (f_j) \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, \ell^q(E))$. Fazendo então m tender a infinito obtemos (4) e (5).

4.2.4. COROLÁRIO. *Seja* (T_j) *uma sequência de operadores integrais singulares do tipo convolução,* (K_j) *a sequência de núcleos associada e seja* $1 < q < \infty$. *Suponhamos que para algum* $1 < r \leq \infty$ *temos*

$$(1)\qquad \|T_j g\|_{L^r(F)} \leq C\|g\|_{L^r(E)}, \qquad g \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E), \qquad j \in \mathbb{N}$$

e

$$(2) \qquad \int_{|x|>|y|} \sup_j \|K_j(x-y) - K_j(x)\|_{L(E,F)} dx \le C, \qquad y \neq 0.$$

Então para cada $1 \le p < \infty$, *existe uma constante* A_p, *dependendo somente de* n, r, C, q *e* p, *tal que*

$$(3) \qquad |\{x : \sum_{j=1}^{\infty} \|T_j f_j(x)\|_F^q > \lambda^q\}| \le A_1 \lambda^{-1} \|(f_j)\|_{L^1(\ell^q(E))}$$

e

$$(4) \qquad \|(T_j f_j)\|_{L^p(\ell^q(F))} \le A_p \|(f_j)\|_{L^p(\ell^q(E))}, \qquad 1 < p < \infty,$$

para todo $\lambda > 0$ *e* $f = (f_j) \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, \ell^q(E))$. *Mais ainda, a desigualdade* (4) *pode ser estendida para toda* $f = (f_j) \in L^p(\mathbb{K}^n, \ell^q(E))$.

DEMONSTRAÇÃO. Podemos mostrar facilmente que a condição 4.2.4(2) implica 4.2.3(2) e 4.2.3(3) para $K_j(x,y) = K_j(x - y)$. Logo o resultado segue por 4.2.3.

4.2.5. COROLÁRIO. *Seja* T *um operador integral singular com núcleo* K *satisfazendo* (H_1) *e* (H_1'). *Se* $1 < q < \infty$, *então para toda* $f = (f_j) \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, \ell^q(E))$ *e* $\lambda > 0$, *temos*

$$(1) \qquad |\{x : \sum_{j=1}^{\infty} \|Tf_j(x)\|_F^q > \lambda^q\}| \le A_1 \lambda^{-1} \|(f_j)\|_{L^1(\ell^q(E))}$$

e

$$(2) \qquad \|(Tf_j)\|_{L^p(\ell^q(F))} \le A_p \|(f_j)\|_{L^p(\ell^q(E))}, \qquad 1 < p < \infty.$$

Mais ainda, a desigualdade (2) *pode ser estendida para toda* $f = (f_j) \in L^p(\mathbb{K}^n, \ell^q(E))$.

DEMONSTRAÇÃO. Consequência imediata da aplicação do Teorema 4.2.3 às sequências constantes $T_j = T$ e $K_j = K$.

4.2.6. COROLÁRIO. *Seja* T *um operador integral singular do tipo convolução com núcleo* K *satisfazendo* 4.1.7(1) *e seja* $1 < q < \infty$. *Então para toda* $f = (f_j) \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, \ell^q(E))$ *e* $\lambda > 0$ *temos*

$$(1) \qquad |\{x : \sum_{j=1}^{\infty} \|Tf_j(x)\|_F^q > \lambda^q\}| \leq A_1 \lambda^{-1} \|(f_j)\|_{L^1(\ell^q(E))}$$

e

$$(2) \qquad \|(Tf_j)\|_{L^p(\ell^q(F))} \leq A_p \|(f_j)\|_{L^p(\ell^q(E))}, \qquad 1 < p < \infty.$$

Mais ainda, a desigualdade (2) *pode ser estendida para toda* $f = (f_j) \in L^p(\mathbb{K}^n, \ell^q(E))$.

DEMONSTRAÇÃO. Consequência imediata da aplicação do Corolário 4.2.4 às sequências constantes $T_j = T$ e $K_j = K$.

4.2.7. OBSERVAÇÃO. Sejam T, K e $1 < q < \infty$ como no Corolário 4.2.6. Se $1 < r \leq \infty$ e $C > 0$ são constantes tais que

$$\|Tg\|_{L^r(F)} \leq C \|g\|_{L^r(E)}, \qquad g \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$$

e

$$\int_{|x|>|y|} \|K(x-y) - K(x)\|_{L(E,F)} dx \leq C, \qquad y \neq 0,$$

então a constante A_p do Corolário 4.2.6 depende somente de n, r, C, q e p.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES ÀS FUNÇÕES MAXIMAIS

Neste Capítulo aplicamos o resultado sobre extensão sequencial de um operador integral singular do tipo convolução, demonstrado no Capítulo 4 (Corolário 4.2.6), para obter teoremas maximais dos tipos de F. Zó e de Fefferman-Stein, no contexto dos corpos locais.

Os trabalhos [22], [4], [5], [19], [6] e [15] são referências para o caso do $\mathbb{R}^n$.

5.1. O TEOREMA MAXIMAL DE F. ZÓ EM CORPOS LOCAIS

5.1.1. DEFINIÇÃO. *Seja* $\varphi \in L^1(\mathbb{K}^n)$ *e para cada* $t \in \mathbb{K}^*$ *tomemos* $\varphi_t(x) = |t|^{-n}\varphi(t^{-1}x)$. *Então, o operador maximal* M^φ, *definido sobre* $L_c^\infty(\mathbb{K}^n)$, *é dado por*

$$M^\varphi f(x) = \sup_{t \neq 0} |(f * \varphi_t)(x)|.$$

5.1.2. OBSERVAÇÃO. Se $\varphi \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n)$, então M^φ é do tipo fraco (1,1) e do tipo forte (p,p), $1 < p < \infty$. De fato, seja B uma bola de centro na origem de $\mathbb{K}^n$ tal que $\operatorname{supp}\varphi \subset B$ e seja $C > 0$ tal que $|\varphi(y)| \leq C$ q.t.y. Então

$$|\varphi(y)| \leq CI_B(y), \quad \text{q.t.y}$$

e portanto

$$(1) \qquad |\varphi_t(y)| = |t|^{-n}|\varphi(t^{-1}y)| \leq C|t|^{-n}I_B(t^{-1}y)$$

$$= C|t|^{-n}I_{tB}(y) = C|B|\,|tB|^{-1}I_{tB}(y)$$

para quase todo $y \in \mathbb{K}^n$. Logo

$$|(f*\varphi_t)(x)| \leq \int_{\mathbb{K}^n} |f(x-y)||\varphi_t(y)|dy$$

$$\leq C|B||tB|^{-1}\int_{tB}|f(x-y)|dy$$

$$= C|B|\frac{1}{|x+tB|}\int_{x+tB}|f(y)|dy$$

$$\leq C|B|Mf(x)$$

para todo $x \in \mathbb{K}^n$. Consequentemente segue por 2.1.2 que M^{φ} é do tipo fraco (1,1) e do tipo forte (p,p), para $1 < p < \infty$.

5.1.3. OBSERVAÇÃO. Se $\varphi \in C_c(\mathbb{K}^n)$ e $f \in L_c^{\infty}(\mathbb{K}^n)$, então a aplicação $t \mapsto (f*\varphi_t)(x)$ é contínua para todo $x \in \mathbb{K}^n$. De fato, fixemos $t \in \mathbb{K}^*$, $x \in \mathbb{K}^n$ e seja (t_j) uma sequência de elementos de $\mathbb{K}^*$ convergindo para t. Como φ é contínua então as funções $y \mapsto f(x-y)\varphi_{t_j}(y)$ convergem pontualmente para a função $y \mapsto f(x-y)\varphi_t(y)$.

Seja $j_o \in \mathbb{N}$ tal que $|t_j| = |t|$ para $j \geq j_o$. Então para $j \geq j_o$ e $y \in \mathbb{K}^n$, temos por 5.1.2(1) que

$$|f(x-y)\varphi_{t_j}(y)| \leq \|f\|_{\infty}|\varphi_{t_j}(y)|$$

$$\leq \|f\|_{\infty}C|t_j|^{-n}I_{t_jB}(y)$$

$$= \|f\|_{\infty}C|t|^{-n}I_{tB}(y).$$

Portanto, segue pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$(f*\varphi_t)(x) = \int_{\mathbb{K}^n} f(x-y)\varphi_t(y)dy$$

$$= \lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{K}^n} f(x-y)\varphi_{t_j}(y)dy$$

$$= \lim_{j\to\infty}(f*\varphi_{t_j})(x)$$

e consequentemente a aplicação $t \nrightarrow (f * \varphi_t)(x)$ é contínua para todo $x \in \mathbb{K}^n$.

5.1.4. TEOREMA. *Seja* $\varphi \in C_c(\mathbb{K}^n)$ *tal que*

$$(1) \qquad \int_{|x|>|y|} \sup_{t\neq 0} |\varphi_t(x-y) - \varphi_t(x)|dx \leq C, \qquad y \neq 0.$$

Então, dados $1 \leq p < \infty$ *e* $1 < q < \infty$, *existe uma constante* A_p *dependendo somente de* n, $\|\varphi\|_1$, C, q *e* p, *tal que*

$$(2) \qquad |\{x : \sum_{j=1}^{\infty} |M^{\varphi} f_j(x)|^q > \lambda^q\}| \geq A_1 \lambda^{-1} \|(f_j)\|_{L^1(\ell^q)}$$

e

$$(3) \qquad \|(M^{\varphi} f_j)\|_{L^p(\ell^q)} \leq A_p \|(f_j)\|_{L^p(\ell^q)}, \qquad 1 < p < \infty,$$

para todo $\lambda > 0$ *e* $f = (f_j) \in L_c^{\infty}(\mathbb{K}^n, \ell^q)$. *Mais ainda, a desigualdade (3) pode ser estendida para toda* $f = (f_j) \in L^p(\mathbb{K}^n, \ell^q)$.

DEMONSTRAÇÃO. PARTE 1. Devido a continuidade da função $t \nrightarrow f * \varphi_t(x)$ (ver 5.1.3), é suficiente calcular o supremo na definição de M^{φ}, sobre um subconjunto enumerável e denso $V = \{t_j : j \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{K}^*$; isto é,

$$M^{\varphi} f(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |(f * \varphi_t)(x)|.$$

Consideremos os operadores

$$M_m^{\varphi} f(x) \doteq \sup_{1 \leq j \leq m} |(f * \varphi_{t_j})(x)|.$$

Temos então que $M_m^{\varphi} f(x) \uparrow M^{\varphi} f(x)$ para todo $x \in \mathbb{K}^n$. Portanto, obtendo estimativas para $M_m^{\varphi} f$ independentes de m, estaremos obtendo também estimativas para $M^{\varphi} f$.

PARTE 2. Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideremos o operador linear T_m, de

$L_c^\infty(\mathbb{K}^n)$ em $M(\mathbb{K}^n, \ell_m^\infty)$, definido por

$$(4) \qquad T_m f = (f * \varphi_{t_j})_{1 \leq j \leq m} \quad , \qquad f \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n).$$

Temos por 1.5.3 que $\|\varphi_t\|_1 = \|\varphi\|_1$ para $t \in \mathbb{K}^*$, portanto

$$|(f * \varphi_t)(x)| \leq \|f\|_\infty \|\varphi_t\|_1 = \|f\|_\infty \|\varphi\|_1 < \infty$$

e consequentemente o operador T_m está bem definido.

Por outro lado, se $f \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n)$, temos

$$(5) \qquad \|T_m f\|_{L^\infty(\ell^\infty)} = \sup_{x \in \mathbb{K}^n} \text{ess} \sup_{1 \leq j \leq m} |(f * \varphi_{t_j})(x)|$$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{K}^n} \text{ess} \sup_{1 \leq j \leq m} \|f\|_\infty \|\varphi_{t_j}\|_1$$

$$= \|\varphi\|_1 \; \|f\|_\infty$$

e portanto T_m é do tipo forte $(L^\infty, L^\infty(\ell^\infty))$.

PARTE 3. Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideremos o núcleo K_m, de $\mathbb{K}^n$ em $L(\mathbb{C}, \ell_m^\infty)$, definido por

$$(6) \qquad K_m(x)\lambda = (\varphi_{t_j}(x)\lambda)_{1 \leq j \leq m} \, , \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

O núcleo K_m é integrável pois

$$\int_{\mathbb{K}^n} \|K_m(x)\|_{L(\mathbb{C},\ell^\infty)} dx = \int_{\mathbb{K}^n} \sup_{1 \leq j \leq m} |\varphi_{t_j}(x)| dx$$

$$\leq \sum_{1 \leq j \leq m} \int_{\mathbb{K}^n} |\varphi_{t_j}(x)| dx = m \|\varphi\|_1 < \infty.$$

Mais ainda, se $f \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n)$, então $f * \varphi_t$ é integrável e portanto o Teorema de Fubini implica que, a aplicação $y \mapsto \varphi_t(x - y) f(y)$ é integrável para quase todo $x \in \mathbb{K}^n$. Logo

$$y \nrightarrow \sup_{1\le j\le m} |\varphi_{t_j}(x - y)f(y)| = \| (\varphi_{t_j}(x - y)f(y))_{1\le j\le m} \|_{\ell^\infty}$$

é integrável para quase todo $x \in \mathbb{K}^n$. Assim segue pelo Corolário 11 do Apêndice que

$$T_m f(x) = ((f * \varphi_{t_j})(x))_{1\le j\le m} = (\int_{\mathbb{K}^n} \varphi_{t_j}(x - y)f(y)dy)_{1\le j\le m}$$

$$= \int_{\mathbb{K}^n} (\varphi_{t_j}(x - y)f(y))_{1\le j\le m} dy = \int_{\mathbb{K}^n} K_m(x - y)f(y)dy,$$

para quase todo $x \in \mathbb{K}^n$. Consequentemente T_m é um operador integral singular do tipo convolução com núcleo K_m. Além disso, temos por (1) que

$$(7) \qquad \int_{|x|>|y|} \|K_m(x-y) - K_m(x)\|_{L(\mathbb{C},\ell^\infty)} dx$$

$$= \int_{|x|>|y|} \sup_{1\le j\le m} |\varphi_{t_j}(x - y) - \varphi_{t_j}(x)| dx$$

$$\le \int_{|x|>|y|} \sup_{t\neq 0} |\varphi_t(x - y) - \varphi_t(x)| dx \le C,$$

para todo $y \neq 0$ e $m \in \mathbb{N}$.

PARTE 4. As desigualdades (5) e (7) mostram que os operadores T_m, juntamente com seus núcleos K_m, satisfazem as condições do Corolário 4.2.6. Portanto, dados $1 \le p < \infty$ e $1 < q < \infty$, existe uma constante A_p dependendo somente de n, $\|\varphi\|_1$, C, q e p (ver 4.2.7), tal que

$$(8) \qquad |\{x : \sum_{j=1}^{\infty} \|T_m f_j(x)\|_{\ell^\infty}^q > \lambda^q\}| \le A_1 \lambda^{-1} \|(f_j)\|_{L^1(\ell^q)}$$

e

$$(9) \qquad \|(T_m f_j)\|_{L^p(\ell^q(\ell^\infty))} \le A_p \|(f_j)\|_{L^p(\ell^q)}, \qquad 1 < p < \infty,$$

para todo $\lambda > 0$, $m \in \mathbb{N}$ e $f = (f_j) \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, \ell^q)$. Como

$$\|T_m f_j(x)\|_{\ell^\infty} = \sup_{1 \leq j \leq m} |(f * \varphi_{t_j})(x)| = M_m^\varphi f_j(x)$$

e

$$\|(T_m f_j)\|_{L^p(\ell^q(\ell^\infty))} = \|(\|T_m f_j\|_{\ell^\infty})\|_{L^p(\ell^q)}$$

$$= \|(M_m^\varphi f_j)\|_{L^p(\ell^q)},$$

então fazendo m tender a infinito em (8) e (9), obtemos (2) e (3). Além disso, a desigualdade (9) pode ser estendida para toda $f = (f_j) \in L^p(\mathbb{K}^n, \ell^q)$ e consequentemente o mesmo ocorre com a desigualdade (3).

5.2. O TEOREMA MAXIMAL DE FEFFERMAN-STEIN EM CORPOS LOCAIS

O seguinte teorema é o equivalente para corpos locais de um resultado profundo devido a Fefferman e Stein (ver [4]).

5.2.1. TEOREMA. *O operador maximal de Hardy-Littlewood verifica as seguintes desigualdades vetoriais para* $1 < q < \infty$:

(1) $|\{x : \|(Mf_j(x))\|_{\ell^q} > \lambda\}| \leq A_1 \lambda^{-1} \|(f_j)\|_{L^1(\ell^q)}$;

e

(2) $\|(Mf_j)\|_{L^p(\ell^q)} \leq A_p \|(f_j)\|_{L^p(\ell^q)}$, $\quad 1 < p < \infty$,

para todo $\lambda > 0$ *e* $f = (f_j) \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, \ell^q)$, *onde a constante* A_p *depende somente de* n, q *e* p. *Mais ainda, a desigualdade* (2) *pode ser estendida para toda* $f = (f_j) \in L^p(\mathbb{K}^n, \ell^q)$.

