Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Cálculo Estocástico e Transporte Paralelo

por

Roberta Rodrigues Albuquerque

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Pedro José Catuogno

Cálculo Estocástico e Transporte Paralelo

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Roberta Rodrigues Albuquerque e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 03 de agosto de 2010

Prof. Dr:. Pedro José Catuogno
Orientador

Banca Examinadora:

1 Pedro José Catuogno
2 Diego Sebastian Ledesma
3 Ryuichi Fukuoka

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Silvania Renata de Jesus Ribeiro Cirilo – CRB8 / 6592

Albuquerque, Roberta Rodrigues

Al15c Cálculo estocástico e transporte paralelo/Roberta Rodrigues Albuquerque-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Pedro José Catuogno

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria estocástica. 2. Processo estocástico. 3. Análise estocástica.. I. Catuogno, Pedro José. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Stochastic calculus and parallel translation

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Stochastic geometry. 2. Stochastic processes. 3. Stochastic analysis.

Área de concentração: Geometria estocástica

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Pedro José Catuogno – (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Diego Sebastian Ledesma – (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka - (UEM)

Data da defesa: 03/08/2010

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 03 de agosto de 2010 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO

Ryuichi Fukuoka

Prof. (a). Dr (a). RYUICHI FUKUOKA

Prof. (a). Dr (a). DIEGO SEBASTIAN LEDESMA

AGRADECIMENTOS

Uma das formas de se descobrir o significado da palavra "amor" é desenvolvendo um trabalho como este, primeiro porque você descobre por si o quanto ama o que faz, e logo em seguida você entende o quanto ama as pessoas que estão realmente ao seu lado e te dão todo o apoio e carinho necessários enquanto você simplesmente trabalha no que quer.

Agradeço a Deus, aos meus avós, aos meus pais e irmão, aos amigos de Recife e amigos de Campinas, também aos meus colegas de graduação na UFPE, e aos professores que lá encontrei, em especial ao prof. Antônio Carlos. Agradeço sempre o carinho das pessoas da UNICAMP, a profa. Thelma Eloisa pelo apoio e as aulas de inglês, ao prof. Pedro Catuogno pelo trabalho e dedicação ímpar, ao prof. Paulo Ruffino pela motivação e conselhos para minha formação, aos meus amigos do IMECC e do CEL que me proporcionaram vários momentos alegres enquanto estive em situações delicadas, aos funcionários da secretaria de pós-graduação do IMECC pela paciência sem limites, a Dra. Renata e Dra. Tânia pelo carinho sempre presentes.

Aos professores da banca examinadora pela atenção ao trabalho e pelas sugestões de estudos futuros, e aos órgãos financeiros CAPES e CNPq.

RESUMO

Neste trabalho estamos interessados no transporte paralelo da geometria diferencial no contexto do cálculo estocástico. Inicialmente resumimos os pontos fundamentais da geometria riemmaniana como as idéias de conexão, curvatura, transporte paralelo, a identidade de Bochner-Weitenböck e o mapa de desenvolvimento de Cartan, em seguida desenvolvemos alguns resultados da geometria estocástica como a fórmula geométrica de Itô, mas para isto inserimos brevemente a chamada geometria de segunda ordem. Ao final, examinaremos o transporte paralelo estocástico em algumas circunstâncias como no mapa de desenvolvimento estocástico, mapa de rolamento estocástico, construção do movimento Browniano em variedades e ainda com fluxos estocásticos na solução da equação de Stratonovich.

ABSTRACT

This dissertation is about the stochastic version of the parallel translation in the differential geometry. In the beginning it provides some basic background to Riemannian geometry, for example, the definiton of conexion, curvature, parallel translation, the Bochner-Weitenböck identity and the Cartan's rolling map theorem. After that, it is to dedicate to development of some results on stochastic geometry as the geometric Itô formula, but to do that it is important to study the second order geometry. In the end, it is essential to give attention to stochastic parallel transport in some environment as the Cartan's rolling map in the stochastic context, stochastic rolling constuctions, Brownian motion on manifolds and the stochastic flow as the solution of the Stratonovich equation.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho é formado por três capítulos que são descritos a seguir. No primeiro capítulo, examinaremos a geometria riemmaniana, principalmente os conceitos de curvatura e conexão. Logo após nos enfocamos no transporte paralelo e em alguns resultados ligados ao fluxo de um campo de vetores, como o mapa de desenvolvimento de Cartan, as versões estocásticas destes resultados serão importantes para nossos estudos. No próximo capítulo teremos uma introdução a geometria estocástica, que tem como referência P. A. Meyer [11]. Inicialmente apresentamos a geometria de Schwartz ou geometria de segunda ordem que será conveniente para a formalização da chamada fórmula geométrica de Itô, ver P. J. Catuogno [3]. Em seguida incrementaremos o estudo através das equações estocásticas em variedades onde alguns resultados podem ser encontrados em detalhes no livro E. P. Hsu [9]. Ao final, teremos acesso a resultados relacionados ao movimento Browniano em uma variedade, como a construção deste e o chamado critério de Lévy.

No capítulo três encontra-se o objeto principal deste trabalho, a versão estocástica do transporte paralelo. Apresentaremos o análogo estocástico do mapa de desenvolvimento de Cartan e ainda o mapa de rolamento estocástico, que podem ser consultados em K. D. Elworthy [7]. Logo em seguida examinaremos outras construções de semimartingales e do movimento Browniano, e para finalizar nosso trabalho, verificar em H. Kunita [10], entendemos a solução da equação de Stratonovich através de fluxos estocásticos.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS BÁSICOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

As referências M.P. do Carmo [5] e R. L. Bishop e R. J. Crittenden [1] desenvolvem mais detalhes sobre geometria riemanniana. Aqui estamos interessados em fixar notação, relembrar conceitos e demonstrar alguns resultados relevantes para as outras seções.

1.1 Curvatura

Seja M uma variedade mergulhada no $\mathbb{R}^N$ com métrica riemmaniana induzida pelo mergulho em $\mathbb{R}^N$, $P(m)$ a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^N$ sobre T_mM para todo $m \in M$ e $Q(m) := I - P(m)$ a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^N$ sobre $(T_mM)^{\perp}$, assim P e Q são funções suaves de M para $gl\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Seja TM o fibrado tangente de M e $\pi : TM \to M$ a projeção associada. Dizemos que um caminho diferenciável $s \to V(s)$ em TM é um campo de vetores ao longo do caminho $s \to \sigma(s)$ em M se $\pi \circ V(s) = \sigma(s)$, ou seja, $V(s) \in T_{\sigma(s)}M$ para todo s. Estamos interessados na derivação do caminho suave $V(s)$ que está na variedade TM e que a derivada de $V(s)$ seja um caminho também em TM. Para isto definimos a chamada derivada de Levi-Civita.

Portanto, a derivada de Levi-Civita, denotada por $\frac{\nabla V(s)}{ds}$, é o campo de vetores ao longo de $\sigma(s)$ definido por

$$\frac{\nabla V(s)}{ds} := P(\sigma(s))\frac{d}{ds}V(s).$$

Se Y é um campo de vetores em M e $v \in T_mM$, definimos $\nabla_v Y \in T_mM$ por

$$\nabla_v Y := \frac{\nabla Y(\sigma(s))}{ds}\,|_{s=0}\,.$$

onde $\dot{\sigma}(0) = v$.

Se $W(s)$ e $V(s)$ são dois campos de vetores ao longo do caminho σ em M, as principais propriedades da derivação são (ver M. P. do Carmo [5] capítulo 2):

1.$\frac{\nabla W(s)}{ds} = \frac{d}{ds}W(s) + (dQ(\sigma'(s))W(s)$

2. ∇ é compatível com a métrica, ou seja,

$$\frac{d}{ds}\langle W(s), V(s)\rangle = \langle\frac{\nabla W(s)}{ds}, V(s)\rangle + \langle W(s), \frac{\nabla V(s)}{ds}\rangle.$$

3. Suponha que $(s,t) \to \sigma(s,t)$ é uma função suave em M e $W(s,t)$ é uma função suave em TM, $\sigma' := \frac{d}{ds}\sigma(s,t)$ e $\dot{\sigma} := \frac{d}{dt}\sigma(s,t)$, tal que $W(s,t) \in T_{\sigma(s,t)}M$ para todo (s,t) então

$$\frac{\nabla\sigma'}{dt} = \frac{\nabla\dot{\sigma}}{ds}$$

ou seja, ∇ tem torção nula.

4. Se R é e o tensor de curvatura de ∇ definido por

$$R(X,Y)W = [dQ(X), dQ(Y))]\,W$$

então,

$$\left[\frac{\nabla}{dt}, \frac{\nabla}{ds}\right]W := \left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds} - \frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\right)W = R(\dot{\sigma}, \sigma')\,W$$

ou seja, a curvatura mede a não comutatividade da derivada.

A observação seguinte relaciona curvatura e torção com derivada ∇ em campos de vetores onde $\Gamma(TM)$ denota o conjunto de todos os campos de vetores suaves em M.

Observação 1. *([5] do Carmo capítulos 2 e 4) Seja* $m \in M$, $v \in T_mM$, $X, Y, W \in \Gamma(TM)$ *e* $f \in C^\infty(M)$, *então*

1. *Regra do produto:* $\nabla_v (f \cdot X) = df(v) \cdot X(m) + f(m) \cdot \nabla_v X$
2. *Torção nula:* $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$
3. *Tensor curvatura:* $R(X, Y) W = [\nabla_X, \nabla_Y] W - \nabla_{[X,Y]} W$, *onde*

$$[\nabla_X, \nabla_Y] W := \nabla_X (\nabla_Y W) - \nabla_Y (\nabla_X W).$$

Além disso, sejam $u, v, w, z \in T_m M$ *então* R *possui as seguintes propriedades:*

(a) $R(u, v) = -R(v, u)$.
(b) $[R(u, v)]^T = -R(u, v)$.
(c) $\langle R(u, v) w, z\rangle = \langle R(w, z) u, v\rangle$.

5. *Tensor curvatura de Ricci: Para cada* $m \in M$, $Ric_m : T_m M \to T_m M$ *é definido por*

$$Ric_m v := \sum_{a \in S} R(v, a) a,$$

onde $S \subset T_m M$ *é uma base ortonormal. Então* $Ric_m^T = Ric_m$ *e* Ric_m *pode ser calculado como*

$$\langle Ric_m u, v\rangle = tr(dQ(dQ(u) v) - dQ(v) dQ(u))$$

para todo $u, v \in T_m M$.

Para mostrar 5. primeiro verificaremos que $dQ(Y(m)) X(m) = dQ(X(m)) Y(m)$. De fato, sabemos que $(\nabla_Y X)(m) = dY(X(m)) + dQ(X(m)) Y(m)$ então

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(m) - [X, Y](m) \\ &= \{dX(Y(m)) + dQ(Y(m)) X(m) - dY(X(m)) - dQ(X(m)) Y(m)\} - [X, Y](m) \\ &= dQ(Y(m)) X(m) - dQ(X(m)) Y(m). \end{aligned}$$

Logo, para o item 5.,

$$\begin{aligned} \langle Ric\ u, v\rangle &= \sum_{a \in S} \langle R(u, a) a, v\rangle \\ &= \sum_{a \in S} \langle [dQ(u), dQ(a)] a, v\rangle \\ &= \sum_{a \in S} \langle (dQ(u) dQ(a) - dQ(a) dQ(u)) a, v\rangle \\ &= \sum_{a \in S} (\langle dQ(u) dQ(a) a, v\rangle - \langle dQ(a) dQ(u) a, v\rangle). \end{aligned}$$

Usando que $dQ\,(v)\,a = dQ\,(a)\,v$ e que $dQ\,(u)$ é simétrico temos

$$\begin{aligned}
&= \sum_{a\in S}\langle a, dQ\,(a)\,dQ\,(u)\,v\rangle - \langle dQ\,(u)\,a, dQ\,(a)\,v\rangle \\
&= \sum_{a\in S}\langle a, dQ\,(dQ\,(u)\,v)\,a\rangle - \langle dQ\,(u)\,a, dQ\,(v)\,a\rangle \\
&= \sum_{a\in S}\langle a, dQ\,(dQ\,(u)\,v)\,a\rangle - \langle dQ\,(v)\,dQ\,(u)\,a, a\rangle \\
&= tr\,(dQ\,(dQ\,(u)\,v) - dQ\,(v)\,dQ\,(u))
\end{aligned}$$

Queremos fixar a seguinte notação que será usada na demonstração dos próximos resultados desta seção. Se $F \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ então

$$(\partial_v F)\,(x) := \frac{d}{dt}\mid_0 F\,(x+tv) = F'\,(x)\,v$$

e

$$(\partial_v\partial_w F)\,(x) = F''\,(x)\,(v,w)$$

Note que se $w : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ e $v \in \mathbb{R}^N$, então

$$(\partial_v\partial_w F)\,(x) = \partial_v\,[F'\,(.)\,w\,(.)]\,(x) = F'\,(x)\,\partial_v w\,(x) + F''\,(x)\,(v,w)\,w\,(x)$$

A proposição seguinte é uma ferramenta para se demonstrar a identidade de Bochner-Weitenböck que encontraremos mais adiante.

Proposição 2. *Sejam $Z \in \Gamma\,(TM)\,, v, w \in T_mM$ e X,$Y \in \Gamma\,(TM)$ tais que $X\,(m) = v$ e $Y\,(m) = w$. Então*

1. $\nabla^2_{v\otimes\omega}Z$ é definido por

$$\nabla^2_{v\otimes\omega}Z := (\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y}Z)$$

é bem definido, ou seja, independe das escolhas de X e Y.

2. Se $Z\,(m) = (m, z\,(m))$ onde $z : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma função suave tal que $z\,(m) \in T_mM$ para todo $m \in M$, então

$$\nabla^2_{v\otimes w}Z = dQ\,(v)\,dQ\,(w)\,z\,(m) + P\,(m)\,z''\,(m)\,(v,w) - P\,(m)\,z'\,(m)\,[dQ\,(v)\,w]$$

3. O tensor curvatura $R\,(v,w)$ pode ser calculado como

$$\nabla^2_{v\otimes w}Z - \nabla^2_{w\otimes v}Z = R\,(v,w)\,Z\,(m)$$

4. Se $V(s)$ é um campo de vetores ao longo do caminho σ em M, então temos a Regra do produto,

$$\frac{\nabla}{ds}\left(\nabla_{V(s)}Z\right) = \left(\nabla_{\frac{\nabla}{ds}V(s)}Z\right) + \nabla^2_{\sigma'(s)\otimes V(s)}Z$$

Demonstração. Sejam $X(m) = (m, x(m))$, $Y(m) = (m, y(m))$ e $Z(m) = (m, z(m))$ onde $x, y, z : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ são funções suaves tais que $x(m)$, $y(m)$ e $z(m)$ são elementos de T_mM para todo $m \in M$. Então,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y}Z) &= P\partial_x[P\partial_y z] - P\partial_{P\partial_x y}z \\
&= P(\partial_x P)\partial_y z + P\partial_x\partial_y z - P\partial_{P\partial_x y}z \\
&= P(\partial_x P)\partial_y z + Pz''(x,y) + Pz'[\partial_x y - P\partial_x y] \\
&= (\partial_x P)Q\partial_y z + Pz''(x,y) + Pz'[Q\partial_x y]
\end{aligned}$$

derivando a identidade $Qy = 0$ em M temos que $Q\partial_x y = -(\partial_x Q)y$. Logo,

$$\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} = -(\partial_x P)(\partial_y Q)z + Pz''(X,Y) - Pz'[(\partial_x Q)Y]$$

avaliando a expressão acima em m, temos a equação

$$(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y}Z)(m) = dQ(v)\,dQ(w)\,z(m) + P(m)\,z''(m)(v,w) - P(m)\,z'(m)[dQ(v)\,w]$$

e portanto concluímos 2. Nesta equação, claramente verificamos 1. pois independe das escolhas de X e Y.

Para verificarmos o item 3 basta usarmos a definição de tensor de curvatura dada por

$$R(X,Y)W = [dQ(X), dQ(Y)]\,W$$

e a equação verificada no item 2.

