



Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica - IMECC



*Teoria de Curvas para Métricas  
Não-Euclidianas*

**Fábio Silva Melo**  
silvameo@gmail.com  
Dissertação de Mestrado

Orientador: **Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim**

Junho de 2010  
Campinas - Estado de São Paulo

---

*Teoria de Curvas para Métricas  
Não-Euclidianas*

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Fábio Silva Melo** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 28 de Junho de 2010.



---

Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim  
Orientador

Banca Examinadora:

**Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim** (Orientador - IMECC-UNICAMP)

**Prof. Dr. Rafael de Freitas Leão** (IMECC-UNICAMP)

**Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Maria Elisa Esteves Lopes Galvão** (IME-USP)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção do Título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Melo, Fábio Silva

M491t Teoria de curvas para métricas não-euclidianas/Fábio Silva Melo--  
Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Marcos Benevenuto Jardim

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de  
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria diferencial. 2. Curvatura. 3. Torção. 4. Frenet,  
Formulas de. I. Jardim, Marcos Benevenuto. II. Universidade Estadual  
de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação  
Científica. III. Título.

Título em inglês: Theory of Curves for Non-Euclidean Metrics

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Differential geometry. 2. Curvature. 3. Torsion.  
4. Frenet formulas

Área de concentração: Geometria Diferencial

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim (IMECC-UNICAMP)  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Elisa Esteves Lopes Galvão (IME-USP)  
Prof. Dr. Rafael de Freitas Leão (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 28/06/2010

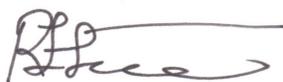
Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 28 de junho de 2010 e  
aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof. (a). Dr (a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM**



---

**Prof. (a). Dr (a). RAFAEL DE FREITAS LEÃO**



---

**Prof. (a). Dr (a). MARIA ELISA ESTEVES LOPES GALVÃO**

---

# Resumo

---

A *teoria local de curvas* da *Geometria Diferencial* no plano e no espaço euclidiano é bem conhecida (vide referências como [4] e [13]).

Este trabalho consiste de uma generalização desta teoria usando métricas arbitrárias. Tal generalização é feita substituindo a matriz identidade que define o produto interno usual por outra *matriz quadrada, simétrica e positiva definida*.

Com este novo produto interno, são estudados conceitos como *vetor tangente, vetor normal, vetor binormal, fórmulas de Frenet, curvatura e torção*.

**Palavras chave:** Geometria Diferencial, produto interno, teoria local de curvas, curvatura, torção, fórmulas de Frenet.

---

# Abstract

---

The *local theory of curves* of the *Differential Geometry* in the euclidean plane and euclidean space is well known (see references as [4] and [13]).

This work consists of a generalization of this theory using arbitrary metrics. Such generalization is made replacing the identity matrix which defines the usual inner product with another *square matrix, symmetrical and positive defined*.

With this new inner product, concepts like *tangent vector, normal vector, binormal vector, Frenet's formulas, curvature and torsion* are studied.

**Keywords:** Differential Geometry, inner product, local theory of curves, curvature, torsion, Frenet formulas.

---

# Lista de Símbolos e Convenções

---

1.  $\#P$  indica a **cardinalidade** do conjunto  $P$ ;
2.  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  representa o **conjunto de todas as matrizes de ordem  $m \times n$** , isto é, de  $m$  linhas e  $n$  colunas, **com entradas reais**;
3.  $M_{n \times n}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$  representa o **conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem  $n$  com entradas reais**;
4.  $Id_n \in M_n(\mathbb{R})$  representa a **matriz identidade** do conjunto  $M_n(\mathbb{R})$ ;
5.  $0_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  representa a **matriz nula** deste conjunto, bem como  $0_n \in M_n(\mathbb{R})$ ;
6. O subconjunto das matrizes de  $M_n(\mathbb{R})$  que são **simétricas e positivas definidas** é aqui denotado por  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ;
7. Uma **base ordenada** do espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  é denotada por  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ ; havendo necessidade de outras serão denotadas por  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ , etc.;
8. No  $\mathbb{R}^n$  denota-se os **vetores canônicos** como

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

A partir destes, a **base canônica** de  $\mathbb{R}^n$  é escrita como sendo o conjunto

$$\mathfrak{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}.$$

Em particular, para  $n = 2$ , costuma-se denotar

$$\vec{e}_1 = \vec{i} = (1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{e}_2 = \vec{j} = (0, 1)$$

e a base canônica por  $\mathfrak{C} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ .

Para  $n = 3$ , é comum escrever

$$\vec{e}_1 = \vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{e}_3 = \vec{k} = (0, 0, 1)$$

e a base canônica fica  $\mathfrak{C} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ;

9. Dados um (sub)espaço vetorial  $V$  e  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m\}$  uma base de  $V$ , um vetor  $\vec{v} \in V$  **escrito em termos desta base** tem a seguinte **notação vetorial**:

$$\vec{v}^{\mathfrak{B}} = v_1 \vec{b}_1 + v_2 \vec{b}_2 + \dots + v_m \vec{b}_m = (v_1, v_2, \dots, v_m)^{\mathfrak{B}}$$

ou, quando a base estiver subentendida, tomada simplesmente como a **m-upla**

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m);$$

os números  $v_1, v_2, \dots, v_m$  são chamados de **coordenadas** de  $\vec{v}$  na base  $\mathfrak{B}$ .

Se  $V = \mathbb{R}^2$  ou  $V = \mathbb{R}^3$ , então o vetor  $\vec{v}$  na base  $\mathfrak{B}$  é escrito como sendo

$$\vec{v}^{\mathfrak{B}} = (x_i, y_i)^{\mathfrak{B}} \quad \text{ou} \quad \vec{v}^{\mathfrak{B}} = (x_i, y_i, z_i)^{\mathfrak{B}},$$

respectivamente (onde  $i \in \mathbb{N}$ );

10. Nas mesmas condições do item anterior, a **notação matricial** deste vetor  $\vec{v}$  é

$$[\vec{v}]_{\mathfrak{B}} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m]_{\mathfrak{B}}$$

ou tomada simplesmente como

$$[\vec{v}] = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m].$$

Isto é, a notação matricial de um vetor  $\vec{v} \in V$  é uma matriz de  $M_{1 \times m}(\mathbb{R})$ .

Novamente, caso seja  $V = \mathbb{R}^2$  ou  $V = \mathbb{R}^3$ , o vetor  $\vec{v}$  na base  $\mathfrak{B}$  tem sua notação matricial dada por

$$[\vec{v}]_{\mathfrak{B}} = [x_i \ y_i]_{\mathfrak{B}} \quad \text{ou} \quad [\vec{v}]_{\mathfrak{B}} = [x_i \ y_i \ z_i]_{\mathfrak{B}},$$

respectivamente;

11. Sejam  $V$  um (sub)espaço vetorial e  $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m\} \subset V$ . O **(sub)espaço gerado por  $B$**  é o **conjunto de todas as combinações lineares dos vetores de  $B$**  e é denotado por

$$[[B]] = [[\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m]] = \left\{ \sum_{1 \leq i \leq m} v_i \vec{b}_i : v_i \in K \right\},$$

onde  $K$  é o corpo de escalares deste (sub)espaço vetorial;

12.  $\perp$  denota o **perpendicularismo**, desta forma,  $\vec{u} \perp \vec{v}$  significa que estes vetores são perpendiculares;

13. Sejam  $V$  um (sub)espaço vetorial e  $B$  um subconjunto não vazio de  $V$ . O **complemento ortogonal** de  $B$  em  $V$  é definido e denotado por

$$B^\perp = \{\vec{v} \in V : \vec{u} \perp \vec{v}, \forall \vec{u} \in B\};$$

14.  $M_{\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1}$  é a **matriz de mudança da base, da base  $\mathfrak{B}_1$  para a base  $\mathfrak{B}_2$** ;

15. Uma base  $\mathfrak{B}$  é chamada de **base positiva** se  $M_{\mathcal{E}, \mathfrak{B}}$  tem determinante positivo;

16. Uma **base ortonormal** será referida pela sigla **ON**;

17. A notação  $\vec{u}_{\vec{p}}$  significa o **vetor  $\vec{u}$  aplicado no ponto (ou com sua origem trasladada para o ponto)  $\vec{p}$** ;

18. Sejam  $V \subseteq U$  (sub)espaços vetoriais e  $\vec{p} \in U$ . O **espaço tangente de  $V$  em  $\vec{p}$**  é denotado por  $T_{\vec{p}}(V)$  e definido como o **conjunto de todos os vetores de  $V$  aplicados no ponto  $\vec{p}$** . Da terceira seção do Capítulo 1 em diante, o espaço vetorial  $V$  é tomado sobre o corpo de escalares  $\mathbb{R}$  e  $V = \mathbb{R}^n$  para  $n = 2, 3$ . Assim,

$$T_{\vec{p}}(V) = T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n);$$

19. Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais de dimensões  $n$  e  $m$ , respectivamente, ambos sobre o corpo de escalares  $K$ ,  $\mathfrak{B}_1$  uma base de  $U$ ,  $\mathfrak{B}_2$  uma base de  $V$  e  $U \ni u \mapsto F(u) \in V$  uma aplicação linear. Denota-se a **matriz da aplicação  $F$  nestas bases** como sendo a matriz

$$(F)_{\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1} \in M_{m \times n}(K);$$

20. O símbolo

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

chama-se **delta de Kroenecker**;

21.  $\angle(\vec{u}, \vec{v})$  denota o **ângulo formado entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$** ;

22.  $//$  denota o **paralelismo**, por exemplo,  $\vec{u} // \vec{v}$  mostra que estes vetores são paralelos;

23. Todas as **funções** desta monografia serão representadas numa única linha como segue:

$$\mathbb{R}^m \supseteq A \ni \vec{x} \mapsto \vec{F}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})) \in \mathbb{R}^n.$$

Esta notação significa que o **domínio** da função é o conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^m$ , que a **variável independente** é  $\vec{x}$ , que esta é mapeada no conjunto  $\mathbb{R}^n$  pela aplicação (ou **lei de associação**)  $\vec{F}(\vec{x})$ ;

24. Um caso particular de **função** que será bastante usado nesta monografia é a **curva**, caracterizada por ser uma **função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^n$** :

$$\mathbb{R} \supseteq I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) \in \mathbb{R}^n.$$

Quando não for mencionada a base na qual a curva está escrita, fica acordado que foi usada a base canônica. Do contrário, se a curva for dada em termos de uma base  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  do  $\mathbb{R}^n$ , será feita menção da base usada denotando a curva por

$$\vec{\alpha}_{\mathfrak{B}}(t) = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i(t) \vec{b}_i;$$

25.  $PQ$  significa a **medida** do segmento de extremos  $P$  e  $Q$  enquanto que  $\overrightarrow{PQ}$  denota o **vetor** de origem  $P$  e extremidade final  $Q$ ;

26. A notação  $\text{int}(X)$  denota o **interior do conjunto**  $X$ ;

27. **PDR** significa **parametrizada diferenciável regular**;

28.  $\mathbb{T}_{\vec{p}}(S)$  é a notação do **plano tangente a uma superfície regular**  $S$  no seu ponto  $\vec{p}$ ;

29. **PCA** significa **parametrizada por comprimento de arco** que, assim como a simbolização anterior, é um conceito de curvas que é estudado no Capítulo 3;

30. O **Teorema Fundamental de Curvas Planas** é referido pela sigla **TFC**.

---

# Sumário

---

<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Símbolos e Convenções</b>	<b>ix</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preâmbulo</b>	<b>3</b>
1.1 Bases Orientadas . . . . .	4
1.2 Produto Interno . . . . .	11
1.3 Matriz de um Produto Interno . . . . .	12
1.4 O Espaço Tangente e suas Propriedades . . . . .	19
<b>2 Métrica</b>	<b>21</b>
2.1 Definição de Métrica . . . . .	22
2.2 Generalização do Produto Vetorial . . . . .	42
<b>3 Teoria de Curvas em uma Métrica Geral</b>	<b>49</b>
3.1 Preâmbulo . . . . .	50
3.2 Motivação para as Métricas Diferenciadas . . . . .	65
<b>Apêndice: A Derivada Covariante</b> . . . . .	68
<b>4 Teoria Local de Curvas</b>	<b>75</b>
4.1 Teoria Local de Curvas Planas . . . . .	76
4.2 Teoria Local de Curvas Espaciais . . . . .	85
4.3 Teoria de Curvas numa Parametrização Qualquer . . . . .	97
4.4 O Teorema Fundamental de Curvas Planas . . . . .	107
<b>5 Exemplos</b>	<b>111</b>
5.1 Mais Dois Exemplos de Curvas . . . . .	112
5.2 Duas Curvas Planas de Curvatura Constante . . . . .	116
5.3 Um Exemplo de Função Distância . . . . .	120
<b>6 Conclusão e Estudos Posteriores</b>	<b>125</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>127</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>129</b>

---

# Introdução

---

Em geral, é lecionado na disciplina de *Geometria Diferencial* um conteúdo que basicamente se divide em duas partes: curvas e superfícies. A primeira consiste de: *curva parametrizada diferenciável, reparametrização por comprimento de arco, vetor tangente, vetor normal, curvatura, fórmulas de Frenet* para curvas planas e, soma-se a estes, *vetor binormal e torção* quando a curva é espacial. Isso é o que se chama de *teoria local de curvas*. Há ainda um outro aspecto da teoria, chamado de *teoria global de curvas*, que consiste basicamente da *inequação isoperimétrica*, do *teorema dos quatro vértices* e da *fórmula de Cauchy-Crofton*.

Todo o conteúdo da teoria local de curvas pode ser encontrado em referências bibliográficas citadas no final desta monografia. Como exemplo, servem os livros relacionados em [4], [7], [13] e [15]. A teoria global pode ser estudada no primeiro destes.

Uma curva é uma aplicação de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$  ou  $n = 3$ . Para desenvolver a teoria local de curvas é necessário usar um *produto interno* do  $\mathbb{R}^n$ , que é uma aplicação de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$  e que satisfaz alguns axiomas. Com este é possível medir distâncias e ângulos. Em todas estas obras foi usado o *produto interno canônico* (ou usual ou euclidiano) que é algebricamente dado por:

$$\langle (u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n) \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} u_i v_i.$$

Porém, é possível escrevê-lo como um produto matricial. Tomando como exemplo o  $\mathbb{R}^2$ , fica

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \sum_{1 \leq i \leq 2} x_i y_i = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \end{bmatrix}^T.$$

A *matriz identidade* usada para definir o produto interno usual não é a única permitida para se definir um produto interno. Há certas matrizes que podem substituir a matriz identidade na igualdade acima e definir um novo produto interno.

Esta dissertação tem como objetivo fazer uma generalização da teoria local de curvas para um produto interno geral. Ao menos alguns dos resultados obtidos aqui devem recair sobre seus análogos das referências supracitadas quando a matriz do produto interno for tomada como a identidade.

Os dois primeiros capítulos fazem o alicerce: contém alguns resultados de *Geometria* e *Álgebra Linear*, que são feitos aqui para serem aplicados no contexto deste trabalho. Em seguida a teoria local de curvas é tratada nos terceiro e quarto capítulos: inicialmente para curvas em  $\mathbb{R}^2$  e posteriormente para curvas em  $\mathbb{R}^3$ . O último capítulo é dedicado a alguns exemplos, embora há exemplos em todos os anteriores.

FSM,  
silvameo@gmail.com  
Campinas, Estado de São Paulo.  
Inverno de 2010.

# PREÂMBULO

---

Nesta parte do trabalho iniciam-se os alicerces que baseiam todo o texto, embora sejam conceitos bastante simples de *Geometria* e *Álgebra Linear*. Estão apresentados aqui para que fique estabelecida a notação e a linguagem com que são trabalhados.

O conteúdo da Seção 1.1, *Bases Orientadas*, será usado na segunda seção do próximo capítulo e é oriundo das obras [2, 4]. A idéia de *Produto Interno*, nas Seções 1.2 e 1.3, pode ser vista em [8, 9]. Por fim, o assunto *Espaço Tangente*, na Seção 1.4, vem dos livros [7, 13].

## 1.1 Bases Orientadas

É conhecido da *Álgebra Linear* que todo (sub)espaço vetorial finitamente gerado  $V$  admite base. Uma **base** de  $V$  é um subconjunto finito de vetores de  $V$ ,  $\mathfrak{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq V$ , linearmente independente (doravante abreviado para **LI**) que gera todo vetor de  $V$

$$V = [\mathfrak{B}] = \left\{ \sum_{1 \leq i \leq n} c_i b_i : c_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Qualquer outra base  $\mathfrak{B}_1$  de  $V$  é tal que  $\#\mathfrak{B}_1 = \#\mathfrak{B} = n$ , por isso define-se a **dimensão** de  $V$  como sendo  $\dim V = \#\mathfrak{B}$ . Se  $V$  é finitamente gerado, então  $n < +\infty$ . Quaisquer  $m$  vetores de  $V$ , com  $n < m$ , são linearmente dependentes (de agora em diante, **LD**).

Uma **base ordenada** é um conjunto ordenado de vetores do (sub)espaço vetorial em questão. Isto quer dizer que se  $\mathfrak{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_i, b_j, \dots, b_n\}$  é uma base ordenada de  $V$ , então  $\mathfrak{B}_1 = \{b_1, b_2, \dots, b_j, b_i, \dots, b_n\}$  é outra base ordenada de  $V$ , diferente de  $\mathfrak{B}$ . Doravante são tomadas somente bases ordenadas.

**Exemplo 1.1.1.** No espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$  costuma-se denotar os vetores  $\vec{i} = (1, 0)$  e  $\vec{j} = (0, 1)$  e com estes a base canônica (ou natural)  $\mathfrak{C} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ . **A base de um espaço vetorial não é única; com efeito, tomando  $\vec{b}_1 = (1, 2)$  e  $\vec{b}_2 = (2, -3)$ , vetores LI, o  $\mathbb{R}^2$  pode ter como base o conjunto  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ .**

**Exemplo 1.1.2.** No  $\mathbb{R}^3$ , com  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  e  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , tem-se a base canônica dada por  $\mathfrak{C} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ . O plano  $Oxy$  de  $\mathbb{R}^3$  pode ter por base o conjunto  $\mathfrak{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ .

Se  $\mathfrak{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  e  $\mathfrak{B}_1 = \{b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}\}$  são bases para  $V$ , então, para um  $v \in V$ , é possível escrever

$$v^{\mathfrak{B}} = \sum_{1 \leq i \leq n} v_i b_i = (v_1, \dots, v_n)^{\mathfrak{B}} \quad (1.1)$$

e

$$v^{\mathfrak{B}_1} = \sum_{1 \leq i \leq n} u_i b_{1i} = (u_1, \dots, u_n)^{\mathfrak{B}_1}.$$

Sendo  $\mathfrak{B}_1$  base de  $V$  e  $\mathfrak{B} \subseteq V$  é possível escrever os elementos  $b_i$  como combinação linear dos elementos de  $\mathfrak{B}_1$  como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{i1} b_{1i} = a_{11} b_{11} + \dots + a_{n1} b_{1n} \\ \vdots \\ b_n = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{in} b_{1i} = a_{1n} b_{11} + \dots + a_{nn} b_{1n} \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Substituindo (1.2) em (1.1)

$$v = v_1 b_1 + \dots + v_n b_n =$$

$$\begin{aligned}
&= v_1(a_{11}b_{11} + \dots + a_{n1}b_{1n}) + \dots + v_n(a_{1n}b_{11} + \dots + a_{nn}b_{1n}) = \\
&= (v_1a_{11} + \dots + v_na_{1n})b_{11} + \dots + (v_1a_{n1} + \dots + v_na_{nn})b_{1n} = \\
&= u_1b_{11} + \dots + u_nb_{1n} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1a_{11} + \dots + v_na_{1n} \\ \vdots \\ u_n = v_1a_{n1} + \dots + v_na_{nn} \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}. \tag{1.3}
\end{aligned}$$

Com isso é possível estabelecer a

**Definição 1.1.3.** *A matriz de mudança de base, da base  $\mathfrak{B}$  para a base  $\mathfrak{B}_1$ , é dada por*

$$M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Com a matriz  $M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}}$  é possível encontrar as coordenadas de qualquer vetor  $v$  de  $V$  em termos da base  $\mathfrak{B}_1$  se este for dado em termos da base  $\mathfrak{B}$ . Ou seja, sendo dado (1.1), obtém-se  $v^{\mathfrak{B}_1} = (u_1, \dots, u_n)^{\mathfrak{B}_1}$  fazendo o produto de matrizes (1.3) como segue:

$$[v]_{\mathfrak{B}_1}^T = M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}} [v]_{\mathfrak{B}}^T.$$

**Exemplo 1.1.4.** *Considerando as bases de  $\mathbb{R}^2$  dadas no Exemplo 1.1.1,  $\mathfrak{C} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$  e  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ , o processo para se obter  $M_{\mathfrak{C}, \mathfrak{B}}$  é feito da seguinte forma:*

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = (1, 2) = a_{11}(1, 0) + a_{21}(0, 1) \\ \vec{b}_2 = (2, -3) = a_{12}(1, 0) + a_{22}(0, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = 2 \\ a_{12} = 2 \\ a_{22} = -3 \end{cases} \Rightarrow M_{\mathfrak{C}, \mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Os vetores do  $\mathbb{R}^2$   $\vec{u}^{\mathfrak{B}} = (\frac{1}{7}, \frac{3}{7})^{\mathfrak{B}}$  e  $\vec{v}^{\mathfrak{B}} = (\frac{9}{14}, -\frac{4}{7})^{\mathfrak{B}}$  têm suas coordenadas na base  $\mathfrak{C}$ ,  $\vec{u}^{\mathfrak{C}} = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)^{\mathfrak{C}}$  e  $\vec{v}^{\mathfrak{C}} = (\bar{x}_2, \bar{y}_2)^{\mathfrak{C}}$ , dadas por:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad e$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{9}{14} \\ -\frac{4}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 1.1.5.** Sob as mesmas condições, obtém-se  $M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}}$  da seguinte forma:

$$\begin{cases} (1, 0) = a_{11}(1, 2) + a_{21}(2, -3) \\ (0, 1) = a_{12}(1, 2) + a_{22}(2, -3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = \frac{3}{7} \\ a_{21} = \frac{2}{7} \\ a_{12} = \frac{2}{7} \\ a_{22} = -\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

Os vetores do  $\mathbb{R}^2$   $\vec{u}^{\mathfrak{C}} = (1, -1)^{\mathfrak{C}}$  e  $\vec{v}^{\mathfrak{C}} = (-\frac{1}{2}, 3)^{\mathfrak{C}}$  têm suas coordenadas na base  $\mathfrak{B}$ ,  $\vec{u}^{\mathfrak{B}} = (x_1, y_1)^{\mathfrak{B}}$  e  $\vec{v}^{\mathfrak{B}} = (x_2, y_2)^{\mathfrak{B}}$ , dadas por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} \quad e$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{14} \\ -\frac{4}{7} \end{bmatrix},$$

que são os vetores do exemplo anterior.

**Proposição 1.1.6. (Propriedades da matriz de mudança de base).** Sejam  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{B}_1$  e  $\mathfrak{B}_2$  bases de um (sub)espaço vetorial  $V$  de dimensão  $n < +\infty$ . Valem as seguintes asserções:

1. Se  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1$ , então  $M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1} = Id_n \in M_n(\mathbb{R})$ ;
2.  $M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_2} = M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1} \cdot M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2}$ ;
3.  $\det M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1} \neq 0$ ;
4.  $M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}} = (M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1})^{-1}$ .

**Demonstração.** Encontra-se nas referências [2] e [3]. □

**Exemplo 1.1.7.** A matriz de mudança de base do Exemplo 1.1.5 poderia ter sido obtida da inversa da matriz  $M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}}$  do Exemplo 1.1.4. De fato, verifica-se que  $M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}} \cdot M_{\mathfrak{C}, \mathfrak{B}} = Id_2$ .

No decorrer desta seção e da Seção 2.2 do Capítulo 2 são necessárias algumas propriedades de determinantes. As provas podem ser encontradas em [2] e [3], exceto a que é feita ao fim do enunciado seguinte.

**Proposição 1.1.8. (Propriedades do determinante).** *Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  e  $c \in \mathbb{R}$ . Valem as seguintes propriedades:*

1. Se  $A = 0_n$  e  $B = Id_n$ , então  $\det A = 0$  e  $\det B = 1$ ;
2.  $\det A = \det A^T$ ;
3. Se  $B$  é a matriz obtida por multiplicar uma linha ou uma coluna de  $A$  por  $c$ , então,  $\det B = c \det A$ ;
4. Se  $B$  difere de  $A$  somente pela posição de duas **linhas** (ou **colunas**), que estão trocadas, então  $\det B = -\det A$ ;
5. Se  $A$  tem duas linhas (ou colunas) iguais, então  $\det A = 0$ ;
6.  $\det(AB) = \det A \det B$ ;
7. Se  $B$  é obtida de  $A$  somando a uma linha outra multiplicada por uma constante, então  $\det B = \det A$ ;
8. Se  $A$  é **inversível**, ou seja, se existe  $B$  tal que  $AB = Id_n$ , então  $\det A \det B = 1$  ( $B$  nestas condições é denotada por  $A^{-1}$ ).

**Demonstração.** As referências supracitadas contêm as provas de todas estas asserções exceto da (4) que não está feita para duas **colunas** trocadas, mas somente para duas **linhas** trocadas. Aplicando a propriedade (2) e em seguida a (4), de validade assegurada ao menos para duas linhas trocadas, obtém-se o resultado restante.  $\square$

**Definição 1.1.9.** *Sejam  $V$  um (sub)espaço vetorial com  $\dim V = n < +\infty$ ,  $\mathfrak{B}$  e  $\mathfrak{B}_1$  bases de  $V$ . Diz-se que  $\mathfrak{B}$  e  $\mathfrak{B}_1$  têm **mesma orientação** se  $\det M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}} > 0$ . Esta relação é denotada por  $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}_1$ . **Caso contrário**, se  $\det M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}} < 0$  diz-se que  $\mathfrak{B}$  e  $\mathfrak{B}_1$  têm **orientação contrária**.*

**Proposição 1.1.10.** *A relação  $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}_1$  da definição anterior é uma relação de equivalência.*

**Demonstração.**

1.  $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}$ , pois  $M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}} = Id_n \Rightarrow \det M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}} = 1 > 0$ ;
2. Se  $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}_1$ , então  $\mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{B}$ , porque  $M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}} = (M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1})^{-1} \Rightarrow 0 < \det M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}} = \frac{1}{\det M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1}} \Rightarrow \det M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1} > 0 \Rightarrow \mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{B}$ ;
3. ( $\mathfrak{B}_2$  também é base de  $V$ ) Se  $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}_1$  e  $\mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{B}_2$ , então  $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}_2$ . Com efeito,  $\det M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1} > 0$ ,  $\det M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2} > 0$  e  $\det M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_2} = \det(M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1} M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2}) = \det M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1} \det M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2} > 0 \Rightarrow \mathfrak{B}_2 \sim \mathfrak{B}$ .  $\square$

**Proposição 1.1.11.** *Ainda sob as hipóteses da definição anterior, seja fixada uma base  $\mathfrak{B}$  do (sub)espaço vetorial  $V$  de dimensão finita. Seja  $X$  o conjunto das bases de mesma orientação de  $\mathfrak{B}$  e  $Y$  das bases de orientação contrária a  $\mathfrak{B}$ .*

1.  $\forall \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in X$  são tais que  $\mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{B}_2$  (noutras palavras, se  $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}_1$  e  $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}_2$ , então  $\mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{B}_2$ ); analogamente substituindo  $X$  por  $Y$ ;
2. Se  $\mathfrak{B}_1 \in X$  e  $\mathfrak{B}_2 \in Y$ , então  $\mathfrak{B}_1$  e  $\mathfrak{B}_2$  têm orientação contrária (noutras palavras,  $X \cap Y = \emptyset$ );
3. As *classes*  $X$  e  $Y$  são as únicas possíveis e não dependem da escolha de  $\mathfrak{B}$ .

### Demonstração.

1.  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in X \Rightarrow (\det M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}} > 0 \wedge \det M_{\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}} > 0)$ . Mas,  $M_{\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1} = (M_{\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}})^{-1}$  e  $\det M_{\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1} > 0$ , assim  $\det M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2} = \det(M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}} M_{\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1}) = \det M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}} \det M_{\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1} > 0 \Rightarrow \mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{B}_2$ .  
 $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in Y \Rightarrow (\det M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}} < 0 \wedge \det M_{\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}} < 0)$ . Porém,  $\det M_{\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1} < 0 \Rightarrow \det M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2} = \det M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}} \det M_{\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1} > 0 \Rightarrow \mathfrak{B}_2 \sim \mathfrak{B}_1$ ;
2.  $\mathfrak{B}_1 \in X \Rightarrow \det M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}} > 0$  e  $\mathfrak{B}_2 \in Y \Rightarrow \det M_{\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}} < 0 \Rightarrow \det M_{\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1} < 0$ . Então  $0 < \det M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}} \det M_{\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1} = \det M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2}$ ;

3. A unicidade das classes  $X$  e  $Y$  decorre da Proposição 1.1.6 (3): o determinante é um número real;  $\mathbb{R}$  é um corpo ordenado; dado  $a \in \mathbb{R}$  somente uma dentre as seguintes situações ocorre: ou  $a < 0$ , ou  $a = 0$ , ou  $a > 0$ ; a possibilidade da matriz de mudança de base ser **singular** (ou seja, de ter o determinante nulo) é descartada pela proposição supracitada.

Sejam  $\mathfrak{B}_0$  uma base de  $V$ ,  $X_0$  o conjunto (ou classe) das bases de mesma orientação de  $\mathfrak{B}_0$  e  $Y_0$  o das bases de orientação contrária.

Há dois casos possíveis: ou  $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}_0$ , ou  $\mathfrak{B}$  e  $\mathfrak{B}_0$  têm orientação contrária.

Se  $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}_0$ , então  $\mathfrak{B}_0 \sim \mathfrak{B}$  e  $\det M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_0} > 0$ . Seja  $\mathfrak{B}_{0,1} \in X_0$ ; assim  $\mathfrak{B}_{0,1} \sim \mathfrak{B}_0$  e  $\det M_{\mathfrak{B}_{0,1}, \mathfrak{B}_0} > 0$ . Então

$$\begin{aligned} \det M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_{0,1}} &= \det(M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_0} M_{\mathfrak{B}_{0,1}, \mathfrak{B}_0}) = \det M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_0} \det M_{\mathfrak{B}_{0,1}, \mathfrak{B}_0} > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathfrak{B}_{0,1} \sim \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{B}_{0,1} \in X \Rightarrow X_0 \subseteq X. \end{aligned}$$

Por igual raciocínio,  $X \subseteq X_0$ . Logo  $X = X_0$ .

Analogamente prova-se  $Y = Y_0$ .

Supondo  $\mathfrak{B}$  e  $\mathfrak{B}_0$  de orientação contrária significa  $\det M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_0} < 0$ . Seja  $\mathfrak{B}_{0,1} \in X_0$ , assim  $\det M_{\mathfrak{B}_{0,1}, \mathfrak{B}_0} > 0$ ; logo

$$\det M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_{0,1}} = \det(M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_0} M_{\mathfrak{B}_{0,1}, \mathfrak{B}_0}) = \det M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_0} \det M_{\mathfrak{B}_{0,1}, \mathfrak{B}_0} < 0$$

significando que  $\mathfrak{B}$  e  $\mathfrak{B}_{0,1}$  têm orientação contrária, portanto,  $\mathfrak{B}_{0,1} \in Y$  e  $X_0 \subseteq Y$ .

Seja  $\mathfrak{B}_1 \in Y$ , então

$$\begin{aligned} \det M_{\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1} &= \det(M_{\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}} M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1}) = \det M_{\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}} \det M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1} > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathfrak{B}_0 \sim \mathfrak{B}_1 \Rightarrow \mathfrak{B}_1 \in X_0 \Rightarrow Y \subseteq X_0. \end{aligned}$$

Então  $X_0 = Y$ .

Por análogo raciocínio, vem que  $Y_0 = X$ . □

**Definição 1.1.12.** *Sejam  $\mathfrak{B}$  uma base fixada do (sub)espaço vetorial finitamente gerado  $V$ ,  $X$  o conjunto das bases de  $V$  de mesma orientação que  $\mathfrak{B}$  e  $Y$  o das bases de  $V$  de orientação contrária a  $\mathfrak{B}$ . Cada uma das classes  $X$  e  $Y$  é chamada de uma **orientação de  $V$** . Escolhida uma delas, todas as bases pertencentes a esta classe são chamadas de **bases de orientação positiva** ou, simplesmente, de **bases positivas**; as pertencentes à outra classe são chamadas de **bases de orientação negativa** ou **bases negativas**.*

**Observação 1.1.13.** (*Convenção das bases positivas de  $\mathbb{R}^n$* ). *Como o espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  admite somente duas orientações (Proposição 1.1.11), fica convencionado que **uma base do  $\mathbb{R}^n$  é positiva se tiver a mesma orientação da base canônica do  $\mathbb{R}^n$** . Isto é, uma base  $\mathfrak{B}$  do  $\mathbb{R}^n$  é positiva se  $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{B}$ , ou se  $\det M_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} > 0$ .*

A mesma convenção foi tomada na referência bibliográfica [4] em sua seção 1 – 4.

**Exemplo 1.1.14.** *A matriz de mudança de base para as bases do  $\mathbb{R}^2$  do Exemplo 1.1.1 está calculada no Exemplo 1.1.5. A base  $\mathfrak{B}$  é negativa, pois*

$$\det M_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} = \det \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} = -\frac{1}{7} < 0.$$

**Exemplo 1.1.15.** *A base de  $\mathbb{R}^3$  dada por*

$$\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\} = \{(-1, 0, 1), (1, \sqrt{3} - 1, 1), (-1, \sqrt{3} + 1, -1)\}$$

*tem matriz de mudança de base, de base canônica  $\mathfrak{C}$  para a base  $\mathfrak{B}$ , dada pelos coeficientes do sistema como o calculado em (1.2):*

$$\begin{cases} \vec{i} = -\frac{1}{2}\vec{b}_1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4}\right)\vec{b}_2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}\right)\vec{b}_3 \\ \vec{j} = 0\vec{b}_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{b}_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{b}_3 \\ \vec{k} = \frac{1}{2}\vec{b}_1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4}\right)\vec{b}_2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}\right)\vec{b}_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

*Com esta matriz é possível concluir que  $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{B}$ , ou seja, a base  $\mathfrak{B}$  é positiva (ou, de orientação positiva), pois*

$$\det M_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} = \frac{\sqrt{3}}{12} > 0.$$

**Exemplo 1.1.16.** *Por outro lado, uma única modificação na base  $\mathfrak{B}$  do exemplo anterior pode alterar sua orientação. Com efeito, substituindo em  $\mathfrak{B}$  o vetor  $\vec{b}_3$  por  $-\vec{b}_3 = (1, -\sqrt{3} - 1, 1)$  tem-se a base*

$$\mathfrak{B}_1 = \{(-1, 0, 1), (1, \sqrt{3} - 1, 1), (1, -\sqrt{3} - 1, 1)\}.$$

Para esta base  $\mathfrak{B}_1$ , o sistema equivalente ao sistema (1.2) é o dado por

$$\begin{cases} \vec{i} = -\frac{1}{2}\vec{b}_1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right)\vec{b}_2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)\vec{b}_3 \\ \vec{j} = 0\vec{b}_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{b}_2 - \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{b}_3 \\ \vec{k} = \frac{1}{2}\vec{b}_1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right)\vec{b}_2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)\vec{b}_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \\ \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} \end{bmatrix} \Rightarrow \det M_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}} = -\frac{\sqrt{3}}{12} < 0,$$

ou seja,  $\mathfrak{B}_1$  é uma base de orientação negativa.

## 1.2 Produto Interno

**Definição 1.2.1.** Um **produto interno sobre o espaço vetorial**  $V$  é uma aplicação

$$V \times V \ni (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \in \mathbb{R}$$

que satisfaz as seguintes propriedades (axiomas), onde  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ :

1. **linearidade:**  $\langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle = a \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + b \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ ;
2. **simetria:**  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ ;
3. **positividade:**  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$  e  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ .

Notar que as Propriedades (1) e (2) implicam a **bilinearidade**, isto é, além de valer (1) vale também (1') como sendo

$$\langle \vec{w}, a\vec{u} + b\vec{v} \rangle = \langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle = a \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + b \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle .$$

A bilinearidade do produto interno significa tratar-se de uma função que é linear tanto na primeira como na segunda entrada.

E ainda, da Propriedade (1) e de *propriedades que definem o espaço vetorial*, decorre que: se  $\vec{u} = \vec{0}$ , então  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$  para  $\forall \vec{v}$ . De fato, como  $\vec{u} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{0}$ , então  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle 0 \cdot \vec{0}, \vec{v} \rangle = 0 \cdot \langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = 0$ .

**Exemplo 1.2.2.** Sejam  $\vec{u} = (x_1, y_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2)$  em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2x_1x_2 \in \mathbb{R}$ . Da Definição 1.2.1 esta aplicação só não satisfaz a positividade:  $\langle (0, 1), (0, 1) \rangle = 0$  mas  $(0, 1) \neq \vec{0}$ . Portanto, não é um produto interno em  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 1.2.3.** Se a aplicação  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \in \mathbb{R}$  for dada por

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2x_1x_2 + 3y_1y_2, \tag{1.4}$$

então satisfaz todos os itens da Definição 1.2.1, portanto, é um produto interno em  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 1.2.4.** Define-se sobre o espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  o **produto interno canônico** (ou usual)

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_C \in \mathbb{R}$$

como segue: sejam  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$  dados por  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , **escritos em termos da base canônica**, então,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_C = \sum_{1 \leq i \leq n} u_i v_i .$$

### 1.3 Matriz de um Produto Interno

**Proposição 1.3.1.** *Sejam  $V$  um espaço vetorial e*

$$\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$$

*uma base ordenada de  $V$ . Sejam ainda*

$$\vec{u} = \sum_{1 \leq i \leq n} u_i \vec{b}_i \quad e \quad \vec{v} = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \vec{b}_j$$

*vetores de  $V$  escritos em termos da base  $\mathfrak{B}$ , denotados matricialmente por*

$$[\vec{u}] = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \quad e \quad [\vec{v}] = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n],$$

*e, por fim,*

$$V \times V \ni (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \in \mathbb{R}$$

*um produto interno qualquer de  $V$ , como estabelecido na Definição 1.2.1.*

*Nestas condições, existe uma única matriz*

$$\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{R})$$

*que depende da escolha de  $\mathfrak{B}$  e é tal que*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{u}] \mathcal{A} [\vec{v}]^T.$$

**Demonstração.**

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \left\langle \vec{u}, \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \vec{b}_j \right\rangle = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \langle \vec{u}, \vec{b}_j \rangle \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \left\langle \sum_{1 \leq i \leq n} u_i \vec{b}_i, \vec{b}_j \right\rangle = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \left( \sum_{1 \leq i \leq n} u_i \langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle \right) \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \left( u_1 \langle \vec{b}_1, \vec{b}_j \rangle + u_2 \langle \vec{b}_2, \vec{b}_j \rangle + \dots + u_n \langle \vec{b}_n, \vec{b}_j \rangle \right) \\ &= \left[ u_1 \langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle v_1 + u_2 \langle \vec{b}_2, \vec{b}_1 \rangle v_1 + \dots + u_n \langle \vec{b}_n, \vec{b}_1 \rangle v_1 \right] + \\ &\quad \dots + \\ &\quad \left[ u_1 \langle \vec{b}_1, \vec{b}_n \rangle v_n + u_2 \langle \vec{b}_2, \vec{b}_n \rangle v_n + \dots + u_n \langle \vec{b}_n, \vec{b}_n \rangle v_n \right] \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_i \langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle v_j. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Seja  $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ , então:

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i, j \leq n} u_i(a_{ij})v_j &= [u_1(a_{11})v_1 + u_2(a_{21})v_1 + \dots + u_n(a_{n1})v_1] + \\
&\dots + \\
&[u_1(a_{1n})v_n + u_2(a_{2n})v_n + \dots + u_n(a_{nn})v_n] \\
&= [u_1(a_{11}) + \dots + u_n(a_{n1})]v_1 + \\
&\dots + \\
&[u_1(a_{1n}) + \dots + u_n(a_{nn})]v_n \\
&= [\sum_{1 \leq i \leq n} u_i(a_{i1})]v_1 + \dots + [\sum_{1 \leq i \leq n} u_i(a_{in})]v_n \\
&= [\sum_{1 \leq i \leq n} u_i(a_{i1}) \quad \dots \quad \sum_{1 \leq i \leq n} u_i(a_{in})] [v_1 \quad \dots \quad v_n]^T \\
&= \mathcal{C} [\vec{v}]_{\mathfrak{B}}^T.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Mas a matriz  $\mathcal{C} \in M_{1 \times n}(\mathbb{R})$  é tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= [\sum_{1 \leq i \leq n} u_i(a_{i1}) \quad \dots \quad \sum_{1 \leq i \leq n} u_i(a_{in})] \\
&= [u_1(a_{11}) + \dots + u_n(a_{n1}) \quad \dots \quad u_1(a_{1n}) + \dots + u_n(a_{nn})] \\
&= [u_1 \quad \dots \quad u_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= [\vec{u}]_{\mathfrak{B}} \mathcal{A}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

E assim o resultado (1.6) fica

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} u_i(a_{ij})v_j = [\vec{u}]_{\mathfrak{B}} \mathcal{A} [\vec{v}]_{\mathfrak{B}}^T. \tag{1.8}$$

Comparando os resultados (1.5) com (1.8) vem que  $\mathcal{A} = (a_{ij}) = (\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle)$  e está provada a existência da matriz e sua dependência em relação à escolha da base  $\mathfrak{B}$ .

Supor a existência de outra matriz  $\mathcal{G} = (g_{ij})$  tal que

$$[\vec{u}]_{\mathfrak{B}} \mathcal{A} [\vec{v}]_{\mathfrak{B}}^T = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{u}]_{\mathfrak{B}} \mathcal{G} [\vec{v}]_{\mathfrak{B}}^T.$$

Sejam

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{A}}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) &= [\vec{u}] \mathcal{A} [\vec{v}]^T \\ &= u_1(a_{11})v_1 + \dots + u_n(a_{n1})v_1 + \\ &\quad \dots + \\ &\quad u_1(a_{1n})v_n + \dots + u_n(a_{nn})v_n \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{G}}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) &= [\vec{u}] \mathcal{G} [\vec{v}]^T \\ &= u_1(g_{11})v_1 + \dots + u_n(g_{n1})v_1 + \\ &\quad \dots + \\ &\quad u_1(g_{1n})v_n + \dots + u_n(g_{nn})v_n \end{aligned}$$

(a base adotada nas últimas notações matriciais para os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é sempre  $\mathfrak{B}$ ).