DEMONSTRAÇÃO. Tomemos $\varphi = \Phi_o$. Se $|x| > |y|$, então

$$|t^{-1}(x - y)| = |t^{-1}||x - y| = |t^{-1}|\max\{|x|, |y|\}$$

$$= |t^{-1}||x| = |t^{-1}x|$$

e portanto $\Phi_o(t^{-1}(x-y)) = \Phi_o(t^{-1}x)$. Logo

$$|\varphi_t(x-y) - \varphi_t(x)| = |t|^{-n}|\Phi_o(t^{-1}(x-y)) - \Phi_o(t^{-1}x)| = 0$$

e consequentemente

$$(3) \qquad \int_{|x|>|y|} \sup_{t\neq 0} |\varphi_t(x-y) - \varphi_t(x)|dx = 0.$$

Por outro lado, temos

$$(|f| * \varphi_t)(x) = \int_{\mathbb{K}^n} |f(x-y)|\varphi_t(y)dy = |t|^{-n}\int_{\mathbb{K}^n} |f(x-y)|\Phi_o(t^{-1}y)dy$$

$$= |t|^{-n} \int_{|y|\leq|t|} |f(x-y)|dy = |t|^{-n} \int_{|y-x|\leq|t|} |f(y)|dy \quad .$$

e assim

$$(4) \qquad M^{\varphi}(|f|)(x) = \sup_{t\neq 0} (|f| * \varphi_t)(x)$$

$$= \sup_{t\neq 0} |t|^{-n} \int_{|y-x|\leq|t|} |f(y)|dy$$

$$= \sup_{k\in\mathbb{Z}} q^{kn} \int_{|y-x|\leq q^{-k}} |f(y)|dy$$

$$= Mf(x).$$

De (3) segue que o operador maximal M^{φ} verifica as desigualdades 5.1.4(2) e 5.1.4(3). Logo por (4) segue então que o operador maximal de Hardy-Littlewood verifica (1) e (2).

CAPÍTULO 6

TRANSFORMADA DE FOURIER E DISTRIBUIÇÕES SOBRE $\mathbb{K}^n$

Neste Capítulo enunciaremos os resultados básicos das teorias L^1 e L^2 da transformada de Fourier sobre $\mathbb{K}^n$ e também das distribuições sobre $\mathbb{K}^n$. Nosso objetivo é ter uma referência explícita de resultados que serão aplicados nos capítulos posteriores.

Todos os resultados aqui apresentados fazem parte dos Capítulos 2 e 3 de [18].

6.1. A TEORIA L^1 DA TRANSFORMADA DE FOURIER

Para introduzirmos a noção de transformada de Fourier, consideramos fixado um caracter χ do grupo aditivo $\mathbb{K}^+$, trivial sobre $\mathbb{D}$, mas não trivial sobre $\mathbb{B}^{-1}$. O grupo $\hat{\mathbb{K}}^n$ será identificado com $\mathbb{K}^n$ por intermédio do isomorfismo $y \leftrightarrow \chi_y$ (ver 1.6.6).

6.1.1. DEFINIÇÃO. *A transformada de Fourier de* $f \in L^1(\mathbb{K}^n)$ *é definida por*

$$\text{(1)} \qquad \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{K}^n} f(y)\overline{\chi}_x(y)\,dy.$$

6.1.2. EXEMPLO. Se $f_\alpha(x) = |x|^\alpha \Phi_o(x)$, $x \in \mathbb{K}$, então $f_\alpha \in L^p(\mathbb{K})$ se e somente se $\alpha + 1/p > 0$. Para $\alpha + 1 > 0$ a transformada de Fourier de f_α é dada por

$$\hat{f}_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-(\alpha+1)}} & \text{se} \quad |x| \le 1, \\[3ex] \dfrac{1 - q^{\alpha}}{1 - q^{-(\alpha+1)}}\, |x|^{-(\alpha+1)} & \text{se} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

6.1.3. TEOREMA. *A aplicação* $f \leftrightarrow \hat{f}$ *é um operador linear limitado* *de* $L^1(\mathbb{K}^n)$ *em* $L^\infty(\mathbb{K}^n)$ *e*

(1) $$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1\,, \qquad f \in L^1(\mathbb{K}^n).$$

Ainda mais, se $f \in L^1(\mathbb{K}^n)$, *então* $\hat{f}$ *é uniformemente contínua.*

6.1.4. TEOREMA. *Se* $f \in L^1(\mathbb{K}^n)$ *e* $h \in \mathbb{K}^n$, *então* $(\tau_h f)^\wedge = \overline{\chi}_h \hat{f}$ *e* $(\chi_h f)^\wedge = \tau_h \hat{f}$.

6.1.5. NOTAÇÃO. Designaremos por $S(\mathbb{K}^n)$ o espaço de todas as combinações lineares finitas de funções da forma $\tau_h \Phi_k$, $h \in \mathbb{K}^n$, $k \in \mathbb{Z}$.

6.1.6. TEOREMA. *Seja* H *um subconjunto denso de* $\mathbb{K}^n$. *Então todo elemento* $g \in S(\mathbb{K}^n)$ *é da forma*

$$g = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \tau_{h_j} \Phi_k = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j I_{h_j + \mathbb{B}^k}\,,$$

onde $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $\alpha_j \neq 0$, $h_j \in H$, $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ *e* $|h_j - h_i| > q^{-k}$ *para* $j \neq i$.

6.1.7. NOTAÇÃO. Designaremos por $C_o(\mathbb{K}^n)$ o espaço de todas as funções contínuas de $\mathbb{K}^n$ em $\mathbb{C}$ que se anulam no infinito, isto é, $f \in C_o(\mathbb{K}^n)$ se e somente se, f é contínua e $f(x) \to 0$ uniformemente quando $|x| \to \infty$. Consideramos $C_o(\mathbb{K}^n)$ munido da norma de $L^\infty(\mathbb{K}^n)$.

6.1.8. TEOREMA. *O espaço* $S(\mathbb{K}^n)$ *é uma álgebra de funções contínuas que separa pontos. Consequentemente* $S(\mathbb{K}^n)$ *é denso em* $C_o(\mathbb{K}^n)$ *e também em* $L^p(\mathbb{K}^n)$, $1 \leq p < \infty$.

6.1.9. OBSERVAÇÃO. Para todo $k \in \mathbb{Z}$ temos $\hat{\Phi}_k = q^{-kn}\Phi_{-k}$.

6.1.10. DEFINIÇÃO. *O operador de dilatação* δ_k *é definido para todo* $k \in \mathbb{Z}$ *por* $(\delta_k f)(x) = f(\pi^k x)$, *onde* f *é uma função sobre* $\mathbb{K}^n$.

6.1.11. TEOREMA. *Se* $f \in L^1(\mathbb{K}^n)$ *e* $k \in \mathbb{Z}$, *então* $(\delta_k f)^\wedge = q^{kn}(\delta_{-k}\hat{f})$.

6.1.12. TEOREMA (Riemann-Lebesgue). *Se* $f \in L^1(\mathbb{K}^n)$, *então* $\hat{f}(x) \to 0$ *uniformemente quando* $|x| \to \infty$.

6.1.13. DEFINIÇÃO. *Sejam* $f, g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{C}$. *O produto de convolução de* f *por* g *é definido (quando a integral existe) por*

(1) $$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{K}^n} f(x - y)g(y)dy.$$

6.1.14. TEOREMA. *Seja* $f \in L^p(\mathbb{K}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. *Se* $g \in L^{p'}(\mathbb{K}^n)$, $1/p + 1/p' = 1$, *então* $f*g$ *é uniformemente contínua. Se* $g \in L^1(\mathbb{K}^n)$, *então*

(1) $$\| f * g \|_p \leq \| f \|_p \| g \|_1 .$$

6.1.15. TEOREMA. *Se* $f, g \in L^1(\mathbb{K}^n)$, *então*

(1) $$(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}.$$

6.1.16. TEOREMA (Fórmula de Multiplicação). *Se* $f, g \in L^1(\mathbb{K}^n)$, *então*

(1) $$\int_{\mathbb{K}^n} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{K}^n} f(x)\hat{g}(x)dx.$$

6.1.17. DEFINIÇÃO. *Para* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{K}^n)$ *e* $k \in \mathbb{Z}$ *definimos*

(1) $$A_k(g) = \int_{|y| \leq q^{-k}} g(y)dy.$$

6.1.18. TEOREMA. *Se* $f \in L^1(\mathbb{K}^n)$, *então* $A_k(\hat{f}\chi_x) \to f(x)$ q.t.x, *quando* $k \to \infty$. *Em particular, a convergência ocorre em todo ponto de continuidade de* f.

6.1.19. TEOREMA. *Se* $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{K}^n)$, *então*

(1) $$f(x) = \int_{\mathbb{K}^n} \hat{f}(y)\chi_x(y)dy, \quad \text{q.t.x.}$$

6.1.20. COROLÁRIO. *Se* $f \in L^1(\mathbb{K}^n)$, $\hat{f} \geq 0$ *e* f *é contínua em* 0, *então* $\hat{f} \in L^1(\mathbb{K}^n)$ *e*

$$(1) \qquad f(x) = \int_{\mathbb{K}^n} \hat{f}(y)\chi_x(y)\,dy$$

para todo ponto regular x *de* f.

6.2. A TEORIA L^2 DA TRANSFORMADA DE FOURIER

6.2.1. TEOREMA. *Se* $f \in L^1(\mathbb{K}^n) \cap L^2(\mathbb{K}^n)$ *então*

$$(1) \qquad \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 .$$

6.2.2. OBSERVAÇÃO. Segue pelo Teorema 6.2.1 que a aplicação $f \mapsto \hat{f}$ é uma imersão isométrica de $L^1(\mathbb{K}^n) \cap L^2(\mathbb{K}^n)$ em $L^2(\mathbb{K}^n)$. Como $L^1(\mathbb{K}^n) \cap L^2(\mathbb{K}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{K}^n)$, então podemos estender a transformada de Fourier para todo $L^2(\mathbb{K}^n)$.

6.2.3. DEFINIÇÃO. *A transformada de Fourier de* $f \in L^2(\mathbb{K}^n)$ *é definida por*

$$(1) \qquad \hat{f}(x) = \lim_{k\to\infty} (f\Phi_{-k})^{\wedge}(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{|y|\leq q^k} f(y)\overline{\chi}_x(y)\,dy$$

onde o limite é tomado na norma de $L^2(\mathbb{K}^n)$.

6.2.4. TEOREMA (Fórmula de Multiplicação). *Se* $f, g \in L^2(\mathbb{K}^n)$, *então*

$$(1) \qquad \int_{\mathbb{K}^n} \hat{f}(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{K}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx.$$

6.2.5. TEOREMA. *Se* $f \in L^2(\mathbb{K}^n)$, *então* $(\tau_h f)^{\wedge}(x) = \overline{\chi}_h(x)\hat{f}(x)$, $(\chi_h f)^{\wedge}(x) = (\tau_h \hat{f})(x)$ *e* $(\delta_k f)^{\wedge}(x) = q^{kn}(\delta_{-k}\hat{f})(x)$ *para quase todo* $x \in \mathbb{K}^n$.

6.2.6. TEOREMA. *A transformada de Fourier é um operador unitário* *sobre* $L^2(\mathbb{K}^n)$.

6.2.7. NOTAÇÕES. A aplicação inversa da transformada de Fourier sobre $L^2(\mathbb{K}^n)$ será denotada por $f \leftrightarrow f^\vee$ e o operador reflexão aplicado a uma função f sobre $\mathbb{K}^n$ por $\tilde{f}(x) = f(-x)$.

6.2.8. TEOREMA. *Se* $f, g \in L^2(\mathbb{K}^n)$, *então*

$$(1) \qquad f^\vee = (\tilde{f})^\wedge$$

e

$$(2) \qquad \int_{\mathbb{K}^n} f(x)\overline{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{K}^n} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}}(x)\,dx \quad \text{(Fórmula de Plancherel).}$$

6.2.9. TEOREMA. *Se* $f \in L^2(\mathbb{K}^n)$, *então*

$$\hat{f}(x) = \lim_{k \to \infty} \int_{|y| \leq q^k} f(y)\overline{\chi}_x(y)\,dy, \qquad \text{q.t.x.}$$

6.2.10. TEOREMA. *Se* $f \in L^2(\mathbb{K}^n)$ *e* $g \in L^1(\mathbb{K}^n)$, *então* $f * g \in L^2(\mathbb{K}^n)$ *e*

$$(1) \qquad (f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g} \quad \text{q.s.}$$

6.3. DISTRIBUIÇÕES SOBRE $\mathbb{K}^n$

6.3.1. TEOREMA. *Temos que* $\varphi \in S(\mathbb{K}^n)$ *se e somente se existem* ℓ, $k \in \mathbb{Z}$, $\ell \leq k$, *tais que*, $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{B}^\ell$ *e* φ *é constante sob translações de* $\mathbb{B}^k$, *isto é*, $\varphi(x + y) = \varphi(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{K}^n$ *e* $y \in \mathbb{B}^k$.

6.3.2. TEOREMA. *Se* $\varphi \in S(\mathbb{K}^n)$ *é constante sob translações de* $\mathbb{B}^k$ *e* $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{B}^\ell$, *então* $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{K}^n)$, $\hat{\varphi}$ *é constante sob translações de* $\mathbb{B}^{-\ell}$ *e* $\operatorname{supp}\hat{\varphi} \subset \mathbb{B}^{-k}$.

6.3.3. TEOREMA. *Se* $\psi, \varphi \in S(\mathbb{K}^n)$ *e* $h \in \mathbb{K}^n$, *então* $\tau_h\varphi, \tilde{\varphi}, \varphi * \psi \in S(\mathbb{K}^n)$.

6.3.4. OBSERVAÇÃO. Como $S(\mathbb{K}^n) \subset L^1(\mathbb{K}^n) \cap L^2(\mathbb{K}^n)$, então se $\varphi \in S(\mathbb{K}^n)$, segue por 6.1.1(1) e 6.2.8(1) que

$$\hat{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{K}^n} \varphi(y)\overline{\chi}_x(y)\,dy \qquad \text{e} \qquad \varphi^{v}(x) = \int_{\mathbb{K}^n} \varphi(y)\chi_x(y)\,dy.$$

6.3.5. NOTAÇÃO. Sejam k, $\ell \in \mathbb{N}$. Denotaremos por S_ℓ o subespaço de $S(\mathbb{K}^n)$ das funções φ tais que $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{B}^{-\ell}$ e por $S_{k,\ell}$ o subespaço de S_ℓ das funções φ constantes sob translações de $\mathbb{B}^k$.

Consideramos $S_{k,\ell}$ com a topologia da convergência uniforme, S_ℓ com a topologia limite indutivo dos espaços $(S_{k,\ell})_{k \in \mathbb{N}}$ e $S(\mathbb{K}^n)$ com a topologia limite indutivo dos espaços $(S_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$.

6.3.6. TEOREMA. *A sequência* (φ_j) *converge para zero em* $S(\mathbb{K}^n)$ *se e somente se,* $\varphi_j \to 0$ *uniformemente e existem* k, $\ell \in \mathbb{Z}$ *tais que,* φ_j *é constante sob translações de* $\mathbb{B}^k$ *e* $\operatorname{supp}\varphi_j \subset \mathbb{B}^\ell$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$.

6.3.7. TEOREMA. *O espaço* $S(\mathbb{K}^n)$ *é completo e separável.*

6.3.8. TEOREMA. *A transformada de Fourier é um homeomorfismo de* $S(\mathbb{K}^n)$ *sobre* $S(\mathbb{K}^n)$.

6.3.9. TEOREMA. *As aplicações* $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ *e* $\varphi \mapsto \tau_h\varphi$, $h \in \mathbb{K}^n$, *são homeomorfismos de* $S(\mathbb{K}^n)$ *sobre* $S(\mathbb{K}^n)$.

6.3.10. TEOREMA. *O espaço* $S(\mathbb{K}^n)$ *é denso e está continuamente contido em* $C_o(\mathbb{K}^n)$ *e em* $L^p(\mathbb{K}^n)$, $1 \leq p < \infty$.

6.3.11. DEFINIÇÃO. *Uma distribuição sobre* $\mathbb{K}^n$ *é um funcional linear contínuo sobre* $S(\mathbb{K}^n)$.

O espaço de todas as distribuições sobre $\mathbb{K}^n$ será denotado por $S'(\mathbb{K}^n)$. Consideramos $S'(\mathbb{K}^n)$ munido da topologia fraca. Se $f \in S'(\mathbb{K}^n)$ e $\varphi \in S(\mathbb{K}^n)$, então a ação de f sobre φ será denotada por (f,φ).

6.3.12. DEFINIÇÃO. *Seja* $f \in S'(\mathbb{K}^n)$. *A transformada de Fourier de* f *é o funcional linear* $\hat{f}$ *definido por* $(\hat{f},\varphi) = (f,\hat{\varphi})$, $\varphi \in S(\mathbb{K}^n)$.

A inversa da transformada de Fourier de f *é o funcional linear* $f^{\vee}$ *definido por* $(f^{\vee},\varphi) = (f,\varphi^{\vee})$, $\varphi \in S(\mathbb{K}^n)$.

6.3.13. DEFINIÇÃO. *Sejam* $f \in S'(\mathbb{K}^n)$ *e* $h \in \mathbb{K}^n$. *Os funcionais lineares* $\tilde{f}$ *e* $\tau_h f$ *são definidos por* $(\tilde{f},\varphi) = (f,\tilde{\varphi})$ *e* $(\tau_h f,\varphi) = (f,\tau_{-h} f)$, $\varphi \in S(\mathbb{K}^n)$.

6.3.14. TEOREMA. *As aplicações* $f \leftrightarrow \hat{f}$, $f \leftrightarrow \tilde{f}$ *e* $f \leftrightarrow \tau_h f$, $h \in \mathbb{K}^n$, *são homeomorfismos de* $S'(\mathbb{K}^n)$ *sobre* $S'(\mathbb{K}^n)$.

6.3.15. DEFINIÇÃO. *Sejam* $f \in S'(\mathbb{K}^n)$ *e* $\varphi \in S(\mathbb{K}^n)$. *O produto* $f\varphi = \varphi f$ *é definido como sendo o funcional linear* $(f\varphi,\psi) = (f,\varphi\psi)$, $\psi \in S(\mathbb{K}^n)$.

6.3.16. NOTAÇÃO. Designaremos por O_M o espaço das funções localmente constantes, isto é, $f \in O_M$ se e somente se, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que f é constante sob translações de $\mathbb{B}^k$.

6.3.17. TEOREMA. *Temos que* $f \in O_M$ *se e somente se,* $f \in S'(\mathbb{K}^n)$ *e existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tal que* $\tau_h f = f$ *para todo* $h \in \mathbb{B}^k$.