Para mostrar 4. escolhemos um campo de vetores locais $\{E_i\}_{i=1}^d$ definido em uma vizinhança de $\sigma(s)$ tal que $\{E_i(\sigma(s))\}_{i=1}^d$ é base para $T_{\sigma(s)}M$ para cada s. Assim temos que $V(s) = \sum_{i=1}^d V_i(s)\,E_i(\sigma(s))$,

$$\frac{\nabla}{ds}V(s) = \sum_{i=1}^d \{V_i'(s)\,E_i(\sigma(s)) + V_i(s)\,\nabla_{\sigma'(s)}E_i\}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla}{ds}\left(\nabla_{V(s)}Z\right) &= \frac{\nabla}{ds}\left(\sum_{i=1}^d V_i(s)\,(\nabla_{E_i}Z)(\sigma(s))\right) \\
&= \sum_{i=1}^d V_i'(s)\,(\nabla_{E_i}Z)(\sigma(s)) + \sum_{i=1}^d V_i(s)\,\nabla_{\sigma'(s)}(\nabla_{E_i}Z)
\end{aligned}$$

e ainda por 1.,

$$\nabla_{\sigma'(s)}\left(\nabla_{E_i}Z\right)=\nabla^2_{\sigma'(s)\otimes E_i(\sigma(s))}Z+\left(\nabla_{\nabla_{\sigma'(s)}E_i}Z\right).$$

Usando esta última equação e a primeira temos,

$$\begin{aligned}\frac{\nabla}{ds}\left(\nabla_{V(s)}Z\right) &= \nabla_{\sum_{i=1}^{d}\{V_i'(s)E_i(\sigma(s))+V_i(s)\nabla_{\sigma'(s)}E_i\}}Z+\sum_{i=1}^{d}V_i\left(s\right)\nabla^2_{\sigma'(s)\otimes E_i(\sigma(s))}Z \\ &= \nabla_{\frac{\nabla}{ds}V(s)}Z+\nabla^2_{\sigma'(s)\otimes V(s)}Z\end{aligned}$$

□

Chamaremos de Regra do produto, a seguinte equação, mantendo a notação do parágrafo acima. Seja $Y\in\Gamma\left(TM\right)$, então

$$v_m\left(\omega\left(Y\right)\right)=\left(\nabla_{v_m}\omega\right)\left(Y\left(m\right)\right)+\omega\left(\nabla_{v_m}Y\right)$$

ou seja, estamos definindo a derivada covariante de uma forma diferenciável. Além disso, para $f\in C^{\infty}\left(M\right)$ *e* $v_m,w_m\in T_mM$*,*

$$\nabla df\left(v_m,w_m\right):=\left(\nabla_{v_m}df\right)\left(w_m\right),$$

chamamos ∇df de Hessiana de f. Assim, sabemos que os seguintes resultados são válidos para $f\in C^{\infty}\left(M\right)$, $F\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ tais que $f=F\mid_M$,X ,$Y\in\Gamma\left(TM\right)$ e v_m,$w_m\in T_mM$.

1. $\nabla df\left(X,Y\right)=XYf-df\left(\nabla_XY\right)$
2. $\nabla df\left(v_m,w_m\right)=F''\left(m\right)\left(v,w\right)-F'\left(m\right)dQ\left(v_m\right)w$
3. $\nabla df\left(v_m,w_m\right)=\nabla df\left(w_m,v_m\right)$, uma outra manisfestação da torção nula.

O Laplaciano é um operador diferenciável de segunda ordem Δ, onde

$$\Delta:C^{\infty}\left(M\right)\to C^{\infty}\left(M\right)$$

definido por

$$\Delta f:=\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\,f\right)$$

portanto, dado um ponto $m\in M$, definimos um sistema ortonormal local $\{E_i\}_{i=1}^d$ em m como uma coleção de campos de vetores locais definidos próximos a m tais que $\{E_i(p)\}_{i=1}^d$ é uma base ortonormal para T_pM para todo p próximo a m.

Assim, se $F \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ e $f := F\mid_M$ sejam $\{e_i\}_{i=1}^d$ uma base ortonormal para T_mM e $\{E_i\}_{i=1}^d$ um sistema ortonormal próximo a $m \in M$. Então,

$$\Delta f(m) = \sum_{i=1}^{d} \nabla df\left(E_i(m), E_i(m)\right),$$

$$\Delta f(m) = \sum_{i=1}^{d} \{E_i(E_i f) - df\left(\nabla_{E_i(m)} E_i\right)\}$$

e

$$\Delta f(m) = \sum_{i=1}^{d} F''(m)(e_i, e_i) - F'(m)\left(dQ\left(E_i(m)\right)e_i\right)$$

onde $E_i(m) := (m, e_i)$.

Seja $\{e_i\}_{i=1}^N$ base canônica de $\mathbb{R}^N$ defina $X_i(m) := P(m)e_i$ para todo m em M.

Proposição 3. *Seja* $f \in C^{\infty}(M)$ *e* $Y \in \Gamma(TM)$ *então*

1. $v_m = \sum_{i=1}^N \langle v_m, X_i(m)\rangle X_i(m)$ para todo $v_m \in T_mM$
2. grad $f = \sum_{i=1}^N X_i f \cdot X_i$
3. div $(Y) = \sum_{i=1}^N \langle \nabla_{X_i} Y, X_i\rangle$
4. $\sum_{i=1}^N \nabla_{X_i} X_i = 0$
5. $\Delta f = \sum_{i=1}^N X_i^2 f$

Demonstração. 1. Precisamos principalmente mostrar que

$$\sum_{i=1}^{N} X_i(m) \otimes X_i(m) = \sum_{i=1}^{d} u_i \otimes u_i$$

onde $\{u_i\}_{i=1}^d$ é uma base ortonormal para T_mM. Mas,

$$\sum_{i=1}^{N} X_i(m) \otimes X_i(m) = \sum_{i=1}^{N} P(m)e_i \otimes P(m)e_i$$

esta última expressão é independe da escolha da base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^N$ para $\mathbb{R}^N$. Então se escolhermos $\{e_i\}_{i=1}^N$ tal que $e_i = u_i$ para $i = 1, ..., d$, então

$$\sum_{i=1}^{N} P(m)e_i \otimes P(m)e_i = \sum_{i=1}^{d} u_i \otimes u_i$$

como gostaríamos. Desde de que $\sum_{i=1}^{N}\langle v_m, X_i(m)\rangle X_i(m)$ é quadrática em X_i, segue-se que

$$\sum_{i=1}^{N}\langle v_m, X_i(m)\rangle X_i(m) = \sum_{i=1}^{d}\langle v_m, u_i\rangle u_i = v_m.$$

2. É consequência imediata do item 1.

$$\text{grad } f(m) = \sum_{i=1}^{N}\langle \text{grad } f(m), X_i(m)\rangle X_i(m) = \sum_{i=1}^{N} df(X_i)\cdot X_i(m)$$

3. $\sum_{i=1}^{N}\langle \nabla_{X_i}Y, X_i\rangle$ é quadrática em X_i e portanto

$$\sum_{i=1}^{N}\langle \nabla_{X_i}Y, X_i\rangle(m) = \sum_{i=1}^{d}\langle \nabla_{u_i}Y, u_i\rangle(m) = \text{div }(Y)$$

4.

$$\sum_{i=1}^{N}(\nabla_{X_i}X_i)(m) = \sum_{i=1}^{N} P(m)\, dP(X_i(m))\, e_i = \sum_{i=1}^{N} dP(P(m)\, e_i)\, Q(m)\, e_{i.}$$

A última expressão é independente da escolha de uma base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^{N}$ para $\mathbb{R}^N$. Então escolheremos $e_i = u_i$ para $i = 1, .., d$, logo $Q(m)\, e_i = 0$ para $i = 1, .., d$ e $P(m)\, e_j = 0$ para $j > d$ e portanto cada parcela do somatório acima é zero.

5. Para calcularmos Δf usamos a definição de grad f, os itens (2)-(4) e a regra do produto

$$\begin{aligned}\Delta f &= \text{div}(\text{grad } f) = \sum_{i=1}^{N}\langle \nabla_{X_i}\text{grad } f, X_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N} X_i\langle \text{grad } f, X_i\rangle - \sum_{i=1}^{N}\langle \text{grad } f, \nabla_{X_i}X_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N} X_i X_i f\end{aligned}$$

□

O seguinte lema técnico é para simplificar a demonstração da identidade de Bochner-Weitzenböck que trataremos logo adiante.

Lema 4. *Dado* $m \in M$ *e* $v \in T_m M$ *existe* $V \in \Gamma(TM)$ *tal que* $V(m) = v$ *e* $\nabla_z V = 0$ *para todo* $z \in T_m M$. *Além disso, se* $\{e_i\}_{i=1}^d$ *é base ortonormal para* $T_m M$, *existe um sistema ortonormal local* $\{E_i\}_{i=1}^d$ *próximo a* m *tal que* $\nabla_z E_i = 0$ *para todo* $z \in T_m M$.

Demonstração. Para essa demonstração iremos assumir que V , P e Q são extensões para o espaço no qual M está mergulhado. Se tal V existe, então

$$0 = \nabla_z V = V'(m) + \partial_z Q(m)\, v$$

isto é,

$$-V'(m) = \partial_z Q(m)\, v$$

para todo $z \in T_m M$. Portanto, isso nos motiva a definir V por

$$V(x) := P(x)(v - \partial_z Q(x)\, v) \in T_x M \text{ para todo } x \in M.$$

Por construção $V(m) = v$, logo

$$\begin{aligned}
\nabla_z V &= \partial_z \left[P(x)(v - (\partial_z Q)(x)\, v)\right]|_{x=m} + (\partial_z Q)(m)\, v \\
&= (\partial_z P)(m)\, v - P(m)(\partial_z Q)(m)\, v + (\partial_z Q)(m)\, v \\
&= (\partial_z P)(m)\, v + Q(m)(\partial_z Q)(m)\, v \\
&= (\partial_z P)(m)\, v + (\partial_z Q)(m)\, v \\
&= 0
\end{aligned}$$

Para a segunda etapa da demonstração escolhemos um fibrado local $\{V_i\}_{i=1}^d$ tal que $V_i(m) = e_i$ e $\nabla_z V_i = 0$ para todo $i = 1, ..., d$ e $z \in T_m M$. O fibrado $\{E_i\}_{i=1}^d$ que gostaríamos é construido através da ortogonomalização de Gram-Schmidt de $\{V_i\}_{i=1}^d$. O fibrado ortonormal resultante $\{E_i\}_{i=1}^d$ satifaz a propriedade $\nabla_z E_i = 0$ para todo $z \in T_m M$. Por exemplo, $E_1 = \langle V_1, V_1 \rangle^{-\frac{1}{2}} V_1$ e como

$$z\langle V_1, V_1 \rangle = 2\langle \nabla_z V_1, V_1(m) \rangle = 0$$

temos que,

$$\nabla_z E_i = z\left(\langle V_1, V_1 \rangle^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot V_1(m) + \langle V_1, V_1 \rangle^{-\frac{1}{2}}(m)\, \nabla_z V_1(m) = 0.$$

A verificação de que $\nabla_z E_j = 0$ para $j = 2, ..., d$ é similar.

□

Agora estamos preparados para demonstrar o teorema da identidade de Bochner-Weitzenböck.

Teorema 5. *(Identidade de Bochner-Weitenböck). Sejam $f \in C^{\infty}(M)$ e $a,b,c \in T_mM$, então*

$$\langle \nabla^2_{a\otimes b} grad\ f, c\rangle = \langle \nabla^2_{a\otimes c} grad\ f, b\rangle$$

e se $S \subset T_mM$ é uma base ortonormal, então

$$\sum_{a\in S} \nabla^2_{a\otimes a} grad\ f = (grad\ \Delta f)(m) + Ric\ grad\ f.$$

Demonstração. Sejam $a,b,c \in T_mM$ e $A,B,C \in \Gamma(TM)$ tal que $A(m) = a$, $B(m) = b$ e $C(m) = c$ com $\nabla_z A = \nabla_z B = \nabla_z C = 0$ para todo $z \in T_mM$. Então,

$$\begin{aligned} ABCf &= AB\langle \text{grad } f, C\rangle = A\langle \nabla_B \text{grad } f, C\rangle + A\langle \text{grad } f, \nabla_B C\rangle \\ &= \langle \nabla_A \nabla_B \text{grad } f, C\rangle + \langle \nabla_B \text{grad } f, \nabla_A C\rangle + A\langle \text{grad } f, \nabla_B C\rangle. \end{aligned}$$

Aplicando-se em m temos

$$\begin{aligned} (ABCf)(m) &= (\langle \nabla_A \nabla_B \text{grad } f, C\rangle + A\langle \text{grad } f, \nabla_B C\rangle)(m) \\ &= \langle \nabla^2_{a\otimes b} \text{grad } f, c\rangle + (A\langle \text{grad } f, \nabla_B C\rangle)(m) \end{aligned}$$

onde usamos que $(\nabla_A B)(m) = 0$. Trocando-se B e C na equação anterior e calculando

$$(ABCf)(m) - (ACBf)(m)$$

temos

$$\begin{aligned} (A[B,C]f)(m) &= \langle \nabla^2_{a\otimes b} \text{grad } f, c\rangle - \langle \nabla^2_{a\otimes c} \text{grad } f, b\rangle \\ &\quad + (A\langle \text{grad } f, \nabla_B C - \nabla_C B\rangle)(m) \\ &= \langle \nabla^2_{a\otimes b} \text{grad } f, c\rangle - \langle \nabla^2_{a\otimes c} \text{grad } f, b\rangle \\ &\quad + (A\langle \text{grad } f, [B,C]\rangle)(m) \\ &= \langle \nabla^2_{a\otimes b} \text{grad } f, c\rangle - \langle \nabla^2_{a\otimes c} \text{grad } f, b\rangle + (A[B,C]f)(m). \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \nabla^2_{a\otimes b} \text{grad } f, c\rangle = \langle \nabla^2_{a\otimes c} \text{grad } f, b\rangle.$$

Agora suponha que $\{E_i\}_{i=1}^d \subset T_mM$ é um referencial ortonormal próximo a m tal que $\nabla_z E_i = 0$ para todo $z \in T_mM$ e $e_i = E_i(m)$.

Como $R(e_i, c)$ grad $f = \nabla^2_{e_i \otimes c}\text{grad } f - \nabla^2_{c \otimes e_i}\text{grad } f$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{d} \langle \nabla^2_{e_i \otimes e_i}\text{grad } f, c\rangle &= \sum_{i=1}^{d} \langle \nabla^2_{e_i \otimes c}\text{grad } f, e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{d} \langle \nabla^2_{c \otimes e_i}\text{grad } f + R(e_i, c)\ \text{grad } f, e_i\rangle. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{d} \langle \nabla^2_{c \otimes e_i}\text{grad } f, e_i\rangle &= \sum_{i=1}^{d} \left(\langle \nabla_C \nabla_{E_i}\text{grad } f, E_i\rangle\right)(m) \\ &= \sum_{i=1}^{d} C\langle \nabla_{E_i}\text{grad } f, E_i\rangle (m) \\ &= (C\Delta f)(m) \\ &= \langle (\text{grad}\Delta f)(m), c\rangle \end{aligned}$$

e usando que $R(e_i, c)^T = R(c, e_i)$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{d} \langle R(e_i, c)\ \text{grad } f, e_i\rangle &= \sum_{i=1}^{d} \langle \text{grad } f, R(c, e_i)\, e_i\rangle \\ &= \langle \text{grad } f, \text{Ric}(c)\rangle = \langle \text{Ric}(\text{grad } f), c\rangle \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{d} \langle \nabla^2_{e_i \otimes e_i}\text{grad } f, c\rangle &= \langle (\text{grad } \Delta f)(m), c\rangle + \langle \text{Ric}(\text{grad } f), c\rangle \\ &= \langle (\text{grad } \Delta f)(m) + \text{Ric}(\text{grad } f), c\rangle \end{aligned}$$

para qualquer $c \in T_m M$.

□

1.2 Transporte Paralelo

Definição 6. *Um caminho diferenciável V em TM é dito paralelo se* $\frac{\nabla V(s)}{ds} \equiv 0$.

Teorema 7. *Sejam σ uma curva diferenciável em M e $(v_0)_{\sigma(0)} \in T_{\sigma(0)}M$. Então existe um único campo de vetores suave V ao longo de σ tal que V é paralelo e $V(0) = (v_0)_{\sigma(0)}$. Além disso, se $V(s)$ e $W(s)$ são campos de vetores paralelos ao longo de σ então*

$$\langle V(s), W(s)\rangle = \langle V(0), W(0)\rangle$$

para todo s.

Demonstração. Se V e W são campos de vetores paralelos, temos

$$\frac{d}{ds}\langle V(s), W(s)\rangle = \langle \frac{\nabla}{ds}V(s), W(s)\rangle + \langle V(s), \frac{\nabla}{ds}W(s)\rangle = 0$$

pois $\frac{\nabla}{ds}V(s) = \frac{\nabla}{ds}W(s) = 0$. Assim,

$$\langle V(s), W(s)\rangle \text{ é constante}$$

ou seja, $\langle V(s), W(s)\rangle = \langle V(0), W(0)\rangle$ para todo s.

Se um campo de vetores paralelo $V(s) = (\sigma(s), v(s))$ ao longo $\sigma(s)$ existe, então

$$\frac{dv(s)}{ds} + dQ(\sigma'(s))\, v(s) = 0 \text{ e } v(0) = v_0$$

portanto, se o campo de vetores V existir é único. Logo, seja v a única solução para a equação acima, e $V(s) := (\sigma(s), v(s))$, para terminarmos a demonstração é suficiente mostrar que

$$v(s) \in T_{\sigma(s)}M.$$

Equivalentemente, queremos mostrar que $\omega(s) := q(s)\, v(s)$ é identicamente nulo, onde $q(s) = Q(\sigma(s))$. Sejam $v'(s) = \frac{dv(s)}{ds}$ e $p(s) = P(\sigma(s))$ então,

$$v' = -q'v$$

e já observamos que $pq' = q'q$. Logo a função ω satisfaz

$$\omega' = q'v + qv' = q'v - qq'v = pq'v = q'qv = q'\omega$$

com $\omega(0) = 0$. Mas esta equação diferencial ordinária possui $\omega \equiv 0$ como única solução. □

Definição 8. *(Transporte paralelo) Dado um caminho diferenciável σ, seja*

$$//_s(\sigma) : T_{\sigma(0)}M \to T_{\sigma(s)}M$$

definido por $//_s(\sigma)(v_0)_{\sigma(0)} = V(s)$, onde V é o único campo de vetores paralelo ao longo de σ tal que $V(0) = (v_0)_{\sigma(0)}$.

