

**Universidade Estadual de Campinas**

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

---

Dissertação de Mestrado

**Comportamento Assintótico de uma  
classe de soluções da Equação de Meios  
Porosos.**

por

**Alison Marcelo Van Der Laan Melo**

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

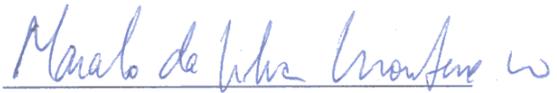
Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq e da CAPES.

**Orientador: Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro**

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE UMA CLASSE DE  
SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE MEIOS POROSOS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Alison Marcelo Van Der Laan Melo** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 19 de julho de 2010



Prof. Dr.: Marcelo da Silva Montenegro  
Orientador

Banca Examinadora:

- 1 Marcelo da Silva Montenegro
- 2 Ademir Pastor Ferreira
- 3 Marcelo Fernandes Furtado

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **MESTRE em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**  
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Melo, Alison Marcelo Van Der Laan

M491c Comportamento assintótico de uma classe de soluções da equação de meios porosos/Alison Marcelo Van Der Laan Melo-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Marcelo da Silva Montenegro

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Comportamento assintótico de soluções. 2.Equações parabólicas quase-lineares. I. Montenegro, Marcelo da Silva. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Asymptotic behavior of a solution class of the porous medium equation

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Asymptotic behavior of solutions. 2. Quasilinear parabolic equations.

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro (IMECC – UNICAMP)  
Prof. Dr. Ademir Pastor Ferreira (IMECC – UNICAMP)  
Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado (UnB)

Data da defesa: 19/07/2010

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

**Dissertação de Mestrado defendida em 19 de julho de 2010 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

*Marcelo da Silva Montenegro*

**Prof.(a). Dr(a). MARCELO DA SILVA MONTENEGRO**

*Ademir P. Ferreira*

**Prof. (a). Dr (a). ADEMIR PASTOR FERREIRA**

*Marcelo Fernandes Furtado*

**Prof. (a). Dr (a). MARCELO FERNANDES FURTADO**

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Walmer e Marcia, pelo incentivo que me deram desde o começo da minha vida estudantil, e por terem, entre tantas outras coisas, me mostrado o valor da educação e da busca pela sabedoria. Sou também imensamente grato aos meus avós, Fausto e Nita pelo apoio que me deram no período em que morei com eles em Recife, sem o qual eu não teria chegado até aqui. Agradeço também as minhas irmãs Thayza, Eliza e Ana pelo carinho e pela amizade, e aos meus tios e primos por estarem sempre presentes em minha vida.

Ao meu orientador Marcelo, eu agradeço pela paciência, pelo apoio e pelas sugestões que foram um guia em um território que para mim era completamente novo e desconhecido. Agradeço aos meus amigos e colegas que tem sido uma excelente companhia ao longo desses cinco anos de trajetória no aprendizado de matemática, em especial agradeço a Roberta pela convivência sempre agradável, e a Henrique pela acolhida assim que cheguei a Campinas e pela amizade construída nesses dois anos. Por fim agradeço ao CNPQ e a CAPES pelo suporte financeiro durante o meu mestrado.

Alison Melo,  
Agosto 2010

*Solitário, tu segues o caminho do  
criador: queres tirar um deus dos teus  
sete demônios!*

---

Friedrich Nietzsche

# Resumo

Nesta dissertação estudamos o comportamento das soluções da equação de meios porosos

$$u_t = \Delta u^m \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$$

onde  $m = (N - 2)/(N + 2)$  com  $u(x, 0) = u_0(x) = O(|x|^{-(N-2)})$ ,  $u_0$  contínua e não negativa, quando o tempo se aproxima do tempo a partir do qual a solução é identicamente nula. Nos basearemos no trabalho de Del Pino e Sáez [5] no qual é estabelecido a seguinte fórmula assintótica

$$(T - t)^{-1/(1-m)} u(x, t) = \left\{ \frac{k_N \lambda}{\lambda^2 + |x - \bar{x}|^2} \right\}^{(N+2)/2} + \vartheta(x, t)$$

para algum  $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\lambda > 0$ , em que  $k_N$  é uma constante que depende apenas de  $N$  e  $\vartheta \rightarrow 0$  em um sentido a ser precisado.

# Abstract

In this work we study the behavior of the solutions of

$$u_t = \Delta u^m \text{ in } \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$$

with  $m = (N - 2)/(N + 2)$ ,  $u(x, 0) = u_0(x) = O(|x|^{-(N-2)})$  and  $u_0$  is a continuous function, when  $t \rightarrow T$ , where  $T$  is the extinction time of  $u$ . Our study was based on the work of Del Pino and Sáez [5] where they proved the asymptotic formula,

$$(T - t)^{-1/(1-m)} u(x, t) \approx \left\{ \frac{k_N \lambda}{\lambda^2 + |x - \bar{x}|^2} \right\}^{(N+2)/2}$$

where  $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\lambda > 0$ , and  $k_N$  depends only on  $N$ .

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	A Equação de Meios Porosos . . . . .	1
1.2	Fluidos em meios porosos. . . . .	2
1.3	A solução de Barenblatt ( $m \neq 1$ ) . . . . .	3
1.4	Velocidade de propagação finita e fronteiras livres . . . . .	4
1.5	EMP com expoente crítico de Sobolev . . . . .	5
1.6	Sobre os resultados principais . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Teoria básica da equação de meios porosos</b>	<b>7</b>
2.1	Soluções fracas . . . . .	7
2.2	Unicidade de soluções fracas . . . . .	9
2.3	Existência de soluções fracas . . . . .	10
2.4	Limitação absoluta na norma do supremo. . . . .	14
2.5	Existência de Soluções Clássicas. . . . .	15
2.6	A estimativa $L^1$ básica. . . . .	16
<b>3</b>	<b>Propriedade de anulação das soluções da equação de meios porosos.</b>	<b>18</b>
3.1	Introdução . . . . .	18
3.2	Esquema das demonstrações . . . . .	21
3.3	Positividade num intervalo de tempo pequeno. . . . .	25
3.4	Estimativa de Harnack. . . . .	28
3.5	Algumas verificações referentes a Seção 3.4 . . . . .	31
3.5.1	Cálculo da expansão "no infinito" de $w$ . . . . .	31

3.5.2	Cálculo da expansão "no infinito" de $\frac{\partial w}{\partial x_k}$ . . . . .	33
3.5.3	Existe $\lambda_0 > 0$ tal que $w^\lambda < w$ se $\lambda_0 \leq x_N < \lambda$ com $x_j \geq 0$ . . . . .	33
3.6	Estimativas Uniformes . . . . .	34
3.7	O Funcional de Lyapunov . . . . .	36
3.8	Demonstrações dos resultados principais . . . . .	37
<b>A</b>	<b>Resultados sobre equações parabólicas.</b>	<b>44</b>
A.1	Existência de Soluções para Equações parabólicas não degeneradas . . . . .	44
A.2	Princípios do Máximo e de Comparação . . . . .	47
<b>B</b>	<b>Um pouco de geometria Riemanniana</b>	<b>50</b>
B.1	Operador de Laplace Beltrami . . . . .	50
B.2	O fluxo de Yamabe . . . . .	50
B.2.1	O Problema de Yamabe. . . . .	51
B.2.2	O fluxo de Yamabe . . . . .	51
<b>C</b>	<b>Identidade de Derrick-Pohozaev</b>	<b>53</b>
<b>D</b>	<b>Lema de Hopf e Moving Planes</b>	<b>57</b>
D.1	Lema de Hopf e Princípio do Máximo Forte . . . . .	57
D.2	Moving Planes . . . . .	58
<b>E</b>	<b>Lema 1 e Teorema. 3 de Simon [18]</b>	<b>62</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 A Equação de Meios Porosos

Neste trabalho estudaremos a seguinte equação

$$u_t = \Delta u^m \tag{1.1}$$

chamada *equação de meios porosos*. Faremos neste capítulo as seguintes suposições:  $u$  é uma função escalar não negativa no espaço  $\mathbb{R}^N$ , com  $N \geq 1$ ,  $\Delta$  representará o Laplaciano nas variáveis espaciais, e nos referiremos a (1.1) pela abreviação EMP, e  $m > 1$ . A equação pode ser definida para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  e tempo  $t \in (0, \infty)$ . Condições iniciais serão requeridas para determinar a solução. Caso o problema seja em um domínio limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  com  $0 < t < T$  precisaremos de condições de contorno bem como de condições iniciais.

O desenvolvimento de uma teoria matemática para a EMP é fortemente motivado por suas importantes aplicações. De fato, essa equação aparece naturalmente na modelagem de processos envolvendo fluxos, transferência de calor e difusão. Os primeiros a usarem a EMP para modelar o fluxo de um gás isotrópico através de um meio poroso foram Leibenzon [15] e Muskat [16], independentemente em 1930.

## 1.2 Fluidos em meios porosos.

Como dito acima a equação de meios porosos aparece no estudo de diversos fenômenos naturais, mas como o próprio nome da equação sugere, é na modelagem de fluxos em meios porosos que esta equação é mais utilizada. Apresentaremos nesta seção uma breve explicação de como a EMP aparece neste caso.

Antes de mais nada destacamos que o fluido que estaremos considerando será um gás ideal, ou seja a interação entre as moléculas do gás em questão pode ser desprezada, o que é um caso bastante comum na natureza. Sabe-se que para um gás ideal em um meio poroso vale a seguinte equação, conhecida como *equação do balanço de massa*,

$$\epsilon u_t + \nabla \cdot (uV) = 0, \quad (1.2)$$

onde  $u$  e  $V$  são respectivamente a densidade do gás e a velocidade do fluxo (funções dependentes das variáveis espacial e temporal), e  $\epsilon$  é uma constante positiva relacionada a porosidade do meio. É também conhecida a chamada *equação de estado* que relaciona pressão e densidade de um gás ideal:

$$p = p_0 u^\gamma \quad (1.3)$$

em que  $p$  é a pressão do gás, que depende do ponto e do instante considerados,  $p_0$  é uma constante positiva e  $\gamma$  é a chamada constante politrópica do gás em questão. Ora, a pressão está relacionada com a velocidade do fluxo pela seguinte fórmula

$$\mu V = -k \nabla p, \quad (1.4)$$

em que  $k$  e  $\mu$  são constantes. Logo fazendo as devidas substituições obtemos

$$\epsilon u_t + \frac{-kp_0}{\mu} \Delta(u^{\gamma+1}) = 0$$

que após um reescalonamento da variável temporal se torna a EMP. Em geral, tanto na modelagem de fluidos como em outras aplicações a equação de meios porosos aparece com um expoente  $m$  maior do que um, neste caso é conhecida uma solução explícita, a qual foi encontrada por Zel'dovich e Kompaneets [23], e Barenblatt [1] e apresentamos a seguir.

### 1.3 A solução de Barenblatt ( $m \neq 1$ )

Nesta seção vamos obter a solução de Barenblatt, como em [6]. Para isso começaremos buscando uma solução de (1.1), que seja invariante por um reescalonamento, ou seja,

$$U(x, t) = \mu^\alpha U(\mu^\beta x, \mu t),$$

para todo  $\mu > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$  e  $t > 0$ , com  $\alpha, \beta$  constantes a serem determinadas. Fazemos  $\mu = t^{-1}$ , obtendo assim,

$$U(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N\right), \quad t > 0 \quad (1.5)$$

com  $v(y) = U(y, 1)$ . Substituindo (1.5) em (1.1) obtemos

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha m + 2\beta)} \Delta(v^m)(y) = 0 \quad (1.6)$$

com  $y = t^{-\beta} x$ . Objetivando tornar (1.6) uma expressão envolvendo apenas a variável  $y$ , impomos

$$\alpha + 1 = \alpha m + 2\beta. \quad (1.7)$$

Dessa forma (1.6) se transforma em

$$\alpha v + \beta y \cdot Dv + \Delta(v^m) = 0. \quad (1.8)$$

Podemos simplificar nosso problema ainda mais impondo que  $v$  seja radial, ou seja,  $v(y) = w(|y|)$  para alguma função  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dessa forma a equação (1.8) se torna

$$\alpha w + \beta r w' + (w^m)'' + \frac{N-1}{r} (w^m)' = 0, \quad (1.9)$$

onde ' representa a derivada em relação a  $r = |y|$ . Impomos ainda,

$$\alpha = N\beta, \quad (1.10)$$

o que transforma (1.9) em

$$(r^{N-1} (w^m)')' + \beta (r^N w)' = 0.$$

Integrando,

$$r^{N-1} (w^m)' + \beta (r^N w) = a$$

para alguma constante  $a$ . Se assumimos ainda que  $\lim_{r \rightarrow \infty} w = \lim_{r \rightarrow \infty} w' = 0$ , temos que  $a = 0$  donde

$$(w^m)' = -\beta r w.$$

Então,

$$(w^{m-1})' = -\frac{(m-1)}{m} \beta r.$$

Consequentemente,

$$w^{m-1} = C - \frac{m-1}{2m} \beta r^2,$$

onde  $C$  é uma constante. Segue que,

$$w = \left( C - \frac{m-1}{2m} \beta r^2 \right)_+^{\frac{1}{m-1}}, \quad (1.11)$$

em que tomamos a parte positiva do lado direito de (1.11) para garantir que  $w \geq 0$ . Obtemos assim por (1.5), que

$$U(x, t) = t^\lambda \left[ C - k \frac{|x|^2}{t^{2\sigma}} \right]_+^{\frac{1}{m-1}}, \quad (1.12)$$

com  $\lambda = \frac{N}{N(m-1)+2}$ ,  $\sigma = \frac{\lambda}{N}$ ,  $k = \frac{\lambda(m-1)}{2mN}$ , e  $C > 0$  é uma constante.

Na expressão da solução de Barenblatt em (1.12) vemos que  $U$  possui suporte compacto para todo  $t > 0$ . Dessa observação podemos concluir que o princípio do máximo forte não se verifica para a EMP. De fato, se o dado inicial tiver suporte compacto, a solução correspondente terá suporte compacto para todo  $t > 0$ . Isso origina o fenômeno da *velocidade de propagação finita* das soluções da EMP.

## 1.4 Velocidade de propagação finita e fronteiras livres

A EMP possui grande semelhança formal com a Equação do Calor a qual pode ser vista como sendo o caso em que  $m = 1$  em (1.1), e de fato a EMP compartilha muitas das propriedades conhecidas da Equação do Calor. Porém o fato de a EMP ser uma equação não-linear e degenerada (vide o Apêndice A) gera fenômenos interessantes do ponto de vista matemático e de suas aplicações que a distinguem profundamente da Equação do calor. Um exemplo interessante diz respeito a velocidade de propagação da fronteira entre a região onde  $u > 0$  e a região onde  $u = 0$  o que pode ser enunciado assim,

- *Uma solução não trivial e não-negativa da equação do calor é automaticamente positiva ( $> 0$ ) em todo seu domínio.*
- *Perturbações no nível  $u = 0$  se propagam com velocidade finita para soluções da EMP.*

A velocidade de propagação finita faz da EMP um modelo mais adequado para fenômenos físicos do que a equação do calor.

A propriedade de propagação finita da EMP leva ainda a outra característica interessante dessa equação que é a existência de *fronteira livre*, que é a fronteira entre a região onde  $u > 0$  e a região onde  $u = 0$ . As fronteiras livres são um importante e difícil objeto de investigação matemática, tratado por exemplo em [8]. A fronteira livre de um problema não-linear pode ser um subconjunto complicadíssimo de  $D := \Omega \times [0, T)$ , e por isso, no cerne de sua investigação encontra-se a questão da regularidade deste conjunto, que no caso da EMP é muitas vezes  $C^\infty$ .

Outro tema importante dentro do estudo da EMP é o comportamento assintótico de suas soluções, o que é de fato o tema dos resultados principais apresentados neste trabalho (Capítulo 3), devidos a Del Pino e Sáez [5]. Esses resultados dizem respeito ao comportamento assintótico das soluções de (1.1) com  $m = \frac{N-2}{N+2}$  (conhecido como *expoente crítico de Sobolev*).

## 1.5 EMP com expoente crítico de Sobolev

A EMP com expoente crítico de Sobolev desperta especial interesse matemático devido a sua estreita relação com um famoso problema da geometria, o problema de Yamabe, mais precisamente com o fluxo de Yamabe. O problema de Yamabe é encontrar dentro de uma classe de métricas conformes em uma variedade Riemanniana uma que possua curvatura escalar constante. Já fluxo de Yamabe é uma equação de evolução usada para a partir de uma métrica dada encontrar uma métrica conforme de curvatura constante (para mais detalhes veja o Apêndice B).

As funções

$$F(x, \lambda) = \kappa_n \left( \frac{\lambda}{\lambda^2 + |x|} \right)^{(n+2)/2}$$

formam uma família de métricas conformes de curvatura constante na interpretação associada

ao problema de Yamabe como explicado no Apêndice B. Essas funções terão um papel central nos resultados principais apresentados no Capítulo 3 e brevemente discutidos na próxima seção.

Uma ferramenta importante associada a EMP com expoente de Sobolev é a *inversão*. A inversão é dada pela fórmula

$$\tilde{u}(x, t) = |x|^{-(n+2)}u(I(x), t), \quad I(x) = x/|x|^2.$$

O interessante é que se  $u$  é solução da EMP com expoente crítico de Sobolev,  $m = \frac{N-2}{N+2}$ , então  $\tilde{u}$  também o é. Uma propriedade interessante da inversão é a conservação da norma  $L^{p^*}$ , com  $p^* = 2n/(n+2)$ , outra propriedade interessante é que ela nos permite analisar o comportamento de  $u$  quando  $|x| \rightarrow \infty$  a partir do comportamento de  $\tilde{u}$  perto de 0.

## 1.6 Sobre os resultados principais

Como dito acima, os resultados principais desta dissertação, apresentados e demonstrados no Capítulo 3, dizem respeito ao comportamento assintótico das soluções da EMP com expoente crítico de Sobolev. Neles descrevemos seu comportamento quando o tempo se aproxima de um valor  $T > 0$  a partir do qual a solução é nula.

O primeiro desses resultados, o Teorema 3.1.1 (pág. 20) nos diz que as soluções da EMP com expoente crítico de Sobolev, em  $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$  com o dado inicial satisfazendo uma certa condição de decaimento satisfazem

$$(T - t)^{-1/(1-m)}u(x, t) = \left\{ \frac{k_N \lambda}{\lambda^2 + |x - \bar{x}|^2} \right\}^{(N+2)/2} + \vartheta(x, t)$$

para algum  $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\lambda > 0$ , em que  $k_N$  é uma constante que depende apenas de  $N$  e  $\vartheta \rightarrow 0$  em um sentido a ser precisado. Já o segundo teorema (Teorema 3.1.2) trata da estabilidade do parametro  $T$  em relação ao dado inicial, estabelecendo que eles definem funções contínuas do dado inicial (continuidade em uma norma a ser definida no Capítulo 3).

# Capítulo 2

## Teoria básica da equação de meios porosos

Neste capítulo consideraremos a EMP,

$$u_t(x, t) = \Delta u(x, t)^m, \quad (x, t) \in Q = \Omega \times [0, \infty) \quad (2.1)$$

onde,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  e  $m > 1$ <sup>1</sup>. Aqui apresentaremos o conceito de solução fraca para a EMP, demonstraremos existência e unicidade, e posteriormente discutiremos a existência de soluções clássicas, baseado em [19]. Neste capítulo,  $\Omega$  é um subconjunto aberto e limitado de  $\mathbb{R}^N$  que possui uma fronteira suave,  $Q$  é como em (2.1),  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  e  $\Sigma = \partial\Omega \times [0, \infty)$ . Os resultados deste capítulo também podem ser estendidos para  $\mathbb{R}^N \times [0, \infty)$  no contexto de soluções fortes como definido em [19]. Tais resultados serão usados no Capítulo 3 para soluções que são regulares, portanto neste capítulo restringiremos nosso estudo a domínios limitados  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ .

### 2.1 Soluções fracas

Considere o seguinte problema,

$$u_t = \Delta u^m \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>Faremos a teoria básica no caso  $m > 1$ , porém os resultados apresentados neste capítulo podem ser estendidos para  $m < 1$ , vide [20].

$$u(x, 0) = u_0(x), \text{ em } \Omega \quad (2.3)$$

$$u(x, t) = 0, \text{ em } \Sigma_T = \partial\Omega \times [0, T], \quad (2.4)$$

onde  $m > 1$  e  $u_0$  é não-negativa e localmente integrável, e  $\Gamma = \partial\Omega \in C^3$ .

**Definição** Uma função não-negativa  $u$  definida em  $Q_T$  é dita *solução fraca* de (2.2)-(2.4) se

i.  $u^m \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$

ii.  $u$  satisfaz a seguinte identidade

$$\int \int_{Q_T} \{\nabla(u^m) \cdot \nabla\varphi - u\varphi_t\} dxdt = \int_{\Omega} u_0(x)\varphi(x, 0)dx \quad (2.5)$$

para qualquer  $\varphi \in C^1(\bar{Q}_T)$  que se anule em  $\Sigma \cup (\Omega \times \{T\})$ .

Na definição acima  $u_0$  pertence pelo menos a  $L^1(\Omega)$  para que (2.5) esteja bem definida. Observe que a equação é satisfeita apenas em um sentido fraco já que as derivadas em (2.2) são funções, mas existem apenas no sentido de distribuições. De fato, se  $\varphi \in C_c^\infty$ , observamos que  $u_t = \Delta(u^m)$  no sentido de distribuições. Finalmente, a condição inicial (2.3) está embutida na integral (2.5), e é na realidade satisfeita, em um sentido fraco.

**Proposição 2.1.1** *Seja  $u$  uma função não negativa definida em  $Q_T$  tal que*

i.  $u^m \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$

ii.  $u$  satisfaz a identidade,

$$\int \int_{Q_T} \{\nabla(u^m) \cdot \nabla\varphi - u\varphi_t\} dxdt = 0 \quad (2.6)$$

para qualquer função  $\varphi \in C_c^1(Q_T)$

iii. para todo  $t > 0$  temos  $u(t) \in L^1(\Omega)$  e  $u(t) \rightarrow u_0$  quando  $t \rightarrow 0$  em  $L^1(\Omega)$ .

Então  $u$  é uma solução fraca de (2.2)-(2.4) de acordo com a definição acima.

**Demonstração:** Suponhamos  $u$  como no enunciado. Temos que provar que (2.5) se verifica. É fácil ver que (2.6) continua válida quando  $\varphi \in C^1(Q_T)$  e  $\varphi = 0$  em  $\partial Q_T$  (basta aproximar  $\varphi$  por  $\varphi_\epsilon \in C_c^1(\Omega)$  e tomar o limite).

Se  $\varphi$  é como em (2.5) tomamos a função de corte  $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq \zeta \leq 1$  tal que  $\zeta(s) = 0$  para  $s < 0$ ,  $\zeta(s) = 1$  para  $s \geq 1$  e  $\zeta' \geq 0$ , e definimos  $\zeta_n(t) = \zeta(nt)$ . Calculando (2.6) com a função teste  $\varphi(x, t)\zeta_n(t)$  nos dá,

$$\begin{aligned} \int \int_Q \{ \nabla(u^m) \cdot \nabla \varphi - u \varphi_t \} \zeta dx dt &= \int \int_Q u \varphi \zeta_{n,t} = \int \int_{Q_{1/n}} u \varphi \zeta_{n,t} \\ &= \int \int_{Q_{1/n}} (u - u_0) \varphi \zeta_{n,t} + \int \int_{Q_{1/n}} u_0 \varphi \zeta_{n,t} \end{aligned}$$

Fixemos  $\epsilon > 0$  e seja  $n$  suficientemente grande para que  $\|u - u_0\|_1 \leq \epsilon$  para  $0 \leq t \leq 1/n$ . Então a primeira integral do último membro é menor do que  $\epsilon \|\varphi\|_\infty \int \zeta_{n,t} dt$  o qual tende a zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Além disso para o último termo temos,

$$\begin{aligned} \int \int_{Q_{1/n}} u_0 \varphi \zeta_{n,t} &= \int_\Omega u_0(x) \varphi(x, \frac{1}{n}) dx \\ - \int \int_{Q_{1/n}} u_0 \varphi_t \zeta_n dx dt &\rightarrow \int_\Omega u_0(x) \varphi(x, 0) dx \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , o que prova (2.5). ■

É claro que uma solução clássica é automaticamente uma solução fraca do problema. Além disso, apesar da solução  $U$  definida em (1.12) na Introdução, não ser uma solução fraca devido a singularidade de seu dado inicial, e pelo fato de seu valor de fronteira não ser zero, podemos obter a partir dela soluções fracas através do seguinte processo. Tome  $x_0 \in \Omega$ , e seja  $\tau > 0$ , e  $C$  na definição suficientemente pequeno. Então a função,

$$w(x, t) = U(x - x_0, t + \tau) \tag{2.7}$$

é uma solução fraca de (2.2)-(2.4) em qualquer intervalo de tempo  $(0, T)$  no qual a fronteira livre está dentro de  $\Omega$ , isto é, se

$$T + \tau \leq c \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)^{N(m-1)+2}.$$

Observe que  $w$  não é uma solução clássica.

## 2.2 Unicidade de soluções fracas

A unicidade de soluções fracas é demonstrada usando-se uma função teste específica.

**Teorema 2.2.1** *O problema (2.2)-(2.4) tem no máximo uma solução fraca.*

**Demonstração:** Suponhamos que temos duas soluções  $u_1$  e  $u_2$ . Por (2.5) temos,

$$\int \int_{Q_t} (\nabla(u_1^m - u_2^m) \cdot \nabla\varphi - (u_1 - u_2)\varphi_t) dxdt = 0 \quad (2.8)$$

para toda função de teste  $\varphi$ . Queremos usar a seguinte função de teste,

$$\eta(x, t) = \begin{cases} \int_t^T (u_1^m(x, s) - u_2^m(x, s)) ds, & \text{se } 0 < t < T \\ 0, & \text{se } t \geq T, \end{cases} \quad (2.9)$$

onde  $T > 0$ . Mesmo se  $\eta$  não tiver a suavidade requerida podemos aproximá-la por funções suaves  $\eta_\epsilon$  para as quais (2.5) se verifica. Como

$$\eta_t = -(u_1^m - u_2^m) \in L^2(Q_T), \quad (2.10)$$

$$\nabla\eta = \int_t^T (\nabla u_1^m - \nabla u_2^m) ds \in L^2(Q_T), \quad (2.11)$$

e além disso  $\eta(t) \in H_0^1(\Omega)$  e  $\eta(T) = 0$ , podemos tomar o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  e (2.5) valerá também para  $\eta$ . Portanto,

$$\int \int_{Q_T} (u_1^m - u_2^m)(u_1 - u_2) dxdt + \int \int_{Q_T} (\nabla(u_1^m - u_2^m)) \cdot \left( \int_t^T (\nabla u_1^m - \nabla u_2^m) ds \right) dxdt = 0.$$

Integrando o ultimo termo temos,

$$\int \int_{Q_T} (u_1^m - u_2^m)(u_1 - u_2) dxdt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \int_0^T (\nabla u_1^m - \nabla u_2^m) ds \right)^2 dx = 0. \quad (2.12)$$

Como ambos os termos são não-negativos, concluímos que  $u_1 = u_2$  q.t.p em  $Q$ . ■

**Corolário 2.2.1** *Existem dados iniciais para os quais o problema (2.2)-(2.4) não admite solução clássica.*

**Demonstração:** Basta observar que (2.7) é solução fraca que não é clássica do problema, e o corolário pode ser deduzido da unicidade de soluções fracas.

## 2.3 Existência de soluções fracas

Sabemos da seção anterior que caso exista uma solução fraca para (2.2)-(2.4), esta é única. Vejamos agora que se o dado inicial está em  $L^{m+1}(\Omega)$ , uma tal solução sempre existe.

**Teorema 2.3.1** *Suponhamos que  $u_0 \in L^{m+1}(\Omega)$ ,  $u_0 \geq 0$ . Então o problema (2.2)-(2.4) tem uma solução fraca em um intervalo de tempo infinito ( $T = \infty$ ).*

**Demonstração:** Faremos esta demonstração em etapas. Consideraremos primeiro o caso em que  $u_0$  é suave e se anula na fronteira e demonstraremos o resultado neste caso, obtendo também nesse ponto uma estimativa importante. Essa estimativa nos permitirá resolver o problema no contexto mais geral do teorema.

**Parte 1:** *Suponhamos que  $u_0 \geq 0$  e  $u_0 \in C_c^\infty(\Omega)$ .*

Começaremos construindo uma sequência de dados iniciais  $u_{0n}$  de tal forma que  $u_n(x, t) > 0 \forall (x, t) \in Q$ , objetivando com isso evitar a degeneração da equação (que se manifesta quando  $u = 0$ ). Podemos simplesmente tomar,

$$u_{0n} = u_0 + \frac{1}{n}. \quad (2.13)$$

Vamos resolver agora o seguinte problema,

$$(u_n)_t = \Delta(u_n^m) \text{ em } Q, \quad (2.14)$$

$$u_n(x, 0) = u_{0n}(x) \text{ em } \bar{\Omega} \quad (2.15)$$

$$u_n(x, t) = \frac{1}{n} \text{ em } \Sigma. \quad (2.16)$$

Devido ao dado inicial temos,

$$\frac{1}{n} \leq u_n(x, t) \leq M + \frac{1}{n} \quad (2.17)$$

pelo princípio do máximo (vide Apêndice A.2), onde  $M = \sup(u_0)$ . Portanto, estamos tratando na prática de um problema uniformemente parabólico. De fato, o problema (2.14)-(2.16) tem uma única solução  $u_n \in C^{2,1}(\bar{Q})$ . A justificativa rigorosa usa um truque que consiste de substituir a equação (2.14) por

$$(u_n)_t = \operatorname{div}(a_n(u) \nabla u_n) \quad (2.18)$$

onde  $a_n$  é uma função positiva e suave,  $a_n(u) \geq c > 0$  e  $a_n(u) = mu_n^{(m-1)}$  no intervalo  $[1/n, M + 1/n]$ . Essa equação não é degenerada e por isso a teoria básica de equações

parabólicas quasilineares contida em [14], página 559, e parcialmente apresentada no Apêndice A, página 46, nos garante a existência de uma solução em  $C^{2,1}(\overline{Q})$ . Além disso, por diferenciação repetida, e regularidade interior podemos concluir que  $u_n \in C^\infty$ . Agora, devido a definição de  $a_n$ , as equações (2.14) e (2.18) coincidem no domínio de  $u_n$ . Dessa forma o problema (2.14)-(2.16) é resolvido no sentido clássico e a degeneração da equação foi contornada.

Além disso, pelo princípio de comparação, no Apêndice A.2,

$$u_{n+1}(x, t) \leq u_n(x, t) \text{ em } \overline{Q} \quad (2.19)$$

para todo  $n \geq 1$ . Logo podemos definir, a função,

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t), \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}. \quad (2.20)$$

Então  $u_n$  converge em  $L^p(\Omega)$  para todo  $1 \leq p < \infty$ . No intuito de mostrar que uma tal função  $u$  é a solução fraca do problema (2.2)-(2.4) precisaremos de algumas estimativas.

Primeiramente, de (2.17) temos,

$$0 \leq u \leq M \text{ em } \overline{Q}. \quad (2.21)$$

Vejamos agora uma estimativa para  $\nabla u^m$ . Multipliquemos a equação (2.14) por  $\varphi_n = u_n^m - (\frac{1}{n})^m$  e integremos por partes em  $Q_T$  para obter,

$$\begin{aligned} \int \int_{Q_T} |\nabla u_n^m|^2 dx dt &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{1+m} u_{0n}^m(x) - \frac{1}{n^m} \right) u_{0n}(x) dx \\ &- \int_{\Omega} \left( \frac{1}{m+1} u_n^m(x, T) - \frac{1}{n^m} \right) u_n(x, T) dx \\ &\leq \frac{1}{m+1} \int \left( u_0(x) + \frac{1}{n} \right)^{m+1} dx + \frac{1}{n^m} \left( M + \frac{1}{n} \right) \int_{\Omega} dx. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Como  $T$  é arbitrário, segue que  $\{\nabla u_n^m\}$  é uniformemente limitado em  $L^2(Q)$ , e portanto existe uma subsequência fracamente convergente para uma certa  $\psi$  em  $L^2(Q)$ . Já que  $u_n^m \rightarrow u^m$ , segue que  $\psi = \nabla u^m$  no sentido das distribuições. O limite é unicamente definido de tal forma que toda sequência deve convergir a isso. Passando o limite em (2.22) obtemos a seguinte importante estimativa,

$$(m+1) \int \int_{Q_T} |\nabla u^m|^2 dx dt + \int_{\Omega} u^{m+1}(x, T) dx \leq \int_{\Omega} u_0^{m+1}(x) dx, \quad (2.23)$$

chamada **estimativa de energia**. Por outro lado, como  $u_n \in C(\overline{Q})$ ,  $u_n = \frac{1}{n}$  em  $\Sigma$  e  $0 \leq u \leq u_n$ , temos,

$$\lim_{(x,t) \rightarrow \Sigma} u(x,t) = 0$$

com convergência uniforme. Portanto  $u^m(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)$  q.t.p em  $t > 0$ .

Finalmente, como  $u_n$  é solução clássica de (2.2), ela claramente satisfaz (2.5) com  $u_0$  substituído por  $u_{0n}$ . Fazendo  $n \rightarrow \infty$  obtemos (2.5) para  $u$ . Portanto,  $u$  é solução fraca de (2.2)-(2.4).

**Observação 1:** Destacamos, para encerrar esta etapa, que se  $u_0, \hat{u}_0 \in C_c^\infty(\Omega)$ , são dois dados iniciais em para o problema (2.2)-(2.5), com  $u_0(x) \leq \hat{u}_0(x)$  para todo  $x \in \Omega$ , então o processo de aproximação acima pode produzir sequências ordenadas,  $u_{0n} \leq \hat{u}_{0n}$  em  $Q$ . Pelo princípio do máximo clássico, temos  $u_n \leq \hat{u}_n$  em  $Q$  para todo  $n \geq 1$ . Segue que  $u \leq \hat{u}$  em  $Q$ .

**Parte 2:** *Suponhamos que  $u_0$  é limitada e se anula na fronteira.*

Consideremos uma sequência de funções não-negativas  $u_{0n} \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$  que converge pontualmente para  $u_0$ , e além disso  $u_{0n+1}(x) \leq u_{0n} \leq u_0(x)$  para todo  $x \in \Omega$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Então, pelo Parte 1, o problema (2.2)-(2.5) com  $u_{0n}$  como condição inicial possui uma solução fraca  $u_n$ . Além disso

$$u_{n+1}(x,t) \leq u_n(x,t),$$

pela Obsevação 1. Como em (2.20) definimos

$$u(x,t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x,t).$$

Depois de uma série de argumentos inteiramente análogos aos apresentados no Parte 1, podemos concluir que o problema (2.2)-(2.5) com  $u_0$  satisfazendo as condições da Parte 2 possui solução fraca.

**Parte 3:** *Caso geral.*

No caso geral,  $u_0 \in L^{m+1}(\Omega)$  consideramos uma sequência crescente de funções de corte  $\zeta_n$  as quais se anulam em  $\Gamma$ , considere a sequência de aproximações do dado inicial,

$$u_{0,n}(x) = \min \{u_0(x)\zeta_k(x), k\} \tag{2.24}$$

Usando o Passo 2 resolvemos o problema (2.2)-(2.4) com dado inicial  $u_{0k}$  e obtemos uma única solução  $u_k$ . Por comparação  $u_{k+1} \geq u_k$  em  $Q$ . Por outro lado, pela estimativa (2.23), a sequência  $\{u_k\}$  é uniformemente limitada em  $L^\infty((0, \infty) : L^{m+1}(\Omega))$  e  $\nabla u_k^m$  está em  $L^2(Q)$ . Logo,  $\{u_k\}$  converge q.t.p a uma função  $u \in L^\infty((0, \infty); H_0^1(\Omega))$ . Finalmente, a equação (2.5) é satisfeita. ■

## 2.4 Limitação absoluta na norma do supremo.

**Proposição 2.4.1** *Toda solução fraca  $u$  de (2.2)-2.5 é limitada em  $Q^\tau = \Omega \times (\tau, \infty)$  para todo  $\tau > 0$ . Além disso, temos uma estimativa de decaimento da forma,*

$$u(x, t) \leq C(m, d)R^{\frac{2}{m-1}}t^{-\frac{1}{m-1}}, \quad (2.25)$$

onde  $C(m, d) > 0$  e  $R$  é o raio de uma bola contendo  $\Omega$ .

Observe que a limitação enunciada na proposição acima independe do dado inicial, por isso nos referimos a ela como *limitação absoluta*.

**Demonstração:** Consideremos inicialmente o caso em que  $u_0$  é contínua e se anula em  $\partial\Omega$ . Vamos construir uma super-solução explícita com a qual compararemos as soluções aproximadas  $u_n$  de (2.14)-(2.16). De fato, tome a bola  $B$  de raio  $R$  contendo estritamente  $\Omega$ , ou seja  $\partial\Omega \subset B$ , e considere

$$z(x, t) = A(t + \tau)^{-\alpha}(1 - bx^2)^\beta \quad (2.26)$$

para constantes  $A, \tau, \alpha, \beta, b > 0$  a serem determinadas. Tome  $b = R^{-2}$  e temos que  $z$  é positiva em  $B \times (0, \infty)$ , portanto para  $n$  suficientemente grande

$$u_n(x, t) = \frac{1}{n} < z(x, t) \text{ em } \Sigma \quad (2.27)$$

para  $A, \tau, \alpha, \beta$  fixos. Além disso, temos,

$$u_{0n} \leq z(x, 0) \quad (2.28)$$

quando  $\tau$  é suficientemente pequeno. Finalmente definimos  $\alpha = 1/(m-1)$  e  $\beta = 1/n$  obtendo,

$$z_t - \Delta(z^m) \geq 0 = (u_n)_t - \Delta(u_n^m) \quad (2.29)$$

para

$$A \geq R^{\frac{2}{m-1}} (2N(m-1))^{\frac{-1}{m-1}}. \quad (2.30)$$

Com essas escolhas, o Princípio do Máximo implica que  $u_n(x, t) \leq z(x, t)$  em  $Q$ , logo no limite  $u(x, t) \leq z(x, t)$ . Como  $\tau$  pode ser arbitrariamente pequeno, fazemos  $\tau \rightarrow 0$  e obtemos,

$$u(x, t) \leq At^{\frac{-1}{m-1}} \left(1 - \left(\frac{x^2}{R}\right)\right)^{1/m}. \quad (2.31)$$

Por um processo de aproximação semelhante ao usado na Parte 1 da demonstração do Teorema 2.3.1 podemos concluir que (2.31) se verifica para toda solução fraca. ■

## 2.5 Existência de Soluções Clássicas.

Uma vez que garantimos a existência de soluções fracas, vejamos em que condições podemos assegurar que uma tal solução é de fato uma solução no sentido clássico.