Mas, por hipótese

$$p_{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = p_{\mathcal{G}}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n);$$

pelo *Princípio de Identidade de Polinômios*, esta igualdade ocorre se, e somente se,  $(a_{ij}) = (g_{ij})$ , ou seja,  $\mathcal{A} = \mathcal{G}$  e assim fica provada a unicidade.  $\square$

**Exemplo 1.3.2.** *Seja  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$  a base de  $\mathbb{R}^2$  estabelecida no Exemplo 1.1.1. O produto interno do Exemplo 1.2.3 foi definido, implicitamente, para vetores dados na base canônica  $\mathfrak{C}$ : para vetores escritos em termos desta base, como é o caso dos vetores  $\vec{b}_1$  e  $\vec{b}_2$ , a expressão algébrica deste produto interno foi dada na equação enumerada por (1.4). Então, a matriz que determina este produto interno na base  $\mathfrak{B}$  é dada como segue:*

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle & \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle \\ \langle \vec{b}_2, \vec{b}_1 \rangle & \langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -14 \\ -14 & 35 \end{bmatrix}.$$

Sendo  $\vec{u}^{\mathfrak{B}} = (x_1, y_1)^{\mathfrak{B}}$  e  $\vec{v}^{\mathfrak{B}} = (x_2, y_2)^{\mathfrak{B}}$  vetores de  $\mathbb{R}^2$  na base  $\mathfrak{B}$ , tal produto interno fica

$$\langle \vec{u}^{\mathfrak{B}}, \vec{v}^{\mathfrak{B}} \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & -14 \\ -14 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \end{bmatrix}^T = 14x_1x_2 - 14x_1y_2 - 14x_2y_1 + 35y_1y_2.$$

Os vetores  $\vec{u}^{\mathfrak{B}} = (\frac{1}{7}, \frac{3}{7})^{\mathfrak{B}}$  e  $\vec{v}^{\mathfrak{B}} = (\frac{9}{14}, -\frac{4}{7})^{\mathfrak{B}}$ , obtidos no Exemplo 1.1.5, fazem

$$\left\langle \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}\right)^{\mathfrak{B}}, \left(\frac{9}{14}, -\frac{4}{7}\right)^{\mathfrak{B}} \right\rangle = -10.$$

**Exemplo 1.3.3.** Seja  $\mathfrak{C} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . A matriz  $\mathcal{A}$  do produto interno do Exemplo 1.2.3 em termos desta base fica

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{C}} = \begin{bmatrix} \langle \vec{i}, \vec{i} \rangle & \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle \\ \langle \vec{j}, \vec{i} \rangle & \langle \vec{j}, \vec{j} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sendo  $\vec{u}^{\mathfrak{C}} = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)^{\mathfrak{C}}$  e  $\vec{v}^{\mathfrak{C}} = (\bar{x}_2, \bar{y}_2)^{\mathfrak{C}}$  vetores de  $\mathbb{R}^2$  na base  $\mathfrak{C}$ , tal produto interno na base canônica fica

$$\langle \vec{u}^{\mathfrak{C}}, \vec{v}^{\mathfrak{C}} \rangle = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \end{bmatrix}^{\text{T}} = 2\bar{x}_1\bar{x}_2 + 3\bar{y}_1\bar{y}_2,$$

como escrito em (1.4).

Os vetores  $\vec{u}^{\mathfrak{B}} = (\frac{1}{7}, \frac{3}{7})^{\mathfrak{B}}$  e  $\vec{v}^{\mathfrak{B}} = (\frac{9}{14}, -\frac{4}{7})^{\mathfrak{B}}$  do exemplo anterior são dados em  $\mathfrak{C}$  por  $\vec{u}^{\mathfrak{C}} = (1, -1)^{\mathfrak{C}}$  e  $\vec{v}^{\mathfrak{C}} = (-\frac{1}{2}, 3)^{\mathfrak{C}}$ , conforme calculado no Exemplo 1.1.4. Estes dois vetores resultam por este produto interno em:

$$\left\langle (1, -1)^{\mathfrak{C}}, \left(-\frac{1}{2}, 3\right)^{\mathfrak{C}} \right\rangle = -10.$$

**Definição 1.3.4.** Uma matriz  $\mathcal{A}$  de  $M_n(\mathbb{R})$  é chamada de **simétrica** se  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\text{T}}$ .

**Definição 1.3.5.** Uma matriz  $\mathcal{A}$  de  $M_n(\mathbb{R})$  é chamada de **positiva definida** se, para todo vetor não-nulo  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , denotado matricialmente por

$$[\vec{v}] = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \in M_{1 \times n}(\mathbb{R}),$$

ocorrer

$$[\vec{v}] \mathcal{A} [\vec{v}]^{\text{T}} > 0.$$

Pelos desenvolvimentos feitos na demonstração da Proposição 1.3.1, é equivalente escrever a condição da última definição como sendo:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} v_i (a_{ij}) v_j > 0,$$

considerando  $\mathcal{A} = (a_{ij})$ .

**Lema 1.3.6.** Sejam  $V$  um espaço vetorial,  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  uma base ordenada de  $V$  e  $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz simétrica e positiva definida. A aplicação definida por

$$V \times V \ni (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{u}] \mathcal{A} [\vec{v}]^{\text{T}} \in \mathbb{R}$$

é um produto interno de  $V$ , como estabelecido na Definição 1.2.1.

**Demonstração.** Os Itens (1), (2) e (3) da Definição 1.2.1 devem ser verificados. Sejam  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ .

(1):

$$\begin{aligned} \langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle &= [a\vec{u} + b\vec{v}] \mathcal{A} [\vec{w}]^T \\ &= a[\vec{u}] \mathcal{A} [\vec{w}]^T + b[\vec{v}] \mathcal{A} [\vec{w}]^T \\ &= a\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + b\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle. \end{aligned}$$

A linearidade é provada com base em propriedades de operações com matrizes, portanto, válida para qualquer matriz  $\mathcal{A}$ ;

(2): Considerando  $\mathcal{A} = (a_{ij})$  e pelos desenvolvimentos matriciais da equação numerada por (1.8) é sabido que

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_i(a_{ij})v_j \\ &= u_1(a_{11})v_1 + u_2(a_{21})v_1 + \dots + u_n(a_{n1})v_1 + \\ &\quad \dots + \\ &\quad u_1(a_{1n})v_n + u_2(a_{2n})v_n + \dots + u_n(a_{nn})v_n \\ &= p(u_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} v_i(a_{ij})u_j \\ &= v_1(a_{11})u_1 + v_2(a_{21})u_1 + \dots + v_n(a_{n1})u_1 + \\ &\quad \dots + \\ &\quad v_1(a_{1n})u_n + v_2(a_{2n})u_n + \dots + v_n(a_{nn})u_n \\ &= u_1(a_{11})v_1 + u_2(a_{12})v_1 + \dots + u_n(a_{1n})v_1 + \\ &\quad \dots + \\ &\quad u_1(a_{n1})v_n + u_2(a_{n2})v_n + \dots + u_n(a_{nn})v_n \\ &= q(u_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Então  $p(u_1, \dots, v_n) = q(u_1, \dots, v_n)$  se, e somente se,  $a_{11} = a_{11}$ ,  $a_{12} = a_{21}$ ,  $\dots$ ,  $a_{n1} = a_{1n}$ ,  $\dots$ ,  $a_{nn} = a_{nn}$  (novamente pelo *Princípio de Identidade de Polinômios*), o que de

fato ocorre, pois  $\mathcal{A} = (a_{ij}) = (a_{ji}) = \mathcal{A}^T$ ;

(3): Supondo  $\vec{u} \neq \vec{0}$  vem

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = [\vec{u}] \mathcal{A} [\vec{u}]^T > 0$$

porque a matriz é positiva definida. Supondo  $\vec{u} = \vec{0}$  vem

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_i(a_{ij})u_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} 0(a_{ij})0 = 0,$$

portanto, a positividade da matriz implica a positividade da aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  $\square$

**Lema 1.3.7.** *Sejam  $V$  um espaço vetorial e*

$$V \times V \ni (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \in \mathbb{R}$$

*um produto interno de  $V$ . Fixada uma base ordenada  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  de  $V$ , a Proposição 1.3.1 garante a existência de uma única matriz  $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{R})$  tal que  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{u}] \mathcal{A} [\vec{v}]^T$ . Nestas condições,  $\mathcal{A}$  é simétrica e positiva definida.*

**Demonstração.** Sejam  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ .

(1): Como feito na primeira etapa do lema anterior, a linearidade é verificada para qualquer matriz;

(2):  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  goza da simetria, então

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{u}] \mathcal{A} [\vec{v}]^T = \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_i(a_{ij})v_j$$

onde  $\mathcal{A} = (a_{ij})$ , e

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = [\vec{v}] \mathcal{A} [\vec{u}]^T = \sum_{1 \leq i, j \leq n} v_i(a_{ij})u_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_j(a_{ji})v_i.$$

Como  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ , segue que  $(a_{ij}) = (a_{ji})$ , donde  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T$ ;

(3): Supondo  $\vec{u} \neq \vec{0}$  vem  $0 < \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = [\vec{u}] \mathcal{A} [\vec{u}]^T$ , ou seja,  $\mathcal{A}$  é positiva definida, conforme Definição 1.3.5.  $\square$

Os Lemas 1.3.6 e 1.3.7 provam a necessidade e suficiência do seguinte resultado:

**Proposição 1.3.8.** *Sejam  $V$  um espaço vetorial,  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  uma base ordenada de  $V$  e  $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{R})$ . Para que a aplicação definida por*

$$V \times V \ni (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{u}] \mathcal{A} [\vec{v}]^T \in \mathbb{R}$$

*seja um produto interno deste espaço tangente é necessário e suficiente que  $\mathcal{A}$  seja simétrica e positiva definida.*

**Definição 1.3.9.** *Nas condições da Proposição 1.3.8, a matriz  $\mathcal{A}$  será chamada de **matriz do produto interno** e este será indexado pela matriz simétrica e positiva definida de  $M_n(\mathbb{R})$  que o define:*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathcal{A}} = [\vec{u}] \mathcal{A} [\vec{v}]^T.$$

O produto interno canônico da Definição 1.2.4 continua indexado por  $C$ .

## 1.4 O Espaço Tangente e suas Propriedades

**Definição 1.4.1.** Um *vetor tangente* do  $\mathbb{R}^n$  consiste de dois pontos deste espaço: um chamado de **parte vetorial**  $\vec{v}$  e outro de **ponto de aplicação**  $\vec{p}$ . Sua notação é  $\vec{v}_{\vec{p}}$  e consiste do vetor obtido ao se colocar (ou aplicar) a origem de  $\vec{v}$  em  $\vec{p}$ .

Algumas propriedades deste conceito são as que seguem:

1.  $\vec{v}_{\vec{p}} = \vec{w}_{\vec{q}}$  se, e somente se, estes vetores tangentes têm o mesmo ponto de aplicação,  $\vec{p} = \vec{q}$ , e a mesma parte vetorial,  $\vec{v} = \vec{w}$ ;
2.  $\vec{v}_{\vec{p}}$  e  $\vec{w}_{\vec{q}}$  são **vetores tangentes paralelos** e não são coincidentes caso  $\vec{p} \neq \vec{q}$ ;
3.  $\vec{v}_{\vec{p}} \pm \vec{w}_{\vec{p}} = (\vec{v} \pm \vec{w})_{\vec{p}}$ ;
4. se  $c \in \mathbb{R}$ , então  $c(\vec{v}_{\vec{p}}) = (c\vec{v})_{\vec{p}}$ .

**Definição 1.4.2.** Sejam  $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$  um ponto e  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  um (sub)espaço vetorial. O **espaço tangente de  $V$  em  $\vec{p}$**  é definido como o conjunto de todos os vetores de  $V$  aplicados em  $\vec{p}$  (ou seja, com sua origem trasladada para o ponto  $\vec{p}$ ) e denotado por

$$T_{\vec{p}}(V) = \{\vec{v}_{\vec{p}} : \vec{v} \in V\}.$$

**Proposição 1.4.3.** Nas condições da Definição 1.4.2, adicionando-lhes convencionar  $\vec{0}_{\vec{p}} = \vec{p}$ ,  $T_{\vec{p}}(V)$  é um (sub)espaço vetorial.

**Demonstração.** A seguinte aplicação linear

$$V \ni \vec{v} \mapsto F(\vec{v}) = \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(V)$$

é um **isomorfismo** (aplicação linear bijetora) entre esses espaços.

Se  $V$  é um (sub)espaço vetorial, então é um espaço vetorial; por isso, as considerações seguintes são feitas supondo  $V$  como um espaço vetorial. O corpo de escalares é tomado como sendo um conjunto  $K$ .

Em  $V$  estão definidas as seguintes operações:

**soma:**

$$V \times V \ni (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto S(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} + \vec{v} \in V; \quad (1.9)$$

e **produto por escalar**

$$K \times V \ni (c, \vec{v}) \mapsto P(c, \vec{v}) = c\vec{v} \in V. \quad (1.10)$$

Para cada uma destas operações são satisfeitos em  $V$  quatro axiomas. Compondo  $F$  com  $S$  e  $F$  com  $P$  (nesta mesma ordem,  $F \circ S$  e  $F \circ P$ ), esses oito axiomas são também satisfeitos em  $T_{\vec{p}}(V)$ . Por exemplo, valem em  $V$  a **comutatividade da soma** e a **distributividade do escalar**, expressos, nessa ordem, da seguinte forma:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad \text{e} \quad (a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}.$$

Com a aplicação linear composta dada por

$$V \times V \ni (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto F(S(\vec{u}, \vec{v})) = F(\vec{u} + \vec{v}) \in T_{\vec{p}}(V)$$

vale a comutatividade da soma em  $T_{\vec{p}}(V)$ , pois

$$\vec{v}_{\vec{p}} + \vec{u}_{\vec{p}} = F(\vec{v}) + F(\vec{u}) = F(\vec{v} + \vec{u}) = F(\vec{u} + \vec{v}) = F(\vec{u}) + F(\vec{v}) = \vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}}.$$

A distributividade do escalar também vale em  $T_{\vec{p}}(V)$ , pois, com a aplicação linear composta

$$K \times V \ni (c, \vec{v}) \mapsto F(P(c, \vec{v})) = F(c\vec{v}) \in T_{\vec{p}}(V),$$

ocorre

$$(a + b)\vec{v}_{\vec{p}} = F((a + b)\vec{v}) = F(a\vec{v}) + F(b\vec{v}) = aF(\vec{v}) + bF(\vec{v}) = a\vec{v}_{\vec{p}} + b\vec{v}_{\vec{p}}.$$

□

Para  $\vec{p}$  e  $V$  como na Definição 1.4.2 valem as seguintes asserções: se  $\vec{p} = \vec{0}$ , então  $T_{\vec{0}}(V) = V$ ; e, para  $\forall \vec{p} \in \mathbb{R}^n$ ,  $T_{\vec{p}}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.4.4.** *Sejam  $V$  um (sub)espaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$  e  $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ .  $V$ , por ser (sub)espaço vetorial de dimensão finita, admite base. Seja  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  uma base ordenada de  $V$ . Uma **base ordenada de  $T_{\vec{p}}(V)$**  é definida como **uma base de  $V$  aplicada em  $\vec{p}$** , isto é, o conjunto de cada  $\vec{b}_i$  aplicado em  $\vec{p}$ . A base de  $T_{\vec{p}}(V)$  é denotada e estenografada por*

$$\mathfrak{B}_{\vec{p}} = \{\vec{b}_{1\vec{p}}, \vec{b}_{2\vec{p}}, \dots, \vec{b}_{n\vec{p}}\}.$$

O isomorfismo tomado durante a demonstração da Proposição 1.4.3 justifica esta definição. Uma vez que  $F$  é bijetora e  $\mathfrak{B} \subseteq V$  é base deste (sub)espaço, então  $F(\mathfrak{B})$  é base de  $T_{\vec{p}}(V)$  (um isomorfismo transforma uma base do domínio numa base da imagem).

**Exemplo 1.4.5.** *Sejam  $V \subset \mathbb{R}^3$  o plano  $Oxy$  (de equação normal  $z = 0$ ) e  $\vec{p} = (2, 3, 3)$ . Uma base de  $V$  foi dada no Exemplo 1.1.2:  $\mathfrak{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ . Uma base de  $T_{\vec{p}}(V)$  seria  $F(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}_{\vec{p}} = \{\vec{i}_{\vec{p}}, \vec{j}_{\vec{p}}\}$ . Notar que  $T_{\vec{p}}(V)$  é o plano do  $\mathbb{R}^3$  paralelo a  $V$  de equação normal  $z = 3$ .*

**Observação 1.4.6.** *(Convenção do espaço vetorial e corpo de escalares adotados). Para esta monografia fica estabelecido que o **corpo de escalares** é sempre  $\mathbb{R}$  e  $V$  é sempre o **espaço vetorial**  $\mathbb{R}^n$ , ou seja,*

$$T_{\vec{p}}(V) = T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n).$$

$n = 2, 3$  são os únicos casos necessários.

---

# MÉTRICA

---

Aqui inicia o conteúdo próprio deste trabalho. A primeira seção objetiva desenvolver a idéia de "*métrica*" com base nos conceitos de produto interno desenvolvido no capítulo precedente. O sentido em que a palavra *métrica* é usada aqui pode ser adiantado como sendo uma aplicação matricial. A referência bibliográfica [12] usa este termo para definir uma aplicação

$$M \times M \ni (x, y) \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R},$$

(onde  $M$  é um conjunto) que mede a distância dos pontos  $x$  e  $y$  e satisfaz quatro axiomas. O mesmo conceito é apresentado adiante neste capítulo sob o nome de *Função Distância*; isso ocorre na Definição 2.1.42 e lá são citados esses quatro axiomas.

Na segunda seção estuda-se o *Produto Vetorial*, conceito importante para o estudo de curvas no  $\mathbb{R}^3$  que se dará no próximo capítulo. Foi trazido aqui pela fonte [6].

## 2.1 Definição de Métrica

As matrizes de  $M_n(\mathbb{R})$  que satisfazem as hipóteses da Proposição 1.3.8 são citadas nesta monografia com alguma frequência. Disto e das Definições 1.3.4 e 1.3.5 vem a motivação para estabelecer a seguinte definição:

**Definição 2.1.1.** *O conjunto das matrizes quadradas, simétricas e positivas definidas é denotado por*

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \{\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{R}) : \mathcal{A} = \mathcal{A}^T \text{ e } [\vec{v}]\mathcal{A}[\vec{v}]^T > 0, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}\}.$$

Obviamente,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ .

A matriz de um produto interno estudada no capítulo precedente (Definição 1.3.9) não necessita ser constante. Pode variar em cada ponto  $\vec{p}$  que define  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ . Isso é o que estabelece a próxima definição.

**Definição 2.1.2.** *Sejam  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  e uma aplicação matricial*

$$Y \ni \vec{p} \mapsto \mathcal{A}(\vec{p}) = (a_{ij}(\vec{p})) \in M_n(\mathbb{R})$$

onde cada  $Y \ni \vec{p} \mapsto (a_{ij}(\vec{p})) \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , é uma função diferenciável e aqui chamada de **função entrada** de  $\mathcal{A}(\vec{p})$ . Se houver um **aberto conexo**  $X \subseteq Y$  tal que a restrição

$$\mathcal{A}|_X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

diz-se que  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  é uma **métrica diferenciável** em cada ponto  $\vec{p} \in X$ .

**Observação 2.1.3.** *Deste ponto em diante quando se falar de uma métrica é entendido que  $\vec{p}$  pertence ao conjunto tal que  $\mathcal{A}(\vec{p}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .*

**Exemplo 2.1.4.** *Para a dimensão  $n = 2$  seja*

$$\mathbb{R}^2 \supseteq Y \ni \vec{p} \mapsto \mathcal{A}(\vec{p}) = (a_{ij}(\vec{p})) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

dada por

$$\mathcal{A}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} a_{11}(\vec{p}) & a_{12}(\vec{p}) \\ a_{21}(\vec{p}) & a_{22}(\vec{p}) \end{bmatrix}.$$

Por ser simétrica,  $a_{12}(\vec{p}) = a_{21}(\vec{p})$ . Além disso terá suas funções entrada simplificadas da seguinte forma:

$$\mathcal{A}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} a(\vec{p}) & b(\vec{p}) \\ b(\vec{p}) & c(\vec{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são subentendidas como funções de  $\vec{p}$ .

**Exemplo 2.1.5.** *Para a dimensão  $n = 3$  uma métrica*

$$\mathbb{R}^3 \supseteq Y \ni \vec{p} \mapsto \mathcal{A}(\vec{p}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

tem o seguinte aspecto geral:

$$\mathcal{A}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} a(\vec{p}) & b(\vec{p}) & c(\vec{p}) \\ b(\vec{p}) & d(\vec{p}) & e(\vec{p}) \\ c(\vec{p}) & e(\vec{p}) & f(\vec{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix},$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $\dots$ ,  $e$  e  $f$  são subentendidas como funções de  $\vec{p}$ .

Uma métrica  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  se aplica a  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  para estabelecer um produto interno neste espaço tangente. Para isso vem a seguinte definição:

**Definição 2.1.6.** *Seja  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  uma métrica de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ , como na Definição 2.1.2. Conforme a Proposição 1.3.8, essa matriz define um produto interno dado por*

$$T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \times T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \ni (\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) \mapsto \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} = [\vec{u}_{\vec{p}}] \mathcal{A}(\vec{p}) [\vec{v}_{\vec{p}}]^T \in \mathbb{R}$$

Esta aplicação será chamada de **produto interno sobre  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  segundo  $\mathcal{A}(\vec{p})$** .

Alguns resultados de *Álgebra Linear* são assumidos aqui. Os mesmos podem ser lidos com o rigor necessário nas obras [3] e [9].

**Definição 2.1.7.** *Sejam  $\mathfrak{B}_{\vec{p}} = \{\vec{b}_{1\vec{p}}, \vec{b}_{2\vec{p}}, \dots, \vec{b}_{n\vec{p}}\}$  uma base de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  e  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  uma métrica definida neste espaço tangente.*

1. Diz-se que  $\mathfrak{B}_{\vec{p}}$  é uma **base ortogonal segundo  $\mathcal{A}(\vec{p})$**  se  $\langle \vec{b}_{i\vec{p}}, \vec{b}_{j\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} = 0$  para  $i \neq j$ ;
2. Diz-se que é uma **base ortonormal (ou, simplesmente, ON) segundo  $\mathcal{A}(\vec{p})$**  quando  $\langle \vec{b}_{i\vec{p}}, \vec{b}_{j\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} = \delta_{ij}$ .

**Observação 2.1.8.** *Uma matriz simétrica pode ser entendida como a matriz de um **operador linear auto-adjunto** numa base ortonormal. A base canônica do espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ , munido do produto interno canônico, é ortonormal. Considerando a matriz  $(\mathcal{A})_{\mathfrak{e}, \mathfrak{e}}$  da aplicação linear*

$$\mathbb{R}^n \ni \vec{u} \mapsto \mathcal{A}\vec{u} \in \mathbb{R}^n,$$

onde  $\mathcal{A}\vec{u}$  é calculado por  $\mathcal{A}[\vec{u}]^T$ , ocorre

$$\langle \mathcal{A}\vec{u}, \vec{v} \rangle_C = \langle \vec{u}, \mathcal{A}\vec{v} \rangle_C,$$

para quaisquer  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .

**Observação 2.1.9.** *Um produto interno sobre  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  pode, sob um certo sentido, ser entendido como um produto interno canônico: simplificando  $\mathcal{A}(\vec{p})$  para  $\mathcal{A}$  tem-se*

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = [\vec{u}_{\vec{p}}] \mathcal{A} [\vec{v}_{\vec{p}}]^T = [\vec{u}_{\vec{p}}] Id_n (\mathcal{A} [\vec{v}_{\vec{p}}]^T) = [\vec{u}_{\vec{p}}] Id_n [\mathcal{A} \vec{v}_{\vec{p}}]^T = \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \mathcal{A} \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_C,$$

ou

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A} \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_C.$$

Este fato será usado em lemas posteriores.

**Observação 2.1.10.** *Toda matriz simétrica é **diagonalizável**, isto é, admite base de autovetores.*

**Observação 2.1.11.** Em continuação à Observação 2.1.10, a **base de autovetores** de uma matriz simétrica é **ortogonal** em relação ao produto interno **canônico**. Normalizando cada um dos vetores desta base obtém-se uma base **ortonormal** em relação ao produto interno canônico.

**Lema 2.1.12.** Seja  $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz simétrica. Para que essa matriz seja positiva definida é necessário e suficiente que todos os seus autovalores sejam estritamente positivos.

**Demonstração.** Conforme observado há pouco, a matriz  $\mathcal{A}$  é diagonalizável.

É admitido que a matriz seja positiva definida. Seja  $\lambda$  um de seus autovalores. Supor que seja negativo. Seja  $\vec{u}$  o autovetor associado a este  $\lambda$ , assim  $\vec{0} \neq \vec{u}$ . Então, por ser positiva definida deve ocorrer

$$0 < [\vec{u}] \mathcal{A} [\vec{u}]^T = [\vec{u}] [\lambda \vec{u}]^T = \lambda [\vec{u}] [\vec{u}]^T = \lambda \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_C,$$

mas  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_C > 0$  devido a propriedade da positividade do produto interno canônico; sendo  $\lambda < 0$  vem

$$0 < [\vec{u}] \mathcal{A} [\vec{u}]^T < 0$$

que é contradição. Logo, todo autovalor  $\lambda$  da matriz  $\mathcal{A}$  é positivo e está provada a necessidade.

Para a suficiência, seja  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  uma base de  $\mathbb{R}^n$ , ON segundo o produto interno canônico e composta por autovetores de  $\mathcal{A}$ , ou seja,  $\vec{b}_i$  é o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_i > 0$ . Um vetor  $\vec{u}$  é escrito como  $\sum_{1 \leq i \leq n} u_i \vec{b}_i$ . Assim,

$$\begin{aligned} [\vec{u}] \mathcal{A} [\vec{u}]^T &= [\vec{u}] Id_n (\mathcal{A} [\vec{u}]^T) \\ &= \left\langle \vec{u}, \mathcal{A} \sum_{1 \leq i \leq n} u_i \vec{b}_i \right\rangle_C \\ &= \left\langle \vec{u}, \sum_{1 \leq i \leq n} u_i (\mathcal{A} \vec{b}_i) \right\rangle_C \\ &= \left\langle \sum_{1 \leq i \leq n} u_i \vec{b}_i, \sum_{1 \leq i \leq n} u_i \lambda_i \vec{b}_i \right\rangle_C \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} u_i^2 \lambda_i \langle \vec{b}_i, \vec{b}_i \rangle_C \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} u_i^2 \lambda_i \delta_{ii} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} u_i^2 \lambda_i > 0 \end{aligned}$$

ou seja, a matriz  $\mathcal{A}$  é positiva definida. □

**Lema 2.1.13.** Toda matriz simétrica e positiva definida é não-singular (ou seja, sempre admite inversa).

**Demonstração.** Será feita para os casos  $n = 2, 3$  por contradição.

Sendo

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

uma matriz simétrica e positiva definida supor que seja singular (sem inversa) implica  $\det \mathcal{A} = ac - b^2 = 0$  e faz com que o polinômio característico desta matriz fique

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{A}}(\lambda) &= (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 \\ &= \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 \\ &= \lambda^2 - (a + c)\lambda. \end{aligned}$$

Por ter raiz nula (autovalor nulo), há contradição com o Lema 2.1.12. Portanto  $\det \mathcal{A} \neq 0$ . Para

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

com  $\det \mathcal{A} = 0$  faz o polinômio característico ser

$$p_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda(b^2 - \lambda^2 + c^2 + e^2 + a\lambda + d\lambda - ad - af - df),$$

ou seja, faz com que  $\mathcal{A}$  tenha autovalor nulo, contra-senso.  $\square$

**Exemplo 2.1.14.** Do Lema 2.1.13 é possível inferir uma característica da matriz do Exemplo 2.1.4:

$$0 \neq \det \mathcal{A}(\vec{p}) \Rightarrow 0 \neq ac - b^2 \Rightarrow ac \neq b^2.$$

**Observação 2.1.15.** No que segue, seja  $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ . Define-se a **submatriz principal de ordem  $k$** , com  $1 \leq k \leq n$ , como a matriz  $\mathcal{A}_k = (a_{ij})$  onde  $1 \leq i, j \leq k$  (portanto,  $\mathcal{A}_k \in M_k(\mathbb{R})$ ); define-se o **menor principal de ordem  $k$**  de  $\mathcal{A}$  como sendo o determinante da submatriz principal  $\mathcal{A}_k$ .

**Uma matriz positiva definida tem seus menores principais estritamente positivos.**

O próximo exemplo ilustra mais uma característica presente em uma matriz de produto interno:

**Exemplo 2.1.16.** Uma matriz de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $n = 2, 3$ , não pode ter um elemento da diagonal principal igual a zero. De fato, se alguma matriz tiver um elemento nulo na diagonal principal, algum menor principal será nulo ou negativo, contrariando o resultado enunciado na Observação 2.1.15.

**Exemplo 2.1.17.** A matriz  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  igual a

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

constante em todo  $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$  define um produto interno em  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^3)$ :

$$T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^3) \times T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^3) \ni (\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) \mapsto \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} \in \mathbb{R}.$$

Pondo  $\vec{u}_{\vec{p}} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v}_{\vec{p}} = (x_2, y_2, z_2)$ , é dado algebricamente por

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \mathcal{A} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}^T = \\ & = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1z_2 + x_2z_1 + y_1y_2 + y_1z_2 + y_2z_1 + 2z_1z_2. \end{aligned}$$

**Exemplo 2.1.18.** Sejam  $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$  e

$$Y \ni \vec{p} = (x, y) \mapsto \mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

dada por

$$\mathcal{A}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix}.$$

O conjunto  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \subset Y$  é chamado de **plano da Geometria de Lobatchevski** (vide [14], capítulo 4). Para um ponto de aplicação  $\vec{p} \in X$ , esta  $\mathcal{A}$  define uma métrica em  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$  dada por

$$T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) \times T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) \ni (\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) \mapsto \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} = [\vec{u}_{\vec{p}}] \mathcal{A}(\vec{p}) [\vec{v}_{\vec{p}}]^T \in \mathbb{R}$$

chamada de **métrica da Geometria Não-Euclidiana de Lobatchevski** (conforme referência [5]).

Pondo  $\vec{u}_{\vec{p}} = (x_1, y_1)_{\vec{p}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}} = (x_2, y_2)_{\vec{p}}$ , o produto interno induzido por  $\mathcal{A}$  é algebricamente dado por

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{x_1}{y^2} & \frac{y_1}{y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{y^2}. \end{aligned}$$

Devido à Proposição 1.3.8, esta aplicação satisfaz todos os quesitos da Definição 1.2.1.

O exemplo anterior e o próximo são muito utilizados no decorrer desta monografia.

**Exemplo 2.1.19.** Para os mesmos conjuntos  $X \subset Y$  há pouco definidos, a aplicação

$$Y \ni \vec{p} = (x, y) \mapsto \mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

define um produto interno

$$T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) \times T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2) \ni (\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) \mapsto \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} = [\vec{u}_{\vec{p}}] \mathcal{A}(\vec{p}) [\vec{v}_{\vec{p}}]^T \in \mathbb{R}$$

quando  $\vec{p} \in X$ . Notar que se  $y < 0$ , então  $\frac{1}{y} < 0$  e assim a matriz teria autovalor negativo contrariando o Lema 2.1.12.

Algebricamente, este produto interno é

$$\langle (x_1, y_1)_{\vec{p}}, (x_2, y_2)_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{y}.$$

**Exemplo 2.1.20.** O produto interno usual, estabelecido na Definição 1.2.4, é aplicável aos espaços  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$  e  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\forall \vec{p} \in \mathbb{R}^{2,3}$ , e pode ser reescrito em forma matricial:

1.  $n = 2$

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_C = \sum_{1 \leq i \leq 2} x_i y_i = [x_1 \ y_1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [x_2 \ y_2]^T;$$

2.  $n = 3$

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_C = \sum_{1 \leq i \leq 3} x_i y_i = [x_1 \ y_1 \ z_1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [x_2 \ y_2 \ z_2]^T.$$

Portanto, como  $Id_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  e  $Id_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , é possível definir este produto interno nos moldes da Definição 2.1.6.

Sobre o espaço tangente  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $n = 2, 3$ , define-se o **produto interno canônico em sua forma matricial** como segue:

1. Se  $\vec{u}_{\vec{p}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}}$  são elementos de  $\mathbb{R}^2$ , então  $\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_C = [\vec{u}_{\vec{p}}] Id_2 [\vec{v}_{\vec{p}}]^T$ ;

2. Se  $\vec{u}_{\vec{p}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}}$  são elementos de  $\mathbb{R}^3$ , então  $\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_C = [\vec{u}_{\vec{p}}] Id_3 [\vec{v}_{\vec{p}}]^T$ .

A matriz  $Id_n$  é chamada de **métrica euclidiana, ou canônica, ou usual**.

A proposição seguinte é muito utilizada em resultados posteriores.

**Proposição 2.1.21.** Seja  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  uma métrica de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ .

1. Existe uma base ordenada de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  **ortogonal** segundo  $\mathcal{A}(\vec{p})$ ;

2. Existe uma base ordenada de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  **ON** segundo  $\mathcal{A}(\vec{p})$ .

**Demonstração.**

1. Conforme Observações 2.1.10 e 2.1.11, existe uma base  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  formada de autovetores da matriz  $\mathcal{A}(\vec{p})$ ; cada autovetor  $\vec{b}_i$  associado ao respectivo autovalor  $\lambda_i$ . Assim  $\mathcal{A}\vec{b}_i = \lambda_i\vec{b}_i$ . Esta mesma base pode ser aplicada em  $\vec{p}$  para formar uma base de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  (conforme Definição 1.4.4), ficando  $\mathfrak{B}_{\vec{p}} = \{\vec{b}_{1\vec{p}}, \vec{b}_{2\vec{p}}, \dots, \vec{b}_{n\vec{p}}\}$ . O produto interno por  $\mathcal{A}$  de cada dois vetores distintos desta base pode, conforme Observação 2.1.9, ser escrito como

$$\langle \vec{b}_{i\vec{p}}, \vec{b}_{j\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \vec{b}_{i\vec{p}}, \mathcal{A}\vec{b}_{j\vec{p}} \rangle_C = \langle \vec{b}_{i\vec{p}}, \lambda_j\vec{b}_{j\vec{p}} \rangle_C = \lambda_j \langle \vec{b}_{i\vec{p}}, \vec{b}_{j\vec{p}} \rangle_C = 0,$$

quando  $i \neq j$ , pois a base  $\mathfrak{B}_{\vec{p}}$  é *ON* segundo o produto interno canônico. Portanto, a base procurada é a própria base de autovetores.

2. A base encontrada na etapa anterior é normalizada para se obter a base *ON* segundo a métrica dada. Para isso, sejam

$$\vec{v}_{i\vec{p}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \vec{b}_{i\vec{p}}$$

para  $1 \leq i \leq n$ . A base de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ , *ON* segundo  $\mathcal{A}(\vec{p})$ , é construída a partir de  $\mathfrak{B}_{\vec{p}}$  como segue:

$$\mathfrak{B}_{2,\vec{p}} = \{\vec{v}_{1\vec{p}}, \vec{v}_{2\vec{p}}, \dots, \vec{v}_{n\vec{p}}\}.$$

Resta provar que esta última satisfaz o enunciado. Como descrito na Observação 2.1.9, notar que

$$\langle \vec{v}_{i\vec{p}}, \vec{v}_{j\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \vec{v}_{i\vec{p}}, \mathcal{A}\vec{v}_{j\vec{p}} \rangle_C = \langle \vec{v}_{i\vec{p}}, \lambda_j\vec{v}_{j\vec{p}} \rangle_C = \frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}} \langle \vec{b}_{i\vec{p}}, \vec{b}_{j\vec{p}} \rangle_C.$$

Como  $\langle \vec{b}_{i\vec{p}}, \vec{b}_{j\vec{p}} \rangle_C = \delta_{ij}$ , segue que  $\langle \vec{v}_{i\vec{p}}, \vec{v}_{j\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = \delta_{ij}$ , ou seja,  $\mathfrak{B}_{2,\vec{p}}$  é *ON* segundo  $\mathcal{A}$ .  $\square$

**Exemplo 2.1.22.** *Uma métrica é chamada de **métrica diagonal** se sua matriz for **diagonal**, ou seja, todas as funções entradas fora da diagonal principal são nulas. Notar que se uma matriz de produto interno é diagonal, **então os elementos da diagonal principal são seus autovalores** e, pelo Lema 2.1.12, **devem ser todos estritamente positivos**.*

*A **base canônica** de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  (que é a canônica de  $\mathbb{R}^n$  aplicada em  $\vec{p}$ ) é **ortogonal segundo qualquer métrica diagonal**. De fato, restringindo para o caso  $n = 3$ , tem-se a base de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  dada por*

$$\mathfrak{C}_{\vec{p}} = \{\vec{i}_{\vec{p}}, \vec{j}_{\vec{p}}, \vec{k}_{\vec{p}}\}.$$

*Seja*

$$\mathcal{A}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} a(\vec{p}) & 0 & 0 \\ 0 & d(\vec{p}) & 0 \\ 0 & 0 & f(\vec{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

a aplicação matricial que pertence a  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sempre que  $\vec{p} \in X$ , que é um aberto conexo do  $\mathbb{R}^3$ . Noutras palavras,  $\mathcal{A}(\vec{p})$  define um produto interno em cada  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ .

Sejam  $\vec{u}_{\vec{p}} = (x_1, y_1, z_1)^{\mathcal{E}_{\vec{p}}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}} = (x_2, y_2, z_2)^{\mathcal{E}_{\vec{p}}}$  vetores de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ . O produto interno induzido por  $\mathcal{A}$  é dado por

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}^T = ax_1x_2 + dy_1y_2 + fz_1z_2.$$

Com isso, tem-se

$$\langle \vec{i}_{\vec{p}}, \vec{j}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \vec{i}_{\vec{p}}, \vec{k}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \vec{j}_{\vec{p}}, \vec{k}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = 0.$$

Pela Definição 2.1.7,  $\mathcal{E}_{\vec{p}}$  é ortogonal segundo  $\mathcal{A}$ .

**Definição 2.1.23.** Uma aplicação

$$T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \ni \vec{v}_{\vec{p}} \mapsto \|\vec{v}_{\vec{p}}\| \in \mathbb{R}_+$$

tal que para todo  $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  e  $c \in \mathbb{R}$  cumpre os seguintes axiomas (ou propriedades):

1. (**desigualdade triangular**)  $\|\vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}}\| \leq \|\vec{u}_{\vec{p}}\| + \|\vec{v}_{\vec{p}}\|$ ;
2.  $\|c\vec{v}_{\vec{p}}\| = |c| \|\vec{v}_{\vec{p}}\|$ ;
3. (**positividade**)  $\vec{v}_{\vec{p}} \neq \vec{0}_{\vec{p}} \Rightarrow \|\vec{v}_{\vec{p}}\| > 0$ ,

é chamada **norma** do espaço tangente  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ .

**Lema 2.1.24.** Nas condições da última definição,  $\|\vec{0}_{\vec{p}}\| = 0$ .

**Demonstração.** Usando as propriedades do espaço vetorial  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\vec{0}_{\vec{p}} = \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{u}_{\vec{p}} = (1 - 1) \cdot \vec{u}_{\vec{p}} = 0 \cdot \vec{u}_{\vec{p}}$ . Assim, pela Propriedade (2) da definição de norma, vem que  $\|\vec{0}_{\vec{p}}\| = \|0 \cdot \vec{u}_{\vec{p}}\| = 0 \cdot \|\vec{u}_{\vec{p}}\| = 0$ .  $\square$

Dados os pontos  $P = (x_1, y_1)$  e  $Q = (x_2, y_2)$ , ambos em  $\mathbb{R}^2$ , e definindo um vetor de extremidade inicial em  $P$  e final em  $Q$  por

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

é possível medir o comprimento da flexa (vetor)  $\overrightarrow{PQ}$  pela aplicação do *Teorema de Pitágoras* ao triângulo  $PQR$  da Figura 2.1, onde  $R = (x_2, y_1)$ :

$$PQ^2 = PR^2 + RP^2$$

onde  $XY$  denota o comprimento do segmento de extremos em  $X$  e  $Y$ ; os segmentos horizontal  $PR$  e vertical  $RQ$  têm seus comprimentos facilmente calculados por  $|x_2 - x_1|$  e  $|y_2 - y_1|$  nessa ordem; então

$$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Rightarrow PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

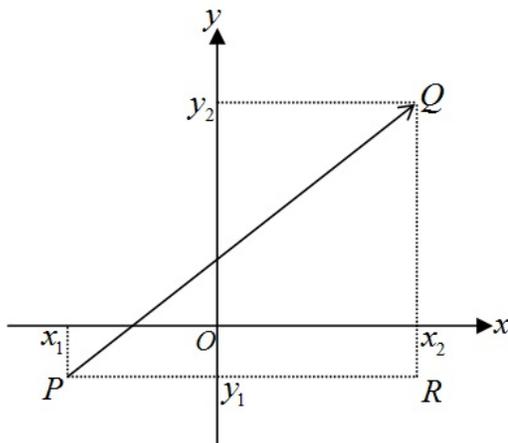


Figura 2.1: coordenadas do vetor  $\overrightarrow{PQ}$  em  $\mathbb{R}^2$

Mas

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= (x_2 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_1) \\ &= \langle (x_2 - x_1, y_2 - y_1), (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \rangle_C \\ &= \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle_C. \end{aligned}$$

Portanto,  $PQ = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle_C}$ .

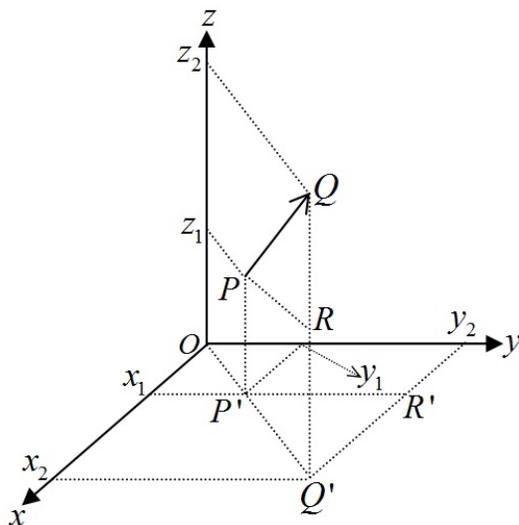


Figura 2.2: coordenadas do vetor  $\overrightarrow{PQ}$  em  $\mathbb{R}^3$

Considerando os pontos  $P = (x_1, y_1, z_1)$  e  $Q = (x_2, y_2, z_2)$ , ambos em  $\mathbb{R}^3$ , é possível

obter o comprimento de  $\overrightarrow{PQ}$  pela aplicação do *Teorema de Pitágoras* duas vezes na Figura 2.2: uma no triângulo  $PQR$  onde  $R = (x_2, y_2, z_1)$  e  $PQ^2 = PR^2 + RQ^2$ ; uma outra vez no triângulo  $P'Q'R'$  onde  $P' = (x_1, y_1, 0)$ ,  $Q' = (x_2, y_2, 0)$  e  $R' = (x_1, y_2, 0)$  donde é possível obter  $PR = P'Q'$ . Fazendo as devidas substituições chega-se ao resultado

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Mas, como no caso anterior,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle_C.$$

Então

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Estes dois argumentos baseiam a seguinte definição:

**Definição 2.1.25.** *Seja  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ . A **norma euclidiana** de  $\vec{v}$  (ou **norma canônica** ou **norma usual**) é a função*

$$\| \cdot \|_C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

que mede o comprimento do vetor  $\vec{v}$  e é definida da seguinte forma

$$\| \vec{v} \|_C = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_C}.$$

Dado qualquer sistema de eixos cartesianos de  $\mathbb{R}^n$ ,  $O$  representa sua origem, isto é, o ponto com todas as coordenadas zero.

A "ligação" desta definição com os dois argumentos anteriormente declarados é que qualquer vetor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  pode ser colocado com a extremidade inicial na origem do sistema de eixos, fazendo  $P = O$ , e extremidade final como  $Q$ ,  $Q$  e  $\vec{v}$  têm as mesmas coordenadas. Tomando o  $\mathbb{R}^3$  como exemplo,  $\vec{v} = (x, y, z)$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$  onde  $P = (0, 0, 0)$  e  $Q = (x, y, z)$ , tem norma euclidiana

$$\begin{aligned} \| \vec{v} \|_C &= \| \overrightarrow{PQ} \|_C \\ &= \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_C}. \end{aligned}$$

Os dois casos explicados podem ser generalizados para a dimensão  $n$  pela aplicação do *Teorema de Pitágoras*  $n - 1$  vezes.

A norma euclidiana está atrelada ao produto interno usual; um produto interno qualquer definiria uma outra norma, como se verá posteriormente.

O conceito seguinte é bastante importante no estudo de *Geometria* e aplica-se à medida de distâncias em  $\mathbb{R}^n$ .

Uma métrica como instituída na Definição 2.1.2 sempre define uma norma. Isso será demonstrado no próximo resultado. A recíproca não é verdadeira e será provada no exemplo imediatamente empós.

**Proposição 2.1.26.** *Seja  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  uma métrica definida no espaço tangente  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ . A aplicação definida por*

$$T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \ni \vec{u}_{\vec{p}} \mapsto \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})} = \sqrt{\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})}} \in \mathbb{R}_+$$

é uma norma e é chamada de **norma de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  segundo  $\mathcal{A}(\vec{p})$** .

A demonstração deste resultado requer um outro que será elucidado primeiramente. Trata-se da chamada **desigualdade de Cauchy-Schwarz**.

**Lema 2.1.27.** *Seja  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  uma métrica definida do espaço tangente  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ . Se  $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ , então*

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})}^2 \leq \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} \quad (2.1)$$

A igualdade ocorre se, e somente se,  $\{\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\}$  é um conjunto de vetores LD.