Chamamos $//_s(\sigma)$ de transporte paralelo ao longo de σ até o tempo s.

Observação 9. *Note que* $//_s(\sigma)(v_0)_{\sigma(0)} = (u(s)v)_{\sigma(0)}$, *onde* $s \to u(s) \in Hom\left(T_{\sigma(0)}M, \mathbb{R}^N\right)$ *é a única solução para a equação diferencial*

$$\frac{u(s)}{ds} + dQ(\sigma'(s))u(s) = 0 \text{ com } u(0) = P(\sigma(0)).$$

Pelo teorema anterior temos que $u(s) : T_{\sigma(0)}M \to \mathbb{R}^N$ *é uma isometria para todo* s *e portanto o contradomínio de* $u(s)$ *é* $T_{\sigma(s)}\dot{M}$. *Além disso, seja* $\bar{u}(s)$ *uma solução para*

$$\frac{\bar{u}(s)}{ds} - \bar{u}(s)dQ(\sigma'(s)) = 0 \text{ com } \bar{u}(0) = P(\sigma(0)).$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left[\bar{u}(s)u(s)\right] &= \frac{\bar{u}(s)}{ds}u(s) + \bar{u}(s)\frac{u(s)}{ds} \\ &= \bar{u}(s)dQ(\sigma'(s))u(s) - \bar{u}(s)dQ(\sigma'(s))u(s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $\bar{u}(s)u(s) = P(\sigma(0))$ *para todo* s *e assim* $\bar{u}(s)$ *é o inverso do operador linear* $u(s) : T_{\sigma(0)}M \to T_{\sigma(s)}M$

O próximo lema nos fornece técnicas de calcular derivadas covariantes com o auxílio do transporte paralelo.

Lema 10. *Suponha* $Y \in \Gamma(TM)$, $\sigma(s)$ *um caminho em* M, $W(s) = (\sigma(s), \omega(s))$ *um campo de vetores ao longo de* σ *e seja* $//_s = //_s(\sigma)$ *o transporte paralelo ao longo de* σ. *Então*

1. $\frac{\nabla}{ds}W(s) = //_s \frac{d}{ds}\left[//_s^{-1}W(s)\right]$.
2. *Para qualquer* $v \in T_{\sigma(s)}M$,

$$\frac{\nabla}{ds}\nabla_{//_s v}Y = \nabla^2_{\sigma'(s)\otimes //_s v}Y$$

Demonstração. Seja $\bar{u}(s)$ o inverso de $u(s)$. Sabemos que

$$\frac{\nabla W(s)}{ds} = \left(\frac{d}{ds}W(s) + (dQ(\sigma'(s))W(s)\right)_{\sigma(s)}$$

e pela observação 4,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left[//_s^{-1}W(s)\right] &= \left(\frac{d}{ds}\left[\bar{u}(s)\,W(s)\right]\right)_{\sigma(s)} \\
&= \left(\frac{\bar{u}(s)}{ds}W(s)+\bar{u}(s)\,\frac{W(s)}{ds}\right)_{\sigma(s)} \\
&= \left(\bar{u}(s)\,dQ\left(\sigma'(s)\right)W(s)+\bar{u}(s)\,\frac{W(s)}{ds}\right)_{\sigma(s)} \\
&= //_s^{-1}\,\frac{\nabla}{ds}W(s)
\end{aligned}$$

concluindo o item 1.

Para demonstrar o item 2. considere uma base $\{E_i\}_{i=1}^N$ de referenciais ortonormais ao longo de $\sigma(s)$. Então

$$//_s v = \sum_{i=1}^{N} v_i(s)\,E_i(\sigma(s))$$

temos

$$\frac{\nabla}{ds}//_s v(s) = 0. \tag{1.1}$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla}{ds}\nabla_{//_s v}Y &= \frac{\nabla}{ds}\left[\sum_{i=1}^{N} v_i(s)\left(\nabla_{E_i}Y\right)(\sigma(s))\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N} v_i'(s)\left(\nabla_{E_i}Y\right)(\sigma(s)) + \sum_{i=1}^{N} v_i(s)\,\nabla_{\sigma'(s)}\left(\nabla_{E_i}Y\right)
\end{aligned}$$

e usando que $\nabla^2_{\sigma'(s)\otimes E_i(\sigma(s))}Y := \left(\nabla_{\sigma'(s)}\nabla_{E_i(\sigma(s))}Y - \nabla_{\nabla_{\sigma'(s)}E_i(\sigma(s))}Y\right)(\sigma(s))$ temos

$$\nabla_{\sigma'(s)}\left(\nabla_{E_i}Y\right) = \nabla^2_{\sigma'(s)\otimes E_i(\sigma(s))}Y + \nabla_{\nabla_{\sigma'(s)}E_i(\sigma(s))}Y. \tag{1.2}$$

De (1.1) e (1.2) concluimos

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla}{ds}\nabla_{//_s v}Y &= \nabla_{\frac{\nabla}{ds}//_s v(s)}Y + \sum_{i=1}^{d} v_{i(s)}\nabla^2_{\sigma'(s)\otimes E_i(\sigma(s))}Y \\
&= \nabla^2_{\sigma'(s)\otimes //_s v}Y.
\end{aligned}$$

□

Neste momento discutiremos a noção de derivada covariante em $M \times \mathbb{R}^N$ que extende a noção de ∇ definida anteriormente. Consideremos o fibrado normal sobre M,

$$N(M) := \bigcup_{m \in M} \left(\{m\} \times T_m M^{\perp}\right) \subset M \times \mathbb{R}^N$$

Analogamente a definição de ∇ em TM, faz sentido extender ∇ para o fibrado normal $N(M)$ por

$$\frac{\nabla V(s)}{ds} = (\sigma(s), Q(\sigma(s))\, v'(s)) = (\sigma(s), v'(s) + dP(\sigma'(s))\, v(s))$$

para todos os caminhos $s \to V(s) = (\sigma(s), v(s))$ em $N(M)$. Assim, esta derivada covariante em fibrados normais satisfaz propriedades análogas para ∇ em fibrados tangentes TM.

As derivadas covariantes em TM definem uma derivada covariante em $M \times \mathbb{R}^N$. Ou seja, se $V(s) = (\sigma(s), v(s))$ é um caminho diferenciável em $M \times \mathbb{R}^N$, sejam $p(s) := P(\sigma(s))$ e $q(s) := Q(\sigma(s))$, definimos

$$\frac{\nabla V(s)}{ds} := \left(\sigma(s), p(s)\frac{d}{ds}\{p(s)\, v(s)\} + q(s)\frac{d}{ds}\{q(s)v(s)\}\right)$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\nabla V(s)}{ds} &= \left(\sigma(s), \frac{d}{ds}\{p(s)\, v(s)\} + q'(s)p(s)v(s) + \frac{d}{ds}\{q(s)v(s)\} + p'(s)\, q(s)\, v(s)\right) \\ &= (\sigma(s), v'(s) + q'(s)p(s)v(s) + p'(s)\, q(s)\, v(s)) \\ &= (\sigma(s), v'(s) + dQ(\sigma'(s))\, P(\sigma(s))\, v(s) + dP(\sigma'(s))\, Q(\sigma(s))\, v(s)) \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\frac{\nabla V(s)}{ds} = (\sigma(s), v'(s) + \Gamma(\sigma'(s))\, v(s)) \tag{1.3}$$

onde

$$\Gamma(\omega_m)\, v_m := dQ(\omega_m)\, P(m)\, v + dP(\omega_m)\, Q(m)\, v \tag{1.3.1}$$

para todo $\omega_m \in TM$ e $v \in \mathbb{R}^N$.

1.3 Mapa de desenvolvimento de Cartan

Assumiremos que M é uma variedade riemanniana compacta, $W^{\infty}(T_oM)$ é o conjunto de caminhos diferenciáveis por partes, $b : [0,1] \to T_oM$ tal que $b(0) = 0_o \in T_oM$ e que $W_o^{\infty}(M)$ é o conjunto dos caminhos diferenciáveis por partes, $\sigma : [0,1] \to M$ tal que $\sigma(0) = o \in M$.

Teorema 11. *(Mapa de desenvolvimento de Cartan) Para cada $b \in W^{\infty}(T_oM)$ existe um único $\sigma \in W_o^{\infty}(M)$ tal que*

$$\sigma'(s) := \left(\sigma(s), \frac{d\sigma}{ds}\right) = //_s(\sigma)\, b'(s) \text{ e } \sigma(0) = o. \tag{1.4}$$

Demonstração. Suponha que σ seja solução de (1.4) e

$$//_s(\sigma)\, v_o = (o, u(s)\, v) \text{ onde } u(s) : T_oM \to \mathbb{R}^N$$

então u satisfaz a equação diferencial

$$u'(s) + dQ(\sigma'(s))\, u(s) = 0 \text{ com } u(0) = u_0$$

onde $u_0 v := v$ para todo $v \in T_oM$. Logo, a equação (1.4) é equivalente ao par de equações diferenciais ordinárias,

$$\sigma'(s) = u(s)\, b'(s) \text{ com } \sigma(0) = o \tag{1.5}$$

$$u'(s) + dQ(\sigma(s), u(s)\, b'(s))\, u(s) = 0 \text{ com } u(0) = u_0. \tag{1.6}$$

Portanto, a unicidade da solução é consequência direta do teorema de unicidade para equações diferenciais ordinárias homogêneas.

Seja $z := (z_<, z_>)$ um difeomorfismo entre um aberto A que contém m de $E \supset M$ e um aberto B de $\mathbb{R}^N$ com $z(A \cap M) = B \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$. Assim, $z_<$ denota as primeiras d coordenadas e $z_>$ as últimas $N-d$ coordenadas. Sabemos que Q possui uma extensão para uma vizinhança de $m \in M$ em $\mathbb{R}^N$ tal que $Q(x)$ é uma projeção ortogonal sobre $Ker(z'_>(x))$.

Logo, para algum s muito pequeno, podemos definir σ e u como as únicas soluções das equações (1.5) e (1.6) com valores em $\mathbb{R}^N$ e $Hom(T_oM, \mathbb{R}^N)$ respectivamente. Dessa forma, precisamos mostrar agora dois pontos fundamentais, o primeiro é $\sigma(s) \in M$ e o outro é que o contradomínio de $u(s)$ é $T_{\sigma(s)}M$.

Seja $\omega(s) := Q(\sigma(s))\, u(s)$, da equação (1.6) temos que $u' = -dQ(\sigma')\, u$. E ainda

$$\begin{aligned} \omega' &= dQ(\sigma')\, u + Q(\sigma)\, u' = dQ(\sigma')\, u - Q(\sigma)\, dQ(\sigma')\, u \\ &= P(\sigma)\, dQ(\sigma')\, u = dQ(\sigma')\, Q(\sigma)\, u = dQ(\sigma')\, \omega \end{aligned}$$

onde de $PQ = 0$ temos $dPQ + PdQ = 0$ e de $P + Q = I$ temos $dP + dQ = 0$, ou seja,

$$PdQ = -dPQ = dQQ.$$

Como $\omega(0) = 0$ segue-se da unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias homogêneas que $\omega \equiv 0$, isto é, o contradomínio de $u(s)$ é $T_{\sigma(s)}M$. Portanto,

$$[u(s)] \subset Ker[Q(\sigma(s))] = Ker[z'_{>}(\sigma(s))].$$

Consequentemente temos,

$$\frac{d(z_{>}(\sigma(s)))}{ds} = z'_{>}(\sigma(s))\frac{d\sigma(s)}{ds} = z'_{>}(\sigma(s))\,u(s)\,b'(s) = 0$$

para s muito pequeno e como $z'_{>}(\sigma(s)) = z'_{>}(0) = 0$, temos $z'_{>}(\sigma(s)) = 0$, ou seja, $\sigma(s) \in M$.

Assim, mostramos que existe uma solução (σ, u) para s muito pequeno das equações (1.5) e (1.6) tais que σ permanece em M e $u(s)$ é o transporte paralelo ao longo de s. Por métodos utilizados em equações diferenciais ordinárias existe uma solução maximal (σ, u) com essas mesmas propriedades. Note que (σ, u) é um caminho em $M \times Iso\left(T_oM, \mathbb{R}^N\right)$, onde $Iso\left(T_oM, \mathbb{R}^N\right)$ denota o conjunto de isometrias de T_oM para $\mathbb{R}^N$. Como $M \times Iso\left(T_oM, \mathbb{R}^N\right)$ é compacto temos que (σ, u) não explode. Portanto, (σ, u) é definido no mesmo intervalo onde b está definido. □

Notação 12. *Seja $\phi : W^{\infty}(T_oM) \to W_o^{\infty}(M)$ com $\phi(b) = \sigma$ onde σ é solução de (1.4). A inversa de ϕ que denotaremos por Ψ verifica que*

$$\Psi_s(\sigma) = b(s) = \int_0^s //_r(\sigma)^{-1}\sigma'(r)\,dr.$$

Concluiremos esta seção calculando as derivadas de Ψ e ϕ.

Teorema 13. *(Derivada de Ψ) Seja $(t,s) \to \Sigma(t,s)$ um mapa diferenciável em M tal que $\Sigma(t,.) \in W_o^{\infty}(M)$ para todo t. Seja*

$$H(s) := \dot{\Sigma}(0,s) := \left(\Sigma(0,s), \frac{d\Sigma(t,s)}{dt}\,|_{t=0}\right)$$

portanto H é um campo de vetores ao longo de $\sigma := \Sigma(0,.)$. Definimos

$$\left(R_{//_{s}(\sigma)}(a,c)\right)(s) := //_s(\sigma)^{-1} R\left(//_s(\sigma)\,a, //_s(\sigma)\,c\right) //_s(\sigma)$$

para todo a,c $\in T_oM$.

Então

$$\begin{aligned} d\Psi(H) &= \frac{d\Psi(\Sigma(t,.))}{dt}\mid_{t=0} \\ &= //_s(\sigma)^{-1}H(s) \\ &\quad + \int_0 \left(\int_0 R_{//_s(\sigma)}\left(//_s(\sigma)^{-1}H(s), b'(s)\, ds \right) \right) b'(s)\, ds \end{aligned}$$

onde $b = \Psi(\sigma)$ *e* $\int_0 fb'(s)\, ds$ *é a notação para a função* $s \to \int_0^s f(r)\, b'(r)\, dr$ *quando* f *é um caminho de matrizes.*

Demonstração. Para simplificar a notação sejam " $\cdot$ "$=\frac{d}{dt}\mid_0$, " $'$ "$=\frac{d}{ds}$, $B(t,s) := \Psi(\Sigma(t,.))(s)$, $U(t,s) := //_s(\Sigma(t,.))$, $h(s) := //_s(\sigma)^{-1}H(s)$, $u(s) := //_s(\sigma) = U(0,s)$ e

$$\dot{b}(s) := (d\Psi(H))(s) := \frac{dB(t,s)}{dt}\mid_{t=0}.$$

Com esta notação temos,

$$\Sigma' = UB' \ , \ \dot{\Sigma} = H = uh \text{ e } \frac{\nabla U}{ds} = 0$$

onde $\frac{\nabla U}{ds} : T_oM \to T_\Sigma M$ é definido por $\frac{\nabla U}{ds}a := \frac{\nabla(Ua)}{ds}$ para todo $a \in T_oM$, ou equivalentemente, $\frac{\nabla U}{ds} = P(\Sigma)\, U'$.