**Proposição 2.5.1** *Seja  $u_0 \in C(\bar{\Omega})$  positiva em  $\Omega$  e nula em  $\Gamma = \partial\Omega$ , e seja  $u$  a solução fraca correspondente. Então  $u \in C^\infty(Q) \cap C(\bar{Q})$ ,  $u$  é positiva em  $Q$  e nula em  $\Sigma$ .*

**Demonstração:** Vejamos primeiramente que se  $x_0 \in \Omega$  e  $u_0(x_0) > 0$  temos  $u(x_0) > 0$  para todo  $t > 0$ . Para isso usaremos o método das barreiras. De fato, sejam  $c, r > 0$  tais que  $u_0 \geq c > 0$  na bola  $B$  de raio  $r > 0$  e centro  $x_0$ . Um tal par  $(c, r)$  existe pois  $u_0$  é contínua e  $u_0(x_0) > 0$ . Consideremos, então, a função de Berenblatt

$$\bar{u}(x, t) = U(x - x_0, t + 1; C) \quad (U \text{ é definido em (1.12)}).$$

Podemos escolher  $C > 0$  pequeno o suficiente para que  $u_0(x) \geq \bar{u}(x, 0)$  em  $B$ , e também o suporte de  $\bar{u}$  contido em  $Q_T$  para um  $T > 0$  dado. Esse suporte é da forma  $\mathcal{S} = \{(x, t) : c|x - x_0|^\gamma < (t + 1)\}$  com  $\gamma = N(m - 1) + 2$ ,  $\bar{u} \in C^\infty(\mathcal{S})$  e  $\bar{u}$  se anula na fronteira lateral de  $\mathcal{S}$ .

Portanto, pelo Princípio do Máximo, no Apêndice A.2, aplicado em  $\mathcal{S} \cap Q_T$  a  $\bar{u}$  e uma função suave que aproxime  $u$  concluímos que  $u \geq \bar{u}$  em  $\mathcal{S}$ , logo  $u(x, t)$  é uniformemente limitada quando  $u_0(x) \neq 0$ , numa vizinhança de forma  $V = B \times (0, T)$ .

Logo, quando fazemos  $u_n \rightarrow u$  como feito no processo de aproximação na demonstração do Teorema 2.3.1, em  $V$  podemos aplicar a teoria de regularidade para equações parabólicas não-degeneradas quasilineares (vide [14], Capítulo 6), e concluir que  $u \in C^\infty(N)$  e depende continuamente do dado inicial em  $B$ .

O fato de que  $u$  se anula em  $\Sigma$  é uma simples consequência do processo (2.13)-(2.16). ■

## 2.6 A estimativa $L^1$ básica.

Esta seção contém outra importante estimativa que permite o desenvolvimento de uma teoria de unicidade, existência e estabilidade em  $L^1(\Omega)$ .

**Proposição 2.6.1 (Princípio da contração em  $L^1$ )** *Sejam  $u_0, \hat{u}_0$  dois dados iniciais em  $L^{m+1}(\Omega)$  e sejam  $u, \hat{u}$  suas respectivas soluções fracas. Então para todo  $t > \tau \geq 0$*

$$\int_{\Omega} [u(x, t) - \hat{u}(x, t)]^+ dx \leq \int_{\Omega} [u(x, \tau) - \hat{u}(x, \tau)]^+ dx \leq \int_{\Omega} [u_0 - \hat{u}_0]^+ dx \quad (2.32)$$

em particular,

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\|_1 \leq \|u(\tau) - \hat{u}(\tau)\|_1 \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_1 \quad (2.33)$$

**Demonstração:** Seja  $\eta \in C^1(\mathbb{R})$  tal que  $0 \leq \eta \leq 1$ ,  $\eta(s) = 0$  para  $s < 0$ ,  $\eta'(s) > 0$  para  $s > 0$ , e considere as aproximações  $u_n, \hat{u}_n$  para (2.14)-(2.16). Temos, então em  $\Omega$  para  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u_n - \hat{u}_n) p(u_n^m - \hat{u}_n^m) dx &= \int_{\Omega} \Delta(u_n^m - \hat{u}_n^m) \eta(u_n^m - \hat{u}_n^m) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} |\nabla(u_n^m - \hat{u}_n^m)|^2 \eta'(u_n^m - \hat{u}_n^m) dx \leq 0 \end{aligned}$$

(Note que  $\eta(u_n^m - \hat{u}_n^m) = 0$  em  $\Sigma$ ). Portanto, fazendo  $\eta$  convergir para a função sinal

$$\text{sign}_0^+(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s > 0 \\ 0 & \text{se } s \leq 0, \end{cases}$$

e observando que  $\frac{d}{dt}[u_n - \hat{u}_n]^+ = (u_n - \hat{u}_n)_t \text{sign}_0^+(u_n - \hat{u}_n)$ , temos,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} [u_n - \hat{u}_n]^+ dx \leq 0,$$

o que implica (2.32) para  $u_n, \hat{u}_n$ . Passando o limite obtemos (2.32). Para obter (2.33) basta combinar (2.32) aplicado a  $u$  e  $\hat{u}$  e depois a  $\hat{u}$  e  $u$ . ■

A demonstraco acima estabelece a unicidade do problema (2.2)-(2.4) por uma técnica completamente diferente da que usamos no Teorema 2.3.1.  interessante observar que a inequao (2.32) não são estabelece uma dependencia em  $L^1$  do dado inicial como um princípio de comparao.

**Corolário 2.6.1** *Se  $u_0 \leq \hat{u}_0$  q.t.p em  $\Omega$ , então  $u \leq \hat{u}$  q.t.p em  $Q$ .*

**Corolário 2.6.2 (Continuidade em  $L^1$ )** *A soluço fraca de (2.2)-(2.4) pode ser vista como uma curva contínua em  $L^1(\Omega)$ , ou seja,  $u \in C([0, \infty), L^1(\Omega))$ .*

**Demonstrao:** Quando  $u_0 \in C(\bar{\Omega})$   positivo em  $\Omega$  e se anula em  $\partial\Omega$ , mostramos na seo anterior que  $u \in C(\bar{Q})$ , e portanto  $u \in C([0, T] : L^1(\Omega))$ . Para um  $u_0$  mais geral, o aproximamos por  $\hat{u}_0$  como antes e usando a Proposio 2.6.1,

$$\begin{aligned} \|u(\tau) - u_0\|_1 &\leq \|u(\tau) - \hat{u}(\tau)\|_1 + \|u_0 - \hat{u}_0\|_1 + \|\hat{u}(\tau) - \hat{u}_0\|_1 \\ &\leq 2\|u_0 - \hat{u}_0\|_1 + \|\hat{u}(\tau) - \hat{u}_0\|_1. \end{aligned}$$

Logo, como  $\hat{u}_0 \rightarrow u_0$  e  $\tau \downarrow 0$  temos  $u(\tau) \rightarrow u_0$ . Isso mostra a continuidade em  $t = 0$ . Para  $t > 0$  basta aplicar o mesmo argumaneto a  $t + \tau$ . ■

# Capítulo 3

## Propriedade de anulação das soluções da equação de meios porosos.

### 3.1 Introdução

Este capítulo<sup>1</sup> trata da EMP (1.1) com  $0 < m < 1$ , precisamente  $m = \frac{N-2}{N+2}$ . Devido ao trabalho de Herrero & Pierre [12], é sabido que este problema está bem definido para qualquer dado inicial  $u_0$  localmente integrável e não negativo, no sentido de que existe uma única solução no sentido de distribuições globalmente definida no tempo.

Por outro lado, o expoente  $m = (N - 2)/N$  estabelece uma barreira para regularidade. De fato, todas as soluções são positivas e suaves para  $m > (N - 2)/N$  para todo tempo positivo, o que não é necessariamente verdadeiro se  $m \leq (N - 2)/N$ . Considere por exemplo para  $m < (N - 2)/N$  as funções

$$\bar{u}(x, t) = \{C\|x\|^{-2}(T - t)_+\}^{1/1-m} \quad (3.1)$$

com  $C = 2m(n - 1 - (m + 1)/(1 - m)) > 0$ , as quais são soluções no sentido de distribuições não suaves da EMP (1.1) que se anulam após o tempo  $T$ .

Observe que de acordo com o Princípio de Comparação (Corolário 2.6.1, página

---

<sup>1</sup>Os resultados deste capítulo são devidos a M. Del Pino e M. Sáez, vide [5].

17) estas soluções podem ser usadas como barreiras superiores para estabelecer o seguinte fato: Se  $m < (N - 2)/N$ ,  $0 \leq u_0 \in L^\infty$  e

$$u_0(x) = O(\|x\|^{-2/(1-m)}), \text{ com } \|x\| \rightarrow +\infty \quad (3.2)$$

então existe um tempo  $T > 0$  tal que,

$$u(x, t) \equiv 0, \text{ para } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (T, \infty).$$

Chamamos o menor destes valores  $T > 0$  de *tempo de anulação* da solução  $u$ . Também observamos que  $u \equiv 1$  é solução, então esse decaimento do dado inicial é necessário para obtenção da anulação em tempo finito.

Estaremos interessados em analisar o comportamento exato da solução próximo do tempo de anulação para um dado inicial de decaimento rápido. Em [13] King obteve, via análise assintótica formal, um retrato razoavelmente completo do comportamento assintótico no caso radialmente simétrico, para uma dado inicial com suporte compacto  $u_0 = u_0(\|x\|)$ . Já em [9], Galaktionov e Peletier estabeleceram rigorosamente algumas das conjecturas de King. Em particular, eles provaram que no caso com simetria radial e  $m = (N - 2)/(N + 2)$ ,  $N \leq 3$ , a anulação da solução  $u(r, t)$ ,  $r = \|x\|$ , no tempo  $t = T$  ocorre como solução auto-semelhante, vide [20]. Mais precisamente, existe  $\lambda > 0$  tal que,

$$u(r, t) \approx (T - t)^{(N+2)/4} \left\{ \frac{\kappa_N \lambda}{\lambda^2 + r^2} \right\}^{(N+2)/2}, t \approx T. \quad (3.3)$$

Observe que neste caso, a equação (1.1) assume a forma

$$u_t = (u^m)_{rr} + \frac{N - 1}{r} (u^m)_r, \quad r > 0.$$

A aproximação em [9] também se estende ao caso dos expoentes  $0 < m < (N - 2)/N$ , onde a anulação não admite separação de variáveis, mas assume uma forma de soluções auto-semelhantes como

$$u(r, t) \approx (T - t)^\alpha f(r(T - t)^\beta),$$

para certos números  $\alpha$  e  $\beta$ . O método de Galaktionov e Peletier é baseado no estudo das propriedades nodais da diferença entre a solução e os membros de uma família de soluções auto-semelhantes, a chamada técnica de interseção-comparação. Enquanto este método tem

se mostrado uma poderosa ferramenta na análise de padrões assintóticos na difusão não-linear em espaços com uma variável, é aparentemente difícil estendê-lo para dimensões mais altas caso uma assunção como simetria radial não seja feita.

Neste capítulo, provaremos a validade do comportamento assintótico (3.3) para qualquer condição inicial, mesmo sem simetria radial. Portanto, a equação que trataremos é a seguinte:

$$u_t = \Delta u^{N-2/N+2} \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \quad (3.4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.5)$$

onde  $N \geq 3$ . Para simplificar a notação, nós continuaremos designando por  $m$  o número  $(N-2)/(N+2)$ . A função  $u_0(x)$  é não-negativa, contínua, não identicamente nula e satisfaz a seguinte *condição de decaimento rápido*:

$$\|u_0\|_* \equiv \sup(1 + \|x\|^{(N+2)}u_0(x)) < \infty. \quad (3.6)$$

Como  $N+2 = 4(1-m)$ , este fato implica em particular no decaimento (3.2). Segue daí que para a solução  $u(x, t)$  do problema (3.4)-(3.5) existe um tempo de anulação  $T = T(u_0) > 0$ . O primeiro resultado descreve o comportamento de  $u$  próximo ao tempo de anulação.

**Teorema 3.1.1** *Se  $u_0$  é como em (3.6), existe um número  $\lambda > 0$  e um ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$  tal que se  $T = T(u_0)$  denota o tempo em que a solução do problema (3.4)-(3.5) se anula, então*

$$(T-t)^{-1/(1-m)}u(x, t) = \left\{ \frac{k_N \lambda}{\lambda^2 + \|x - \bar{x}\|^2} \right\}^{(N+2)/2} + \vartheta(x, t) \quad (3.7)$$

com  $\vartheta$  satisfazendo,

$$\|\vartheta(x, t)\|_* \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow T.$$

**Teorema 3.1.2** *O número  $T(u_0)$  define uma função contínua de  $u_0$ , na norma  $\|\cdot\|_*$  dada por (3.6).*

## 3.2 Esquema das demonstrações

Para provar os Teoremas 3.1.1 e 3.1.1, é conveniente introduzir a seguinte transformação. Sejam  $u(x, t)$  uma solução de (3.4)-(3.5) e  $T > 0$  o tempo em que esta se anula. Definamos a função  $w(x, s)$ , para  $x \in \mathbb{R}^N$  e  $s > 0$  por

$$w(x, s) \equiv (T - t)^{-m/(1-m)} u(x, t)^m \Big|_{t=T(1-e^{-s})}. \quad (3.8)$$

Denotamos  $p = 1/m = \frac{N+2}{N-2}$ . Vemos que  $w$  satisfaz

$$(w^p)_s = \Delta w + \frac{1}{1-m} w^p, (x, s) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty). \quad (3.9)$$

$$w(x, 0) = T^{-m/(1-m)} u_0(x)^m. \quad (3.10)$$

De fato,

$$\begin{aligned} w^p(x, s) &= (T - t)^{-1/(1-m)} u(x, t) \\ \Rightarrow \frac{\partial w^p}{\partial s}(x, s) &= \frac{1}{1-m} (T - t)^{-1/(1-m)} u(x, t) \\ &+ (T - t)^{-1/(1-m)} (T - t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \\ &= \frac{1}{1-m} w(x, t)^p + (T - t)^{-1/(1-m)} (T - t) \Delta_x u(x, t) \\ &= \frac{1}{1-m} w(x, t)^p + (T - t)^{-m/(1-m)} \Delta_x ((T - t)^{m/1-m} w(x, t)) \\ &= \Delta w + \frac{1}{1-m} w^p. \end{aligned}$$

Os estados de equilíbrio não triviais desta equação são as soluções positivas da seguinte equação elíptica:

$$\Delta \bar{w} + \frac{1}{1-m} \bar{w}^p = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N. \quad (3.11)$$

Sabemos de [3], e também de [4], que toda solução positiva desta equação é radialmente simétrica em torno de algum ponto. Nestes artigos são usadas as técnicas de Moving Planes, veja também o Apêndice D. As soluções radiais são da forma

$$\bar{w} = \left\{ \frac{k_N \lambda}{\lambda^2 + |x - \bar{x}|^2} \right\}^{(N-2)/2} \quad (3.12)$$

para  $k_N = (4N(N-2)/(N+2))^{1/2}$  e algum  $\lambda > 0, \bar{x} \in \mathbb{R}$ . Portanto, o Teorema 3.1.1 se reduz a estabelecer precisamente o fato de que a solução  $w$  para (3.9)-(3.10) aproxima um (único) equilíbrio não trivial em relação a norma  $\|\cdot\|_*$ .

Uma característica importante da equação (3.4) é sua invariância conforme. Isto pode ser interpretado em termos geométricos como uma variação do *fluxo de Yamabe* (veja [22] e o Apêndice B.2.2) em  $\mathbb{R}^N$  que não preserva volume. Para nossos propósitos, esta invariância se traduz no fato de que esta equação pode ser levantada para a esfera  $S^N$  via projeção estereográfica, numa equação do tipo:

$$(v^p)_s = \Delta_{S^N} v - c(N)v + \frac{1}{1-m} v^p \text{ em } S^N \times (0, \infty). \quad (3.13)$$

Acima  $\Delta_{S^N}$  representa o operador de Laplace-Beltrami em  $S^N$ . Considere a projeção estereográfica  $F: \mathbb{R}^N \rightarrow S^N$  dada por,

$$F(x_1, \dots, x_N) = \left( \frac{2x}{1 + \|x\|^2}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right). \quad (3.14)$$

Definamos  $v$  a partir de  $w$  por

$$w(x, s) = \left( \frac{2}{1 + \|x\|^2} \right)^{(N-2)/2} v(F(x), s). \quad (3.15)$$

Então  $v$  satisfaz a equação (3.13) para uma constante  $c(N) > 0$ . De fato, apliquemos a equação (B.1), da página 50, tomando  $\psi(y) = w(x)$ ,  $f(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^{(N-2)/2}$ ,  $g = v(y)$  nos pontos  $y = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + 1) F(x)$ , e com  $r = \|y\|$ . Observemos que,

$$x_i = y_i, \quad i = 1, \dots, N \Rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \delta_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N+1.$$

Daí,

$$\frac{\partial w(x)}{\partial y_i} = \frac{\partial w(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, N \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\Rightarrow \Delta_y w(x) = \Delta_x w(x).$$

Além disso,

$$f'(r) = -\frac{(N-2)}{2} r^{-N/2}$$

$$f''(r) = \frac{(N-2)N}{2} r^{-(N+2)/2}$$

$$\Delta f(r) = \frac{(N-2)N}{2} r^{-(N+2)/2} - \frac{N(N-2)}{r} r^{-N/2} = 0.$$

A terceira identidade acima vem de (B.2) no Apêndice B. Segue das observações acima que,

$$\begin{aligned} \Delta_x w &= \left(\frac{1}{r}\right)^{(N+2)/2} (v^p)_s - \frac{1}{1-m} \left(\frac{1}{r}\right)^{(N+2)/2} v^p \quad (\text{por (3.9)}) \\ &\Rightarrow (v^p)_s = \Delta_{S^N} v - c(N)v + \frac{1}{1-m} v^p \quad (\text{por (B.1)}). \end{aligned}$$

Neste caso, uma reformulação natural do Teorema 3.1.1 em termos de  $v$  é a que segue:

**Teorema 3.2.1** *Seja  $v$  definido em (3.15). Então existe uma única solução não trivial  $\bar{v}$  de*

$$\Delta_{S^N} \bar{v} - c(N)\bar{v} + \frac{1}{1-m} \bar{v}^p = 0 \quad (3.16)$$

*tal que,*

$$\sup_{\gamma \in \mathbb{R}^N} |v(\gamma, t) - \bar{v}(\gamma)| \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow T.$$

Para provar este resultado o primeiro passo é provar que para um  $s_* > 0$  dado, existem constantes positivas  $\alpha$  e  $\beta$  tais que

$$\alpha \leq v(\gamma, s) \leq \beta \quad \forall \gamma \in S^N, s > s_* \quad (3.17)$$

este é o objetivo da Proposição 3.6.1.