6.3.18. NOTAÇÃO. Denotaremos por O_C o espaço das distribuições com suporte compacto, isto é, $f \in O_C$ se $f \in S'(\mathbb{K}^n)$ e existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f\Phi_k = f$.

6.3.19. TEOREMA. *Temos que* $f \in O_M$ *se e somente se* $\hat{f} \in O_C$. *Em particular,* $f \in S'(\mathbb{K}^n)$ *e* $\tau_h f = f$ *para todo* $h \in \mathbb{B}^k$ *se e somente se* $\Phi_{-k}\hat{f} = \hat{f}$.

6.3.20. DEFINIÇÃO. *Se* $f \in S'(\mathbb{K}^n)$ *e* $\varphi \in S(\mathbb{K}^n)$, *definimos* $f * \varphi = (\hat{f}\hat{\varphi})^{\vee}$.

6.3.21. TEOREMA. *Se* $f \in S'(\mathbb{K}^n)$ *e* $\varphi \in S(\mathbb{K}^n)$, *então são equivalentes:*

(1) $\qquad (f * \varphi)^\wedge = \hat{f}\hat{\varphi}$;

(2) $\qquad (f * \varphi, \psi) = (f, \tilde{\varphi} * \psi), \quad \psi \in S(\mathbb{K}^n)$.

6.3.22. TEOREMA. *Se* $\varphi \in S(\mathbb{K}^n)$, *então a aplicação* $f \mapsto f * \varphi$ *é contínua de* $S'(\mathbb{K}^n)$ *em* $S'(\mathbb{K}^n)$.

6.3.23. DEFINIÇÃO. *Se* $\varphi \in O_M$ *e* $f \in S'(\mathbb{K}^n)$, *definimos* $\varphi f = f\varphi$ *por* $(\varphi f, \psi) = (f, \varphi\psi)$, $\psi \in S(\mathbb{K}^n)$.

6.3.24. DEFINIÇÃO. *Se* $f \in S'(\mathbb{K}^n)$ *e* $\varphi \in O_C$, *definimos* $f * \varphi \in S'(\mathbb{K}^n)$ *por* $(f * \varphi) = (\hat{f}\hat{\varphi})^\vee$.

6.3.25. TEOREMA. *Se* $\varphi \in O_C$, *então a aplicação* $f \mapsto f * \varphi$ *é uma aplicação contínua de* $S'(\mathbb{K}^n)$ *em* $S'(\mathbb{K}^n)$.

CAPÍTULO 7

APLICAÇÕES ÀS INTEGRAIS SINGULARES CLÁSSICAS

Este Capítulo tem como objetivo recuperar resultados sobre operadores integrais singulares com núcleos clássicos do tipo Calderón-Zygmund sobre corpos locais, apresentados por K. Phillips - M. Taibleson em [11] e estender o conceito de transformada de Hilbert sobre corpos locais introduzido por K. Phillips em [10].

Na Seção 1 enunciamos um resultado devido a Phillips-Taibleson ([11]), que tem uma demonstração clássica, utilizando transformada de Fourier.

Na Seção 2 demonstramos uma desigualdade de Fefferman-Stein e a desigualdade de M. Cotlar, no contexto dos corpos locais. Os trabalhos [6] e [7] são referências para o caso do $\mathbb{R}^n$.

Nos Teoremas 7.3.1 e 7.3.2, recuperamos o Teorema 3.1 de [11], utilizando resultados sobre operadores integrais singulares demonstrados no Capítulo 4 e resultados da Seção 2. Em 7.3.2 e 7.3.3, damos novas condições para a convergência quase sempre e para a continuidade L^p do operador maximal L^*, utilizando os resultados da Seção 2. Além disso, demonstramos em 7.3.1, que o operador considerado em [11], é também do tipo forte (L^∞, BMO).

O conceito de transformada de Hilbert sobre os corpos $\mathbb{Q}_p$ e S_p, introduzidos por K. Phillips em [10], é estendido na Seção 4 para todo corpo local $\mathbb{K}$. Algumas propriedades da transformada de Hilbert sobre corpos locais são demonstradas e mostramos algumas similitudes com a transformada de Hilbert real.

7.1. OPERADORES INTEGRAIS SINGULARES CLÁSSICOS SOBRE CORPOS LOCAIS: TEORIA L^2

Neste Capítulo consideraremos símbolos $\omega(x)$ sobre $\mathbb{K}^n$ verificando $\omega(x) = \omega(\pi^j x)$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{K}^n$, e

$$\int_{|x|=1} \omega(x)\,dx = 1.$$

No que segue, $\psi(x)$ será o núcleo do tipo Calderón-Zygmund dado por

$$\psi(x) = \frac{\omega(x)}{|x|^n}, \quad x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\},$$

e $\psi_k(x)$ o núcleo truncado

$$\psi_k(x) = \frac{\omega(x)}{|x|^n} \; I_{\{y:|y|\geq q^{-k}\}}(x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

7.1.1. DEFINIÇÃO. *Para cada* $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ *definimos* $s(x) \in \mathbb{Z}$ *e* x^* *por*

(1) $$|x| = q^{-s(x)}$$

e

(2) $$x^* = \pi^{-s(x)} x.$$

7.1.2. TEOREMA. *Suponhamos que*

(1) $$\sup_{|y|=1} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|x|=1} |\omega(x + \pi^j y) - \omega(x)|\,dx < \infty.$$

Se $f \in L^2(\mathbb{K}^n)$, *então* $\psi_k * f \in L^2(\mathbb{K}^n)$ *e existe* $Lf \in L^2(\mathbb{K}^n)$ *tal que* $\psi_k * f$ *converge na norma de* $L^2(\mathbb{K}^n)$ *para* Lf. *Mais ainda,*

(2) $$\|\psi_k * f\|_2 \leq C\,\|f\|_2, \quad f \in L^2(\mathbb{K}^n), \quad k \in \mathbb{N};$$

(3) $$\|Lf\|_2 \leq C\,\|f\|_2, \quad f \in L^2(\mathbb{K}^n).$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver primeira parte da demonstração do Teorema 3.1, pág. 215, [11].

7.2. AS DESIGUALDADES DE FEFFERMAN-STEIN E DE COTLAR

7.2.1. DEFINIÇÃO. *Seja* T *um operador integral singular com núcleo* K. *Dado* $1 < r < \infty$, *diremos que* K *verifica* (H_r) *se existe uma sequência* $(C_j) \in \ell^1$, *tal que*

$$(1) \qquad \int_{|x-y'|=|y-y'|q^j} \|K(x,y) - K(x,y')\|^r_{L(E,F)} dx \le C_j^r(|y-y'|^n q^{jn})^{-r/r'}$$

para todo $j \geq 1$ *e* $y, y' \in \mathbb{K}^n$, $y \neq y'$. *Ainda mais, diremos que* K *verifica* (H_r'), $1 < r < \infty$, *se* $K'(x,y) = K(y,x)$ *verifica* (H_r).

7.2.2. DEFINIÇÃO. *Dados* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{K}^n, E)$ *e* $1 \leq r < \infty$, *definimos* $M_r f = \{M(\|f(x)\|_E^r)\}^{1/r}$.

7.2.3. OBSERVAÇÃO. Se $1 \leq p < r < \infty$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{K}^n, E)$, então segue pela desigualdade de Hölder que $M_p f(x) \leq M_r f(x)$ para todo x.

7.2.4. DEFINIÇÃO. *Seja* T *um operador integral singular com núcleo* K. *O operador maximal* T^* *é definido para toda* $f \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$ *por*

$$T^*f(x) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|T_k f(x)\|_F$$

onde

$$T_k f(x) = \int_{|y-x|>q^{-k}} K(x,y) f(y) dy, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

7.2.5. TEOREMA. *Seja* T *um operador integral singular com núcleo* K, *limitado de* $L^r(\mathbb{K}^n, E)$ *em* $L^r(\mathbb{K}^n, F)$ *para algum* $1 < r < \infty$. *Se o núcleo* K *satisfaz* (H_s') *para algum* $1 < s \leq \infty$, *então*

$$(1) \qquad M^{\#}(Tf)(x) \leq C_\beta M_\beta f(x)$$

e

$$(2) \qquad T^*f(x) \leq C_\beta M_\beta f(x) + M(Tf)(x),$$

para toda $f \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$, *onde* $\beta = \max\{r, s'\}$.

DEMONSTRAÇÃO. PARTE 1: Fixemos $f \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$, $x_o \in \mathbb{K}^n$ e $k \in \mathbb{Z}$. Tomemos $g = \tau_{x_o}\Phi_k$ e $h = f - g$. Então

$$\text{(3)} \qquad M_k^\#(Tf)(x_o) \leq M_k^\#(Tg)(x_o) + M_k^\#(Th)(x_o)$$

onde

$$M_k^\#\varphi(x) = q^{kn} \int_{|y-x|\leq q^{-k}} \|\varphi(y) - \varphi_k(x)\|_E dy.$$

Como T é limitado de $L^r(\mathbb{K}^n, E)$ em $L^r(\mathbb{K}^n, F)$, então temos pela desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
\text{(4)} \quad M_k^\#(Tg)(x_o) &= q^{kn} \int_{|y-x_o| \leq q^{-k}} \|Tg(y) - (Tg)_k(x_o)\|_F dy \\
&\leq q^{kn} \int_{|y-x_o|\leq q^{-k}} \|Tg(y)\|_F dy + q^{kn} \int_{|y-x_o|\leq q^{-k}} \|(Tg)_k(x_o)\|_F dy \\
&\leq 2q^{kn} \int_{|y-x_o|\leq q^{-k}} \|Tg(y)\|_E dy \\
&\leq 2q^{kn} \|Tg\|_{L^r(F)} \|\tau_{x_o}\Phi_k\|_{r'} \\
&\leq 2C_r q^{kn/r} \|g\|_{L^r(E)} \\
&\leq 2C_r M_r g(x_o).
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $x \in x_o + \mathbb{B}^k$ e $1 < s < \infty$, então segue por 7.2.1(1) e pela desigualdade de Hölder que

(5) $\|Th(x) - Th(x_o)\|_F \le$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|y-x_o|=q^j|x-x_o|} \|K(x,y) - K(x_o,y)\|_{L(E,F)} \|h(y)\|_E dy$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\int_{|y-x_o|=q^j|x-x_o|} \|K(x,y) - K(x_o,y)\|^s_{L(E,F)} dy\Big)^{1/s} \Big(\int_{|y-x_o|=q^j|x-x_o|} \|h(y)\|^{s'}_E dy\Big)^{1/s'}$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} C_j (|x - x_o|^n q^{jn})^{-1/s'} \Big(\int_{|y-x_o|=q^j|x-x_o|} \|h(y)\|^{s'}_E dy\Big)^{1/s'}$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} C_j \Big(\frac{1}{q^{jn}|x - x_o|^n} \int_{|y-x_o|\le q^j|x-x_o|} \|h(y)\|^{s'}_E dy\Big)^{1/s'}$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} C_j M_{s'}h(x_o) = CM_{s'}h(x_o).$$

Agora, se $x \in x_o + \mathbb{B}^k$ e $s = \infty$, então segue por 4.1.2(2) que

(6) $\|Th(x) - Th(x_o)\|_F \le$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|y-x_o|=q^j|x-x_o|} C' \frac{|x - x_o|}{|y - x_o|^{n+1}} \|h(y)\|_E dy$$

$$\le C' \sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} \Big(\frac{1}{|x - x_o|^n q^{jn}} \int_{|y-x_o|\le q^j|x-x_o|} \|h(y)\|_E dy\Big)$$

$$\le C' \sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} Mh(x_o)$$

$$\le C''Mh(x_o) \le C''M_{s'}h(x_o).$$

Logo, por (5) e (6), temos

$$\|Th(x) - (Th)_k(x_o)\|_F \leq$$

$$\leq \|Th(x) - Th(x_o)\|_F + \|Th(x_o) - (Th)_k(x_o)\|_F$$

$$\leq DM_{s'}h(x_o) + q^{kn}\int_{|y-x_o|\leq q^{-k}} \|Th(y) - Th(x_o)\|_F dy$$

$$\leq DM_{s'}h(x_o) + DM_{s'}h(x_o) = 2DM_{s'}h(x_o)$$

para todo $x \in x_o + \mathbb{B}^k$, e portanto

(7) $$M_k^{\#}(Th)(x_o) \leq 2DM_{s'}h(x_o).$$

De (3), (4) e (7) segue então que

$$M_k^{\#}(Tf)(x_o) \leq 2C_r M_r g(x_o) + 2DM_{s'}h(x_o)$$

$$\leq (2C_r + 2D)M_\beta f(x_o)$$

$$= C_\beta M_\beta f(x_o)$$

e consequentemente

$$M^{\#}(Tf)(x_o) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} M_k^{\#}(Tf)(x_o) \leq C_\beta M_\beta f(x_o).$$

PARTE 2. Temos que

$$Th(x_o) = \int_{|y-x_o|>q^{-k}} K(x_o - y)h(y)dy = T_k f(x_o).$$

Então para $x \in x_o + \mathbb{B}^k$, temos

$$\|Tf(x) - T_k f(x_o)\|_F \leq \|Tg(x)\|_F + \|Th(x) - Th(x_o)\|_F$$

$$\leq \|Tg(x)\|_F + 2DM_{s'}h(x_o)$$

e portanto

$$q^{kn} \int_{|x-x_o|\leq q^{-k}} \|Tf(x) - T_k f(x_o)\|_F dx \leq$$

$$\leq q^{kn} \int_{|x-x_o|\leq q^{-k}} \|Tg(x)\|_F dx + 2DM_{s'} h(x_o).$$

Mas

$$q^{kn} \int_{|x-x_o|\leq q^{-k}} \|Tg(x)\|_F dx \leq q^{kn} \|Tg\|_{L^r(F)} \|\tau_{x_o}\Phi_k\|_{r'}$$

$$\leq C_r q^{kn/r} \|g\|_{L^r(E)}$$

$$= C_r \left(\int_{|x-x_o|\leq q^{-k}} \|f(x)\|_E^r dx \right)^{1/r}$$

$$\leq C_r M_r f(x_o)$$

e assim

$$q^{kn} \int_{|x-x_o|\leq q^{-k}} \|Tf(x) - T_k f(x_o)\|_F dx \leq$$

$$\leq C_r M_r f(x_o) + 2DM_{s'} h(x_o)$$

$$\leq C_\beta M_\beta f(x_o).$$

Logo

$$C_\beta M_\beta f(x_o) \geq q^{kn} \int_{|x-x_o|\leq q^{-k}} (\|T_k f(x_o)\|_F - \|Tf(x)\|_F) dx$$

$$\geq \|T_k f(x_o)\|_F - M(Tf)(x_o),$$

portanto

$$\|T_k f(x_o)\|_F \leq C_\beta M_\beta f(x_o) + M(Tf)(x_o)$$

e consequentemente

$$T^* f(x_o) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|T_k f(x_o)\|_F$$

$$\leq C_\beta M_\beta f(x_o) + M(Tf)(x_o).$$

7.2.6. OBSERVAÇÃO. A desigualdade 7.2.5(1) é a versão de uma desigualdade de Fefferman-Stein para corpos locais e 7.2.5(2) é a versão da desigualdade de M. Cotlar para corpos locais.

7.2.7. COROLÁRIO. *Seja* T *um operador integral singular com núcleo* K, *do tipo forte* (r,r) *para todo* $1 < r < \infty$. *Se o núcleo* K *satisfaz* (H_s') *para algum* $1 < s \leq \infty$, *então*

(1) $$\|T^* f\|_p \leq B_p \|f\|_p$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{K}^n, E)$ *e* $p > s'$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $f \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$ e $p > s'$. Então por 2.1.2(2), temos que

$$\|M_{s'} f\|_p = \|M(\|f(x)\|_E^{s'})\|_{p/s'}^{1/s'}$$

$$\leq A_{p/s'} \|\,\|f(x)\|_E^{s'}\|_{p/s'}^{1/s'} = A_{p/s'} \|f\|_{L^p(E)}$$

e

$$\|M(Tf)\|_p \leq A_p \|Tf\|_{L^p(F)}.$$

Segue então por 7.2.5(2) e pela hipótese que

$$\|T^*f\|_p \le C_{s'}\|M_{s'}f\|_p + \|M(Tf)\|_p$$

$$\le C_{s'}A_{p/s'}\|f\|_{L^p(E)} + A_p\|Tf\|_{L^p(F)}$$

$$\le C_{s'}A_{p/s'}\|f\|_{L^p(E)} + A_pD_p\|f\|_{L^p(E)}$$

$$= B_p\|f\|_{L^p(E)} .$$

Como o operador T^* é do tipo forte (p,p), $s' < p < \infty$, então T^* pode ser estendido continuamente a todo $L^p(\mathbb{K}^n, E)$, $s' < p < \infty$.

7.3. OPERADORES INTEGRAIS SINGULARES CLÁSSICOS SOBRE CORPOS LOCAIS: TEORIA L^p

7.3.1. TEOREMA. *Suponhamos que* $\omega(x)$ *verifique a condição* 7.1.2(1). *Se* $f \in L^p(\mathbb{K}^n)$, *então* $\psi_k * f \in L^p(\mathbb{K}^n)$ *e existe* $Lf \in L^p(\mathbb{K}^n)$ *tal que* $\psi_k * f$ *converge na norma de* $L^p(\mathbb{K}^n)$ *para* Lf. *Além disso, para cada* $1 \le p \le \infty$, *existe uma constante* A_p *dependendo somente de* p, *tal que*

(1) $$|\{x : |(\psi_k * f)(x)| > \lambda\}| \le A_1\lambda^{-1}\|f\|_1 ;$$

(1') $$|\{x : |Lf(x)| > \lambda\}| \le A_1\lambda^{-1}\|f\|_1 ;$$

(2) $$\|\psi_k * f\|_p \le A_p\|f\|_p , \quad 1 < p < \infty;$$

(2') $$\|Lf\|_p \le A_p\|f\|_p , \quad 1 < p < \infty;$$

(3) $$\|\psi_k * f\|_{BMO(\mathbb{R})} \le A_\infty\|f\|_\infty ;$$

(3') $$\|Lf\|_{BMO(\mathbb{R})} \le A_\infty\|f\|_\infty ,$$

para toda $f \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n)$, $k \in \mathbb{N}$ *e* $\lambda > 0$. *Ainda mais, as desigualdades* (2) *e* (2') *são satisfeitas para toda* $f \in L^p(\mathbb{K}^n)$.