Aplicando $\frac{\nabla}{dt}$ na equação $\Sigma' = UB'$ e na equação $\dot{\Sigma} = uh$ em $t = 0$ temos,

$$\frac{\nabla U}{dt}\mid_{t=0} b' + u\dot{b}' = \frac{\nabla\Sigma'}{dt}\mid_{t=0} = \frac{\nabla\dot{\Sigma}}{ds} = uh'.$$

Portanto,

$$\dot{b}' = h' + Ab'. \tag{1.7}$$

onde $A := -U^{-1}\frac{\nabla U}{dt}\mid_{t=0}$, ou seja,

$$\frac{\nabla U}{dt}(0,.) = -uA. \tag{1.8}$$

Aplicando $\frac{\nabla}{ds}$ na equação (1.8) e usando que $\frac{\nabla u}{ds} = 0$. Temos,

$$-uA' = \frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}U\mid_{t=0} = \left[\frac{\nabla}{ds}, \frac{\nabla}{dt}\right] U\mid_{t=0} = R(\sigma', H)\, u.$$

Assim, $A' = R_u(h, b')$. Integrando-se esta identidade (em relação a s, pois nesse caso temos independência em relação a t) e usando que $A(0) = 0$, segue-se

$$A = \int_0 R_u(h, b'(s)\, ds) \tag{1.9}$$

Integrando-se a equação (1.7) em relação a s e usando a equação (1.9) temos,

$$\begin{aligned} d\Psi\left(H\right) &= \frac{d\Psi\left(\Sigma\left(t,.\right)\right)}{dt}\,|_{t=0} \\ &= //_{s}\left(\sigma\right)^{-1}H\left(s\right) + \int_0 \left(\int_0 R_{//_{s}(\sigma)}(//_{s}\left(\sigma\right)^{-1}H\left(s\right), b'\left(s\right)ds)\right)b'\left(s\right)ds. \end{aligned}$$

□

Teorema 14. *(Derivada de ϕ). Sejam b,$k \in W^{\infty}\left(T_oM\right)$ e $(t,s) \to B\left(t,s\right)$ um mapa diferenciável sobre T_oM tal que $B\left(t,.\right) \in W^{\infty}\left(T_oM\right)$, $B\left(0,s\right) = b\left(s\right)$, e $\dot{B}\left(0,s\right) = k\left(s\right)$. Por exemplo, $B\left(t,s\right) = b\left(s\right) + tk\left(s\right)$. Então,*

$$\phi_*\left(k\right) := \frac{d}{dt}\,|_0\left(B\left(t,.\right)\right) = //_{.}\left(\sigma\right)h,$$

onde $\sigma := \phi\left(s\right)$ e h é a primeira componente na solução (h,A) para o par de equações diferenciáveis:

$$k' = h' + Ab' \text{ com } h\left(0\right) = 0 \tag{1.10}$$

e

$$A' = R_{//_{s}(\sigma)}\left(h, b'\right) \text{ com } A\left(0\right) = 0. \tag{1.11}$$

Demonstração. A demonstração deste teorema é análoga a do anterior, dessa forma usaremos a mesma notação assumida naquela prova, definindo Σ por $\Sigma\left(t,s\right) = \phi_s\left(B\left(t,.\right)\right)$. Então, com $B\left(t,.\right) = \Psi\left(\Sigma\left(t,.\right)\right)$ temos da hipótese que,

$$k = \frac{d}{dt}\,|_0\,\Psi\left(\Sigma\left(t,.\right)\right) = d\Psi\left(H\right).$$

Como já sabemos, $d\Psi\left(H\right) = h + \int_0 \left(\int_0 R_{//_{s}(\sigma)}(h, b'\left(s\right)ds)\right)b'\left(s\right)ds$. Portanto, definindo $A := \int_0 R_{//_{s}(\sigma)}(h, b'\left(s\right)ds)$ e derivando em relação a s segue-se que A resolve a equação (1.10) e h a equação (1.11). □

O próximo resultado tratará da possível mudança do ponto base, ou seja, queremos incluir a possibilidade de $\Sigma\left(t,.\right) \notin W_o^{\infty}\left(M\right)$ quando $t \neq 0$. Portanto, é visto como uma extensão do teorema 13.

Teorema 15. *Seja $(t,s) \to \Sigma\left(t,s\right)$ uma função suave em M tal que $\sigma := \Sigma\left(0,.\right) \in W_o^{\infty}\left(M\right)$. Defina $H\left(s\right) := \frac{d\Sigma(t,s)}{dt}\,|_{t=0}$ e $h\left(s\right) := //_{s}\left(\sigma\right)^{-1}H\left(s\right)$. (É importante notar que $H\left(0\right)$ e $h\left(0\right)$ não precisam mais serem iguais a 0). Seja*

$$U\left(t,s\right) := //_{s}\left(\Sigma\left(t,.\right)\right)//_{t}\left(\Sigma\left(.,0\right)\right) : T_oM \to T_{\Sigma(t,s)}M,$$

portanto $\frac{\nabla U(t,0)}{dt} = 0$ *e* $\frac{\nabla U(t,s)}{ds} \equiv 0$. *Com* $B(t,s) := \int_0^s U(t,r)^{-1} \Sigma'(t,r)\, dr$, *então*

$$\dot{b}(s) := \frac{d}{dt} |_0\ B(t,s) = h_s + \int_0^s \left(\int_0 R_{//_s(\sigma)}(h, b'(s)\, ds) \right) b'(s)\, ds$$

onde $b := \Psi(\sigma)$.

Demonstração. Para simplificar a notação sejam " $\cdot$ "$=\frac{d}{dt}\ |_0$ e " $'$ "$=\frac{d}{ds}$, já sabemos que $B(t,s) := \int_0^s U(t,r)^{-1} \Sigma'(t,r)\, dr$, $U(t,s) := //_s(\Sigma(t,.))//_t(\Sigma(.,0))$, e ainda temos $h(s) := //_s(\sigma)^{-1} H(s)$, $b(s) := \Psi(\Sigma(0,s))$ e $u(s) := //_s(\sigma) = U(0,s)$, segue-se

$$\Sigma' = UB' \ , \dot{\Sigma} = H = uh, \ \frac{\nabla U}{ds} = 0 \text{ e } \frac{\nabla U(t,0)}{dt} = 0.$$

Aplicando $\frac{\nabla}{dt}$ na equação $\Sigma' = UB'$ e na equação $\dot{\Sigma} = uh$ em $t = 0$ temos,

$$\frac{\nabla U}{dt} |_{t=0}\ b' + u\dot{b}' = \frac{\nabla \Sigma'}{dt} |_{t=0} = \frac{\nabla \dot{\Sigma}}{ds} = uh'.$$

Portanto,

$$\dot{b}' = h' + Ab' \tag{1.12}$$

onde $A := -U^{-1}\frac{\nabla U}{dt}\ |_{t=0}$, ou seja,

$$\frac{\nabla U}{dt}(0,.) = -uA \tag{1.13}$$

Aplicando $\frac{\nabla}{ds}$ na equação (1.13) e usando que $\frac{\nabla u}{ds} = 0$. Temos,

$$-uA' = \frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt} U\ |_{t=0} = \left[\frac{\nabla}{ds}, \frac{\nabla}{dt}\right] U\ |_{t=0} = R(\sigma', H)\, u.$$

Assim, $A' = R_u(h, b')$. Integrando-se esta identidade (em relação a s, pois nesse caso temos independência em relação a t) e usando que $A(0) = 0$, segue-se

$$A = \int_0 R_u(h, b'(s)\, ds). \tag{1.14}$$

Integrando-se a equação (1.12) em relação a s e usando a equação (1.14) temos,

$$\begin{aligned} \dot{b}(s) \quad : \quad &= \frac{d}{dt} |_0\ B(t,s) \\ &= //_s(\sigma)^{-1} H(s) + \int_0^s \left(\int_0 R_{//_s(\sigma)}(//_s(\sigma)^{-1} H(s), b'(s)\, ds) \right) b'(s)\, ds. \end{aligned}$$

$\square$

CAPÍTULO 2

INTRODUÇÃO A GEOMETRIA ESTOCÁSTICA

Neste capítulo iremos assumir algum conhecimento sobre o cálculo estocástico no contexto euclidiano. Para uma abordagem breve mas que desenvolve as primeiras idéias ver P. R. C. Ruffino [13] e Z. Brzezniak e T. Zastawniak [2]. Para contextos mais abrangentes ver P. Protter [12], M. Emery [8] e H. Kunita [10].

Na primeira seção temos como objetivo revisar alguns conceitos básicos do cálculo estocástico até a fórmula de Itô. Logo após, introduziremos a chamada geometria de segunda ordem com a finalidade de calcularmos a fórmula geométrica de Itô na terceira seção. Para mais detalhes ver P. J. Catuogno [3] e [4]. Assim, na quarta seção, iniciaremos os estudos de equações diferenciais estocásticas em variedades calculando a forma de Itô da equação de Stratonovich e ainda o teorema da existência e unicidade de soluções da mesma, e na última seção conheceremos o movimento Browniano em uma variedade diferenciável com resultados relevantes para o próximo capítulo.

2.1 Fórmula de Itô

Definição 16. *Sejam Y uma semimartingale. Para cada X processo estocástico adaptado contínuo real definimos a integral de Itô,*

$$\int_0^t XdY := \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=0}^{\infty} (X_{t_i}) \left(Y_{t_{i+1}\wedge t} - Y_{t_i\wedge t}\right)$$

com $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < ...\}$ uma partição de $[0, \infty)$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$. Definimos $\|\pi\| := \sup_i \mid t_{i+1} - t_i \mid$ como o máximo para π e $t_i \wedge t := \min\{t, t_i\}$.

E ainda a integral de Stratonovich como

$$\int_0^t X\delta Y := \int_0^t XdY + \frac{1}{2}[X, Y]_t \tag{2.1}$$

onde,

$$[X, Y]_t = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=0}^{\infty} \left(X_{t\wedge t_i} - X_{t\wedge t_{i+1}}\right) \left(Y_{t_{i+1}\wedge t} - Y_{t_i\wedge t}\right) = \int_0^t dXdY$$

O fato de uma semimartingale ter variação quadrática limitada evidencia que a fórmula de Itô será um cálculo de segunda ordem.

Teorema 17. ***Fórmula de Itô (fórmula de mudança de coordenadas no $\mathbb{R}^N$):*** *Seja $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $X = (X^1, ..., X^N) : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^N$ uma semimartingale contínua definida no domínio de F. Então $F(X)$ é uma semimartingale e ainda*

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s)\, dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\, d\left[X^i, X^j\right]_s$$

que é a decomposição da semimartingale $F(X)$.

Demonstração. Segue-se do Teorema 2.3.11 de H. Kunita [10]. □

Teorema 18. *(Fórmula de Itô para integral de Stratonovich) Nas mesmas condições do teorema anterior*

$$f(X) - f(X_0) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^t (\partial_i f)(X_s)\, \delta X_s^i$$

Demonstração. Segue do Teorema 2.3.12 de H. Kunita [10]. □

2.2 Geometria de Schwartz ou Geometria de Segunda Ordem

Nesta seção veremos as definições básicas da geometria de segunda ordem importantes para a apresentação dos resultados expostos na próxima seção como a a fórmula de conversão de Itô para Stratonovich ou fórmula geométrica de Itô. Para uma abordagem mais geral é interessante consultar os capítulos 6 e 7 do livro de M. Emery [8] e os trabalhos de P. J. Catuogno [3] e P. A. Meyer [11].

Sejam M uma variedade diferenciável e x um ponto de M, o espaço tangente de segunda ordem em M no ponto x, denotado por $\tau_x M$, é o espaço vetorial dos operadores diferenciáveis no ponto x de M de ordem menor ou igual a dois sem termo constante. Sejam $U \subset M$ um aberto e $\{x_i\}$ um sistema de coordenadas locais de M em torno de $x \in U$. Resulta que todo $L \in \tau_x M$ escreve-se de maneira única como

$$L = a^i \frac{\partial}{\partial x_i} + a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

com $a^{ij} = a^{ji}$ onde adotamos a convenção de Einstein. Note que os elementos de $T_x M$ podem ser vistos como operadores diferenciáveis de ordem um sem termo constante de M em x e portanto $T_x M \subset \tau_x M$. Os elementos de $\tau_x M$ são chamados de vetores tangentes de segunda ordem e os elementos do espaço vetorial dual $\tau_x^* M$ são chamados de formas de segunda ordem (ou covetores de segunda ordem), o fibrado tangente de segunda ordem τM e o fibrado cotangente de segunda ordem $\tau^* M$ são definidos pelas uniões disjuntas

$$\tau M = \bigcup_{x \in M} \tau_x M \quad \text{e} \quad \tau^* M = \bigcup_{x \in M} \tau_x^* M.$$

Notemos que o fibrado tangente é um subfibrado do fibrado de segunda ordem.

Sejam M uma variedade riemmaniana mergulhada no $\mathbb{R}^N$ com métrica induzida pelo mergulho. A conexão ∇ em M pode ser associada a um projetor linear $p : \tau M \to TM$ definido por

$$p(X) = X$$

$$p\,(XY) = \nabla_X Y$$

onde X, Y são elementos de TM. O projetor linear é bem definido pois cada elemento de τM pode ser escrito como produto de vetores tangentes de primeira ordem sem depender da escolha destes.

Sejam M e N variedades diferenciáveis e $\phi : M \to N$ suave. Temos que ϕ induz uma operação

$$\phi_*(x) : \tau_x M \to \tau_{\phi(x)} N$$

definida por

$$\phi_*(x) L\left(f\right) := L\left(f \circ \phi\right)(x)$$

para todo $L \in \tau_x M$ e $f \in C^\infty\left(N\right)$.

Para um covetor de segunda ordem $\theta \in \tau^*_{\phi(x)} N$ definimos o pull-back $\phi^*(x)\theta \in \tau^*_x M$ de θ pela fórmula

$$\phi^*(x)\theta\left(L\right) = \theta\left(\phi_*(x)L\right)$$

para todo $L \in \tau_x M$.

Definição 19. *Sejam $U \subset M$ aberto, $x \in U$ e $f{,}g \in C^\infty\left(U\right)$. Definimos $d^2 f\left(x\right) \in \tau^*_x M$ e $\left(df \cdot dg\right)(x) \in \tau^*_x M$ por*

$$d^2 f\left(x\right) \cdot V = V\left(f\right)$$

$$\left(df \cdot dg\right)(x) \cdot V = \frac{1}{2}\left(V\left(fg\right) - f\left(x\right)V\left(g\right) - g\left(x\right)V\left(f\right)\right)(x)$$

onde $V \in \tau_x M$.

Na verdade, seja $U \subset M$ um aberto e $\{x_i\}$ um sistema de coordenadas local de M em torno de $x \in U$, podemos escrever $\theta \in \tau^*_x M$ de forma única como

$$\theta\left(x\right) = \theta^i\left(x\right) d^2 x_i + \theta^{ij}\left(x\right) dx_i \cdot dx_j$$

onde $\theta^{ij} = \theta^{ji}$ e $\theta^i{,}\theta^{ij} \in C^\infty(M)$, pois $\{d^2 x_i,\, 2\; dx_i \cdot dx_j : i \leq j\}$ é a base dual de associada a $\{\, \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} : i \leq j\}$ pois,

$$d^2 x_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} = \delta^k_i$$

$$\left(dx_k \cdot dx_l\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$$

$$d^2 x^k \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

$$\left(dx_k \cdot dx_l\right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2}\left[\delta^k_i \delta^l_j + \delta^l_i \delta^k_j\right]$$

Assim, escrevemos $\theta = \theta^i(x)\, d^2x^i + \theta^{ij}(x)\, dx^i \cdot dx^j$ de acordo com a notação do início dessa seção.

Ainda podemos definir o operador de Stratonovich.

Definição 20. *O operador de Stratonovich $\delta : T^*M \to \tau^*M$ é o único operador linear que verifica para toda função f e toda 1-forma ω,*

1. $\delta(df) = d^2 f$

2. $\delta(f\omega) = H(df \otimes \omega) + f d\omega$

onde $H : T^*M \otimes T^*M \to \tau^*M$ é um operador linear que satisfaz

$$H(df \otimes dg) = df \cdot dg.$$

Se $\theta = \theta^i dx^i$ é uma 1-forma temos

$$\begin{aligned}
\delta\theta &= \delta\left(\theta^i dx^i\right) \\
&= H\left(d\theta^i \otimes dx^i\right) + \theta^i d\left(dx^i\right) \\
&= d\theta^i \cdot dx^i + \theta^i d\left(dx^i\right) \\
&= \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j} dx^j \cdot dx^i + \theta^i d^2 x^i.
\end{aligned}$$

2.3 Fórmula geométrica de Itô

Definição 21. *Assumiremos que M é uma subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^N$ com estrutura riemanniana induzida. Uma M-semimartingale é uma $\mathbb{R}^N$-semimartingale contínua X tal que $X(\omega, s) \in M$ para todo $(\omega, s) \in \Omega \times [0, \infty)$.*

Como $f \in C^\infty(M)$ é a restrição de uma função diferenciável F em $\mathbb{R}^N$, segue-se da fórmula de Itô que $f \circ X = F \circ X$ é $\mathbb{R}^N$-semimartingale se X é uma M-semimartingale. Reciprocamente, se X é um M-processo e $f \circ X$ é $\mathbb{R}$-semimartingale para toda $f \in C^\infty(M)$ então X é uma M-semimartingale. De fato, seja $x = (x_1, ..., x_N)$ as coordenadas canônicas do $\mathbb{R}^N$, então $X_i := x_i \circ X$ é uma $\mathbb{R}$-semimartingale para cada i, o que implica que X é uma $\mathbb{R}^N$-semimartingale.

Seja X uma M-semimartingale. Para $\theta \in \Gamma(\tau^*M)$ a integral de θ ao longo de X é dada no sistema de coordenadas local $X = (X^1, ..., X^N)$ por

$$\int_0^t \theta d_2 X = \int_0^t \theta^i(X) dX_s^i + \frac{1}{2}\int_0^t \theta^{ij}(X_s)\, d\left[X^i, X^j\right]_s$$

onde d_2X é visto como um elemento de τM, que para toda $f \in C^{\infty}(M)$,

$$d(f(X)) = (d_2X)\, f$$

portanto a expressão é independente da escolha de coordenadas.

Por outro lado, P. A Meyer [11] demonstrou que para cada conexão ∇ na variedade diferenciável M existe uma seção p do fibrado vetorial $Hom(\tau M, TM)$ tal que $p(X) = X$ e $p(XY) = \nabla_X Y$ onde X, Y são elementos de $\Gamma(TM)$ como foi visto anteriormente. Denominamos por ∇^M a seção p e chamaremos ∇^M de conexão em M.