Vários passos serão necessários. Primeiramente estabeleceremos na Seção 3.3 que a solução  $v$  é suave e estritamente positiva em um intervalo de tempo pequeno, o que na realidade se estende para todo tempo  $s > 0$ , como veremos na Seção 3.4. Um segundo elemento é a estimativa de Harnack:

dado  $s_* > 0$  existe uma constante  $c > 0$  tal que  $\forall s > s_*$  temos,

$$\sup_{\gamma \in S^N} v(\gamma, s) \leq c \inf_{\gamma \in S^N} v(\gamma, s), \quad (3.18)$$

Uma estimativa similar foi encontrada por Ye em [22] para uma versão que preserva volume da equação (3.13), o Fluxo de Yamabe, na sua prova parabólica da conjectura de Yamabe no caso localmente conformemente plano. Apresentaremos uma demonstração semelhante a encontrada nestes artigos.

Uma vez estabelecido (3.18), a demonstração da estimativa (3.17) se reduz a descartar o caso  $v \rightarrow +\infty$ , ou  $v \rightarrow 0$  uniformemente quando  $s \rightarrow +\infty$ . Faremos isso na Seção 3.6, Proposição 3.6.1. Observamos que o descarte destas possibilidades para a equação (3.4) implica precisamente que a anulação não pode ocorrer a uma taxa maior ou menor que  $(T - t)^{1/(1-m)}$ .

Outro ingrediente importante na demonstração do Teorema 3.2.1 é a presença do funcional de Lyapunov para a equação (3.13).

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{S^N} |\nabla_{S^N} v|^2 dx + \frac{c(N)}{2} \int_{S^N} v^2 dx - \frac{1}{(1-m)(p+1)} \int_{S^N} v^{p+1} dx.$$

Verifiquemos que  $J$  é não crescente sobre a solução  $v$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} J(v(\cdot, s)) &= \int_{S^N} (\nabla_{S^N} v \cdot \nabla_{S^N} v_s) dx + c(N) \int_{S^N} (v v_s) dx - \int_{S^N} (v^p v_s) dx \\ &= - \int_{S^N} \left( \Delta_{S^N} v - c(N)v + \frac{1}{1-m} v^p \right) v_s dx \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_{S^N} (v^p)_s v_s dx \\ &= -p \int_{S^N} v^{p-1} v_s^2 dx \leq 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Observamos que a segunda igualdade acima vem da integração por partes, a terceira igualdade é devida equação (3.13) e a desigualdade é porque  $v \geq 0$  em  $S^N \times (0, \infty)$ , pois,

$$u_0 \geq 0 \Rightarrow u \geq 0 \Rightarrow w \geq 0 \Rightarrow v \geq 0$$

por comparação, Corolário 2.6.1, pela definição de  $w$  e por (3.15), respectivamente.

Provaremos na Seção 3.7, Lema 3.7.1 que  $J(v(\cdot, s)) \geq 0$ . Isto implica que os pontos limite da trajetória  $v$  devem ser os pontos de equilíbrio de (3.13). A unicidade dos estados de equilíbrio seguem, então, de resultados em [18]. Faremos isso na Seção 3.8 onde também provaremos o, Teorema 3.1.2. Mostraremos primeiramente a continuidade do tempo em que a solução se anula como uma função do dado inicial. Então a demonstração da estabilidade segue após uma cuidadosa inspeção da prova da unicidade do limite obtida em [18].

### 3.3 Positividade num intervalo de tempo pequeno.

No Principal resultado desta seção mostramos que a solução  $v$  de 3.13 é positiva para um intervalo de tempo pequeno.

**Proposição 3.3.1** *Existe uma constante  $s_* > 0$  tal que  $v(\gamma, s) > 0 \forall 0 < s \leq s_*$  e  $\forall \gamma \in S^N$ . Além disso,  $v \in C^\infty(S^N \times (0, \infty))$ .*

As principais etapas na demonstração desta proposição são os dois lemas seguintes:

**Lema 3.3.1** *Seja  $u$  solução de (3.5), então, existem  $t_0, \eta, R_0$  positivos e um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  tais que*

$$u(x, t) > \eta \quad \forall 0 < t < t_0 \quad e \quad x \in B_{R_0}(x_0). \quad (3.21)$$

Acima  $B_{R_0} = \{x : |x - x_0| < R_0\}$ .

**Lema 3.3.2** *Sejam  $u, x_0, t_0, R_0$  como no lema anterior, e considere a função  $\phi(x)$  definida por,*

$$\phi^m = \frac{1}{\|x - x_0\|^{(N-2)}} + \frac{1}{\|x - x_0\|^N}. \quad (3.22)$$

Então existe uma constante positiva  $\eta_1$  tal que

$$u(x, t) \geq \eta_1 t^{1/(1-m)} \phi(x)$$

para todo  $0 < t < t_0$  e  $\|x - x_0\| > R_0$ .

Antes de demonstrar esses lemas, vamos mostrar que a Proposição 3.3.1 decorre deles.

**Demonstração da Proposição 3.3.1:** O Lema 3.3.1 garante a existência de um tempo  $t_0 > 0$  tal que  $u$  permanece estritamente positiva para todo  $0 < t \leq t_0$ . Afirmamos que o mesmo ocorre para  $v$  com  $0 < s < s_*$ , com  $s_* = \log(T/t_0)$ . De fato, pela definição de  $v$  em (3.15), e pelo Lema 3.3.2 temos,

$$\begin{aligned}
v(F(x), s) &= (T-t)^{\frac{-m}{1-m}} u(x, t) \left( \frac{1 + \|x - x_0\|^2}{2} \right)^{\frac{N-2}{2}} \\
&\geq (T-t)^{\frac{-m}{1-m}} \eta_1^m t^{\frac{1}{1-m}} \phi \left( \frac{1 + \|x - x_0\|^2}{2} \right)^{\frac{N-2}{2}} \\
&= \eta_1^m (Te^{-s})^{\frac{-m}{1-m}} (T(1-e^{-s}))^{\frac{1}{1-m}} \phi \left( \frac{1 + \|x - x_0\|^2}{2} \right)^{\frac{N-2}{2}} \\
&= \eta_1^m T^2 e^{\frac{sm}{1-m}} (1-e^{-s})^{\frac{1}{1-m}} \phi \left( \frac{1 + \|x - x_0\|^2}{2} \right)^{\frac{N-2}{2}} \\
&\geq P(s),
\end{aligned}$$

onde

$$P(s) = \eta_1^m (e^{ms}(1-e^{-s}))^{1/(1-m)} \frac{1}{2^{(N-2)/2}} > 0 \text{ para } \|x - x_0\| \geq R_0 \text{ e } 0 < s < s_*,$$

e portanto  $P(s) > 0$  é uma função crescente de  $s$ . Para  $\|x - x_0\| < R_0$ , o Lema 3.3.1 implica que  $v(F(x), s) \geq \eta$ . Então para qualquer  $s \in (0, s_*]$ ,

$$v(\gamma, s) \geq \min \{ \eta, P(s) \} > 0. \quad (3.23)$$

Por outro lado, como  $u_0$  decai como em (3.6), temos que para um  $M > 0$  suficientemente grande e todo  $0 < t < T$ ,

$$u_0(x) \leq M^{1/(1-m)} \left\{ \frac{k_n}{1 + \|x\|^2} \right\}^{(N+2)/2}.$$

Segue por comparação que para todo  $0 < t < T$ ,

$$u(x, t) \leq (M-t)^{1/(1-m)} \left\{ \frac{k_n}{1 + \|x\|^2} \right\}^{(N+2)/2}$$

desde que o lado direito desta desigualdade é também solução de (3.4). Da definição de  $v$  obtemos,

$$v(\gamma, s) < A(s), \quad \forall s > 0, \quad \gamma \in S^N, \quad (3.24)$$

onde

$$A(s) = \left\{ \frac{k_n}{2} \right\}^{\frac{N-2}{2}} (M-t)^{\frac{m}{1-m}} (T-t)^{\frac{-m}{1-m}}$$

é uma função contínua positiva de  $s > 0$ . Combinando (3.24) e (3.23) obtemos que sobre qualquer subintervalo de tempo compacto de  $(0, s_*)$ ,  $v$  é uniformemente limitada por cima e por baixo longe de zero. A teoria das equações parabólicas quasilineares, veja [14], então, implica que  $v$  é positiva e suave para  $0 < s < s_*$ . ■

**Demonstração do Lema 3.3.1:** Como  $u_0$  é não identicamente nula e contínua, existe  $\rho > 0$  e  $x_1 \in \mathbb{R}^N$  tais que

$$u_0(x) > \delta, \quad x \in A_\rho = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \frac{\rho}{2} < \|x - x_1\| < \rho \right\},$$

para algum  $\delta > 0$ . Seja  $g(x)$  uma solução do problema,

$$\Delta g^m + \frac{1}{1+m}g = 0, \quad g > 0, \quad \text{em } A_\rho \tag{3.25}$$

$$g = 0 \quad \text{em } \partial A_\rho$$

(para a qual uma solução radialmente simétrica não trivial existe apenas em domínios não estrelados como  $A_\rho$ , veja o Apêndice C), vamos considerar, para  $\lambda > 0$ , a função,

$$\psi(x, t) = (\lambda - t)^{1/(1-m)}g(x).$$

É imediata a verificação de que  $\psi$  satisfaz

$$\psi_t - \Delta \psi^m = 0 \quad \text{em } A_\rho \times (0, \lambda).$$

Observemos que para  $\lambda = (\delta / \sup_{A_\rho} g)^{m-1}$ , então temos  $\psi(x, 0) = \lambda^{1/(1-m)}g(x) < u_0(x)$  em  $A_\rho$  e  $\psi(x, t) = 0 \leq u(x, t)$ , para  $x \in \partial A_\rho$ . Segue por comparação que,

$$\psi(x, t) \leq u(x, t).$$

Escolhendo  $t_0 = \lambda/2$ ,  $R_0 = \rho/4$ ,  $x_0 \in A_\rho$  com  $\|x_1 - x_0\| = \frac{3}{2}\rho$ , e  $\eta = \sup_{A_\rho \times [0, t_0]} \psi(x, t)$ , a inequação (3.21) segue. ■

**Demonstração do Lema 3.3.2:** Seja  $\phi$  a função definida em (3.22) e

$$\psi(x, t) = \eta_1 t^{1/(1-m)}\phi(x).$$

Calculamos,

$$\psi_t - \Delta\psi^m = \frac{\eta_1^m t^{m/(1-m)}}{\|x - x_0\|^{n+2}} \left[ \frac{\eta_1^{1-m}}{1-m} \left( 1 + \frac{1}{\|x - x_0\|^2} \right)^{1/m} - 2N \right].$$

Dessa equação, fica claro que podemos escolher  $\eta_1$  pequeno, dependendo somente dos números  $\eta$ ,  $t_0$  e  $R_0$  do Lema 3.3.1 de tal forma que  $\psi_t - \Delta\psi^m \leq 0$  para  $\|x - x_0\| \geq R_0$ , bem como  $\psi(x, t) \leq \eta$  para  $\|x - x_0\| = R_0$ , e  $0 < t \leq t_0$ . Como temos  $\psi(x, 0) = 0 \leq u_0(x)$ , obtemos por comparação que  $u(x, t) \geq \psi(x, t)$  para todo  $\|x - x_0\| \geq R_0$  e  $0 < t \leq t_0$ . ■

### 3.4 Estimativa de Harnack.

Provamos na seção anterior que existe um  $s_* > 0$  tal que  $v$  é estritamente positiva e suave para  $0 < s < s_*$ . Provaremos agora a seguinte estimativa de Harnack.

**Proposição 3.4.1** *Seja  $s_0 > 0$  tal que  $v(\gamma, s)$  é positiva e suave em  $S^N \times (0, s_0)$ . Então, dado  $s_* > 0$  existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\min_{S^N} v(\cdot, s) \geq C \max_{S^N} v(\cdot, s) \quad \forall s \in (s_*, s_0). \quad (3.26)$$

**Demonstração:** Seja  $s_0 > 0$  um número como acima. Queremos estabelecer o seguinte fato: dado  $0 < s_* < s_0$  existe uma constante  $C^* > 0$ , independente de  $s_0$ , tal que,

$$\sup_{S^N} \frac{|\nabla_{S^N} v|}{v} \leq C^* \quad \forall s \in (s_*, s_0). \quad (3.27)$$

A partir daí o resultado da proposição segue diretamente. De fato, seja  $s_* < s < s_0$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in S^N$  e  $\Gamma$  uma geodésica ligando  $\gamma_1, \gamma_2$ . Então integrando (3.27) sobre  $\Gamma$  obtemos,

$$\log v(\gamma_2, s) - \log v(\gamma_1, s) \leq C^* L(\Gamma),$$

onde  $L(\Gamma)$  representa o comprimento de  $\Gamma$  e  $C^*$  é a constante em (3.27). Daí (3.26) segue diretamente.

Resta demonstrar (3.27). A demonstração apresentada abaixo se deve a Ye, ver [22] e usa uma aproximação do tipo *moving-plane* no sentido de [11], [10], [3] e no Apêndice D. Seja  $q_0 \in S^N$ . Sem perda de generalidade podemos supor que  $q_0$  é o pólo norte da esfera,

$q_0 = (0, \dots, 1)$ . Recordamos que  $v$  é definida apartir de  $w$  em (3.15), onde  $w$  satifaz (3.9). Então, de (3.15) e do fato de que  $v$  é suave em  $q_0$ ,  $w$  tem uma expansão "no infinito" da forma

$$w(x, s) = \frac{2^{(N-2)/2}}{\|x\|^{N-2}} \left[ a_0 + a_i \frac{x_i}{\|x\|^2} + (a_{ij} - (N-2)a_0\delta_{ij}) \frac{x_i x_j}{\|x\|^4} + o(\|x\|^{-3}) \right]. \quad (3.28)$$

Analogamente, para suas derivadas parciais temos,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} w = -\frac{2^{N-2/2}}{\|x\|^N} x_i \left( (N-2)a_0 + a_j \frac{x_j}{\|x\|^2} \right) + \frac{a_i}{\|x\|^N} - \frac{2x_i}{\|x\|^{N+2}} a_j x_j + o(\|x\|^{-(N+1)}). \quad (3.29)$$

Onde,

$$a_0(s) = v(q_0, s),$$

$$a_i(s) = \frac{\partial(v(\cdot, s) \circ G)}{\partial x_i}(0),$$

$$a_{ij}(s) = \frac{\partial^2(v(\cdot, s) \circ G)}{\partial x_i \partial x_j}(0).$$

Denotamos por  $G$  a projeção estereográfica a partir do pólo sul, ou seja,  $G = F(x/\|x\|^2)$ . Para mais detalhes sobre essas expansões veja as páginas 31 e 33.

Consideremos a função  $z(s) = (z_1(s), \dots, z_N(s))$ , onde  $z_i(s) = (N-2)^{-1}a_i(s)/a_0(s)$ .

Afirmamos que existe um número  $c > 0$ , independente de  $s_0$ , tal que,

$$\|z(s)\| \leq c \quad \forall s \in (s_*, s_0). \quad (3.30)$$

Assuma por equanto que (3.30) se verifica. Então, pela expansão acima, existe  $c_1 > 0$  independente de  $s_0$  tal que:  $\|\nabla w\|/w \leq c_1 \quad \forall s \in (s_*, s_0)$  e para todo  $\|x\|$  suficientemente grande. Por outro lado, o fato de  $v$  poder ser escrito como

$$v(\gamma, s) = \left( \frac{1}{1 - \gamma_{N+1}} \right)^{(N+2)/2} w(F^{-1}(\gamma), s)$$

implica que também, para certo  $C > 0$  independente de  $s_0$ ,  $\|\nabla v\|/v \leq C$ , em uma vizinhança de  $q_0$ . Podemos aplicar o mesmo processo a qualquer outro ponto de  $S^N$ , logo a estimativa (3.27) segue da compacidade de  $S^N$ . Daremos abaixo uma demosntração da afirmação (3.30).

Seja  $s_* \leq \bar{S} < s_0$ . Depois de uma rotação e uma reflexão se necessário, podemos assumir que  $z_N(\bar{S}) = \max_i |z_i(\bar{S})|$ . Da expansão "no infinito" de  $\frac{\partial w}{\partial x_N}(x, s)$  e  $\nabla w$  para  $s = s_*$ ,

vemos que esta derivada fica negativa para um tempo suficientemente grande e portanto existe  $\lambda_0 > 0$  tal que para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ ,

$$w(x, s_*) > w(x^\lambda, s_*) \text{ para } \lambda_0 < x_N < \lambda, j = 1, \dots, N \quad (3.31)$$

onde  $x^\lambda = (x_1, \dots, x_{N-1}, 2\lambda - x_N)$ , para mais detalhes veja a página 33. De fato, temos pela expansão de  $w(x, s)$  temos

$$\begin{aligned} w - w^\lambda &= \left( \frac{2^{(N-2)/2}}{|x|^{N-2}} - \frac{2^{(N-2)/2}}{|x^\lambda|^{N-2}} \right) a_0 \\ &+ \left( \frac{2^{(N-2)/2}}{|x|^N} - \frac{2^{(N-2)/2}}{|x^\lambda|^N} \right) a_i x_i - \frac{2^{(N-2)/2}}{|x^\lambda|^N} x_N \lambda \\ &+ \left( \frac{2^{(N-2)/2}}{|x|^{N+2}} - \frac{2^{(N-2)/2}}{|x^\lambda|^{N+2}} \right) \left( a_{ij} - \frac{N-2}{2} a_0 \right) x_i x_j \\ &- \frac{2\lambda x_j}{|x^\lambda|^{N+2}} - \frac{2\lambda^2 x_j}{|x^\lambda|^{N+2}} + o(|x|^{-(N+1)}) \geq 0. \end{aligned}$$

se  $x_N \leq \lambda_0$ . Segue que

$$w(x, s_*) > w(x^\lambda, s_*) \text{ para } x_N < \lambda, j = 1, \dots, N \quad (3.32)$$

Afirmamos que na realidade,

$$z_N(\bar{S}) < \lambda_0, \quad (3.33)$$

de onde a relação (3.30) imediatamente segue. Vamos considerar a reflexão de  $w$  em torno do hiperplano  $x_N = \lambda$ , dada por  $w^\lambda(x, s) = w(x^\lambda, s)$ . Vemos que  $w^\lambda$  satisfaz (3.9) para  $x_N \leq \lambda$  e coincide com  $w$  para  $x_N = \lambda$ . Usando estes fatos e a relação (3.32) obtemos por comparação que

$$w(x, s) > w^\lambda(x, s) \text{ para todo } s \in [s_*, \bar{S}], \lambda_0 < x_N < \lambda, \lambda \geq \lambda_0 \quad (3.34)$$

Consideremos o conjunto

$$I = \{ \lambda > \lambda_0 : \lambda > \max_{s_0 \leq s \leq \bar{S}} z_N(s), w^\lambda \leq w \}.$$

Afirmamos que  $I$  é aberto e relativamente fechado em  $(\lambda_0, \infty)$ , fato do qual a relação (3.33) segue prontamente. De (3.34), vemos que a inequação  $w^\lambda \leq w$  vale para todo

$\lambda$  em  $I$ , portanto  $I$  é aberto. Agora, seja  $\lambda$  no fecho de  $I$  com respeito a  $(\lambda_0, \infty)$ . Como  $\lambda > \lambda_0$ , vemos de (3.34) que  $w^\lambda \leq w$ . Além disso,  $\lambda \geq \max_{s_0 \leq s \leq \bar{S}} z_N(s)$ . Precisamos mostrar que a desigualdade é estrita. Suponhamos por contradição que  $\lambda = \max_{s_0 \leq s \leq \bar{S}} z_N(s) = z_N(\tilde{s}_0)$  com  $\tilde{s}_0 \in [s_*, \bar{S}]$ . Como na definição de  $v$  em (3.15), podemos também definir  $v^\lambda$ , tal que ambos  $v$  e  $v^\lambda$  satisfazem a equação

$$(v^p)_s = \Delta_{S^N} v - cNv + \frac{1}{1-m} v^p, (\gamma, s) \in S^N \times \mathbb{R}_+$$

A região  $\{x \in \mathbb{R}^N : x_N < \lambda\}$  é transformada via projeção estereográfica em um subdomínio  $\Omega_\lambda$  de  $S^N$  que contém o pólo norte  $q_0$  em sua fronteira. Então  $v_\lambda < v$  em  $\Omega_\lambda$  e  $v_\lambda = v$  em  $\partial\Omega_\lambda$ , para todo tempo  $s \in (s_0, \tilde{s}_0]$ . O lema de Hopf, Apêndice D.1, então implica que  $(\partial v / \partial \nu)(q_0, \tilde{s}_0) < (\partial v^\lambda / \partial \nu)(q_0, \tilde{s}_0)$ , onde  $\partial / \partial \nu$  denota a derivada na direção normal a  $\partial\Omega_\lambda$ . Ora a projeção estereográfica é conforme, logo  $\partial \nu = \partial x_N$ . Mas o fato de que  $\lambda = z_N(\tilde{s}_0)$  significa, pela definição de  $z_N$ , que

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial v(q_0, \tilde{s}_0)}{\partial x_N}}{v(q_0, \tilde{s}_0)} &= (N-2)\lambda \\ \Rightarrow \frac{\partial v(q_0, \tilde{s}_0)}{\partial x_N} &= (N-2)\lambda v(q_0, \tilde{s}_0). \end{aligned}$$

Adotando o mesmo procedimento para  $v^\lambda$  temos,

$$\frac{\partial v^\lambda(q_0, \tilde{s}_0)}{\partial x_N} = (N-2)\lambda v^\lambda(q_0, \tilde{s}_0).$$

Como  $v^\lambda(q_0, \tilde{s}_0) = v(q_0, \tilde{s}_0)$  temos que

$$\frac{\partial v^\lambda(q_0, \tilde{s}_0)}{\partial x_N} = \frac{\partial v(q_0, \tilde{s}_0)}{\partial x_N}.$$

Temos uma contradição, o que mostra a validade de (3.33) e portanto a de (3.30).