**Demonstração.** No que segue, a matriz de produto interno  $\mathcal{A}(\vec{p})$  tem sua notação simplificada para  $\mathcal{A}$ .

Se  $\vec{u}_{\vec{p}} = \vec{v}_{\vec{p}} = \vec{0}_{\vec{p}}$ , então, pela positividade do produto interno,  $\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = 0$  e  $\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = 0 = \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}$ , logo a desigualdade (2.1) é satisfeita. Quando ao menos um dentre  $\vec{u}_{\vec{p}}$  ou  $\vec{v}_{\vec{p}}$  é nulo, a desigualdade também é satisfeita.

Agora é suposto  $\vec{u}_{\vec{p}} \neq \vec{0}_{\vec{p}} \neq \vec{v}_{\vec{p}}$ . Seja

$$\vec{w}_{\vec{p}} = \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} \vec{u}_{\vec{p}} - \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} \vec{v}_{\vec{p}}.$$

Como  $\langle \vec{w}_{\vec{p}}, \vec{w}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} \geq 0$  segue que

$$\begin{aligned} \langle \vec{w}_{\vec{p}}, \vec{w}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} &= \langle \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} \vec{u}_{\vec{p}} - \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} \vec{v}_{\vec{p}}, \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} \vec{u}_{\vec{p}} - \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} \\ &= \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}^2 \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} - 2 \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}^2 + \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}^2 \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} \\ &= \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}^2 \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} - \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Como  $\vec{0}_{\vec{p}} \neq \vec{v}_{\vec{p}} \Rightarrow \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} > 0$ , é possível simplificar a última inequação tornando-a

$$\langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} - \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}^2 \geq 0. \quad (2.2)$$

A igualdade em (2.2) ocorre se, e somente se,  $\langle \vec{w}_{\vec{p}}, \vec{w}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = 0$ , ou seja, se  $\vec{w}_{\vec{p}} = \vec{0}_{\vec{p}}$ , o que implica  $\vec{u}_{\vec{p}} = -\frac{\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}}{\langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}} \vec{v}_{\vec{p}}$ ; desta forma,  $\{\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\}$  é um conjunto *LD*.  $\square$

A *desigualdade de Cauchy-Schwarz* pode ser enunciada de forma equivalente à apresentada no enunciado do Lema 2.1.27 como segue:

$$|\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})}| \leq \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})} \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})}. \quad (2.3)$$

**Demonstração da Proposição 2.1.26.** Os três axiomas da Definição 2.1.23 devem ser verificados. Sejam  $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  e  $c \in \mathbb{R}$ .

1.  $\|\vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}^2 = \langle \vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} + 2\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} + \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}$ . Pela *desigualdade de Cauchy-Schwarz* vem que

$$2\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} \leq 2|\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}| \leq 2\|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}};$$

assim,

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}^2 &= \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}^2 + 2\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} + \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}^2 \\ &\leq \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}^2 + 2\|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} + \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}^2 \\ &= (\|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} + \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}})^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|\vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} \leq \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} + \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}; \end{aligned}$$

$$2. \|c\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} = \sqrt{\langle c\vec{v}_{\vec{p}}, c\vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}} = \sqrt{c^2 \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}} = |c| \sqrt{\langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}} = |c| \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}};$$

$$3. \vec{v}_{\vec{p}} \neq \vec{0}_{\vec{p}} \Rightarrow \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} > 0 \Rightarrow \sqrt{\langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}} = \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} > 0. \quad \square$$

**Exemplo 2.1.28. (Norma do Máximo.)** A aplicação

$$T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \ni \vec{u}_{\vec{p}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\vec{p}} \mapsto \|\vec{u}_{\vec{p}}\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} \in \mathbb{R}$$

é uma norma de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  e **não é definida** por um produto interno.

Supondo que esta norma seja definida por um produto interno qualquer seria da forma  $\|\vec{u}_{\vec{p}}\| = \sqrt{\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle}$  e ocorreria:

$$\begin{cases} \|\vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}}\|^2 = \langle \vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}} \rangle = \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle + 2\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle + \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle \\ \|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}\|^2 = \langle \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}} \rangle = \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle - 2\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle + \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}}\|^2 + \|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}\|^2 = 2(\|\vec{u}_{\vec{p}}\|^2 + \|\vec{v}_{\vec{p}}\|^2).$$

Para  $\vec{p} = \vec{0}$  e  $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$  ocorre

$$\|\vec{e}_1 + \vec{e}_2\|^2 + \|\vec{e}_1 - \vec{e}_2\|^2 = 1 + 1 = 2$$

enquanto que

$$2(\|\vec{e}_1\|^2 + \|\vec{e}_2\|^2) = 2(1 + 1) = 4.$$

A aplicação  $\| \cdot \|_C$  estabelecida na Definição 2.1.25 é um caso particular da norma generalizada definida na Proposição 2.1.26. Portanto,  $\| \cdot \|_C$  satisfaz os três axiomas da Definição 2.1.23.

**Definição 2.1.29.** *Sejam  $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{u}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  e  $\mathcal{A}(\vec{p})$  uma métrica definida neste espaço tangente. Diz-se que  $\vec{u}_{\vec{p}}$  é **unitário segundo a métrica  $\mathcal{A}(\vec{p})$**  se  $\|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})} = 1$ . Tomando quadrados nesta equação tem-se uma definição equivalente:  $\vec{u}_{\vec{p}}$  é unitário se, e somente se,  $1 = \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})}^2 = \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})}$ .*

**Proposição 2.1.30.** *Com qualquer métrica  $\mathcal{A}(\vec{p})$  definida em  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  e qualquer vetor  $\vec{u}_{\vec{p}}$  não-nulo deste espaço tangente,  $\vec{v}_{\vec{p}} = \frac{\vec{u}_{\vec{p}}}{\|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})}}$  é unitário.*

**Demonstração.**  $\|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})} = \left\| \frac{1}{\|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})}} \vec{u}_{\vec{p}} \right\|_{\mathcal{A}(\vec{p})} = \frac{1}{\|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})}} \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})} = 1. \quad \square$

**Definição 2.1.31.** *Nas hipóteses da Proposição 2.1.30, o vetor estabelecido por  $\vec{v}_{\vec{p}} = \frac{1}{\|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})}} \vec{u}_{\vec{p}}$  é chamado de **versor de  $\vec{u}_{\vec{p}}$  segundo a métrica  $\mathcal{A}(\vec{p})$** .*

**Exemplo 2.1.32.** *Considerar o produto interno do Exemplo 2.1.17 definido em todo  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^3)$ . Para  $\vec{p} = \vec{0}$ , o vetor  $\vec{u} = (1, -1, 0)$  é tal que  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_{\mathcal{A}} = 1$ , ou seja, é unitário. Notar que na métrica euclidiana isso não ocorre, pois  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_C = 2$ .*

*Na mesma métrica  $\mathcal{A}$ , o vetor  $\vec{v} = (1, -1, 3)$  tem norma  $\sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_{\mathcal{A}}} = \sqrt{19}$ . Assim,  $\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|_{\mathcal{A}}} \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{19}}(1, -1, 3)$  é o versor de  $\vec{v}$  segundo a métrica  $\mathcal{A}$ . Segundo a métrica euclidiana esse versor seria  $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, -1, 3)$ .*

**Observação 2.1.33.** *Conforme a Propriedade (3) da definição de vetor tangente (Definição 1.4.1) os vetores  $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  fazem  $\vec{u}_{\vec{p}} \pm \vec{v}_{\vec{p}} = (\vec{u} \pm \vec{v})_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ . Como  $\vec{u} \pm \vec{v} \in \llbracket \vec{u}, \vec{v} \rrbracket$  e  $\llbracket \vec{u}, \vec{v} \rrbracket$  é um plano, o vetor  $(\vec{u} \pm \vec{v})_{\vec{p}}$  é coplanar (ou LD) aos vetores  $\vec{u}_{\vec{p}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}}$ . Esta observação é usada na proposição seguinte.*

**Proposição 2.1.34.** *Sejam  $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{u}_{\vec{p}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}}$  elementos de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  e  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  uma métrica definida neste espaço tangente. Então  $\vec{u}_{\vec{p}} \perp \vec{v}_{\vec{p}}$ , **segundo a métrica  $\mathcal{A}(\vec{p})$** , se, e apenas se,  $\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} = 0$ .*

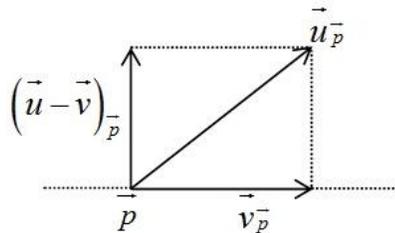


Figura 2.3: perpendicularismo entre vetores tangente

**Demonstração.** Os vetores  $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}$  e  $\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}$  são coplanares. No triângulo de lados que são estes vetores ( $\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}$  aplicado ao ponto  $\vec{p} + \vec{v}$  – Figura 2.3),

é possível aplicar o *Teorema de Pitágoras* para se ter uma condição necessária e suficiente do perpendicularismo destes dois vetores:

$$\vec{u}_{\vec{p}} \perp \vec{v}_{\vec{p}} \Leftrightarrow \|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})}^2 = \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})}^2 + \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})}^2.$$

Explorando as propriedades do produto interno vem que:

$$\|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})}^2 = \langle \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} = \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})}^2 + \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})}^2 - 2 \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})}.$$

Então

$$\|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})}^2 = \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})}^2 + \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})}^2 \Leftrightarrow -2 \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} = 0$$

donde segue a tese.  $\square$

**Exemplo 2.1.35.** *O perpendicularismo entre dois vetores  $\vec{u}_{\vec{p}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}}$  depende da métrica adotada para  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ .*

Os vetores

$$\vec{u} = (x, y) \quad e \quad \vec{v} = (-y, x)$$

de  $T_{\vec{0}}(\mathbb{R}^2)$  são vetores perpendiculares segundo a métrica canônica:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_C = -xy + xy = 0.$$

Para uma métrica qualquer deste espaço tangente isso nem sempre ocorre, pois

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathcal{A}} &= [x \ y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} [-y \ x]^T \\ &= (c - a)xy + b(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

que só é nulo em casos especiais, tais como  $a = c$  e  $b = 0$  ou  $x = y$  e  $a = c$ .

Vetores deste espaço tangente da forma  $\vec{u} = (x, 0)$  e  $\vec{v} = (0, y)$  são perpendiculares segundo qualquer métrica que tenha  $b(\vec{0}) = 0$ :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} = [x \ 0] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} [0 \ y]^T = bxy.$$

Este é o caso da métrica canônica e da métrica  $\mathcal{A}$  definida no Exemplo 1.2.3.

Apenas para ilustrar,  $\vec{u} = (2, 1)$  e  $\vec{v} = (-1, 2)$  são perpendiculares segundo a métrica canônica, mas

$$\langle (2, 1), (-1, 2) \rangle_{\mathcal{A}} = [2 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} [-1 \ 2]^T = 2.$$

**Lema 2.1.36.** *Seja  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  matriz de um produto interno definido em  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $n = 2$  ou  $n = 3$ . Dado um vetor não-nulo  $\vec{u}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ , existe uma direção em  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  perpendicular ao vetor  $\vec{u}_{\vec{p}}$ .*

**Demonstração.** Inicialmente para  $n = 2$ . Pondo  $\vec{u}_{\vec{p}} = (x_1, y_1)$  e

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a(\vec{p}) & b(\vec{p}) \\ b(\vec{p}) & c(\vec{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

tem-se o produto interno de  $\vec{u}_{\vec{p}}$  com um vetor  $\vec{v}_{\vec{p}} = (x_2, y_2)$  dado por

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \end{bmatrix}^{\text{T}} \\ &= ax_1x_2 + b(y_1x_2 + x_1y_2) + cy_1y_2. \end{aligned}$$

Se for possível obter  $x_2, y_2 \in \mathbb{R}$  de modo que  $\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = 0$ , terá sido encontrada a direção perpendicular a  $\vec{u}_{\vec{p}}$  como a direção de  $\vec{v}_{\vec{p}}$ .

$$0 = ax_1x_2 + b(y_1x_2 + x_1y_2) + cy_1y_2 = x_2(ax_1 + by_1) + y_2(bx_1 + cy_1).$$

Devido ao Exemplo 2.1.16 é possível supor que uma das duas desigualdades seguintes é válida:  $ax_1 + by_1 \neq 0$  ou  $bx_1 + cy_1 \neq 0$ . Supor  $bx_1 + cy_1 \neq 0$  permite escrever  $y_2$  como variável dependente de  $x_2$ :

$$y_2 = -x_2 \frac{ax_1 + by_1}{bx_1 + cy_1}.$$

Variando  $x_2$  em  $\mathbb{R}$  obtém-se o respectivo  $y_2$  e  $\vec{u}_{\vec{p}} \perp \vec{v}_{\vec{p}}$ . Supor  $ax_1 + by_1 \neq 0$  permite escrever  $x_2$  em função de  $y_2$ .

Para  $n = 3$  o processo pode ser repetido e são obtidas duas variáveis independentes.

A matriz de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a(\vec{p}) & b(\vec{p}) & c(\vec{p}) \\ b(\vec{p}) & d(\vec{p}) & e(\vec{p}) \\ c(\vec{p}) & e(\vec{p}) & f(\vec{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

induz o produto interno de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^3)$  de  $\vec{u}_{\vec{p}} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v}_{\vec{p}} = (x_2, y_2, z_2)$  dado por

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = x_2(ax_1 + by_1 + cz_1) + y_2(bx_1 + dy_1 + ez_1) + z_2(cx_1 + ey_1 + fz_1). \quad (2.4)$$

Pelo exemplo supracitado, é possível admitir que ao menos um dentre os coeficientes de  $x_2, y_2$  ou  $z_2$  em (2.4) é não-nulo.

Equiparando esta última equação a 0 e supondo  $cx_1 + ey_1 + fz_1 \neq 0$  tem-se

$$z_2 = \frac{x_2(ax_1 + by_1 + cz_1) + y_2(bx_1 + dy_1 + ez_1)}{cx_1 + ey_1 + fz_1}.$$

Variando  $x_2$  e  $y_2$  em  $\mathbb{R}$  obtém-se  $z_2$  como função destes e a direção dada por  $\vec{v}_{\vec{p}}$  é perpendicular a  $\vec{u}_{\vec{p}}$ .  $\square$

**Lema 2.1.37.** *Dados quaisquer vetores LI e não perpendiculares  $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  e uma métrica qualquer  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  definida neste espaço tangente, existe uma direção perpendicular a  $\vec{u}_{\vec{p}}$  no plano gerado por  $\vec{u}_{\vec{p}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}}$  (que é o plano de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em  $\vec{p}$ ).*

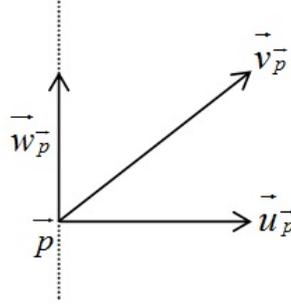


Figura 2.4: construção da direção perpendicular

**Demonstração.** Seja  $\vec{w}_{\vec{p}} = r\vec{u}_{\vec{p}} + s\vec{v}_{\vec{p}} \in \llbracket \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rrbracket$ ; por isso  $\vec{w}_{\vec{p}}$  está no plano de  $\vec{u}_{\vec{p}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}}$  em  $\vec{p}$ . Conforme Proposição 2.1.34 deve ser verificado que

$$0 = \langle \vec{w}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = \langle r\vec{u}_{\vec{p}} + s\vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = r \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} + s \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}.$$

Como  $\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} \neq 0$  e  $\|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} > 0$  é possível colocar  $r = \frac{1}{\|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}^2}$  e  $s = \frac{-1}{\langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}}$ . Desta forma,

$$\langle \vec{w}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = \frac{1}{\|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}^2} \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} + \frac{-1}{\langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}} \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = 0.$$

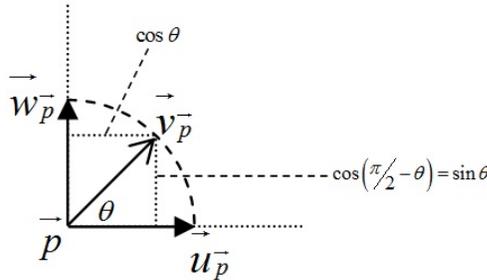
A direção procurada é dada por  $\vec{w}_{\vec{p}}$ . □

**Proposição 2.1.38.** *Sejam  $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\vec{0}_{\vec{p}}\}$ ,  $\theta = \angle(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}})$  e  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  uma métrica desse espaço tangente. Então*

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} = \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})} \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})} \cos \theta.$$

**Demonstração.** É feita em três etapas.

1. Supondo  $\vec{u}_{\vec{p}} \perp \vec{v}_{\vec{p}}$ ; pela Proposição 2.1.34 é sabido que  $\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = 0$ ; o fato de  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  corrobora com a tese;

Figura 2.5:  $\vec{u}_{\vec{p}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}}$  são unitários

2. É suposto que os vetores são unitários e não perpendiculares, ou seja,  $\frac{\pi}{2} \neq \theta \neq \frac{3\pi}{2}$ . Seja  $\vec{w}_{\vec{p}}$  um versor tomado como no Lema 2.1.37. Então  $\vec{v}_{\vec{p}}$ ,  $\vec{u}_{\vec{p}}$  e  $\vec{w}_{\vec{p}}$  são coplanares (ou, *LD*) e os dois últimos geram o primeiro; por serem unitários, existe um ângulo  $\theta$  tal que  $\vec{v}_{\vec{p}} = \cos \theta \vec{u}_{\vec{p}} + \sin \theta \vec{w}_{\vec{p}}$ . Então

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} &= \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \cos \theta \vec{u}_{\vec{p}} + \sin \theta \vec{w}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} \\ &= \cos \theta \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} + \sin \theta \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{w}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} \\ &= \cos \theta; \end{aligned}$$

3. É suposto que  $\frac{\pi}{2} \neq \theta \neq \frac{3\pi}{2}$  e  $\vec{u}_{\vec{p}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}}$  não necessariamente são unitários. Sejam  $\vec{w}_{\vec{p}}$  e  $\vec{z}_{\vec{p}}$  os versores, nesta mesma ordem, segundo a métrica  $\mathcal{A}(\vec{p})$ , de  $\vec{u}_{\vec{p}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}}$ . Disso vem que  $\vec{u}_{\vec{p}} = \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} \vec{w}_{\vec{p}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}} = \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} \vec{z}_{\vec{p}}$ . Com isso,

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} &= \langle \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} \vec{w}_{\vec{p}}, \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} \vec{z}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} \\ &= \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} \langle \vec{w}_{\vec{p}}, \vec{z}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Mas, como calculado no caso (2),  $\langle \vec{w}_{\vec{p}}, \vec{z}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = \cos \theta$ , e assim

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} \cos \theta.$$

□

**Proposição 2.1.39.** *Sob as hipóteses da Proposição 2.1.38, a função definida por*

$$T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \times T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \setminus \{(\vec{0}_{\vec{p}}, \vec{0}_{\vec{p}})\} \ni (\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) \mapsto \cos \angle(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) \Big|_{\mathcal{A}} = \frac{\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}}{\|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}} \in \mathbb{R}$$

*mede o cosseno do ângulo entre estes vetores e é chamada de o cosseno do ângulo entre  $\vec{u}_{\vec{p}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}}$  segundo a métrica  $\mathcal{A}(\vec{p})$ .*

**Demonstração.** Conseqüência direta do resultado precedente. □

**Definição 2.1.40.** *Sejam  $\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\vec{v}_{\vec{p}}$  unitário e  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  uma métrica definida neste espaço tangente. A **projeção ortogonal de  $\vec{u}_{\vec{p}}$  sobre a reta de  $\vec{v}_{\vec{p}}$  segundo a métrica  $\mathcal{A}(\vec{p})$**  é denotada por*

$$\text{proj}_{\vec{v}_{\vec{p}}} \vec{u}_{\vec{p}} \Big|_{\mathcal{A}(\vec{p})}$$

*e definida como sendo o vetor que faz o cateto sobre a reta de  $\vec{v}_{\vec{p}}$  do triângulo retângulo de hipotenusa  $\vec{u}_{\vec{p}}$ , caso estes vetores sejam *LI*, ou como o próprio vetor  $\vec{u}_{\vec{p}}$ , caso estes sejam *LD*.*



conforme desejado.

Supondo que  $\vec{u}_{\vec{p}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}}$  são  $LD$ , então  $\vec{u}_{\vec{p}} = r\vec{v}_{\vec{p}}$  onde  $r \in \mathbb{R}$ . Pela fórmula já obtida,

$$\text{proj}_{\vec{v}_{\vec{p}}} \vec{u}_{\vec{p}}|_{\mathcal{A}(\vec{p})} = \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} \vec{v}_{\vec{p}} = r \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} \vec{v}_{\vec{p}} = r\vec{v}_{\vec{p}} = \vec{u}_{\vec{p}},$$

conforme fora definido.  $\square$

**Definição 2.1.42.** *Uma aplicação*

$$T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \times T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \ni (\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) \mapsto d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) \in \mathbb{R}$$

tal que,  $\forall \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ , cumpre os seguintes axiomas (ou propriedades):

1.  $d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}}) = 0$ ;
2. (**positividade**)  $\vec{u}_{\vec{p}} \neq \vec{v}_{\vec{p}} \Rightarrow d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) > 0$ ;
3. (**simetria**)  $d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) = d(\vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}})$ ;
4. (**desigualdade triangular**)  $d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{w}_{\vec{p}}) \leq d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) + d(\vec{v}_{\vec{p}}, \vec{w}_{\vec{p}})$ ,

é chamada **função distância segundo a norma de  $\mathcal{A}(\vec{p})$**  do espaço tangente  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  (ou, simplesmente, **função distância de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$** ).

**Proposição 2.1.43.** *Seja  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  uma métrica definida no espaço tangente  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ . A aplicação*

$$T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \times T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \ni (\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) \mapsto d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}})_{\mathcal{A}(\vec{p})} = \|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})} \in \mathbb{R}$$

satisfaz a Definição 2.1.42 e é definida como **função distância de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  segundo a métrica  $\mathcal{A}(\vec{p})$** .

**Demonstração.**

1. Como  $\vec{0}_{\vec{p}} = 0 \cdot \vec{0}_{\vec{p}}$ , segue do segundo axioma da Definição 2.1.23 que  $\|0 \cdot \vec{0}_{\vec{p}}\| = |0| \cdot \|\vec{0}_{\vec{p}}\| = 0$ ; assim,  $d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}})_{\mathcal{A}} = \|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} = \|\vec{0}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} = 0$ ;
2.  $\vec{u}_{\vec{p}} \neq \vec{v}_{\vec{p}} \Rightarrow \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}} \neq \vec{0}_{\vec{p}} \Rightarrow \langle \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} > 0$ , então  $d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}})_{\mathcal{A}} = \sqrt{\langle \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}} > 0$ ;
3.  $\langle \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} = \langle -(\vec{v}_{\vec{p}} - \vec{u}_{\vec{p}}), -(\vec{v}_{\vec{p}} - \vec{u}_{\vec{p}}) \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \vec{v}_{\vec{p}} - \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} - \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}} \Rightarrow \Rightarrow \sqrt{\langle \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}} = \sqrt{\langle \vec{v}_{\vec{p}} - \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} - \vec{u}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}}} \Rightarrow d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}})_{\mathcal{A}} = d(\vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}})_{\mathcal{A}}$ ;
4. Aplicando a desigualdade triangular da norma,  $d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{w}_{\vec{p}})_{\mathcal{A}} = \|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{w}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} = \|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}} - \vec{w}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} \leq \|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} + \|\vec{v}_{\vec{p}} - \vec{w}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}} = d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}})_{\mathcal{A}} + d(\vec{v}_{\vec{p}}, \vec{w}_{\vec{p}})_{\mathcal{A}}$ .  $\square$

Na página 32 foi observado que toda métrica define uma norma, mas não vale a recíproca. Convém observar que toda norma define uma função distância, como foi mostrado, mas nem toda função distância é originada de uma norma.

**Exemplo 2.1.44.** *Seja*

$$T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \times T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \ni (\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) \mapsto d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) \in \mathbb{R}$$

dada por

$$d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{u}_{\vec{p}} = \vec{v}_{\vec{p}} \\ 1 & \text{se } \vec{u}_{\vec{p}} \neq \vec{v}_{\vec{p}} \end{cases} .$$

*Esta é uma função distância de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  mas não é definida segundo uma norma deste espaço tangente.*

*Supondo o contrário, que  $d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) = \|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}\|$ , para alguma norma  $\|\cdot\|$  de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ , ocorreria o que segue:*

$$\begin{cases} d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}})^2 = \langle \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}} \rangle = \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle - 2\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle + \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle \\ d(\vec{u}_{\vec{p}}, -\vec{v}_{\vec{p}})^2 = \langle \vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}} \rangle = \langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \rangle + 2\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle + \langle \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}})^2 + d(\vec{u}_{\vec{p}}, -\vec{v}_{\vec{p}})^2 = 2(\|\vec{u}_{\vec{p}}\|^2 + \|\vec{v}_{\vec{p}}\|^2).$$

*Tomando  $\vec{u}_{\vec{p}} = \vec{v}_{\vec{p}} \neq \vec{0}_{\vec{p}} \Rightarrow d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}})^2 + d(\vec{u}_{\vec{p}}, -\vec{v}_{\vec{p}})^2 = 1 = 4\|\vec{u}_{\vec{p}}\|^2$ , que é um contra-senso caso  $\vec{u}_{\vec{p}}$  não tenha tamanho igual a  $\frac{1}{2}$  segundo esta norma.*

**Exemplo 2.1.45.** *A métrica euclidiana, definida no Exemplo 2.1.20, define a **função distância euclidiana** ou **canônica**, dada como segue, sendo  $\vec{u}_{\vec{p}} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v}_{\vec{p}} = (x_2, y_2, z_2)$ :*

$$\begin{aligned} d(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}})_C &= \|\vec{u}_{\vec{p}} - \vec{v}_{\vec{p}}\|_C \\ &= \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)\|_C \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} . \end{aligned}$$

## 2.2 Generalização do Produto Vetorial

**Definição 2.2.1.** *Seja  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  uma métrica definida em  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^3)$ . Defina-se o **produto vetorial** de  $\vec{u}_{\vec{p}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}}$ , nesta ordem, **segundo a métrica**  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  como a imagem da aplicação*

$$T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^3) \times T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^3) \ni (\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) \mapsto \vec{u}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{v}_{\vec{p}} \in T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^3)$$

que satisfaz três condições (ou axiomas):

1.  $\|\vec{u}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})}$  é a área do paralelogramo construído sobre  $\vec{u}_{\vec{p}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}}$ ;
2.  $\vec{u}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{v}_{\vec{p}} \perp \vec{u}_{\vec{p}}$  e  $\vec{u}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{v}_{\vec{p}} \perp \vec{v}_{\vec{p}}$ ;
3.  $\{\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{v}_{\vec{p}}\}$  é uma base de orientação positiva.

**Lema 2.2.2.** *Mantidas as suposições da última definição, valem as seguintes afirmativas:*

1.  $\|\vec{u}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})} = \|\vec{u}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})} \|\vec{v}_{\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})} \sin \theta|_{\mathcal{A}(\vec{p})}$  onde  $\theta = \angle(\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}) \in [0, \pi]$  e  $\sin \theta|_{\mathcal{A}(\vec{p})}$  é medido em termos da métrica  $\mathcal{A}(\vec{p})$ ;
2.  $\{\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}\}$  é LD se, e apenas se,  $\vec{u}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{v}_{\vec{p}} = \vec{0}_{\vec{p}}$ ;
3. **anticomutatividade em relação aos vetores:**  $\vec{u}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{v}_{\vec{p}} = -\vec{v}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{u}_{\vec{p}}$ ;
4. **associatividade em relação ao escalar:**  $(a\vec{u}_{\vec{p}}) \underset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{v}_{\vec{p}} = a(\vec{u}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{v}_{\vec{p}}) = \vec{u}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\wedge} (a\vec{v}_{\vec{p}})$ , onde  $a \in \mathbb{R}$ .
5. **distributividade em relação à adição:**

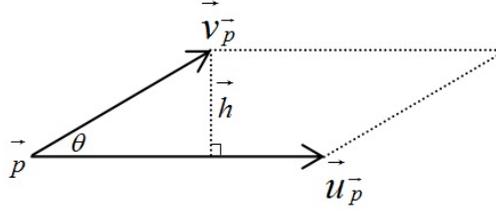
$$\vec{u}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\wedge} (\vec{v}_{\vec{p}} + \vec{w}_{\vec{p}}) = \vec{u}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{v}_{\vec{p}} + \vec{u}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{w}_{\vec{p}} \quad (2.5)$$

e

$$(\vec{u}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}}) \underset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{w}_{\vec{p}} = \vec{u}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{w}_{\vec{p}} + \vec{v}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{w}_{\vec{p}}. \quad (2.6)$$

**Demonstração.**

1. Prova análoga à do Item 183, Capítulo X de [6], ou facilmente visualizada pela Figura 2.8;

Figura 2.8: área do paralelogramo dos vetores  $\vec{u}_p$  e  $\vec{v}_p$ 

2. Prova análoga à do Item 183, Capítulo X de [6];
3. Se  $\{\vec{u}_p, \vec{v}_p\}$  é *LD*, então  $\vec{u}_p \wedge \vec{v}_p = \vec{0}_p = \vec{v}_p \wedge \vec{u}_p$ . Se  $\{\vec{u}_p, \vec{v}_p\}$  é *LI*, então  $\|\vec{u}_p \wedge \vec{v}_p\|_{\mathcal{A}(p)} = \|\pm \vec{v}_p \wedge \vec{u}_p\|_{\mathcal{A}(p)}$  e  $\vec{u}_p \wedge \vec{v}_p // \pm \vec{v}_p \wedge \vec{u}_p$ . Resta decidir se este sinal é + ou -. A base ordenada  $\mathfrak{B} = \{\vec{u}_p, \vec{v}_p, \vec{u}_p \wedge \vec{v}_p\}$  é positiva, logo  $\det M_{\mathfrak{B}, \mathcal{C}} > 0$  onde  $\mathcal{C}$  é a base canônica de  $T_p(\mathbb{R}^3)$ . Tomando  $\mathfrak{B}_1 = \{\vec{v}_p, \vec{u}_p, \vec{u}_p \wedge \vec{v}_p\}$  tem-se uma base negativa porque  $M_{\mathfrak{B}_1, \mathcal{C}}$  tem duas colunas de  $M_{\mathfrak{B}, \mathcal{C}}$  trocadas e, segundo a Proposição 1.1.8,  $\det M_{\mathfrak{B}_1, \mathcal{C}} < 0$ . Supondo que  $\vec{u}_p \wedge \vec{v}_p = \vec{v}_p \wedge \vec{u}_p$  a base  $\mathfrak{B}_2 = \{\vec{v}_p, \vec{u}_p, \vec{v}_p \wedge \vec{u}_p\}$  continua negativa, pois é igual à base  $\mathfrak{B}_1$ , e assim contrariaria a definição do produto vetorial; então  $\vec{u}_p \wedge \vec{v}_p = -\vec{v}_p \wedge \vec{u}_p$ , pois a base  $\mathfrak{B}_3 = \{\vec{v}_p, \vec{u}_p, -\vec{v}_p \wedge \vec{u}_p\}$  tem  $\det M_{\mathfrak{B}_3, \mathcal{C}} = -\det M_{\mathfrak{B}_1, \mathcal{C}} > 0$ , também segundo a proposição supracitada;
4. A igualdade  $(a\vec{u}_p) \wedge \vec{v}_p = a(\vec{u}_p \wedge \vec{v}_p)$  é inicialmente demonstrada. Supor  $a = 0$  implica  $(a\vec{u}_p) \wedge \vec{v}_p = \vec{0}_p = a(\vec{u}_p \wedge \vec{v}_p)$  independentemente de  $\{\vec{u}_p, \vec{v}_p\}$  ser *LI* ou *LD*. Supor  $\{\vec{u}_p, \vec{v}_p\}$  *LD* implica  $\{\vec{u}_p, \vec{v}_p\}$  ser *LD*; e assim  $(a\vec{u}_p) \wedge \vec{v}_p = \vec{0}_p = a(\vec{u}_p \wedge \vec{v}_p)$ . Supor  $\{\vec{u}_p, \vec{v}_p\}$  *LI* e  $a \neq 0$  tem-se as condicionantes abaixo: se  $a > 0$ , então  $\angle(\vec{u}_p, \vec{v}_p) = \angle(a\vec{u}_p, \vec{v}_p)$ ; se  $a < 0$ , então  $\angle(\vec{u}_p, \vec{v}_p) = \pi - \angle(a\vec{u}_p, \vec{v}_p)$ ; de ambas situações vem que  $\sin \angle(\vec{u}_p, \vec{v}_p) = \sin \angle(a\vec{u}_p, \vec{v}_p)$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 \|(a\vec{u}_p) \wedge \vec{v}_p\|_{\mathcal{A}(p)} &= \|a\vec{u}_p\|_{\mathcal{A}(p)} \|\vec{v}_p\|_{\mathcal{A}(p)} \sin \angle(a\vec{u}_p, \vec{v}_p) \\
 &= |a| \|\vec{u}_p\|_{\mathcal{A}(p)} \|\vec{v}_p\|_{\mathcal{A}(p)} \sin \angle(a\vec{u}_p, \vec{v}_p) \\
 &= |a| \|\vec{u}_p\|_{\mathcal{A}(p)} \|\vec{v}_p\|_{\mathcal{A}(p)} \sin \angle(\vec{u}_p, \vec{v}_p) \\
 &= \|a(\vec{u}_p \wedge \vec{v}_p)\|_{\mathcal{A}(p)}
 \end{aligned}$$

e  $a(\vec{u}_p \wedge \vec{v}_p)$  é perpendicular a  $\vec{u}_p$  e a  $\vec{v}_p$ , portanto o é a  $a\vec{u}_p$ ; e  $a(\vec{u}_p \wedge \vec{v}_p)$  e  $(a\vec{u}_p) \wedge \vec{v}_p$  têm mesma norma e são paralelos:

$$a(\vec{u}_p \wedge \vec{v}_p) = \pm (a\vec{u}_p) \wedge \vec{v}_p. \quad (2.7)$$

Sendo  $\mathfrak{B} = \{\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}, \vec{u}_{\vec{p}} \wedge_{\mathcal{A}} \vec{v}_{\vec{p}}\}$  base positiva, então  $\det M_{\mathfrak{B}, \mathcal{C}} > 0$ . A base  $\mathfrak{B}_1 = \{a\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}, a(\vec{u}_{\vec{p}} \wedge_{\mathcal{A}} \vec{v}_{\vec{p}})\}$  é tal que  $\det M_{\mathfrak{B}_1, \mathcal{C}} = a^2 \det M_{\mathfrak{B}, \mathcal{C}} > 0$  (conforme uma propriedade do determinante vista no Capítulo 1), ou seja, é positiva independentemente do sinal de  $a$ . A base  $\mathfrak{B}_2 = \{a\vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}}, (a\vec{u}_{\vec{p}}) \wedge_{\mathcal{A}} \vec{v}_{\vec{p}}\}$  é, por definição, positiva, logo, de (2.7) deduz-se que  $a(\vec{u}_{\vec{p}} \wedge_{\mathcal{A}} \vec{v}_{\vec{p}}) = (a\vec{u}_{\vec{p}}) \wedge_{\mathcal{A}} \vec{v}_{\vec{p}}$  (do contrário  $\mathfrak{B}_2$  seria negativa), quer seja  $a > 0$  ou  $a < 0$ .

Prova da igualdade  $a(\vec{u}_{\vec{p}} \wedge_{\mathcal{A}} \vec{v}_{\vec{p}}) = \vec{u}_{\vec{p}} \wedge_{\mathcal{A}} (a\vec{v}_{\vec{p}})$ .

Pela Propriedade (3) vem que  $\vec{u}_{\vec{p}} \wedge_{\mathcal{A}} (a\vec{v}_{\vec{p}}) = -(a\vec{v}_{\vec{p}}) \wedge_{\mathcal{A}} \vec{u}_{\vec{p}}$  e  $a(\vec{u}_{\vec{p}} \wedge_{\mathcal{A}} \vec{v}_{\vec{p}}) = -a(\vec{v}_{\vec{p}} \wedge_{\mathcal{A}} \vec{u}_{\vec{p}})$ .

Pela primeira parte da prova vem que  $-a(\vec{v}_{\vec{p}} \wedge_{\mathcal{A}} \vec{u}_{\vec{p}}) = -(a\vec{v}_{\vec{p}}) \wedge_{\mathcal{A}} \vec{u}_{\vec{p}} = \vec{u}_{\vec{p}} \wedge_{\mathcal{A}} (a\vec{v}_{\vec{p}})$ . Portanto  $a(\vec{u}_{\vec{p}} \wedge_{\mathcal{A}} \vec{v}_{\vec{p}}) = \vec{u}_{\vec{p}} \wedge_{\mathcal{A}} (a\vec{v}_{\vec{p}})$ , conforme acordado;

5. Pode ser adaptada sem dificuldades para uma métrica geral a partir do Item 185, Capítulo X de [6].  $\square$

**Proposição 2.2.3. (Sobre o cálculo do produto vetorial).**

1. Sejam  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  uma métrica de  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_{1\vec{p}}, \vec{b}_{2\vec{p}}, \vec{b}_{3\vec{p}}\}$  uma base ordenada deste espaço, **ortogonal** segundo  $\mathcal{A}(\vec{p})$  (vide Proposição 2.1.21) e de **orientação positiva** (vide Observação 1.1.13),  $\vec{u}_{\vec{p}}^{\mathfrak{B}} = (x_1, y_1, z_1)^{\mathfrak{B}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}}^{\mathfrak{B}} = (x_2, y_2, z_2)^{\mathfrak{B}}$ . Então o produto vetorial de  $\vec{u}_{\vec{p}}^{\mathfrak{B}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}}^{\mathfrak{B}}$  é escrito em termos da base  $\mathfrak{B}$  como segue:

$$\vec{u}_{\vec{p}}^{\mathfrak{B}} \wedge_{\mathcal{A}} \vec{v}_{\vec{p}}^{\mathfrak{B}} = \sum_{1 \leq k \leq 3} D_k S_{ij} \vec{e}_{k\vec{p}} = \left( \frac{D_1 S_{23}}{\|\vec{b}_{1\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}}, \frac{D_2 S_{13}}{\|\vec{b}_{2\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}}, \frac{D_3 S_{12}}{\|\vec{b}_{3\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}} \right)^{\mathfrak{B}}$$

onde  $i < j$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $j \in \{2, 3\}$  e  $i \neq k \neq j$ ,  $\vec{e}_{k\vec{p}}$  é o versor de  $\vec{b}_{k\vec{p}}$  segundo a métrica dada (ver Definição 2.1.31),

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{bmatrix}, D_2 = -\det \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix}, D_3 = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$$

e  $S_{ij}$  é a área do paralelogramo construído sobre  $\vec{b}_{i\vec{p}}$  e  $\vec{b}_{j\vec{p}}$ ;

2. Se nas hipóteses do Item (1) for adicionado que  $\mathfrak{B}$  é **ON** segundo  $\mathcal{A}(\vec{p})$ , então

$$\vec{u}_{\vec{p}}^{\mathfrak{B}} \wedge_{\mathcal{A}} \vec{v}_{\vec{p}}^{\mathfrak{B}} = \sum_{1 \leq k \leq 3} D_k \vec{b}_{k\vec{p}} = (D_1, D_2, D_3)^{\mathfrak{B}}.$$

Devido a este resultado vê-se que o produto vetorial, que vinha sendo denotado por  $\vec{u}_{\vec{p}} \wedge_{\mathcal{A}} \vec{v}_{\vec{p}}$ , depende não só da métrica  $\mathcal{A}(\vec{p})$ , mas também da base  $\mathfrak{B}$  na qual se expressa os vetores  $\vec{u}_{\vec{p}}$  e  $\vec{v}_{\vec{p}}$ . Por esta razão passa a ser simbolizado por  $\vec{u}_{\vec{p}}^{\mathfrak{B}} \wedge_{\mathcal{A}} \vec{v}_{\vec{p}}^{\mathfrak{B}}$  para enfatizar que é calculado em termos desta base.

**Demonstração da Proposição.**

1. Inicialmente é estabelecido o produto vetorial dos vetores de  $\mathfrak{B}$ .  
Segundo a Propriedade (2) do Lema 2.2.2:

$$\vec{b}_{i\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{i\bar{p}} = \vec{0}_{\bar{p}}.$$

O vetor resultante de

$$\vec{b}_{i\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{j\bar{p}}$$

deve satisfazer a Definição 2.2.1. Para que  $\vec{b}_{i\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{j\bar{p}} \perp \vec{b}_{i\bar{p}}$  e  $\vec{b}_{i\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{j\bar{p}} \perp \vec{b}_{j\bar{p}}$  toma-se

$$\vec{b}_{i\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{j\bar{p}} // \vec{b}_{k\bar{p}},$$

pois a base, por ser ortogonal, tem cada um de seus vetores perpendiculares aos outros dois. Com  $e_{k\bar{p}} = \frac{\vec{b}_{k\bar{p}}}{\|\vec{b}_{k\bar{p}}\|_{\mathcal{A}}}$ , para que  $\|\vec{b}_{i\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{j\bar{p}}\|_{\mathcal{A}} = S_{ij}$  toma-se

$$\vec{b}_{i\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{j\bar{p}} = \pm S_{ij} e_{k\bar{p}} \quad \text{ou} \quad \vec{b}_{i\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{j\bar{p}} = \pm \frac{S_{ij}}{\|\vec{b}_{k\bar{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{k\bar{p}}.$$

O sinal + ou - é escolhido de modo que a base  $\mathfrak{B}_{ij} = \{\vec{b}_{i\bar{p}}, \vec{b}_{j\bar{p}}, \vec{b}_{i\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{j\bar{p}}\}$  seja positiva.

$$\vec{b}_{1\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{2\bar{p}} = \frac{S_{12}}{\|\vec{b}_{3\bar{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{3\bar{p}}, \quad \vec{b}_{1\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{3\bar{p}} = -\frac{S_{13}}{\|\vec{b}_{2\bar{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{2\bar{p}},$$

$$\vec{b}_{2\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{1\bar{p}} = -\frac{S_{21}}{\|\vec{b}_{3\bar{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{3\bar{p}}, \quad \vec{b}_{2\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{3\bar{p}} = \frac{S_{23}}{\|\vec{b}_{1\bar{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{1\bar{p}},$$

$$\vec{b}_{3\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{1\bar{p}} = \frac{S_{31}}{\|\vec{b}_{2\bar{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{2\bar{p}}, \quad \vec{b}_{3\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{2\bar{p}} = -\frac{S_{32}}{\|\vec{b}_{1\bar{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{1\bar{p}}.$$

Por exemplo, para  $\mathfrak{B}_{12} = \{\vec{b}_{1\bar{p}}, \vec{b}_{2\bar{p}}, \vec{b}_{1\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{2\bar{p}}\}$  toma-se  $\vec{b}_{1\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{2\bar{p}} = \frac{S_{12}}{\|\vec{b}_{3\bar{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{3\bar{p}}$ , pois

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{b}_{1\bar{p}} = 1\vec{b}_{1\bar{p}} \\ \vec{b}_{2\bar{p}} = 1\vec{b}_{2\bar{p}} \\ \vec{b}_{1\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{2\bar{p}} = \frac{S_{12}}{\|\vec{b}_{3\bar{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{3\bar{p}} \end{array} \right. \Rightarrow M_{\mathfrak{B}_{12}, \mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S_{12}}{\|\vec{b}_{3\bar{p}}\|_{\mathcal{A}}} \end{bmatrix}$$

é tal que  $\det M_{\mathfrak{B}_{12}, \mathfrak{B}} = \frac{S_{12}}{\|\vec{b}_{3\bar{p}}\|_{\mathcal{A}}} > 0$  implicando em  $\mathfrak{B}_{12}$  ser base positiva, pois  $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{B}$  por hipótese e  $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}_{12}$  implicando, conforme Proposição 1.1.10, em  $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{B}_{12}$ . Pela Propriedade (3) do lema precedente vem  $\vec{b}_{2\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{1\bar{p}} = -\vec{b}_{1\bar{p}} \mathfrak{B}_{\mathcal{A}} \vec{b}_{2\bar{p}} // -\vec{b}_{3\bar{p}}$ .