DEMONSTRAÇÃO. PARTE 1. Como consequência do Teorema 7.1.2, temos que os operadores $f \nrightarrow \psi_k * f$, $f \nrightarrow Lf$ estão bem definidos para toda $f \in L_c^{\infty}(\mathbb{K}^n)$ e que são uniformemente limitados de $L^2(\mathbb{K}^n)$ em $L^2(\mathbb{K}^n)$.

PARTE 2. Seja $f \in L_c^{\infty}(\mathbb{K}^n)$. Se $x \notin \operatorname{supp} f$, então existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $(x + \mathbb{B}^r) \cap \operatorname{supp} f = \phi$. Logo para $k \geq r$, temos

$$
\begin{aligned}
(\psi_k * f)(x) &= \int_{\mathbb{K}^n} \psi_k(x-y) f(y)\,dy \\
&= \int_{q^{-k} \leq |y-x| \leq q^{-r}} \psi(x-y) f(y)\,dy + \int_{|y-x| > q^{-k}} \psi(x-y) f(y)\,dy \\
&= \int_{|y-x| > q^{-k}} \psi(x-y) f(y)\,dy = \int_{\mathbb{K}^n} \psi(x-y) f(y)\,dy
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\lim_{k \to \infty} (\psi_k * f)(x) = \int_{\mathbb{K}^n} \psi(x-y) f(y)\,dy.
$$

Como $\psi_k * f$ converge em $L^2(\mathbb{K}^n)$ para Lf por 7.1.2, então

$$
Lf(x) = \int_{\mathbb{K}^n} \psi(x-y) f(y)\,dy
$$

para quase todo $x \notin \operatorname{supp} f$. Consequentemente $f \nrightarrow Lf$ é um operador integral singular do tipo convolução com núcleo $\psi(x)$. É evidente que $f \nrightarrow \psi_k * f$ é também um operador integral singular do tipo convolução com núcleo $\psi_k(x)$.

PARTE 3. Para todo $y \neq 0$, segue por 1.5.3 que

$$
\int_{|x| > |y|} |\psi(x-y) - \psi(x)|\,dx =
$$

$$
= \sum_{j=-s(y)+1} \int_{|x| = q^j} |\omega(x-y) - \omega(x)|\,|x|^{-n} dx =
$$

$$= \sum_{j=-s(y)+1} \int_{|x|=1} |\omega(\pi^{-j}x - y) - \omega(\pi^{-j}x)|dx$$

$$= \sum_{i=1} \int_{|x|=1} |\omega(x - \pi^{i}y^{*}) - \omega(x)|dx$$

$$\leq \sup_{|y|=1} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{|x|=1} |\omega(x + \pi^{i}y) - \omega(x)|dx < \infty.$$

Logo os núcleos $\psi(x)$, $\psi_k(x)$ satisfazem a condição 4.2.2(2). Como a condição 4.2.2(1) também é satisfeita pelos operadores $f \nrightarrow \psi_k * f$, $f \nrightarrow Lf$ (ver Teorema 7.1.2), então as desigualdades (1), (1'), (2), (2'), (3) e (3') seguem pelo Corolário 4.2.2.

PARTE 4. Se $f \in L^p(\mathbb{K}^n)$, $1 < p < \infty$, então $\psi_k * f \to Lf$ na norma de $L^p(\mathbb{K}^n)$. De fato, se $f = \tau_h \Phi_r$, então

$$(\psi_k * f)(x) = \int_{|y-x|\geq q^{-k}} \psi(x - y)(\tau_h \Phi_r)(y)dy$$

$$= \int_{(\mathbb{B}^k)^c \cap (x-h+\mathbb{B}^r)} \psi(y)dy.$$

Se $x \in h + \mathbb{B}^r$, então $x - h \in \mathbb{B}^r$ e assim $(x - h) + \mathbb{B}^r = \mathbb{B}^r$. Logo para $k > r$, temos por 1.5.3 que

$$(\psi_k * f)(x) = \int_{q^{-k}<|y|\leq q^{-r}} \psi(y)dy$$

$$= \sum_{j=r}^{k-1} \int_{|y|=q^{-j}} \omega(y)|y|^{-n}dy$$

$$= \sum_{j=r}^{k-1} \int_{|y|=1} \omega(\pi^{j}y)dy$$

$$= (k - r) \int_{|y|=1} \omega(y)dy = 0.$$

Se $x \notin h + \mathbb{B}^r$, então $|x - h| > q^{-r}$ e portanto $(x-h+\mathbb{B}^r) \cap \mathbb{B}^r = \phi$. Logo se $k \geq r$, então $x - h + \mathbb{B}^r \subset (\mathbb{B}^k)^c$ e portanto

$$(\psi_k * f)(x) = \int_{x-h+\mathbb{B}^r} \psi(y)dy = (\psi_{r+1} * f)(x).$$

Consequentemente $(\psi_k * f)(x) = (\psi_{r+1} * f)(x)$ para todo $k \geq r + 1$ e $x \in \mathbb{K}^n$. Mas $\psi_k * f \to Lf$ em $L^2(\mathbb{K}^n)$ (ver 7.1.2), assim

$$Lf(x) = \lim_{k \to \infty} (\psi_k * f)(x) = (\psi_{r+1} * f)(x), \quad \text{q.t.x},$$

e $\psi_k * f$ converge em $L^p(\mathbb{K}^n)$ para Lf, $1 < p < \infty$.

Segue então por linearidade que

(4) $$Lf(x) = \lim_{k \to \infty} (\psi_k * f)(x), \quad \text{q.t.x},$$

e $\psi_k * f$ converge em $L^p(\mathbb{K}^n)$ para Lf, $1 < p < \infty$, para toda $f \in S(\mathbb{K}^n)$.

Seja agora $f \in L^p(\mathbb{K}^n)$, $1 < p < \infty$ e seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $S(\mathbb{K}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{K}^n)$, existe $\varphi \in S(\mathbb{K}^n)$ tal que $\|f - \varphi\|_p \leq \varepsilon/4A_p$. Então

$$\begin{aligned}\|\psi_k * f - Lf\|_p &\leq \|\psi_k * f - \psi_k * \varphi\|_p + \|\psi_k * \varphi - L\varphi\|_p + \|L\varphi - Lf\|_p \\ &\leq \|\psi_k * (f - \varphi)\|_p + \|\psi_k * \varphi - L\varphi\|_p + \|L(\varphi - f)\|_p \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \|\psi_k * \varphi - L\varphi\|_p .\end{aligned}$$

Mas $\psi_k * \varphi \to L\varphi$ em $L^p(\mathbb{K}^n)$ e assim existe k_o tal que $\|\psi_k * \varphi - L\varphi\|_p < \varepsilon/2$ para $k \geq k_o$. Segue então que

$$\|\psi_k * f - Lf\|_p < \varepsilon$$

para $k \geq k_o$, e consequentemente $\psi_k * f$ converge em $L^p(\mathbb{K}^n)$ para Lf.

7.3.2. TEOREMA. *Suponhamos que* $\omega(x)$ *satisfaz* 7.1.2(1) *e que existe uma sequência* $(C_j) \in \ell^1$*, tal que*

(1) $$\sup_{|y|=1} \int_{|x|=1} |\omega(x + \pi^j y) - \omega(x)|^s dx \leq C_j^s$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ *e algum* $1 < s < \infty$. *Então* $(\psi_k * f)(x) \to Lf(x)$ q.t.x, *para toda* $f \in L^p(\mathbb{K}^n)$, $p > s'$. *Além disso,*

(2) $$\|L^* f\|_p \leq B_p \|f\|_p$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{K}^n)$, $p > s'$.

DEMONSTRAÇÃO. PARTE 1. O núcleo $\psi'(x,y) = \psi(x - y)$ satisfaz (H_s) e (H_s'), se e somente se, existe uma sequência $(C_j) \in \ell^1$, tal que

(3) $$\int_{|x|=q^j|y|} |\psi(x - y) - \psi(x)|^s dx \leq C_j^s (|y|^n q^{jn})^{-s/s'}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e $y \neq 0$.

PARTE 2. Para todo $y \neq 0$, temos por 1.5.3 que

$$\int_{|x|=q^j|y|} |\psi(x-y) - \psi(x)|^s dx = \int_{|x|=q^j|y|} |\omega(x - y) - \omega(x)|^s |x|^{-ns} dx$$

$$= \int_{|x|=1} |\omega(\pi^{s(y)-j}x - y) - \omega(\pi^{s(y)-j}x)|^s |\pi^{s(y)-j}x|^{n(1-s)} dx$$

$$= (|y|^n q^{jn})^{-s/s'} \int_{|x|=1} |\omega(x - \pi^j y^*) - \omega(x)|^s dx$$

e consequentemente as condições (1) e (3) são equivalentes. A desigualdade (2) segue então de 7.2.7.

PARTE 3. Seja $f \in L^p(\mathbb{K}^n)$, $p > s'$. Como $\mathcal{S}(\mathbb{K}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{K}^n)$, então dado $\delta > 0$, existe $g \in \mathcal{S}(\mathbb{K}^n)$, tal que $\|f - g\|_p < \delta$. Se

$h = f - g$ e

$$\Omega_\varphi(x) = |\lim_{k\to\infty} \sup(\psi_k * \varphi)(x) - \lim_{k\to\infty} \inf(\psi_k * \varphi)(x)|,$$

então por 7.3.1(4) podemos concluir que

$$\Omega_f(x) \leq \Omega_g(x) + \Omega_h(x) = \Omega_h(x) \leq 2L^*h(x),$$

para quase todo $x \in \mathbb{K}^n$. Segue então por (2) que

$$\|\Omega_f\|_p \leq 2\|L^*h\|_p \leq 2B_p\|h\|_p < 2B_p\delta$$

para todo $\delta > 0$ e logo $\|\Omega_f\|_p = 0$. Assim temos que $\Omega_f(x) = 0$, q.t.x, e consequentemente $(\psi_k * f)(x) \to Lf(x)$, q.t.x.

7.3.3. COROLÁRIO. *Suponhamos que*

(1) $$|\omega(x - \pi^j y) - \omega(x)| \leq Cq^{-j}$$

para todo $x, y \in \mathbb{K}^n$, $|x| = |y| = 1$ *e* $j \geq 1$. *Então as conclusões do Teorema* 7.3.1 *são satisfeitas e as conclusões do Teorema* 7.3.2 *são satisfeitas para todo* $1 < p < \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. A condição (1) implica claramente a condição 7.1.2(1) e também a condição 7.3.2(1) para todo $1 < s < \infty$, onde (C_j) é a sequência $C_j = C(1 - q^{-n})^{1/s} q^{-j}$. Consequentemente o resultado segue por 7.3.1 e 7.3.2.

7.3.4. OBSERVAÇÃO. A condição 7.3.3(1) é equivalente a 4.1.8(1) para o núcleo $\psi(x)$, e 4.1.8(1) implica (H'_∞) para $\psi'(x,y) = \psi(x - y)$. Logo a convergência quase sempre e a desigualdade (4) do Teorema 7.3.3 podem ser obtidas diretamente através de 7.2.7 para $s = \infty$.

7.3.5. EXEMPLO. Seja $\omega(x)$ definida sobre $\mathbb{K}$ e suponhamos que existe $t \in \mathbb{N}^*$ tal que $\omega(x)$ depende somente das t primeiras coordenadas de x, para todo $x \in \mathbb{K}^*$ (ver 1.4.19). Se $i \geq t$ e

$x, y \in \mathbb{K}$, $|x| = |y| = 1$, então

$$x + \pi^i y = \sum_{j=0}^{\infty} x_j \pi^j + \pi^i \sum_{j=0}^{\infty} y_j \pi^j$$

$$= \sum_{j=0}^{t-1} x_j \pi^j + \sum_{j=t}^{\infty} z_j \pi^j$$

e portanto $\omega(x + \pi^j y) = \omega(x)$. Consequentemente

$$|\omega(x + \pi^j y) - \omega(x)| = 0$$

para todo $i \geq t$, $x, y \in \mathbb{K}$, $|x| = |y| = 1$, e logo $\omega(x)$ satisfaz 7.3.3(1).

7.3.6. OBSERVAÇÃO. Um símbolo $\omega(x)$ como no Exemplo 7.3.5, é considerado no Teorema 3.13 de [10] para $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$ e $\mathbb{K} = S_p$, com o objetivo de obter a convergência na norma de $L^p(\mathbb{K})$ e as desigualdades (1), (1'), (2) e (2') do Teorema 7.3.1.

7.3.7. OBSERVAÇÃO. Na demonstração do Teorema 7.1.2 (ver [11]), demonstra-se a existência de $\gamma \in L^\infty(\mathbb{K}^n)$ e $C > 0$, tal que

(1) $$|\hat{\psi}_k(x)| \leq C, \quad \text{q.t.x}, \quad k \in \mathbb{N};$$

(2) $$\gamma(x) = \lim_{k \to \infty} \hat{\psi}_k(x), \quad \text{q.t.x.}$$

Como consequência de (1) obtemos facilmente 7.1.2(2). Se $f \in L^2(\mathbb{K}^n)$, então $\hat{\psi}_k(x)\hat{f}(x) \to \gamma(x)\hat{f}(x)$ e $|\hat{\psi}_k(x)\hat{f}(x)| \leq C|\hat{f}(x)|$ q.t.x. Logo pelo Teorema da Convergência Dominada temos que $\hat{\psi}_k\hat{f}$ converge em $L^2(\mathbb{K}^n)$ para $\gamma\hat{f}$ e consequentemente $\psi_k * f = (\hat{\psi}_k\hat{f})^\vee$ converge em $L^2(\mathbb{K}^n)$ para $(\gamma\hat{f})^\vee$ (ver 6.2.6 e 6.2.10). Então para toda $f \in L^2(\mathbb{K}^n)$ temos que $Lf = (\gamma\hat{f})^\vee$ q.s. e assim γ é um multiplicador associado ao operador L.

7.4. TRANSFORMADAS DE HILBERT SOBRE CORPOS LOCAIS

Nesta Seção designaremos por R um subconjunto de um corpo local $\mathbb{K}$ satisfazendo $R \cap (-R) = \phi$ e $R \cup (-R) = \mathbb{K}^*$. Denotaremos $R_k = R \cap (\mathbb{B}^k)^c$ e a função sinal relativa a R será denotada por

$$\operatorname{sng}_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in R, \\ -1 & \text{se} \quad x \in -R. \end{cases}$$

7.4.1. OBSERVAÇÃO. Se a função $\operatorname{sgn}_R(x)$ depende somente de um número finito de coordenadas de x, então segue por 7.3.5 e 7.3.3 que o limite

$$\text{(1)} \qquad H_R f(x) = \lim_{k \to \infty} \int_{R_k} \frac{f(x-y) - f(x+y)}{|y|}\, dy$$

existe quase sempre e também na norma de $L^p(\mathbb{K})$, para toda $f \in L^p(\mathbb{K})$, $1 < p < \infty$.

7.4.2. DEFINIÇÃO. *O operador* H_R *de* 7.4.1(1) *é chamado de transformada de Hilbert associada a* R.

7.4.3. EXEMPLO. Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$ ou S_p e

$$R = \{x \in \mathbb{K} : 1 \leq x_{s(x)} \leq (p-1)/2\},$$

onde $s(x)$ é como antes, tal que $|x| = q^{-s(x)}$. Então

$$-R = \{x \in \mathbb{K} : (p+1)/2 \leq x_{s(x)} \leq p - 1\},$$

$$R \cup (-R) = \mathbb{K}^*, \qquad R \cap (-R) = \phi$$

e a função $\operatorname{sgn}_R(x)$ depende somente da primeira coordenada de x, para todo $x \in \mathbb{K}^*$. Logo existe a transformada de Hilbert H_R.

7.4.4. OBSERVAÇÃO. Seja $\mathbb{K}$ um corpo local e $\mathbb{F} = \mathbb{Q}_p$ ou S_p. O Teorema 1.3.2 diz que $\mathbb{K}$ é uma extensão algébrica finita de $\mathbb{F}$ e portanto $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial de dimensão finita d sobre $\mathbb{F}$, para algum $d \in \mathbb{N}^*$. Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ uma base do espaço vetorial $\mathbb{K}$.

Se R é uma parte de $\mathbb{F}$ verificando $R \cap (-R) = \phi$ e $R \cup (-R) = \mathbb{F}^*$, então

$$R' = \{\sum_{j=1}^{d} \alpha_j v_j : \alpha_j \in R \cup \{0\},\ \alpha_j \neq 0 \text{ para algum } j\}$$

é uma parte de $\mathbb{K}$ verificando $R' \cap (-R') = \phi$ e $R' \cup (-R') = \mathbb{K}^*$. Além disso, se a função $\mathrm{sgn}_R(x)$ depende somente de um número finito de coordenadas de x, então $\mathrm{sgn}_{R'}(y)$ também depende somente de um número finito de coordenadas de y.

7.4.5. OBSERVAÇÃO. A definição da transformada de Hilbert clássica sobre $\mathbb{R}$ é dada por

$$Hf(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{|y|>1/k} \frac{f(x-y)}{y}\, dy$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{1/k}^{\infty} \frac{f(x-y) - f(x+y)}{y}\, dy,$$

onde o limite é tomado na norma de $L^p(\mathbb{R})$, para toda $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, e portanto sua definição é semelhante a definição da transformada de Hilbert H_R sobre um corpo local $\mathbb{K}$.