■

## 3.5 Algumas verificações referentes a Seção 3.4

### 3.5.1 Cálculo da expansão "no infinito" de $w$ .

Lembramos que  $w$  é solução da equação (3.9) dada por

$$(w^p)_s = \Delta w + \frac{1}{1-m} w^p, (x, s) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty),$$

e  $v$  é dada em termos de  $w$  por (3.15), ou seja,

$$w(x, s) = \left( \frac{2}{1 + \|x\|^2} \right)^{(N-2)/2} v(F(x), s)$$

onde  $F(x_1, \dots, x_N) = \left( \frac{2x}{1 + \|x\|^2}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right)$ .

Começaremos expandindo  $g(x, s) = \left( \frac{2}{1 + \|x\|^2} \right)^{(N-2)/2} v(G(x), s)$  em torno de zero, ou seja, queremos achar  $A_0, A_i, A_{ij}, i, j \in 1, \dots, N$  tais que:

$$g(x, s) = A_0 + A_i x_i + A_{ij} x_i x_j + o(\|x\|^{-3}).$$

Denotando  $q_0 = (0, \dots, 1) = G(0)$ , temos

$$A_0 = g(0) = 2^{(N-2)/2} v(q_0)$$

$$A_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}(0) = 2^{(N-2)/2} \frac{\partial}{\partial x_i} (v \circ G)(0)$$

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(0) = 2^{(N-2)/2} \frac{\partial^2 v \circ G}{\partial x_i \partial x_j}(0) - 2^{(N-2)/2} v(q_0)$$

Observamos então que

$$\begin{aligned} w(x, s) &= \left( \frac{2}{1 + \|x\|^2} \right)^{(N-2)/2} v(F(x), s) \\ &= \left( \frac{2}{1 + \|x\|^2} \right)^{(N-2)/2} v \left( G \left( \frac{x}{\|x\|^2} \right), s \right) \\ &= \frac{1}{\|x\|^{N-2}} \left( \frac{2}{1 + \frac{\|x\|^2}{\|x\|^4}} \right)^{(N-2)/2} v \left( G \left( \frac{x}{\|x\|^2} \right), s \right) \\ &= \frac{g \left( \frac{x}{\|x\|^2} \right)}{\|x\|^{N-2}}. \end{aligned}$$

Então, para encontrar a expansão (3.28) de  $w$  "no infinito" basta substituir, na equação acima,  $g(x/\|x\|^2)$  pela expansão de  $g$  em torno de zero aplicada ao ponto  $x/\|x\|^2$ .

### 3.5.2 Cálculo da expansão "no infinito" de $\frac{\partial w}{\partial x_k}$ .

Definamos  $B_0$ ,  $B_i$ ,  $B_{ij}$ , a partir da expansão de  $w$ , como abaixo,

$$w(x, s) = \underbrace{\frac{2^{(N-2)/2}}{\|x\|^{N-2}} a_0}_{B_0} + \underbrace{\frac{2^{(N-2)/2} a_i x_i}{\|x\|^N}}_{B_i} + \underbrace{2^{N-2/2} (a_{ij} - \delta_{ij}(N-2)a_0) \frac{x_i x_j}{\|x\|^{N+2}}}_{B_{ij}} + o(\|x\|^{-N-1}).$$

Então,

$$\frac{\partial B_0}{\partial x_k} = -2^{(N-2)/2} a_0 \frac{x_k}{\|x\|^{N/2}}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial x_k} = -N 2^{(N-2)/2} \frac{a_i x_k x_i}{\|x\|^{N/2}} + \delta_{ik} 2^{(N-2)/2} \frac{a_i}{\|x\|^N}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k} = & -(N+2) \frac{2^{(N-2)/2}}{\|x\|^N} x_i x_j x_k (a_{ij} - \delta_{ij}(N-2)a_0) \\ & + 2^{(N-2)/2} \delta_{ik} (a_{ij} - \delta_{ij}(N-2)a_0) \frac{x_j}{\|x\|^{N+2}} \\ & + 2^{(N-2)/2} \delta_{jk} (a_{ij} - \delta_{ij}(N-2)a_0) \frac{x_i}{\|x\|^{N+2}}. \end{aligned}$$

Somando os termos acima obtemos (3.28).

### 3.5.3 Existe $\lambda_0 > 0$ tal que $w^\lambda < w$ se $\lambda_0 \leq x_N < \lambda$ com $x_j \geq 0$ .

Vamos analisar a expansão de  $\frac{\partial w}{\partial x_N}$ , obtida da equação (3.29), dada abaixo com seus termos reagrupados de forma mais conveniente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x_N} = & \frac{1}{\|x\|^N} \left[ -(N-2) 2^{(N-2)/2} a_0 x_N - (N-2) 2^{(N-2)/2} \frac{x_N x_j}{\|x\|^2} a_j + a_i - 2 \frac{x_N}{\|x\|^2} a_j x_j \right] \\ & + o(\|x\|^{-N-1}). \end{aligned}$$

Observando a equação acima vemos que o primeiro membro dentro dos colchetes tende a  $-\infty$  quando  $x_N$  cresce, já que  $a_0 \geq 0$  e  $N \geq 3$ . Já o segundo termo dentro dos colchetes tende a  $-(N-2) 2^{(N-2)/2} a_j$ , para todo  $j \leq N$  quando  $x_j, j = 1, \dots, N$  cresce. Para o terceiro

termo dentro dos colchetes o raciocínio é análogo ao feito para o segundo. Portanto como o segundo e o terceiro termos dentro dos colchetes são limitados podemos escolher  $\lambda_0 > 0$  se  $x_j > \lambda_0$ ,  $j = 1, \dots, N$  temos que  $\frac{\partial w}{\partial x_N}(x) < 0$  onde  $x = (x_1, \dots, x_N)$ . Isso conclui esta verificação.

## 3.6 Estimativas Uniformes

**Proposição 3.6.1** *Se  $v$  é uma solução de (3.13), então dado  $s_* > 0$  existem constantes positivas  $\alpha, \beta$  tal que*

$$\alpha \leq v(\gamma, s) \leq \beta$$

para todo  $\gamma \in S^N$ ,  $s \geq s_*$

**Demonstração:** Faremos esta demonstração em quatro partes:

**Parte 1:** *Se  $s_0$  é tal que  $v$  é positiva e suave em  $(0, s_0)$  então existe  $k_1 > 0$ , independente de  $s_0$  tal que*

$$\max_{\gamma \in S^N} v(\gamma, s) \geq k_1. \quad (3.35)$$

Vamos supor por contradição que a afirmação não seja verdadeira, ou seja, que para cada  $\epsilon > 0$  exista um  $s_\epsilon > s_0$  tal que  $v(\gamma, s_\epsilon) < \epsilon$  para todo  $\gamma \in S^N$ . Dado  $\epsilon$ , consideremos a função

$$U(s) = k(1 + s_\epsilon - s)_+^{m/(1-m)}.$$

Então  $U$  satisfaz,

$$\begin{aligned} & (U^p)_s + c(N)U - \frac{1}{1-m}U^p \\ &= (1 + s_\epsilon - s)_+^{m/(1-m)} \frac{K^p}{1-m} \left[ \frac{m-1}{m} \left( c(n) - \frac{K^{p-1}}{1-m} \right) - (1 + s_\epsilon - s) \right]. \end{aligned}$$

O lado direito da igualdade acima é não negativo se tomamos  $K < [c(N)(1-m)]^{1/(1-m)}$  e  $s > s_\epsilon$ . Por fim, se  $\epsilon$  é escolhido suficientemente pequeno (dependendo somente de  $K$ ), teremos também  $U(s_\epsilon) > \epsilon$ . Pois  $v(\cdot, s_\epsilon) < \epsilon$ , o princípio de comparação (Corolário 2.6.1) para  $s > s_\epsilon$ , implica que  $v(\gamma, s) < U(s)$ . Então, como  $U$  é identicamente nulo para  $s > s_\epsilon + 1$ ,

o mesmo acontece com  $v$ . Mas isto contraria a definição de  $v$ , pois isto implicaria que  $u$  se anularia antes do tempo  $T$ . Portanto (3.35) é verdadeira, o que conclui a Parte 1.

**Parte 2:**  $v$  é estritamente positiva e suave para  $0 < s < +\infty$ . Ou seja, podemos escolher  $s_0 = +\infty$  no enunciado da Proposição 3.4.1.

Denotemos,

$$s_0 = \sup\{s > 0 : \inf_{S^N} v(., \tau) > 0 \forall \tau > 0\}$$

Então  $v$  é estritamente positiva e suave para  $s \in (0, s_0)$ . De fato, recordemos que por (3.24), temos que  $v(\gamma, s) \leq M(s) \forall s > 0$ , onde  $M(s)$  é uma função contínua. Em particular,  $v$  satisfaz uma equação uniformemente parabólica para  $0 < s < s_0$  e portanto é suave em seu domínio.

Precisamos mostrar que  $s_0 = +\infty$ . Suponhamos, por contradição, que  $s_0 < +\infty$ . Afirmamos que existe um  $k > 0$  tal que  $v(\gamma, s) \geq k > 0$  para todo  $0 < s < s_0$ . De fato, caso contrário existiria uma sequência  $s_n \uparrow s_0$  tal que  $v(\gamma, s_n) \rightarrow 0$  uniformemente, graças a estimativa de Harnack. Mas isto e a Parte 1 implicariam que  $v(., s) \equiv 0$  para todo  $s$  suficientemente grande, o que é falso. Pois por (3.24)  $v$  é também uniformemente limitada superiormente para  $s \in (0, s_0)$ , estimativas parabólicas implicam que  $v$  converge uniformemente quando  $s \uparrow s_0$  e seu limite é também positivo e suave. Segue que  $v$  pode ser estendida de um modo uniformemente positivo para um intervalo de tempo que vai além de  $s_0$ , contrariando a definição de  $s_0$ . Portanto  $s_0 = +\infty$ , como queríamos.

**Parte 3:** Existe um número  $k_2 > 0$  tal que para todo  $s > 0$

$$\min_{\gamma \in S^N} v(\gamma, s) \leq k_2. \quad (3.36)$$

Considere para  $\bar{s} > 0$  a função,

$$f(s) = (e^{s-\bar{s}} + c(N)(1-m))^{1/(1-m)}.$$

Então  $f$  satisfaz

$$(f^p)_s = -c(N)f + \frac{1}{1-m}f^p,$$

e portanto  $f$  é solução de (3.13). Suponhamos, que exista um tempo  $\bar{s}$  para o qual

$$\min_{\gamma \in S^N} v(\gamma, \bar{s}) > (1 + c(N)(1 - m))^{m/(1-m)} f(\bar{s}).$$

O princípio de comparação, no Apêndice A.2, então, implica que para todo  $s \in (\bar{s}, \infty)$  e todo  $\gamma \in S^N$  tem-se  $v(\gamma, s) > f(s)$ .

Pela definição de  $v$  em (3.15), vemos que

$$w(x, s) \geq \left( \frac{2}{1 + \|x\|^2} \right)^{(N-2)/2}$$

para todo  $s \geq \bar{s}$ . Recordemos que

$$w(x, s) = (Te^{-s})^{-m/(1-m)} u^m(x, T(1 - e^{-s}))$$

Então para um certo  $k > 0$  e todo  $t$  próximo de  $T$  temos

$$u(x, t) \geq k \left( \frac{2}{1 + \|x\|^2} \right)^{(N+2)/2}.$$

Mas isto é impossível porque  $u$  se anula após o tempo  $T$ .

#### Parte 4: Conclusão.

Da Parte 2, podemos tomar  $s_0 = +\infty$  na Proposição 3.4.1. Então dado  $s_* > 0$ , o resultado desejado segue das Partes 1 e 3, tomando  $\beta = Ck_2$  e  $\alpha = k_1/C$  onde  $C$  é a constante em (3.26) e  $k_1$  e  $k_2$ , são as constantes respectivamente em (3.35) e (3.36). Isto termina a demonstração. ■

## 3.7 O Funcional de Lyapunov

Seja  $J$  um funcional definido como

$$J(z) = \frac{1}{2} \int_{S^N} \|\nabla_{S^N} z\|^2 + \frac{c(N)}{2} \int_{S^N} z^2 - \frac{1}{(1-m)(p+1)} \int_{S^N} z^{p+1}.$$

Pois  $v(\gamma, s)$  é positivo e suave para  $s > 0$ , então  $J(v(\cdot, s))$  está bem definido, e os cálculos na Seção 3.2 nos garantem que  $J$  é não-crescente. O resultado principal desta seção é mostrar que  $J(v(\cdot, s)) \geq 0$

**Lema 3.7.1**  $J(v(\cdot, s)) \geq 0$  para todo  $s > 0$ .

**Demonstração:** Suponhamos que para um certo  $s_0 > 0$  tenhamos  $J(v(\cdot, s_0)) < 0$ . Consideremos a seguinte quantidade

$$F(s) = \int_{S^N} v^{p+1}(\gamma, s) d\gamma, \in (0, \infty).$$

Derivando e usando a equação para  $v$  obtemos após uma integração por partes,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} \frac{dF}{ds}(s) &= - \int_{S^N} \|\nabla_{S^N} v\|^2 - \int_{S^N} c(N)v^2 + \frac{1}{1-m} \int_{S^N} v^{p+1} \\ &= -2J(v)(s) + \frac{1}{1-m} \left( 1 - \frac{2}{p+1} \int_{S^N} v^{p+1} \right) \\ &= -2J(v)(s) + \frac{p-1}{(1-m)(p+1)} F(s) \\ &> \frac{(p-1)}{(1-m)(p+1)} F(s) \end{aligned}$$

para todo  $s > s_0$ . Note que  $F(s) \neq 0$  para todo  $s > s_0$ , pois de outra forma  $v(\cdot, s) = 0$  e  $J(v(\cdot, s)) = 0$ , o que é impossível uma vez que  $J(v(\cdot, s)) \leq J(v(\cdot, s_0)) < 0$ , em particular  $F(s_0) > 0$ .

Integrando a relação acima entre  $s_0$  e  $s$ , usando o fato de que  $(1-m)(p-1/p) = 1$ , obtemos,

$$F(s) > F(s_0)e^{(s-s_0)}.$$

Segue em particular que  $F(s)$  tende a  $\infty$  quando  $s \rightarrow \infty$ . Por outro lado, a Proposição 3.6.1 nos diz que  $v$  é uniformemente limitada para  $s > s_0$  e portanto também o é  $F(s)$ . Temos uma contradição, o que termina a demonstração do lema. ■

## 3.8 Demonstrações dos resultados principais

**Teorema 3.2.1** *Seja  $v$  definido em (3.15). Então existe uma única solução não trivial  $\bar{v}$  de*

$$\Delta_{S^N} \bar{v} - c(N)\bar{v} + \frac{1}{1-m} \bar{v}^p = 0 \tag{3.37}$$

tal que,

$$\sup_{\gamma \in \mathbb{R}^N} |v(\gamma, t) - \bar{v}(\gamma)| \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow T.$$

**Demonstração:** A Proposição 3.6.1 nos dá estimativas uniformes, superior e inferior, para  $v(\gamma, s)$ , para  $s > s_* > 0$ . Então, longe de  $s = 0$ , a equação quasilinear satisfeita por  $v$  é uniformemente parabólica. A teoria de regularidade em [14], página 533, pode ser aplicada, o que nos garante também estimativas uniformes em qualquer norma  $C^k$ . Portanto, para  $s \geq s_* > 0$ , a trajetória  $v(\cdot, s)$  é compacta em  $C^k(S^N)$  para qualquer  $k$ . Seja  $\bar{v}$  um ponto limite de  $v(\cdot, s)$  quando  $s \rightarrow \infty$  no sentido da norma de  $C^2$ . Afirmamos que  $\bar{v}$  é uma solução do problema estacionário (3.37).