Analogamente se faz para os demais casos.  
Pelas Propriedades (5) e (4) vem

$$\begin{aligned}
\vec{u}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathfrak{B}}{\wedge}} \vec{v}_{\vec{p}} &= \left( x_1 \vec{b}_{1\vec{p}} + y_1 \vec{b}_{2\vec{p}} + z_1 \vec{b}_{3\vec{p}} \right) \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathfrak{B}}{\wedge}} \left( x_2 \vec{b}_{1\vec{p}} + y_2 \vec{b}_{2\vec{p}} + z_2 \vec{b}_{3\vec{p}} \right) \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathfrak{B}}{\wedge}} \\
&= x_1 x_2 \left( \vec{b}_{1\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathfrak{B}}{\wedge}} \vec{b}_{1\vec{p}} \right) + x_1 y_2 \left( \vec{b}_{1\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathfrak{B}}{\wedge}} \vec{b}_{2\vec{p}} \right) + x_1 z_2 \left( \vec{b}_{1\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathfrak{B}}{\wedge}} \vec{b}_{3\vec{p}} \right) + \\
&\quad y_1 x_2 \left( \vec{b}_{2\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathfrak{B}}{\wedge}} \vec{b}_{1\vec{p}} \right) + y_1 y_2 \left( \vec{b}_{2\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathfrak{B}}{\wedge}} \vec{b}_{2\vec{p}} \right) + y_1 z_2 \left( \vec{b}_{2\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathfrak{B}}{\wedge}} \vec{b}_{3\vec{p}} \right) + \\
&\quad z_1 x_2 \left( \vec{b}_{3\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathfrak{B}}{\wedge}} \vec{b}_{1\vec{p}} \right) + z_1 y_2 \left( \vec{b}_{3\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathfrak{B}}{\wedge}} \vec{b}_{2\vec{p}} \right) + z_1 z_2 \left( \vec{b}_{3\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathfrak{B}}{\wedge}} \vec{b}_{3\vec{p}} \right) \\
&= x_1 y_2 \frac{S_{12}}{\|\vec{b}_{3\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{3\vec{p}} - x_1 z_2 \frac{S_{13}}{\|\vec{b}_{2\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{2\vec{p}} - y_1 x_2 \frac{S_{21}}{\|\vec{b}_{3\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{3\vec{p}} + \\
&\quad y_1 z_2 \frac{S_{23}}{\|\vec{b}_{1\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{1\vec{p}} + z_1 x_2 \frac{S_{31}}{\|\vec{b}_{2\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{2\vec{p}} - z_1 y_2 \frac{S_{32}}{\|\vec{b}_{1\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{1\vec{p}}.
\end{aligned}$$

Neste ponto convém observar que, por se tratar de áreas, vale a igualdade  $S_{ij} = S_{ji}$ .  
Então, a última equação pode tornar-se

$$\begin{aligned}
\vec{u}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathfrak{B}}{\wedge}} \vec{v}_{\vec{p}} &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \frac{S_{23}}{\|\vec{b}_{1\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{1\vec{p}} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \frac{S_{13}}{\|\vec{b}_{2\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{2\vec{p}} + \\
&+ (x_1 y_2 - y_1 x_2) \frac{S_{12}}{\|\vec{b}_{3\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{3\vec{p}} = \sum_{1 \leq k \leq 3} \frac{D_k S_{ij}}{\|\vec{b}_{k\vec{p}}\|_{\mathcal{A}}} \vec{b}_{k\vec{p}} = \sum_{1 \leq k \leq 3} D_k S_{ij} \vec{e}_{k\vec{p}}
\end{aligned}$$

com as concernentes observações sobre os índices  $i$  e  $j$  feitas no enunciado.

2. Se  $\mathfrak{B}$  é  $ON$  segundo  $\mathcal{A}(\vec{p})$ , então  $\vec{e}_{k\vec{p}} = \vec{b}_{k\vec{p}}$  para todo  $k \in \{1, 2, 3\}$  além de  $\theta_{ij} = \angle(\vec{b}_{i\vec{p}}, \vec{b}_{j\vec{p}}) = \frac{\pi}{2}$ . Pelo Lema 2.2.2 Item (1) vem que

$$S_{ij} = \|\vec{b}_{i\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})} \|\vec{b}_{j\vec{p}}\|_{\mathcal{A}(\vec{p})} \sin \theta_{ij}|_{\mathcal{A}(\vec{p})} = 1.$$

Então

$$\vec{u}_{\vec{p}} \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathfrak{B}}{\wedge}} \vec{v}_{\vec{p}} = \sum_{1 \leq k \leq 3} D_k S_{ij} \vec{e}_{k\vec{p}} = \sum_{1 \leq k \leq 3} D_k \vec{b}_{k\vec{p}}.$$

□

**Observação 2.2.4.** *O resultado desta proposição independe da base adotada, mas a demonstração deste fato não é feita nesta monografia.*

**Observação 2.2.5.** *Convém perceber que a expressão final alcançada para o produto vetorial pode ser escrita como um determinante:*

1. Se a base é **ortogonal**

$$\vec{u}_{\mathcal{P}} \wedge_{\mathcal{A}} \vec{v}_{\mathcal{P}} = \det \begin{bmatrix} S_{23}\vec{e}_{1\mathcal{P}} & S_{13}\vec{e}_{2\mathcal{P}} & S_{12}\vec{e}_{3\mathcal{P}} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix};$$

2. Se a base é **ON**

$$\vec{u}_{\mathcal{P}} \wedge_{\mathcal{A}} \vec{v}_{\mathcal{P}} = \det \begin{bmatrix} \vec{b}_{1\mathcal{P}} & \vec{b}_{2\mathcal{P}} & \vec{b}_{3\mathcal{P}} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 2.2.6.** Este exemplo estuda um caso particular de métricas diagonais: **múltipla positiva da matriz identidade**. Sejam  $a > 0$  uma constante real e

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Conforme o Exemplo 2.1.22, a base canônica é ortogonal segundo o produto interno definido por  $\mathcal{A}$ . O produto interno e a norma induzidos por  $\mathcal{A}$  em  $\mathbb{R}^3$  são algebricamente dados por:

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle_{\mathcal{A}} = a(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$$

e

$$\|(x_1, y_1, z_1)\|_{\mathcal{A}} = \sqrt{a(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}.$$

As áreas de cada par de vetores de  $\mathfrak{C} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  são:

$$S_{12} = S_{13} = S_{23} = a$$

uma vez que

$$\|\vec{i}\|_{\mathcal{A}} = \|\vec{j}\|_{\mathcal{A}} = \|\vec{k}\|_{\mathcal{A}} = \sqrt{a}.$$

Os versores dos vetores de  $\mathfrak{C}$  segundo  $\mathcal{A}$  estão dispostos em

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}}\vec{i}, \frac{1}{\sqrt{a}}\vec{j}, \frac{1}{\sqrt{a}}\vec{k} \right\}.$$

Sejam  $\vec{u}^{\mathfrak{C}} = (x_1, y_1, z_1)^{\mathfrak{C}}$  e  $\vec{v}^{\mathfrak{C}} = (x_2, y_2, z_2)^{\mathfrak{C}}$  dois vetores quaisquer de  $\mathbb{R}^3$ . Então

$$\vec{u}^{\mathfrak{C}} \wedge_{\mathcal{A}} \vec{v}^{\mathfrak{C}} = \det \begin{bmatrix} \sqrt{a}\vec{i} & \sqrt{a}\vec{j} & \sqrt{a}\vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} = \sqrt{a}(D_1\vec{i} + D_2\vec{j} + D_3\vec{k}).$$

Tomando  $\vec{u} = (-\frac{1}{\sqrt{a}}, 0, 0)$ ,  $\vec{v} = (0, -\frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{a}}, \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{a}})$  e  $\vec{w} = (0, \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{a}}, -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{a}})$  vetores particulares (dados em termos da base  $\mathfrak{C}$ ), estes são tais que

$$\|\vec{u}\|_{\mathcal{A}} = \|\vec{v}\|_{\mathcal{A}} = 1; \quad \vec{u} \perp \vec{v} \quad \text{e} \quad \{\vec{v}, \vec{w}\} \text{ é um conjunto LD,}$$

para todo valor de  $a$ . Obtém-se os seguintes produtos vetoriais:

$$\vec{u} \underset{\mathcal{A}}{\wedge}^{\mathbf{e}} \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \sqrt{a} \vec{i} & \sqrt{a} \vec{j} & \sqrt{a} \vec{k} \\ -\frac{1}{\sqrt{a}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{a}} & \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{a}} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{a}} \vec{j} + \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{a}} \vec{k}$$

e

$$\vec{v} \underset{\mathcal{A}}{\wedge}^{\mathbf{e}} \vec{w} = \det \begin{bmatrix} \sqrt{a} \vec{i} & \sqrt{a} \vec{j} & \sqrt{a} \vec{k} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{a}} & \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{a}} \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{a}} & -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{a}} \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Os resultados obtidos confirmam o Item (2) da Definição 2.2.1 e os Itens (1) e (2) do Lema 2.2.2: o vetor  $\vec{u} \underset{\mathcal{A}}{\wedge}^{\mathbf{e}} \vec{v}$  é perpendicular a  $\vec{u}$  e a  $\vec{v}$  e é unitário (segundo  $\mathcal{A}$ ); além disso,  $\{\vec{v}, \vec{w}\}$  LD gerou  $\vec{v} \underset{\mathcal{A}}{\wedge}^{\mathbf{e}} \vec{w} = \vec{0}$ .

---

# TEORIA DE CURVAS EM UMA MÉTRICA GERAL

---

Nesta terceira etapa do trabalho se inicia o estudo de curvas que usualmente é feito em cursos ou em conhecidos livros de *Geometria Diferencial* sob a nova óptica das métricas generalizadas. Em tais cursos ou livros a métrica usada para desenvolver todo o conteúdo é a canônica (*euclidiana*).

O conteúdo básico de curvas parametrizadas, como o que consta no primeiro capítulo de [4], começa a ser desenvolvido aqui e se finaliza no próximo capítulo. Os conceitos dependentes do produto interno são analisados no produto interno generalizado, isto é, numa métrica qualquer. As fontes dos assuntos tratados neste capítulo são, além do livro já citado, [7, 13, 15].

Alguns resultados do *Cálculo Diferencial e Integral* são assumidos aqui e, com o devido rigor, podem ser consultados nas referências [1] ou [10, 11].

O planejamento deste capítulo é: fazer na primeira seção o conteúdo aplicável a curvas planas e espaciais (definições que se esclarecerão adiante); tomar a segunda seção para apresentar uma motivação para o estudo das *métricas "diferenciadas"*; e, por fim, apresentar no Apêndice deste capítulo uma explicação para o conceito estabelecido na primeira seção chamado *derivada covariante*.

Há alguns exemplos ilustrativos neste e no próximo capítulo. Cabe observar que todos os cálculos omitidos na elaboração destes exemplos foram feitos à parte com a ferramenta computacional *MuPAD Pró 4.0* (mais informações sobre este podem ser encontradas em [16]). Além dos cálculos não explicitados, as figuras deste e do seguinte capítulo foram elaboradas com este programa.

### 3.1 Preâmbulo

**Definição 3.1.1.** *Uma curva em  $\mathbb{R}^n$ , ou curva parametrizada em  $\mathbb{R}^n$ , é uma aplicação dada por*

$$\mathbb{R} \supseteq I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i(t) \vec{b}_i = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))^{\mathfrak{B}} \in \mathbb{R}^n$$

onde

$$I \ni t \mapsto f_i(t) \in \mathbb{R},$$

$i = 1, \dots, n$ , e  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  é uma base do  $\mathbb{R}^n$ . A imagem desta aplicação é denotada por  $\vec{\alpha}(I)$  e chamada de **traço** da curva. Cada  $f_i(t)$  é chamada de **função coordenada** da curva. A variável  $t$  é chamada de **parâmetro** da curva.

Os resultados obtidos nesta seção servem para uma base  $\mathfrak{B}$  qualquer. Por isso, não se faz menção da base adotada na notação da curva; simplesmente aparece escrito

$$\mathbb{R} \supseteq I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) \in \mathbb{R}^n.$$

Futuramente, em seções posteriores, se fará menção de alguma base específica para enunciar algum resultado.

**Definição 3.1.2.** *Se a partir de uma curva  $\vec{\alpha}(t)$  é possível definir para todo  $t \in I$  uma aplicação*

$$\mathbb{R} \supseteq I \ni t \mapsto \vec{\alpha}^j(t) \in \mathbb{R}^n,$$

$j \in \mathbb{N}$ , dada por

$$\vec{\alpha}^j(t) = \begin{cases} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\alpha}(t+\Delta t) - \vec{\alpha}(t)}{\Delta t} & \text{se } j = 1 \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\alpha}^{j-1}(t+\Delta t) - \vec{\alpha}^{j-1}(t)}{\Delta t} & \text{se } j > 1 \end{cases}$$

então a  $\vec{\alpha}(t)$  é chamada de **curva diferenciável até ordem  $j$**  (onde o expoente  $j$  denota o maior número natural para o qual existem todas as  $\vec{\alpha}^k(t)$ ,  $1 \leq k \leq j$ ). Quando  $\vec{\alpha}(t)$  é diferenciável em todas as ordens será chamada de **curva infinitamente diferenciável**, ou, simplesmente, de **curva diferenciável**. Cada  $\vec{\alpha}^j(t)$  é chamada de **derivada de ordem  $j$** . É útil convencionar  $\vec{\alpha}^0(t) = \vec{\alpha}(t)$  e para  $j = 1, 2, 3$  tem-se  $\vec{\alpha}'(t)$ ,  $\vec{\alpha}''(t)$  e  $\vec{\alpha}'''(t)$ .

**Observação 3.1.3.** *(Primeira convenção sobre os domínios das curvas.)* Curvas diferenciáveis são de grande interesse para a Geometria Diferencial. E como a diferenciabilidade implica a existência de um limite e este a existência e igualdade dos limites laterais no ponto fica convencionado desde agora que, sempre que  $\vec{\alpha}(t)$  for curva diferenciável, o domínio  $I$  é um **aberto** da reta real.

O conceito de curva diferenciável (ou derivável) tem uma conseqüência direta em suas funções coordenadas. Sendo  $\mathbb{R} \supseteq I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ , então

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\alpha}(t) = \left( \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right). \quad (3.1)$$

Logo, uma curva  $\vec{\alpha}(t)$  é diferenciável até ordem  $j$  se, e somente se, todas as suas funções coordenadas são diferenciáveis até ordem  $j$ :

$$\vec{\alpha}^j(t) = (f_1^j(t), f_2^j(t), \dots, f_n^j(t)). \quad (3.2)$$

É uma curva (infinitamente) diferenciável se, e somente se, suas funções coordenadas são (infinitamente) diferenciáveis.

Assim como a diferenciabilidade, o próximo conceito ainda é independente da métrica adotada.

**Definição 3.1.4.** *Uma curva  $\mathbb{R} \supseteq I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \in \mathbb{R}^n$  é **contínua num ponto**  $t_0 \in I$  se  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\alpha}(t) = \vec{\alpha}(t_0)$ . Tal curva é **contínua num intervalo**  $J \subseteq I$  se for contínua em todo  $t_0 \in J$ .*

Como  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\alpha}(t) = (\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t))$  a curva  $\vec{\alpha}$  é contínua em  $t_0$  se, e apenas se, cada uma de suas funções coordenadas for contínua em  $t_0$ . O mesmo fato é aplicável na continuidade num intervalo no tocante às suas funções coordenadas.

Como feito para a derivada de uma curva na Definição 3.1.2 a integral de uma aplicação  $\vec{\alpha}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$  seria

$$\int_a^b \vec{\alpha}(t) dt = \left( \int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right). \quad (3.3)$$

A curva  $\vec{\alpha}(t)$  é **integrável** se suas funções coordenadas o são.

**Proposição 3.1.5.** *Se uma curva  $I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$  é diferenciável até ordem  $j$ , então  $\vec{\alpha}^{j-1}(t)$  é contínua.*

**Demonstração.** Inicialmente, afirmar que  $\vec{\alpha}(t)$  é diferenciável até ordem  $j$  implica que  $\vec{\alpha}^{j-1}(t)$  é diferenciável e  $\frac{d}{dt}[\vec{\alpha}^{j-1}(t)] = \vec{\alpha}^j(t)$ .

Mas  $\vec{\alpha}^{j-1}(t)$  é diferenciável num ponto  $t_0 \in I$  se, e apenas se, existe um  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$t_0 + h \in I \Rightarrow \vec{\alpha}^{j-1}(t_0 + h) = \vec{\alpha}^{j-1}(t_0) + \vec{v}h + \vec{\beta}(h)$$

onde  $\vec{\beta}(h)$  é uma curva tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\beta}(h)}{h} = \vec{0}.$$

Neste caso,  $\vec{v} = \vec{\alpha}^j(t_0)$ . Esta afirmação requer uma prova:

Sejam  $J = \{h \in \mathbb{R} : t_0 + h \in I\}$  e

$$J \ni h \mapsto \vec{\beta}(h) = \vec{\alpha}^{j-1}(t_0 + h) - \vec{\alpha}^{j-1}(t_0) - \vec{\alpha}^j(t_0)h \in \mathbb{R}^n.$$

Então  $\frac{\vec{\beta}(h)}{h} = \frac{\vec{\alpha}^{j-1}(t_0+h) - \vec{\alpha}^{j-1}(t_0)}{h} - \vec{\alpha}^j(t_0)$  e  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\beta}(h)}{h} = \vec{0}$ .

Por outro lado, se  $t_0 + h \in I \Rightarrow \vec{\alpha}^{j-1}(t_0 + h) = \vec{\alpha}^{j-1}(t_0) + \vec{v}h + \vec{\beta}(h)$  com  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\beta}(h)}{h} = \vec{0}$ , então  $\vec{\alpha}^{j-1}(t)$  é diferenciável em  $t_0$  e  $\vec{v} = \vec{\alpha}^j(t_0)$ , pois

$$\vec{0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\beta}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\vec{\alpha}^{j-1}(t_0 + h) - \vec{\alpha}^{j-1}(t_0)}{h} \right) - \vec{v} = \vec{\alpha}^j(t_0) - \vec{v}.$$

Por isso a  $\vec{\alpha}^{j-1}(t)$  é contínua em todo  $t_0 \in I$ , porque

$$\vec{\alpha}^{j-1}(t_0 + h) = \vec{\alpha}^{j-1}(t_0) + \vec{\alpha}^j(t_0)h + \frac{\vec{\beta}(h)}{h}h$$

com  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\beta}(h)}{h} = \vec{0}$ ; então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \vec{\alpha}^{j-1}(t_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \vec{\alpha}^{j-1}(t_0) + \vec{\alpha}^j(t_0)h + \frac{\vec{\beta}(h)}{h}h \right) = \vec{\alpha}^{j-1}(t_0).$$

Notar que do lado esquerdo da última igualdade é possível fazer uma troca de variáveis para que fique como a Definição 3.1.4: pôr  $t_0 + h = t$  e trocar  $h \rightarrow 0$  por  $t \rightarrow t_0$ .  $\square$

**Exemplo 3.1.6.** *A recíproca deste resultado é falsa. Basta tomar como contra-exemplo a curva  $(-\epsilon, \epsilon) \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (t, |t|) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\epsilon > 0$ , que é contínua em  $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ , mas não existe  $\vec{\alpha}'(0)$ .*

**Observação 3.1.7. (Segunda convenção sobre os domínios das curvas.)** *Em continuação à Observação 3.1.3 é necessário que o traço da curva seja um conjunto **conexo** do  $\mathbb{R}^n$ . Para isso, mais uma característica sobre o domínio da curva deve ser imposta: além de aberto, é conexo. Como são trabalhadas somente curvas contínuas e a imagem de conexos por aplicações contínuas é ainda um conexo (vide [12]), ter-se-á traços conexos no  $\mathbb{R}^n$ . Como todo conexo de  $\mathbb{R}$  é um intervalo, o domínio  $I \subseteq \mathbb{R}$  da curva é sempre um **intervalo aberto**.*

**Definição 3.1.8.** *Quando uma curva parametrizada  $I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$  for diferenciável até ordem  $j$  e  $\vec{\alpha}^j(t)$  for contínua diz-se que  $\vec{\alpha}(t)$  é **curva de ordem  $C^j$**  (ou **de classe  $C^j$** ). Quando for infinitamente diferenciável diz-se que  $\vec{\alpha}(t)$  é **curva de ordem  $C^\infty$**  (ou **de classe  $C^\infty$** ).*

Como mencionado há pouco, uma curva parametrizada  $\vec{\alpha}(t)$  é de classe  $C^{j,\infty}$  se, e apenas se, suas funções coordenadas são também de classe  $C^{j,\infty}$ .

**Definição 3.1.9.** *Seja  $I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$  uma curva parametrizada diferenciável. Todo  $t_0 \in I$  tal que  $\vec{\alpha}^j(t_0) = \vec{0}$  é chamado de **ponto singular de ordem  $j$** . Quando não existe ponto singular de ordem  $j$  em todo o domínio  $I$  diz-se que a curva  $\vec{\alpha}(t)$  é **regular de ordem  $j$** .*

Por exemplo, se não existe  $t_0$  tal que  $\vec{\alpha}''(t_0) = \vec{0}$ , então  $\vec{\alpha}(t)$  é curva parametrizada diferenciável regular de ordem 2.

**Observação 3.1.10.** Uma curva parametrizada de classe  $C^\infty$  e regular de ordem 1 é chamada somente de **curva parametrizada diferenciável regular**. Devido à extensão destes três atributos fica acordada desde já a abreviação desses para **PDR**.

**Definição 3.1.11.** Sejam  $I$  e  $J$  abertos conexos de  $\mathbb{R}$ ,  $I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $J \ni s \mapsto h(s) = t \in I$  função sobrejetora de, no mínimo, classe  $C^1$  com  $h'(s) \neq 0$  em todo  $s \in J$ . Chama-se **reparametrização de  $\vec{\alpha}(t)$  por  $h(s)$**  a curva obtida por

$$J \ni s \mapsto \vec{\beta}(s) = (\vec{\alpha} \circ h)(s) = \vec{\alpha}(h(s)) \in \mathbb{R}^n.$$

A função  $h(s)$  é chamada de **função mudança de parâmetro**.

**Proposição 3.1.12.** Mantidas as condições da definição anterior valem as seguintes afirmações:

1.  $\vec{\alpha}(I) = \vec{\beta}(J)$ ;
2. (**Regra da cadeia para curvas.**) Se a curva  $\vec{\alpha}(t)$  é diferenciável, então  $\vec{\beta}(s)$  também é diferenciável e sua função derivada de ordem 1 é dada por

$$J \ni s \mapsto \vec{\beta}'(s) = \vec{\alpha}'(h(s))h'(s) \in \mathbb{R}^n.$$

Se  $\vec{\alpha}(t)$  é curva PDR, então  $\vec{\beta}(s)$  também é curva PDR.

3. É possível escrever  $\vec{\alpha}(t)$  como reparametrização  $\vec{\beta}(s)$  por

$$I \ni t \mapsto (h^{-1})(t) = s \in J.$$

**Demonstração.** Do *Cálculo Diferencial e Integral* sabe-se que  $h(s)$  ser sobrejetora, contínua (porque é de classe  $C^1$ ) e  $h'(s) \neq 0$  para  $\forall s \in J$  implica em  $h(s)$  ser bijetora e monótona estritamente crescente ou estritamente decrescente. Sendo  $h(s)$  bijetora, então existe uma função  $I \ni t \mapsto (h^{-1})(t) = s \in J$  diferenciável com  $(h^{-1})'(t) \neq 0$  para  $\forall t \in I$  e  $(h^{-1})(I) = J$ .

1.  $\vec{\beta}(J) = \vec{\beta}((h^{-1})(I)) = \vec{\alpha}(h((h^{-1})(I))) = \vec{\alpha}(I)$ ;
2. Ver [13], Seção 4 no Capítulo I;
3. A função  $(h^{-1})(t)$  satisfaz os requisitos da Definição 3.1.11, logo

$$I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) = \vec{\beta}((h^{-1})(t)) \in \mathbb{R}^n$$

é reparametrização de  $\vec{\beta}(s)$  por  $(h^{-1})(t)$ . □

**Definição 3.1.13.** Seja  $\mathbb{R} \supseteq I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$ . A **orientação** de  $\vec{\alpha}(t)$  é o sentido de percurso dos pontos de  $\vec{\alpha}(I)$ .

**Observação 3.1.14.** Sob as hipóteses da Definição 3.1.11,  $\vec{\alpha}(t)$  e  $\vec{\beta}(s)$  têm **mesma orientação** se a mudança de parâmetro é **estritamente crescente**; têm **orientação contrária** se a mudança de parâmetro é **estritamente decrescente**.

**Definição 3.1.15.** *Seja  $\mathbb{R} \supseteq I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$  curva parametrizada. Define-se um campo de vetores tangentes sobre  $\vec{\alpha}(I)$  como sendo uma aplicação da forma*

$$I \ni t \mapsto \vec{\beta}(t) \in T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^n).$$

*Isto significa que para cada  $t \in I$  o vetor  $\vec{\beta}(t)$  está aplicado no ponto  $\vec{\alpha}(t)$ ; é tal que pode ser escrito como  $\vec{\beta}(t)_{\vec{\alpha}(t)}$ .*

Os conceitos de **campo de vetores diferenciável** e **campo de vetores contínuo** são os mesmos que os elaborados para as curvas parametrizadas nas Definições 3.1.2 e 3.1.4.

**Observação 3.1.16.** *Foi mencionado no Capítulo 2, na Definição 2.1.2, que as funções entrada de uma métrica são diferenciáveis. A composição destas com uma curva diferenciável  $I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$  produz uma função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  diferenciável; da Análise Real sabe-se que cada  $I \ni t \mapsto a_{ij}(\vec{\alpha}(t)) \in \mathbb{R}$  é contínua (a prova dessa asserção é semelhante a da Proposição 3.1.5).*

Até o momento todos os conceitos citados independem da métrica adotada. O próximo é o primeiro diferente disso.

**Proposição 3.1.17.** *Sejam*

$$I \ni t \mapsto \vec{\beta}(t) \in T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^n)$$

e

$$I \ni t \mapsto \vec{\gamma}(t) \in T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^n)$$

*campos de vetores tangente **contínuos** (ou, respectivamente, **diferenciáveis**) não-nulos sobre uma curva*

$$I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$$

*de classe  $C^\infty$  e  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  uma **métrica diferenciável** definida no espaço vetorial  $T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^n)$ . São **contínuas (diferenciáveis)** as seguintes aplicações:*

1.  $I \ni t \mapsto \langle \vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} \in \mathbb{R}$ ;
2.  $I \ni t \mapsto \|\vec{\beta}(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} \in \mathbb{R}_+$ .

**Demonstração.** Inicialmente para o caso  $n = 2$ . A aplicação matricial  $\mathcal{A}(\vec{p})$  tem funções entrada contínuas, conforme Observação 3.1.16.

Os campos  $\vec{\beta}(t)_{\vec{\alpha}(t)} = (f(t), g(t))$  e  $\vec{\gamma}(t)_{\vec{\alpha}(t)} = (u(t), v(t))$  têm suas funções coordenadas contínuas (diferenciáveis).

Seja

$$\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t)) = \begin{bmatrix} a(\vec{\alpha}(t)) & b(\vec{\alpha}(t)) \\ b(\vec{\alpha}(t)) & c(\vec{\alpha}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{bmatrix}.$$

Então

$$\langle \vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} = a(t)f(t)u(t) + b(t)[g(t)u(t) + f(t)v(t)] + c(t)g(t)v(t).$$

Do *Cálculo Diferencial e Integral* sabe-se que a função

$$I \ni t \mapsto a(t)f(t)u(t) + b(t)[g(t)u(t) + f(t)v(t)] + c(t)g(t)v(t) \in \mathbb{R}$$

é contínua (diferenciável) por tratar-se de produto e soma de funções contínuas (diferenciáveis). Portanto, (1) está provada.

Por raciocínio análogo prova-se que  $I \ni t \mapsto \langle \vec{\beta}(t), \vec{\beta}(t) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} \in \mathbb{R}_+$  é contínua (diferenciável). E sendo que a função

$$\mathbb{R}_+^* \ni t \mapsto \sqrt{t} \in \mathbb{R}_+$$

é contínua (diferenciável), a composição destas,  $\|\vec{\beta}(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}$ , é contínua (diferenciável) e (2) está provada.

Esta prova é extensiva ao  $\mathbb{R}^3$ . □

**Definição 3.1.18.** *Seja  $I \subseteq \mathbb{R}$  um aberto conexo e  $I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$  uma curva PDR (portanto, contínua). Define-se um **arco** de  $\vec{\alpha}(t)$  como a imagem por  $\vec{\alpha}$  de um subconjunto conexo  $J \subseteq I$ .*

A definição anterior faz com que um arco assim definido seja um conjunto conexo de pontos do  $\mathbb{R}^n$ . A definição seguinte usa a anterior e estabelece um conceito que em geral é demonstrado nos livros para métricas *euclidianas*. O conceito da próxima definição pode ser demonstrado para métricas constantes seguindo e adaptando a prova apresentada na referência bibliográfica [1], em seu Item 14.10.

**Definição 3.1.19. (Comprimento de arco).** *Seja  $\mathbb{R} \supseteq I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$  curva de classe  $C^1$  e regular de primeira ordem. Seja também  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  uma aplicação matricial tal que  $\mathcal{A}|_{\vec{\alpha}(I)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , ou seja,  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))$  define um produto interno em  $T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^n)$ . Mede-se o **comprimento de um arco** de  $\vec{\alpha}(I)$ , medido **de a até b**, ambos em  $I$  e com  $a \leq b$ , **segundo uma métrica**  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))$ , por*

$$L = \int_a^b \|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} dt.$$

A função dada por

$$\mathbb{R} \supset [a, b] \ni t \mapsto s(t) = \int_a^t \|\vec{\alpha}'(\xi)_{\vec{\alpha}(\xi)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(\xi))} d\xi \in \mathbb{R}$$

chama-se **função comprimento de arco de  $\vec{\alpha}(t)$  segundo a métrica  $\mathcal{A}$** . O número

$$s(b) = \int_a^b \|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} dt$$

é chamado de **comprimento total de arco de  $\vec{\alpha}(t)$  em  $[a, b]$** .

A conexidade do domínio  $I$  da curva, requisitada na Observação 3.1.7, faz com que  $I$  seja um intervalo. Assim, dados  $a, b \in I$  se terá  $[a, b] \subset I$  e o respectivo arco de  $\vec{\alpha}$  por  $[a, b]$  será um subconjunto conexo do traço  $\vec{\alpha}(I)$ , de extremos  $\vec{\alpha}(a)$  e  $\vec{\alpha}(b)$ , para o qual se

calculará o comprimento  $L$ .

Com as Observações 3.1.3 e 3.1.7 e esta consideração espera-se evitar uma situação ilustrada como segue. Sejam  $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$  números reais com os quais se definem os seguintes subconjuntos conexos de  $\mathbb{R}$ :  $A = (a_1, a_2)$  e  $B = (b_1, b_2)$ . Seja  $I = A \cup B \subseteq \mathbb{R}$  um aberto e  $I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^2$  curva contínua. Como  $A$  e  $B$  são disjuntos, o traço de  $\vec{\alpha}$  é a união de dois traços disjuntos, a saber  $\vec{\alpha}(I) = \vec{\alpha}(A) \cup \vec{\alpha}(B)$  e seu traço não é conexo. É algo como ilustrado na Figura 3.1 seguinte:

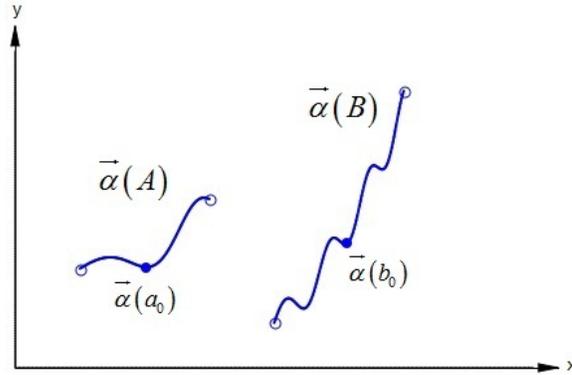


Figura 3.1: traço desconexo de uma curva contínua

Tomando um  $a_0 \in A$  e um  $b_0 \in B$ ,  $[a_0, b_0] \not\subseteq I$ ; logo, não é possível calcular  $L = \int_{a_0}^{b_0} \|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} dt$ .

**Proposição 3.1.20.** *Sob as condições da definição anterior, mantida a métrica o comprimento de arco total é invariante sob reparametrizações.*

**Demonstração.** Sejam  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  abertos conexos,  $J \ni s \mapsto h(s) = t \in I$  uma função como especifica a Definição 3.1.11,  $J \ni s \mapsto \vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(h(s)) \in \mathbb{R}^n$  reparametrização de  $\vec{\alpha}(t)$  por  $h(s)$  e  $a, b \in I$ . Pela regra da cadeia, Proposição 3.1.12 Item (2),  $\vec{\beta}'(s) = \vec{\alpha}'(h(s))h'(s)$ . Supor que  $\vec{\alpha}$  e  $\vec{\beta}$  têm **mesma orientação**; isso equivale afirmar que  $h(s)$  é crescente ou que  $h'(s) > 0$ ,  $\forall s \in J$ . Assim, considerando

$$\mathcal{A}(\vec{\beta}(s)) = \mathcal{A}(\vec{\alpha}(h(s))) = \mathcal{A}(\vec{\alpha}(t)),$$

tem-se

$$\|\vec{\beta}'(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\beta}(s))} = \|\vec{\alpha}'(h(s))h'(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} = h'(s)\|\vec{\alpha}'(h(s))\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}.$$

Sendo  $h(s)$  sobrejetora, existem  $c, d \in J$  tais que  $h(c) = a$  e  $h(d) = b$ ; sendo crescente,  $h(c) = a \leq b = h(d) \Rightarrow c \leq d$ .

Então, usando o Teorema de Mudança de Variável na Integral (vide referência [10])

$$\begin{aligned} \int_a^b \|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} dt &= \int_{h(c)}^{h(d)} \|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} dt \\ &= \int_c^d h'(s) \|\vec{\alpha}'(h(s))_{\vec{\alpha}(h(s))}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(h(s)))} ds \\ &= \int_c^d \|\vec{\beta}'(s)_{\vec{\beta}(s)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\beta}(s))} ds. \end{aligned}$$

Supor que  $\vec{\alpha}$  e  $\vec{\beta}$  têm **orientação contrária**, ou seja,  $h'(s) < 0, \forall s \in J$ . Então

$$\|\vec{\beta}'(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\beta}(s))} = -h'(s)\|\vec{\alpha}'(h(s))\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(h(s)))},$$

e, por motivos já mencionados, existem  $c, d \in J$  tais que  $h(c) = a$  e  $h(d) = b$ ; sendo decrescente,  $h(c) = a \leq b = h(d) \Rightarrow c \geq d$ . Assim

$$\begin{aligned} \int_a^b \|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} dt &= \int_{h(c)}^{h(d)} \|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} dt \\ &= \int_c^d h'(s) \|\vec{\alpha}'(h(s))_{\vec{\alpha}(h(s))}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(h(s)))} ds \\ &= - \int_d^c h'(s) \|\vec{\alpha}'(h(s))_{\vec{\alpha}(h(s))}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(h(s)))} ds \\ &= \int_d^c \|\vec{\beta}'(s)_{\vec{\beta}(s)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\beta}(s))} ds. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.1.21.** Com o produto interno do Exemplo 1.2.3 do Capítulo 1

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{\mathcal{A}} = 2x_1x_2 + 3y_1y_2$$

a curva PDR dada por

$$I = (0, +\infty) \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) = \left( \frac{t}{\sqrt{14}}, \frac{2t}{\sqrt{14}} \right) \in \mathbb{R}^2$$

é tal que  $\vec{\alpha}'(t) = \left( \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}} \right)$  tem norma  $\|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}} = \sqrt{\frac{2}{14} + 3 \cdot \frac{4}{14}} = 1$ .

Para um  $t_0 < t_1$ , ambos em  $I$ , a curva tem comprimento dado por

$$L_{\vec{\alpha}} = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}} dt = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0.$$

Tomando, por exemplo,  $I \ni t \mapsto h(t) = t\sqrt{14} \in \mathbb{R}$ , a reparametrização de  $\vec{\alpha}(t)$  por  $h(t)$  fica

$$I \ni t \mapsto \vec{\beta}(t) = (t, 2t) \in \mathbb{R}^2.$$

Os extremos de integração recalculados para a curva  $\vec{\beta}(t)$  são  $\frac{t_0}{\sqrt{14}}$  e  $\frac{t_1}{\sqrt{14}}$  (notar que  $h(\frac{t_0}{\sqrt{14}}) = t_0$  e  $h(\frac{t_1}{\sqrt{14}}) = t_1$ ). Sendo  $\vec{\beta}'(t) = (1, 2)$  com  $\|\vec{\beta}'(t)\|_{\mathcal{A}} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{14}$  vem que

$$L_{\vec{\beta}} = \int_{\frac{t_0}{\sqrt{14}}}^{\frac{t_1}{\sqrt{14}}} \|\vec{\beta}'(t)\|_{\mathcal{A}} dt = \sqrt{14} \int_{\frac{t_0}{\sqrt{14}}}^{\frac{t_1}{\sqrt{14}}} dt = \sqrt{14} \frac{t_1 - t_0}{\sqrt{14}} = L_{\vec{\alpha}}.$$

**Definição 3.1.22.** Diz-se que a curva  $I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$  da definição anterior está **parametrizada por comprimento de arco segundo a métrica  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))$** , ou, simplesmente, está **PCA segundo  $\mathcal{A}$** , se

$$\int_a^b \|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} dt = b - a$$

para todo  $[a, b] \subset I$ .

**Proposição 3.1.23.** *Mantidas as hipóteses da Definição 3.1.19, a curva  $\vec{\alpha}(t)$  está PCA segundo a métrica (diferenciável) definida por  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))$  se, e somente se,  $\forall t \in I$  implicar*

$$\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} = 1.$$

**Demonstração.** Supor  $\vec{\alpha}(t)$  PCA segundo  $\mathcal{A}$ . Sendo

$$[a, b] \ni t \mapsto s(t) = \int_a^t \|\vec{\alpha}'(\xi)_{\vec{\alpha}(\xi)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(\xi))} d\xi \in \mathbb{R},$$

$a \leq t$  implica  $s(t) = t - a$ . Sendo esta curva PDR e  $\mathcal{A}$  métrica diferenciável, segue da Proposição 3.1.17 que

$$[a, b] \ni t \mapsto \|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} \in \mathbb{R}$$

é contínua. Por um teorema do *Cálculo Diferencial e Integral* segue que  $s(t)$  é diferenciável e

$$s'(t) = \|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}.$$

Mas como  $s(t) = t - a \Rightarrow s'(t) = 1$  segue que  $\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} = 1$ .

Por outro lado,

$$\int_a^b \|\vec{\alpha}'(\xi)_{\vec{\alpha}(\xi)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(\xi))} d\xi = \int_a^b d\xi = b - a,$$

donde se vê que a curva está PCA segundo  $\mathcal{A}$ . □

**Exemplo 3.1.24.** *A curva  $\vec{\alpha}(t)$  do Exemplo 3.1.21 está PCA segundo aquela métrica  $\mathcal{A}$ , como foi possível ver pelo cálculo da norma de seu vetor derivada primeira. A curva  $\vec{\beta}(t)$  do mesmo exemplo não está PCA.*

**Exemplo 3.1.25.** *Sejam  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $I = (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$  e*

$$I \ni s \mapsto \vec{\alpha}(s) = (c_1 + c_2 \cos \frac{s}{c_2}, c_3 + c_2 \sin \frac{s}{c_2}) \in \mathbb{R}^2.$$

*Segundo a métrica canônica, esta curva está PCA, pois*

$$\vec{\alpha}'(s) = (-\sin \frac{s}{c_2}, \cos \frac{s}{c_2}) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(s)\|_C = \sqrt{\sin^2 \frac{s}{c_2} + \cos^2 \frac{s}{c_2}} = 1.$$

**Uma curva pode estar PCA numa métrica, mas não estar noutra.** *Este é o caso desta curva.*

*De fato, escolhendo adequadamente  $c_1, c_2$  e  $c_3$ , o traço de  $\vec{\alpha}$  fica no conjunto  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ , e faz com que a aplicação matricial*

$$\mathcal{A}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{bmatrix},$$

*com  $\vec{p} = (x, y) \in \vec{\alpha}(I)$ , defina um produto interno em cada  $T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2)$  (esta métrica foi dada no Exemplo 2.1.19 da página 27). Segundo este produto interno, a curva não está PCA. Com efeito,*

$$\|\vec{\alpha}'(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} = \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{s}{c_2} + \cos^2 \frac{s}{c_2}}{c_3 + c_2 \sin \frac{s}{c_2}}} \neq 1$$

*para todo  $s \in I$ .*

**Proposição 3.1.26.** (*Reparametrização por comprimento de arco*). Toda curva PDR

$$I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$$

admite uma reparametrização

$$J \ni s \mapsto \vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(h(s)) \in \mathbb{R}^n,$$

como estabelecida na Definição 3.1.11, PCA segundo uma métrica dada por  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$ , definida sobre os pontos de  $\vec{\alpha}(I)$ .

**Demonstração.** Como argumentado na demonstração da Proposição 3.1.23, a função comprimento de arco de  $\vec{\alpha}(t)$ ,  $s = s(t)$ , dada por

$$I \supset [a, b] \ni t \mapsto s(t) = \int_a^t \|\vec{\alpha}'(\xi)_{\vec{\alpha}(\xi)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(\xi))} d\xi \in \mathbb{R},$$

é tal que

$$s'(t) = \|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}.$$

Seja  $J = s([a, b])$ . Por  $\vec{\alpha}(t) \neq \vec{0}$  e pela Proposição 2.1.26, vem que  $s'(t) > 0$  e, então, a  $s(t)$  é estritamente crescente. Por um teorema do *Cálculo Diferencial e Integral*, a  $s(t)$  é bijetora com inversa diferenciável.

Seja

$$J \ni s \mapsto r(s) \in [a, b] \subset I$$

tal que  $r(s(t)) = t$  (ou  $r(s) = (s^{-1})(t)$ ). Então, pelo *Teorema da Função Inversa*,

$$r'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}} > 0,$$

ou seja, a  $r(s)$  é estritamente crescente.

A função  $r(s)$  satisfaz a Definição 3.1.11; seja

$$J \ni s \mapsto \vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(r(s)) \in \mathbb{R}^n.$$

$\vec{\beta}(s)$  é uma reparametrização de  $\vec{\alpha}(t)$  por  $r(s)$ . Pela Proposição 3.1.12 Item (1),  $\vec{\alpha}([a, b]) = \vec{\beta}(J)$ ; e, conforme Observação 3.1.14,  $\vec{\alpha}$  e  $\vec{\beta}$  têm mesma orientação. Além disso, ainda da Proposição 3.1.12 Item (2),

$$\begin{aligned} \vec{\beta}'(s) &= \vec{\alpha}'(r(s)) r'(s) = \vec{\alpha}'(t) \frac{1}{\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\vec{\beta}'(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\beta}(s))} &= \left\| \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}} \right\|_{\mathcal{A}(\vec{\beta}(s))} \\ &= \frac{\|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\beta}(s))}}{\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}} \\ &= \frac{\|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(r(s)))}}{\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}} \\ &= \frac{\|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}}{\|\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

usando que  $r(s) = t \Rightarrow \vec{\alpha}(r(s)) = \vec{\alpha}(t)$ .

Pela Proposição 3.1.23, a  $\vec{\beta}(s)$  está PCA segundo  $\mathcal{A}$ . □

**Exemplo 3.1.27.** Para um  $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$  devidamente escolhido, a curva dada por

$$I = (6 - \epsilon, +\infty) \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) = \left( \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}, t^2 \right) \in \mathbb{R}^2$$

tem seu traço contido no plano de Lobatchevski (página 26), que é o domínio sobre o qual está definida a métrica não-euclidiana  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  do Exemplo 2.1.19. Segundo essa métrica, a curva não está PCA, pois

$$\vec{\alpha}'(t) = \left( t^{\frac{3}{2}}, 2t \right) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} = \sqrt{\frac{t^3 + 4t^2}{t^2}} = \sqrt{t + 4} \neq 1, \forall t.$$

O traço desta curva foi elaborado com o "software" MuPAD Pró 4.0 e pode ser visto na Figura 3.2.