O multiplicador γ da transformada de Hilbert H_R é dado por

$$\gamma(x) = \lim_{k \to \infty} \hat{\psi}_k(x)$$

$$= \lim_{k \to \infty} - \int_{R_k} \frac{(\chi(xy) - \chi(-xy))}{|y|}\, dy$$

$$= \lim_{k \to \infty} - 2i \int_{R_k} \frac{\mathrm{Im}(\chi(xy))}{|y|}\, dy,$$

para quase todo $x \in \mathbb{K}$. Agora, se χ é o caracter $e^{2\pi i x}$ sobre o grupo aditivo de $\mathbb{R}$, então o multiplicador da transformada de Hilbert real é dado por

$$i\,\mathrm{sgn}(x) = \lim_{k\to\infty} - 2i \int_{1/k}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}(\chi(xy))}{y}\, dy.$$

Portanto vemos que os multiplicadores das tansformadas de Hilbert H_R e H também são semelhantes.

7.4.6. TEOREMA. *A transformada de Hilbert* H_R *comuta com translações e anticomuta com o operador reflexão. Além disso, se* $\pi R = R$, *então* H_R *comuta com o operador de dilatação* δ_k, $k \in \mathbb{Z}$.

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja

$$H_R^k f(x) = \int_{R_k} \frac{f(x-y) - f(x+y)}{|y|}\, dy, \quad f \in L^p(\mathbb{K}), \quad 1 < p < \infty.$$

Então é suficiente demonstrar o teorema para H_R^k, $k \in \mathbb{N}$.

Sejam $f \in L^p(\mathbb{K})$, $1 < p < \infty$ e $x \in \mathbb{K}$. Se $h \in \mathbb{K}$, então

$$\tau_h(H_R^k f)(x) = H_R^k f(x-h) = \int_{R_k} \frac{f(x-h-y) - f(x-h+y)}{|y|}\, dy$$

$$= \int_{R_k} \frac{\tau_h f(x-y) - \tau_h f(x+y)}{|y|}\, dy = H_R^k(\tau_h f)(x)$$

e

$$(H_R^k f)^{\sim}(x) = H_R^k f(-x) = \int_{R_k} \frac{f(-x-y) - f(-x+y)}{|y|}\, dy$$

$$= \int_{R_k} \frac{\tilde{f}(x+y) - \tilde{f}(x-y)}{|y|}\, dy = -(H_R^k \tilde{f})(x).$$

Agora, se $\pi R = R$, então segue por 1.5.3 que

$$\delta_\ell(H_R^k f)(x) = H_R^k f(\pi^\ell x) = \int_{R_k} \frac{f(\pi^\ell x - y) - f(\pi^\ell x + y)}{|y|}\, dy$$

$$= \int_{R_k} (\delta_\ell f(x - \pi^{-\ell} y) - \delta_\ell f(x + \pi^{-\ell} y)) \frac{dy}{|y|}$$

$$= \int_{R_{k-\ell}} \frac{\delta_\ell f(x-y) - \delta_\ell f(x+y)}{|y|}\, dy$$

$$= H_R^{k-\ell}(\delta^\ell f)(x).$$

7.4.7. OBSERVAÇÃO. A transformada de Hilbert real é caracterizada (a menos de produto por uma constante) como um operador limitado de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$ que comuta com translações, comuta com dilatações positivas e anticomuta com o operador reflexão (ver Proposição 1, pág. 55, [15]. O mesmo não é verdade para transformadas de Hilbert sobre corpos locais, isto é, um operador limitado de $L^2(\mathbb{K})$ em $L^2(\mathbb{K})$ que satisfaz todas as conclusões do Teorema 7.4.6, não é (a menos de produto por uma constante) uma transformada de Hilbert H_R, para algum R.

CAPÍTULO 8

APLICAÇÕES AOS MULTIPLICADORES DE FOURIER E À TEORIA DE LITTLEWOOD-PALEY

Na Seção 1 aplicamos resultados do Capítulo 4, para dar uma nova demonstração da versão escalar para corpos locais do Teorema de Hörmander-Mihlin, demonstrado por M. H. Taibleson (ver [17] ou [18]). Utilizando ainda resultados do Capítulo 4, na Seção 2 generalizamos o Teorema de Hörmander-Mihlin-Taibleson, apresentando uma versão diagonal. Uma referência para a versão diagonal real do Teorema de Hörmander-Mihlin é [20].

Na Seção 3, utilizando o teorema sobre multiplicadores escalares demonstrado na Seção 1, apresentamos uma demonstração bastante simplificada do Teorema de Littlewood-Paley, na sua versão para corpos locais, demonstrado por M. H. Taibleson (ver [16] ou [18]).

8.1. MULTIPLICADORES DE $L^p(\mathbb{K}^n)$

8.1.1. DEFINIÇÃO. *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $m \in L^\infty(\mathbb{K}^n)$. *Diremos que* m *é um multiplicador de* $L^p(\mathbb{K}^n)$ *se,* $(m\hat{\varphi})^\vee \in L^p(\mathbb{K}^n)$ *para todo* $\varphi \in S(\mathbb{K}^n)$ *e existe uma constante* $C > 0$, *tal que*

$$\text{(1)} \qquad \|(m\hat{\varphi})^\vee\|_p \leq C\|\varphi\|_p, \qquad \varphi \in S(\mathbb{K}^n).$$

8.1.2. OBSERVAÇÃO. Se $m \in L^\infty(\mathbb{K}^n)$, então m é um multiplicador de $L^2(\mathbb{K}^n)$. De fato, se $\varphi \in S(\mathbb{K}^n)$, então

$$\|(m\hat{\varphi})^\vee\|_2 = \|m\hat{\varphi}\|_2 \leq \|m\|_\infty \|\hat{\varphi}\|_2 = \|m\|_\infty \|\varphi\|_2 .$$

8.1.3. NOTAÇÃO. Para $m \in L^\infty(\mathbb{K}^n)$ e $k \in \mathbb{Z}$ denotaremos $m^k = m\Phi_k$.

8.1.4. OBSERVAÇÃO. Se $m \in L^\infty(\mathbb{K}^n)$, então $m^k \in L^2(\mathbb{K}^n)$ e

$(m^k)^\vee * \varphi = (m^k\hat{\varphi})^\vee$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ e $\varphi \in S(\mathbb{K}^n)$. Além disso, se existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\text{(1)} \qquad \| (m^k)^\vee * \varphi \|_p \le C \|\varphi\|_p$$

para todo $k \le 0$ e $\varphi \in S(\mathbb{K}^n)$, então m é um multiplicador de $L^p(\mathbb{K}^n)$. De fato, seja $\varphi \in S(\mathbb{K}^n)$ e $\ell \in \mathbb{Z}$ tal que $\operatorname{supp}\hat{\varphi} \subset \mathbb{B}^\ell$. Logo, se $k \le \min\{0,\ell\}$, $\mathbb{B}^\ell \subset \mathbb{B}^k$ e assim

$$(m^k\hat{\varphi})^\vee = [(m\Phi_k)\hat{\varphi}]^\vee = [m(\Phi_k\hat{\varphi})]^\vee = (m\hat{\varphi})^\vee.$$

Então por (1) temos que $(m\hat{\varphi})^\vee \in L^p(\mathbb{K}^n)$ e

$$\| (m\hat{\varphi})^\vee \|_p = \| (m^k\hat{\varphi})^\vee \|_p \le C \|\varphi\|_p .$$

8.1.5. TEOREMA. *Seja* $m \in L^\infty(\mathbb{K}^n)$ *e suponhamos que existam* $B > 0$ *e* $\varepsilon > 0$, *tais que, para todo* $j \in \mathbb{Z}$ *temos*

$$\text{(1)} \qquad \int_{|y|<q^j} \int_{|x|=q^j} |m(x+y) - m(x)|^2 |y|^{-(2n+\varepsilon)} dxdy \le B^2 q^{-\varepsilon j}.$$

Então m *é um multiplicador de* $L^p(\mathbb{K}^n)$, $1 < p < \infty$.

8.1.6. LEMA. *Seja* $m \in L^\infty(\mathbb{K}^n)$ *e suponhamos que existam* $B > 0$ *e* $\varepsilon > 0$ *satisfazendo* 8.1.5(1) *para todo* $j \in \mathbb{Z}$. *Então existe uma constante* $C > 0$ *dependendo somente de* n, $\|m\|_\infty$, B *e* ε, *tal que, para todo* k, $t \in \mathbb{Z}$ *temos*

$$\text{(1)} \qquad \sup_{|y|\le q^t} \int_{|x|>q^t} |(m^k)^\vee(x+y) - (m^k)^\vee(x)| dx \le C.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver Lema 1.8, pag. 221, [18].

DEMONSTRAÇÃO DE 8.1.5. Para cada $k \le 0$, consideremos o operador linear T^k, definido por

(2) $\quad T^k\varphi = (m^k)^\vee * \varphi, \qquad \varphi \in S(\mathbb{K}^n).$

Então $(T^k)_{k\leq 0}$ é uma sequência de operadores integrais singulares do tipo convolução, que tem $((m^k)^\vee)_{k\leq 0}$ como sequência de núcleos associada, e que satisfaz a condição 4.2.2(1) para $r = 2$ (ver 8.1.2). Além disso para $k \leq 0$, segue pelo Lema 8.1.6 que

$$\sup_{y\neq 0} \int_{|x|>|y|} |(m^k)^\vee(x+y) - (m^k)^\vee(x)|dx =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{Z}} \sup_{|y|\leq q^t} \int_{|x|>q^t} |(m^k)^\vee(x+y) - (m^k)^\vee(x)|dx \leq C$$

e portanto a sequência de núcleos $((m^k)^\vee)_{k\leq 0}$ verifica 4.2.2(2). Consequentemente, segue pelo Corolário 4.2.2 e pela Observação 8.1.4, que m é um multiplicador de $L^p(\mathbb{K}^n)$, $1 < p < \infty$.

8.2. MULTIPLICADORES DE $L^p(\mathbb{K}^n, \ell^q)$

Nesta Seção $\ell^q(E)$ denotará o espaço de todas as sequências $(x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de elementos de E, indexadas por $\mathbb{Z}$ e munido da norma

$$\|(x_j)_{j\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^q(E)} = \Big(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \|x_j\|_E^q\Big)^{1/q}, \qquad 1 \leq q < \infty;$$

$$\|(x_j)_{j\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^\infty(E)} = \sup_{j\in\mathbb{Z}} \|x_j\|_E .$$

8.2.1. OBSERVAÇÃO. Nesta Seção utilizaremos o Teorema 4.2.3, na forma do Corolário 4.2.4, para uma sequência $(T_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de operadores integrais singulares e uma sequência $(K_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de núcleos associada, indexadas por $\mathbb{Z}$. A demonstração dessa extensão do Teorema 4.2.3, é obtida através de uma pequena alteração na demonstração de 4.2.3.

8.2.2. NOTAÇÃO. Sejam $g \in L^p(\mathbb{K}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{Z}$. Denotaremos então $g^k = g * R_k$, onde $R_k = q^{-kn}\Phi_{-k}$.

8.2.3. LEMA. *Se* $g \in L^2(\mathbb{K}^n)$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *então*

$$(1) \qquad q^{-\alpha}\int_{\mathbb{K}^n}|x|^{\alpha}|\hat{g}(x)|^2dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{-k\alpha}\|g^k - g^{k-1}\|_2^2 ,$$

no sentido que, se um dos membros é finito, então o outro também é, e ambos são iguais.

DEMONSTRAÇÃO. Ver Lema 1.5, pag. 220, [18].

8.2.4. LEMA. *Se* $g \in L^2(\mathbb{K}^n)$ *e* $\alpha > 0$, *então existe uma constante* A_α *dependendo somente de* α, *tal que*

$$(1) \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{-k\alpha}\|g^k - g^{k-1}\|_2^2 \leq$$

$$\leq A_\alpha \int_{\mathbb{K}^n}\int_{\times\,\mathbb{K}^n} |g(x+y) - g(x)|^2|y|^{-(n+\alpha)}dxdy.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver Lema 1.6, pag. 220, [18].

8.2.5. LEMA. *Seja* $(g_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *uma sequência de elementos de* $L^2(\mathbb{K}^n)$ *e* $\varepsilon > 0$. *Se*

$$(1) \qquad \int_{\mathbb{K}^n}\int_{\times\,\mathbb{K}^n} \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|g_j(x+y) - g_j(x)|^2\right)|y|^{-(2n+\varepsilon)}dxdy \leq B^2,$$

então existe uma constante $A_{n\varepsilon}$ *dependendo somente de* n *e* ε, *tal que, para todo* $k \in \mathbb{Z}$, *temos*

$$(2) \qquad \int_{|x|\geq q^k} \sup_j |\hat{g}_j(x)|dx \leq A_{n\varepsilon}Bq^{-k\varepsilon/2}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Segue pela desigualdade de Hölder que

$$\int_{|x|\geq q^k} \sup_j |\hat{g}_j(x)|dx =$$

$$= \int_{\mathbb{K}^n} (|x|^{(n+\varepsilon)/2} \sup_j |\hat{g}_j(x)|)(|x|^{-(n+\varepsilon)/2}(1 - \Phi_{-k+1}(x)))dx$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{K}^n} |x|^{(n+\varepsilon)} \sup_j |\hat{g}_j(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{|x|\geq q^k} |x|^{-(n+\varepsilon)} dx\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{K}^n} |x|^{(n+\varepsilon)} \sup_j |\hat{g}_j(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\frac{1-q^{-n}}{1-q^{-\varepsilon}}\right)^{1/2} q^{-k\varepsilon/2}.$$

Agora, tomando $\alpha = n + \varepsilon$ e aplicando os Lemas 8.2.3 e 8.2.4, obtemos

$$q^{-\alpha} \int_{\mathbb{K}^n} |x|^{\alpha} \sup_j |\hat{g}_j(x)|^2 dx \leq$$

$$\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} q^{-\alpha} \int_{\mathbb{K}^n} |x|^{\alpha} |\hat{g}_j(x)|^2 dx$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{-k\alpha} \| g_j^k - g_j^{k-1} \|_2^2$$

$$\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} A_\alpha \int_{\mathbb{K}^n} \int_{\mathbb{K}^n} |g_j(x+y) - g_j(x)|^2 |y|^{-(n+\alpha)} dxdy$$

$$= A_\alpha \int_{\mathbb{K}^n} \int_{\mathbb{K}^n} \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |g_j(x+y) - g_j(x)|^2\right) |y|^{-(2n+\varepsilon)} dxdy$$

$$\leq A_\alpha B^2$$

e portanto

$$\int_{|x|\geq q^k} \sup_j |\hat{g}_j(x)|dx \leq (A_\alpha B^2 q^{\alpha})^{1/2} \left(\frac{1-q^{-n}}{1-q^{-\varepsilon}}\right)^{1/2} q^{-k\varepsilon/2}$$

$$= A_{n\varepsilon} B q^{-k\varepsilon/2},$$

onde a constante $A_{n\varepsilon}$ depende somente de n e ε.

8.2.6. NOTAÇÃO. Denotaremos por $S(\mathbb{K}^n, \ell_0^\infty)$ o espaço de todas as sequências $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de elementos $\varphi_j \in S(\mathbb{K}^n)$, tal que, existe $r \in \mathbb{N}$ com a propriedade que $\varphi_j \equiv 0$ para $|j| > r$.

8.2.7. OBSERVAÇÃO. O espaço $S(\mathbb{K}^n, \ell_0^\infty)$ é denso em $L^p(\mathbb{K}^n, \ell^q)$, para todo $1 \leq p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$.

8.2.8. DEFINIÇÃO. *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $(m_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *uma sequência de elementos de* $L^\infty(\mathbb{K}^n)$. *Diremos que* $(m_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *é um multiplicador de* $L^p(\mathbb{K}^n,\ell^q)$ *se,* $((m_j\hat{\varphi}_j)^\vee)_{j\in\mathbb{Z}} \in L^p(\mathbb{K}^n, \ell^q)$ *para toda* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in S(\mathbb{K}^n, \ell_0^\infty)$ *e existe uma constante* $C > 0$, *tal que, para toda* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in S(\mathbb{K}^n, \ell_0^\infty)$ *temos*

$$(1) \qquad \| ((m_j\hat{\varphi}_j)^\vee)_j \|_{L^p(\ell^q)} \leq C \| (\varphi_j)_j \|_{L^p(\ell^q)} .$$

8.2.9. OBSERVAÇÃO. Seja $(m_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ uma sequência de elementos de $L^\infty(\mathbb{K}^n)$. Se existe uma constante $C > 0$, tal que

$$(1) \qquad \| ((m_j^k\hat{\varphi}_j)^\vee)_j \|_{L^p(\ell^q)} \leq C \| (\varphi_j)_j \|_{L^p(\ell^q)}$$

para todo $k \leq 0$ e $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in S(\mathbb{K}^n, \ell_0^\infty)$, então $(m_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ é um multiplicador de $L^p(\mathbb{K}^n, \ell^q)$. De fato, seja $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in S(\mathbb{K}^n, \ell_0^\infty)$ e $\ell \in \mathbb{Z}$ tal que $\operatorname{supp}\hat{\varphi}_j \subset \mathbb{B}^\ell$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Logo, se $k \leq \min\{0,\ell\}$, $\mathbb{B}^\ell \subset \mathbb{B}^k$ e assim

$$(m_j^k\hat{\varphi}_j)^\vee = [(m_j\Phi_k)\hat{\varphi}_j]^\vee = [m_j(\Phi_k\hat{\varphi}_j)]^\vee = (m_j\hat{\varphi}_j)^\vee .$$

Então por (1) temos que $((m_j\hat{\varphi}_j)^\vee)_{j\in\mathbb{Z}} \in L^p(\mathbb{K}^n, \ell^q)$ e

$$\| ((m_j\hat{\varphi}_j)^\vee)_j \|_{L^p(\ell^q)} = \| ((m_j^k\hat{\varphi}_j)^\vee)_j \|_{L^p(\ell^q)} \leq C \| (\varphi_j)_j \|_{L^p(\ell^q)} .$$

8.2.10. TEOREMA. *Seja* $(m_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in L^\infty(\mathbb{K}^n, \ell^2)$ *e suponhamos que existam* $B > 0$ *e* $\varepsilon > 0$, *tais que, para todo* $j \in \mathbb{Z}$ *temos*

$$(1) \qquad \int_{|y|<q^j} \int_{|x|=q^j} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |m_i(x+y) - m_i(x)|^2 |y|^{-(2n+\varepsilon)} dxdy \leq B^2 q^{-\varepsilon j}.$$

Então $(m_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *é um multiplicador de* $L^p(\mathbb{K}^n, \ell^q)$ *para todo* $1 < p$, $q < \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $k \leq 0$ e $j \in \mathbb{Z}$, consideremos o operador linear T_j^k, definido por

$$(2) \qquad T_j^k\varphi = (m_j^k)^\vee * \varphi, \qquad \varphi \in S(\mathbb{K}^n).$$

PARTE 1. Para todo $k \leq 0$, $j \in \mathbb{Z}$ e $\varphi \in S(\mathbb{K}^n)$, temos

$$(3) \qquad \|T_j^k\varphi\|_2 = \|(m_j^k\hat{\varphi})^\vee\|_2 = \|m_j^k\hat{\varphi}\|_2$$

$$\leq \|m_j^k\|_\infty \|\hat{\varphi}\|_2 \leq \|(m_j)_j\|_{L^\infty(\ell^2)} \|\varphi\|.$$

Portanto $(T_j^k)_{j\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência de operadores integrais singulares do tipo convolução, que tem $((m_j^k)^\vee)_{j\in\mathbb{Z}}$ como sequência de núcleos associada, e que satisfaz a condição 4.2.4(1) uniformemente em k (ver Observação 8.2.1).