Suponhamos então que sobre uma sequência  $s_n \rightarrow \infty$  e  $s_n > 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e além disso  $v(\cdot, s_n) \rightarrow \bar{v}$  no sentido de  $C^2$ . Recordemos que

$$\frac{d}{ds} J(v(\cdot, s)) = -\frac{4p}{(p+1)^2} \int_{S^N} |(v^{(p+1)/2}(x, s))_s|^2 dx$$

por (3.20). Integrando esta relação de  $s_n$  a  $s_n + \tau$  obtemos

$$\begin{aligned} J(s_n + \tau) - J(s_n) &= \int_{s_n}^{s_n + \tau} \frac{d}{ds} J(s) ds \\ &= \frac{-4p}{(p+1)^2} \int_{s_n}^{s_n + \tau} \int_{S^N} |(v^{(p+1)/2}(x, s))_s|^2 dx ds \\ \Rightarrow \frac{(p+1)^2}{4p} [J(s_n) - J(s_n + \tau)] &= \int_{S^N} \int_{s_n}^{s_n + \tau} |(v^{(p+1)/2}(x, s))_s|^2 ds dx \\ &= \int_{S^N} \left[ \left( \int_{s_n}^{s_n + \tau} |(v^{(p+1)/2}(x, s))_s|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{s_n}^{s_n + \tau} \frac{s}{\tau} ds \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dx. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Shwarz obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{(p+1)^2}{4p} [J(s_n) - J(s_n + \tau)] &= \frac{1}{\tau} \int_{S^N} \left[ \int_{s_n}^{s_n + \tau} |(v^{(p+1)/2}(x, s))_s| s^{\frac{1}{2}} ds \right]^2 dx \\ &\geq \frac{1}{\tau} \int_{S^N} \left[ \int_{s_n}^{s_n + \tau} |(v^{(p+1)/2}(x, s))_s| ds \right]^2 dx, \end{aligned}$$

pois  $s_n > 1$ . Calculando a integral obtemos,

$$\int_{S^N} (v^{(p+1)/2}(s_n + \tau) - v^{(p+1)/2}(s_n))^2 dx \leq \frac{(p+1)^2}{4p} [J(s_n) - J(s_n + \tau)].$$

Pelo Lema 3.7.1  $J(v(\cdot, s))$  é limitado inferiormente, e é decrescente, possuindo portanto um limite quando  $s \rightarrow \infty$ . Portanto para cada  $\tau > 0$ ,  $v(\cdot, s_n + \tau) \rightarrow \bar{v}$  em  $L^{p+1}$ . Consequentemente esta convergência também é na norma  $C^2$ , também uniformemente para  $\tau > 0$  em intervalos limitados. Como  $v$  é solução da equação (3.13), temos para todo  $\varphi \in C^\infty(S^N)$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{S^N} (v^p(\gamma, s_n + 1) - v^p(\gamma, s_n))\varphi(\gamma)d\gamma \\ &= \int_0^1 \int_{S^N} \left( \Delta_{S^N} v(\gamma, s_n + \tau) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{1-m} v^p(\gamma, s_n + \tau) - c(N)v(\gamma, s_n + \tau) \right) \varphi(\gamma)d\gamma d\tau. \end{aligned}$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$  temos,

$$\int_{S^N} (\Delta_{S^N} \bar{v} + \frac{1}{1-m} \bar{v}^p(\gamma) - c(N)\bar{v}(\gamma))\varphi(\gamma)d\gamma = 0$$

portanto  $\bar{v}$  é solução de (3.37), como desejado. Finalmente, a unicidade do ponto limite  $\bar{v}$  vem dos resultados em [18], e será demonstrada abaixo. ■

**Teorema 3.1.1** *Se  $u_0$  é como em (3.6), existe um número  $\lambda > 0$  e um ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$  tal que se  $T = T(u_0)$  denota o tempo em que a solução do problema (3.4)-(3.5) se anula, então*

$$(T-t)^{-1/(1-m)}u(x,t) = \left\{ \frac{k_N \lambda}{\lambda^2 + \|x - \bar{x}\|^2} \right\}^{(N+2)/2} + \vartheta(x,t) \quad (3.38)$$

com  $\vartheta$  satisfazendo,

$$\|\vartheta(x,t)\|_* \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow T.$$

**Demonstração:** Sabemos do Teorema 3.2.1 que toda solução  $v$  de (3.13) satisfaz

$$\sup_{\gamma \in \mathbb{R}^N} |v(\gamma, t) - \bar{v}(\gamma)| \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow T$$

onde  $\bar{v}$  é uma solução de (3.37). Então por (3.15) existem  $w$  solução de (3.9) e  $\bar{w}$  é solução de (3.11). Temos por (3.15) que

$$v = \left( \frac{1 + \|x\|^2}{2} \right)^{\frac{N-2}{2}} w$$

e

$$\bar{v} = \left( \frac{1 + \|x\|^2}{2} \right)^{\frac{N-2}{2}} \bar{w}.$$

Temos que,

$$\begin{aligned} |v(F(x), s) - \bar{v}(F(x))| &= \left( \frac{1 + \|x\|^2}{2} \right)^{\frac{N-2}{2}} |w(x, s) - \bar{w}(x)| \\ &= \left( \frac{1 + \|x\|^2}{2} \right)^{\frac{N-2}{2}} |(T-t)^{\frac{m}{1-m}} u^m(x, t) - \bar{w}(s)| \quad \text{por (3.8)}. \end{aligned}$$

O resultado segue, então, do Teorema 3.2.1 e de (3.12). ■

**Teorema 3.1.2** *O número  $T$  define uma função contínua de  $u_0$ , para a norma  $\|\cdot\|_*$  dada por (3.6).*

**Demonstração:** Suponhamos que  $u_0^n(x)$  é uma sequência de funções contínuas que satisfazem a condição de decaimento em (3.6) e tal que  $\|u_0^n - u_0\|_* \rightarrow 0$ . Denotemos por  $u_n(x, t)$  a solução da equação (3.4) com a condição inicial  $u_n(\cdot, 0) = u_0^n$  e por  $u$  a solução de (3.4)-(3.5). Seja  $T_n$  o tempo de anulação de  $u_n$  e  $T_0$  o de  $u$ . Mostraremos primeiramente a continuidade do tempo de anulação, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T_0. \quad (3.39)$$

Note que a sequência  $T_n$  pode ser tomada limitada, pois  $u_0^n$  é limitada na norma do supremo, logo temos por comparação que  $T_n \leq \bar{T}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , onde  $\bar{T}$  é o tempo de anulação de uma solução do tipo definido em (3.1). Seja depois de considerar uma subsequência se necessário,  $T^*$  o ponto limite de  $T_n$  e defina

$$w_n(x, s) = (T_n - t)^{-m/(1-m)} u_n(x, t)^m \Big|_{t=T_n(1-e^{-s})}$$

tal que  $w_n$  satisfaz a equação (3.9). Analogamente,  $v_n$  definido a partir de  $w_n$  como em (3.15). A Proposição 3.6.1 então se aplica para  $v_n$ . Além disso, observamos que as constantes  $\alpha$  e  $\beta$  na Proposição 3.6.1 podem ser escolhidas uniformemente em  $n$ , o que se traduz precisamente nas desigualdades para  $w_n$ ,

$$\alpha \left\{ \frac{1}{1 + \|x\|^2} \right\}^{(N+2)/2} \leq (T_n - t)^{-1/(1-m)} u_n(x, t) \leq \beta \left\{ \frac{1}{1 + \|x\|^2} \right\}^{(N+2)/2}$$

para  $t^* < t < T_n$ . Portanto, passando o limite e considerando que para  $0 < t < T_0$  fixo,  $u_n \rightarrow u(x, t)$  uniformemente quando  $n \rightarrow \infty$ , temos,

$$\alpha \left\{ \frac{1}{1 + \|x\|^2} \right\}^{(N+2)/2} \leq (T^* - t)^{-1/(1-m)} u(x, t) \leq \beta \left\{ \frac{1}{1 + \|x\|^2} \right\}^{(N+2)/2}$$

para todo  $t^* < t < T^*$ . Mas essas duas desigualdades implicam que, necessariamente  $T^*$  é o tempo de anulação de  $u$ , ou seja  $T^* = T_0$ , concluímos assim a validade de (3.39).

Sejam  $\bar{v}$  e  $\bar{v}_n$  os limites uniformes de  $v$  e  $v_n$ , respectivamente, quando  $s \rightarrow \infty$ . Precisamos mostrar que  $\bar{v}_n \rightarrow \bar{v}$  quando  $n \rightarrow \infty$ , uniformemente. Isto em particular implica na unicidade de  $\bar{v}$  com relação a  $v$  o que é a parte restante do Teorema 3.2.1. Uma observação importante se refere ao fato de que a energia é a mesma em todos os estados de equilíbrio de (3.13), conseqüentemente  $J(\bar{v}_n) = J(\bar{v})$ . Por outro lado, a Proposição 3.6.1, e a uniformidade das constantes  $\alpha$  e  $\beta$  para os  $v_n$  implica que o conjunto das funções  $\bar{v}_n$  é compacto em qualquer norma  $C^k$ . Mas segue do Lema 1 em [18] e a Proposição 3.6.1 a existência de números  $\vartheta \in (0, \frac{1}{2})$  e  $C > 0$ , tais que para todo  $s_2 > s_1 > s_* > 0$ , temos

$$\|v_n(\cdot, s_2) - v_n(\cdot, s_1)\|_{L^2} \leq C |J(v_n(\cdot, s)) - J(\bar{v}_n)|^\vartheta \quad \forall n \geq 1 \quad (3.40)$$

também,

$$\|v(\cdot, s_2) - v(\cdot, s_1)\|_{L^2} \leq C |J(v(\cdot, s)) - J(\bar{v})|^\vartheta. \quad (3.41)$$

Por completude, façamos um breve esboço de como se obtém esta desigualdade. Para uma função analítica real  $F$  com  $\nabla F(0) = 0$ , um resultado de Lojasiewicz estabelece que existem números  $\vartheta \in (0, \frac{1}{2})$  e  $\sigma > 0$  tal que

$$|\nabla F(\xi)| \geq |F(\xi) - F(0)|^{1-\vartheta}, \quad |\xi| < \sigma.$$

Os argumentos em [18], Teorema 3 (vide Apêndice E), estendem este tipo de estimativa a uma que no nosso contexto assume a seguinte forma

$$\|\Delta_{S^N} v - c(N)v + \frac{1}{1-m} v^p\|_{L^2} \geq |J(v(\cdot, s)) - J(\bar{v})|^{1-\vartheta}, \quad (3.42)$$

para todo  $s$  suficientemente grande. Essa estimativa usa o fato de que  $v$  se aproxima do conjunto de estados de equilíbrio quando  $s \rightarrow \infty$ , e que o conjunto de todos os estados

de equilíbrio é uniformemente limitado longe de zero e seus elementos tem mesma energia. Agora,

$$(v^p)_s = \Delta_{S^N} v - c(N)v + \frac{1}{1-m}v^p \equiv M(v(\cdot, s)).$$

Portando,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds}(J(v(\cdot, s))) &= (M(v(\cdot, s)), v_s)_{L^2} && \text{(por (3.19))} \\ &= (v^p, v_s)_{L^2} \\ &= (pv^{p-1}v_s, v_s)_{L^2} \\ &\geq C\|(v^p)_s\|_{L^2}^2 && \text{(por Prop. 3.6.1)} \\ &= C\|M(v(\cdot, s))\|_{L^2}\|(v^p)_s\|_{L^2} \end{aligned}$$

onde  $(\cdot, \cdot)_{L^2}$  denota o produto interno em  $L^2$ . Daí segue que,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds}(J(v(\cdot, s)) - J(\bar{v}))^\vartheta &\geq C(J(v(\cdot, s)) - J(\bar{v}))^{\vartheta-1}\|M(v(\cdot, s))\|_{L^2}\|(v^p)_s\|_{L^2} \\ &\geq C\|(v^p)_s\|_{L^2} \geq C\|v_s\|_{L^2} \end{aligned} \quad (3.43)$$

aí usamos a estimativa (3.42). Segue daí a estimativa (3.41) e (3.42). Lembremos que os números  $C$  e  $\vartheta$  nessas estimativas depende somente da expansão analítica do funcional de energia numa vizinhança de um estado de equilíbrio. Como as soluções  $v$ ,  $v_n$  e seus limites tomam valores apenas numa região onde são uniformemente analíticas, estes números podem ser também tomados uniformemente em  $n$ . Temos que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \int_{S_n} (v(\cdot, s) - v_n(\cdot, s))^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\|v - v_n\|_{L^2}} \int_{S^N} (v(\cdot, s) - v_n)(v(\cdot, s) - v_n)_s \\ &\leq \frac{1}{\|v - v_n\|_{L^2}} \|v(\cdot, s) - v_n(\cdot, s)\|_{L^2} \|(v - v_n)_s\|_{L^2} \\ &\leq \|v_s(\cdot, s)\|_{L^2} + \|(v_n(\cdot, s))_s\|_{L^2} \\ &\leq -\frac{d}{ds} (J(v(\cdot, s)) - J(\bar{v}))^\vartheta \\ &\quad + -\frac{d}{ds} (J(v_n(\cdot, s)) - J(\bar{v}_n))^\vartheta \end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem de (3.43). Integrando, então, a desigualdade acima em relação a variável temporal e fazendo  $s \rightarrow \infty$  obtemos,

$$\begin{aligned} \|\bar{v} - \bar{v}_n\|_{L^2} &\leq \|v_n(\cdot, s_1) - v(\cdot, s_1)\|_{L^2} \\ &\quad + C(|J(\cdot, s_1) - J(\bar{v})|^\vartheta + |J(v_n(\cdot, s_1)) - J(\bar{v}_n)|^\vartheta). \end{aligned}$$

Uma vez que  $v_n(\cdot, s) \rightarrow v(\cdot, s)$  uniformemente em subconjuntos compactos de  $(0, \infty)$ , segue que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\bar{v} - \bar{v}_n\|_{L^2} \leq 2C(|J(v(\cdot, s_1)) - J(\bar{v})|^\vartheta).$$

Como  $s_1$  é arbitrário concluímos o resultado desejado depois de tomar  $s_1 \rightarrow \infty$ . Isso conclui a demonstração ■

# Apêndice A

## Resultados sobre equações parabólicas.

O objetivo deste Apêndice é fazer uma breve apresentação de resultados relacionados aos assuntos abordados na dissertação bem como algumas verificações referentes a forma como estes resultados foram aplicados no corpo da dissertação. Apresentamos ao longo do texto referências mais aprofundadas nesses tópicos.

### A.1 Existência de Soluções para Equações parabólicas não degeneradas

Apresentaremos, nesta seção, um resultado<sup>1</sup> sobre existência de soluções para *equações parabólicas quasilineares não-degeneradas*, ou seja, equações da forma,

$$u_t - a_{ij}(x, t, u, u_x)u_{x_i x_j} + a(x, t, u, u_x) = 0 \quad (\text{A.1})$$

que satisfazem (A.5) onde  $\mu, \nu > 0$  e  $\xi$  é um vetor qualquer e  $\xi_i$  é sua  $i$ -ésima coordenada. Consideraremos ainda o problema com a seguinte condição de fronteira:

$$u|_{\Gamma_T} = \psi|_{\Gamma_T}. \quad (\text{A.2})$$

---

<sup>1</sup>O resultado apresentado nesta seção bem como uma sugestão de como demonstra-lo podem ser encontrados em [14], página 559.

Nesta seção  $Q = \Omega \times (0, T] \subset \mathbb{R}^{n+1}$  onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é limitado, além disso denotaremos  $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T]$ . Também usaremos a seguinte notação:

$$Q_\tau = \Omega \times (0, \tau), \quad \Omega_\tau = \Omega \times \{\tau\}, \quad \Sigma_\tau = \partial\Omega \times (0, \tau],$$

faremos também a identificação  $\Omega = \Omega \times \{0\}$ . Denotamos também por  $H^{l,l/2}(\bar{Q}_T)$  o conjunto das funções  $u(x, t)$ , as quais são contínuas em  $\bar{Q}_T$ , e também o são suas derivadas da forma  $D_t^r D_x^s$  com  $2r + s < l$ , e satisfazendo

$$|u|_{\bar{Q}_T}^{(l)} = \langle u \rangle_{\bar{Q}_T}^{(l)} + \sum_{j=0}^{l-1} \langle u \rangle_{\bar{Q}_T}^{(j)},$$

onde,

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_{\bar{Q}_T}^{(0)} &= \max_{\bar{Q}_T} |u| \\ \langle u \rangle_{\bar{Q}_T}^{(j)} &= \sum_{(2r+s=j)} |D_t^r D_x^s u|_{\bar{Q}_T}^{(0)}, \\ \langle u \rangle_{\bar{Q}_T}^{(l)} &= \langle u \rangle_{x, \bar{Q}_T}^{(l)} + \langle u \rangle_{t, \bar{Q}_T}^{(l/2)}, \\ \langle u \rangle_{x, \bar{Q}_T}^{(l)} &= \sum_{(2r+s=j)} \langle D_t^r D_x^s u \rangle_{x, \bar{Q}_T}^{(l-|l|)}, \\ \langle u \rangle_{t, \bar{Q}_T}^{(l/2)} &= \sum_{(2r+s=j)} \langle D_t^r D_x^s u \rangle_{t, \bar{Q}_T}^{(l-2r-s)/2} \\ \langle u \rangle_{x, \bar{Q}_T}^{(\alpha)} &= \sup_{(x,t), (x',t) \in \bar{Q}_T} \frac{|u(x, t) - u(x', t)|}{|x - x'|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \\ \langle u \rangle_{t, \bar{Q}_T}^{(\alpha)} &= \sup_{(x,t), (x,t') \in \bar{Q}_T} \frac{|u(x, t) - u(x, t')|}{|t - t'|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \end{aligned}$$

A seguir enunciamos um resultado sobre existência de solução para uma tal equação:

**Teorema A.1.1** *Suponhamos que as seguintes condições são satisfeitas.*

(a) Para  $(x, t) \in \bar{Q}_T$  e  $u$  uma solução de (A.1) as condições

$$a_{ij}(x, t, u, 0)\xi_i\xi_j \geq 0, \tag{A.3}$$

e,

$$ua(x, t, u, 0) \geq -b_1 u^2 - b_2, \text{ para algum } b_1, b_2 \geq 0. \tag{A.4}$$

são satisfeitas.

(b) Para  $(x, t) \in \bar{Q}_T$ ,  $|u| \leq M$  onde  $M$  é tal que  $\max_{\bar{Q}_T} |u| \leq M$  as funções  $a_{ij}(x, t, u, p)$  e  $a(x, t, u, p)$  são contínuas e diferenciáveis relativamente a  $x$ ,  $u$  e satisfazem as seguintes desigualdades:

$$\nu(1 + |p|)^{m-2} |\xi|^2 \leq a_{ij}(x, t, u, p) \xi_i \xi_j \leq \mu(1 + |p|)^{m-2} |\xi|^2, \quad \nu, \mu > 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k} \right| (1 + |p|)^3 + |a| + \left| \frac{\partial a}{\partial p_k} \right| (1 + |p|) \leq \mu_1 (1 + |p|)^m, \quad (\text{A.6})$$

$$\left| \frac{\partial a_k}{\partial x_k} \right| (1 + |p|)^2 + \left| \frac{\partial a}{\partial x_k} \right| \leq (\epsilon + P(|p|))(1 + |p|)^{m+1} \quad (\text{A.7})$$

$$\left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial u} \right| \leq (\epsilon + P(|p|))(1 + |p|)^{m-2} \quad (\text{A.8})$$

$$-\frac{\partial a}{\partial u} \leq (\epsilon + P(|p|))(1 + |p|)^m, \quad (\text{A.9})$$

$$\epsilon > 0.$$

(c) Para  $(x, t) \in \bar{Q}_T$ ,  $|u| \leq M$ , ( $M$  é definido no item (a) acima) as funções  $a_{ij}(x, t, u, p)$  e  $a(x, t, u, p)$  são continuamente diferenciáveis com respeito a todos os seus argumentos e Hölder contínua em  $t$  com expoente  $\beta/2$ .

(d) A condição de fronteira (A.2) é dada por uma função  $\psi(x, t)$  pertencente a  $C^{2,1}(\Sigma_T)$ ,  $\max_{\Omega} |\psi_x(x, 0)| < \infty$ , e  $\psi \in C(\bar{Q}_T)$ .

(e)  $\Omega$  é um conjunto com fronteira de classe  $C^2$ .

Então existe uma única solução de (A.1)-(A.2) em  $C(\bar{Q}_T) \cap H^{2+\beta, 1+\beta/2}$ .