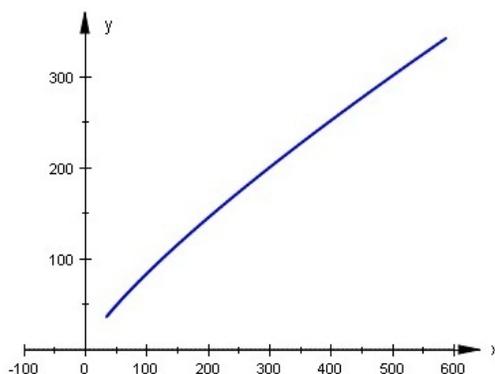


Figura 3.2: traço da curva  $\vec{\alpha}(t)$

Para se obter a reparametrização de  $\vec{\alpha}(t)$  PCA por  $\mathcal{A}$ , seguindo a metodologia da última proposição, é preciso obter a inversa da função comprimento de arco que aqui é medida a partir de  $t = 6$ :

$$I \ni t \mapsto s(t) = \int_6^t \|\vec{\alpha}'(\xi)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(\xi))} d\xi = \frac{2}{3}(t + 4)^{\frac{3}{2}} - \frac{20}{3}\sqrt{10} \in \mathbb{R}.$$

$s(6) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = +\infty$  fazem com que  $s([6, +\infty)) = [0, +\infty)$ . Mas, devido à Observação 3.1.7, um intervalo aberto e conexo de  $\mathbb{R}$  deve ser tomado como domínio da curva reparametrizada; portanto, este é  $(0, +\infty) = J \subset \mathbb{R}$ . E assim

$$J \ni s \mapsto s^{-1}(t) = r(s) = \left( \frac{3}{2}s + 10\sqrt{10} \right)^{\frac{2}{3}} - 4 \in \mathbb{R}.$$

Logo, a reparametrização procurada é dada por

$$J \ni s \mapsto \vec{\lambda}(s) = (\vec{\alpha} \circ r)(s) \in \mathbb{R}^2$$

que por sua vez é igual a

$$\vec{\lambda}(s) = (r(s))^2 \left( \frac{2}{5} (r(s))^{\frac{1}{2}}, 1 \right). \quad (3.4)$$

A função  $r(s)$  é usada na notação de  $\vec{\lambda}(s)$  com intuito de simplificá-la. Agora,

$$\vec{\lambda}'(s) = \frac{r(s)}{\sqrt{r(s)+4}} (\sqrt{r(s)}, 2) \quad (3.5)$$

e este campo de vetores é tal que

$$\|\vec{\lambda}'(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\lambda}(s))} = 1.$$

A próxima enunciação é das mais importantes deste trabalho. Tem ampla utilidade no decorrer deste e do próximo capítulo.

**Definição 3.1.28.** *Sejam*

$$I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$$

curva PDR e

$$I \ni t \mapsto \vec{\beta}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \in T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^n)$$

um campo de vetores tangente **diferenciável** a  $\vec{\alpha}(t)$ . Seja ainda, conforme Definição 2.1.2,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$ , tal que a restrição  $\mathcal{A}|_X$  seja uma matriz de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  com  $\vec{\alpha}(I) \subseteq X$ , ou seja,  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))$  estabelece uma métrica em  $T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^n)$ . Defina-se a **derivada covariante a  $\vec{\beta}(t)$  segundo a métrica  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))$**  como sendo a aplicação vetorial dada por

$$I \ni t \mapsto D\vec{\beta}(t) = \left( f_1'(t) + \frac{a'_{11}(\vec{\alpha}(t))}{2a_{11}(\vec{\alpha}(t))} f_1(t), \dots, f_n'(t) + \frac{a'_{nn}(\vec{\alpha}(t))}{2a_{nn}(\vec{\alpha}(t))} f_n(t) \right) \in T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^n).$$

Considerando  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ , a base do  $\mathbb{R}^n$  que define  $\vec{\alpha}(t)$  e  $\vec{\beta}(t)$ , quando aplicada em  $\vec{\alpha}(t)$  para  $t \in I$ , define uma base para todo espaço tangente  $T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^n)$  que é denotada por  $\mathfrak{B}_{\vec{\alpha}(t)} = \{\vec{b}_{1\vec{\alpha}(t)}, \vec{b}_{2\vec{\alpha}(t)}, \dots, \vec{b}_{n\vec{\alpha}(t)}\}$ . Assim, a derivada covariante a  $\vec{\beta}(t)$  segundo  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))$  pode também ser escrita como sendo

$$D\vec{\beta}(t) = \sum_{1 \leq i \leq n} \left( f_i'(t) + \frac{a'_{ii}(\vec{\alpha}(t))}{2a_{ii}(\vec{\alpha}(t))} f_i(t) \right) \vec{b}_{i\vec{\alpha}(t)}.$$

Se a matriz da métrica é constante, indiferentemente se diagonal ou não, então a derivada covariante torna-se a derivada usual do *Cálculo Diferencial e Integral*, uma vez que  $a'_{ii} = 0$ .

**Proposição 3.1.29.** *Sejam*

$$I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$$

curva PDR,

$$I \ni t \mapsto \vec{\beta}(t) \in T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^n) \quad e \quad I \ni t \mapsto \vec{\gamma}(t) \in T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^n)$$

campos de vetores tangente a  $\vec{\alpha}(t)$  em cada  $t$ . Seja ainda  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $n = 2, 3$ , tal que  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))$  define uma métrica em cada  $T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^n)$ . Se  $\vec{\beta}(t)_{\vec{\alpha}(t)}$  e  $\vec{\gamma}(t)_{\vec{\alpha}(t)}$  são diferenciáveis, então a aplicação

$$I \ni t \mapsto \langle \vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} \in \mathbb{R}$$

é diferenciável e

1. se  $\mathcal{A}$  é uma matriz **constante**, então

$$\frac{d}{dt} \left[ \langle \vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t) \rangle_{\mathcal{A}} \right] = \left\langle \vec{\beta}'(t), \vec{\gamma}(t) \right\rangle_{\mathcal{A}} + \left\langle \vec{\beta}(t), \vec{\gamma}'(t) \right\rangle_{\mathcal{A}};$$

2. se  $\mathcal{A}(\vec{p})$  é uma matriz **dada na forma diagonal**, não necessariamente constante, então

$$\frac{d}{dt} \left[ \langle \vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} \right] = \left\langle D\vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} + \left\langle \vec{\beta}(t), D\vec{\gamma}(t) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}.$$

**Demonstração.** A diferenciabilidade da aplicação  $\langle \vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}$  já foi provada na Proposição 3.1.17 para qualquer métrica; resta provar as igualdades de (1) e (2).

A demonstração é separada para cada caso; em ambos é feita para  $n = 2$  porque analogamente se faz para  $n = 3$ . E também, nos dois casos é suposto que  $\vec{\beta}(t) = (f(t), g(t))$  e  $\vec{\gamma}(t) = (u(t), v(t))$ .

Prova de (1).

Inicialmente, pondo

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

métrica constante em  $T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^n)$  para todo  $t$ , tem-se

$$\langle \vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t) \rangle_{\mathcal{A}} = [\vec{\beta}(t)]_{\mathcal{A}} [\vec{\gamma}(t)]^{\text{T}} = afu + b[gu + fv] + cgv.$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \langle \vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t) \rangle_{\mathcal{A}} \right] &= a(f'u + fu') + b(g'u + gu' + f'v + fv') + c(g'v + gv') \\ &= [af'u + b(g'u + f'v) + cg'v] + [afu' + b(gu' + fv') + cgv'] \\ &= \begin{bmatrix} f' & g' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}^{\text{T}} + \begin{bmatrix} f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' & v' \end{bmatrix}^{\text{T}} \\ &= [\vec{\beta}'(t)]_{\mathcal{A}} [\vec{\gamma}(t)]^{\text{T}} + [\vec{\beta}(t)]_{\mathcal{A}} [\vec{\gamma}'(t)]^{\text{T}}, \end{aligned}$$

ou seja, (1) está provada.

Prova de (2).

Escrevendo a métrica como

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{\alpha}(t)) = \begin{bmatrix} a(\vec{\alpha}(t)) & 0 \\ 0 & c(\vec{\alpha}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix},$$

o produto interno destes campos de vetores tangente segundo  $\mathcal{A}$  fica

$$\langle \vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t) \rangle_{\mathcal{A}} = [\vec{\beta}(t)]_{\mathcal{A}} [\vec{\gamma}(t)]^T = afu + cgv.$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \langle \vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t) \rangle_{\mathcal{A}} \right] &= a'fu + c'gv + a(f'u + fu') + c(g'v + gv') \\ &= (fa'u + gc'v) + (f'au + g'cv) + (fau' + gcv') \\ &= (f'au + f\frac{a'}{2}u + g'cv + g\frac{c'}{2}v) + (fau' + f\frac{a'}{2}u + gcv' + g\frac{c'}{2}v) \\ &= \begin{bmatrix} f' + \frac{a'}{2a}f & g' + \frac{c'}{2c}g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}^T + \\ &\quad \begin{bmatrix} f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' + \frac{a'}{2a}u & v' + \frac{c'}{2c}v \end{bmatrix}^T \\ &= \left[ D\vec{\beta}(t) \right]_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} [\vec{\gamma}(t)]^T + \left[ \vec{\beta}(t) \right]_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} [D\vec{\gamma}(t)]^T, \end{aligned}$$

conforme acertado. □

A motivação que levou à Definição 3.1.28 e à Proposição 3.1.29 está explicada no Apêndice ao fim deste Capítulo.

**Observação 3.1.30.** (*Convenção das métricas adotadas*). *Pelo resultado estabelecido na Proposição 3.1.29, bem como pelo conceito da Definição 3.1.28, as métricas adotadas nesta monografia, deste ponto em diante, são aquelas dadas por matrizes constantes ou diagonais.*

O próximo resultado será usado adiante para a elaboração dos conceitos que são chamados de *referencial de Frenet* e *triedro de Frenet* (nome atribuído ao matemático francês Jean Frédéric Frenet que viveu entre 1816 e 1900).

**Proposição 3.1.31.** *Se*

$$I \ni s \mapsto \vec{\alpha}(s) \in \mathbb{R}^n$$

*é uma curva PCA segundo uma métrica diferenciável, constante ou diagonal,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  definida nos pontos de  $\vec{\alpha}(I)$ , então*

$$\vec{\alpha}'(s) \perp D\vec{\alpha}'(s),$$

*ou seja, o vetor  $\vec{\alpha}'(s)$  é perpendicular ao seu vetor derivada covariante segundo a métrica  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))$ .*

Antes da demonstração convém ressaltar que o enunciado desta proposição poderia requerer apenas que  $I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$ , não necessariamente PCA, tenha  $\vec{\alpha}'(t)$  com norma constante. Sendo assim é possível generalizar este resultado para: "**qualquer campo de vetores, ou curva, que tem a derivada de ordem um com norma constante é tal que essa derivada primeira é perpendicular à sua derivada covariante**".

**Demonstração.**

$$\begin{aligned} 1 = \langle \vec{\alpha}'(s), \vec{\alpha}'(s) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} &\Rightarrow 0 = \frac{d}{ds} \left[ \langle \vec{\alpha}'(s), \vec{\alpha}'(s) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 = 2 [\vec{\alpha}'(s)]_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} [D\vec{\alpha}'(s)]^T &\Rightarrow 0 = \langle \vec{\alpha}'(s), D\vec{\alpha}'(s) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}, \end{aligned}$$

conforme a Proposição 2.1.34, esta igualdade implica a tese requerida.  $\square$

**Exemplo 3.1.32.** Com o produto interno do Exemplo 2.1.19 (página 27) e  $a, c \in \mathbb{R}_+^*$ , a curva

$$I = (a, +\infty) \ni s \mapsto \vec{\lambda}(s) = \left( c, \frac{s^2}{4} \right) \in \mathbb{R}^2$$

está PCA segundo  $\mathcal{A}$ , pois

$$\vec{\lambda}'(s) = \left( 0, \frac{s}{2} \right) \Rightarrow \left\| \vec{\lambda}'(s) \right\|_{\mathcal{A}(\vec{\lambda}(s))} = \sqrt{\frac{0 + \frac{s^2}{4}}{\frac{s^2}{4}}} = 1.$$

A derivada covariante de  $\vec{\lambda}'(s)$  fica

$$D\vec{\lambda}'(s) = \left( 0 + \frac{\frac{d}{ds}[4s^{-2}]}{8s^{-2}} 0, \frac{1}{2} + \frac{\frac{d}{ds}[4s^{-2}]s}{8s^{-2} \cdot 2} \right) = (0, 0),$$

e assim o perpendicularismo segundo  $\mathcal{A}$  entre estes campos de vetores é verificado por

$$\langle \vec{\lambda}'(s), D\vec{\lambda}'(s) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\lambda}(s))} = 0.$$

**Exemplo 3.1.33.** A curva do Exemplo 3.1.27 (na página 60) é mais interessante para ilustrar a Proposição 3.1.31, uma vez que seu vetor derivada covariante a  $\vec{\alpha}(t)$  não é constante nulo. Mais uma vez os cálculos estão feitos à parte com o "software" sobredito. Para tal curva tem-se

$$D\vec{\lambda}'(s) = \frac{1}{(r(s) + 4)^2} \left( 2\sqrt{r(s)}, -r(s) \right), \quad (3.6)$$

onde a função  $r(s)$  está na página 60; e, de fato,

$$\left\langle \vec{\lambda}'(s), D\vec{\lambda}'(s) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\lambda}(s))} = 0.$$

## 3.2 Motivação para as Métricas Diferenciadas

Esta derradeira seção objetiva estudar o *produto interno de vetores do plano tangente de uma superfície regular*. Os conceitos e resultados apresentados nesta seção que não foram previamente estabelecidos nesta monografia, como *superfície regular*, *plano tangente a uma superfície e sua existência num ponto desta*, *projeção*, *a diferencial de uma aplicação* e os *coeficientes da primeira forma fundamental de uma superfície regular*, podem ser vistos no Capítulo 2 da referência [4].

Sejam  $U$  um aberto do  $\mathbb{R}^2$  e

$$U \ni (u, v) \mapsto \vec{\sigma}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3$$

uma *parametrização* de uma *superfície regular*  $S$ . Assim,  $\vec{\sigma}(U) = S$ .

Por ser uma superfície regular, admite *plano tangente* em qualquer  $\vec{p} \in S$ . O plano tangente à superfície num ponto  $\vec{p}$  é aqui denotado por  $\mathbb{T}_{\vec{p}}(S)$ . (É importante notar que  $\mathbb{T}_{\vec{p}}(S)$  e  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$  são conceitos distintos.)

Seja  $\vec{q} = (u_0, v_0) \in U$  tal que  $\vec{p} = \vec{\sigma}(\vec{q})$  (ou  $\vec{q} = \vec{\sigma}^{-1}(\vec{p})$ ). Para se estabelecer o plano tangente de  $S$  em  $\vec{p}$ , faz-se necessário a construção de duas curvas diferenciáveis que atendam a certas características. Para isso, sejam  $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$  e

$$\mathbb{R} \supset (-\epsilon, \epsilon) \ni t \mapsto \vec{\gamma}(t) = (u(t), v(t)) \in U$$

uma curva regular tal que  $\vec{\gamma}(0) = \vec{q} = (u_0, v_0)$ . Com esta constrói-se uma curva  $\vec{\alpha}$ :

$$(-\epsilon, \epsilon) \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) = \vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \in S,$$

que satisfaz  $\vec{\alpha}(0) = \vec{\sigma}(\vec{\gamma}(0)) = \vec{\sigma}(\vec{q}) = \vec{p}$ . Um **vetor tangente à superfície no ponto**  $\vec{p} \in S$ , é definido como sendo  $\vec{w}_{\vec{p}} = \vec{\alpha}'(0) \in \mathbb{T}_{\vec{p}}(S)$ . Então  $\mathbb{T}_{\vec{p}}(S)$  é gerado por  $\mathfrak{B} = \{\vec{\sigma}_u(\vec{q}), \vec{\sigma}_v(\vec{q})\}$  e isto é justificado aplicando a *regra da cadeia* para o cálculo de  $\vec{w}_{\vec{p}}$ :

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}'(0) &= \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))] \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} [u(t)] \Big|_{t=0} \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u(t), v(t)), \frac{\partial y}{\partial u}(u(t), v(t)), \frac{\partial z}{\partial u}(u(t), v(t)) \right) \Big|_{t=0} + \\ &\quad \frac{d}{dt} [v(t)] \Big|_{t=0} \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u(t), v(t)), \frac{\partial y}{\partial v}(u(t), v(t)), \frac{\partial z}{\partial v}(u(t), v(t)) \right) \Big|_{t=0} \\ &= u'(0)\vec{\sigma}_u(\vec{q}) + v'(0)\vec{\sigma}_v(\vec{q}) \\ &= \vec{w}_{\vec{p}}. \end{aligned}$$

Seja

$$S \ni \vec{\sigma}(u, v) \mapsto \vec{\pi}(\vec{\sigma}(u, v)) = (u, v) \in U$$

a *projeção* de  $S$  em  $U$  (esta aplicação **não é a projeção ortogonal segundo a métrica** estabelecida na Definição 2.1.40 - página 38). Notar que, sendo  $S$  uma superfície regular, a aplicação  $\vec{\sigma}$  é um **homeomorfismo** (é uma bijeção contínua com inversa contínua), logo, admite inversa; assim, a projeção pode ser denotada por

$$\vec{\pi}(\vec{\sigma}(u, v)) = (u, v) = \vec{\sigma}^{-1}(\vec{\sigma}(u, v)).$$

Seja

$$(-\epsilon, \epsilon) \ni t \mapsto \vec{\beta}(t) = \vec{\pi}(\vec{\alpha}(t)) = \vec{\sigma}^{-1}(\vec{\alpha}(t)) = \vec{\sigma}^{-1}(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) = \vec{\gamma}(t) \in U$$

a restrição da projeção  $\vec{\pi}$  sobre a curva. Então, a *diferencial da aplicação  $\vec{\pi}$  em  $\vec{p}$  calculada em  $\vec{w}_{\vec{p}}$*  é definida como

$$d\vec{\pi}_{\vec{p}}(\vec{w}_{\vec{p}}) = \vec{\beta}'(0) = \vec{\gamma}'(0) = (u'(0), v'(0))_{\vec{q}}.$$

Existe uma matriz  $\mathcal{A}(\vec{q})$  tal que

$$\langle \vec{w}_{\vec{p}}, \vec{w}_{\vec{p}} \rangle_C = \langle d\vec{\pi}_{\vec{p}}(\vec{w}_{\vec{p}}), d\vec{\pi}_{\vec{p}}(\vec{w}_{\vec{p}}) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{q})}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \langle \vec{w}_{\vec{p}}, \vec{w}_{\vec{p}} \rangle_C &= \langle u'(0)\vec{\sigma}_u(\vec{q}) + v'(0)\vec{\sigma}_v(\vec{q}), u'(0)\vec{\sigma}_u(\vec{q}) + v'(0)\vec{\sigma}_v(\vec{q}) \rangle_C \\ &= u'(0)\langle \vec{\sigma}_u(\vec{q}), \vec{\sigma}_u(\vec{q}) \rangle_C u'(0) + \\ &\quad v'(0)\langle \vec{\sigma}_v(\vec{q}), \vec{\sigma}_u(\vec{q}) \rangle_C u'(0) + \\ &\quad u'(0)\langle \vec{\sigma}_u(\vec{q}), \vec{\sigma}_v(\vec{q}) \rangle_C v'(0) + \\ &\quad v'(0)\langle \vec{\sigma}_v(\vec{q}), \vec{\sigma}_v(\vec{q}) \rangle_C v'(0) = \\ &= \begin{bmatrix} u'(0) & v'(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \vec{\sigma}_u(\vec{q}), \vec{\sigma}_u(\vec{q}) \rangle_C & \langle \vec{\sigma}_u(\vec{q}), \vec{\sigma}_v(\vec{q}) \rangle_C \\ \langle \vec{\sigma}_v(\vec{q}), \vec{\sigma}_u(\vec{q}) \rangle_C & \langle \vec{\sigma}_v(\vec{q}), \vec{\sigma}_v(\vec{q}) \rangle_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(0) & v'(0) \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Com os *coeficientes da primeira forma fundamental de  $S$  em  $\vec{p}$*  obtém-se a matriz procurada como sendo

$$\mathcal{A}(\vec{q}) = \begin{bmatrix} E(\vec{q}) & F(\vec{q}) \\ F(\vec{q}) & G(\vec{q}) \end{bmatrix},$$

e

$$\langle \vec{w}_{\vec{p}}, \vec{w}_{\vec{p}} \rangle_C = \langle d\vec{\pi}_{\vec{p}}(\vec{w}_{\vec{p}}), d\vec{\pi}_{\vec{p}}(\vec{w}_{\vec{p}}) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{q})}.$$

Disto conclui-se que, deformando o plano numa superfície regular, trabalhar com os vetores do plano tangente na métrica euclidiana equivale a trabalhá-los no plano segundo uma métrica definida com as entradas dos *coeficientes da primeira forma fundamental*.

Resguardadas as hipóteses admitidas nesta seção, é possível resumir toda esta discussão na seguinte proposição:

**Proposição 3.2.1.** *Medir o comprimento de um vetor  $\vec{u}$  ou o ângulo entre dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  num aberto do  $\mathbb{R}^2$  numa métrica **generalizada** equivale a medir o comprimento de  $\vec{u}$  ou o ângulo de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em  $\mathbb{T}_{\vec{p}}(S)$  com a métrica **euclidiana**, para uma superfície regular  $S$  e um ponto  $\vec{p} \in S$ .*

## Apêndice: A Derivada Covariante

Durante o Capítulo, entre a Definição 3.1.28 e a Proposição 3.1.29 (a partir da página 61), foi mencionada e trabalhada a *derivada covariante*. Para não desviar o fluxo da leitura, não foi justificado o porque dessa definição. Isto é feito aqui.

Foram requisitados uma curva **PDR**

$$I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n,$$

um campo de vetores tangente e diferenciável

$$I \ni t \mapsto \vec{\beta}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \in T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^n),$$

e uma métrica  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  **qualquer** definida ao menos sobre os pontos de  $\vec{\alpha}(I) \subset \mathbb{R}^n$ .

A **derivada covariante a  $\vec{\beta}(t)$  segundo a métrica  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))$**  foi definida como a aplicação vetorial definida de  $I$  em  $T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^n)$  por

$$D\vec{\beta}(t) = \left( f_1'(t) + \frac{a'_{11}(\vec{\alpha}(t))}{2a_{11}(\vec{\alpha}(t))} f_1(t), \dots, f_n'(t) + \frac{a'_{nn}(\vec{\alpha}(t))}{2a_{nn}(\vec{\alpha}(t))} f_n(t) \right).$$

Neste acrescentamento é explicado o motivo que levou a esta definição. Com o intuito de simplificar a notação é fixado  $n = 2$ . O que for feito a seguir pode ser adaptado para  $n = 3$ .

Nos livros mais comuns de *Geometria Diferencial*, tais como [4, 13, 15], onde o conteúdo de curvas é desenvolvido para a métrica *euclidiana*, observa-se que toda curva **PCA**,  $I \ni s \mapsto \vec{\lambda}(s) \in \mathbb{R}^n$ , é tal que  $\vec{\lambda}'(s) \perp \vec{\lambda}''(s)$ , pois

$$\begin{aligned} \|\vec{\lambda}'(s)\|_C = 1 &\Rightarrow \langle \vec{\lambda}'(s), \vec{\lambda}'(s) \rangle_C = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d}{ds} \left[ \langle \vec{\lambda}'(s), \vec{\lambda}'(s) \rangle_C \right] = \frac{d}{ds} [1] = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle \vec{\lambda}'(s), \vec{\lambda}''(s) \rangle_C + \langle \vec{\lambda}'(s), \vec{\lambda}''(s) \rangle_C = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle \vec{\lambda}'(s), \vec{\lambda}''(s) \rangle_C = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

e esta é a condição necessária e suficiente para o perpendicularismo destes vetores, conforme visto na Proposição 2.1.34 da página 34. Este é o caso das curvas **PCA** que tem  $\|\vec{\lambda}'(s)\|_C = 1$  em todo  $s \in I$ .

Ao se tentar fazer o mesmo para uma métrica geral não constante ocorre o que segue: seja

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} a(\vec{p}) & b(\vec{p}) \\ b(\vec{p}) & c(\vec{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

uma aplicação matricial tal que restrita aos pontos de uma curva *PDR*,

$$I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.9)$$

define um produto interno em cada  $T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^2)$  dado por

$$\begin{aligned} \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \end{bmatrix}^T \\ &= ax_1x_2 + b(y_1x_2 + x_1y_2) + cy_1y_2. \end{aligned}$$

Sejam

$$I \ni t \mapsto \vec{\beta}(t) = (f_1(t), g_1(t)) \in T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^2) \quad (3.10)$$

e

$$I \ni t \mapsto \vec{\gamma}(t) = (f_2(t), g_2(t)) \in T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^2) \quad (3.11)$$

campos de vetores tangente a  $\vec{\alpha}(t)$ . Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \langle \vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} \right] &= \frac{d}{dt} [af_1f_2 + b(g_1f_2 + f_1g_2) + cg_1g_2] \\ &= a'f_1f_2 + b'(g_1f_2 + f_1g_2) + c'g_1g_2 + \\ &\quad a(f_1'f_2 + f_1f_2') + \\ &\quad b(g_1'f_2 + g_1f_2' + f_1'g_2 + f_1g_2') + \\ &\quad c(g_1'g_2 + g_1g_2') \\ &= (a'f_1f_2 + b'(g_1f_2 + f_1g_2) + c'g_1g_2) + \\ &\quad (af_1'f_2 + b(g_1'f_2 + f_1'g_2) + g_1'g_2) + \\ &\quad (af_1f_2' + b(g_1f_2' + f_1g_2') + cg_1g_2') \\ &= \begin{bmatrix} f_1 & g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 & g_2 \end{bmatrix}^T + \\ &\quad \begin{bmatrix} f_1' & g_1' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 & g_2 \end{bmatrix}^T + \\ &\quad \begin{bmatrix} f_1 & g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2' & g_2' \end{bmatrix}^T \\ &= [\vec{\beta}(t)] \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{bmatrix} [\vec{\gamma}(t)]^T + \\ &\quad [\vec{\beta}'(t)]_{\mathcal{A}(\vec{\gamma}(t))} [\vec{\gamma}(t)]^T + \end{aligned}$$

$$[\vec{\beta}(t)] \mathcal{A}[\vec{\gamma}'(t)]^T. \quad (3.12)$$

O primeiro produto de matrizes na última etapa da equação (3.12) impede concluir o mesmo resultado que fornece a equação (3.7), ou seja, desta não é possível concluir o perpendicularismo destes campos de vetores.

**Observação 3.2.2.** *Seja a aplicação matricial*

$$\mathbb{R}^2 \supseteq Y \ni \vec{p} = (x, y) \mapsto \mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p}) = (a_{ij}(\vec{p})) \in M_2(\mathbb{R}),$$

tal que sua restrição aos pontos do traço de uma curva PDR,  $I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^2$ , determina uma métrica em cada  $T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^2)$ .

A matriz obtida por

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}[a(\vec{\alpha}(t))] & \frac{d}{dt}[b(\vec{\alpha}(t))] \\ \frac{d}{dt}[b(\vec{\alpha}(t))] & \frac{d}{dt}[c(\vec{\alpha}(t))] \end{bmatrix}$$

não necessariamente define um produto interno.

Por exemplo, se

$$X \ni \vec{p} = (x, y) \mapsto \mathcal{A}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$

onde  $X = \{(x, y) : y > 0\}$ , e  $\mathbb{R}_+^* \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (t, t) \in X$ , então

$$\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Mas

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não define um produto interno por não ser positiva definida.

Se a curva  $\vec{\alpha}(t)$  está PCA (então  $t = s$ ) e a métrica adotada sobre os pontos de  $\vec{\alpha}(t)$  não é constante, então não é possível concluir que os campos de vetores  $\vec{\alpha}'(t)_{\vec{\alpha}(t)}$  e  $\vec{\alpha}''(t)_{\vec{\alpha}(t)}$  são perpendiculares, algo fundamental na construção do *triedro de Frenet* do próximo Capítulo.

Por isso deseja-se que em (3.12) o termo

$$[\vec{\beta}(t)] \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{bmatrix} [\vec{\gamma}(t)]^T$$

apareça alocado dentro da soma

$$[\vec{\beta}'(t)] \mathcal{A}(\vec{\alpha}(t)) [\vec{\gamma}(t)]^T + [\vec{\beta}(t)] \mathcal{A}(\vec{\alpha}(t)) [\vec{\gamma}'(t)]^T.$$

Então faz-se necessário uma "**nova idéia de derivada**" de uma aplicação vetorial, pois a usual do *Cálculo Diferencial e Integral* não satisfaz este requisito.

Sejam

$$D\vec{\beta}(t) = (w_1(t), w_2(t)) \quad \text{e} \quad D\vec{\gamma}(t) = (v_1(t), v_2(t))$$

aplicações de  $I$  em  $T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^2)$  que são obtidas com o "novo conceito de derivada" dos campos de vetores definidos em (3.10) e (3.11) (a métrica e a curva em questão foram definidos em (3.8) e (3.9), respectivamente). Este novo conceito deve ser tal que

$$\frac{d}{dt} \left[ \langle \vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} \right] = \left\langle D\vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} + \left\langle \vec{\beta}(t), D\vec{\gamma}(t) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}. \quad (3.13)$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \langle \vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} \right] &= \frac{d}{dt} [af_1g_1 + b(f_2g_1 + f_1g_2) + cf_2g_2] \\ &= a'f_1g_1 + af_1'g_1 + af_1g_1' + \\ &\quad b'(f_2g_1 + f_1g_2) + b(f_2'g_1 + f_2g_1') + b(f_1'g_2 + f_1g_2') + \\ &\quad c'f_2g_2 + cf_2'g_2 + cf_2g_2' \\ &= g_1 \left( \frac{a'f_1}{2} + af_1' + \frac{b'f_2}{2} + bf_2' \right) + \\ &\quad g_2 \left( \frac{b'f_1}{2} + bf_1' + \frac{c'f_2}{2} + cf_2' \right) + \\ &\quad f_1 \left( \frac{a'g_1}{2} + ag_1' + \frac{b'g_2}{2} + bg_2' \right) + \\ &\quad f_2 \left( \frac{b'g_1}{2} + bg_1' + \frac{c'g_2}{2} + cg_2' \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left\langle D\vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} &= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} [\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))] \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}^T \\ &= ag_1w_1 + bg_2w_1 + bg_1w_2 + cg_2w_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\beta}(t), D\vec{\gamma}(t) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} &= \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} [\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))] \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T \\ &= af_1v_1 + bf_2v_1 + bf_1v_2 + cf_2v_2 \end{aligned}$$

fazem

$$\begin{aligned} &\left\langle D\vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} + \left\langle \vec{\beta}(t), D\vec{\gamma}(t) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} = \\ &= g_1 (aw_1 + bw_2) + g_2 (bw_1 + cw_2) + f_1 (av_1 + bv_2) + f_2 (bv_1 + cv_2). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para satisfazer (3.13) equipara-se (3.14) e (3.15). Pela comparação dos respectivos coeficientes de  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $f_1$  e  $f_2$  em ambos os resultados, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\mathfrak{S} : \left\{ \begin{array}{l} aw_1 + bw_2 = \frac{a'f_1}{2} + af'_1 + \frac{b'f_2}{2} + bf'_2 \Rightarrow \begin{cases} w_1 = f'_1 + \frac{a'}{2a}f_1 \\ w_2 = f'_2 + \frac{b'}{2b}f_2 \end{cases} \\ bw_1 + cw_2 = \frac{b'f_1}{2} + bf'_1 + \frac{c'f_2}{2} + cf'_2 \Rightarrow \begin{cases} w_1 = f'_1 + \frac{b'}{2b}f_1 \\ w_2 = f'_2 + \frac{c'}{2c}f_2 \end{cases} \\ av_1 + bv_2 = \frac{a'g_1}{2} + ag'_1 + \frac{b'g_2}{2} + bg'_2 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = g'_1 + \frac{a'}{2a}g_1 \\ v_2 = g'_2 + \frac{b'}{2b}g_2 \end{cases} \\ bv_1 + cv_2 = \frac{b'g_1}{2} + bg'_1 + \frac{c'g_2}{2} + cg'_2 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = g'_1 + \frac{b'}{2b}g_1 \\ v_2 = g'_2 + \frac{c'}{2c}g_2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Por exemplo, tem-se dois resultados distintos para a função coordenada  $w_1(t)$ :

$$\begin{cases} w_1 = f'_1 + \frac{a'}{2a}f_1 \\ w_1 = f'_1 + \frac{b'}{2b}f_1 \end{cases} \quad (3.16)$$

E o mesmo ocorre para as demais funções coordenadas de  $D\vec{\beta}(t)$  e  $D\vec{\gamma}(t)$ .

Quando a matriz  $\mathcal{A}$  é dada na forma diagonal esta implicação contraditória **não** ocorre:  $b(\vec{\alpha}(t)) = 0$  cancela a presença da função  $w_2$  na primeira equação do sistema  $\mathfrak{S}$ , a de  $w_1$  na segunda, a de  $v_2$  na terceira e a de  $v_1$  na quarta. Notar que  $b(\vec{\alpha}(t)) = 0$  implica  $a(\vec{\alpha}(t)) > 0$  e  $c(\vec{\alpha}(t)) > 0$  devido a positividade requerida aos autovalores da matriz. Então, para uma **métrica dada por uma matriz diagonal não necessariamente constante**, o sistema  $\mathfrak{S}$  fica

$$\mathfrak{S} \sim \begin{cases} aw_1 = \frac{a'f_1}{2} + af'_1 \Rightarrow w_1 = f'_1 + \frac{a'}{2a}f_1 \\ cw_2 = \frac{c'f_2}{2} + cf'_2 \Rightarrow w_2 = f'_2 + \frac{c'}{2c}f_2 \\ av_1 = \frac{a'g_1}{2} + ag'_1 \Rightarrow v_1 = g'_1 + \frac{a'}{2a}g_1 \\ cv_2 = \frac{c'g_2}{2} + cg'_2 \Rightarrow v_2 = g'_2 + \frac{c'}{2c}g_2 \end{cases}$$

Assim,

$$D\vec{\beta}(t) = (w_1(t), w_2(t)) = \left( f'_1 + \frac{a'}{2a}f_1, f'_2 + \frac{c'}{2c}f_2 \right)$$

e

$$D\vec{\gamma}(t) = (v_1(t), v_2(t)) = \left( g'_1 + \frac{a'}{2a}g_1, g'_2 + \frac{c'}{2c}g_2 \right)$$

como na Definição 3.1.28.

Esta conclusão pode ser generalizada para o caso  $\mathbb{R}^3$  e é a que motiva a Definição 3.1.28 e a Proposição 3.1.29 neste Capítulo. Por isso e pelo resultado da Proposição 3.1.31 que as métricas adotadas neste Capítulo, a partir da Observação 3.1.30, foram restritas àquelas constantes ou diagonais.

# TEORIA LOCAL DE CURVAS

---

---

Esta quarta fase é uma continuação da terceira. Na primeira seção é feito o estudo das *curvas planas* e, na segunda, das *curvas espaciais*, sempre tomando a *parametrização por comprimento de arco*. Então, na terceira seção, admitindo uma *parametrização qualquer*, alguns dos principais resultados das duas primeiras seções, como, por exemplo, a *curvatura* e o *triedro de Frenet*, são refeitos para curvas planares e espaciais; ao início desta seção há uma justificativa para isso. A quarta seção objetiva tratar do *Teorema Fundamental de Curvas*, ao menos para métricas constantes e para curvas planas.

O conteúdo deste capítulo continua sendo a generalização para uma métrica qualquer do que consta nas referências [4, 7, 15].

## 4.1 Teoria Local de Curvas Planas

Conforme fora convencionado no Capítulo 1, na Observação 1.4.6, a dimensão adotada neste trabalho, daquele ponto em diante, seria  $n = 2$  ou  $n = 3$ . Nesta seção é tomado sempre  $n = 2$ .

**Definição 4.1.1.** *Uma **curva plana** caracteriza-se por ser de dimensão dois. Portanto, é adotado para esta seção que*

$$\mathbb{R} \supseteq I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2.$$

Devido à Proposição 3.1.26, são enfatizadas as curvas planas *PCA* segundo uma métrica diferenciável definida no traço dessa curva.

**Definição 4.1.2.** *Seja*

$$\mathbb{R} \supseteq I \ni s \mapsto \vec{\alpha}(s) = (x(s), y(s)) \in \mathbb{R}^2$$

*curva PCA segundo uma métrica diferenciável  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))$ . O **vetor tangente unitário à curva no ponto  $\vec{\alpha}(s)$  segundo a métrica  $\mathcal{A}$**  é a aplicação definida e denotada por*

$$I \ni s \mapsto \vec{T}[\mathcal{A}](s) = \frac{d}{ds}[\vec{\alpha}(s)] = (x'(s), y'(s)) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2).$$

A Proposição 3.1.31 motiva as próximas Definições 4.1.3 e 4.1.8.

**Definição 4.1.3.** *Dada uma métrica diferenciável, constante ou diagonal,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$ , definida sobre os pontos do traço de uma curva **PCA** segundo  $\mathcal{A}$ ,*

$$\mathbb{R} \supseteq I \ni s \mapsto \vec{\alpha}(s) \in \mathbb{R}^2,$$

*quando  $D\vec{T}[\mathcal{A}](s) \neq \vec{0}$ ,  $\forall s \in I$  (a derivada covariante de  $\vec{T}(s)$  segundo  $\mathcal{A}$  – Definição 3.1.28), é possível definir um campo de vetores sobre  $\vec{\alpha}(s)$  chamado **vetor normal unitário a  $\vec{\alpha}(s)$  segundo  $\mathcal{A}$**  como a aplicação dada por*

$$I \ni s \mapsto \vec{N}[\mathcal{A}](s) = \frac{D\vec{T}(s)}{\left\| D\vec{T}(s) \right\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}} \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2).$$

**Observação 4.1.4.** *A base utilizada para determinar  $\vec{\alpha}(s)$  (explicado na Definição 3.1.1) **mantém-se** para estabelecer os vetores tangente e normal.*

**Observação 4.1.5.** *Deste ponto em diante, com intuito de **simplificar** a notação dos vetores tangente e normal, em continuação à Observação 3.1.30, a métrica, constante ou diagonal,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$ , é diferenciável e definida ao menos sobre os pontos da curva em questão. Assim ficará entendido que estes vetores,  $\vec{T}(s)$ ,  $D\vec{T}(s)$  e  $\vec{N}(s)$ , foram obtidos segundo a métrica  $\mathcal{A}$  (ou seja, pelo fato da curva estar PCA segundo  $\mathcal{A}$ ). A métrica usada só será denotada quando duas delas forem trabalhadas para uma mesma curva.*

Como a curva  $\vec{\alpha}(s)$  está *PCA* vem que  $\|\vec{T}(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} = 1$ ; da Proposição 3.1.31 vem que  $\vec{T}(s) \perp D\vec{T}(s)$  e, portanto,  $\vec{T}(s) \perp \vec{N}(s)$ . A denominação **vetor normal** significa que  $\vec{N}(s)$  é perpendicular ao vetor tangente unitário no ponto  $\vec{\alpha}(s)$ .

**Exemplo 4.1.6.** *Para o caso geral tem-se*

$$D\vec{T}(s) = \left( x''(s) + \frac{a'(\vec{\alpha}(s))}{2a(\vec{\alpha}(s))} x'(s), y''(s) + \frac{c'(\vec{\alpha}(s))}{2c(\vec{\alpha}(s))} y'(s) \right)$$

onde

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{\alpha}(s)) = \begin{bmatrix} a(\vec{\alpha}(s)) & 0 \\ 0 & c(\vec{\alpha}(s)) \end{bmatrix}$$

é uma *métrica diagonal*. Se a *métrica é constante*, então

$$D\vec{T}(s) = (x''(s), y''(s)) = \vec{\alpha}''(s) = \frac{d}{ds} [\vec{T}(s)].$$

**Quando**  $D\vec{T}(s) \neq \vec{0}$ , o vetor normal é o **versor** de  $D\vec{T}(s)$ .

Será mostrado no Exemplo 4.1.15 que, dependendo da métrica adotada, uma curva pode ter  $D\vec{T}(s) = \vec{0}$  para algum ou todo  $s \in I$ , mas isso **não** impossibilita obter uma direção normal a  $\vec{T}(s)$ . Isto será possível devido ao Lema 2.1.36 (da página 35) que garante para um vetor dado a existência de uma direção perpendicular a este independentemente da métrica adotada.

**Exemplo 4.1.7.** *Sejam*  $X_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  e

$$X_1 \ni \vec{p} \mapsto \mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p}) = (a_{ij}(x, y)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2+y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2+y^2} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Para  $\vec{p} = (x, y) \in X_1$ ,  $\vec{u}_{\vec{p}} = (x_1, y_1)$  e  $\vec{v}_{\vec{p}} = (x_2, y_2)$  pertencentes a  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ , o produto interno estabelecido por essa métrica é dado na forma geral por

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x^2 + y^2}.$$

Sejam ainda  $I = (-3.01, 3.01) \subset \mathbb{R}$  e

$$I \ni s \mapsto \vec{\alpha}(s) = (\sinh(s), \cosh(s)) \in X_1.$$

O traço da curva está na Figura 4.1.

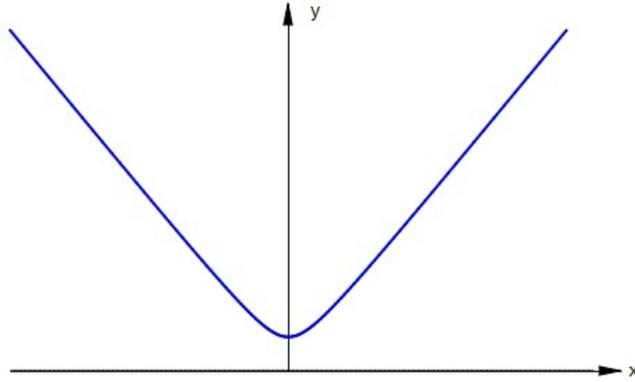


Figura 4.1: traço da curva

Esta curva está PCA segundo  $\mathcal{A}$ , pois

$$\vec{\alpha}'(s) = (\cosh(s), \sinh(s)) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} = \sqrt{\frac{\cosh^2(s) + \sinh^2(s)}{\sinh^2(s) + \cosh^2(s)}} = 1.$$

Seu vetor tangente segundo esta métrica é dado pela aplicação

$$I \ni s \mapsto \vec{T}(s) = (\cosh(s), \sinh(s)) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2); \quad (4.1)$$

a derivada covariante a  $\vec{T}(s)$  segundo  $\mathcal{A}$  é uma aplicação vetorial de  $I$  em  $T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2)$  dada por

$$D\vec{T}(s) = \frac{1}{2 \cosh^2(2s)} (\sinh(s) - \sinh(3s), \cosh(s) + \cosh(3s)) \quad (4.2)$$

este campo de vetores é não-nulo em todo seu domínio e sua norma é

$$\|D\vec{T}(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} = \frac{1}{\cosh(2s)}. \quad (4.3)$$

O vetor normal a  $\vec{\alpha}(s)$  segundo a métrica  $\mathcal{A}$  é

$$I \ni s \mapsto \vec{N}(s) = (-\sinh(s), \cosh(s)) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2). \quad (4.4)$$

Um cálculo simples prova o perpendicularismo de  $\vec{T}(s)$  e  $\vec{N}(s)$ :

$$\langle \vec{T}(s), \vec{N}(s) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} = 0.$$

**Definição 4.1.8.** Dada uma curva  $I \ni s \mapsto \vec{\alpha}(s) \in \mathbb{R}^2$ , PCA segundo uma métrica  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$ , denomina-se **referencial de Frenet** em  $\vec{\alpha}(s)$  o conjunto de  $\vec{T}(s)$  e  $\vec{N}(s)$ . Como decorrência de se ter  $\vec{T}(s) \perp \vec{N}(s)$ , segue que  $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s)\}$  é um conjunto de vetores **LI ortonormais**, portanto, **base ON** de  $T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2)$ .