PARTE 2. Para cada $j \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{Z}$ seja $m_{j\ell} = m_j I_{\{x:|x|=q^\ell\}}$. Temos por 8.2.10(1) que

$$(4) \qquad \int_{|y|<q^\ell} \int_{|x|=q^\ell} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |m_{j\ell}(x+y) - m_{j\ell}(x)|^2 |y|^{-(2n+\varepsilon)} dxdy =$$

$$= \int_{|y|<q^\ell} \int_{|x|=q^\ell} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |m_j(x+y) - m_j(x)|^2 |y|^{-(2n+\varepsilon)} dxdy$$

$$\leq B^2 q^{-\varepsilon\ell},$$

e temos também que

(5) $$\int_{|y|\geq q^{\ell}}\int_{|x|=q^{\ell}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |m_{j\ell}(x+y) - m_{j\ell}(x)|^2 |y|^{-(2n+\varepsilon)} dxdy \leq$$

$$\leq \int_{|y|\geq q^{\ell}}\int_{|x|=q^{\ell}} 2\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (|m_{j\ell}(x+y)|^2 + |m_{j\ell}(x)|^2)\, |y|^{-(2n+\varepsilon)} dxdy$$

$$\leq 4\, \| (m_j)_j \|^2_{L^\infty(\ell^2)} |\{x : |x| = q^{\ell}\}| \int_{|y|\geq q^{\ell}} |y|^{-(2n+\varepsilon)} dy$$

$$= 4\, \| (m_j)_j \|^2_{L^\infty(\ell^2)} (1-q^{-n}) q^{\ell n} \{ (1-q^{-n}) \frac{q^{-(n+\varepsilon)\ell}}{1-q^{-(n+\varepsilon)}} \}$$

$$= C_1 q^{-\ell\varepsilon};$$

(6) $$\int_{|y|=q^{\ell}}\int_{|x|<q^{\ell}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |m_{j\ell}(x+y) - m_{j\ell}(x)|^2 |y|^{-(2n+\varepsilon)} dxdy =$$

$$= q^{-(2n+\varepsilon)\ell} \int_{|y|=q^{\ell}}\int_{|x|<q^{\ell}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |m_j(x+y)|^2 dxdy$$

$$\leq \| (m_j)_j \|^2_{L^\infty(\ell^2)}\; q^{-(2n+\varepsilon)\ell} \int_{|y|=q^{\ell}}\int_{|x|<q^{\ell}} dxdy$$

$$= \| (m_j)_j \|^2_{L^\infty(\ell^2)}\; q^{-(2n+\varepsilon)\ell} (1-q^{-n}) q^{\ell n} q^{n(\ell-1)}$$

$$= \| (m_j)_j \|^2_{L^\infty(\ell^2)} (1-q^{-n}) q^{-n} q^{-\varepsilon\ell}$$

$$= C_2 q^{-\varepsilon\ell};$$

(7) $$\int_{|x|=|y|>q^{\ell}}\int \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |m_{j\ell}(x+y) - m_{j\ell}(x)|^2 |y|^{-(2n+\varepsilon)} dxdy \leq$$

$$\leq \int_{|x|=|y|<q^{\ell}}\int \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |m_{j\ell}(x+y)|^2 |y|^{-(2n+\varepsilon)} dxdy \leq$$

$$\leq \|(m_j)_j\|^2_{L^\infty(\ell^2)} \sum_{r=1}^{\infty} \int_{|x|=|y|=q^{\ell+r}} \int |y|^{-2(n+\varepsilon)} dxdy$$

$$= \|(m_j)_j\|^2_{L^\infty(\ell^2)} \sum_{r=1}^{\infty} q^{-(2n+\varepsilon)(\ell+r)} (1-q^{-n})^2 q^{2n(\ell+r)}$$

$$= \|(m_j)_j\|^2_{L^\infty(\ell^2)} (1-q^{-n})^2 q^{-\varepsilon\ell} \sum_{r=1}^{\infty} q^{-r\varepsilon}$$

$$= \|(m_j)_j\|^2_{L^\infty(\ell^2)} (1-q^{-n})^2 q^{-\varepsilon\ell} (q^{-\varepsilon}/(1-q^{-\varepsilon}))$$

$$= C_3 q^{-\varepsilon\ell}.$$

Logo por (4), (5), (6) e (7) temos que

$$(8) \quad \int_{\mathbb{K}^n \times} \int_{\mathbb{K}^n} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |m_{j\ell}(x+y) - m_{j\ell}(x)|^2 |y|^{-(2n+\varepsilon)} dxdy \leq C^2 q^{-\varepsilon\ell}$$

para todo $\ell \in \mathbb{Z}$, onde a constante C depende somente de n, $\|(m_j)_j\|_{L^\infty(\ell^2)}$, B e ε. Segue então pelo Lema 8.2.5, que para todo $k \in \mathbb{Z}$, temos

$$(9) \quad \int_{|x|\geq q^k} \sup_j |(m_{j\ell})^\vee(x)|dx = \int_{|x|\geq q^k} \sup_j |(m_{j\ell})^\wedge(-x)|dx$$

$$= \int_{|x|\geq q^k} \sup_j |(m_{j\ell})^\wedge(x)|dx$$

$$\leq A_{n\varepsilon} C q^{-\varepsilon\ell/2} q^{-\varepsilon k/2}$$

$$= C' q^{-(\ell+k)\varepsilon/2}.$$

Fixemos $t \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{K}^n$, $|y| \leq q^t$. Temos

$$m_j^k(x) = \sum_{\ell \leq -k} (m_{j\ell})^\vee(x), \quad x \in \mathbb{K}^n,$$

e portanto por 6.1.3, temos

$$(m_j^k)^\vee(x) = \sum_{\ell \leq -k} (m_{j\ell})^\vee(x), \qquad x \in \mathbb{K}^n.$$

Como $\Phi_{-\ell} m_{j\ell} = m_{j\ell}$, então o Teorema 6.3.19 implica que $(m_{j\ell})^\vee(x + z) = (m_{j\ell})^\vee(x)$ para todo $x \in \mathbb{K}^n$ e $|z| \leq q^{-\ell}$. Se $\ell \leq -t$, então $|y| \leq q^{-\ell}$ e assim $(m_{j\ell})^\vee(x + y) = (m_{j\ell})^\vee(x)$ para todo $x \in \mathbb{K}^n$. Logo

$$|(m_j^k)^\vee(x + y) - (m_j^k)^\vee(x)| \leq \sum_{-t<\ell\leq -k} |(m_{j\ell})^\vee(x + y) - (m_{j\ell})^\vee(x)|$$

$$\leq \sum_{\ell=-t+1}^{\infty} |(m_{j\ell})^\vee(x + y) - (m_{j\ell})^\vee(x)|$$

para todo $x \in \mathbb{K}^n$. Consequentemente segue por (9) que

$$\text{(10)} \qquad \int_{|x|>q^t} \sup_j |(m_j^k)^\vee(x + y) - (m_j^k)^\vee(x)|dx \leq$$

$$\leq \sum_{\ell=-t+1}^{\infty} \int_{|x|>q^t} \sup_j |(m_{j\ell})^\vee(x+y) - (m_{j\ell})^\vee(x)|dx$$

$$\leq 2 \sum_{\ell=-t+1}^{\infty} \int_{|x|>q^t} \sup_j |(m_{j\ell})^\vee(x)|dx$$

$$\leq 2C' \sum_{\ell=-t+1}^{\infty} q^{-(\ell+t)\varepsilon/2}$$

$$= 2C'q^{-t\varepsilon/2} \sum_{\ell=-t+1}^{\infty} q^{-\varepsilon\ell/2}$$

$$= 2C'q^{-t\varepsilon/2} \frac{(q^{-\varepsilon/2})^{(-t+1)}}{1 - q^{-\varepsilon/2}}$$

$$= 2C' \frac{q^{-\varepsilon/2}}{1 - q^{-\varepsilon/2}} = C''$$

e logo

$$\sup_{y\neq 0} \int_{|x|>|y|} \sup_j |(m_j^k)^\vee(x-y) - (m_j^k)^\vee(x)|dx =$$

$$= \sup_{t\in \mathbb{Z}} \sup_{|y|\leq q^t} \int_{|x|>q^t} \sup_j |(m_j^k)^\vee(x+y) - (m_j^k)^\vee(x)|dx \leq C".$$

Portanto a sequência de núcleos $((m_j^k)^\vee)_{j\in\mathbb{Z}}$ satisfaz 4.2.4(2) uniformemente em k. Assim segue pela Observação 8.2.9 que $(m_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ é um multiplicador de $L^p(\mathbb{K}^n, \ell^q)$ para todo $1 < p,\ q < \infty$.

8.3. APLICAÇÕES À TEORIA DE LITTLEWOOD-PALEY

8.3.1. OBSERVAÇÃO. Nesta Seção designaremos por Ψ a função característica do conjunto $\{y : |y| = 1\}$. Temos que

(1) $$\Psi(\pi^j x) = I_{\{y:|y|=q^j\}}(x)$$

e consequentemente

(2) $$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Psi(\pi^j x) = 1.$$

8.3.2. DEFINIÇÃO. *Definimos as funções* ψ_j *para* $j\in\mathbb{Z}$ *e* φ_j *para* $j \geq 0$ *por:*

(1) $$\hat{\psi}_j(x) = \Psi(\pi^j x), \quad j\in\mathbb{Z};$$

(2) $$\varphi_j = \psi_j, \quad j \geq 1;$$
$$\hat{\varphi}_0 = \sum_{j=-\infty}^{0} \Psi(\pi^j x).$$

8.3.3. LEMA. *As sequências* $(\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *e* $(\varphi_j)_{j\geq 0}$ *satisfazem as seguintes propriedades:*

(1) $$\hat{\psi}_j = I_{\{y:|y|=q^j\}}, \qquad j \in \mathbb{Z};$$

(2) $$\hat{\varphi}_0 = \sum_{j=-\infty}^{0} \hat{\psi}_j = \Phi_0, \qquad \varphi_0 = \Phi_0;$$

(3) $$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\varphi}_j(x) = 1;$$

(4)
$$\psi_j * \psi_i \equiv 0 \quad \textit{para} \quad i,j \in \mathbb{Z},\ i \neq j;$$

$$\psi_j * \psi_j = \psi_j, \qquad j \in \mathbb{Z};$$

$$\varphi_j * \varphi_i \equiv 0 \quad \textit{para} \quad i,j \geq 0,\ i \neq j;$$

$$\varphi_j * \varphi_j = \varphi_j, \qquad j \geq 0;$$

(5)
$$\hat{\psi}_j(x+y) = \hat{\psi}_j(x) \quad \textit{para} \quad |x| > |y|,\ j \in \mathbb{Z};$$

$$\hat{\varphi}_j(x+y) = \hat{\varphi}_j(x) \quad \textit{para} \quad |x| > |y|,\ j \geq 0;$$

(6) $$\psi_j = R_{-j} - R_{j+1}, \qquad j \in \mathbb{Z};$$

(7)
$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\psi_j(x)|^2 \leq C|x|^2, \qquad x \in \mathbb{K}^n;$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j(x)|^2 \leq C|x|^2, \qquad x \in \mathbb{K}^n.$$

DEMONSTRAÇÃO. As demonstrações das propriedades (1) - (6) são imediatas. A demonstração de (7) é feita inicialmente para $|x| = 1$ e depois para $|x| = q^{\ell}$, $\ell \neq 0$, tomando $x' = \pi^{-\ell}x$ e usando o fato que $q^{-\ell}\varphi_j(\pi^{\ell}x') = \varphi_{j+\ell}(x')$.

8.3.4. TEOREMA. *Para cada* $1 < p < \infty$, *existem constantes* A_p *e* B_p *dependendo somente de* p, *tal que, para toda* $f \in L^p(\mathbb{K}^n)$ *temos*

(1) $$A_p \|f\|_p \leq \Big\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j * f|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p \leq B_p \|f\|_p$$

e

(2) $$A_p \|f\|_p \leq \|(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\psi_j * f|^2)^{1/2}\|_p \leq B_p \|f\|_p .$$

DEMONSTRAÇÃO. PARTE 1. Seja $(r_j)_{j\geq 0}$ a sequência das funções de Rademacher (ver Apêndice) e para cada $0 \leq t \leq 1$ consideremos o operador T_t definido por

(3) $$T_t f = \sum_{j=0}^{\infty} r_j(t)\varphi_j * f, \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{K}^n).$$

Se

(4) $$m_t = \sum_{j=0}^{\infty} r_j(t)\hat{\varphi}_j ,$$

então

$$\begin{aligned}(m_t\hat{f})^{\vee} &= (\sum_{j=0}^{\infty} r_j(t)\hat{\varphi}_j\hat{f})^{\vee}\\ &= (\sum_{j=0}^{\infty} r_j(t)\,(\varphi_j * f)^{\wedge})^{\vee}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty} r_j(t)\varphi_j * f\\ &= T_t f.\end{aligned}$$

Temos que $m_t(x+y) = m_t(x)$ para $|x| > |y|$ (ver 8.3.3(5)) e portanto segue pelo Teorema 8.1.5 que m_t é um multiplicador de $L^p(\mathbb{K}^n)$, $1 < p < \infty$, uniformemente em t, isto é, para cada $1 < p < \infty$, existe uma constante C_p dependendo somente de p, tal que, para toda $f \in L^p(\mathbb{K}^n)$ e $0 \leq t \leq 1$, temos

(5) $$\|\sum_{j=0}^{\infty} r_j(t)\varphi_j * f\|_p \leq C_p \|f\|_p .$$

Segue então pela desigualdade de Minkowski para integrais e pela desigualdade de Khintchine (ver Apêndice) que

$$(6) \qquad \|f\|_p = \int_0^1 \|f\|_p dt$$

$$\geq C_p^{-1} \int_0^1 \| \sum_{j=0}^{\infty} r_j(t)\varphi_j * f \|_p dt$$

$$\geq C_p^{-1} \| \int_0^1 | \sum_{j=0}^{\infty} r_j(t)\varphi_j * f| dt \|_p$$

$$\geq B_p^{-1} \| (\sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j * f|^2)^{1/2} \|_p ,$$

e portanto a segunda desigualdade de (1) está demonstrada. Agora, considerando para cada $0 \leq t \leq 1$ o operador $\tilde{T}_t$ definido por

$$(7) \qquad \tilde{T}_t f = \sum_{j=0}^{\infty} r_j(t)\psi_{-j} * f, \qquad f \in S(\mathbb{K}^n),$$

mostramos da mesma forma que

$$(8) \qquad \|f\|_p \geq D_p^{-1} \| (\sum_{j=-\infty}^{0} |\psi_j * f|^2)^{1/2} \|_p .$$

Das desigualdades (6) e (8) segue então a segunda desigualdade de (2).

PARTE 2. Seja $f \in L^2(\mathbb{K}^n) \cap L^p(\mathbb{K}^n)$, $1 < p < \infty$ e $g \in L^2(\mathbb{K}^n) \cap L^{p'}(\mathbb{K}^n)$, $1/p + 1/p' = 1$. A desigualdade de Cauchy-Schwartz, a desigualdade de Hölder e a segunda desigualdade de (1) implicam

$$(9) \qquad \left| \int_{\mathbb{K}^n} f(x)\bar{g}(x)dx \right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{K}^n} (\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j * f)(\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j * \bar{g})dx \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{K}^n} \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi_j * f)(\varphi_j * \bar{g})dx \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{K}^n} (\sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j * f|^2)^{1/2} (\sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j * \bar{g}|^2)^{1/2} dx \leq$$

$$\leq \| (\sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j * f|^2)^{1/2} \|_p \, \| (\sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j * \bar{g}|^2)^{1/2} \|_{p'}$$

$$\leq B_{p'} \| (\sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j * f|^2)^{1/2} \|_p \, \| \bar{g} \|_{p'} \, .$$

Logo, tomando o supremo sobre as $g \in L^2(\mathbb{K}^n) \cap L^{p'}(\mathbb{K}^n)$ tais que $\| g \|_{p'} \leq 1$, obtemos que

$$\| f \|_p \leq B_{p'} \| (\sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j * f|^2)^{1/2} \|_p \, , \tag{10}$$

e portanto a primeira desigualdade de (1) está demonstrada.