Seja M uma variedade munida da conexão ∇^M, seja $\theta_{X_t} \in \Gamma(T^*M)$ uma 1-forma e um processo estocástico contínuo ao longo de X_t. A integral de Itô de θ ao longo de X é definida por

$$\int \theta d^{\nabla^M} X = \int \left(\nabla^M\right)^* \theta d_2 X$$

onde $\left(\nabla^M\right)^* : T_x^*M \to \tau_x^*M$ é o pull-back de ∇^M. Para escrever a expressão acima em coordenadas locais $\{x^i\}$ sabemos que,

$$\nabla^M\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ e } \nabla^M\left(\frac{\partial}{\partial x^i \partial x^j}\right) = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

seja $\theta = \theta^i dx^i$. Logo

$$\begin{aligned} \left(\nabla^M\right)^* \theta &= \theta^i \left(\nabla^M\right)^* \left(dx^i\right) \\ &= \theta^i \left[\left(dx^i\right) \circ \nabla^M\right] \end{aligned}$$

e como $\left(\nabla^M\right)^* \theta \in \tau_x^* M$, temos

$$\left(\nabla^M\right)^* \theta = a_i d^2 x^i + a_{ij} dx^i \cdot dx^j$$

onde

$$\begin{aligned} a_l &= \left(\nabla^M\right)^* \theta\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \theta\left(\nabla^M\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\right) \\ &= \theta\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \theta^l \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_{kl} &= \left(\nabla^M\right)^* \theta\left(\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}\right) = \theta\left(\nabla^M\left(\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}\right)\right) \\ &= \theta\left(\Gamma_{kl}^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \left(\theta^i dx^i\right)\left(\Gamma_{kl}^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \theta^i \Gamma_{kl}^i. \end{aligned}$$

Logo, $\left(\nabla^M\right)^* \theta = \theta^l \Gamma_{ij}^l \, dx^i \cdot dx^j + \theta^i d^2 x^i$. Portanto,

$$\int \theta d^{\nabla^M} X = \int \theta^i \left(X\right) dX^i + \frac{1}{2} \int \theta^i(X) \Gamma_{ij}^l d\left[X^i, X^j\right]$$

é a expressão em coordenadas locais da integral de Itô de θ ao longo de X.

Definição 22. *Uma M-semimartingale X é uma ∇^M-martingale se para qualquer 1-forma θ a integral de Itô definida acima é uma martingale local.*

Para demonstrar o resultado principal desta seção precisamos visualizar o comportamento do pull-back de um covetor de segunda ordem em termos da integral estocástica. De fato, sejam $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável, X uma M-semimartingale e $\theta \in \tau^*_{F(X)} N$ um processo estocástico adaptado de segunda ordem ao longo de $F\left(X\right)$. Queremos mostrar

$$\int F^* \theta d_2 X = \int \theta d_2 F\left(X\right).$$

Seja $(U, \{x^i\})$ um sistema de coordenadas local para M tal que $x \in U$ e $(V, \{y^i\})$ sistema de coordenadas local para N tal que $y = F\left(x\right) \in N$. Logo,

$$\theta = \theta^i d^2 y^i + \theta^{ij} dy^i \cdot dy^j$$

como $F^* \theta \in \tau^* M$ temos

$$F^* \theta = a_l d^2 x^l + a_{lk} dx^l \cdot dx^k$$

onde

$$\begin{aligned} a_l &= F^* \theta \left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \theta \left(F_* \left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\right) \\ &= \theta^i d^2 y^i \left(F_* \left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\right) + \theta^{ij} \left(dy^i \cdot dy^j\right) \left(F_* \left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\right) \\ &= \theta^i d^2 y^i \left(\frac{\partial \left(y^k \circ F\right)}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial y^k}\right) + \theta^{ij} \left(dy^i \cdot dy^j\right) \left(\frac{\partial \left(y^k \circ F\right)}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial y^k}\right) \end{aligned}$$

calculando cada termo da soma acima temos,

$$\begin{aligned} d^2 y^i \left(\frac{\partial \left(y^k \circ F\right)}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial y^k}\right) &= \left(\frac{\partial \left(y^k \circ F\right)}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial y^k}\right) \left(y^i\right) \\ &= \frac{\partial \left(y^i \circ F\right)}{\partial x^l} \end{aligned}$$

e

$$\left(dy^i \cdot dy^j\right)\left(\frac{\partial\left(y^k \circ F\right)}{\partial x^l}\frac{\partial}{\partial y^k}\right) = 0$$

Portanto,

$$a_l = \theta^i \frac{\partial\left(y^i \circ F\right)}{\partial x^l}.$$

Agora, queremos calcular

$$\begin{aligned}
a_{lk} &= F^*\theta\left(\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k}\right) \\
&= \theta\left(F_*\left(\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k}\right)\right) \\
&= \theta^i d^2 y^i\left(F_*\left(\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k}\right)\right) + \theta^{ij}\left(dy^i \cdot dy^j\right)\left(F_*\left(\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k}\right)\right) \\
&= \theta^i \frac{\partial^2\left(y^i \circ F\right)}{\partial x^l \partial x^k} + \theta^{ij}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k}\left(\left(y^i \circ F\right).\left(y^j \circ F\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Assim, a expressão para $F^*\theta$ é dada por

$$\begin{aligned}
F^*\theta &= \left(\theta^i \frac{\partial\left(y^i \circ F\right)}{\partial x^l}\right) d^2 x^l \\
&\quad + \left(\theta^i \frac{\partial^2\left(y^i \circ F\right)}{\partial x^l \partial x^k} + \theta^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k}\left(\left(y^i \circ F\right).\left(y^j \circ F\right)\right)\right) dx^l \cdot dx^k.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int F^*\theta d_2 X &= \int\left(\theta^i(X)\frac{\partial\left(y^i \circ F\right)}{\partial x^l}\right) d^2 X^l \\
&\quad + \frac{1}{2}\int\left(\theta^i(X)\frac{\partial^2\left(y^i \circ F\right)}{\partial x^l \partial x^k} + \theta^{ij}(X)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k}\left(\left(y^i \circ F\right).\left(y^j \circ F\right)\right)\right)\right)\left[dX^l, dX^k\right] \\
&= \int \theta^i(X)\, d^2 F^i(X) + \frac{1}{2}\int \theta^l(X)\,\Gamma^l_{ij} d\left[F^i(X), F^j(X)\right] \\
&= \int \theta d_2 F(X).
\end{aligned}$$

Para desenvolver a fórmula geométrica de Itô do próximo teorema estamos interessados nas seguintes definições e resultados.

Definição 23. *Seja* $b \in \Gamma\left(T^{*}M \otimes T^{*}M\right)$ *e* X *uma* M*-semimartingale. Definimos a integral quadrática de* b *ao longo* X *como*

$$\int b\left(dX, dX\right) = \int b^{ij}\left(X\right) d\left[X^{i}, X^{j}\right].$$

Observe que $b_x = b^{ij} dx^i \otimes dx^j \in T_x^{*}M \otimes T_x^{*}M = Hom\left(T_x^{*}M \otimes T_x^{*}M, \mathbb{R}^N\right)$.

Proposição 24. *Seja* b^{sim} *a parte simétrica de* b*. Então*

$$\int b\left(dX, dX\right) = \int b^{sim}\left(dX, dX\right)$$

Em particular, se b *é antisimétrico, então*

$$\int b\left(dX, dX\right) = 0$$

Demonstração. $\int b^{sim}\left(dX, dX\right) = \int \frac{b(dX,dX)+b(dX,dX)}{2} = \int b\left(dX, dX\right)$. □

Proposição 25. *Seja* $F : M \to N$ *uma aplicação diferenciável e* X *uma* M*-semimartingale. Então*

$$\int b\left(d\left(F \circ X\right), d\left(F \circ X\right)\right) = \int \left(F^{*} \otimes F^{*}\right) b\left(dX, dX\right)$$

Demonstração. Seja $b = b^{ij}\ dx^i \otimes dx^j$. Logo,

$$\int b\left(d\left(F \circ X\right), d\left(F \circ X\right)\right) = \int b^{ij}\left(F \circ X\right) d\left[F^{i}\left(X\right), F^{j}\left(X\right)\right]$$

Como

$$F^{j}\left(X\right) = F^{j}\left(X_0\right) + \int \frac{\partial F^{j}}{\partial x^{k}}\left(X\right) dX^{k} + \frac{1}{2}\int \frac{\partial^{2} F^{j}}{\partial x^{k} \partial x^{l}}\left(X\right) d\left[X^{k}, X^{l}\right]$$

e

$$F^{i}\left(X\right) = F^{i}\left(X_0\right) + \int \frac{\partial F^{i}}{\partial x^{k}}\left(X\right) dX^{k} + \frac{1}{2}\int \frac{\partial^{2} F^{i}}{\partial x^{k} \partial x^{l}}\left(X\right) d\left[X^{k}, X^{l}\right]$$

Então, calculando-se $d\left[F^{i}\left(X\right), F^{j}\left(X\right)\right]$ temos

$$\begin{aligned}
d\left[F^{i}\left(X\right), F^{j}\left(X\right)\right] &= d\left[\int \frac{\partial F^{i}}{\partial x_k}\left(X\right) dX^{k}, \int \frac{\partial F^{j}}{\partial x_l}\left(X\right) dX^{l}\right] \\
&= \frac{\partial F^{i}}{\partial x_k}\left(X\right) dX^{k} . \frac{\partial F^{j}}{\partial x_l}\left(X\right) dX^{l} \\
&= \left(F_{*}^{i} \otimes F_{*}^{j}\right) d\left[X^{i}, X^{j}\right]
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}\int b^{ij}\left(F\circ X\right)d\left[F\circ X,F\circ X\right] &= \int b^{ij}\left(F\circ X\right)\left(F_{*}\otimes F_{*}\right)d\left[X,X\right]\\ &= \int\left(F^{*}\otimes F^{*}\right)b^{ij}d\left[X^{i},X^{j}\right]\end{aligned}$$

por definição do pull-back. Assim,

$$\int b\left(d\left(F\circ X\right),d\left(F\circ X\right)\right)=\int\left(F^{*}\otimes F^{*}\right)b\left(dX,dX\right)$$

como queríamos. □

Definição 26. *Seja θ uma forma de primeira ordem ao longo da M-semimartingale X. A integral de Stratonovich de θ em relação a X é definida por*

$$\int\theta\delta X:=\int\delta\theta d_{2}X$$

Seja $(U,\{x^{i}\})$ um sistema de coordenadas local para M tal que $x\in M$. Calculamos na seção anterior,

$$\delta\theta=\frac{\partial\theta^{i}}{\partial x_{j}}dx^{j}\cdot dx^{i}+\theta^{i}d^{2}x^{i}$$

Assim, a expressão definida acima, em coordenadas locais, é dada por

$$\int\theta\delta X=\int\theta^{i}dX^{i}+\frac{1}{2}\int\frac{\partial\theta^{i}}{\partial x^{j}}d\left[X^{i},X^{j}\right]$$

Lema 27. *A fórmula de conversão de Stratonovich para Itô é dada por*

$$\int\theta\delta X=\int\theta d^{\nabla^{M}}X+\frac{1}{2}\int\nabla^{M}\theta(dX,dX)$$

Demonstração. Seja $(U,\{x^{i}\})$ coordenadas locais para M tal que $x\in M$. Como foi visto anteriormente para uma forma de primeira ordem $\theta=\theta^{i}dx^{i}$, temos

$$\int\theta d^{\nabla^{M}}X=\int\theta^{i}dX^{i}+\frac{1}{2}\int\theta^{l}\left(X\right)\Gamma_{ij}^{l}d\left[X^{i},X^{j}\right]$$

e

$$\int\theta\delta X=\int\theta^{i}dX^{i}+\frac{1}{2}\int\frac{\partial\theta^{i}}{\partial x^{j}}d\left[X^{i},X^{j}\right].$$

Logo,

$$\int\theta\delta X=\int\theta d^{\nabla^{M}}X+\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial\theta^{i}}{\partial x^{j}}-\theta^{l}\Gamma_{ij}^{l}\right)d\left[X^{i},X^{j}\right].$$

Como $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\nabla\theta^{ji}$ temos $\nabla\theta=\nabla\theta^{ji}\ dx^j\otimes dx^i$. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)+\theta\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

assim,

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\theta^i-\Gamma_{ij}^l\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)=\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\theta^i-\Gamma_{ij}^l\theta^l=\nabla\theta^{ji}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\int\theta\delta X &= \int\theta d^{\nabla^M}X+\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial\theta^i}{\partial x^j}-\theta^l\Gamma_{ij}^l\right)d\left[X^i,X^j\right]\\ &= \int\theta d^{\nabla^M}X+\frac{1}{2}\int\nabla\theta^{ji}d\left[X^i,X^j\right]\\ &= \int\theta d^{\nabla^M}X+\frac{1}{2}\int\nabla^M\theta(dX,dX).\end{aligned}$$

□

Denotamos por β_F^* a forma fundamental de F

Teorema 28. *(Fórmula geométrica de Itô) Sejam M e N variedades munidas das conexões ∇^M e ∇^N respectivamente, e $F:M\to N$ uma aplicação diferenciável. Seja X uma M-semimartingale e θ uma 1-forma em N. Então*

$$\int\theta d^{\nabla^N}F(X)=\int F^*\theta d^{\nabla^M}X+\frac{1}{2}\int\beta_F^*\theta\,(dX,dX)\,.$$

Demonstração. Pela fórmula de conversão de Stratonovich para Itô temos que

$$\begin{aligned}\int\theta d^{\nabla^N}F(X) &= \int\theta\delta F(X)-\frac{1}{2}\int\nabla^N\theta(dF(X),dF(X))\\ &= \int\theta\delta F(X)-\frac{1}{2}\int F^*\nabla^N(dX,dX)\end{aligned}$$

e ainda sabemos que

$$\int\theta\delta F(X)=\int F^*\theta\delta X=\int F^*\theta d^{\nabla^M}X+\frac{1}{2}\int\nabla^M F^*\theta\,(dX,dX)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int\theta d^{\nabla^N}F(X) &= \int F^*\theta d^{\nabla^M}X+\frac{1}{2}\int\left(\nabla^M F^*-F^*\nabla^N\right)\theta\,(dX,dX)\\ &= \int F^*\theta d^{\nabla^M}X+\frac{1}{2}\int\beta_F^*\theta\,(dX,dX)\end{aligned}$$

□

2.4 Equações diferenciais estocásticas em Variedades

Notação 29. *Suponha que* $\{X_i\}_{i=0}^n \subset \Gamma(TM)$ *são campos de vetores em* M*. Para* $a \in \mathbb{R}^n$ *seja*

$$X_a(m) := \mathrm{X}(m)\, a = \sum_{i=1}^n a_i X_i(m)$$

com $X_i(m) : \mathbb{R}^n \to T_m M$ *linear para cada* $m \in M$*.*

Definição 30. *Seja* β_s *uma* $\mathbb{R}^n$*-semimartingale dizemos que uma* M*-semimartingale* Y_s *resolve a equação diferencial estocástica de Stratonovich*

$$\delta Y_s = \mathrm{X}(Y_s)\,\delta\beta_s + X_0(Y_s)\,ds := \sum_{i=1}^n X_i(Y_s)\,\delta\beta_s^i + X_0(Y_s)\,ds \tag{2.2}$$

se para toda $f \in C^\infty(M)$*,*

$$\delta f(Y_s) = \sum_{i=1}^n (X_i f)(Y_s)\,\delta\beta_s^i + X_0 f(Y_s)\,ds,$$

ou seja,

$$f(Y_s) = f(Y_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^s (X_i f)(Y_r)\,\delta\beta_r^i + \int_0^s X_0 f(Y_r)\,dr \tag{2.3}$$

Lema 31. *(Forma de Itô para a equação (2.2)) Suponha que* β *é um movimento Browniano a valores em* $\mathbb{R}^n$ *e seja* $L := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n X_i^2 + X_0$*. Então* Y_s *resolve a equação (2.2) se e somente se*

$$f(Y_s) = f(Y_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^s (X_i f)(Y_r)\,d\beta_r^i + \int_0^s Lf(Y_r)\,dr. \tag{2.4}$$

Demonstração. Suponha que Y_s resolve (2.2)

Por (2.1) temos,

$$\int_0^s (X_i f)(Y_r)\,\delta\beta_r^i = \int_0^s (X_i f)(Y_r)\,d\beta_r^i + \frac{1}{2}\left[(X_i f)(Y_r), \beta_r^i\right]_s$$

onde

$$\left[(X_i f)(Y_r), \beta_r^i\right]_s = \int_0^s d\left[(X_i f)(Y_r)\right] d\beta_r^i.$$

Como

$$d\left((X_i f)(Y_r)\right) = \sum_{j=1}^n (X_j X_i f)(Y_r)\,d\beta_r^j + d(BV)$$

onde BV denota um processo de variação limitada.