Devido ao Lema 2.1.36, do Capítulo 2, encontrar o referencial de Frenet **não** requer o uso de métrica constante ou diagonal, uma vez que a obtenção do vetor tangente unitário independe da métrica usada e a obtenção do vetor normal unitário pode não depender da obtenção de  $D\vec{T}(s)$ .

**Exemplo 4.1.9.** A Figura 4.2 ilustra o referencial de Frenet nos pontos  $\vec{\alpha}(-1)$  e  $\vec{\alpha}(0)$  da curva do exemplo anterior. A figura pode fazer o observador pensar que os vetores sobre  $\vec{\alpha}(-1)$  não são perpendiculares e ou estes ou os outros dois não têm norma 1. A idéia da métrica não constante faz exatamente isso: o tamanho do vetor e o ângulo entre dois vetores depende do ponto em que está(ão) aplicado(s).

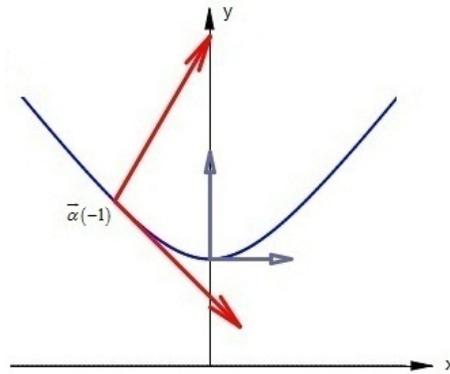


Figura 4.2: referenciais de Frenet em  $\vec{\alpha}(-1)$  e em  $\vec{\alpha}(0)$

**Definição 4.1.10.** Dada uma curva PCA

$$I \ni s \mapsto \vec{\alpha}(s) \in \mathbb{R}^2$$

define-se a **reta tangente à curva por  $\vec{\alpha}(s)$**  como sendo a aplicação

$$\mathbb{R} \ni r \mapsto t_{\vec{\alpha}}(r) = \vec{\alpha}(s) + r\vec{T}(s) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2)$$

e a **reta normal à curva por  $\vec{\alpha}(s)$**  como

$$\mathbb{R} \ni r \mapsto n_{\vec{\alpha}}(r) = \vec{\alpha}(s) + r\vec{N}(s) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2).$$

**Definição 4.1.11.** Seja  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  uma métrica **diferenciável, constante ou diagonal**, definida sobre os pontos do traço de uma curva **PCA** segundo  $\mathcal{A}$

$$I \ni s \mapsto \vec{\alpha}(s) \in \mathbb{R}^2.$$

A função

$$I \ni s \mapsto \kappa[\mathcal{A}](s) = \|D\vec{T}(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} \in \mathbb{R}_+$$

é denominada **função curvatura de  $\vec{\alpha}$  em  $s$  segundo a métrica  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))$** .

**Observação 4.1.12.** Deste ponto em diante valerá para a curvatura o mesmo que foi acordado na Observação 4.1.5, isto é, será denotada  $\kappa(s)$  quando estiver claro qual a métrica adotada e  $\kappa[\mathcal{A}](s)$  ou  $\kappa[\mathcal{B}](s)$  quando for necessário.

**Proposição 4.1.13.** Quando  $D\vec{T}(s) \neq \vec{0}$  para todo  $s \in I$ , a **curvatura** de  $\vec{\alpha}$  em  $s$  (estabelecida na última definição) pode ser dada por

$$\kappa(s) = \left\langle D\vec{T}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}. \quad (4.5)$$

**Demonstração.** Com efeito,

$$\begin{aligned} k(s) &= \frac{\|D\vec{T}(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}}{\|D\vec{T}(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}} = \frac{[\|D\vec{T}(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}]^2}{\|D\vec{T}(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}^2} \\ &= \frac{\langle D\vec{T}(s), D\vec{T}(s) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}}{\|D\vec{T}(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}^2} = \left\langle D\vec{T}(s), \frac{D\vec{T}(s)}{\|D\vec{T}(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}} \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} \\ &= \left\langle D\vec{T}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} \quad \square \end{aligned}$$

Esta mesma proposição permite atribuir uma **interpretação geométrica** para a curvatura. Nestas hipóteses, o campo de vetores  $D\vec{T}(s)$  é não-nulo em todo o domínio da curva e  $\vec{N}(s)$  é obtido como o versor deste primeiro segundo  $\mathcal{A}$ . Estes dois campos de vetores são *LD*. Da Proposição 2.1.41 calcula-se a projeção de  $D\vec{T}(s)$  sobre  $\vec{N}(s)$  da seguinte maneira

$$\begin{aligned} D\vec{T}(s) &= \text{proj}_{\vec{N}(s)} D\vec{T}(s) \Big|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} \\ &= \left\langle D\vec{T}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} \vec{N}(s) \\ &= k(s) \vec{N}(s). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ou seja, a função que faz a **proporcionalidade** entre  $D\vec{T}(s)$  e  $\vec{N}(s)$  é a curvatura.

**Exemplo 4.1.14.** Continuando o Exemplo 4.1.7: a derivada covariante a  $\vec{T}(s)$  foi dada em (4.2) e vetor normal foi dado em (4.4). Sua curvatura pode ser dada por

$$(-3.01, 3.01) \ni s \mapsto \kappa(s) = \left\langle D\vec{T}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} = \frac{1}{\cosh(2s)} \in \mathbb{R}.$$

Este resultado e o dado em (4.3) confirmam a Proposição 4.1.13. O gráfico desta função pode ser visualizado na figura seguinte:

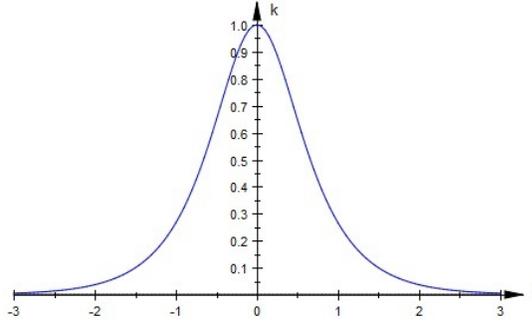


Figura 4.3: gráfico da curvatura da curva

**Exemplo 4.1.15.** Sejam  $X_2 = \{(x, y) : x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$  e

$$X_2 \ni \vec{p} \mapsto \mathcal{B} = \mathcal{B}(\vec{p}) = (b_{ij}(x, y)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2x^2} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$

aplicação matricial que induz o seguinte produto interno para

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{B}(\vec{p})} = \frac{x_1 x_2}{2y^2} + \frac{y_1 y_2}{2x^2}, \quad (4.7)$$

para  $\vec{p} \in X_2$ ,  $\vec{u}_{\vec{p}} = (x_1, y_1)$  e  $\vec{v}_{\vec{p}} = (x_2, y_2)$  pertencentes a  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$ .

A curva do Exemplo 4.1.7,

$$\vec{\alpha}(s) = (x(s), y(s)) = (\sinh(s), \cosh(s)),$$

quando restrita a  $J = (0.01, 3.01)$  (um subconjunto conexo do intervalo  $I$ ),  $\vec{\alpha}|_J(s)$  tem traço contido em  $X_2$ ; por isso, é possível tratar a métrica  $\mathcal{B}$  nos pontos deste traço.

A curva está PCA segundo  $\mathcal{B}$ , pois

$$\|\vec{\alpha}'(s)\|_{\mathcal{B}(\vec{\alpha}(s))} = \sqrt{\frac{\cosh^2(s)}{2 \cosh^2(s)} + \frac{\sinh^2(s)}{2 \sinh^2(s)}} = 1.$$

Segundo a norma  $\mathcal{B}(\vec{\alpha}|_J(s))$ , a curva restrita tem vetor derivada covariante  $D\vec{T}[\mathcal{B}](s) = \vec{0}$ . Por conseqüência, sua curvatura fica

$$\kappa[\mathcal{B}](s) = \left\| D\vec{T}[\mathcal{B}](s) \right\|_{\mathcal{B}(\vec{\alpha}|_J(s))} = 0.$$

Segundo a métrica  $\mathcal{A}$  do exemplo anterior isso não ocorreu. Segundo aquela métrica a restrição  $\vec{\alpha}|_J(s)$  continua tendo curvatura

$$\kappa[\mathcal{A}](s) = \frac{1}{\cosh(2s)}$$

para  $s \in J$ .

Pela aplicação direta da Definição 4.1.3 não é possível obter o vetor normal de  $\vec{\alpha}(s)$ , pois

$\kappa[\mathcal{B}](s)$  é identicamente nula em todo o domínio. Porém, pelo Lema 2.1.36 da página 35 sabe-se da existência da direção normal. O vetor tangente unitário de  $\vec{\alpha}|_J(s)$  é o mesmo dado em (4.1):

$$J \ni s \mapsto \vec{T}(s) = (x_{\vec{T}}(s), y_{\vec{T}}(s)) = (\cosh(s), \sinh(s)) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2).$$

Seja o vetor normal dado por

$$J \ni s \mapsto \vec{N}(s) = (x_{\vec{N}}(s), y_{\vec{N}}(s)) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2);$$

este campo de vetores deve satisfazer duas condições:

1.  $\langle \vec{T}(s), \vec{N}(s) \rangle_{\mathcal{B}(\vec{\alpha}(s))} = 0$  e
2.  $\|\vec{N}(s)\|_{\mathcal{B}(\vec{\alpha}(s))} = 1$ .

Inicialmente será procurada uma direção normal a  $\vec{T}(s)$ , dada por  $(\bar{x}(s), \bar{y}(s))$ , e depois é tomado seu versor. Da expressão do produto interno dado na Equação (4.7) segue que:

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \vec{T}(s), (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) \right\rangle_{\mathcal{B}(\vec{\alpha}(s))} \\ &= \frac{x_{\vec{T}}(s)\bar{x}(s)}{2y(s)^2} + \frac{y_{\vec{T}}(s)\bar{y}(s)}{2x(s)^2} \\ &= \frac{\cosh(s)\bar{x}(s)}{2\cosh^2(s)} + \frac{\sinh(s)\bar{y}(s)}{2\sinh^2(s)} \\ &= \frac{\bar{x}(s)}{2\cosh(s)} + \frac{\bar{y}(s)}{2\sinh(s)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{y}(s) &= -\bar{x}(s) \tanh(s). \end{aligned}$$

Tomando  $\bar{x}(s) = 1$  obtém-se  $\bar{y}(s) = -\tanh(s)$ . Como

$$\|(\bar{x}(s), \bar{y}(s))\|_{\mathcal{B}(\vec{\alpha}(s))} = \frac{1}{\cosh(s)},$$

faz-se necessário tomar

$$\vec{N}(s) = (x_{\vec{N}}(s), y_{\vec{N}}(s)) = \frac{(\bar{x}(s), \bar{y}(s))}{\|(\bar{x}(s), \bar{y}(s))\|_{\mathcal{B}(\vec{\alpha}(s))}} = (\cosh(s), -\sinh(s)).$$

Na Figura 4.4 são colocados os referenciais de Frenet em  $\vec{\alpha}(0.3)$  e em  $\vec{\alpha}(1.1)$ :

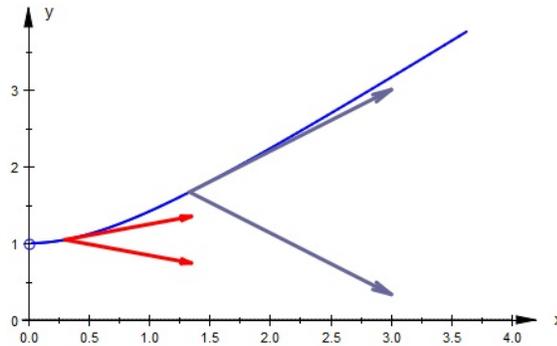


Figura 4.4: referenciais de Frenet sobre a curva

Conforme foi observado na página 77, a exigência de se ter  $D\vec{T}(s)$  não-nulo no domínio da curva é **uma condição suficiente** para ser possível definir o campo de vetores normal unitário **como manda a Definição 4.1.3**. Essa mesma condição **não é necessária** para definir o vetor normal, conforme atesta o Exemplo 4.1.15.

**Exemplo 4.1.16.** Para uma métrica dada por uma matriz *constante* tem-se:

$$\begin{aligned}\vec{T}(s) &= \vec{\alpha}'(s), \\ D\vec{T}(s) &= \vec{T}'(s), \\ \vec{N}(s) &= \frac{\vec{T}'(s)}{\|\vec{T}'(s)\|_{\mathcal{A}}}, \\ D\vec{N}(s) &= \vec{N}'(s) \quad e \\ \kappa(s) &= \|\vec{T}'(s)\|_{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

*Este exemplo, embora teórico, pode ser usado para perceber que quando a matriz da métrica é a identidade toda a teoria aqui desenvolvida retorna à teoria da Geometria Diferencial "clássica", isto é, àquela desenvolvida em bibliografias como [4, 13].*

Na *Geometria Diferencial* usual (a feita com a métrica *euclidiana*),

**"uma curva é uma reta se, e somente se, sua curvatura é zero",**

onde **reta** deve ser entendida como a "*reta euclidiana*": uma curva dada por um ponto mais os múltiplos de um vetor fixo. Isso pode ser confirmado nas referências [7, 15].

Quando se tem uma métrica generalizada este resultado pode não valer. O Exemplo 4.1.15 tomou uma curva que não é uma *reta euclidiana* e obteve curvatura zero em todo o domínio. Fixada uma métrica constante qualquer, esta afirmação é válida e a demonstração é a mesma adotada pelas referências bibliográficas quando a demonstram para a métrica euclidiana.

A próxima proposição e definição se aplicam às curvas que admitem vetor normal, ou seja, para aquelas em que  $D\vec{T}(s) \neq \vec{0}$  em todo o domínio.

**Proposição 4.1.17.** *Dada uma métrica diferenciável, constante ou diagonal,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$ , definida sobre os pontos do traço de uma curva PCA segundo esta métrica,*

$$I \ni s \mapsto \vec{\alpha}(s) \in \mathbb{R}^2,$$

com  $D\vec{T}(s)$  não-nulo em todo o domínio, valem as igualdades

$$\begin{cases} D\vec{T}(s) = \kappa(s) \vec{N}(s) \\ D\vec{N}(s) = -\kappa(s) \vec{T}(s) \end{cases}$$

A idéia desta proposição é: como o *referencial de Frenet* é uma base de  $T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2)$  e  $D\vec{T}(s)$  e  $D\vec{N}(s)$  pertencem a este espaço tangente é possível escrevê-los como combinação linear de  $\vec{T}(s)$  e  $\vec{N}(s)$ . Isto motiva a seguinte definição:

**Definição 4.1.18.** *Estas equações são chamadas de **fórmulas de Frenet** para  $\vec{\alpha}(s)$  segundo  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))$ .*

**Demonstração da Proposição 4.1.17.** A primeira das fórmulas é a Equação (4.6) (da página 80). Resta provar a segunda. A prova é feita de uma só forma independentemente da métrica ser dada por uma matriz **constante** ou **na forma diagonal** (não necessariamente constante).

Pela definição de vetor normal e pela Proposição 3.1.31

$$1 = \|\vec{N}(s)\|_{\mathcal{A}} \Rightarrow D\vec{N}(s) \perp \vec{N}(s),$$

conseqüentemente,  $D\vec{N}(s) // \vec{T}(s)$  e

$$D\vec{N}(s) = \text{proj}_{\vec{T}(s)} D\vec{N}(s) \Big|_{\mathcal{A}} = \left\langle D\vec{N}(s), \vec{T}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}} \vec{T}(s). \quad (4.8)$$

E também, diferenciando  $0 = \left\langle \vec{T}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}}$  leva a

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle D\vec{T}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}} + \left\langle \vec{T}(s), D\vec{N}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\langle \vec{T}(s), D\vec{N}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}} = - \left\langle D\vec{T}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}} = -\kappa(s). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Substituindo a igualdade (4.9) na (4.8) obtém-se a segunda das equações do *referencial de Frenet*.  $\square$

## 4.2 Teoria Local de Curvas Espaciais

Analogamente ao que fora observado ao início da página 76, é mantido nesta seção  $n = 3$ .

**Definição 4.2.1.** *Uma **curva espacial** é distinguida por ser de dimensão três. Nesta seção, tal curva é uma aplicação dada por*

$$\mathbb{R} \supseteq I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3.$$

Algumas definições e resultados da segunda seção serão generalizados para estas curvas. Será admitido no texto seguinte que  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  é uma métrica diferenciável definida ao menos nos pontos do traço da curva e, conforme a necessidade, será suposta constante e, ou, dada na forma diagonal.

Devido à possibilidade de uma curva admitir uma parametrização *PCA* segundo uma dada métrica é feita a seguinte definição:

**Definição 4.2.2.** *Uma curva*

$$I \ni s \mapsto \vec{\alpha}(s) = (x(s), y(s), z(s)) \in \mathbb{R}^3$$

*PCA segundo uma métrica diferenciável  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))$  tem como **vetor tangente unitário à curva no ponto  $\vec{\alpha}(s)$  segundo a métrica  $\mathcal{A}$**  a aplicação estabelecida por*

$$I \ni s \mapsto \frac{d}{ds}[\vec{\alpha}(s)] = \vec{T}(s) = (x'(s), y'(s), z'(s)) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^3).$$

**Definição 4.2.3.** *Adicionando às hipóteses da Definição 4.2.2 ser  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))$  **constante ou dada na forma diagonal** (estas condições permitem que seja possível calcular o campo de vetores  $D\vec{T}(s)$  perpendicular a  $\vec{T}(s)$ ), define-se a **curvatura** de  $\vec{\alpha}(s)$  como sendo a função*

$$I \ni s \mapsto \kappa(s) = \|D\vec{T}(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} \in \mathbb{R}_+.$$

**Definição 4.2.4.** *Adicionando às hipóteses da Definição 4.2.3 que  $D\vec{T}(s)$  não se anule em  $I$ , define-se o **vetor normal unitário a  $\vec{\alpha}(s)$  segundo  $\mathcal{A}$**  pela aplicação*

$$I \ni s \mapsto \vec{N}(s) = \frac{D\vec{T}(s)}{\|D\vec{T}(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}} \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^3).$$

**Observação 4.2.5.** *A Proposição 4.1.13, demonstrada na primeira seção deste Capítulo, tem sua validade assegurada não somente para curvas planas mas também para curvas espaciais. De fato, esse resultado poderia ser demonstrado para curvas no  $\mathbb{R}^3$  sem qualquer alteração naquela prova.*

**Observação 4.2.6.** *O que foi comentado na página 80 acerca de ser  $\kappa(s)$  a função de proporcionalidade entre os campos de vetores  $D\vec{T}(s)$  e  $\vec{N}(s)$ , com as condições lá exigidas, aplica-se também à curvas espaciais.*

Sintetizando estas observações, adicionando nas assunções da Definição 4.2.3 que  $D\vec{T}(s) \neq \vec{0}$  para todo  $s \in I$ , vale que

$$\kappa(s) = \left\langle D\vec{T}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}. \quad (4.10)$$

Conseqüentemente, conclui-se:

$$D\vec{T}(s) = \kappa(s)\vec{N}(s). \quad (4.11)$$

Na seção anterior foi comentado que  $D\vec{T}(s)$  ser nulo no domínio da curva não impede a obtenção do vetor normal. Se  $D\vec{T}(s) \neq \vec{0}$  para todo  $s \in I$  tem-se, então, uma **condição suficiente** para se definir  $\vec{N}(s)$  como manda a Definição 4.2.4. Esta condição **não é necessária** para se definir  $\vec{N}(s)$  como permite o Lema 2.1.36 da página 35.

Conforme comentado após a Definição 3.1.1, na página 50, o primeiro momento em que aparecerá a menção de uma base na qual uma curva está escrita será o da definição seguinte. Isto se deve ao produto vetorial, visto na segunda seção do Capítulo 2, que será freqüentemente usado de agora em diante.

**Definição 4.2.7.** *Sejam  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  métrica diferenciável definida em um aberto conexo  $X \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$  uma base de  $\mathbb{R}^3$ , de **orientação positiva e ortogonal segundo  $\mathcal{A}$**  e*

$$\mathbb{R} \supseteq I \ni s \mapsto \vec{\alpha}_{\mathfrak{B}}(s) = x(s)\vec{b}_1 + y(s)\vec{b}_2 + z(s)\vec{b}_3 = (x(s), y(s), z(s))^{\mathfrak{B}} \in \mathbb{R}^3$$

uma curva com traço contido em  $X$ , PCA segundo  $\mathcal{A}$ ,

$$I \ni s \mapsto \vec{B}[\mathcal{A}](s) = \vec{T}(s) \underset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{N}(s) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^3)$$

é o **vetor binormal unitário à curva no ponto  $\vec{\alpha}(s)$  segundo a métrica  $\mathcal{A}$** .

Os vetores  $\vec{T}(s)$  e  $\vec{N}(s)$  usados para calcular o vetor binormal precisam estar determinados em termos da base  $\mathfrak{B}$ .

Assim como feito a partir da Observação 4.1.5, o vetor binormal terá sua notação simplificada para  $\vec{B}(s)$ .

O campo de vetores  $\vec{B}(s)$  é realmente unitário devido ao Lema 2.2.2 Item (1), porque

$$\|\vec{B}(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}^2 = \|\vec{T}(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}^2 \|\vec{N}(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}^2 \sin^2[\angle(\vec{T}(s), \vec{N}(s))] = 1,$$

pois  $\angle(\vec{T}(s), \vec{N}(s)) = \frac{\pi}{2}$ .

Pela Definição 2.2.1,  $\vec{B}(s) \perp \vec{T}(s)$  e  $\vec{B}(s) \perp \vec{N}(s)$ . Com isso, o conjunto formado por estes três campos de vetores, além de ser uma base positiva de cada  $T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^3)$ , é uma base *ON* segundo  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))$ , o que motiva a seguinte definição:

**Definição 4.2.8.** *Nas condições da última definição, o conjunto*

$$\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$$

*denomina-se **triedro de Frenet** em  $\vec{\alpha}(s)$  segundo a métrica de  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))$ .*

**Definição 4.2.9.** *As retas tangente e normal são adaptadas para curvas espaciais trocando o contra-domínio de  $T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2)$  para  $T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^3)$  na Definição 4.1.10, onde foram estabelecidas para curvas planas. E ainda, define-se a **reta binormal à curva por  $\vec{\alpha}(s)$**  como sendo a aplicação*

$$\mathbb{R} \ni r \mapsto b_{\vec{\alpha}}(r) = \vec{\alpha}(s) + r \vec{B}(s) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^3).$$

**Definição 4.2.10.** *Para uma curva que satisfaz as assunções da Definição 4.2.7 é possível estabelecer os seguintes planos:*

1. **plano osculador** definido por  $[[\vec{T}(s), \vec{N}(s)]]$ ;
2. **plano normal** por  $[[\vec{N}(s), \vec{B}(s)]]$ ;
3. e **plano retificante** como  $[[\vec{T}(s), \vec{B}(s)]]$ .

Por ser base de  $T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^3)$ , o *triedro de Frenet* permite escrever qualquer campo de vetores deste espaço tangente como projeção sobre os seus. Especificamente, tem-se o

**Lema 4.2.11.** *Sob as hipóteses da Definição 4.2.7, qualquer campo de vetores*

$$I \ni s \mapsto \vec{\beta}(s) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^3)$$

*sobre uma curva*

$$I \ni s \mapsto \vec{\alpha}(s) \in \mathbb{R}^3,$$

*PCA e que admite os campos de vetores normal e binormal, pode ser escrito como*

$$\begin{aligned} \vec{\beta}(s) &= \left\langle \vec{\beta}(s), \vec{T}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} \vec{T}(s) + \\ &\quad \left\langle \vec{\beta}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} \vec{N}(s) + \\ &\quad \left\langle \vec{\beta}(s), \vec{B}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} \vec{B}(s). \end{aligned}$$

**Demonstração.**  $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$  é base (ON segundo  $\mathcal{A}$ ), então existem funções

$$I \ni s \mapsto X(s) \in \mathbb{R}, \quad I \ni s \mapsto Y(s) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad I \ni s \mapsto Z(s) \in \mathbb{R}$$

tais que

$$\vec{\beta}(s) = X(s)\vec{T}(s) + Y(s)\vec{N}(s) + Z(s)\vec{B}(s).$$

Assim, tomando o produto interno de  $\vec{\beta}(s)$  ora com  $\vec{T}(s)$ , ora com  $\vec{N}(s)$  e também com  $\vec{B}(s)$  tem-se

$$\left\langle \vec{\beta}(s), \vec{T}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} = X(s),$$

$$\left\langle \vec{\beta}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} = Y(s) \quad \text{e}$$

$$\left\langle \vec{\beta}(s), \vec{B}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} = Z(s).$$

□

**Proposição 4.2.12.** *O campo de vetores binormal é uma aplicação diferenciável e*

$$I \ni s \mapsto D\vec{B}(s) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^3)$$

*é um campo de vetores paralelo a  $\vec{N}(s)$ .*

**Demonstração.** Supor

$$\vec{T}(s) = (x_{\vec{T}}(s), y_{\vec{T}}(s), z_{\vec{T}}(s))^{\mathfrak{B}_1} \quad \text{e} \quad \vec{N}(s) = (x_{\vec{N}}(s), y_{\vec{N}}(s), z_{\vec{N}}(s))^{\mathfrak{B}_1},$$

onde  $\mathfrak{B}_1 = \{\vec{b}_{1\vec{\alpha}(s)}, \vec{b}_{2\vec{\alpha}(s)}, \vec{b}_{3\vec{\alpha}(s)}\}$  é a base  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ , que satisfaz a Definição 4.2.7, aplicada em  $\vec{\alpha}(s)$  (vide Definição 1.4.4).

Estas aplicações são diferenciáveis porque  $\vec{\alpha}(s)$  e  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))$  são por hipótese.

Pela Proposição 2.2.3, o vetor binormal é dado por

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \underset{\mathcal{A}}{\wedge}^{\mathfrak{B}} \vec{N}(s) = \sum_{1 \leq k \leq 3} D_k S_{ij} \vec{e}_{k\vec{\alpha}(s)}$$

onde  $i < j$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $j \in \{2, 3\}$  e  $i \neq k \neq j$  e cada  $\vec{e}_{k\vec{\alpha}(s)}$  é o versor de  $\vec{b}_{k\vec{\alpha}(s)}$  segundo a métrica  $\mathcal{A}$ ,

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} y_{\vec{T}}(s) & z_{\vec{T}}(s) \\ y_{\vec{N}}(s) & z_{\vec{N}}(s) \end{bmatrix}, \quad D_2 = -\det \begin{bmatrix} x_{\vec{T}}(s) & z_{\vec{T}}(s) \\ x_{\vec{N}}(s) & z_{\vec{N}}(s) \end{bmatrix}, \quad D_3 = \det \begin{bmatrix} x_{\vec{T}}(s) & y_{\vec{T}}(s) \\ x_{\vec{N}}(s) & y_{\vec{N}}(s) \end{bmatrix}$$

e  $S_{ij}$  é a área do paralelogramo construído sobre  $\vec{b}_{i\vec{\alpha}(s)}$  e  $\vec{b}_{j\vec{\alpha}(s)}$ , isto é,

$$S_{ij} = \|\vec{b}_{i\vec{\alpha}(s)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} \|\vec{b}_{j\vec{\alpha}(s)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} \sin \theta_{ij}|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} = \|\vec{b}_{i\vec{\alpha}(s)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} \|\vec{b}_{j\vec{\alpha}(s)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}$$

onde  $\theta_{ij} = \angle(\vec{b}_{i\vec{\alpha}(s)}, \vec{b}_{j\vec{\alpha}(s)})$ . Por  $\vec{T}(s)$  e  $\vec{N}(s)$  serem diferenciáveis e pela Proposição 3.1.17 Item (2) é possível afirmar que todas as componentes do vetor binormal são diferenciáveis,

ou seja,  $\vec{B}(s)$  é um campo de vetores diferenciável.

Por este motivo,

$$\vec{B}(s) = (x_{\vec{B}}(s), y_{\vec{B}}(s), z_{\vec{B}}(s))^{\mathfrak{B}_1}$$

admite a derivada covariante  $D\vec{B}(s) =$

$$= \left( x'_{\vec{B}}(s) + \frac{a'_{11}(\vec{\alpha}(s))}{2a_{11}(\vec{\alpha}(s))} x_{\vec{B}}(s), y'_{\vec{B}}(s) + \frac{a'_{22}(\vec{\alpha}(s))}{2a_{22}(\vec{\alpha}(s))} y_{\vec{B}}(s), z'_{\vec{B}}(s) + \frac{a'_{33}(\vec{\alpha}(s))}{2a_{33}(\vec{\alpha}(s))} z_{\vec{B}}(s) \right)^{\mathfrak{B}_1}.$$

Por  $\vec{B}(s)$  ser unitário e pela Proposição 3.1.31 vem que  $\vec{B}(s) \perp D\vec{B}(s)$ , logo,  $D\vec{B}(s) \in \llbracket \vec{T}(s), \vec{N}(s) \rrbracket$ . Diferenciando  $\langle \vec{T}(s), \vec{B}(s) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} = 0$  chega-se a

$$0 = \langle D\vec{T}(s), \vec{B}(s) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} + \langle \vec{T}(s), D\vec{B}(s) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}$$

como  $D\vec{T}(s) // \vec{N}(s)$  e  $\vec{N}(s) \perp \vec{B}(s)$  ocorre  $D\vec{T}(s) \perp \vec{B}(s)$ , ou seja,

$$0 = \langle D\vec{T}(s), \vec{B}(s) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}. \quad (4.12)$$

Logo

$$0 = \langle \vec{T}(s), D\vec{B}(s) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}$$

implicando em  $\vec{T}(s) \perp D\vec{B}(s)$ . Por este motivo  $D\vec{B}(s) // \vec{N}(s)$ .  $\square$

A última proposição dá sentido à seguinte definição.

**Definição 4.2.13.** *Nas condições da Definição 4.2.7, a função*

$$I \ni s \mapsto \tau[\mathcal{A}](s) \in \mathbb{R}$$

*que satisfaz*

$$D\vec{B}(s) = -\tau[\mathcal{A}](s) \vec{N}(s) \quad (4.13)$$

*é chamada **torção de  $\vec{\alpha}$  em  $s$  segundo a métrica  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))$** .*

**Observação 4.2.14.** *O sinal "-" na igualdade (4.13) é uma questão de adaptação. A referência bibliográfica [4] adota a igualdade sem este sinal.*

Quando a métrica  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))$  estiver clara a torção terá sua notação simplificada para  $\tau(s)$ . Quando houver no contexto uma outra métrica  $\mathcal{B}(\vec{\alpha}(s))$  a torção será denotada em termos da métrica,  $\tau[\mathcal{A}](s)$  ou  $\tau[\mathcal{B}](s)$ .

**Proposição 4.2.15.** *A torção de  $\vec{\alpha}$  em  $s$  pode ser obtida por*

$$\tau(s) = - \langle D\vec{B}(s), \vec{N}(s) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}.$$

**Demonstração.** Sendo  $\{D\vec{B}(s), \vec{N}(s)\}$  LD, a projeção de  $D\vec{B}(s)$  sobre  $\vec{N}(s)$  é o próprio  $D\vec{B}(s)$ , assim:

$$\begin{aligned} D\vec{B}(s) &= \text{proj}_{\vec{N}(s)} D\vec{B}(s) \Big|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} \\ &= \left\langle D\vec{B}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} \vec{N}(s) \\ &= -\tau(s) \vec{N}(s) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\tau(s) &= \left\langle D\vec{B}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}. \quad \square \end{aligned}$$

**Proposição 4.2.16.** *Sejam  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  métrica diferenciável, constante ou diagonal, definida em um aberto conexo  $X \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$  uma base de  $\mathbb{R}^3$ , de **orientação positiva e ortogonal segundo  $\mathcal{A}$**  e*

$$\mathbb{R} \supseteq I \ni s \mapsto \vec{\alpha}_{\mathfrak{B}}(s) = x(s)\vec{b}_1 + y(s)\vec{b}_2 + z(s)\vec{b}_3 \in \mathbb{R}^3$$

uma curva com traço contido em  $X$ , PCA segundo  $\mathcal{A}$  e tal que  $D\vec{T}(s) \neq \vec{0}$ . Nestas condições, valem as igualdades

$$\begin{cases} D\vec{T}(s) = & \kappa(s) \vec{N}(s) \\ D\vec{N}(s) = & -\kappa(s) \vec{T}(s) & + \tau(s) \vec{B}(s) \\ D\vec{B}(s) = & -\tau(s) \vec{N}(s) \end{cases} .$$

**Definição 4.2.17.** *Assim como para o caso das curvas planas, na Definição 4.1.18, estas equações são chamadas de **fórmulas de Frenet** para  $\vec{\alpha}(s)$  segundo  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))$ .*

**Demonstração das fórmulas de Frenet.** A terceira destas equações é a que define a torção e foi dada em (4.13).

Durante esta demonstração é simplificado  $D\vec{T}(s)$  por  $\vec{T}$  e o mesmo vale para os demais campos de vetores e funções.

Pelo Lema 4.2.11 é possível escrever

$$D\vec{T} = \left\langle D\vec{T}, \vec{T} \right\rangle_{\mathcal{A}} \vec{T} + \left\langle D\vec{T}, \vec{N} \right\rangle_{\mathcal{A}} \vec{N} + \left\langle D\vec{T}, \vec{B} \right\rangle_{\mathcal{A}} \vec{B},$$

que, pela Proposição 3.1.31 e pelas Equações (4.5) e (4.12), torna-se

$$D\vec{T} = \left\langle D\vec{T}, \vec{N} \right\rangle_{\mathcal{A}} \vec{N} = \kappa \vec{N}$$

assim, a primeira das equações das fórmulas de Frenet é provada.

E ainda,

$$\begin{aligned} D\vec{N} &= \left\langle D\vec{N}, \vec{T} \right\rangle_{\mathcal{A}} \vec{T} + \left\langle D\vec{N}, \vec{N} \right\rangle_{\mathcal{A}} \vec{N} + \left\langle D\vec{N}, \vec{B} \right\rangle_{\mathcal{A}} \vec{B} \\ &= \left\langle D\vec{N}, \vec{T} \right\rangle_{\mathcal{A}} \vec{T} + \left\langle D\vec{N}, \vec{B} \right\rangle_{\mathcal{A}} \vec{B}; \end{aligned}$$

por procedimento análogo ao feito na Equação (4.9), na página 84, demonstra-se que

$$\left\langle D\vec{N}, \vec{T} \right\rangle_{\mathcal{A}} = -\kappa; \quad (4.14)$$

e diferenciando  $0 = \left\langle \vec{N}, \vec{B} \right\rangle_{\mathcal{A}}$  obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle D\vec{N}, \vec{B} \right\rangle_{\mathcal{A}} + \left\langle \vec{N}, D\vec{B} \right\rangle_{\mathcal{A}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\langle D\vec{N}, \vec{B} \right\rangle_{\mathcal{A}} = -\left\langle \vec{N}, D\vec{B} \right\rangle_{\mathcal{A}} = -\left\langle D\vec{B}, \vec{N} \right\rangle_{\mathcal{A}} = \tau, \end{aligned} \quad (4.15)$$

provando a segunda das fórmulas de Frenet.  $\square$

**Exemplo 4.2.18.** *Sejam  $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  e  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  dada por*

$$X \ni \vec{p} \mapsto \mathcal{A}(\vec{p}) = (a_{ij}(x, y, z)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2+y^2+z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

*O produto interno desta métrica, para  $\vec{p} = (x, y, z) \in X$ ,  $\vec{u}_{\vec{p}} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v}_{\vec{p}} = (x_2, y_2, z_2)$ , ambos pertencentes a  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^3)$ , é dado por*

$$\left\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

*Sejam  $I = (-3.01, 3.01) \subset \mathbb{R}$  e*

$$I \ni s \mapsto \vec{\alpha}(s) = (\sinh(s), \cosh(s), 0) \in X.$$

*Por ter a terceira função coordenada nula esta curva tem seu traço contido no plano  $Oxy$ . Como  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  é normal a este plano, isto é confirmado tomando um  $s_0 \in I$  e resolvendo a equação*

$$\left\langle \vec{\alpha}(s) - \vec{\alpha}(s_0), \vec{k} \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} = \langle (x(s) - x(s_0), y(s) - y(s_0), 0), (0, 0, 1) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} = 0.$$

*Esta curva, assim como a do Exemplo 4.1.7, está PCA segundo  $\mathcal{A}$ , pois*

$$\|\vec{\alpha}'(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} = \sqrt{\frac{\cosh^2(s) + \sinh^2(s) + 0^2}{\sinh^2(s) + \cosh^2(s) + 0^2}} = 1.$$

*Seus vetores tangente, normal e binormal segundo  $\mathcal{A}$  são dados pelas aplicações*

$$I \ni s \mapsto \vec{T}(s) = (\cosh(s), \sinh(s), 0) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^3),$$

$$I \ni s \mapsto D\vec{T}(s) = \left( \frac{\sinh(s) - \sinh(3s)}{2 \cosh^2(2s)}, \frac{\cosh(s) + \cosh(3s)}{2 \cosh^2(2s)}, 0 \right) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^3),$$

$$I \ni s \mapsto \vec{N}(s) = (-\sinh(s), \cosh(s), 0) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^3)$$

e

$$I \ni s \mapsto \vec{B}(s) = (0, 0, \sqrt{\cosh(2s)}) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^3).$$

Como no Exemplo 4.1.14, a curvatura de  $\vec{\alpha}$  é dada pela mesma função:

$$I \ni s \mapsto \kappa(s) = \|D\vec{T}(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} = \frac{1}{\cosh(2s)} \in \mathbb{R}.$$

Sendo  $D\vec{B}(s) = \vec{0}$  e a torção é a função de proporcionalidade deste vetor sobre  $\vec{N}(s)$ , é esperado que  $\tau(s) = 0$  para todo  $s$ . De fato, calculada como  $-\langle D\vec{B}(s), \vec{N}(s) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))}$  é identicamente nula em todo  $I$ .

Como na Figura 4.2 (na página 79), a próxima ilustra o triedro de Frenet nos pontos  $\vec{\alpha}(-1)$  e  $\vec{\alpha}(0)$ .

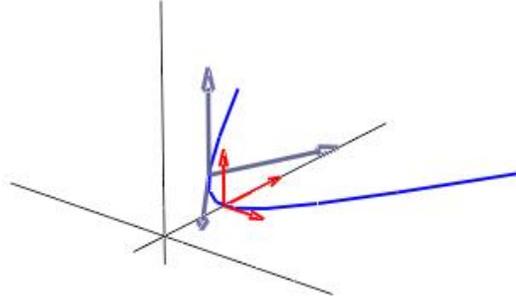


Figura 4.5: triedros de Frenet para  $s = -1$  e  $s = 0$

**Exemplo 4.2.19.** Sejam  $X_1 = \{(x, y, z) : x < 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^3$  e  $I = (0.01, \frac{\pi}{2} - 0.01) \subset \mathbb{R}$ , ambos abertos e conexos. A aplicação matricial

$$X_1 \ni \vec{p} = (x, y, z) \mapsto \mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} a(\vec{p}) & 0 & 0 \\ 0 & d(\vec{p}) & 0 \\ 0 & 0 & f(\vec{p}) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),$$

onde  $a(\vec{p}) = \frac{1}{3y^2}$ ,  $d(\vec{p}) = \frac{1}{3x^2}$  e  $f(\vec{p}) = 1$ , define um produto interno em cada  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^3)$ , sempre que  $\vec{p} = (x, y, z) \in X_1$ , e é algebricamente dado por

$$\langle \vec{u}_{\vec{p}}, \vec{v}_{\vec{p}} \rangle_{\mathcal{A}(\vec{p})} = \frac{x_1 x_2}{3y^2} + \frac{y_1 y_2}{3x^2} + z_1 z_2$$

onde  $\vec{u}_{\vec{p}} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v}_{\vec{p}} = (x_2, y_2, z_2)$  pertencem a  $T_{\vec{p}}(\mathbb{R}^3)$ .

Seja ainda

$$I \ni s \mapsto \vec{\alpha}(s) = (x(s), y(s), z(s)) = \left( -\cos(s), \sin(s), s \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \in X_1$$

uma curva PDR.

Desta forma, em cada  $s \in I$ ,  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))$  define um produto interno em  $T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^3)$ . O traço da curva está na figura seguinte:

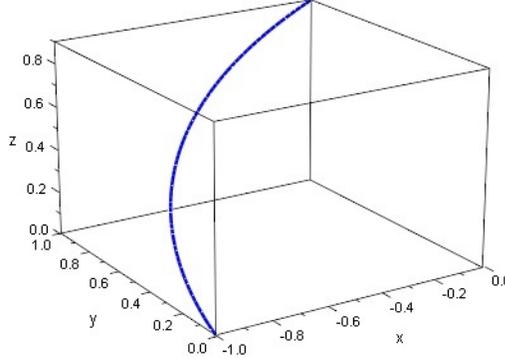


Figura 4.6: o traço da curva  $\vec{\alpha}$

Esta curva está parametrizada pelo comprimento de arco, PCA, pois, aplicando a Proposição 3.1.23, tem-se

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}'(s) &= \left( \sin(s), \cos(s), \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} &= \sqrt{\frac{x'(s)^2}{3y(s)^2} + \frac{y'(s)^2}{3x(s)^2} + z'(s)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\sin^2(s)}{3\sin^2(s)} + \frac{\cos^2(s)}{3\cos^2(s)} + \frac{1}{3}} = 1.\end{aligned}$$

Assim, o vetor tangente fica

$$\vec{T}(s) = \vec{\alpha}'(s) = \left( \sin(s), \cos(s), \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

Para o cálculo da derivada covariante a  $\vec{T}(s)$  segundo  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))$ , como se vê na Definição 3.1.28, faz-se necessário calcular  $\vec{T}'(s)$ , as funções entradas de  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))$  bem como suas derivadas. Então

$$\vec{T}'(s) = (x''(s), y''(s), z''(s)) = (\cos(s), -\sin(s), 0)$$

e

$$a(\vec{\alpha}(s)) = \frac{1}{3\sin^3(s)}, \quad d(\vec{\alpha}(s)) = \frac{1}{3\cos^3(s)} \quad e \quad f(\vec{\alpha}(s)) = 1$$

implicam

$$a'(\vec{\alpha}(s)) = -\frac{2\cos(s)}{3\sin^3(s)}, \quad d'(\vec{\alpha}(s)) = \frac{2\sin(s)}{3\cos^3(s)} \quad e \quad f'(\vec{\alpha}(s)) = 0.$$

Assim

$$\begin{aligned} D\vec{T}(s) &= \left( x''(s) + \frac{a'(\vec{\alpha}(s))}{2a(\vec{\alpha}(s))} x'(s), y''(s) + \frac{c'(\vec{\alpha}(s))}{2c(\vec{\alpha}(s))} y'(s), z''(s) + \frac{f'(\vec{\alpha}(s))}{2f(\vec{\alpha}(s))} z'(s) \right) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Embora  $\vec{\alpha}$  não seja uma reta, sua curvatura é identicamente nula em  $I$

$$\kappa(s) = \|D\vec{T}(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} = 0.$$

Assim como no Exemplo 4.1.15, o vetor normal poderia ser obtido aplicando o Lema 2.1.36. Com  $\vec{T}(s)$  e  $\vec{N}(s)$  em mãos torna-se possível obter  $\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \underset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{N}(s)$ . Mas, obter o vetor binormal deste modo requer uma certa "arbitrariedade" porque terá havido duas "funções coordenadas livres" para se obter a terceira durante a escolha da direção normal. Por esse motivo não é feito aqui.

**Exemplo 4.2.20.** Aproveitando a métrica usada no Exemplo 4.2.18, é trabalhada a curva PDR dada por

$$I = (0, \pi) \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) = \frac{\exp(t)}{2} (\cos(t) + \sin(t), \sin(t) - \cos(t), 2) \in \mathbb{R}^3,$$

que não está PCA segundo esta métrica, pois

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}'(t) &= \exp(t) (\cos(t), \sin(t), 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} &= \sqrt{\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \exp(2t)}{3 \frac{\exp(2t)}{2}}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Seja  $J = [0.01, \pi - 0.01] \subset I$  o domínio da função comprimento de arco que é dada por:

$$J \ni t \mapsto s(t) = \int_{0.01}^t \|\vec{\alpha}'(\xi)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(\xi))} d\xi = \frac{\sqrt{3}(2t - 0.02)}{3} \in \mathbb{R}.$$

Assim, a inversa de  $s(t)$ , usada para obter uma reparametrização de  $\vec{\alpha}(t)$ , PCA segundo  $\mathcal{A}$ , é dada por:

$$s(J) \ni s \mapsto r(s) = \frac{\sqrt{3}}{2}s + 0.01 \in \mathbb{R},$$

onde  $s(J) = [s(0.01), s(\pi - 0.01)] = [0, \frac{\sqrt{3}(2\pi - 0.04)}{3}] \subset \mathbb{R}$ . Definindo  $K = \text{int}(s(J)) = (0, \frac{\sqrt{3}(2\pi - 0.04)}{3})$ , tem-se a nova parametrização da curva dada por:

$$K \ni s \mapsto \vec{\beta}(s) = \frac{\exp(r(s))}{2} (\cos(r(s)) + \sin(r(s)), \sin(r(s)) - \cos(r(s)), 2) \in \mathbb{R}^3,$$

a notação da função  $r(s)$  será usada para simplificar a escrita.