A primeira desigualdade de (2) é obtida da mesma forma que a primeira desigualdade de (1).

8.3.5. OBSERVAÇÃO. A desigualdade 8.3.4(2) é uma desigualdade do tipo Littlewood-Paley demonstrada por M. H. Taibleson (ver [18] ou [16]) e a desigualdade 8.3.4(1) é outra desigualdade do tipo Littlewood-Paley adaptada para aplicar no próximo capítulo. A demonstração que demos de 8.3.4(2), é bem menos complicada que a demonstração dada por M. H. Taibleson.

CAPÍTULO 9

OS ESPAÇOS $B^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ E $H^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$

Neste Capítulo introduzimos os espaços de Hardy-Sobolev $H^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ e os espaços de Besov $B^s_{p,s}(\mathbb{K}^n)$ no contexto dos corpos locais. As definições serão dadas seguindo a linha de J. Peetre e nossas referências para o caso do $\mathbb{R}^n$ são J. Bergh - J. Löfström [2, Capítulo 6] e H. Triebel [20]. Utilizando teoremas do Capítulo anterior demonstramos que os espaços $H^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ generalizam os espaços de potenciais de Bessel $H^s_p(\mathbb{K}^n)$ introduzidos por M. H. Taibleson [18, pag. 143]: $H^s_{p,2}(\mathbb{K}^n) = H^s_p(\mathbb{K}^n)$, $1 < p < \infty$. Como temos teoremas de multiplicadores à nossa disposição, conjecturamos que os espaços $B^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ devam generalizar os espaços de Lipschitz $\Lambda^s_p(\mathbb{K}^n)$ introduzidos por M. H. Taibleson [18, pag. 155] e $\Lambda^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ considerados por M. L. Saloff Coste [14].

Nosso objetivo neste Capítulo não é apresentar a teoria completa dos espaços $H^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ e $B^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$, mas mostrar aplicações de teoremas obtidos em capítulos anteriores. Um estudo completo desses espaços será objeto de um trabalho posterior.

9.1. AS DEFINIÇÕES DOS ESPAÇOS $B^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ E $H^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$

9.1.1. DEFINIÇÃO. *Sejam* E *um espaço de Banach,* $1 \le p \le \infty$ *e* $s \in \mathbb{R}$. *O espaço* $\ell^p_s(E)$ *é definido como o conjunto de todas as sequências* $(x_j)_{j\ge0}$ *de elementos de* E *tais que* $(q^{sj}\|x_j\|_E)_{j\ge0} \in \ell^p$. *A norma de* $\ell^p_s(E)$ *é definida por*

$$(1) \qquad \|(x_j)_{j\ge0}\|_{\ell^p_s(E)} = \|(q^{sj}\|x_j\|_E)_{j\ge0}\|_{\ell^p}\,.$$

9.1.2. NOTAÇÃO. Para $j \in \mathbb{Z}$ denotaremos

$$A^j = \mathbb{B}^j \setminus \mathbb{B}^{j+1} = \{x \in \mathbb{K}^n : |x| = q^{-j}\},$$

e como antes $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{K}^n : |x| \leq 1\}$.

9.1.3. DEFINIÇÃO. *Sejam* $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ *e* $1 \leq r \leq \infty$. *Dizemos que* $f \in S'(\mathbb{K}^n)$ *pertence a* $B^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ *se, existe uma sequência* $(a_j)_{j\geq 0} \in \ell^r_s(L^p(\mathbb{K}^n))$ *tal que* $\operatorname{supp} \hat{a}_j \subset A^{-j}$ *para* $j \geq 1$, $\operatorname{supp} \hat{a}_o \subset \mathbb{D}$ *e* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *converge em* $S'(\mathbb{K}^n)$ *para* f. *A norma de* $f \in B^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ *é definida por*

$$(1) \qquad \|f\|_{B^s_{p,r}} = \inf \|(a_j)_{j\geq 0}\|_{\ell^r_s(L^p(\mathbb{K}^n))},$$

onde o infimo é tomado sobre as sequências $(a_j)_{j\geq 0} \in \ell^r_s(L^p(\mathbb{K}^n))$ *tais que,* $\operatorname{supp} \hat{a}_j \subset A^{-j}$ *para* $j \geq 1$, $\operatorname{supp} \hat{a}_o \subset \mathbb{D}$ *e* $f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *em* $S'(\mathbb{K}^n)$.

9.1.4. DEFINIÇÃO. *Sejam* $s \in \mathbb{R}$, $1 < p, r < \infty$. *Dizemos que* $f \in S'(\mathbb{K}^n)$ *pertence a* $H^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ *se, existe uma sequência* $(a_j)_{j\geq 0} \in L^p(\mathbb{K}^n, \ell^r_s)$ *tal que* $\operatorname{supp} \hat{a}_j \subset A^{-j}$ *para* $j \geq 1$, $\operatorname{supp} \hat{a}_o \subset \mathbb{D}$ *e* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *converge em* $S'(\mathbb{K}^n)$ *para* f. *A norma de* $f \in H^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ *é definida por*

$$(1) \qquad \|f\|_{H^s_{p,r}} = \inf \|(a_j)_{j\geq 0}\|_{L^p(\ell^r_s)},$$

onde o infimo é tomado sobre as sequências $(a_j)_{j\geq 0} \in L^p(\mathbb{K}^n, \ell^r_s)$ *tais que,* $\operatorname{supp} \hat{a}_j \subset A^{-j}$ *para* $j \geq 1$, $\operatorname{supp} \hat{a}_o \subset \mathbb{D}$ *e* $f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *em* $S'(\mathbb{K}^n)$.

9.2. UMA CARACTERIZAÇÃO DOS ESPAÇOS $B^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ E $H^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$

Nesta Seção voltaremos a considerar a sequência $(\varphi_j)_{j\geq 0}$ de elementos de $S(\mathbb{K}^n)$ definida em 8.3.2.

9.2.1. OBSERVAÇÃO. Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{K}^n)$. Como $\Phi_{-j}(\hat{\varphi}_j\hat{f}) = \hat{\varphi}_j\hat{f}$, então $\hat{\varphi}_j\hat{f} \in \mathcal{O}_C$ e portanto $\varphi_j * f = (\hat{\varphi}_j\hat{f})^{\vee} \in \mathcal{O}_M$ (ver 6.3.18 e 6.3.19). Em particular $\varphi_j * f$ é uma função para todo $j \geq 0$.

9.2.2. LEMA. *Sejam* $s \in \mathbb{R}$ *e* $1 < p < \infty$. *Então para toda* $f \in H^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ *temos*

(1) $$\|f\|_{H^s_{p,r}} = \|(\varphi_j * f)_{j\geq 0}\|_{L^p(\ell^r_s)}, \qquad 1 < r < \infty;$$

e para toda $f \in B^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ *temos*

(2) $$\|f\|_{B^s_{p,r}} = \|(\varphi_j * f)_{j\geq 0}\|_{\ell^r_s(L^p(\mathbb{K}^n))}, \qquad 1 \leq r \leq \infty.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f \in H^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ e seja $(a_j)_{j\geq 0} \in L^p(\mathbb{K}^n, \ell^r_s)$ tal que $\operatorname{supp}\hat{a}_j \subset A^{-j}$ para $j \geq 1$, $\operatorname{supp}\hat{a}_o \subset \mathbb{D}$ e $f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{K}^n)$. Como $\hat{\varphi}_j = I_{A^{-j}}$ para $j \geq 1$ e $\hat{\varphi}_o = \Phi_o = I_{\mathbb{D}}$ (ver 8.3.2 e 8.3.3), então segue por 6.3.14 que

$$\begin{aligned}(f * \varphi_j)^\wedge = \hat{f}\hat{\varphi}_j &= (\sum_{i=0}^{\infty} a_i)^\wedge \hat{\varphi}_j \\ &= (\sum_{i=0}^{\infty} \hat{a}_i)\hat{\varphi}_j = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{a}_i\hat{\varphi}_j \\ &= \hat{a}_j\hat{\varphi}_j = \hat{a}_j\end{aligned}$$

e portanto

(3) $$f * \varphi_j = a_j, \qquad j \geq 0.$$

Consequentemente temos (1).

A igualdade (3) também vale no caso em que $f \in B^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ e $(a_j)_{j\geq 0}$ é uma sequência nas condições de 9.1.4. Logo (2) segue imediatamente de (3).

9.2.3. TEOREMA. *Seja* $(\psi_j)_{j\geq 0}$ *uma sequência de elementos de* $S(\mathbb{K}^n)$ *tal que*

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} &\operatorname{supp}\hat{\psi}_j = A^{-j}, \quad j \geq 1; \\ &\operatorname{supp}\hat{\psi}_o = \mathbb{D}; \end{aligned}$$

$$\text{(2)}\qquad \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}_j = 1;$$

$$\text{(3)}\qquad \int_{|y|<q^k} \int_{|x|=q^k} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |\hat{\psi}_j(x + y) - \hat{\psi}_j(x)|^2 |y|^{-(2n+\varepsilon)} dxdy \leq B^2 q^{-\varepsilon k}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, *para algum* $B > 0$ *e algum* $\varepsilon > 0$. *Se* $s \in \mathbb{R}$, $1<p<\infty$ *e* $1 \leq r < \infty$, *então existem constantes* A_p *e* B_p, A_p *dependendo somente de* p *e* r *e* B_p *somente de* p, *tal que, para toda* $f \in H^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ *e* $1 < r < \infty$, *temos*

$$\text{(4)}\qquad A_p \| (\psi_j * f)_j \|_{L^p(\ell^r_s)} \leq \|f\|_{H^s_{p,r}} \leq \| (\psi_j * f)_j \|_{L^p(\ell^r_s)} ;$$

e para toda $f \in B^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ *e* $1 \leq r \leq \infty$, *temos*

$$\text{(5)}\qquad B_p \| (\psi_j * f)_j \|_{\ell^r_s(L^p(\mathbb{K}^n))} \leq \|f\|_{B^s_{p,r}} \leq \| (\psi_j * f)_j \|_{\ell^r_s(L^p(\mathbb{K}^n))} .$$

DEMONSTRAÇÃO. PARTE 1. Consideremos a sequência $(a_j)_{j\geq 0}$ definida por $a_j = \psi_j * f$, $j \geq 0$. Temos que

$$\hat{a}_j = (\psi_j * f)^\wedge = \hat{\psi}_j \hat{f}, \quad j \geq 0$$

e portanto a condição (1) implica que

$$\operatorname{supp}\hat{a}_j \subset A^{-j}, \quad j \geq 1$$

e

$$\operatorname{supp}\hat{a}_o \subset \mathbb{D}.$$

A condição (2) implica que

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)^{\wedge} = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{a}_j = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}_j \hat{f}$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}_j\right)\hat{f} = \hat{f}$$

e portanto

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j .$$

Como a sequência $(a_j)_{j\geq 0} = (\psi_j * f)_{j\geq 0}$ está nas condições de 9.1.3 e 9.1.4, então segue pela definição de $\|f\|_{H^s_{p,r}}$ e $\|f\|_{B^s_{p,r}}$ que

$$\|f\|_{H^s_{p,r}} \leq \|(\psi_j * f)_j\|_{L^p(\ell^r_s)}$$

e

$$\|f\|_{B^s_{p,r}} \leq \|(\psi_j * f)_j\|_{\ell^r_s(L^p(\mathbb{K}^n))} .$$

PARTE 2. Como $\operatorname{supp}\hat{\psi}_j = \operatorname{supp}\hat{\varphi}_j$ e pela definição de φ_j, temos

$$(\psi_j * \varphi_j)^{\wedge} = \hat{\psi}_j\hat{\varphi}_j = \hat{\psi}_j$$

e portanto

(6) $$\psi_j * \varphi_j = \psi_j , \qquad j \geq 0.$$

Como a sequência $(\hat{\psi}_j)_{j\geq 0}$ satisfaz (3), então segue pelo Teorema 8.2.10 que $(\hat{\psi}_j)_{j\geq 0}$ é um multiplicador diagonal de $L^p(\mathbb{K}^n, \ell^r)$. Consequentemente por 9.2.2, temos

$$\|(f * \psi_j)_j\|_{L^p(\ell^r_s)} = \|(f * \psi_j * \varphi_j)_j\|_{L^p(\ell^r_s)}$$

$$= \|(q^{sj} f * \psi_j * \varphi_j)_j\|_{L^p(\ell^r)}$$

$$= \|(\{q^{sj}(f * \varphi_j)\} * \psi_j)_j\|_{L^p(\ell^r)} \leq$$

$$\leq C_p \| (q^{sj}\{f * \varphi_j\})_j \|_{L^p(\ell^r)}$$

$$= C_p \| (f * \varphi_j)_j \|_{L^p(\ell^r_s)}$$

$$= C_p \| f \|_{H^s_{p,r}} \quad ,$$

onde a constance C_p depende somente de p e r.

PARTE 3. A condição (3) implica que as funções $\hat{\psi}_j$, $j \geq 0$ são multiplicadores escalares uniformemente limitados de $L^p(\mathbb{K}^n)$, $1 < p < \infty$. Segue então de 9.2.2 e (6) que

$$\| (\psi_j * f)_j \|_{\ell^r_s(L^p(\mathbb{K}^n))} = \| (f * \psi_j * \varphi_j)_j \|_{\ell^r_s(L^p(\mathbb{K}^n))}$$

$$= \| (\| (f * \varphi_j) * \psi_j \|_p)_j \|_{\ell^r_s}$$

$$\leq \| (D_p \| f * \varphi_j \|_p)_j \|_{\ell^r_s}$$

$$= D_p \| (f * \varphi_j)_j \|_{\ell^r_s(L^p(\mathbb{K}^n))}$$

$$= D_p \| f \|_{B^s_{p,r}} \quad ,$$

onde a constante D_p depende somente de p.

9.3. RELAÇÃO COM OS ESPAÇOS DE POTENCIAL DE BESSEL

9.3.1. DEFINIÇÃO. *Sejam* $f \in S'(\mathbb{K}^n)$ *e* $s \in \mathbb{R}$. *O potencial de Bessel de ordem* s *de* f *é definido por*

(1) $$(J^s f)\hat{} = (\max\{1, |x|\})^s \hat{f}.$$

9.3.2. OBSERVAÇÃO. Como $(\max\{1,|x|\})^s \in \mathcal{O}_M$, então $J^s f$ está bem definido como elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{K}^n)$ (ver 6.3.23).

9.3.3. TEOREMA. *Sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Então as aplicações* $f \leftrightarrow J^\alpha f$ *e* $\psi \leftrightarrow J^\alpha \psi$ *são homeomorfismos de* $\mathcal{S}'(\mathbb{K}^n)$ *sobre* $\mathcal{S}'(\mathbb{K}^n)$ *e de* $\mathcal{S}(\mathbb{K}^n)$ *sobre* $\mathcal{S}(\mathbb{K}^n)$ *respectivamente. Se* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{K}^n)$ *então* $J^\alpha(J^\beta f) = J^{\alpha+\beta} f$ *e em particular* $J^{-\alpha} = (J^\alpha)^{-1}$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [18], pag. 137.

9.3.4. DEFINIÇÃO. *Para* $s \in \mathbb{R}$ *e* $1 \leq p \leq \infty$ *definimos o espaço* $H_p^s(\mathbb{K}^n)$ *por*

(1)
$$H_p^s(\mathbb{K}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{K}^n) : J^s f \in L^p(\mathbb{K}^n)\}$$
$$= \{J^{-s} g : g \in L^p(\mathbb{K}^n)\}$$
$$= J^{-s}(L^p(\mathbb{K}^n))$$

que consideramos munido da norma

(2)
$$\|f\|_{H_p^s} = \|J^s f\|_p, \quad f \in H_p^s(\mathbb{K}^n).$$

9.3.5. LEMA. *Para todo* $s \in \mathbb{R}$, $j \geq 0$ *e* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{K}^n)$ *temos que*

(1)
$$J^s(\varphi_j * f) = q^{sj}(\varphi_j * f).$$

DEMONSTRAÇÃO. Para $j \geq 1$ temos

$$(J^s \varphi_j)\hat{}\,(x) = (\max\{1,|x|\})^s \hat{\varphi}_j(x)$$
$$= (\max\{1,|x|\})^s I_{\{y:|y|=q^j\}}(x)$$
$$= (\max\{1,q^j\})^s I_{\{y:|y|=q^j\}}(x)$$
$$= q^{sj} \hat{\varphi}_j(x)$$

e portanto

(2) $$J^s\varphi_j = q^{sj}\varphi_j \, .$$

Temos também que

$$(J^s\varphi_o)^\wedge(x) = (\max\{1,|x|\})^s\hat{\varphi}_o(x)$$

$$= (\max\{1,|x|\})^s\Phi_o(x) = \Phi_o(x)$$

e portanto

(3) $$J^s\varphi_o = \hat{\Phi}_o = \varphi_o \, .$$

Segue de (2) e (3) que para $j \geq 0$ temos

$$J^s(\varphi_j * f) = (J^s\varphi_j) * f = (q^{sj}\varphi_j) * f$$

$$= q^{sj}(\varphi_j * f) .$$

9.3.6. TEOREMA. *Sejam* $s,t \in \mathbb{R}$ *e* $1 < p < \infty$. *Então*

(1) $\|J^s f\|_{H^{t-s}_{p,r}} = \|f\|_{H^t_{p,r}}$, $f \in H^t_{p,r}(\mathbb{K}^n)$, $1 < r < \infty$;

(2) $\|J^s f\|_{B^{t-s}_{p,r}} = \|f\|_{B^t_{p,r}}$, $f \in B^t_{p,r}(\mathbb{K}^n)$, $1 \leq r \leq \infty$;

(3) $\|J^s f\|_{H^{t-s}_p} = \|f\|_{H^t_p}$, $f \in H^t_p(\mathbb{K}^n)$.