Logo,

$$\begin{aligned} \left[(X_i f)(Y_r), \beta_r^i \right]_s &= \int_0^s \left(\sum_{j=1}^n (X_j X_i f)(Y_r)\, d\beta_r^j d\beta_r^i + d(BV) d\beta_r^i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^s \left(X_i^2 f \right)(Y_r)\, dr \end{aligned}$$

Assim, aplicando na equação (2.3) temos a equação (2.4) pois

$$\begin{aligned} f(Y_s) &= f(Y_0) + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^s (X_i f)(Y_r)\, d\beta_r^i + \frac{1}{2} \int_0^s \left(X_i^2 f \right)(Y_r)\, dr \right) + \int_0^s X_0 f(Y_r)\, dr \\ &= f(Y_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^s (X_i f)(Y_r)\, d\beta_r^i + \int \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i^2 + X_0 \right) f(Y_r)\, dr \\ &= f(Y_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^s (X_i f)(Y_r)\, d\beta_r^i + \int_0^s L f(Y_r)\, dr. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se a equação (2.4) é verdadeira para toda $f \in C^\infty(M)$, em particular para $X_i f \in C^\infty(M)$ temos

$$d\left((X_i f)(Y_r) \right) = (X_j X_i f)(Y_r)\, d\beta_r^j + L X_i f(Y_r)\, dr.$$

Como anteriormente,

$$\sum_{i=1}^n \int_0^s (X_i f)(Y_r)\, \delta\beta_r^i = \sum_{i=1}^n \int_0^s (X_i f)(Y_r)\, d\beta_r^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^s \left(X_i^2 f \right)(Y_r)\, dr$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^n \int_0^s (X_i f)(Y_r)\, d\beta_r^i = \sum_{i=1}^n \int_0^s (X_i f)(Y_r)\, \delta\beta_r^i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^s \left(X_i^2 f \right)(Y_r)\, dr.$$

Logo, usando o resultado acima na equação (2.3) temos

$$\begin{aligned} f(Y_s) &= f(Y_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^s (X_i f)(Y_r)\, \delta\beta_r^i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^s \left(X_i^2 f \right)(Y_r)\, dr + \int_0^s L f(Y_r)\, dr \\ &= f(Y_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^s (X_i f)(Y_r)\, \delta\beta_r^i + \int_0^s X_0 f(Y_r)\, dr \end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

Para o próximo resultado, assumiremos que M é uma subvariedade mergulhada compacta do $\mathbb{R}^n$. Isto evita possíveis problemas de explosões das equações diferenciais estocásticas.

Teorema 32. *Dado um ponto $m \in M$ existe uma única Y semimartingale em M, que resolve a equação (2.2) com a condição inicial $Y_0 = m$. Observe que a solução depende suavemente da condição inicial.*

Demonstração. Primeiro estamos interessados em mostrar **a existência** de soluções, para isto seja M uma variedade mergulhada no $\mathbb{R}^n$ com métrica riemanniana induzida pelo mergulho. Pelo Teorema da Vizinhança Tubular, existe uma vizinhança de M, $M(\varepsilon)$ tal que

1. $M \subset M(\varepsilon)$ e $M(\varepsilon)$ é aberto,
2. Se $x \in M(\varepsilon)$ então a distância $d(x, M)$ é dada por um segmento perpendicular a M,
3. $d(x, M) < \varepsilon$.

Agora, seja $\varphi \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ tal que

$$\begin{aligned} &\varphi \equiv 1 \text{ em } M\left(\tfrac{\varepsilon}{4}\right) \\ &\varphi \equiv 0 \text{ fora de } M\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \end{aligned}$$

e $0 \leq \varphi \leq 1$.

Consideramos a função $F(x) = \varphi(x) \cdot d(x, M)^2$, logo F é suave, e extendemos os campos de vetores X_i que determinam

$$\delta Y_s = \sum_{i=1}^{n} X_i(Y_s)\, \delta\beta_s^i + X_0(Y_s)\, ds$$

para campos de vetores $\tilde{X}_i$ em $\mathbb{R}^n$, podemos assumir que os campos são nulos fora de $M(\varepsilon)$. Fixamos $R > 0$ e vemos que na bola $B[0, R]$ temos

$$\begin{aligned} &| \tilde{X}_i F(x) | \leq C F(x) \\ &| \tilde{X}_i \tilde{X}_j F(x) | \leq C F(x) \end{aligned}$$

onde C depende de R. Observemos que $\tilde{X}_i F(x) = 0$ se e somente se $x \in M$ e $\tilde{X}_i \tilde{X}_j F(x) = 0$ se e somente se $x \in M$. Pela fórmula de Itô temos,

$$F(Y_t) = F(Y_0) + \int_0^t \left(\tilde{X}_i F\right)(Y_s)\, d\beta_s^i + \int_0^t \tilde{L} F(Y_s)\, ds$$

com $F(Y_0) = 0$. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e pela desigualdade de Burkholder temos

$$\mathbb{E}\left(\sup | F(Y_t) |^2\right) \leq C \int_0^t \mathbb{E}\left(| F(Y_s) |^2\right) ds$$

Logo, pela desigualdade de Gronwall, $F(Y_s) = 0$ para todo t e portanto $Y_t \in M$.

Agora queremos mostrar **a unicidade** da solução. Se Y é solução para a equação (2.2) então para $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned} dF(Y_s) &= \sum_{i=1}^{n} (X_i F)(Y_s)\,\delta\beta_s^i + X_0 F(Y_s)\,ds \\ &= \sum_{i=1}^{n} (Z_i F)(Y_s)\,\delta\beta_s^i + Z_0 F(Y_s)\,ds \end{aligned}$$

onde $\{Z_i\}_{i=1}^N$ é um campo de vetores em $\mathbb{R}^n$ de suporte compacto tal que $Z_i = X_i$ em M. Tomando F como as coordenadas canônicas do $\mathbb{R}^n$ temos que Y também resolve a equação

$$dY_s = \sum_{i=1}^{n} {}_i Z_i(Y_s)\,\delta\beta_s^i + Z_0(Y_s)\,ds \text{ com } Y_0 = m.$$

Mas esta é uma equação diferencial estocástica em um espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ com coeficientes de suporte compacto, portanto temos uma única solução. □

O próximo resultado é muito importante para semimartingales em subvariedades mergulhadas pois, em particular, afirma que toda semimartingale em uma variedade é solução de uma equação estocástica diferenciál de Stratonovich definida na variedade.

Proposição 33. *Suponha que M é uma subvariedade compacta de $\mathbb{R}^n$ e para cada $x \in M$, seja $P(x) : \mathbb{R}^n \to T_x M$ a projeção ortogonal. Se X é uma M-semimartingale, então*

$$X_t = X_0 + \int_0^t P(X_s)\,\delta X_s. \tag{2.5}$$

Demonstração. Seja $\{x_i\}$ base canônica do $\mathbb{R}^n$. Definimos

$$P_i(x) = P(x)\,x_i,\ Q_i(x) = x_i - P(x)\,x_i$$

logo $P_i(x)$ é tangente a M, $Q_i(x)$ é normal a M e $P_i(x) + Q_i(x) = x_i$. Seja

$$Y_t = X_0 + \int_0^t P_i(X_s)\,\delta X_s^i. \tag{2.5.1}$$

Inicialmente vamos verificar que $Y \in M$. Seja f uma função diferenciável não-negativa em $\mathbb{R}^n$ que se anula apenas em M. Pela fórmula de Itô temos,

$$f(Y_t) = f(X_0) + \int_0^t P_i f(X_s)\,\delta X_s^i. \tag{2.5.2}$$

Mas se $x \in M$ então $P_i(x) \in T_xM$ e $P_if(x) = 0$. Portanto, $P_if(X_s) = 0$ e, consequentemente, $f(Y_t) = 0$ que mostra $Y_t \in M$ para todo t.

Agora, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ seja $h(x)$ o ponto em M mais próximo de x. Como M é compacta, $h : \mathbb{R}^n \to M \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável bem definida em cada vizinhança de M e constante em cada segmento de de reta perpendicular a M, ou seja, $Q_ih(x) = 0$ para $x \in M$. Visualizando $\{x_i\}$ como um campo de vetores em $\mathbb{R}^n$, temos que

$$P_ih(x) = P_ih(x) + Q_ih(x) = x_ih(x), \, x \in M \tag{2.5.3}$$

Como $Y_t = h(Y_t)$ pois $Y_t \in M$, logo por (2.5.1)

$$Y_t = X_0 + \int_0^t P_ih(X_s)\,\delta X_s^i.$$

Usando (2.5.3) temos

$$\begin{aligned} Y_t &= X_0 + \int_0^t P_ih(X_s)\,\delta X_s^i = X_0 + \int_0^t x^i h(X_s)\delta X_s^i \\ &= h(X_t) \end{aligned}$$

pela fómula de Itô em $\mathbb{R}^n$. Mas, $h(X_t) = X_t$ pois $X_t \in M$. Assim,

$$Y_t = h(X_t)$$

como queríamos. □

2.5 Movimento Browniano

O movimento Browniano foi descoberto por Robert Brown em 1882, um botânico que notou movimentos extremamente irregulares em pequenas partículas de pólen. Desde de então o fenômeno tem sido estudado por físicos. A primeira verificação do fenômeno foi estabelecida por Einstein em 1905. Norbert Wiener o formalizou como um objeto matemático. Uma razão para a importância do movimento Browniano é que este descreve vários modelos matemáticos, os mais importantes seriam as equações diferenciais estocásticas, desenvolvidas por Itô.

Definição 34. *Seja M uma variedade riemanniana munida da conexão ∇^M. Uma M-semimartingale Y é dita uma ∇^M-martingale se uma das condições abaixo é satisfeita:*

1. *$\int_0^t \theta d^{\nabla^M} Y$ é martingale local para toda 1-forma θ de M.*
2. *Para toda $f \in C^\infty(M)$, $f(Y) - f(Y_0) - \frac{1}{2}\int \nabla df(dY, dY)$ é uma martingale local.*

Definição 35. *O processo contínuo estocástico Y é dito movimento Browniano se*

$$f(Y) - f(Y_0) - \frac{1}{2}\int_0^{\cdot} \Delta f(Y)\, ds$$

é uma martingale local para toda $f \in C^\infty(M)$, tal que $\int_0^{\cdot} \Delta f(Y)\, ds$ é o processo estocástico $t \to \int_0^t \Delta f(Y)\, ds$.

Lema 36. *Para cada $m \in M$, seja $\mathcal{I}(M) := \sum_{i=1}^d E_i \otimes E_i$ onde $\{E_i\}_{i=1}^d$ é uma base ortonormal para $T_m M$. Uma semimartingale X em M é um Movimento Browniano se e somente se X é uma martingale e*

$$dX \otimes dX = \mathcal{I}(M)\, ds.$$

A última condição, de forma mais precisa, significa que

$$\int_0^{\cdot} b(dX \otimes dX) = \int_0^{\cdot} b(\mathcal{I}(X))\, ds$$

para todo $b \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$.

Demonstração. Suponha que X é um movimento browniano em M, ou seja,

$$f(X) - f(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^{\cdot} \Delta f(X)\, ds$$

é um martingale local. Se $f{,}g \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} d(f(X)\, g(X)) &= d(f(X)) \cdot g(X) + f(X)\, d(g(X)) \\ &\quad + d[f(X), g(X)] \\ &\cong \frac{1}{2}\{\Delta f(X)\, g(X) + f(X)\, \Delta g(X)\} ds \\ &\quad + d[f(X), g(X)] \end{aligned}$$

onde $\cong$ significa igualdade a menos de uma martingale. Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(f(X)\, g(X)) &\cong \frac{1}{2}\Delta(fg)(X)\, ds \\ &= \frac{1}{2}\{\Delta f(X) g(X) + f(X) \Delta g(X) + 2\langle \text{grad } f, \text{ grad } g\rangle (X)\} ds \end{aligned}$$

Das duas equações anteriores temos

$$d[f(X), g(X)] = \langle \text{grad } f, \text{ grad } g\rangle (X)\, ds = df \otimes dg\, (\mathcal{I}(X))\, ds.$$

Pelo lema 30 temos se $b = h \cdot df \otimes dg$ então

$$\begin{aligned}\int_0^{\cdot} h\left(X\right)\left(dX \otimes dX\right) &= \int_0^{\cdot} h(X) d\left[f(X), g(X)\right] \\ &= \int_0^{\cdot} h(X)\left(df \otimes dg\right)\left(\mathcal{I}\left(X\right)\right) ds \\ &= \int_0^{\cdot} b\left(\mathcal{I}\left(X\right)\right) ds.\end{aligned}$$

Como um elemento $b \in \Gamma\left(T^*M \otimes T^*M\right)$ é uma combinação linear de expressões da forma $h\ df \otimes dg$, segue-se que

$$dX \otimes dX = \mathcal{I}\left(M\right) ds.$$

E ainda da equação acima temos,

$$\left(\nabla df\right)\left(dX \otimes dX\right) = \left(\nabla df\right)\left(\mathcal{I}\left(X\right)\right) ds = \Delta f\left(X\right) ds$$

e portanto,

$$\begin{aligned}& f\left(X\right) - f\left(X_0\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\cdot} \nabla df\left(dX \otimes dX\right) \\ = \ & f\left(X\right) - f\left(X_0\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\cdot} \Delta f\left(X\right) ds\end{aligned}$$

é uma martingale e assim X é uma martingale.

Agora, assumiremos que X é martingale e a equação $dX \otimes dX = \mathcal{I}\left(M\right) ds$ é verdadeira. Portanto temos as equações,

$$\left(\nabla df\right)\left(dX \otimes dX\right) = \left(\nabla df\right)\left(\mathcal{I}\left(X\right)\right) ds = \Delta f\left(X\right) ds$$

e

$$\begin{aligned}& f\left(X\right) - f\left(X_0\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\cdot} \nabla df\left(dX \otimes dX\right) \\ = \ & f\left(X\right) - f\left(X_0\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\cdot} \Delta f\left(X\right) ds\end{aligned}$$

ou seja, por definição X é um movimento Browniano. □

CAPÍTULO 3

TRANSPORTE PARALELO ESTOCÁSTICO

As principais referências para este capítulo estão em B. K. Driver [6], K. D. Elworty [7], H. Kunita [10], e E. P. Hsu [9]. Na primeira parte iremos apresentar algumas idéias que serão úteis para a demonstração de resultados nas outras seções. Logo após iniciaremos os estudos do transporte paralelo estocástico desenvolvendo os chamados teorema do transporte paralelo em $M \times \mathbb{R}^N$ e o mapa de desenvolvimento estocástico, o análogo ao mapa de desenvolvimento de Cartan no contexto estocástico. Na terceira seção nos focalizamos no trabalho de K. D. Elworthy sobre as construções de rolamentos estocásticos. Em seguida trabalharemos com construções de semimartingales e do movimento Browniano com a mesma abordagem que desenvolvemos nas seções anteriores, empregando a idéia do transporte paralelo ao longo de uma semimartingale em uma variedade M. Alguns dos resultados são os análogos estocásticos dos apresentados capítulo 1. Na quinta seção trataremos de resultados mais refinados de uma interpretação da solução da chamada equação de Stratonovich através de fluxos estocásticos e finalizaremos com o teorema de filtragem de ruídos redundantes.

3.1 Preliminares

Definição 37. *Suponha que α é uma 1-forma em M e V é uma TM-semimartingale, ou seja, $V_s = (X_s, v_s)$, onde X é uma M-semimartingale e v é uma $\mathbb{R}^N$-semimartingale tal que $v_s \in T_{X_s}M$ para todo s. Definimos*

$$\int_0^t \alpha\delta^{\nabla} V_s := \int_0^t \alpha\left(X_s\right)\left(P\left(X_s\right)\delta v_s\right).$$

Suponha que $\alpha\left(v_m\right) = \theta\left(m\right)v$, onde $\theta : M \to \left(\mathbb{R}^N\right)^*$ é uma função diferenciável. Derivando a identidade $v = P\left(X\right)v$ temos

$$\delta^{\nabla} V = P\left(X\right)\delta v = \delta v + dQ\left(\delta X\right)v$$

que será muito útil nos cálculos do capítulo. Portanto temos a seguinte expressão

$$\int_0^{\cdot} \alpha\left(\delta^{\nabla} V\right) = \int_0^{\cdot} \theta\left(X\right)P\left(X\right)\delta v = \int_0^{\cdot} \alpha\left(X\right)\{\delta v + dQ\left(\delta X\right)v\}.$$

Mantendo a notação que acabamos de introduzir, chamaremos de regra do Produto a seguinte equação

$$\delta\left(\alpha\left(V\right)\right) = \nabla\alpha\left(\delta X \otimes V\right) + \alpha\left(\delta^{\nabla} V\right)$$

onde $\nabla\alpha\left(\delta X \otimes V\right) := \gamma\left(\delta X\right)$ e γ é uma semimartingale em T^*M definida por

$$\gamma_s\left(\omega\right) := \nabla\alpha\left(\omega \otimes V_s\right) = \left(\nabla_\omega\alpha\right)\left(V_s\right)$$

para qualquer $\omega \in T_{X_s}M$.