O traço da curva  $\vec{\beta}(s)$  é mostrado na figura seguinte:

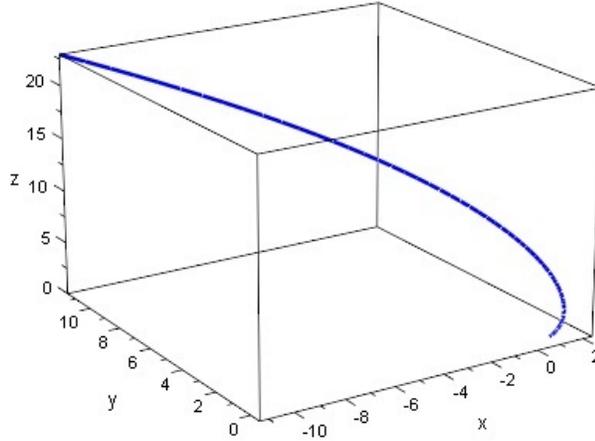


Figura 4.7: o traço da curva  $\vec{\beta}$

Assim, tem-se os seguintes campos de vetores sobre o traço de  $\vec{\beta}(s)$ : o vetor tangente unitário a curva é dado por

$$K \ni s \mapsto \vec{T}(s) = \frac{\sqrt{3}}{2} \exp(r(s)) (\cos(r(s)), \sin(r(s)), 1) \in T_{\vec{\beta}(s)}(\mathbb{R}^3)$$

e a derivada covariante a  $\vec{T}(s)$  segundo  $\mathcal{A}$  é dada por

$$K \ni s \mapsto D\vec{T}(s) = \frac{3}{4} \exp(r(s)) (-\sin(r(s)), \cos(r(s)), 0) \in T_{\vec{\beta}(s)}(\mathbb{R}^3).$$

A curvatura é dada por

$$K \ni s \mapsto \kappa(s) = \|D\vec{T}(s)\|_{\mathcal{A}(\vec{\beta}(s))} = \frac{\sqrt{6}}{4} \in \mathbb{R}.$$

Como as duas primeiras funções coordenadas de  $D\vec{T}(s)$  não se anulam simultaneamente em  $K$ , conclui-se que é um campo de vetores que não-nulo neste domínio. Esta é a condição suficiente para se definir o vetor normal unitário a curva como o versor desta derivada covariante:

$$K \ni s \mapsto \vec{N}(s) = \frac{\sqrt{6}}{2} \exp(r(s)) (-\sin(r(s)), \cos(r(s)), 0) \in T_{\vec{\beta}(s)}(\mathbb{R}^3).$$

A curva  $\vec{\beta}$  foi escrita na base canônica e, sendo esta uma base ortogonal segundo qualquer métrica diagonal, isto possibilita o cálculo do vetor binormal como o produto vetorial de

$\vec{T}(s)$  e de  $\vec{N}(s)$  com base na Proposição 2.2.3 da página 44. As contas estão feitas à parte e o resultado para este campo de vetores é:

$$K \ni s \mapsto \vec{B}(s) = \frac{\sqrt{3}}{2} \exp(r(s)) (-\cos(r(s)), -\sin(r(s)), 1) \in T_{\vec{\beta}(s)}(\mathbb{R}^3).$$

O próximo item a ser obtido desta curva é a sua torção. Pela Proposição 4.2.15, faz-se necessário a obtenção da derivada covariante a  $\vec{B}(s)$  segundo  $\mathcal{A}$ , que é dada por:

$$K \ni s \mapsto D\vec{B}(s) = \frac{3}{4} \exp(r(s)) (\sin(r(s)), -\cos(r(s)), 0) \in T_{\vec{\beta}(s)}(\mathbb{R}^3).$$

Assim, a torção de  $\vec{\beta}(s)$  é dada por

$$K \ni s \mapsto \tau(s) = -\left\langle D\vec{B}(s), \vec{N}(s) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\beta}(s))} = \frac{\sqrt{6}}{4} \in \mathbb{R}.$$

A figura seguinte ilustra dois triedros de Frenet colocados sobre a curva vistos de ângulos distintos.

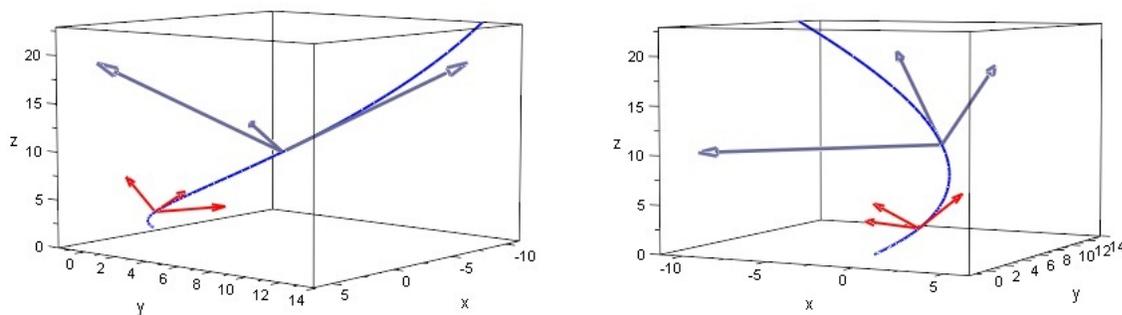


Figura 4.8: triedros de Frenet para  $s = 1.4$  e  $s = 2.7$

### 4.3 Teoria de Curvas numa Parametrização Qualquer

O resultado da Proposição 3.1.26 garante que toda curva *PDR* admite reparametrização *PCA*. Porém, encontrar tal reparametrização requer encontrar a função comprimento de arco,  $s(t)$ , e esta requer o cálculo de uma integral. Após isso, a função  $s(t)$  deve ser invertida. Nem sempre essa integral é trivial, às vezes nem a inversa é facilmente obtida. O exemplo seguinte mostra isso:

**Exemplo 4.3.1.** Para  $I = (0, \pi) \subset \mathbb{R}$ , a curva

$$I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2$$

e a métrica constante do Exemplo 1.3.3, do Capítulo 1,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

definida em todo o  $\mathbb{R}^2$ , são tais que

$$\|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} = \sqrt{2 \sin^2(t) + 3 \cos^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t) + 2}$$

e a função comprimento de arco em  $J = [0.01, \pi - 0.01] \subset I$  é

$$J \ni t \mapsto s(t) = \int_{0.01}^t \sqrt{\cos^2(\xi) + 2} d\xi \in \mathbb{R}$$

que é outra integral custosa de resolver.

Por esse motivo, algumas definições e resultados das duas seções anteriores são reapresentados objetivando estabelecer meios para definir os conceitos de *curvatura* e *referencial de Frenet* para curvas de **qualquer parametrização**. A próxima definição toma como base a Proposição 2.1.30.

**Definição 4.3.2.**

$$\mathbb{R} \supseteq I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n,$$

com  $n = 2$  ou  $n = 3$ , é uma curva **PDR** e  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  uma métrica diferenciável, constante ou diagonal, definida, ao menos, sobre os pontos de  $\vec{\alpha}(I)$ . O **vetor tangente unitário à curva no ponto  $\vec{\alpha}(t)$  segundo a métrica  $\mathcal{A}$**  é o campo de vetores definido por

$$I \ni t \mapsto \vec{T}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}} \in T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^n).$$

Mantidas as suposições desta definição vem a seguinte:

**Definição 4.3.3.** Análogo às Definições 4.1.11 e 4.2.3, a função

$$I \ni t \mapsto \kappa(t) = \|D\vec{T}(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} \in \mathbb{R}_+$$

é a **função curvatura de  $\vec{\alpha}$  em  $t$  segundo a métrica  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))$** .

Assim como no caso das curvas *PCA*, o vetor tangente unitário acima definido é unitário e, segundo a Proposição 3.1.31,  $\vec{T}(t)$  e sua derivada covariante são perpendiculares. Logo, o vetor normal, assim como na Definição 4.1.3, pode ser tomado como o versor de  $D\vec{T}(t)$  (segundo  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))$ ), quando este campo de vetores **não é nulo em nenhum**  $t \in I$ . Isto é o que estabelece a seguinte definição:

**Definição 4.3.4.** *Somando às hipóteses já declaradas que  $D\vec{T}(t)$  não é nulo em qualquer  $t \in I$ , é possível definir sobre os pontos de  $I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$ , com  $n = 2$  ou  $n = 3$ , o campo de vetores chamado **vetor normal unitário a  $\vec{\alpha}(t)$  segundo  $\mathcal{A}$**  por*

$$I \ni t \mapsto \vec{N}(t) = \frac{D\vec{T}(t)}{\left\| D\vec{T}(t) \right\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}} \in T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^n).$$

Como na Seção 4.1, no Exemplo 4.1.15, esta não é a única maneira de se obter o vetor normal. Também é possível obtê-lo mesmo que  $D\vec{T}(t)$  seja nulo em algum ou todo  $t \in I$ .

Com idênticas demonstrações prova-se a validade das Proposições 4.1.13 e 4.1.17 para curvas que não necessariamente estão *PCA*, uma vez que os vetores  $\vec{T}(t)$  e  $\vec{N}(t)$  acima definidos podem satisfazer suas hipóteses. Apenas para sintetizar, sob as hipóteses das Definições 4.3.2, 4.3.3 e 4.3.4, valem as igualdades:

$$\kappa(t) = \left\langle D\vec{T}(t), \vec{N}(t) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} \quad \text{e} \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} D\vec{T}(t) = \kappa(t) \vec{N}(t) \\ D\vec{N}(t) = -\kappa(t) \vec{T}(t) \end{cases} \quad (4.17)$$

**Exemplo 4.3.5.** *A curva do Exemplo 4.3.1, no intervalo  $I$ , tem vetor tangente*

$$\vec{T}(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos(2t) + 5}} (-\sin(t), \cos(t)),$$

*vetor normal*

$$\vec{N}(t) = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{24\cos(2t) + 120}} (3\cos(t), 2\sin(t))$$

*e curvatura*

$$\kappa(t) = \frac{2\sqrt{6}}{\cos(2t) + 5}.$$

*O gráfico da função  $\kappa(t)$  pode ser analisado na figura seguinte*

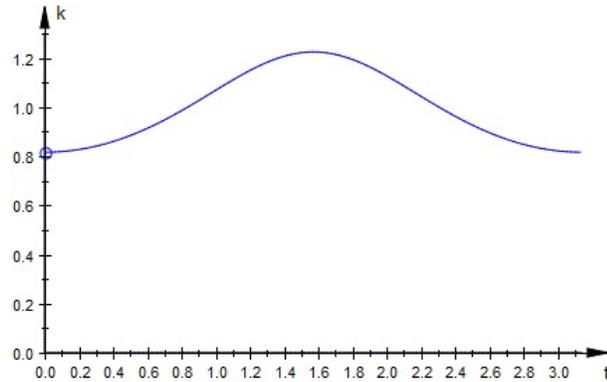


Figura 4.9: gráfico da curvatura

enquanto que o aspecto geral dessa curva e alguns referenciais de Frenet dispostos sobre ela podem ser analisados na figura seguinte:

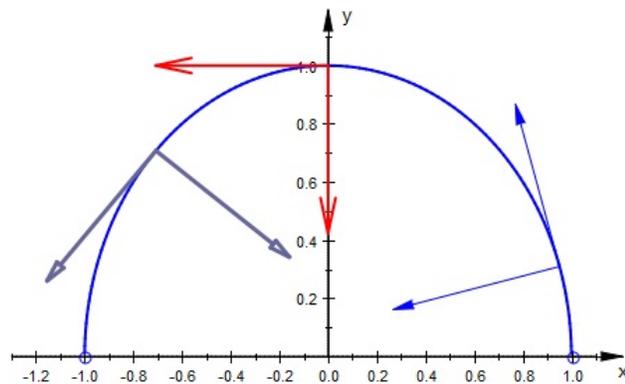


Figura 4.10: a curva com alguns referenciais de Frenet

A definição que segue é restrita a curvas espaciais.

**Definição 4.3.6.** Nas hipóteses da Definição 4.3.4 será adicionada uma base de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ , de **orientação positiva** e **ortogonal** segundo  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  com a qual se denotará a curva

$$\mathbb{R} \supseteq I \ni t \mapsto \vec{\alpha}_{\mathfrak{B}}(t) = (x(t), y(t), z(t))^{\mathfrak{B}} \in \mathbb{R}^3$$

e os campos de vetores  $\vec{T}(t)$  e  $\vec{N}(t)$ .

$$I \ni t \mapsto \vec{B}(t) = \vec{T}(t) \underset{\mathcal{A}}{\wedge}^{\mathfrak{B}} \vec{N}(t) \in T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^3)$$

é o **vetor binormal unitário à curva no ponto  $\vec{\alpha}(t)$  segundo a métrica  $\mathcal{A}$** .

A definição de torção estabelecida para curvas PCA foi precedida por uma proposição que provou a diferenciabilidade do campo de vetores binormal e o paralelismo entre  $D\vec{B}(s)$

e o vetor normal. Especificamente, estas foram a Definição 4.2.13 e a Proposição 4.2.12.

Repetindo a prova lá feita para uma curva numa parametrização qualquer e com os campos de vetores do triedro de Frenet,  $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$  das Definições 4.3.2, 4.3.4 e 4.3.6 desta seção, chega-se ao mesmo resultado. Ou seja, aquela afirmação também é válida neste contexto. Assim,

$$D\vec{B}(t) // \vec{N}(t) \quad (4.18)$$

Nas mesmas hipóteses necessárias para se definir o vetor binormal, é possível definir a torção como a função que faz a **proporcionalidade** entre os campos de vetores  $D\vec{B}(t)$  e  $\vec{N}(t)$  como segue:

**Definição 4.3.7.** *Nas condições da Definição 4.3.6, a torção de  $\vec{\alpha}$  em  $t$  segundo a métrica  $\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))$  é a função*

$$I \ni t \mapsto \tau(t) \in \mathbb{R}$$

que faz a proporcionalidade

$$D\vec{B}(t) = -\tau(t) \vec{N}(t).$$

A desvantagem de se definir estes conceitos para curvas numa parametrização qualquer é que as contas tornam-se muito mais longas. Por outro lado, é possível enumerar duas vantagens: a primeira é a de conseguir a curvatura e a torção, por exemplo, de curvas que, como no Exemplo 4.3.1, requerem a resolução de uma integral intrincada para se fazer à mão ou mesmo com alguma ferramenta computacional; em segundo, os resultados das proposições das Seções 4.1 e 4.2 podem ser trazidos para este contexto sem dificuldades, como o que já foi feito com as equações numeradas por (4.16), (4.17) e (4.18).

Seguindo esta filosofia, dentro do assunto desta seção também valem os resultados das Proposições 4.2.15 e 4.2.16. Ou seja,

$$\tau(t) = - \left\langle D\vec{B}(t), \vec{N}(t) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} \quad (4.19)$$

e

$$\begin{cases} D\vec{T}(t) = & \kappa(t) \vec{N}(t) \\ D\vec{N}(t) = & -\kappa(t) \vec{T}(t) & + \tau(t) \vec{B}(t) \\ D\vec{B}(t) = & -\tau(t) \vec{N}(t) \end{cases} \quad (4.20)$$

**Exemplo 4.3.8.** *Sejam  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  a métrica do Exemplo 4.2.18, da página 91, e  $I = (0, \pi) \subset \mathbb{R}$  com o qual é definida uma curva PDR dada por:*

$$I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) = -(2 \sin^2(t), \sin(2t), 2 \cos(t)) \in \mathbb{R}^3$$

escrita em termos da base canônica. A base canônica é ortogonal segundo qualquer métrica diagonal, conforme foi visto no Exemplo 2.1.22 da página 28.

Esta curva tem seu traço contido na esfera do  $\mathbb{R}^3$  centrada na origem e de raio 2. Com efeito, a equação desta superfície é  $X^2 + Y^2 + Z^2 - 4 = 0$  e, de fato,  $x(s)^2 + y(s)^2 + z(s)^2 - 4 = 0$ .

O traço de  $\vec{\alpha}$  e a esfera estão na figura seguinte:

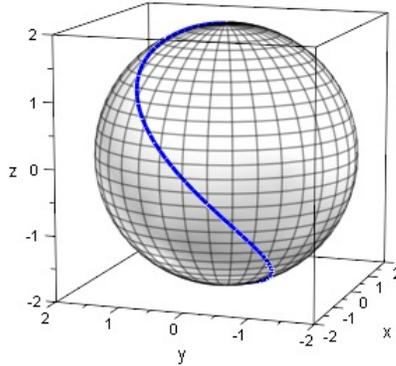


Figura 4.11: o traço da curva sobre a esfera

Seguindo a notação do Exemplo 2.1.5, do Capítulo 2, para  $\vec{p} \in \vec{\alpha}(I)$  esta métrica tem

$$\begin{aligned} a(\vec{p}) &= d(\vec{p}) = f(\vec{p}) = \frac{1}{\|\vec{p}\|_C} \Rightarrow \\ \Rightarrow a(\vec{\alpha}(t)) &= d(\vec{\alpha}(t)) = f(\vec{\alpha}(t)) = \frac{1}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow a'(\vec{\alpha}(t)) &= d'(\vec{\alpha}(t)) = f'(\vec{\alpha}(t)) = 0 \end{aligned}$$

e

$$b(\vec{p}) = c(\vec{p}) = e(\vec{p}) = 0.$$

Esta curva tem o vetor derivada primeira dado por

$$\vec{\alpha}'(t) = -2(\sin(2t), \cos(2t), -\sin(t))$$

e assim, sua função comprimento de arco de  $\vec{\alpha}(t)$ , medida num intervalo como  $J = [0.01, \pi - 0.01] \subset I$ , é dada por:

$$s(t) = \int_{0.01}^t \|\vec{\alpha}'(\xi)_{\vec{\alpha}(\xi)}\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(\xi))} d\xi = \int_{0.01}^t \frac{\sqrt{2(3 - \cos(2t))}}{2} d\xi.$$

Devido a dificuldade da obtenção desta integral, faz-se necessário aplicar as definições desta seção para se trabalhar a curva  $\vec{\alpha}(t)$ .

No que segue, é adotada a função

$$I \ni t \mapsto h(t) = 3 - \cos(2t) \in \mathbb{R}_+^*$$

para simplificar as notações.

Esta curva tem vetor tangente unitário dado por:

$$I \ni t \mapsto \vec{T}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{h(t)}} (-\sin(2t), -\cos(2t), \sin(t)) \in T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^3)$$

e a derivada covariante a  $\vec{T}(t)$  dada por

$$I \ni t \mapsto D\vec{T}(t) = \frac{\sqrt{2}}{(h(t))^{\frac{3}{2}}} (3 - 12 \cos 2t + \cos 4t, 12 \sin 2t - \sin 4t, 4 \cos t) \in T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^3).$$

A curvatura de  $\vec{\alpha}(t)$  segundo a métrica  $\mathcal{A}$  foi calculada como a norma desta derivada covariante com o "software" Mathematica 6.0 e é mostrada abaixo:

$$I \ni t \mapsto \kappa(t) = \|D\vec{T}(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} = \sqrt{\frac{26 - 6 \cos(2t)}{(h(t))^2}} \in \mathbb{R}.$$

Seu gráfico está impresso na figura seguinte.

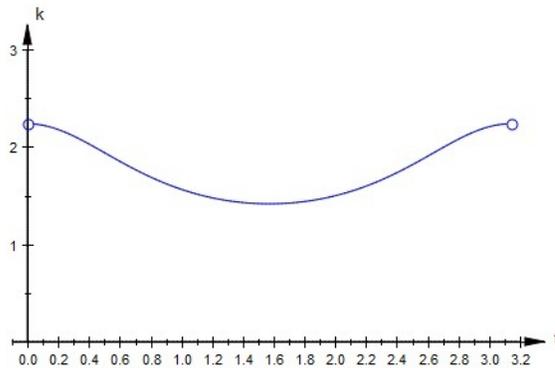


Figura 4.12: gráfico da curvatura

$D\vec{T}(t)$  nunca se anula em  $I$ , então é possível definir o vetor normal da curva, de  $I$  em  $T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathbb{R}^3)$ , como o versor deste campo de vetores:

$$\vec{N}(t) = \frac{D\vec{T}(t)}{\|D\vec{T}(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}} = \frac{\sqrt{2}}{\kappa(t)(h(t))^{\frac{3}{2}}} (3 - 12 \cos 2t + \cos 4t, 12 \sin 2t - \sin 4t, 4 \cos t).$$

Seguindo a Proposição 2.2.3, do Capítulo 2, obtém-se o campo de vetores binormal como o resultado de  $\vec{T}(t) \overset{\mathcal{A}}{\wedge} \vec{N}(t) = \vec{B}(t) =$

$$= \frac{1}{(h(t))^2 \kappa(t)} (-16 \cos t + 9 \cos 3t - \cos 5t, 22 \sin t - 9 \sin 3t + \sin 5t, 8 \cos 2t - 24).$$

A torção da curva,

$$\tau(t) = - \left\langle D\vec{B}(t), \vec{N}(t) \right\rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))},$$

foi calculada com o "software" Mathematica 6.0 e é a função apresentada a seguir:

$$\tau(t) = - \frac{6\sqrt{2h(t)} \sin(t)}{3h(t) + 4},$$

seu gráfico é dado pela Figura 4.13:

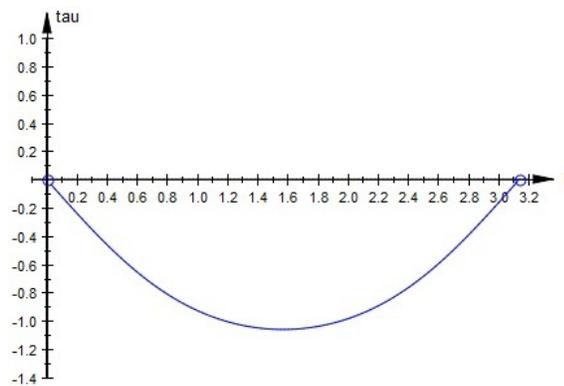


Figura 4.13: gráfico da torção

A próxima figura ilustra dois triedros de Frenet colocados sobre a curva para  $t = 0.5$  e  $t = 2.51$

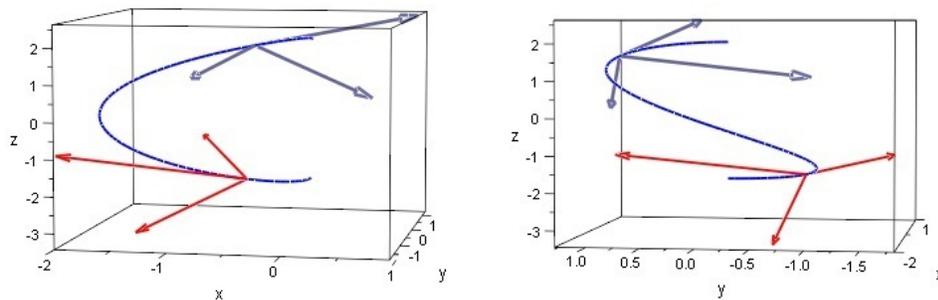


Figura 4.14: triedros de Frenet sobre a curva

É possível ainda colocar junto destes vetores uma representação local da esfera que contém o traço da curva (com três ângulos de visão distintos):

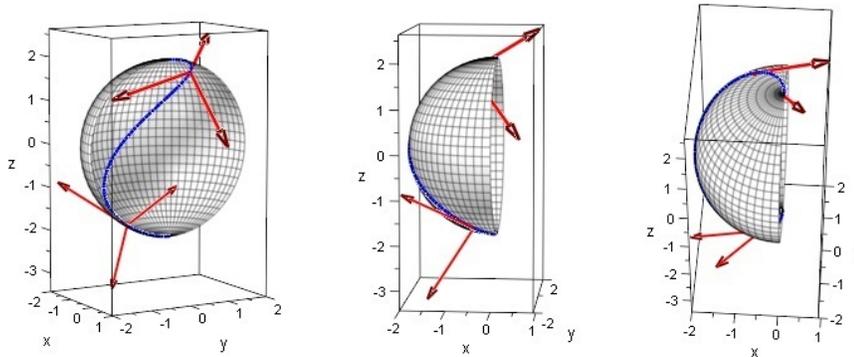


Figura 4.15: os triedros de Frenet sobre a curva e a esfera que a contém

**Exemplo 4.3.9.** Com a métrica dada no Exemplo 4.2.19 no domínio  $X_2 = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^3$ ,

$$X_2 \ni \vec{p} = (x, y, z) \mapsto \mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3y^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

e, para  $I = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ , a curva PDR

$$I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) = t(1, 1, 1) + (1, 1, 1) \in X_2$$

tem seu traço contido no domínio da aplicação  $\mathcal{A}$ . Além disso, é uma reta e não está parametrizada por comprimento de arco. E também, esta reta não tem curvatura nula, confirmando o que foi observado na página 83.

Objetivando obter simplificações, são declaradas as seguintes funções reais:

$$I \ni t \mapsto g(t) = t + 1 \in \mathbb{R}_+^* \quad e \quad I \ni t \mapsto h(t) = 3t^2 + 6t + 5 \in \mathbb{R}_+^*.$$

Então,

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}'(t) &= (1, 1, 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} &= \sqrt{\frac{2}{3(t+1)^2} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{3h(t)}}{3g(t)} \\ &\neq 1, \end{aligned}$$

embora  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} = 1$ .

Assim, define-se o vetor tangente unitário à curva como o versor do vetor derivada primeira:

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3(g(t))^2} + 1}}(1, 1, 1)$$

O campo de vetores derivada covariante a  $\vec{T}(t)$  segundo  $\mathcal{A}$  é dado por:

$$D\vec{T}(t) = \frac{\sqrt{3}}{(h(t))^{\frac{3}{2}}}(-3(g(t))^2, -3(g(t))^2, 2);$$

a norma deste fornece a curvatura como sendo

$$I \ni t \mapsto \kappa(t) = \frac{\sqrt{6}}{h(t)} \in \mathbb{R}$$

cujos gráfico pode ser visto na Figura 4.16.

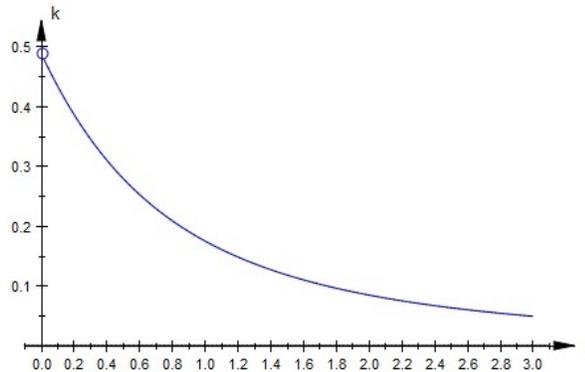


Figura 4.16: gráfico da curvatura

Embora a curvatura não se anule, ocorre  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \kappa(t) = 0$ .

Sendo que  $D\vec{T}(t)$  não se anula em  $I$ , é possível definir o campo de vetores normal unitário. Esse é dado por:

$$\vec{N}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{h(t)}}(-3(g(t))^2, -3(g(t))^2, 2).$$

Já o campo de vetores binormal é dado por:

$$\vec{B}(t) = \frac{g(t)\sqrt{6}}{2}(1, -1, 0).$$

Para esta curva tem-se  $\tau(t) = 0$ , porque  $D\vec{B}(t) = \vec{0}$ . A Figura 4.17 ilustra dois triedros de Frenet colocados sobre o traço da curva para  $t = 1.9$  e  $t = 4.8$ .

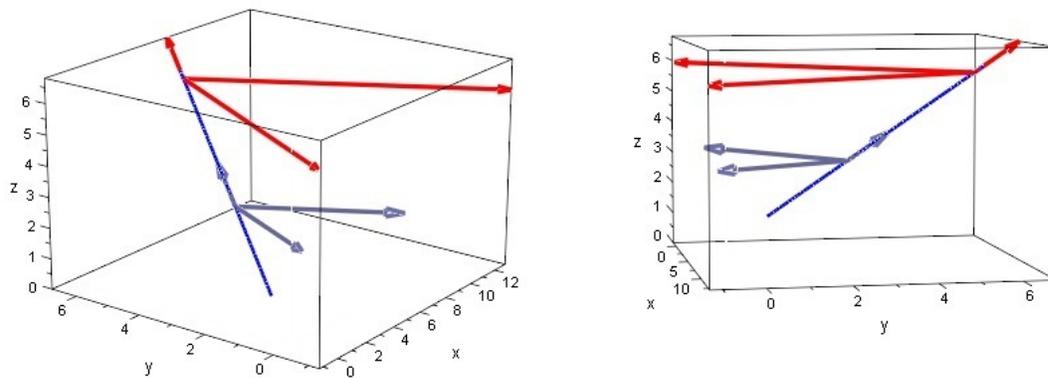


Figura 4.17: triedros de Frenet sobre a curva

## 4.4 O Teorema Fundamental de Curvas Planas

O *Teorema Fundamental de Curvas* também pode ser tratado para curvas espaciais. Isso é o que faz os autores das referências [7] e [13]. Este último chama este assunto de *Congruência de Curvas*.

Nesta seção este teorema é parcialmente tratado: somente para curvas planas e seguindo a linha de raciocínio apresentada na referência [15]. Uma métrica constante qualquer é adotada para se produzir uma parte do resultado. De agora em diante, o *Teorema Fundamental de Curvas Planas* é referido pela sigla **TFC**.

Neste último livro, na quinta seção de seu primeiro capítulo, a autora declara o teorema da seguinte forma:

- " **Teorema:** (a) Dada uma função diferenciável  $\kappa(s)$ ,  $s \in I \subseteq \mathbb{R}$ , existe uma curva regular  $\vec{\alpha}(s)$ , parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , cuja curvatura é  $\kappa(s)$ .  
 (b) A curva  $\vec{\alpha}(s)$  acima é única quando fixamos  $\vec{\alpha}(s_0) = p_0$  e  $\vec{\alpha}'(s_0) = v_0$ , onde  $v_0$  é um versor unitário de  $\mathbb{R}^2$ .  
 (c) Se duas curvas  $\vec{\alpha}(s)$  e  $\vec{\beta}(s)$  têm mesma curvatura, então diferem por sua posição no plano, isto é, existe uma rotação  $L$  e uma translação  $T$  em  $\mathbb{R}^2$  tais que

$$\vec{\alpha}(s) = (L \circ T)(\vec{\beta}(s)). "$$

onde o produto interno usado e a base são canônicos. Tomando  $s_0 \in I$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  e pondo  $p_0 = (x_0, y_0)$ , a curva  $\vec{\alpha}(s) = (x(s), y(s))$  tem suas funções coordenadas dadas por:

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(\xi) + \lambda) d\xi \\ y(s) &= y_0 + \int_{s_0}^s \sin(\theta(\xi) + \lambda) d\xi, \end{aligned} \tag{4.21}$$

sendo

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s \kappa(\xi) d\xi. \tag{4.22}$$

O número  $\lambda$  corresponde a um ângulo inicial, ou à constante de integração da função  $\theta(s)$ .

**Segundo a métrica canônica**, a curva  $I \ni s \mapsto \vec{\alpha}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} \in \mathbb{R}^2$  assim construída está *PCA* e tem como curvatura a função  $\kappa(s)$  dada.

Seja  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  uma aplicação matricial **constante** dada por

$$\mathbb{R}^2 \ni \vec{p} \mapsto \mathcal{A}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Sejam  $\vec{u}^{\mathcal{C}} = (x_1, y_1)^{\mathcal{C}}$  e  $\vec{v}^{\mathcal{C}} = (x_2, y_2)^{\mathcal{C}}$  vetores do  $\mathbb{R}^2$ . O produto interno por  $\mathcal{A}$  definido é algebricamente dado por:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathcal{A}} = ax_1x_2 + b(x_2y_1 + x_1y_2) + cy_1y_2. \tag{4.23}$$

Os vetores da base canônica,  $\vec{i} = (1, 0)$  e  $\vec{j} = (0, 1)$ , satisfazem as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} \langle \vec{i}, \vec{i} \rangle_{\mathcal{A}} = a \\ \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle_{\mathcal{A}} = b \\ \langle \vec{j}, \vec{j} \rangle_{\mathcal{A}} = c \end{cases} \quad (4.24)$$

A curva  $\vec{\alpha}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$ , definida no intervalo de  $\mathbb{R}$  aberto e conexo  $I$ , com funções coordenadas dadas pelas equações (4.21), não satisfaz a condição **(a)** do enunciado do *TFC* quando o produto interno canônico é substituído pelo dado em (4.23). De fato:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}'(s) &= \cos(\theta(s) + \lambda)\vec{i} + \sin(\theta(s) + \lambda)\vec{j} \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(s)\|_{\mathcal{A}}^2 &= \langle \vec{\alpha}'(s), \vec{\alpha}'(s) \rangle_{\mathcal{A}} \\ &= \cos^2(\theta(s) + \lambda) \langle \vec{i}, \vec{i} \rangle_{\mathcal{A}} + \\ &\quad \sin(2\theta(s) + 2\lambda) \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle_{\mathcal{A}} + \\ &\quad \sin^2(\theta(s) + \lambda) \langle \vec{j}, \vec{j} \rangle_{\mathcal{A}} \\ &= a \cos^2(\theta(s) + \lambda) + \\ &\quad b \sin(2\theta(s) + 2\lambda) + \\ &\quad c \sin^2(\theta(s) + \lambda) \neq 1. \end{aligned}$$

Ou seja, a curva  $\vec{\alpha}(s)$  não está *PCA* segundo a métrica  $\mathcal{A}$ . Isto ocorre porque a base canônica **não** é uma base *ON* segundo a métrica  $\mathcal{A}$ , conforme foi visto nas equações numeradas por (4.24).

A existência de uma base *ON* segundo uma métrica dada foi provada na Proposição 2.1.21 na página 27. Essa proposição dá base à seguinte afirmação: seja  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$  base de  $\mathbb{R}^2$ , *ON* segundo a métrica constante  $\mathcal{A}$ .

Com a base  $\mathfrak{B}$  e com as funções coordenadas declaradas em (4.21) a curva definida na base  $\mathfrak{B}$ , de domínio  $I$ , dada por

$$\vec{\alpha}_{\mathfrak{B}}(s) = x(s)\vec{b}_1 + y(s)\vec{b}_2 \quad (4.25)$$

está *PCA* segundo  $\mathcal{A}$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}
 \vec{\alpha}'_{\mathfrak{B}}(s) &= \cos(\theta(s) + \lambda) \vec{b}_1 + \sin(\theta(s) + \lambda) \vec{b}_2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \|\vec{\alpha}'_{\mathfrak{B}}(s)\|_{\mathcal{A}}^2 &= \cos^2(\theta(s) + \lambda) \langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle_{\mathcal{A}} + \\
 &\quad \sin(2\theta(s) + 2\lambda) \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle_{\mathcal{A}} + \\
 &\quad \sin^2(\theta(s) + \lambda) \langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle_{\mathcal{A}} \\
 &= \cos^2(\theta(s) + \lambda) + \sin^2(\theta(s) + \lambda) = 1.
 \end{aligned}$$

Resta verificar se  $\vec{\alpha}(s)$  tem curvatura  $\kappa(s)$ . Esta é calculada como a norma do campo de vetores derivada covariante a  $\vec{T}(s) = \vec{\alpha}'(s)$  segundo  $\mathcal{A}$ . Mas, sendo a métrica constante, tem-se  $D\vec{T}(s) = \vec{T}'(s) = \vec{\alpha}''(s)$ , conforme visto no Exemplo 4.1.16. Assim:

$$\begin{aligned}
 \vec{\alpha}''_{\mathfrak{B}}(s) &= -\theta'(s) \sin(\theta(s) + \lambda) \vec{b}_1 + \theta'(s) \cos(\theta(s) + \lambda) \vec{b}_2 \\
 &= -\kappa(s) \sin(\theta(s) + \lambda) \vec{b}_1 + \kappa(s) \cos(\theta(s) + \lambda) \vec{b}_2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \|\vec{\alpha}''_{\mathfrak{B}}(s)\|_{\mathcal{A}}^2 &= \langle \vec{\alpha}''(s), \vec{\alpha}''(s) \rangle_{\mathcal{A}} \\
 &= (\kappa(s))^2 \sin^2(\theta(s) + \lambda) \langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle_{\mathcal{A}} - \\
 &\quad (\kappa(s))^2 \sin(2\theta(s) + 2\lambda) \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle_{\mathcal{A}} + \\
 &\quad (\kappa(s))^2 \cos^2(\theta(s) + \lambda) \langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle_{\mathcal{A}} \\
 &= (\kappa(s))^2 (\sin^2(\theta(s) + \lambda) + \cos^2(\theta(s) + \lambda)) \\
 &= (\kappa(s))^2.
 \end{aligned}$$

Neste ponto convém admitir que

$$\kappa(s) \geq 0, \tag{4.26}$$

em adição às hipóteses já dadas. Com isto, conclui-se que

$$\begin{aligned}
 \|\vec{\alpha}''_{\mathfrak{B}}(s)\|_{\mathcal{A}}^2 &= (\kappa(s))^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \|\vec{\alpha}''_{\mathfrak{B}}(s)\|_{\mathcal{A}} &= \kappa(s).
 \end{aligned}$$

Como resumo da discussão apresentada nesta seção, vem o próximo resultado:

**Proposição 4.4.1.** *Sejam*

1.  $I$  um aberto conexo de  $\mathbb{R}$ ;
2.  $I \ni s \mapsto \kappa(s) \in \mathbb{R}_+$  uma função diferenciável;
3.  $\mathbb{R}^2 \ni \vec{p} \mapsto \mathcal{A}(\vec{p}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  uma métrica constante;
4.  $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$  uma base de  $\mathbb{R}^2$ , ON segundo  $\mathcal{A}(\vec{p})$ ;
5.  $s_0 \in I$  e  $I \ni s \mapsto \theta(s) = \int_{s_0}^s \kappa(\xi) d\xi \in \mathbb{R}$ ;
6.  $x_0, y_0, \lambda \in \mathbb{R}$  e;
- 7.

$$\begin{cases} x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(\xi) + \lambda) d\xi \\ y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \sin(\theta(\xi) + \lambda) d\xi \end{cases}$$

Sob estas hipóteses, a curva dada por

$$I \ni s \mapsto \vec{\alpha}_{\mathfrak{B}}(s) = \vec{p}_0^{\mathfrak{B}} + (x(s), y(s))^{\mathfrak{B}} \in \mathbb{R}^2$$

tem curvatura  $\kappa(s)$  segundo a métrica  $\mathcal{A}(\vec{p})$ .

Portanto, mudando a base na qual se escreve a curva mais a restrição (4.26), o Item **(a)** do *TFC* torna-se válido numa métrica constante qualquer. Os Itens **(b)** e **(c)** do teorema **não** são tratados aqui.

Dois exemplos de aplicação para o conteúdo desta seção estão feitos no Capítulo 5 (página 116).

---

# EXEMPLOS

---

Agora são feitos mais alguns exemplos que não foram colocados nos capítulos anteriores para não desviar o fluxo da leitura.

A métrica diferenciável e diagonal da Geometria Não-Euclidiana de Lobatchevski

$$\mathcal{A}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

definida para todo ponto no plano de Lobatchevski

$$(x, y) \in X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \quad (5.2)$$

dada no Exemplo 2.1.18 (página 26), ainda é usada aqui para tratar mais dois exemplos de curvas planares.

Esses dois exemplos fazem a primeira seção deste capítulo.

Ao fim da Seção 4.4 está acordada uma aplicação do *Teorema Fundamental de Curvas Planas* que é feito aqui na segunda seção. A métrica usada é a que estabelece o produto interno do Exemplo 1.2.3 (página 11), dado por

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Por fim, objetivando exemplificar a noção de *função distância segundo uma norma dada*, estabelecida na Definição 2.1.42 na página 40, compõe a presente terceira seção um exemplo onde é feita uma função desta usando conceitos estabelecidos nesta dissertação.

## 5.1 Mais Dois Exemplos de Curvas

Nos dois exemplos seguintes a métrica usada é a definida no início deste Capítulo em (5.1) e (5.2).

**Exemplo 5.1.1.** *Sejam  $I = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$  e a curva PDR*

$$I \ni t \mapsto \vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t)) = (x_0, t) \in \mathbb{R}^2$$

com um **fixo**  $x_0 \in \mathbb{R}$ . *Esta curva trata-se de uma reta vertical contida no semiplano definido por  $X$ , ou seja, tem seu traço contido no domínio de  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$ .*

$\vec{\gamma}(t)$  não está PCA segundo  $\mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}'(t) &= (x'(t), y'(t)) = (0, 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\vec{\gamma}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\gamma}(t))} &= \sqrt{\frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{(y'(t))^2}} \\ &= \frac{1}{t} \neq 1, \end{aligned}$$

exceto quando  $t = 1$ .