**Verificação da aplicabilidade do teorema acima a (2.14)-(2.16), da página 11.**

Observemos que a equação de meios porosos (2.14), pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\overbrace{m u^{m-1}}^{a_{ii}} u_{x_i x_i} + \overbrace{m(m-1) u^{m-2} (u_{x_i})^2}^{-a} = u_t.$$

Ou seja, estamos definindo,

$$a_{ij}(x, t, u, p) = \delta_{ij}mu^{m-1}.$$

e,

$$a(x, t, u, p) = m(m-1)u^{m-2} \sum_i (p_i)^2,$$

onde  $p_i$  é a  $i$ -ésima coordenada de  $p$ . Vamos considerar  $m > 1$ , mas no caso  $m \leq 1$  bastam pequenas alterações como por exemplo trocar o valor que escolheremos para  $\mu$  por aquele que escolheremos para  $\nu$  em (A.6). A condição (A.3) é satisfeita, pois (2.17) implica que  $u_n \geq 0$ . Já a condição (A.4) é satisfeita com  $b_1 = b_2 = 0$ . Também a condição (A.5) é satisfeita graças a (2.17), com  $\nu = \frac{1}{n}$ ,  $\mu = M + \frac{1}{n}$ . Para verificar (A.6), definamos  $\mu_1 = dm(m-1)(M + \frac{1}{n})^{m-2}$  e temos,

$$\begin{aligned} |a| + \left| \frac{\partial a}{\partial p_k} \right| (1 + \|p\|) &= m(m-1)u^{m-2} \|p\|^2 + \sum_k 2m(m-1)u^{m-2} |p_k| \\ &\leq \mu_1 \|p\|^2 + 2\mu_1 d \|p\| \leq \mu_1 (1 + \|p\|)^2 \\ &\leq \mu_1 (1 + \|p\|)^m. \end{aligned}$$

Para (A.7) é suficiente observar que  $\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_k} = \frac{\partial a}{\partial x_k} = 0$ . Em (A.8) tome  $\epsilon = \mu_1$  e  $P = 0$ . Já (A.9) vem do fato de que  $\frac{\partial a}{\partial u} \geq 0$ .

A verificação do item (c) é simples, e a verificação do item (d) segue do fato de  $u_{0n} \in C^\infty(\Omega)$ , e  $u_0$  tem suporte compacto em  $\Omega$ . A condição no item (e), faz parte das nossas hipóteses. Podemos assim aplicar o Teorema A.1.1 a (2.14)-(2.16), e mostrar que existe uma única solução para (2.14)-(2.16).

## A.2 Princípios do Máximo e de Comparação

**Teorema A.2.1 (Princípio de Comparação)** <sup>2</sup> *Sejam  $v(x, t), w(x, t)$ , funções contínuas em  $\bar{Q}$ , e suponhamos as duas primeiras derivadas espaciais e a primeira derivada temporal de  $v$  e  $w$  contínuas em  $Q$ . Seja  $F(x, t, p, p_i, p_{i,j})$ , ( $i, j = 1, \dots, n$ ) função contínua cuja primeira*

<sup>2</sup>Esta seção é baseada em [7], páginas 52 e 53.

derivada com respeito a  $p_{i,j}$  é também contínua  $\forall i, j$  em um domínio  $E$  contendo o fecho do conjunto de pontos da forma  $(x, t, p, p_i, p_{i,j})$  onde,

$$(x, t) \in \bar{Q}, p \in (v(x, t), w(x, t)), \quad p_i \in \left( \frac{\partial v(x, t)}{\partial x_i}, \frac{\partial w(x, t)}{\partial x_i} \right),$$

$$p_{i,j} \in \left( \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right);$$

destacamos que acima,  $(v(x, t), w(x, t))$ ,  $\left( \frac{\partial v(x, t)}{\partial x_i}, \frac{\partial w(x, t)}{\partial x_i} \right)$  e  $\left( \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ , denotam intervalos. Suponhamos ainda que  $\left( \frac{\partial F}{\partial p_{i,j}} \right)$  é uma matriz positiva semidefinida. Se

$$\frac{\partial v}{\partial t} > F \left( x, t, v, \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad \text{em } Q \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} \leq F \left( x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad \text{em } Q \quad (\text{A.11})$$

com,

$$v > w \quad \text{em } \bar{\Omega} \cup \Sigma \quad (\text{A.12})$$

então também temos  $v > w$  em  $Q$ .

**Demonstração:** Seja  $M$  o conjunto dos pontos  $\sigma$  do intervalo  $(0, T)$  tais que  $v > w$  em  $\bar{B}_t \times [0, \sigma)$ . Se provarmos que  $\sup M = T$  a demonstração estará completada. Seja  $t_0 = \sup M$ . Por (A.12) e pela continuidade de  $z = v - w$ , temos  $t_0 > 0$ . Se  $T > t_0$  então a função  $z$  é positiva em  $Q_{t_0}$ , não-negativa em  $\Omega_{t_0}$  e igual a zero em um ponto  $P_0 = (x_0, t_0)$  de  $\bar{\Omega}_{t_0}$ , pois por (A.12),  $v > w$  em  $\Sigma$ . Portanto,  $P_0$  deve estar em  $\Omega_{t_0}$ . Segue que

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(P_0) = 0.$$

Pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned} & F \left( P_0, v(P_0), \frac{\partial v(P_0)}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 v(P_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right) - F \left( P_0, w(P_0), \frac{\partial w(P_0)}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 w(P_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F(e)}{\partial p_{i,j}} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

para algum ponto  $e \in E$ . Vejamos que

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F(e)}{\partial p_{i,j}} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) \geq 0.$$

De fato, como  $\left(\frac{\partial F}{\partial p_{i,j}}\right)$  é semidefinida positiva, existe uma matriz unitária  $C$  tal que  $C\left(\frac{\partial F}{\partial p_{i,j}}\right)C^t$  é diagonal e suas entradas são todas não-negativas. Além disso, como  $P_0$  é um ponto de mínimo de  $z$  então  $D^2z(P_0)$  é também definida positiva, logo existe uma matriz unitária  $\tilde{C}$  tal que  $\tilde{C}(D^2z(P_0))\tilde{C}^t$  é também diagonal e com entradas não-negativas.

Temos, então,

$$\begin{aligned} 0 \leq Tr \left( C \left( \frac{\partial F}{\partial p_{i,j}} \right) C^t \tilde{C} D^2 z(P_0) \tilde{C}^t \right) &= Tr \left( \left( \frac{\partial F}{\partial p_{i,j}} \right) D^2 z(P_0) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F(e)}{\partial p_{i,j}} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(P_0), \end{aligned}$$

onde  $Tr$  é a função traço.

Finalmente, como  $v(P_0) = u(P_0)$ , temos por (A.13) que o lado direito de (A.10) é maior ou igual ao lado direito de (A.11). Portanto  $\frac{\partial v}{\partial t} > \frac{\partial w}{\partial t}$  em  $P_0$ , ou seja,  $\frac{\partial z}{\partial t}(P_0) > 0$  contrariando o fato de  $P_0$  ser um mínimo de  $z$  em  $Q_{t_0}$ .

# Apêndice B

## Um pouco de geometria Riemanniana

### B.1 Operador de Laplace Beltrami

Se aplicarmos o laplaciano  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^n$  a função  $\psi(y) = f(r)g(\omega)$ , onde  $r = \|y\|$ ,  $\omega = y/\|y\|$ ,  $f, g \in C^\infty$ . Temos,

$$\Delta(f(r)g(\omega)) = g\Delta f + f\Delta g + 2\nabla f \nabla g = g\Delta f + f\Delta g \quad (\text{B.1})$$

já que  $\nabla f \cdot \nabla g = 0$  (o gradiente  $\nabla f$  está na direção radial e  $\nabla g$  é tangente a esfera). Calculando  $\Delta f$  obtemos,

$$\Delta f = f''(r) + \frac{n-1}{r}f'(r) \quad (\text{B.2})$$

Para descrever  $\Delta g$ , observamos que o operador  $\Delta$  diminui em 2 a ordem de homogeneidade das funções. Portanto  $\Delta g$  tem homogeneidade  $-2$ . Então,

$$\Delta g = r^{-2}\Delta_S g, \quad (\text{B.3})$$

onde, novamente,  $\Delta_S g$  é função de  $\omega$ .  $\Delta_S$  é portanto um operador (de segunda ordem) sobre a esfera  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ .

### B.2 O fluxo de Yamabe

Veremos nesta seção a relação entre o problema de Yamabe, e a equação de meios porosos com expoente de Sobolev.

### B.2.1 O Problema de Yamabe.

O problema de Yamabe, diz respeito a encontrar em uma variedade Riemanniana munida de uma métrica  $(M, g_0)$  dada uma segunda métrica  $g$  na mesma classe conforme de  $g_0$  e possuindo curvatura escalar constante. Podemos escrever a classe conforme como,

$$g = u^{4/(N-2)}g_0$$

localmente em  $M$  para alguma função suave positiva  $u$ . O fator conforme é  $u^{4/(N-2)}$ . O elemento de volume é

$$|\det(g)|^{1/2}dx = u^{2N/(N-2)}dx.$$

O comprimento é  $ds = g^{1/2}dr = u^{2/N-2}dr$  onde  $dr$  é o elemento de comprimento em  $g_0$ .

Fazemos, então,  $R = R_g$  e  $R_0$  as curvaturas escalares das métricas  $g$ ,  $g_0$ , respectivamente. Se denotamos por  $\Delta_0$  o operador de Laplace-Beltrame de  $g_0$ , temos a fórmula,

$$R = -u^{-p}Lu \text{ em } M,$$

com  $p = (N + 2)/(N - 2)$  e

$$Lu := \kappa\Delta_0u - R_0u, \quad \kappa = \frac{4(n-1)}{n-2}.$$

O problema de Yamabe se torna então,

$$\Delta_0u - \left(\frac{N-2}{4(N-1)}\right)R_0u + \left(\frac{N-2}{4(N-1)}\right)R_gu^{(N+2)/(N-2)} = 0.$$

Essa equação determina  $u$  (e portanto  $g$ ) quando  $g_0$ ,  $R_0$  e  $R_g$  são conhecidos. No caso mais básico tomamos  $M = \mathbb{R}^N$  e  $g_0$  sua métrica usual, então  $\Delta_0$  é o Laplaciano comum,  $R_0 = 0$ , e tomamos  $R_g = 1$  obtendo assim uma equação elíptica bem conhecida, a equação (C.1) do Apêndice C.

### B.2.2 O fluxo de Yamabe

O fluxo de Yamabe é definido como uma equação de evolução para uma família de métricas que é usado como ferramenta para construir métricas com curvatura escalar constante em uma classe conforme. Enfocamos a família  $g(x, t)$  de métricas que é solução do problema

$$\partial_t g = -Rg, \quad g(0) = g_0 \text{ em } M.$$

É possível mostrar que essa equação é equivalente a

$$\partial_t u^p = Lu, \quad u(0) = 1 \text{ em } M,$$

depois de uma mudança na escala de tempo. Seja  $(M, g_0)$  o  $\mathbb{R}^N$  com a métrica usual, com  $R_0 = 0$ . Definamos  $u^p = v$ ,  $m = 1/p = (N - 2)/(N + 2) \in (0, 1)$ . Então,

$$\partial_t v = Lv^m,$$

que é a EMP com expoente de Sobolev. Se tentarmos separar variáveis teremos soluções da forma

$$v(x, t) = (T - t)^\alpha f(x)$$

então necessariamente  $\alpha = 1/(1 - m) = (N + 2)/4$ , e  $F = f^m$  satisfaz a equação elíptica semilinear com expoente crítico,

$$\Delta F + \frac{(n + 2)}{4} F^{(N+2)/(N-2)} = 0. \text{ em } \mathbb{R}^N$$

# Apêndice C

## Identidade de Derrick-Pohozaev

Analisaremos o seguinte problema,

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u & \text{em } U \\ u = 0 & \text{em } \partial U. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

A teoria em [6], Capítulo 8, aplica-se a (C.1) desde que

$$1 < p < \frac{n+2}{n-2} \quad (\text{C.2})$$

e garante a existência de uma solução não trivial. Vamos supor, então,

$$\frac{n+2}{n-2} < p < \infty. \quad (\text{C.3})$$

Nosso objetivo será provar sob certas condições geométricas sobre  $U$  que (C.3) implica que  $u \equiv 0$  é a única solução suave de (C.1). O expoente  $\frac{n+2}{n-2}$  é chamado *expoente crítico*.

**Definição** Um conjunto aberto  $U$  é dito estrelado em 0 se para cada  $x \in \bar{U}$ , o segmento,

$$\{\lambda x : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

está em  $\bar{\Omega}$ .

**Lema C.0.1** *Suponhamos que  $\partial U$  é  $C^1$  e  $U$  é estrelado em 0. Então,*

$$x \cdot \nu(x) \geq 0 \quad \forall x \in \partial U,$$

onde  $\nu$  denota o vetor normal exterior.

**Demonstração:** Como  $\partial U$  é  $C^1$ , se  $x \in \partial U$  então para um  $\epsilon > 0$  dado existe  $\delta$  tal que  $|y - x| < \delta$  e  $y \in \bar{U}$  implica  $\nu(x) \cdot \frac{(y-x)}{|y-x|} \leq \epsilon$ . Em particular,

$$\limsup \nu(x) \cdot \frac{(y-x)}{|y-x|} \leq 0.$$

Seja  $y = \lambda x$  para  $0 < \lambda < 1$ . Então,  $y \in \bar{U}$ , já que  $U$  é estrelado. Portanto

$$\nu(x) \cdot \frac{x}{|x|} = - \lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \nu(x) \cdot \frac{(\lambda x - x)}{|\lambda x - x|} \geq 0.$$

■

Abaixo provaremos que não existe solução não trivial para equação (C.1) quando  $p$  satisfaz (C.3).

**Teorema C.0.1** *Se  $u \in C^2$  é solução do problema (C.1), o expoente  $p$  satisfaz a desigualdade (C.3) e  $U$  é estrelado em 0 com  $\partial U \in C^1$ , então*

$$u \equiv 0 \text{ em } U.$$

**Demonstração:** Multiplicamos a EDP por  $x \cdot Du$  e integramos em  $U$ , encontrando assim,

$$\int_U (-\Delta u)(x \cdot Du) dx = \int_U |u|^{p-1} u(x \cdot Du) dx. \quad (\text{C.4})$$

Vamos reescrever a igualdade acima como

$$A = B.$$

O termo a direita é

$$\begin{aligned} A &:= - \sum_{i,j=1}^n \int_U u_{x_i x_j} x_j u_{x_i} dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_U u_{x_i} (x_j u_{x_i})_{x_i} dx - \sum_{i,j=1}^n \int_{\partial U} u_{x_i} \nu^i x_j u_{x_j} dS \\ &=: A_1 + A_2 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Expandindo  $A_1$ ,

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{i,j=1}^n \int_U u_{x_i} \delta_{ij} u_{x_j} + u_{x_i} x_j u_{x_j x_i} dx \\ &= \int_U |Du|^2 + \sum_{j=1}^n \left( \frac{|Du|^2}{2} \right)_{x_j} x_j dx \\ &= \left( 1 + \frac{n}{2} \right) \int_U |Du|^2 dx + \int_{\partial U} \frac{|Du|^2}{2} (\nu \cdot x) dS. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Por outro lado, como  $u = 0$  em  $\partial U$ ,  $Du(x)$  é paralelo ao vetor normal  $\nu(x)$  em cada ponto  $x \in \partial U$ . Logo,  $Du(x) = \pm |Du(x)|^2 \nu(x) dS$ . Usando essa identidade obtemos,

$$A_2 = - \int_{\partial U} |Du|^2 (\nu \cdot x) dS. \quad (\text{C.7})$$

Combinando (C.5)-(C.7), deduzimos,

$$A = \frac{2-n}{2} \int_U |Du|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\partial U} |Du|^2 (\nu \cdot x) dS.$$

Voltando para (C.4), calculamos,

$$\begin{aligned} B &:= \sum_{j=1}^n \int_U |u|^{p-1} u x_j u_{x_j} \\ &= \sum_{j=1}^n \int_U \left( \frac{|u|^{p+1}}{p+1} \right)_{x_j} x_j dx = -\frac{n}{p+1} \int_U |u|^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Este cálculo e (C.4), nos dão a seguinte identidade, conhecida como *identidade de Derrick-Pohozaev*,

$$\left( \frac{n-2}{2} \right) \int_U |Du|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial U} |Du|^2 (\nu \cdot x) dS = \frac{n}{p+1} \int_U |u|^{p+1} dx. \quad (\text{C.8})$$

Em vista do lema acima, obtemos a desigualdade,

$$\left( \frac{n-2}{2} \right) \int_U |Du|^2 dx \leq \frac{n}{p+1} \int_U |u|^{p+1} dx. \quad (\text{C.9})$$

Mas multiplicando a EDP por  $-\Delta u = |u|^{p+1}u$  e integrando por partes temos,

$$\int_U |Du|^2 dx = \int_U |u|^{p+1} dx. \quad (\text{C.10})$$

Sustituindo em (C.9), concluímos que

$$\left( \frac{n-2}{2} + \frac{n}{p+1} \right) \int_U |u|^{p+1} dx \leq 0.$$

Portanto se  $u \not\equiv 0$ , segue que  $\frac{n-2}{2} - \frac{n}{p+1} \leq 0$ , ou seja,  $p \leq \frac{n+2}{n-2}$ . ■

Para (3.25) no Capítulo 3 devemos observar que o resultado acima não pode ser aplicado pois, após uma pequena transformação em (3.25) obtemos a seguinte equação

$$\begin{aligned} \Delta \hat{g} &= -\frac{1}{1-m} \hat{g}^p, \quad \hat{g} > 0 \text{ em } U \\ \hat{g} &= 0 \quad \text{em } \partial U \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

com  $p = \frac{n+2}{n-2}$  (o nosso expoente crítico). No entanto afirmamos que sua conclusão também é verdadeira nesse caso desde que observemos que em (3.25) estamos interessados em considerar um domínio limitado. Fazemos então a seguinte afirmação:

*Não existe uma solução não trivial para (C.11) com  $p = \frac{n+2}{n-2}$  se  $U$  é estrelado,  $\partial U$  é  $C^1$ , e além disso  $U$  é limitado.*

A título de prova para a afirmação acima observamos que na equação (C.8), dada por

$$\left(\frac{n-2}{2}\right) \int_U |Du|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial U} |Du|^2 (\nu \cdot x) dS = \frac{n}{p+1} \int_U |u|^{p+1} dx.$$

Temos por (C.10) e pelo fato de  $p = \frac{n+2}{n-2}$  que

$$\int_{\partial U} |Du|^2 (\nu \cdot x) dS = 0.$$

Mas pelo lema de Hopf  $|Du|^2 > 0$ , logo deve ser  $\nu(x) \cdot x = 0$  q.t.p., portanto  $x \in T_x \partial U$  (espaço tangente a  $\partial U$  no ponto  $x$ ). Como estamos supondo  $\partial U$  limitado, e portanto compacto, existe  $x_0 \in \partial U$  tal que

$$|x_0| = \max_{x \in \partial U} |x|. \tag{C.12}$$

Mas como  $x_0 \in T_{x_0} \partial U$ , existe  $\gamma \subset \partial U$  uma curva  $C^1$  em um intervalo  $(-\epsilon, \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ , com

$$\gamma(0) = x_0 \text{ e } \gamma'(0) = x_0.$$

Logo, existe  $0 < \delta < \epsilon$  tal que  $\gamma'(t) \cdot \gamma(t) > 0$  em  $[0, 2\delta)$ , ou seja  $|\gamma(\cdot)|$  é crescente nesse intervalo e portanto  $|\gamma(\delta)| > |x_0|$ , contrariando (C.12). Daí segue que a afirmação é verdadeira.