Para encontrarmos a regra do Produto demonstraremos que se $\alpha = fdg$ para funções $f,g \in C^{\infty}\left(M\right)$, então

$$\int_0^{\cdot} \alpha\left(\delta X\right) = \int_0^{\cdot} f\left(X\right)\delta\left(g\left(X\right)\right).$$

De fato, seja G uma função suave em $\mathbb{R}^N$ tal que $g = G\mid_M$ então $\tilde{\alpha}\left(m\right) = f\left(m\right)G'(m)\,P\left(m\right)$ pois se α é uma 1-forma temos que $\tilde{\alpha} : M \to \left(\mathbb{R}^N\right)^*$ é definido por

$$\tilde{\alpha}\left(m\right).v = \alpha\left(\left(P\left(m\right).v\right)_m\right)$$

com $P(m) : \mathbb{R}^N \to T_m M$ projeção ortogonal. Logo,

$$\begin{aligned}
\int \alpha(\delta X) &= \int_0^{\cdot} f(X)\, G'(X)\, P(X)\, \delta X \\
&= \int_0^{\cdot} f(X)\, G'(X)\, \delta X \\
&= \int_0^{\cdot} f(X)\, \delta(G(X)) \\
&= \int_0^{\cdot} f(X)\, \delta(g(X))
\end{aligned}$$

como queríamos.

Agora, para demonstrar a regra do Produto seja $\theta : \mathbb{R}^N \to \left(\mathbb{R}^N\right)^*$ um mapa suave tal que $\tilde{\alpha}(m) = \theta(m)\,|_{T_m M}$ para todo $m \in M$ pelo lema anterior temos

$$\delta(\theta(X)\, P(X)) = d(\theta P)(\delta X)$$

e portanto pela Regra do produto usual encontrada no capítulo 1, seção 1.1 temos $\delta(\theta(X)\, P(X))\,.v = \nabla\alpha(\omega \otimes V_s) := \nabla_\omega \alpha(V_s)$. Então,

$$\begin{aligned}
\delta(\alpha(V)) &= \delta(\theta(X)\, v) = \delta(\theta(X)\, P(X)\, v) \\
&= (d(\theta P)(\delta X))\, v + \theta(X) P(X) \delta v \\
&= (d(\theta P)(\delta X))\, v + \tilde{\alpha}(X)\, \delta v \\
&= \nabla\alpha(\delta X \otimes V) + \alpha\left(\delta^{\nabla} V\right).
\end{aligned}$$

3.2 Transporte paralelo estocástico

Definição 38. *Uma TM-semimartingale V é chamada de paralela se $\delta^{\nabla} V \equiv 0$, ou seja,*

$$\int_0^t \alpha \delta^{\nabla} V \equiv 0$$

para todas as 1-formas α em M.

Proposição 39. *Uma TM-semimartingale $V = (X, v)$ é paralela se e somente se*

$$\int_0^t P(X_s)\, \delta v_s = \int_0^t (\delta v_s + dQ(\delta X_s)\, v_s) \equiv 0.$$

Demonstração. Seja $x = \{x^i\}$ as coordenadas canônicas em $\mathbb{R}^N$. Se V é paralelo então,

$$0 \equiv \int_0^t dx^i \delta^{\nabla} V_s = \int_0^t \langle e_i, P(X)\,\delta v\rangle$$

para todo i logo segue-se o resultado.

Reciprocamente, suponha que

$$\int_0^t P(X_s)\,\delta v_s = 0$$

e seja α uma 1-forma qualquer temos que,

$$\int_0^t \alpha \delta^{\nabla} V_s := \int_0^t \alpha(X_s)\,P(X_s)\,\delta v_s = 0$$

como queríamos. □

Definição 40. *Denominaremos de $O(N)$ o fibrado ortogonal de $N(M)$ tal que*

$$O(N) := \bigcup_{x\in N} O_x(N)$$

onde $O_x(N)$ é o conjunto de todas as isometrias $u : T_0M \to T_xM$

O próximo resultado é fundamental para a definição de transporte paralelo estocástico.

Teorema 41. *(Transporte paralelo em $M \times \mathbb{R}^N$) Seja X uma M-semimartingale e ainda $V_0(m) = (m, v(m))$ tal que $v : M \to \mathbb{R}^N$ é uma função mensurável para todo $m \in M$, então existe um único campo de TM-semimartingales paralelo denotado por V tal que $V_0 = V_0(X_0)$ e $V_s \in T_{X_s}M$ para todo s. Além disso, se u é a solução da equação diferencial estocática:*

$$\delta u + \Gamma(\delta X)\,u = 0 \text{ com } u_0 = I \in O(N) \tag{3.1}$$

O processo u definido em (3.1) é ortogonal para todo s e satisfaz $P(X_s)\,u_s = u_s P(X_0)$.E ainda, se $X_0 = 0 \in M$ q.t.p., $v \in T_0M$ e $\omega \perp T_0M$, então $u_s v$ e $u_s\omega$ satisfazem

$$\delta\{u_s v\} + dQ(\delta X)\,u_s v = P(X)\,\delta\{u_s v\} = 0$$

$$\delta\{u_s \omega\} + dP(\delta X)\,u_s \omega = Q(X)\,\delta\{u_s \omega\} = 0.$$

Demonstração. Note que, como $\Gamma = dQP + dPQ$ onde P e Q são projeções ortogonais e portanto matrizes simétricas, temos

$$\Gamma^T = PdQ + QdP = -dPQ - dQP = -\Gamma.$$

Vejamos, seja u a solução da equação (3.1) e $A(X) := \Gamma(\delta X)$. Então,

$$\begin{aligned} \delta\left(u^T u\right) &= (-Au)^T u + u^T(-Au) \\ &= -u^T A^T u - u^T A u \\ &= u^T\left(-A^T - A\right) u \\ &= u^T (A - A) u = 0. \end{aligned}$$

Logo, $u_s^T u_s = u_0^T u_0 = I$. Isto é o processo u é ortogonal para todo s. Para a segunda etapa, calculemos $\delta\left(u^T P(X) u\right)$ pela regra do produto,

$$\begin{aligned} \delta\left(u^T P(X) u\right) &= u^T \left(dP(\delta X) u - P(X)\Gamma(\delta X) u\right) + \delta u^T P(X) u \\ &= u^T \left(dP(\delta X) u - P(X)\Gamma(\delta X) + \Gamma(\delta X) P(X)\right) u \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} & dP(\delta X) + \Gamma(\delta X) P(X) - P(X)\Gamma(\delta X) \\ = \; & dP(\delta X) + \left(dQ(\delta X) P(X) + dP(\delta X) Q(X)\right) P(X) \\ & -P(X)\left(dQ(\delta X) P(X) + dP(\delta X) Q(X)\right) \\ = \; & dP(\delta X) + dQ(\delta X)P(X) - dP(\delta X)Q(X) \\ = \; & dP(\delta X) + dQ(\delta X)(I(X) - Q(X)) - dP(\delta X)Q(X) \\ = \; & dP(\delta X) + dQ(\delta X) - (dQ(\delta X) + dP(\delta X))Q(X) \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

pois $dP + dQ = 0$. Como $\delta\left(u^T P(X) u\right) = 0$, temos

$$u_s^T P(X) u_s = P(X_0)$$

para todo s.

Assim, $P(X_s)u_s = u_s P(X_0)$. Para mostrar a primeira equação de

$$\delta\left(uv\right) = \delta\left(P\left(X\right)uv\right) = P\left(\delta X\right)uv + P\left(X\right)\delta\left(uv\right),$$

usaremos que $P\left(X\right)uv = uv$. Portanto,

$$\delta\left(uv\right) = \delta\left(P\left(X\right)uv\right) = P\left(\delta X\right)uv + P\left(X\right)\delta\left(uv\right),$$

ou seja, $\delta\left(uv\right) + dQ\left(\delta X\right)uv = P\left(X\right)\delta\left(uv\right)$. Para a segunda equação temos

$$\begin{aligned} P\left(X\right)\delta(uv) &= P\left(X\right)\left(-\Gamma\left(\delta X\right)u\right)v \\ &= -P\left(X\right)\Gamma\left(\delta X\right)\left(uv\right) \\ &= -P\left(X\right)\left(dQ\left(\delta X\right)P\left(X\right) + dP\left(\delta X\right)Q\left(X\right)\right)\left(uv\right) \\ &= -dQ\left(\delta X\right)Q\left(X\right)P\left(X\right)\delta\left(uv\right) = 0 \end{aligned}$$

pois $QP = 0$.

Para mostrar a equação

$$\delta\left(u_s\omega\right) + dP\left(\delta X\right)u_s\omega = Q\left(X\right)\delta\left(u_s\omega\right) = 0$$

usaremos que $Q(X)u\omega = u\omega$,

$$\begin{aligned} \delta\left(u\omega\right) &= \delta\left(Q(X)u\omega\right) \\ &= Q\left(\delta X\right)u\omega + Q\left(X\right)\delta\left(u\omega\right) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\delta\left(u\omega\right) + dP\left(\delta X\right)u_s\omega = Q\left(X\right)\delta\left(u\omega\right).$$

Agora, para mostrar a segunda parte da equação, calculamos

$$\begin{aligned} Q\left(X\right)\delta\left(u\omega\right) &= -Q\left(X\right)\Gamma\left(\delta X\right)\left(uv\right) \\ &= -Q\left(X\right)\left(dQ\left(\delta X\right)P\left(X\right) + dP\left(\delta X\right)Q\left(X\right)\right)\left(uv\right) \\ &= -dP\left(\delta X\right)P\left(X\right)Q\left(X\right)\delta\left(uv\right) = 0 \end{aligned}$$

pois $PQ = 0$.

$\square$

Definição 42. *(Transporte paralelo estocástico) Dados $v \in \mathbb{R}^N$ e uma M-semimartingale X, chamaremos de transporte paralelo estocástico*

$$//_s(X)\, v_{X_0} = (X_s, u_s v)$$

onde u é solução da equação (3.1). Note que $V_s = //_s(X)\, V_0$.

Observação 43. *Neste momento denotamos por u_s o transporte paralelo $//_s := //_s(X)$ e v_s ao invés de $V_s = (X_s, v_s)$. Fixaremos um ponto base $o \in M$ e assumiremos que as X, M-semimartingales, iniciarão em $o \in M$.*

Para cada M-semimartingale X, seja $\Psi(X) := b$ onde a extensão do mapa de desenvolvimento a processos é dada por

$$b := \int_0^{\cdot} u^{-1} \delta X = \int_0^{\cdot} u^T \delta X$$

então $b \equiv \Psi(X)$ é uma T_oM-semimartingale tal que $b_0 = 0_o \in T_oM$.

Teorema 44. *(Mapa de desenvolvimento estocástico) Suponha que temos $o \in M$ e b é uma T_0M-semimartingale. Então existe uma única M-semimartingale X tal que*

$$\delta X_s = //_s \delta b_s = u_s \delta b_s \tag{3.2}$$

com $X_0 = o$, onde u é solução da equação (3.1)

Demonstração. A prova desse resultado é o análago estocástico a prova do teorema do mapa de desenvolvimento de Cartan. Portanto, podemos seguir o método de demonstração desse teorema para mostrar a existência e unicidade da seguinte equação diferencial estocástica,

Se $(X, u) \in M \times O(N)$

$$\delta X = u \delta b$$

onde

$$\delta u = -\Gamma(\delta X) u = -\Gamma(u \delta b) u$$

com $u_0 = I \in O(N)$.

Que é equivalente a seguinte equação de Itô,

$$du = -\Gamma(X) dX u + \frac{1}{2}(\Gamma(X)(dX)\Gamma(X) dX - \Gamma'(X)[dX, dX]) u.$$

Logo, se

$$z = -\int \Gamma(X)dX + \frac{1}{2}\int \left(\Gamma\left(X\right)\left(dX\right)\Gamma(X)dX - \Gamma'\left(X\right)\left[dX, dX\right]\right)$$

temos que a equação $\delta u - \Gamma\left(\delta X\right)u = 0$ é equivalente a equação diferencial estocástica $du = dzu$. Pelo teorema de existência e unicidade de soluções visto na seção de Cálculo estocástico em Variedades sabemos $du = dzu$ com $u\left(0\right) = u_o$ possui única solução logo $\delta u - \Gamma\left(\delta X\right)u = 0$ com $u\left(0\right) = u_0$ possui única solução e u é uma semimartingale. Portanto, temos o resultado.

□

Notação 45. *Assim como no caso diferenciável, definimos $X = \phi\left(b\right)$ o mapa de anti-desenvolvimento e portanto*

$$\Psi\left(X\right) := \phi^{-1}\left(b\right) = \int_0^{\cdot} //_r\left(X\right)^{-1}\delta X_r.$$

Na proposição que se segue assumiremos que b_s, u_s e X_s estão relacionadas pelas equações (3.2) e (3.1), ou seja, $X = \phi\left(b\right)$ e $u_s = //_s\left(X\right)$.

Proposição 46. *Seja $X = \phi\left(b\right)$ então*

$$P\left(X\right)dX = udb.$$

E ainda,

$$dX \otimes dX = udb \otimes udb := \sum_{i,j=1}^{d} ue_i \otimes ue_j db^i db^j$$

onde $\{e_i\}_{i=1}^{d}$ é uma base ortonormal para T_oM e $b = \sum_{i=1}^{d} b^i e_i$. Mais precisamente,

$$\int_0^{\cdot} \rho(dX \otimes dX) = \int_0^{\cdot} \sum_{i,j=1}^{d} \rho\left(ue_i \otimes ue_j\right) db^i db^j$$

para toda $\rho \in \Gamma\left(T^*M \otimes T^*M\right)$.

Demonstração. Considere a identidade

$$\begin{aligned} dX &= u\delta b = udb + \frac{1}{2}dudb \\ &= udb - \frac{1}{2}\Gamma\left(\delta X\right)udb \\ &= udb - \frac{1}{2}\Gamma(udb)udb. \end{aligned}$$

Lembremos que Γ foi definido por $\Gamma(\omega_m)v := dQ(\omega_m)P(m)v + dP(\omega_m)Q(m)v$ para todo $\omega_m \in TM$ e $v \in \mathbb{R}^N$. Portanto,

$$P(X)\,dX = udb - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} P(X)\,\Gamma\left((ue_i)_X\right)ue_j db^i db^j.$$

Observando que

$$P\Gamma P = P(dQP + dPQ)P = PdQP = PQdQ = 0$$

temos a equação $P(X)\,dX = udb$. Assim,

$$\begin{aligned} dX \otimes dX &= udb \otimes udb = u\sum_{i=1}^{d} d\left(b^i e_i\right) \otimes u\sum_{j=1}^{d} d\left(b^j e_j\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{d} ue_i \otimes ue_j db^i db^j \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int \rho(dX \otimes dX) = \int \sum_{i,j=1}^{d} \rho(ue_i \otimes ue_j)\,db^i db^j.$$

$\square$

3.3 Aplicações de rolamento estocástico

A construção estocástica de rolamento do movimento Browniano foi desenvolvida por J. Eells e K. D. Elworthy que pode ser encontrada em K. D. Elworthy [9].

Teorema 47. *(Construções estocásticas de rolamento) Assuma que M é uma variedade riemanniana compacta, $o \in M$ e b é uma semimartingale em T_oM. Então,*

1. X é uma martingale se e somente se b é uma martingale em T_oM.

2. X é um movimento Browniano se e somente se b é um movimento Browniano em T_oM.

3. Se $u(t,x)$ é solução do problema

$$\partial_s u(s,x) + \frac{1}{2}\Delta u(s,x) = 0$$

com $u(0,x) = f(x)$ e X_s é um movimento Browniano. Então $M_s = u(s, X_s)$ é uma martingale.

Demonstração. Pela preposição anterior, se b é uma martingale então para $f \in C^{\infty}(M)$ temos

$$\int_0^{\cdot} df\,(udb)$$

é uma martingale e portanto X é uma martingale. Suponha que X é uma martingale. Então

$$N := \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\cdot} dx_i\,(P(X)dX)\,e_i = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\cdot} \langle e_i, udb\rangle e_i = \int_0^{\cdot} udb$$

é uma martingale, onde $\{x_i\}$ são as coordenadas canônicas do $\mathbb{R}^N$ e $\{e_i\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^N$. Logo, segue-se que

$$b = \int_0^{\cdot} u^{-1} dN$$

é uma martingale.

Agora, queremos mostrar que se b é um movimento Browniano então X é movimento Browniano.

Aplicando fórmula de conversão de Stratonovich para Itô para $\theta = df$ e pela última proposição da seção anterior temos,

$$d(f\,(X)) = df(udb) + \frac{1}{2}\nabla df\,(udb \otimes udb) = df(udb) + \frac{1}{2}\Delta f(X)ds$$

pois u é uma isometria e b é um movimento Browniano temos $udb \otimes udb = \mathcal{I}\,(M)\,ds$. Portanto, X é um movimento Browniano.

Suponha que X é um M-movimento Browniano. Já mostramos que b é uma martingale. Pelo critério de Lévy basta demonstrarmos que $db \otimes db = \mathcal{I}\,(0)\,ds$. Mas, $X = N+$ processo de variação limitada,

$$\begin{aligned} db \otimes db &= u^{-1}dX \otimes u^{-1}dX \\ &= \left(u^{-1} \otimes u^{-1}\right)(dX \otimes dX) \\ &= \left(u^{-1} \otimes u^{-1}\right)\mathcal{I}\,(X)\,ds \\ &= \mathcal{I}\,(0)\,ds \end{aligned}$$

pois u é ortonormal.