*É necessário encontrar uma reparametrização por comprimento de arco. Seguindo a metodologia da Proposição 3.1.26, a função comprimento de arco é definido num subconjunto fechado do domínio da curva. Um ponto  $t_0 \in I$  é escolhido arbitrariamente e o comprimento de arco é medido a partir deste. Obviamente,  $t_0$  será escolhido próximo de 0 para que se aproveite ao máximo o traço da curva com todas as suas características. Seja  $t_0 = 0.01$ . Assim, com  $J = [0.01, +\infty) \subset I$ , define-se*

$$J \ni t \mapsto s(t) = \int_{0.01}^t \|\vec{\gamma}'(\xi)\|_{\mathcal{A}(\vec{\gamma}(\xi))} d\xi = \log(100t) \in \mathbb{R}.$$

Sendo  $s(J) = \mathbb{R}_+$ , sua inversa é dada por

$$\mathbb{R}_+ \ni s \mapsto r(s) = \frac{\exp(s)}{100} \in \mathbb{R}.$$

*A curva reparametrizada por comprimento de arco é dada por  $\vec{\gamma} \circ r$ . Como se deseja trabalhar a diferenciação da curva e como foi convencionado na Observação 3.1.7 (página 52), o domínio da curva deve ser um aberto (e conexo) de  $\mathbb{R}_+$  (que é fechado). Então, o domínio de  $\vec{\gamma} \circ r$  é tomado como o próprio  $I$  definido inicialmente.*

Seja

$$I \ni s \mapsto \vec{\alpha}(s) = (\vec{\gamma} \circ r)(s) = (x(r(s)), y(r(s))) = \left(x_0, \frac{\exp(s)}{100}\right) \in X$$

*a reparametrização de  $\vec{\gamma}$  por  $r(s)$ , PCA segundo  $\mathcal{A}$ . Um exemplo de como poderia ser o traço desta curva é mostrado pela figura seguinte:*

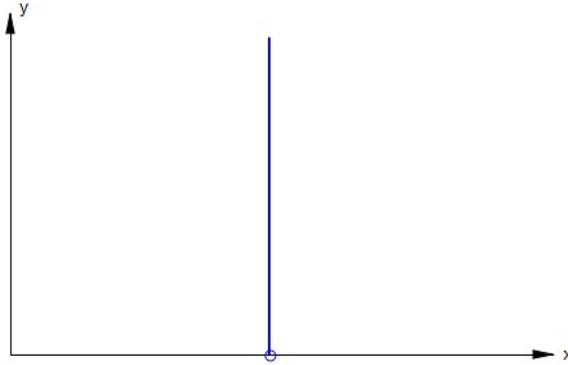


Figura 5.1: exemplo do traço de  $\vec{\alpha}(s)$

Em seguida vem seus campos de vetores tangente e normal (definidos na Seção 4.1 Capítulo 4).

$$I \ni s \mapsto \vec{T}(s) = \vec{\alpha}'(s) = (x_{\vec{T}}(s), y_{\vec{T}}(s)) = \left(0, \frac{\exp(s)}{100}\right) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2);$$

de

$$I \ni s \mapsto D\vec{T}(s) = (0, 0) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2)$$

obtém-se a curvatura de  $\vec{\alpha}$ :

$$I \ni s \mapsto \kappa(s) = 0 \in \mathbb{R};$$

mesmo com a curvatura identicamente nula em todo  $I$  não é impossível obter o vetor normal unitário. Sejam  $\bar{x}(s)$  e  $\bar{y}(s)$  funções de  $I$  em  $\mathbb{R}$ , coordenadas da direção normal a  $\vec{T}(s)$  em  $\mathbb{R}^2$ . Então, satisfazem a seguinte equação

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{T}(s), (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) \rangle_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(s))} \\ &= \frac{x_{\vec{T}}(s)\bar{x}(s) + y_{\vec{T}}(s)\bar{y}(s)}{(y_{\vec{T}}(s))^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 &= x_{\vec{T}}(s)\bar{x}(s) + y_{\vec{T}}(s)\bar{y}(s) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \bar{y}(s) &= \frac{x_{\vec{T}}(s)\bar{x}(s)}{y_{\vec{T}}(s)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, dado qualquer função  $\bar{x}(s)$  toma-se  $\bar{y}(s) = 0$ . Como o vetor  $\vec{T}(s)$  é unitário e tem uma de suas funções coordenadas identicamente nula, será tomado  $\bar{x}(s) = y_{\vec{T}}(s)$  para que já tenha norma unitária também. Assim,

$$I \ni s \mapsto \vec{N}(s) = (x_{\vec{N}}(s), y_{\vec{N}}(s)) = \left(\frac{\exp(s)}{100}, 0\right) \in T_{\vec{\alpha}(s)}(\mathbb{R}^2).$$

A figura seguinte mostra o referencial de Frenet colocado sobre a curva para  $t = 3.2$  e  $t = 4.3$ :

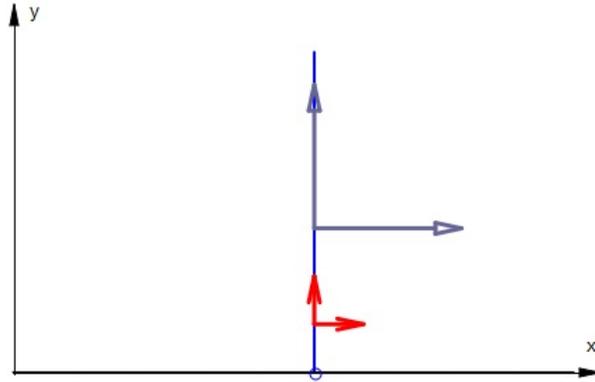


Figura 5.2: referências de Frenet sobre a curva

Cabe observar que se fosse tomado  $x_{\vec{N}}(s) = -y_{\vec{T}}(s)$ , o vetor  $\vec{N}(s)$  ainda seria normal à curva mas teria sentido oposto ao apresentado na última figura.

**Exemplo 5.1.2.** *Seja*

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \vec{\beta}(t) = (x(t), y(t)) = (t, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

curva PDR, onde é fixado  $y_0 \in \mathbb{R}_+^*$ . Trata-se de uma reta horizontal com seu traço contido em  $X$ . Não está PCA segundo  $\mathcal{A}$ :

$$\vec{\beta}'(t) = (1, 0) \Rightarrow \|\vec{\beta}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\beta}(t))} = \frac{1}{y_0} \neq 1,$$

exceto se  $y_0 = 1$ .

A função comprimento de arco é aqui medida em um intervalo  $J = [t_0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ :

$$J \ni t \mapsto s(t) = \int_{t_0}^t \|\vec{\beta}'(\xi)\|_{\mathcal{A}(\vec{\beta}(\xi))} d\xi = \frac{1}{y_0}(t - t_0) \in \mathbb{R}.$$

Sua inversa é dada por

$$s(J) \ni s \mapsto r(s) = sy_0 + t_0 \in \mathbb{R},$$

onde  $s(J) = \mathbb{R}_+$ .

A reparametrização procurada é dada por  $\vec{\beta} \circ r$  e seu domínio deve ser o intervalo aberto  $I = \text{int}(s(J)) = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ . Assim,

$$I \ni s \mapsto \vec{\psi}(s) = (\vec{\beta} \circ r)(s) = (x(r(s)), y(r(s))) = (sy_0 + t_0, y_0) \in X.$$

Uma amostra de como poderia ser seu traço é dada pela figura seguinte:

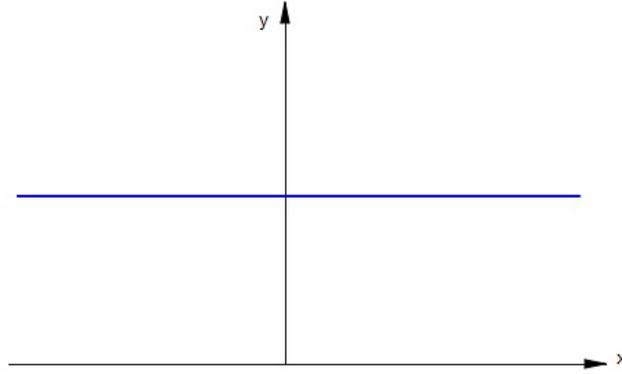


Figura 5.3: exemplo do traço de  $\vec{\psi}(s)$

Esta curva tem os seguintes campos de vetores:

$$I \ni s \mapsto \vec{T}(s) = \vec{\psi}'(s) = (x_{\vec{T}}(s), y_{\vec{T}}(s)) = (y_0, 0) \in T_{\vec{\psi}(s)}(\mathbb{R}^2);$$

$$I \ni s \mapsto D\vec{T}(s) = (0, 0) \in T_{\vec{\psi}(s)}(\mathbb{R}^2)$$

com o qual é obtida a curvatura de  $\vec{\psi}(s)$

$$I \ni s \mapsto \kappa(s) = 0 \in \mathbb{R};$$

procedendo como no exemplo anterior, o vetor normal unitário pode ser dado por

$$I \ni s \mapsto \vec{N}(s) = (x_{\vec{N}}(s), y_{\vec{N}}(s)) = (0, y_0) \in T_{\vec{\psi}(s)}(\mathbb{R}^2).$$

A figura seguinte mostra, para um exemplo particular, o referencial de Frenet colocado sobre a curva em  $t = 0.2$  e  $t = 7$ :

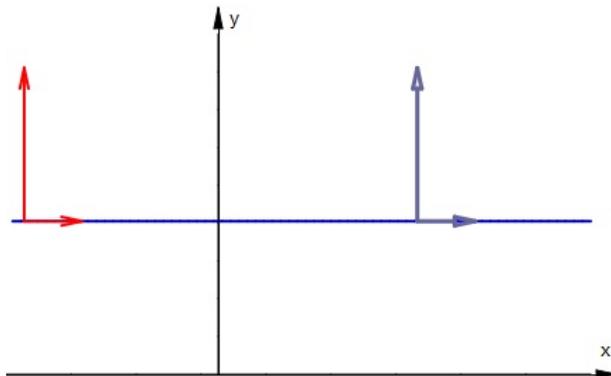


Figura 5.4: referenciais de Frenet sobre a curva

## 5.2 Duas Curvas Planas de Curvatura Constante

A métrica adotada é a estabelecida em (5.3) no início deste Capítulo; vale em todo o  $\mathbb{R}^2$ . O raciocínio seguido é o cadenciado na Seção 4.4 do capítulo anterior para a construção de dois exemplos: ambos tomam uma curvatura constante em todo o domínio, no primeiro é  $\kappa_1(s) = 0$  e no segundo é  $\kappa_2(s) = 1$ .

Faz-se necessário encontrar uma base  $ON$  segundo a métrica  $\mathcal{A}$ . Sendo esta métrica dada por uma matriz diagonal, segue que a base canônica é, no mínimo, ortogonal segundo  $\mathcal{A}$  (isso foi estudado no Exemplo 2.1.22 da página 28). Resta verificar se os vetores de  $\mathfrak{C} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$  já não são versores segundo  $\mathcal{A}$ .

A norma segundo esta métrica é algebricamente dada por

$$\|(x, y)\|_{\mathcal{A}} = \sqrt{2x^2 + 3y^2}.$$

Então,

$$\|\vec{i}\|_{\mathcal{A}} = \|(1, 0)\|_{\mathcal{A}} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \|\vec{j}\|_{\mathcal{A}} = \|(0, 1)\|_{\mathcal{A}} = \sqrt{3},$$

donde se vê que estes vetores não são unitários. Dessa forma, a base dada por

$$\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i}, \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{j} \right\}$$

é uma base  $ON$  segundo  $\mathcal{A}$ . Com esta base são definidas as duas curvas dos exemplos seguintes.

No que segue, o domínio das curvas é sempre tomado como sendo

$$I = (-\epsilon, +\infty) \subset \mathbb{R},$$

para algum  $\epsilon > 0$ . O extremo inferior de integração que aparece nas equações enumeradas por (4.21) e (4.22), da página 107, é aqui tomado como sendo  $s_0 = 0$ .

**Exemplo 5.2.1. (Curvatura identicamente nula.)** *Supor que a curva procurada é dada na forma PCA por*

$$[0, +\infty) \ni s \mapsto \vec{\alpha}_{\mathfrak{B}}(s) = x(s)\vec{b}_1 + y(s)\vec{b}_2 \in \mathbb{R}^2.$$

Sejam

$$[0, +\infty) \ni s \mapsto \kappa_1(s) = 0 \in \mathbb{R}$$

e

$$[0, +\infty) \ni s \mapsto \theta(s) = \int_{s_0}^s \kappa_1(\xi) d\xi = 0 \in \mathbb{R}.$$

Com isto, para um fixo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , põe-se  $\vec{\alpha}_{\mathfrak{B}}(0) = (x_0, y_0)^{\mathfrak{B}}$  e são tomadas as funções coordenadas da curva de  $[0, +\infty)$  a valores em  $\mathbb{R}$  como sendo:

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(\xi) + \lambda) d\xi = x_0 + \int_0^s \cos \lambda d\xi = x_0 + s \cos \lambda$$

e

$$y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \sin(\theta(\xi) + \lambda) d\xi = y_0 + \int_0^s \sin \lambda d\xi = y_0 + s \sin \lambda.$$

Portanto, a curva procurada é

$$\vec{\alpha}_{(\lambda, \mathfrak{B})}(s) = (x_0 + s \cos \lambda) \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + (y_0 + s \sin \lambda) \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{j}$$

que também pode ser escrita da forma

$$\vec{\alpha}_{(\lambda, \mathfrak{B})}(s) = s (\cos \lambda, \sin \lambda)^{\mathfrak{B}} + (x_0, y_0)^{\mathfrak{B}}. \quad (5.4)$$

Conferindo,

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}'_{(\lambda, \mathfrak{B})}(s) &= \cos \lambda \vec{b}_1 + \sin \lambda \vec{b}_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\vec{\alpha}'_{(\lambda, \mathfrak{B})}(s)\|_{\mathcal{A}}^2 &= \cos^2 \lambda \langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle_{\mathcal{A}} + \sin^2 \lambda \langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle_{\mathcal{A}} + 2 \cos \lambda \sin \lambda \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle_{\mathcal{A}} \\ &= \cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda \\ &= 1, \end{aligned}$$

ou seja, a curva está realmente PCA. Sendo

$$\vec{T}_{(\lambda, \mathfrak{B})}(s) = \cos \lambda \vec{b}_1 + \sin \lambda \vec{b}_2$$

constante (assim como a métrica), segue que

$$D\vec{T}_{(\lambda, \mathfrak{B})}(s) = \vec{T}'_{(\lambda, \mathfrak{B})}(s) = \vec{0}$$

(vide Exemplo 4.1.16). Sua curvatura é calculada como a norma de  $D\vec{T}_{(\lambda, \mathfrak{B})}(s)$ :

$$\kappa_1(s) = \|\vec{0}\|_{\mathcal{A}} = 0.$$

**Exemplo 5.2.2.** Para uma função curvatura dada por

$$[0, +\infty) \ni s \mapsto \kappa_2(s) = 1 \in \mathbb{R},$$

supor que a curva procurada é dada na forma PCA também em termos da base  $\mathfrak{B}$  por

$$[0, +\infty) \ni s \mapsto \vec{\gamma}_{\mathfrak{B}}(s) = x(s) \vec{b}_1 + y(s) \vec{b}_2 \in \mathbb{R}^2.$$

Seja

$$[0, +\infty) \ni s \mapsto \theta(s) = \int_{s_0}^s \kappa_2(\xi) d\xi = [\xi]_0^s = s \in \mathbb{R}.$$

Para um  $\psi \in \mathbb{R}$  fixado, toma-se as funções da curva como sendo

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(\xi) + \psi) d\xi \\ &= x_0 + \int_0^s \cos(\xi + \psi) d\xi \\ &= x_0 + \sin(s + \psi) - \sin \psi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y(s) &= y_0 + \int_{s_0}^s \sin(\theta(\xi) + \psi) d\xi \\ &= y_0 + \int_0^s \sin(\xi + \psi) d\xi \\ &= y_0 - \cos(s + \psi) + \cos \psi, \end{aligned}$$

onde  $\vec{\alpha}_{\mathfrak{B}}(0) = (x_0, y_0)^{\mathfrak{B}}$ .

Portanto, a família de curvas procurada é

$$\vec{\gamma}_{(\psi, \mathfrak{B})}(s) = (x_0 + \sin(s + \psi) - \sin \psi) \vec{b}_1 + (y_0 - \cos(s + \psi) + \cos \psi) \vec{b}_2$$

e pode ser reescrita por

$$\vec{\gamma}_{(\psi, \mathfrak{B})}(s) = (\sin(s + \psi), -\cos(s + \psi))^{\mathfrak{B}} + (x_0 - \sin \psi, y_0 + \cos \psi)^{\mathfrak{B}}. \quad (5.5)$$

Verificando:

$$\vec{\gamma}'_{(\psi, \mathfrak{B})}(s) = \cos(s + \psi) \vec{b}_1 + \sin(s + \psi) \vec{b}_2$$

implica

$$\|\vec{\gamma}'_{(\psi, \mathfrak{B})}(s)\|_{\mathcal{A}}^2 = \cos^2(s + \psi) \langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle_{\mathcal{A}} + \sin^2(s + \psi) \langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle_{\mathcal{A}} + 2 \cos(s + \psi) \sin(s + \psi) \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle_{\mathcal{A}} = 1,$$

mostrando que a curva está PCA; como

$$\vec{T}_{(\psi, \mathfrak{B})}(s) = \vec{\gamma}'_{(\psi, \mathfrak{B})}(s) = \cos(s + \psi) \vec{b}_1 + \sin(s + \psi) \vec{b}_2$$

decorre que

$$D\vec{T}_{(\psi, \mathfrak{B})}(s) = \vec{T}'_{(\psi, \mathfrak{B})}(s) = \vec{\gamma}''_{(\psi, \mathfrak{B})}(s) = -\sin(s + \psi) \vec{b}_1 + \cos(s + \psi) \vec{b}_2;$$

sendo a curvatura calculada como a norma deste último campo de vetores, conclui-se que:

$$\begin{aligned} \kappa_2(s) &= \|D\vec{T}_{(\psi, \mathfrak{B})}(s)\|_{\mathcal{A}} \\ &= \sqrt{\langle D\vec{T}_{(\psi, \mathfrak{B})}(s), D\vec{T}_{(\psi, \mathfrak{B})}(s) \rangle_{\mathcal{A}}} \\ &= \sqrt{\sin^2(s + \psi) \langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle_{\mathcal{A}} + \cos^2(s + \psi) \langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle_{\mathcal{A}}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

conforme desejado.

A conclusão destes dois exemplos é a que segue: segundo a métrica dada em (5.3), as curvas em  $\mathbb{R}^2$  que têm **curvatura identicamente nula** em todo o domínio são dadas pela família enumerada por (5.4) donde se vê que trata-se de uma família de **retas**; já as curvas de **curvatura igual a 1** são dadas por (5.5) e se vê que são **círculos**.

### 5.3 Um Exemplo de Função Distância

**Proposição 5.3.1.** *São definidos*

1. o número  $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ;
2. o intervalo aberto conexo  $I = (-\epsilon, 1 + \epsilon) \subset \mathbb{R}$ ;
3.  $I \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$  uma curva PDR tal que  $\vec{\alpha}(0) = \vec{p}$  e  $\vec{\alpha}(1) = \vec{q}$ ;
4. e a aplicação matricial  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\vec{p})$  que satisfaz  $\mathcal{A}(\vec{p})|_{\vec{\alpha}([0,1])} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

A aplicação

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\vec{p}, \vec{q}) \mapsto d(\vec{p}, \vec{q}) = \min_{\vec{\alpha}} L(\vec{\alpha}) \in \mathbb{R}_+,$$

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}(0) &= \vec{p} \\ \vec{\alpha}(1) &= \vec{q} \end{aligned}$$

onde

$$L(\vec{\alpha}) = \int_0^1 \|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} dt,$$

é uma função distância.

Antes da demonstração, observar que a restrição  $\vec{\alpha}|_{[0,1]}$  satisfaz a Definição 3.1.19 (da página 55) o que permite calcular seu comprimento total de arco, aqui denotado por  $L(\vec{\alpha})$ .

A imagem de  $(\vec{p}, \vec{q})$  por  $d$  é obtida tomando o menor comprimento total de arco em  $[0, 1]$  dentre todas as curvas que unem  $\vec{p}$  e  $\vec{q}$ .

Os dois lemas seguintes auxiliam a demonstração desta proposição.

**Lema 5.3.2.** *Se  $[0, 1] \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$ , curva PDR tal que  $\vec{\alpha}(0) = \vec{p}$  e  $\vec{\alpha}(1) = \vec{q}$ , que minimiza a distância destes pontos, sofrer uma reparametrização que somente altera a orientação (vide Definições 3.1.11 e 3.1.13 e Observação 3.1.14, na página 53), sem alterar  $\|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}$ , então é ainda uma curva que minimiza a distância entre os pontos  $\vec{q}$  e  $\vec{p}$  e o comprimento é mantido.*

**Demonstração.** A função mudança de parâmetro que deve ser tomada para satisfazer este enunciado é  $[0, 1] \ni t \mapsto h(t) = 1-t \in [0, 1]$ , pois  $(\vec{\alpha} \circ h)(t)$  continua PDR,  $(\vec{\alpha} \circ h)(0) = \vec{q}$  e  $(\vec{\alpha} \circ h)(1) = \vec{p}$  e

$$\begin{aligned} L(\vec{\alpha} \circ h) &= \int_0^1 \|(\vec{\alpha} \circ h)'(t)\|_{\mathcal{A}((\vec{\alpha} \circ h)(t))} dt \\ &= \int_0^1 \|\vec{\alpha}'(1-t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(1-t))} dt \\ &= \int_0^1 \|\vec{\alpha}'(1-t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(1-t))} dt, \end{aligned}$$

fazendo uma mudança de variável com  $u = 1 - t \Rightarrow du = -dt$ ,  $u(0) = 1$  e  $u(1) = 0$ , fica

$$L(\vec{\alpha} \circ h) = \int_1^0 \|\vec{\alpha}'(u)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(u))} (-du)$$

$$= \int_0^1 \|\vec{\alpha}'(u)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(u))} du = L(\vec{\alpha}), \quad (5.6)$$

ou seja,  $\vec{\alpha}$  e  $\vec{\alpha} \circ h$  têm o mesmo comprimento.

Supor que  $\vec{\alpha} \circ h$  não é a curva que minimiza a distância de  $\vec{q}$  e  $\vec{p}$ . Seja  $[0, 1] \ni t \mapsto \vec{\beta}(t) \in \mathbb{R}^n$  curva *PDR* com  $\vec{\beta}(0) = \vec{q}$  e  $\vec{\beta}(1) = \vec{p}$  que minimiza a distância entre estes. Assim

$$L(\vec{\beta}) < L(\vec{\alpha} \circ h). \quad (5.7)$$

Tomando a mesma função mudança de parâmetro,  $h(t) = 1 - t$ , a reparametrização  $(\vec{\beta} \circ h)(t)$  é ainda uma curva *PDR*; satisfaz  $(\vec{\beta} \circ h)(0) = \vec{p}$  e  $(\vec{\beta} \circ h)(1) = \vec{q}$ ; e tem mesmo comprimento total, medido em  $[0, 1]$ , que  $\vec{\beta}(t)$ , pois

$$\begin{aligned} (\vec{\beta} \circ h)(t) &= \vec{\beta}(1 - t) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\vec{\beta} \circ h)'(t) &= -\vec{\beta}'(1 - t) \Rightarrow \\ \Rightarrow L(\vec{\beta} \circ h) &= \int_0^1 \|\vec{\beta}'(1 - t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\beta}(1-t))} dt \\ &= \int_1^0 \|\vec{\beta}'(u)\|_{\mathcal{A}(\vec{\beta}(u))} (-du) \\ &= \int_0^1 \|\vec{\beta}'(u)\|_{\mathcal{A}(\vec{\beta}(u))} du = L(\vec{\beta}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Deste resultado vem uma contradição, pois foi suposto inicialmente que a curva  $\vec{\alpha}$  minimiza a distância entre  $\vec{p}$  e  $\vec{q}$ ; mas, de (5.6), (5.7) e (5.8) decorre que

$$L(\vec{\beta} \circ h) = L(\vec{\beta}) < L(\vec{\alpha} \circ h) = L(\vec{\alpha}),$$

ou seja, a curva que minimiza a distância seria  $\vec{\beta} \circ h$ , e não  $\vec{\alpha}$ .  $\square$

**Lema 5.3.3.** *Se  $[0, 1] \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n$  é uma curva *PDR* com  $\vec{\alpha}(0) = \vec{p}$  e  $\vec{\alpha}(1) = \vec{q}$  que minimiza a distância entre estes pontos, então, para todo  $t_0 \in [0, 1]$  as restrições  $\vec{\alpha}|_{[0, t_0]}$  e  $\vec{\alpha}|_{[t_0, 1]}$  minimizam as distâncias de  $\vec{\alpha}(0) = \vec{p}$  a  $\vec{\alpha}(t_0) = \vec{r}$  e de  $\vec{\alpha}(t_0) = \vec{r}$  a  $\vec{\alpha}(1) = \vec{q}$ , respectivamente.*

**Demonstração.** Supor que tais restrições não minimizam a distância de  $\vec{p}$  a  $\vec{r}$  e de  $\vec{r}$  a  $\vec{q}$ . Supor que existam

$$[0, 1] \ni t \mapsto \vec{\beta}(t) \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad [0, 1] \ni t \mapsto \vec{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n,$$

curvas *PDR* com seus traços contidos no domínio da métrica e que satisfazem

$$\vec{\beta}(0) = \vec{p}, \quad \vec{\beta}(1) = \vec{r}, \quad \vec{\gamma}(0) = \vec{r} \quad \text{e} \quad \vec{\gamma}(1) = \vec{q},$$

minimizam a distância destes pontos e  $\vec{\beta}([0, 1]) \cup \vec{\gamma}([0, 1]) \neq \vec{\alpha}([0, 1])$ . Assim

$$\begin{cases} L(\vec{\beta}) < L(\vec{\alpha}|_{[0, t_0]}) \\ L(\vec{\gamma}) < L(\vec{\alpha}|_{[t_0, 1]}) \end{cases} \Rightarrow L(\vec{\beta}) + L(\vec{\gamma}) < L(\vec{\alpha}|_{[0, t_0]}) + L(\vec{\alpha}|_{[t_0, 1]}) = L(\vec{\alpha}),$$

onde a última igualdade é justificada pela propriedade da *aditividade do comprimento de arco* (vide [1] no seu parágrafo 14.11, página 532).

Sejam

$$[1, 2] \ni t \mapsto g(t) = t - 1 \in [0, 1]$$

e

$$[0, 2] \ni t \mapsto \vec{\eta}(t) = \begin{cases} \vec{\beta}(t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ (\vec{\gamma} \circ g)(t) & \text{se } 1 < t \leq 2 \end{cases} \in \mathbb{R}^n.$$

$L(\vec{\beta}) + L(\vec{\gamma}) = L(\vec{\eta})$  e a curva  $\vec{\eta}$  satisfaz  $\vec{\eta}(0) = \vec{p}$  e  $\vec{\eta}(2) = \vec{q}$ .

Seja

$$[0, 1] \ni t \mapsto h(t) = 2t \in [0, 2].$$

Então, a curva  $[0, 1] \ni t \mapsto (\vec{\eta} \circ h)(t) \in \mathbb{R}^2$  é tal que  $(\vec{\eta} \circ h)(0) = \vec{p}$  e  $(\vec{\eta} \circ h)(1) = \vec{q}$ , além disso

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[(\vec{\eta} \circ h)(t)] &= 2\vec{\eta}'(h(t)) \Rightarrow \\ \Rightarrow \|(\vec{\eta} \circ h)'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\eta}(h(t)))} &= 2\|\vec{\eta}'(2t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\eta}(2t))} \Rightarrow \\ \Rightarrow L(\vec{\eta} \circ h) &= 2 \int_0^1 \|\vec{\eta}'(2t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\eta}(2t))} dt, \end{aligned}$$

fazendo a seguinte troca de variáveis:  $v = 2t \Rightarrow dv/2 = dt$ ,  $v(0) = 0$  e  $v(1) = 2$ ; fica

$$\begin{aligned} L(\vec{\eta} \circ h) &= 2 \int_0^1 \|\vec{\eta}'(2t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\eta}(2t))} dt \\ &= 2 \int_0^2 \|\vec{\eta}'(v)\|_{\mathcal{A}(\vec{\eta}(v))} \left(\frac{dv}{2}\right) \\ &= \int_0^2 \|\vec{\eta}'(v)\|_{\mathcal{A}(\vec{\eta}(v))} dv \\ &= L(\vec{\eta}). \end{aligned}$$

Assim,  $\vec{\eta} \circ h$  minimiza a distância de  $\vec{p}$  e  $\vec{q}$  e  $\vec{\eta} \circ h \neq \vec{\alpha}$ , absurdo.  $\square$

**Demonstração da Proposição 5.3.1.** Os quatro axiomas (ou propriedades) que definem a função distância (página 40) devem ser verificados aqui.

(1):  $0 = d(\vec{p}, \vec{p})$ , pois a curva de menor comprimento unindo  $\vec{p}$  e  $\vec{p}$  é a curva constante  $\vec{\alpha}(t) = \vec{p}$ . Logo,

$$\vec{\alpha}'(t) = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} = 0 \Rightarrow L(\vec{\alpha}) = \int_0^1 0 dt = 0 = d(\vec{p}, \vec{p}).$$

(2): Se  $\vec{p} \neq \vec{q}$ , então  $d(\vec{p}, \vec{q}) > 0$ . Neste caso, a curva  $\vec{\alpha}(t)$  não pode ser constante, então

$$\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0} \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} > 0$$

devido à positividade da norma (Propriedade (3) da Definição 2.1.23); prosseguindo,

$$d(\vec{p}, \vec{q}) = L(\vec{\alpha}) = \int_0^1 \|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} dt > 0$$

porque a função  $[0, 1] \ni t \mapsto \|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} \in \mathbb{R}_+^*$  é contínua e positiva, logo a integral deve ser positiva (vide [10], página 129, exercício 4).

Noutras palavras, pondo  $f(t) = \|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))}$  esta  $f(t)$  é contínua e  $f(t) > 0$ . Assim,

$$\exists \delta > 0 : \delta = \min_{t \in [0,1]} f(t) \quad \text{e} \quad 0 < \int_0^1 \delta dt \leq \int_0^1 f(t) dt \Rightarrow d(\vec{p}, \vec{q}) = \int_0^1 f(t) dt > 0.$$

(3): Usando a notação do Lema 5.3.2 (equação numerada por (5.6)):

$$d(\vec{p}, \vec{q}) = L(\vec{\alpha}) = L(\vec{\alpha} \circ h) = d(\vec{q}, \vec{p}).$$

(4): Vale a desigualdade triangular:  $d(\vec{p}, \vec{q}) \leq d(\vec{p}, \vec{r}) + d(\vec{r}, \vec{q})$ .

Supor que  $\vec{r} \in \vec{\alpha}([0, 1])$ . Deste modo,  $\exists t_0 \in [0, 1] : \vec{\alpha}(t_0) = \vec{r}$  e

$$\begin{aligned} d(\vec{p}, \vec{q}) &= L(\vec{\alpha}) \\ &= \int_0^1 \|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} dt \\ &= \int_0^{t_0} \|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} dt + \int_{t_0}^1 \|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} dt \\ &= d(\vec{p}, \vec{r}) + d(\vec{r}, \vec{q}), \end{aligned}$$

pois as restrições  $\vec{\alpha}|_{[0, t_0]}$  e  $\vec{\alpha}|_{[t_0, 1]}$  minimizam as distâncias de  $\vec{p}$  a  $\vec{r}$  e de  $\vec{r}$  a  $\vec{q}$ , respectivamente, conforme atesta o Lema 5.3.3.

Supor que  $\vec{r} \notin \vec{\alpha}([0, 1])$ . Sejam

$$[0, 1] \ni t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^n \quad \text{com} \quad \vec{\alpha}(0) = \vec{p} \quad \text{e} \quad \vec{\alpha}(1) = \vec{q},$$

$$[0, 1] \ni t \mapsto \vec{\beta}(t) \in \mathbb{R}^n \quad \text{com} \quad \vec{\beta}(0) = \vec{p} \quad \text{e} \quad \vec{\beta}(1) = \vec{r} \quad \text{e}$$

$$[0, 1] \ni t \mapsto \vec{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n \quad \text{com} \quad \vec{\gamma}(0) = \vec{r} \quad \text{e} \quad \vec{\gamma}(1) = \vec{q},$$

curvas PDR que minimizam as distâncias destes pares de pontos e tais que  $\vec{\beta}([0, 1]) \cup \vec{\gamma}([0, 1]) \neq \vec{\alpha}([0, 1])$ .

Seja

$$\vec{\lambda}(t) = \vec{\gamma}(t - 1)$$

para  $t \in [1, 2]$ ; assim  $\vec{\lambda}([1, 2]) = \vec{\gamma}([0, 1])$  e

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|\vec{\gamma}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\gamma}(t))} dt &= \int_1^2 \|\vec{\lambda}'(t - 1)\|_{\mathcal{A}(\vec{\lambda}(t-1))} dt \Rightarrow \\ \Rightarrow d(\vec{p}, \vec{r}) + d(\vec{r}, \vec{q}) &= \int_0^1 \|\vec{\beta}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\beta}(t))} dt + \int_1^2 \|\vec{\lambda}'(t - 1)\|_{\mathcal{A}(\vec{\lambda}(t-1))} dt. \end{aligned}$$

Seja

$$[0, 2] \ni u \mapsto \vec{\eta}(u) = \begin{cases} \vec{\beta}(u) & \text{se } 0 \leq u \leq 1 \\ \vec{\lambda}(u) & \text{se } 1 < u \leq 2 \end{cases} \in \mathbb{R}^n.$$

Então

$$\begin{aligned} d(\vec{p}, \vec{r}) + d(\vec{r}, \vec{q}) &= \int_0^1 \|\vec{\eta}'(u)\|_{\mathcal{A}(\vec{\eta}(u))} du + \int_1^2 \|\vec{\eta}'(u)\|_{\mathcal{A}(\vec{\eta}(u))} du \\ &= \int_0^2 \|\vec{\eta}'(u)\|_{\mathcal{A}(\vec{\eta}(u))} du. \end{aligned}$$

Como é  $\vec{\alpha}$  a curva que minimiza a distância de  $\vec{p}$  a  $\vec{q}$  segundo  $\mathcal{A}$  e  $\vec{\eta} \neq \vec{\alpha}$  (porque  $\vec{\alpha}([0, 1]) \not\ni \vec{r}$  e  $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\} \subset \vec{\eta}([0, 2])$ ), segue que

$$d(\vec{p}, \vec{r}) + d(\vec{r}, \vec{q}) = \int_0^2 \|\vec{\eta}'(u)\|_{\mathcal{A}(\vec{\eta}(u))} du \geq \int_0^1 \|\vec{\alpha}'(t)\|_{\mathcal{A}(\vec{\alpha}(t))} dt = d(\vec{p}, \vec{q}).$$

□

---

# CONCLUSÃO E ESTUDOS POSTERIORES

---

Substituir a matriz identidade que define o produto interno canônico, conforme foi escrito na Introdução deste trabalho, muda a forma de olhar o  $\mathbb{R}^n$ . Noutros termos, muda a "*Geometria*" deste espaço.

Com a teoria apresentada aqui foi possível obter alguns resultados que não ocorrem quando a métrica é a canônica.

Foi constatado que, de acordo com a métrica, uma reta (*euclidiana*) pode, ou não, ter curvatura nula e uma curva que não é uma reta pode ter curvatura nula. Lembrando que, com o produto interno usual, uma curva é uma reta se, e somente se, tem curvatura identicamente nula (vide a referência [7] na seção 1.4).

Foi possível definir para uma reta no  $\mathbb{R}^3$  o triedro de Frenet, algo que não costuma ser feito nos livros usuais desta disciplina. Mas, certo é que o que foi apresentado aqui retorna ao conteúdo "original" quando a matriz da métrica em questão retorna a matriz identidade.

Uma continuação deste trabalho poderia conter os seguintes itens:

*Estudar o produto vetorial.* A Proposição 2.2.3, da página 44, estabelece o método para calcular o produto vetorial. E este resultado independe da base adotada para o cálculo. Como consta na Observação 2.2.4, falta a esta monografia a demonstração desta independência.

*Estudar a demonstração da fórmula do comprimento de arco para métricas não constantes.* Foi dito no parágrafo anterior da Definição 3.1.19 (página 55) que a forma de medir o comprimento de arco lá apresentada pode ser provada quando a métrica é constante. Um estudo acerca do que ocorre nessa demonstração quando a métrica não é constante seria bem vindo.

*Estudar o Teorema Fundamental de Curvas (TFC).* O TFC foi apresentado na Seção 4.4 conforme a referência bibliográfica [15]. Fazer um estudo detalhado deste teorema explorando seus três itens, com métrica constante e não constante. Além disso, esse mesmo teorema pode ser estendido para curvas espaciais, como fez o autor da obra [4] na seção 1 – 5 e no apêndice do capítulo 4. Fazer o mesmo aqui, com uma métrica qualquer, seria um grande desafio.

*Responder à seguinte pergunta: seja  $\vec{\alpha}$  uma **curva geodésica** (curva que minimiza a distância de dois pontos dados),  $\vec{\alpha}$  sempre tem curvatura nula segundo qualquer métrica  $\mathcal{A}(\vec{p})$  cujo domínio contém seu traço?*

*Estudar a derivada covariante.* Há na referência [4], na sua seção 4 – 4, um conceito também chamado derivada covariante o qual tem uma ligação com o conceito homônimo apresentado no Capítulo 3. Caberia fazer nesta monografia um estudo para elucidar esta ligação.

*Estudar a forma canônica local.* A forma canônica local é apresentada na referência [4] na seção 1 – 6. Estudá-la sob o olhar da métrica generalizada poderia ser útil para complementar esta monografia.

*Estudar a teoria global de curvas.* Exemplificada na Introdução deste trabalho, esta teoria pode ser vista também na referência [4] em sua seção 1 – 7. Este assunto poderia enriquecer a abordagem feita nesta dissertação.

---

# Referências Bibliográficas

---

## Livros

- [1] Tom M. Apostol. *Calculus*, volume I. New York: John Wiley and Sons, Second Edition, 1967.
- [2] José Luiz Boldrini; Sueli Irene Rodrigues Costa; Vera Lúcia Figueiredo; Henry G. Wetzler. *Álgebra Linear*. São Paulo: Editora Harbra, Terceira Edição, 1980.
- [3] Carlos A. Callioli; Hygino H. Domingues; Roberto C. F. Costa. *Álgebra Linear e Aplicações*. São Paulo: Editora Atual, Sexta Edição, 2003.
- [4] Manfredo Perdigão do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1976.
- [5] Manfredo Perdigão do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Projeto Euclides, Terceira Edição, 2005.
- [6] Nikolai Efimov. *Elementos de Geometria Analítica*. Belo Horizonte: Livraria Cultura Brasileira Editora, 1972. Tradução de David Jardim Júnior e revisão de Mário de Oliveira.
- [7] Alfred Gray; Elsa Abbena; Simon Salamon. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with MATHEMATICA*. Boca Raton: Chapman & Hall - CRC, Third Edition, 2006.
- [8] Keneth Hoffman; Ray Kunze. *Álgebra Linear*. São Paulo: Editora Polígono, 1971. Tradução de Adalberto Panobianco Bergamasco.
- [9] Elon Lages Lima. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, Sexta Edição, 2003.
- [10] Elon Lages Lima. *Análise Real, Funções de Uma Variável*, volume I. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, Nona Edição, 2007.
- [11] Elon Lages Lima. *Análise Real, Funções de n Variáveis*, volume II. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, Terceira Edição, 2007.
- [12] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Projeto Euclides, Terceira Edição, Segunda Impressão, 2003.
- [13] Barret O'Neill. *Elementary Differential Geometry*. New York: Academic Press, Second Printing, 1967.
- [14] A. S. Smogorzhevski. *Acerca de la Geometría de Lobachevski*. Moscú: Editorial MIR, Lecciones Populares de Matemáticas, 1978. Tradução de Virgílio Llano Más.
- [15] Ketí Tenenblat. *Introdução à Geometria Diferencial*. São Paulo: Edgard Blucher, Segunda Edição Revisada, 2008.

## "Softwares" de Manipulação Algébrica

- [16] MuPAD Pró 4.0.2, Multi Processing Algebra Data Tool. SciFace Software GmbH & Co KG. Germany, Paderbon: Universität Paderbon, Institut für Automatisierung und Instrumentelle Mathematik, 2007. <http://www.sciface.de> ou <http://www.mathworks.com/support/faq/mupad.html> - acessados em Maio de 2010.
- [17] MATHEMATICA 6.0.2.0. Wolfram Research, USA, 2008. <http://www.wolfram.com> - acessado em Maio de 2010.

---

# Índice Remissivo

---

- aberto conexo, 22
- aditividade do comprimento de arco, 122
- Algebra Linear, 4, 23
- aplicação matricial, 22
  
- base, 4
  - $ON$ , 23
  - negativa, 9
  - ordenada, 4, 20
  - ortogonal, 23, 27, 28
  - ortonormal, 23, 27
  - positiva, 9
- bases de
  - mesma orientação, 7
  - orientação contrária, 7
  
- Cálculo Diferencial e Integral, 53, 55, 58, 59, 61, 70
- campo de vetores, 64, 68, 80, 85–89, 97–99, 109
  - contínuo, 54
  - diferenciável, 54
  - tangentes, 54, 61
- classe, 8
- coeficientes da primeira forma fundamental, 65
- comprimento de arco, 55
- comprimento total de arco, 55
- conexo, 22, 52, 55
- Congruência de Curvas, 107
- convenção
  - das bases positivas de  $\mathbb{R}^n$ , 9
  - das métricas adotadas, 63
  - do espaço vetorial e corpo de escalares adotados, 20
  - primeira sobre os domínios das curvas, 50
  - segunda sobre os domínios das curvas, 52
- corpo de escalares, 19, 20
- coosseno do ângulo segundo a métrica, 38
- curva, 50
  - $PCA$  segundo  $\mathcal{A}(\vec{p})$ , 57
  - $PDR$ , 53
  - arco de uma, 55
  - contínua num intervalo, 51
  - contínua num ponto, 51
  - de ordem ou classe  $C^\infty$ , 52
  - de ordem ou classe  $C^j$ , 52
  - derivada de ordem  $j$ , 50
  - diferenciável, 50
  - diferenciável até ordem  $j$ , 50
  - espacial, 85
  - geodésica, 126
  - infinitamente diferenciável, 50
  - integrável, 51
  - orientação de uma, 53
  - parametrizada, 50
  - parametrizada diferenciável regular, 53
  - parametrizada por comprimento de arco, 57
  - plana, 76
  - regular de ordem  $j$ , 52
  - traço de uma, 50
- curvatura, 79, 85, 97, 98
  - identicamente nula, 116
- derivada covariante, 68
  - segundo uma métrica, 61, 68
- desigualdade
  - de Cauchy-Schwarz, 32, 33
  - triangular, 29, 40
- determinante, 7
- diferencial de uma aplicação, 65
- direção perpendicular, 35, 36
  
- esfera, 101
- espaço
  - tangente, 19
  - vetorial, 4, 20
    - dimensão do, 4
  - vetorial finitamente gerado, 4
  
- fórmulas de Frenet, 84, 90, 98, 100
- função
  - comprimento de arco, 55
  - curvatura, 79, 85, 97
  - distância, 40, 111, 120
    - desigualdade triangular da, 40
    - euclidiana ou canônica, 41
    - positividade da, 40
    - simetria da, 40
  - distância segundo a métrica, 40
  - entrada de  $\mathcal{A}(\vec{p})$ , 22
  - mudança de parâmetro, 53
  - torção, 89
  
- geodésica, 126
- Geometria, 32
  - Não-Euclidiana de Lobatchevski, 26, 111
- Geometria Diferencial, 50, 68, 83
  
- homeomorfismo, 66
  
- interpretação geométrica para a curvatura, 80
- intervalo aberto, 52
- isomorfismo, 19, 20
  
- Jean Frédéric Frenet, 63
  
- métrica, 21
  - da Geometria de Lobatchevski, 26, 111
  - diagonal, 28
  - diferenciável, 22
  - euclidiana, canônica ou usual, 27
- Mathematica 6.0, 102, 103
- matriz
  - de mudança de base, 5
  - de produto interno, 18
  - diagonalizável, 23
  - invertível ou inversível, 24

- não-singular, 24
- positiva definida, 15, 25
- simétrica, 15, 23
- singular, 8
- menor principal de ordem  $k$ , 25
- MuPAD Pró 4.0, 49, 60
- norma, 29
  - de  $T_{\bar{P}}(\mathbb{R}^n)$ , 32
  - desigualdade triangular da, 29
  - do máximo, 33
  - euclidiana, canônica ou usual, 31
  - positividade da, 29
- operador linear auto-adjunto, 23
- parte vetorial, 19
- perpendicularismo, 34, 35
- plano
  - da Geometria de Lobatchevski, 26, 111
  - normal, 87
  - osculador, 87
  - retificante, 87
  - tangente, 65
  - tangente a superfície regular, 65
- ponto de aplicação, 19
- ponto singular de ordem  $j$ , 52
- positividade, 11, 29, 40
- princípio de identidade de polinômios, 14, 16
- produto interno, 11
  - bilinearidade do, 11
  - euclidiano, canônico ou usual, 11, 27
  - linearidade do, 11
  - positividade do, 11
  - simetria do, 11
  - sobre  $T_{\bar{P}}(\mathbb{R}^n)$ , 23
- produto vetorial, 42
  - anticomutatividade em relação aos vetores, 42
  - associatividade em relação ao escalar, 42
  - cálculo do, 44
  - distributividade em relação à adição, 42
- projeção, 65, 66
  - ortogonal, 80, 87, 90
  - segundo a métrica, 38
- proporcionalidade, 80, 86, 100
- propriedades
  - da matriz de mudança de base, 6
  - do determinante, 7
- referencial de Frenet, 78, 84
- regra da cadeia, 65
- regra da cadeia para curvas, 53
- relação de equivalência, 7
- reparametrização, 53
  - de mesma orientação, 53
  - de orientação contrária, 53
- reparametrização por comprimento de arco, 59
- reta
  - binormal à curva, 87
  - normal à curva, 79, 87
  - tangente à curva, 79, 87
- reta (euclidiana), 83
- rotação, 107
- subespaço vetorial, 4
- submatriz principal de ordem  $k$ , 25
- superfície regular, 65
- Teorema
  - da Função Inversa, 59
  - de Mudança de Variável na Integral, 56
  - de Pitágoras, 29, 31, 35
  - Fundamental de Curvas, 107
  - Fundamental de Curvas Planas, 107, 111
- torção, 89, 100
- translação, 107
- triedro de Frenet, 87, 100
- versor segundo a métrica, 34
- vetor
  - binormal unitário à curva, 86, 88, 99
  - normal unitário à curva, 76, 77, 83, 85, 98, 100
  - tangente, 19
  - tangente à superfície, 65
  - tangente unitário à curva, 76, 77, 79, 85, 97
  - unitário segundo a métrica, 34
- vetores tangentes paralelos, 19