DEMONSTRAÇÃO. PARTE 1. Se $f \in H^t_p(\mathbb{K}^n)$, então segue por 9.3.3 que

$$\|J^s f\|_{H^{t-s}_p} = \|J^{t-s}(J^s f)\|_p$$

$$= \|J^t f\|_p = \|f\|_{H^t_p} \, .$$

PARTE 2. Se $f \in H^t_{p,r}(\mathbb{K}^n)$, $1 < r < \infty$, então segue por 9.2.2(1) e 9.3.5(1) que

$$\begin{aligned}
\|J^s f\|_{H^{t-s}_{p,r}} &= \|(\varphi_j * J^s f)_j\|_{L^p(\ell^r_{t-s})} \\
&= \|(J^s(\varphi_j * f))_j\|_{L^p(\ell^r_{t-s})} \\
&= \|(q^{sj}(\varphi_j * f))_j\|_{L^p(\ell^r_{t-s})} \\
&= \|(q^{(t-s)j} q^{sj}(\varphi_j * f))_j\|_{L^p(\ell^r)} \\
&= \|(q^{tj}(\varphi_j * f))_j\|_{L^p(\ell^r)} \\
&= \|(\varphi_j * f)_j\|_{L^p(\ell^r_t)} \\
&= \|f\|_{H^t_{p,r}} .
\end{aligned}$$

PARTE 3. Se $f \in B^t_{p,r}(\mathbb{K}^n)$, $1 \le r \le \infty$, então segue por 9.2.2(2) e 9.3.5 que

$$\begin{aligned}
\|J^s f\|_{B^{t-s}_{p,r}} &= \|(\varphi_j * J^s f)_j\|_{\ell^r_{t-s}(L^p(\mathbb{K}^n))} \\
&= \|(J^s(\varphi_j * f))_j\|_{\ell^r_{t-s}(L^p(\mathbb{K}^n))} \\
&= \|(q^{sj}(\varphi_j * f))_j\|_{\ell^r_{t-s}(L^p(\mathbb{K}^n))} \\
&= \|(q^{(t-s)j} q^{sj} \|\varphi_j * f\|_p)_j\|_{\ell^r}
\end{aligned}$$

$$= \| (q^{tj} \|\varphi_j * f\|_p)_j \|_{\ell^r}$$

$$= \| (\varphi_j * f)_j \|_{\ell^r_t(L^p(\mathbb{K}^n))}$$

$$= \|f\|_{B^t_{p,r}} .$$

9.3.7. TEOREMA. *Se* $s \in \mathbb{R}$ *e* $1 < p < \infty$, *então os espaços* $H^s_p(\mathbb{K}^n)$ *e* $H^s_{p,2}(\mathbb{K}^n)$ *são isomorfos.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $f \in S'(\mathbb{K}^n)$, então por 8.3.4(1) e 9.3.6(1) temos que

$$\|f\|_{H^s_p} = \|J^s f\|_p \approx \|J^s f\|_{H^0_{p,2}} = \|f\|_{H^s_{p,2}} .$$

9.4. RELAÇÃO ENTRE OS ESPAÇOS $B^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ E $\Lambda^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$

9.4.1. DEFINIÇÃO. *Seja* $s > 0$ *e* $1 \leq p, r \leq \infty$. *Diremos que* $f \in L^p(\mathbb{K}^n)$ *pertence a* $\Lambda^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$ *se*

(1) $$\|f\|_{\Lambda^s_{p,r}} = \left(\int_{\mathbb{K}^n} \frac{\|\Delta^k_h f\|^r_p}{|h|^{sr}} \frac{dh}{|h|^n} \right)^{1/r} < \infty.$$

Como no caso do $\mathbb{R}^n$ e tendo em vista têrmos a disposição teoremas de multiplicadores, é natural supor que vale o seguinte.

9.4.2. TEOREMA. *Seja* $s > 0$ *e* $1 \leq p, r \leq \infty$. *Então*

(1) $$B^s_{p,r}(\mathbb{K}^n) = \Lambda^s_{p,r}(\mathbb{K}^n)$$

com equivalência de normas.

APÊNDICE

Uma referência para tudo o que se refere a integral de Bochner é [3].

Seja E um espaço de Banach (real ou complexo) com norma $\|\cdot\|_E$ e $(X,\mathcal{X},\mu)$ um espaço de medida σ-finita onde $\mathcal{X}$ é a σ-álgebra formada pelos conjuntos μ-mensuráveis.

1. DEFINIÇÃO. *Dizemos que uma função* $f : X \to E$ *é simples se, existem* $b_1,b_2,\ldots,b_r \in E$ *e* $A_1,A_2,\ldots,A_r \in \mathcal{X}$ *com* $\mu(A_i) < \infty$, $1 \leq i \leq r$, *tais que*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} b_i I_{A_i}(x)$$

para todo $x \in X$, *onde* I_{A_i} *é a função característica do conjunto* A_i.

2. DEFINIÇÃO. *Dizemos que uma função* $f : X \to E$ *é mensurável se, existe uma sequência* $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *de funções simples convergindo quase sempre para* f, *isto é,*

$$\lim_{i \to \infty} \|f_i(x) - f(x)\|_E = 0, \quad \text{q.t.x.}$$

3. DEFINIÇÃO. *Dizemos que uma função* $f : X \to E$ *é fracamente mensurável se,* $f^{-1}(B) \in \mathcal{X}$ *para todo boreliano* B *de* E.

4. TEOREMA. *Se* E *é separável, então* $f : X \to E$ *é mensurável se e somente se é fracamente mensurável.*

5. DEFINIÇÃO. *Seja* $f(x) = \sum_{i=1}^{r} b_i I_{A_i}(x)$, $b_i \in E$, $A_i \in \mathcal{X}$, *uma função simples. A integral de* f *em relação a* μ *é definida por*

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) = \sum_{i=1}^{r} b_i\, \mu(A_i). \tag{1}$$

6. DEFINIÇÃO. *Uma função* $f : X \to E$ *é Bochner integrável se, existe uma sequência* $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *de funções simples convergindo para* f *quase sempre e tal que*

$$(1) \qquad \lim_{j \to \infty} \int_X \| f_j(x) - f(x) \|_E \, d\mu(x) = 0.$$

Nestas condições, a sequência

$$\int_X f_j(x) \, d\mu(x)$$

converge fortemente em E, *e seu limite*

$$(2) \qquad \int_X f(x) \, d\mu(x) = \lim_{j \to \infty} \int_X f_j(x) \, d\mu(x)$$

é chamado de integral de Bochner da função f.

7. TEOREMA. *Uma função* $f : X \to E$ *é Bochner integrável se e somente se a função escalar* $x \mapsto \| f(x) \|_E$ *for integrável.*

8. COROLÁRIO. *Se* $f : X \to E$ *é Bochner integrável então*

$$(1) \qquad \left\| \int_X f(x) \, d\mu(x) \right\|_E \leq \int_X \| f(x) \|_E \, d\mu(x).$$

9. TEOREMA. *Sejam* E *e* F *espaços de Banach e* $T : E \to F$ *um operador linear contínuo. Se* $f : X \to E$ *é uma função Bochner integrável, então* $T \circ f$ *é Bochner integrável e*

$$(1) \qquad \int_X T(f(x)) \, d\mu(x) = T\left(\int_X f(x) \, d\mu(x) \right).$$

10. DEFINIÇÃO. *O espaço* $\ell^q(E)$ *é o conjunto formado por todas as sequências de elementos de* E, *tais que, a sequência de suas normas está em* ℓ^q. *Em outras palavras,*

$$\ell^q(E) = \{ (x_j)_{j \in \mathbb{N}} : x_j \in E \ \text{ e } \ \Sigma_j \| x_j \|_E^q < \infty \}, \quad 1 \leq q < \infty$$

e

$$\ell^{\infty}(E) = \{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} : x_j \in E \quad e \quad \sup_j \|x_j\|_E < \infty\}.$$

O espaço $\ell^q(E)$ é um espaço de Banach quando está munido da norma

$$\|(x_j)_j\|_{\ell^q(E)} = (\Sigma_j \|x_j\|_E^q)^{1/q}, \qquad 1 \leq q < \infty$$

e

$$\|(x_j)_j\|_{\ell^{\infty}(E)} = \sup_j \|x_j\|_E .$$

Denotaremos por $\ell_m^q(E)$, $m \geq 1$, o subespaço de $\ell^q(E)$ formado pelas sequências $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tais que $x_j = 0$ para $j > m$.

O conjunto formado pelas sequências $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de elementos de E, para as quais existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_j = 0$ para $j > N$, será denotado por $\ell_o^{\infty}(E)$.

11. COROLÁRIO. *Se a função* $f : X \to \ell^q(E)$, $f = (f_j)_{j\in\mathbb{N}}$, *é Bochner integrável, então*

(1) $$\left(\int_X f_j(x)d\mu(x)\right)_j = \int_X (f_j(x))_j d\mu(x).$$

12. DEFINIÇÃO. *O espaço* $L^p(X,E)$, $0 < p < \infty$, *é definido como o conjunto das funções mensuráveis* $f : X \to E$, *tais que*

(1) $$\|f\|_{L^p(E)} = \left(\int_X \|f(x)\|_E^p d\mu(x)\right)^{1/p} < \infty.$$

Quando $1 \leq p < \infty$, $\|\cdot\|_{L^p(E)}$ é uma norma sobre $L^p(X,E)$ e $L^p(X,E)$ é um espaço de Banach quando munido dessa norma. Se $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, denotaremos $\|\cdot\|_{L^p(E)}$ por $\|\cdot\|_p$.

13. DEFINIÇÃO. *O espaço* $L^{\infty}(X,E)$ *é definido como o conjunto das funções mensuráveis* $f : X \to E$, *para as quais existe* $K > 0$ *tal que*

$\|f(x)\|_E \leq K$, q.t.x. *Se* $f \in L^\infty(X,E)$, *definimos*

(1) $$\|f\|_{L^\infty(E)} = \sup_{x \in X} \text{ess } \|f(x)\|_E$$
$$= \inf\{K : \|f(x)\|_E \leq K \quad \text{q.t.x}\}.$$

Temos que $\|\cdot\|_{L^\infty(E)}$ é uma norma sobre $L^\infty(X,E)$ e $L^\infty(X,E)$ é um espaço de Banach quando munido dessa norma. Se $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, denotaremos $\|\cdot\|_{L^\infty(E)}$ por $\|\cdot\|_\infty$.

14. OBSERVAÇÃO. Se $f, g \in L^p(X,E)$, $0 < p \leq \infty$, e $f(x) = g(x)$ q.t.x, então f e g são consideradas como um mesmo elemento de $L^p(X,E)$, isto é, $L^p(X,E)$ é um espaço de classes de equivalência módulo q.s.

15. NOTAÇÕES.

A: Denotaremos por $M(X,E)$ o espaço de todas as funções mensuráveis $f : X \to E$.

B: Seja X um espaço topológico. O subespaço de $L^\infty(X,E)$ das funções de suporte compacto será denotado por $L_c^\infty(X,E)$.

C: Seja X um espaço topológico. O subespaço de $M(X,E)$ formado pelas funções $f(x)$ tais que $x \mapsto \|f(x)\|_E$ é localmente integrável, será denotado por $L^1_{loc}(X,E)$.

D: Sejam E e F espaços de Banach. O espaço de todas as aplicações lineares contínuas $T : E \to F$ será denotado por $L(E,F)$. Esse espaço é um espaço de Banach com norma

$$\|T\|_{L(E,F)} = \sup\{\|T(x)\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}.$$

E: O espaço das funções contínuas com suporte compacto de $\mathbb{K}^n$ em $\mathbb{C}$ será denotado por $C_c(\mathbb{K}^n)$.

16. OBSERVAÇÃO. Se $\mathbb{K}$ é um corpo local, então $L_c^\infty(\mathbb{K}^n,E)$ é denso em $L^p(\mathbb{K}^n,E)$, $1 \leq p < \infty$, pois $\mathbb{K}^n$ é σ-compacto.

17. DEFINIÇÃO. *Sejam* $\mathbb{K}$ *um corpo local,* E *e* F *espaços de Banach e* T *uma aplicação de* $L^\infty(\mathbb{K}^n,E)$ *em* $M(\mathbb{K}^n,F)$. *Se*

(1) $$\|T(f + g)(x)\|_F \leq \|Tf(x)\|_F + \|Tg(x)\|_F$$

para todo $x \in \mathbb{K}^n$ *e* $f, g \in L^\infty(\mathbb{K}^n,E)$, *dizemos que* T *é sublinear.*

18. DEFINIÇÃO. *Seja* T *um operador sublinear de* $L_c^\infty(\mathbb{K}^n,E)$ *em* $M(\mathbb{K}^n,F)$.

(i) *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Se para toda* $f \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n,E)$ *temos*

(1) $$\|Tf\|_{L^p(F)} \leq C\|f\|_{L^p(E)},$$

dizemos que T *é do tipo forte* (p,p).

(ii) *Seja* $1 \leq p < \infty$. *Se para todo* $\lambda > 0$ *e* $f \in L_c^\infty(\mathbb{K}^n,E)$ *temos*

(2) $$|\{x : \|Tf(x)\|_F > \lambda\}| \leq C\lambda^{-p}\|f\|^p_{L^p(E)},$$

então dizemos que T *é do tipo fraco* (p,p).

19. TEOREMA (Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz). *Sejam* E *e* F *espaços de Banach,* T *um operador linear (sublinear se* $F = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) *de* $L_c^\infty(\mathbb{K}^n, E)$ *em* $M(\mathbb{K}^n,F)$ *e* $1 \leq r < s < \infty$. *Se* T *é do tipo fraco* (r,r) *e* (s,s), *então* T *é do tipo forte* (p,p), $r < p < s$. *Se* T *é do tipo forte* (∞,∞) *e do tipo fraco* (r,r), *então* T *é do tipo forte* (p,p), $r < p \leq \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2].

20. TEOREMA. *Se* $0 < r < \infty$ *e* $g \in L^r(X,E)$, *então*

(1) $$\int_X \|g(x)\|_E d\mu(x) = \int_0^\infty rt^{r-1}\mu(\{x : \|g(x)\|_E \geq t\})dt.$$

21. DEFINIÇÃO. *As funções de Rademacher* r_j , $j \geq 0$, *são definidas em* $[0,1]$ *por*

$$(1) \qquad r_j(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} 2^{j+1} \pi x)$$

$$= \sum_{i=1}^{2^{j+1}} (-1)^{i-1} I_{\left(\frac{i-1}{2^{j+1}}, \frac{i}{2^{j+1}}\right)}(x).$$

22. TEOREMA (Desigualdade de Khintchine). *Para todo* $1 \leq p < \infty$, *existem constantes* A_p *e* B_p *dependendo somente de* p, *tais que, para toda sequência* $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, *temos*

$$(1) \qquad A_p \|(\alpha_j)_j\|_{\ell^2} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{j=0}^{\infty} r_j(t)\, \alpha_j\right|^p dt\right)^{1/p} \leq B_p \|(\alpha_j)_j\|_{\ell^2}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Y. AMICE, Les Nombres p-adiques. Presses Universitaires de France, Paris, 1975.

[2] J. BERGH and J. LÖFSTRÖM, Interpolation Spaces. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[3] R. E. EDWARDS, Functional Analysis. Holt, Rinehat and Winstron, New York, 1965.

[4] C. FEFFERMAN and E. M. STEIN, Some maximal inequalities. Amer. J. Math. 1(1971), 107 - 115.

[5] D. L. FERNANDEZ, Operadores integrais singulares vetoriais. Atas do 20º Seminário Brasileiro de Análise, São Paulo, 1984.

[6] J. GARCIA CUERVA and J. L. RUBIO DE FRANCIA, Weighted Norm Inequalities and Related Topics. North-Holland, Amsterdam, 1985.

[7] J. L. JOURNÉ, Calderón-Zygmund operators, pseudo - differential operators and the Cauchy integral of Calderón. Lecture Notes in Math. 994, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[8] N. KOBLITZ, p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-functions. Second edition. Springer-Verlag, New York, 1980.

[9] U. NERI, Some properties of functions with bounded mean oscilation. Studia Math. 61(1977), 63 - 75.

[10] K. PHILLIPS, Hilbert transforms for the p-adic and p-series fields. Pacific J. Math. 23(1976), 329 - 347.

[11] K. PHILLIPS and M. H. TAIBLESON, Singular integrals in several variables over a local field. Pacific J. Math. 30 (1969), 209 - 231.

[12] J. L. RUBIO DE FRANCIA, F. J. RUIZ et J. L. TORREA, Les operateurs de Calderõn-Zygmund vectoriels. C.R. Acad. Sc. Paris, I, 297(1983), 477 - 480.

[13] J. L. RUBIO DE FRANCIA, F. J. RUIZ and J. L. TORREA, Calderõn-Zygmund theory for operator - valued kernels. Advances in Math. 1986.

[14] M. L. SALOFF COSTE, Opérateurs Pseudo-Différentiels sur un Corps Local. These 3e Cycle. Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1983.

[15] E. M. STEIN, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

[16] M. H. TAIBLESON, Harmonic analysis on n-dimensional vector spaces over local fields, II. Generalized Gauss kernels an Littlewood-Paley function, Math. Ann. 186(1970), 1 - 19.

[17] M. H. TAIBLESON, Harmonic analysis on n-dimensional vector spaces over local fields, III. Multipliers, Math. Ann. 187(1970), 259 - 271.

[18] M. H. TAIBLESON, Fourier Analysis on Local Fields. Princeton University Press, Princeton, 1975.

[19] J. L. TORREA, Integrales Singulares Vectoriales. Notas de Algebra y Analisis, Nº 12. Bahia Blanca, 1984.

[20] H. TRIEBEL, Spaces of distribuitions of Besov type on Euclidean n-spaces. Duality, interpolation. Arkiv Math. 11(1973), 13 - 64.

[21] A. WEIL, Basic Number Theory. Third edition. Springer-Verlag, New York, 1974.

[22] F. ZŐ, A Note on approximation of the identity. Studia Math. 55(1976), 11 - 122.