# Apêndice D

## Lema de Hopf e Moving Planes

Na Seção 3.4 do Capítulo 3 apresentamos utilizamos a técnica de moving planes, para facilitar sua compreensão apresentamos neste Apêndice esse tipo de argumento aplicado a uma situação mais simples. Com base em [17], capítulo 4, usaremos moving planes para provar a simetria radial das soluções de

$$\Delta u + f(u) = 0 \tag{D.1}$$

em que  $f$  é  $C^1$ . Para tanto precisaremos de alguns resultados preliminares, entre os quais o Lema de Hopf e o princípio do máximo forte.

### D.1 Lema de Hopf e Princípio do Máximo Forte

Apenas enunciaremos o Lema de Hopf, para mais detalhes sobre o Lema de Hopf veja [17], capítulo 4, ou [6]. Estaremos considerando o seguinte operador elíptico,

$$Lu = a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \tag{D.2}$$

onde  $x \in \Omega$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é limitado e tem fronteira de classe  $C^2$  e é orientável. Os coeficientes  $a_{ij}$ ,  $b_i$  e  $c$  são contínuos em  $\bar{\Omega}$  e  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . O lema de Hopf para  $L$  é:

**Teorema D.1.1 (Lema de Hopf)** *Suponha que  $\Omega$  está de um dos lados de  $\partial\Omega$ . Além disso suponha que  $Lu \geq 0$ , e seja  $x_0 \in \partial\Omega$  tal que  $u(x_0) > u(x)$  para todo  $x \in \Omega$ . Suponhamos também que  $u$  é diferenciável em  $x_0$  e que alguma das seguintes alternativas é verdadeira.*

(1)  $c = 0$ ,

(2)  $c \leq 0$  e  $u(x_0) \geq 0$ , ou

(3)  $u(x_0) = 0$ .

Então  $\partial u / \partial \nu(x_0) > 0$ , onde  $\nu$  denota o vetor normal a  $\partial\Omega$ .

**Teorema D.1.2 (Princípio do Máximo Forte)** *Suponhamos que  $Lu \geq 0$  ( $Lu \leq 0$ ) em  $\Omega$  e que  $u$  não é constante. Se  $c = 0$ , então  $u$  não atinge seu máximo (mínimo) no interior de  $\Omega$ . Se  $c \leq 0$ , então  $u$  não atinge seu máximo (mínimo) não-negativo no interior de  $\Omega$ . Qualquer que seja o sinal de  $c$ ,  $u$  não pode ser zero em nenhum ponto de máximo (mínimo) do interior de  $\Omega$ .*

**Observação:** O Princípio do Máximo Forte também vale para soluções da equação do calor (vide [6]), neste caso seu enunciado é:

*Se  $u$  é uma solução da equação do calor em  $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, \infty)$  e  $\Omega$  é aberto e conexo, e  $u$  atinge seu máximo em um ponto de  $\Omega \times [0, t]$ , então  $u$  é constante.*

## D.2 Moving Planes

Antes de demonstrar o resultado principal, apresentaremos mais alguns lemas.

**Lema D.2.1** *Seja  $x_0 \in \partial B \cap \{x_1 > 0\}$ . Então existe  $\delta > 0$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial x_1} < \delta$  em  $B \cap \{\|x - x_0\| < \delta\}$ .*

**Demonstração:** Se o lema fosse falso, existiria uma seqüência de pontos  $x_j \in B$  com  $u_1(x_j) \geq 0$  (nesta seção denotaremos  $u_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}$ ). Por outro lado como  $u > 0$  em  $B$  e  $u = 0$  em  $\partial B$ , deve ser  $u_1(x_0) \leq 0$ . Mas como  $u_1(x_j) \rightarrow u_1(x_0)$  temos que  $u_1(x_0) \leq 0$  donde  $u_1(x_0) = 0$ . Além disso como  $u$  é constante em  $\partial B$  temos que as derivadas em direções tangentes a  $\partial B$  são todas nulas. E como  $e_1 \cdot \nu(x_0) \neq 0$  ( $e_1$  é o vetor unitário na direção de  $x_1$ ), pois  $x_1 > 0$ , temos que  $e_1$  está fora do plano tangente a  $\partial B$  em  $x_0$ . Isto implica que  $\{e_1\} \cup \{\text{base de } T_{x_0}(\partial B)\}$  forma uma base de  $\mathbb{R}^N$ , logo  $\nabla u(x_0) = 0$ . ( $T_{x_0}(\partial B)$  denota o espaço tangente a  $\partial B$  em  $x_0$ ). Afirmamos que  $u_{x_1 x_1} = 0$ . Para provar esta afirmação, primeiramente

observamos que como  $u_1(x_0) = u_1(x_0) = 0$ , e  $u > 0$  em  $B$ , temos que  $u_{x_1x_1}(x_0) \geq 0$ . É fácil verificar que

$$u_1(y) \leq 0 \quad \forall y \in \partial B \cap \{x_1 > 0\}.$$

Suponha  $u_{x_1x_1}(x_0) > 0$ , então existe  $V$  vizinhança de  $x_0$  onde  $u_{x_1x_1} > 0$ . Para  $j$  suficientemente grande o segmento  $\Gamma$  na direção  $e_1$  ligando  $x_j$  a  $y_j \in \partial B \cap \{x_1 > 0\}$  está contido em  $V$ , logo,

$$u_1(y_j) - u_1(x_j) = \int_{\Gamma} u_{x_1x_1}(x) dx_1 \leq 0.$$

Isto contraria o fato de que  $u_1(y_j) \leq 0 \leq u_1(x_j)$ . Concluimos assim que  $u_{x_1x_1}(x_0) = 0$ .

Suponha que  $f(0) \geq 0$ . Então

$$\Delta u + f(u) - f(0) \leq 0.$$

Pelo Teorema do Valor Médio existe  $c(x)$  contínua tal que  $f(u) - f(0) = c(x)u$ . E aplicando o Lema de Hopf a  $-u$  temos que  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$ , mas

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \nabla u(x_0) \cdot \nu = u_1(x_0)\nu \cdot e_1 = 0.$$

Contradição. Concluimos que deve ser  $f(0) < 0$ . Isto nos dá,

$$\Delta u(x_0) = -f(0) > 0.$$

Porém é fácil verificar que  $u_{x_1x_1}(x_0) = (\nu \cdot e_1)^2 \Delta u(x_0) > 0$ . Isso contraria o fato de que  $u_{x_1x_1}(x_0) = 0$ . Portanto também não pode ser  $f(0) < 0$ , absurdo. ■

Sejam  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definimos  $T_\lambda$  o plano  $x_1 = \lambda$ , e  $\Sigma(\lambda) = B \cap \{x_1 > \lambda\}$ . Além disso denotaremos  $\Sigma'(\lambda)$  a reflexão de  $\Sigma(\lambda)$  em relação a  $T_\lambda$ .

**Lema D.2.2** *Se existe  $\lambda \in [0, R)$  tal que,*

$$u_1(x) \leq 0, \quad u(x) \leq u(x^\lambda) \quad \forall x \in \Sigma(\lambda) \tag{D.3}$$

*e  $u(x)$  não é identicamente igual a  $u(x^\lambda)$  em  $\Sigma(\lambda)$ , então  $u(x) < u(x^\lambda)$  em  $\Sigma(\lambda)$  e  $u_1(x) < 0$  em  $B \cap T_\lambda$ .*

**Demonstração:** Defina  $u^\lambda(x) = u(x^\lambda)$  com  $x \in \Sigma'(\lambda)$ . Então, como  $x^\lambda = x - 2(x_1 - \lambda)e_1$ , temos,

$$\begin{aligned} u_{x_i}^\lambda(x) &= (u(x - 2(x_1 - \lambda)e_1))_{x_i} \\ &= u_{x_i}(x - 2(x_1 - \lambda)e_1)(1 - 2\delta_{i1}), \\ \Rightarrow u_{x_i x_i}^\lambda &= u_{x_i x_i}(x - 2(x_1 - \lambda)e_1) \\ \Rightarrow \Delta u^\lambda &= \Delta u(x^\lambda) = -f(u(x^\lambda)) = -f(u^\lambda(x)). \end{aligned}$$

Defina  $w = u^\lambda - u$ , e seja  $c(x)$  tal que

$$f(u^\lambda) - f(u) = c(x)w,$$

pelo Teorema do Valor Médio. Então temos,

$$\Delta w = \Delta(u^\lambda - u) = f(u^\lambda) - f(u) = c(x)w,$$

em  $\Sigma'(\lambda)$ . Além disso como  $u(x) \leq u(x^\lambda) = u^\lambda(x)$  temos que  $w(x) \leq 0$  em  $\Sigma'(\lambda)$  e  $w$  não é identicamente zero. Temos também que  $w \equiv 0$  em  $T_\lambda \cap B$ , que é parte de  $\partial\Sigma'(\lambda)$ . Logo, segue do Princípio do Máximo Forte que  $w < 0$  em  $\Sigma'(\lambda)$  e pelo Lema de Hopf  $w_{x_1} > 0$  em  $T_\lambda \cap B$ . Como  $w_1 = -2u_1$  em  $T_\lambda \cap B$ , temos o resultado. ■

A técnica de moving planes é aplicada na demonstração do seguinte lema:

**Lema D.2.3** *Para qualquer  $\lambda \in (0, R)$ , temos*

$$u_1(x) < 0, u(x) < u(x^\lambda) \quad \forall x \in \Sigma(\lambda). \quad (\text{D.4})$$

**Demonstração:** Do Lema D.2.1 e por compacidade, segue que (D.4) vale para  $\lambda$  suficientemente próximo de  $R$ . Seja  $\mu$  um valor crítico tal que (D.4) vale para todo  $\lambda > \mu$ , as não vale em um intervalo  $(k, \mu)$  para algum  $0 < k < \mu$ . Por continuidade,

$$u_1(x) < 0, \quad u(x) \leq u(x^\mu) \quad \forall x \in \Sigma(\mu) \quad (\text{D.5})$$

Queremos mostrar que  $\mu = 0$ . Suponha que  $\mu > 0$ . Para algum ponto  $x_0 \in \partial\Sigma(\mu) \setminus T_\mu$ , temos  $x_0^\mu \in B$ , e portanto  $0 = u(x_0) \neq u(x_0^\mu)$ . Portanto o Lema D.2.2 pode ser aplicado. Logo  $u(x_0) < u(x_0^\mu)$  em  $\Sigma(\mu)$  e  $u_1 < 0$  em  $B \cap T_\mu$ . Segue que (D.4) se verifica para  $\lambda = \mu$ . Além disso, pelo Lema D.2.1, todo ponto de  $\partial B \cap T_\mu$ , possui uma vizinhança onde  $u_1 < 0$ . Então

todo ponto de  $\bar{B} \cap T_\mu$  possui uma vizinhança onde  $u_1 < 0$ , e como  $T_\mu \cap \bar{B}$  é compacto, temos que  $u_1 < 0$  em  $\Sigma(\mu - \epsilon)$  para um  $\epsilon$  suficientemente pequeno.

Uma vez que estamos supondo que (D.4) não vale além de  $\mu$ , existe uma sequência  $\lambda_j$  e  $x_j \in \Sigma(\lambda_j)$  tal que  $\lambda_j \rightarrow \mu$  e

$$u(x_j) \geq u(x_j^{\lambda_j}). \quad (\text{D.6})$$

Depois de tomar uma subsequência, podemos supor que  $x_j$  converge a um certo  $\bar{x}$  que necessariamente está em  $\bar{\Sigma}(\mu)$ . Tomando o limite em (D.6), obtemos  $u(\bar{x}) \geq u(\bar{x}^\lambda)$ . Isso não é verdadeiro se  $\bar{x} \in \partial B$ , já que neste caso  $u(x) = 0$  e  $u(\bar{x}^\lambda) > 0$ . Como (D.4) se verifica para  $\mu$ , necessariamente  $\bar{x} \in T_\mu \cap B$ , logo  $x^\mu = x$ . Por outro lado, o segmento de reta ligando  $x_j$  a  $x_j^{\lambda_j}$  está contido em  $B$  e devido ao teorema do valor médio, este segmento contém um ponto  $y_j$  no qual  $u(y_j) \geq 0$ . Fazendo  $j \rightarrow \infty$ , obtemos  $u_1(x) \geq 0$ , uma contradição. ■

Concluimos esta seção com o seguinte teorema:

**Teorema D.2.1** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Seja  $u \in C^2(\bar{B})$ , com  $B = B_R(0)$ , uma solução de (D.1), satisfazendo*

$$u = 0 \text{ em } \partial B. \quad (\text{D.7})$$

*Então  $u$  é radialmente simétrica e estritamente monótona decrescente, isto é, tomando  $r = |x|$  temos*

$$\frac{\partial u}{\partial r} < 0 \text{ para } 0 < r < R. \quad (\text{D.8})$$

**Demonstração:** O Lema D.2.3 nos garantiu simetria em relação ao plano  $\Pi_1\{x_1 = 0\}$  e que a derivada na direção  $x_1$  é estritamente negativa, por isso só precisamos demonstrar a equação é invariante por rotação para concluir a demonstração deste teorema. De fato, dado um plano  $\Pi$  passando pela origem, existe uma rotação  $T$  tal que  $T(\Pi) = \Pi_1$ . Defina  $v = u \circ T$ , então

$$\begin{aligned} D^2v(x) &= T^*D^2u(Tx)T \\ \Rightarrow \text{Tr}(D^2v(x)) &= \text{Tr}(T^*D^2u(Tx)T) = \text{Tr}(D^2u(Tx)TT^*) = \text{Tr}(D^2u(Tx)) \\ &= \Delta u(Tx) = -f(u(Tx)) = -f(v(x)). \end{aligned}$$

Ou seja  $v$  satisfaz (D.1). Além disso é claro que  $v(x) = 0$  em  $\partial B$ . ■

# Apêndice E

## Lema 1 e Teorema. 3 de Simon [18]

Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta,

$$J = \int_M E(x, v, \nabla v)$$

onde,  $E$  é analítica em  $v$  e  $\nabla v$ , e  $v$  é solução de

$$v_t = \mathcal{M}(v(s)). \tag{E.1}$$

em que  $\mathcal{M}(v) = -\frac{\partial}{\partial t} J(v)$  e  $\mathcal{M}(0) = 0$ .

**Lema 1** *Suponhamos que  $v$  é suave em  $M \times [t_1, t_2]$  com  $|v|_{C^3} < \sigma$ . Suponhamos também que*

$$J(v(t)) > J(0) - \delta \quad \forall t \in [t_1, t_2],$$

*para algum  $\delta \geq 0$ . Então*

$$\int_{t_1}^{t_2} \|v_t\|_{L^2} dt \leq (\alpha\vartheta)^{-1} (|J(v(t_1)) - J(0)|)^\vartheta + \delta^\vartheta.$$

*Em particular,*

$$\sup_{t \in [t_1, t_2]} \|u(t) - u(t_1)\|_{L^2} \leq (\alpha\vartheta)^{-1} (|J(v(t_1)) - J(0)|)^\vartheta + \delta^\vartheta.$$

**Teorema 3** *Existem constantes  $\vartheta \in (0, \frac{1}{2})$ ,  $\gamma \geq 2$  e  $\sigma \in (0, \beta)$  (dependente somente de  $E$  e  $\beta$ ) tais que se  $v$  é uma função em  $C^3(M)$  com  $|v|_{C^3} < \sigma$  então,*

$$\|\mathcal{M}(u)\|_{L^2} \geq (\inf_{\xi \in \mathcal{L}} \|u - \xi\|_{L^2})^\gamma,$$

onde  $\mathcal{L} = \{\xi \in C^2(M) : |\xi|_{C^2} < \beta, \mathcal{M}(\xi) = 0\}$ , e

$$\|\mathcal{M}(u)\|_{L^2} \geq |J(v) - J(0)|^{1-\vartheta}.$$

# Referências Bibliográficas

- [1] G. I. Barenblatt, *On some unsteady motions of a liquid or a gas in a porous medium*, Trans. Amer. Maths. Soc. 252 (1979), 99-113.
- [2] J. Boussinesq, *Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit de sources*, Comptes Rendus Acad. Sci./J. Mth Pures Appl., 10 (1903/04), 5-78.
- [3] L. Caffarelli, B. Gidas & J. Spruck *Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth*. Comm. Pure Appl. Math. 42 N° 3, 271-269, (1989).
- [4] W. Cheng & C. Li, *Classification of solution of some nonlinear elliptic equations*, Duke Math. Journal 63, 3 (1991) 615-622.
- [5] M. Del Pino & M. Sáez, *On the extinction Profile for Solutions of  $u_t = \Delta u^{\frac{N-2}{N+2}}$* , Indiana Univ. Math. Journal 50, 2(2001), 612-628.
- [6] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS (1998).
- [7] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice Hall, 1964.
- [8] A. Friedman, *Variational principles and free boundaries*, Wiley and Sons (1982).
- [9] V.A Galaktionov & L.A Peletier, *Asymptotic Behaviour near Finite-Time Extinction for the Fast Diffusion Equation*, Arch. Rat. Mech. Anal. 139 (1997) 83-98.
- [10] B. Gidas, W.M. Ni & L. Nirenberg, *Symmetry and related Properties via the maximum principle*, Comm. Math Phys. 68 (1979) 209-243

- [11] B. Gidas, W.M. Ni & L. Nirenberg, *Symetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in  $\mathbb{R}^n$* , Mathematical analysis and applications, PartA, pp 369-402,Adv. in Math Suppl. Stud.,7a, Academic Press, New York-London, 1981.
- [12] M. Herrero & M. Pierre,*The Cauchy problem for  $u_t = \Delta u^m$  when  $0 < m < 1$* ,Trans. Amer. Math. Soc. 291, N°1 (1985) 145-158.
- [13] J.R. King,*Self-similar behaviour for the equation of fast nonlinear diffusion*. Phil. Trans. Roy. Soc. A.343, (1993) 337-375.
- [14] O. A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov & N.N. Ural'ceva, Linear and quasilinear evolution equations of parabolic type, Translations of Mathematical Monographs, 23, 1968.
- [15] L.S. Leibenzon, *The motion of a gas in a porous medium*, Complete Works, Vol 2, Acad. Siences URSS, Moskow, (Russian). First published in Meftanoe i slantsevoe khozyasto, Vol. 10, 1929, e Neftanoe khozyastvo, pp. 8-9 (1945) (Russian).
- [16] M. Muskat,*The flow of homogeneous fluids through porous media*, McGraw-Hil, New York(1937).
- [17] M. Renardy e R. Rogers, An introduction to partial differential equations, Springer (2004).
- [18] L. Simon,*Assymptotics for a class of non-linear evolution equations, with applications to geometric problems*, Annals of Math., 118 (1983),535-571.
- [19] J.L. Vázquez, An introduction to the mathematical theory of the Porous Medium Equation.
- [20] J.L. Vázquez, Smothing and Decay Estimates for Nonlinear Diffusion Equations. Oxford University Press (2007)
- [21] J. L. Vázquez, *Porous medium equation*, Clarendon Press (2007).
- [22] R.Ye,*Global existence and convergence of Yamabe Flow*, Journal of Differential Geometry, 39 (1994), 35-50.

- [23] Ya.B. Zel'dovich and Yu.P.Raizer, *Physics of Shock Waves and High- Temperature Hydrodynamic Phenomena*, Vol II, Academic Press, New York (1966).