Para demonstrar o último item seja $M_s = u(s, X_s)$. Assim,

$$\begin{aligned} dM_s &= \partial_s u(s, X_s) \\ &= \partial_s u(s, x)\, ds + \frac{1}{2}\Delta u(s, X_s)(dX_s, dX_s) \\ &= \partial_s u(s, x)\, ds + \frac{1}{2}\Delta u(s, X_s)\, ds + du(s, .)(dX_s, dX_s) \\ &= \partial_s u(s, x)\, ds + \frac{1}{2}\Delta u(s, X_s)\, ds + dM_s(u_s db)_{X_s} \end{aligned}$$

onde a última equação é consequência do lema de Lévy e da proposição 48. Como temos que $\partial_s u(s, x) = -\frac{1}{2}\Delta u(s, x)\, ds$, concluímos que

$$dM_s = dM_s(u_s db)_{X_s}$$

logo, M é uma martingale.

$\square$

3.4 Outras construções

Introduziremos outras construções de semimartingales e movimentos Brownianos. Considere Γ uma 1-forma em M com valores nas matrizes quadradas A, $N \times N$, tais que $A = -A^T$. Sabemos que $\Gamma = dQP + dPQ$. Dada uma M-semimartingale Y, denotaremos por u o transporte paralelo ao longo de Y como na equação (3.1).

Lema 48. *Suponha que B é um $\mathbb{R}^N$-movimento Browniano e Y a solução para*

$$\delta Y = P(Y)\,\delta B$$

com $X_0 = o \in M$. Seja $\{e_i\}_{i=1}^N$ uma base ortonormal para $\mathbb{R}^N$ e defina $B^i := \langle e_i, B\rangle$ então

$$P(Y)dB \otimes Q(Y)dB := \sum_{i,j=1}^{N} P(Y)\, e_i \otimes Q(Y)\, e_j \left(dB^i dB^j\right) = 0.$$

Demonstração. Suponha $\{v_i\}_{i=1}^N$ uma outra base ortonormal do $\mathbb{R}^N$. Logo, pela linearidade da variação quadrática temos,

$$\begin{aligned} [\langle e_i, B\rangle, \langle e_j, B\rangle] &= \sum_{k,l} [\langle e_i, v_k\rangle\langle v_k, B\rangle, \langle e_j, v_l\rangle\langle v_l, B\rangle] \\ &= \sum_{k,l} \langle e_i, v_k\rangle\langle e_j, v_l\rangle\, [\langle v_k, B\rangle, \langle v_l, B\rangle]\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{N} P\left(Y\right)e_i \otimes Q\left(Y\right)e_j \cdot d\left[B^i, B^j\right] \\
=&\sum_{i,j,k,l=1}^{N} P\left(Y\right)e_i \otimes Q\left(Y\right)e_j \langle e_i, v_k\rangle\langle e_j, v_l\rangle d\left[\langle v_k, B\rangle, \langle v_l, B\rangle\right] \\
=&\sum_{k,l}^{N} \left[P\left(Y\right)v_k \otimes Q\left(Y\right)v_l\right] d\left[\langle v_k, B\rangle, \langle v_l, B\rangle\right].
\end{aligned}$$

Assim mostramos que $P(Y)dB \otimes Q(Y)dB$ está bem definido.

Definimos

$$\bar{B} := \int_0^\cdot u^{-1}dB \text{ e } \bar{B}^i := \langle e_i, \bar{B}\rangle = \int_0^\cdot \langle ue_i, dB\rangle$$

onde u é o transporte paralelo ao longo de Y em $M \times \mathbb{R}^N$, então

$$\begin{aligned}
P(Y)dB \otimes Q(Y)dB &= \sum_{i,j,k,l=1}^{N} P\left(Y\right)ue_k \otimes Q\left(Y\right)ue_l \langle e_i, ue_k\rangle\langle e_j, ue_l\rangle \left(dB^i dB^j\right) \\
&= \sum_{k,l=1}^{N} P\left(Y\right)ue_k \otimes Q\left(Y\right)ue_l \left(d\bar{B}^k d\bar{B}^l\right) \\
&= \sum_{k,l=1}^{N} uP\left(o\right)e_k \otimes uQ\left(o\right)e_l \left(d\bar{B}^k d\bar{B}^l\right).
\end{aligned}$$

Escolhemos $\{e_i\}$ tal que $P\left(o\right)e_i = e_i$ para todo $i = 1, 2, ..., d$ e $Q\left(o\right)e_j = e_j$ para todo $j = d+1, ..., N$. Assim, $P(Y)dB \otimes Q(Y)dB = 0$ como queríamos. □

Proposição 49. *Suponha que V é uma TM-semimartingale, $X = \pi\left(V\right)$ e $V_s \in T_{X_s}M$ para todo $s \geq 0$. Então*

$$/\!/_s \delta_s \left[/\!/_s^{-1} V_s\right] = \delta_s^{\nabla} V_s := P\left(X_s\right)\delta V_s \tag{3.5}$$

onde $/\!/_s$ é o transporte paralelo estocástico ao longo de X. Se $Y_s \in \Gamma\left(TM\right)$ é um campo de vetores dependente do tempo, então

$$\delta_s\left[/\!/_s^{-1} Y_s\left(X_s\right)\right] = /\!/_s^{-1}\left(\frac{d}{ds}Y_s\right)\left(X_s\right)ds + /\!/_s^{-1}\nabla_{\delta X_s}Y_s. \tag{3.6}$$

Demonstração. Lembremos que u_s, o transporte paralelo ao longo de X em TM, resolve a equação

$$\delta u_s + dQ\left(\delta X_s\right)u_s = 0$$

com $u_0 = I_{T_oM}$. Defina $\bar{u}_s$ como solução para a equação

$$\delta \bar{u}_s = \bar{u}_s dQ\left(\delta X_s\right)$$

com $\bar{u}_0 = I_{T_oM}$. Então,

$$\delta\left(\bar{u}_s u_s\right) = \bar{u}_s dQ\left(\delta X_s\right) u_s - \bar{u}_s dQ\left(\delta X_s\right) u_s = 0$$

logo, $\bar{u}_s u_s = I$ para todo s e portanto $u_s = \bar{u}_s^{-1}$. Como

$$\begin{aligned} u_s \delta_s\left[u_s^{-1} V_s\right] &= u_s\left[u_s^{-1} dQ\left(\delta X_s\right) V_s + u_s^{-1}\delta V_s\right] \\ &= dQ\left(\delta X_s\right) V_s + \delta V_s = \delta^{\nabla} V_s. \end{aligned}$$

Portanto, temos a equação (3.5). Aplicando-a em $V_s := Y_s\left(X_s\right)$ temos a equação (3.6),

$$\begin{aligned} \delta_s\left[//_s^{-1} Y_s\left(X_s\right)\right] &= //_s^{-1} P\left(X_s\right)\delta_s\left[Y_s\left(X_s\right)\right] \\ &= //_s^{-1} P\left(X_s\right)\left(\frac{d}{ds}Y_s\right)\left(X_s\right) ds \\ &\quad + //_s^{-1} P\left(X_s\right) Y_s'\left(X_s\right)\delta_s X_s \\ &= //_s^{-1} P\left(X_s\right)\left(\frac{d}{ds}Y_s\right)\left(X_s\right) ds \\ &\quad + //_s^{-1}\nabla_{\delta_s X_s} Y_s. \end{aligned}$$

□

Proposição 50. *Com as mesmas hipóteses da proposição anterior, temos que para todo $\omega \in T_oM$,*

$$\begin{aligned} //_s^{-1}\delta_s^{\nabla}\left[\nabla_{//_s\omega} Y_s\right] &= \delta_s\left[//_s^{-1}\nabla_{//_s\omega} Y_s\right] \\ &= //_s^{-1}\nabla^2_{\delta Y_s \otimes //_s\omega} Y_s + //_s^{-1}\left[\nabla_{//_s\omega}\left(\frac{d}{ds}Y_s\right)\right]. \end{aligned}$$

Além disso, se X_s é um movimento Browniano, então

$$\begin{aligned} d\left[//_s^{-1} Y_s\left(X_s\right)\right] &= //_s^{-1}\nabla_{//_s db_s} Y_s + //_s^{-1}\left(\frac{d}{ds}Y_s\right)\left(X_s\right) ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} //_s^{-1}\nabla^2_{//_s e_i \otimes //_s e_i} Y_s ds \end{aligned}$$

onde $\{e_i\}_{i=1}^d$ é uma base ortonormal para T_oM.

Demonstração. Seja $W_i(m) = P(m)\, e_i$ para $i = 1, ..., N$. Pela proposição 3,

$$\begin{aligned}\nabla_{//_s\omega} Y_s &= \langle //_s\omega, W_i(X_s)\rangle \left(\nabla_{W_i} Y_s\right)(X_s) \\ &= \langle \omega, //_s^{-1} W_i(X_s)\rangle \left(\nabla_{W_i} Y_s\right)(X_s)\end{aligned}$$

e

$$//_s\omega = \langle //_s\omega, W_i(X_s)\rangle W_i(X_s) = \langle \omega, //_s^{-1} W_i(X_s)\rangle W_i(X_s)$$

ou ainda,

$$\omega = \langle \omega, //_s^{-1} W_i(X_s)\rangle //_s^{-1} W_i(X_s).$$

Tomando a derivada covariante de $\nabla_{//_s\omega} Y_s$ e usando a equação (3.6) temos

$$\begin{aligned}\delta^{\nabla}\left[\nabla_{//_s\omega} Y_s\right] &= \langle //_s\omega, \nabla_{\delta_s X_s} W_i\rangle \left(\nabla_{W_i} Y_s\right)(X_s) \\ &\quad + \langle //_s\omega, W_i(X_s)\rangle \nabla_{\delta_s X_s} \nabla_{W_i} Y_s(X_s) \\ &\quad + \langle \omega, //_s^{-1} W_i(X_s)\rangle \left(\nabla_{X_i}\left(\frac{d}{ds} Y_s\right)\right)(X_s) \\ &= \langle //_s\omega, \nabla_{\delta_s X_s} W_i\rangle \left(\nabla_{W_i} Y_s\right)(X_s) + \langle //_s\omega, W_i(X_s)\rangle \nabla^2_{\delta_s X_s \otimes W_i} Y_s \\ &\quad + \langle //_s\omega, W_i(X_s)\rangle \nabla_{\nabla_{\delta_s X_s} W_i} Y_s + \left(\nabla_{//_s\omega}\left(\frac{d}{ds} Y_s\right)\right)(X_s) \\ &= \left(\nabla_{\langle //_s\omega, \nabla_{\delta_s X_s} W_i\rangle W_i(X_s) + \langle //_s\omega, W_i(X_s)\rangle \nabla_{\delta_s X_s} W_i} Y_s\right)(X_s) \\ &\quad + \nabla^2_{\delta_s X_s \otimes //_s\omega} Y_s + \left(\nabla_{//_s\omega}\left(\frac{d}{ds} Y_s\right)\right)(X_s).\end{aligned}$$

Agora tomando a derivada de $\omega = \langle \omega, //_s^{-1} W_i(X_s)\rangle //_s^{-1} W_i(X_s)$ temos

$$0 = \delta\omega = \langle \omega, //_s^{-1} \nabla_{\delta_s X_s} W_i\rangle //_s^{-1} W_i(X_s) + \langle \omega, //_s^{-1} W_i(X_s)\rangle //_s^{-1} \nabla_{\delta_s X_s} W_i$$

logo,

$$\langle //_s\omega, \nabla_{\delta_s X_s} W_i\rangle W_i(X_s) + \langle //_s\omega, W_i(X_s)\rangle \nabla_{\delta_s X_s} W_i = 0$$

Assim, usando essa identidade temos,

$$\delta^{\nabla}\left[\nabla_{//_s\omega} Y_s\right] = \nabla^2_{\delta_s X_s \otimes //_s\omega} Y_s + \left(\nabla_{//_s\omega}\left(\frac{d}{ds} Y_s\right)\right)(X_s)$$

como queríamos.

Agora suponha que X_s é um movimento Browniano e $b_s = \Psi_s(X)$ é um anti-desenvolvimento T_oM-movimento Browniano associado a X. Então pela equação (3.6),

$$\begin{aligned}
d\left[//_s^{-1} Y_s(X_s)\right] &= //_s^{-1}\left(\frac{d}{ds}Y_s\right)(X_s)\,ds + //_s^{-1}\nabla_{//_s\delta b_s} Y_s \\
&= //_s^{-1}\left(\frac{d}{ds}Y_s\right)(X_s)\,ds + \left(//_s^{-1}\nabla_{//_s e_i} Y_s\right)\delta b_s^i
\end{aligned}$$

e usando a equação mostrada anteriormente temos,

$$\begin{aligned}
\left(//_s^{-1}\nabla_{//_s e_i} Y_s\right)\delta b_s^i &= \left(//_s^{-1}\nabla_{//_s e_i} Y_s\right) db_s^i + \frac{1}{2} d\left(//_s^{-1}\nabla_{//_s e_i} Y_s\right) db_s^i \\
&= //_s^{-1}\nabla_{//_s db_s} Y_s + \frac{1}{2} //_s^{-1}\nabla^2_{\delta X_s \otimes //_s e_i} Y_s db_s^i \\
&= //_s^{-1}\nabla_{//_s db_s} Y_s + \frac{1}{2} //_s^{-1}\nabla^2_{//_s e_j \otimes //_s e_i} Y_s db_s^i db_s^j \\
&= //_s^{-1}\nabla_{//_s db_s} Y_s \\
&\quad + \frac{1}{2} //_s^{-1}\nabla^2_{//_s e_i \otimes //_s e_i} Y_s ds
\end{aligned}$$

pois b é movimento Browniano. $\square$

Teorema 51. *Seja Y_s a solução da equação*

$$\delta Y_s = \mathrm{X}(Y_s)\,\delta B_s + X_0(Y_s)\,ds$$

onde $Y_0 = 0 \in M$ e $b_s = \Psi_s(Y) \in T_0 M$. Então

$$\begin{aligned}
b_s &= \int_0^s //_r^{-1}(Y)\left[\mathrm{X}(Y_r)\,\delta B_r + X_0(Y_r)\,dr\right] \\
&= \int_0^s //_r^{-1}(Y)\mathrm{X}(Y_r)\,dB_r \\
&\quad + \int_0^s //_r^{-1}\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \left(\nabla_{X_i} X_j\right)(Y_r)\,dB_r^i dB_r^j + X_0(Y_s)\right] dr.
\end{aligned}$$

Portanto se B é um movimento Browniano, então

$$\begin{aligned}
b_s &= \int_0^s //_r^{-1}(X)\,\mathrm{X}(Y_r)\,dB_r \\
&\quad + \int_0^s //_r^{-1}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\nabla_{X_i} X_j\right)(Y_r) + X_0(Y_r)\right] dr
\end{aligned}$$

Demonstração. Pela definição de b temos

$$\begin{aligned} db_s &= //_s^{-1}(Y)\left[\mathrm{X}(Y_s)\,\delta B_s + X_0(Y_s)\,ds\right] \\ &= //_s^{-1}(Y)\left[\mathrm{X}(Y_s)\,dB_s + X_0(Y_s)\,ds\right] \\ &\quad + \frac{1}{2} d\left[//_s^{-1}(Y)\mathrm{X}(Y_s)\right] dB_s \\ &= //_s^{-1}(Y)\left[\mathrm{X}(Y_s)\,dB_s + X_0(Y_s)\,ds\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[//_s^{-1}(Y)\nabla_{\mathrm{X}(Y_s)dB_s}\mathrm{X}\right] dB_s \\ &= //_s^{-1}(Y)\left[\mathrm{X}(Y_s)\,dB_s + X_0(Y_s)\,ds\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}//_s^{-1}(Y)\sum_{i,j=1}^{n}\left(\nabla_{X_i}X_j\right)(Y_s)\,dB_s^i dB_s^j \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} d\left[//_s^{-1}(Y)\,\mathrm{X}(Y_s)\,dB_s\right] dB_s &= \left[//_s^{-1}(Y)\,\nabla_{dY_s}\mathrm{X}\right] dB_s = \left[//_s^{-1}(Y)\,\nabla_{\mathrm{X}(Y_s)dB_s}\mathrm{X}\right] dB_s \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\nabla_{X_i}X_j\right)(Y_s)\,dB_s^i dB_s^j \end{aligned}$$

□

Corolário 52. *Suponha B_s um $\mathbb{R}^N$-movimento Browniano, Y_s solução da equação*

$$\delta Y_s = \mathrm{X}(Y_s)\,\delta B_s + X_0(Y_s)\,ds$$

e $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\nabla_{X_k}X_k\right) + X_0 = 0$. Então Y é uma M-martingale de variação quadrática,

$$dY_s \otimes dY_s = \sum_{k=1}^{n} X_k(Y_s) \otimes X_k(Y_s)\,ds.$$

Demonstração. Pela equação de b_s encontrada acima e pelo teorema de construções estocásticas de rolamento, temos Y uma martingale, logo pela hipótese temos

$$dY^i dY^j = \sum_{k,l=1}^{n} X_k^i(Y)\,X_l^j(Y)\,dB^k dB^l = \sum_{k=1}^{n} X_k^i(Y)\,X_k^j(Y)\,ds$$

onde $\{e_i\}_{i=1}^N$ é a base canônica do $\mathbb{R}^N$, $X^i := \langle X, e_i\rangle$ e $X_k^i(Y) = \langle X_k(Y), e_i\rangle$. Concluímos que

$$dX_s \otimes dX_s = \sum_{i,j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} e_i \otimes e_j X_k^i(Y)\,X_k^j(Y)\,ds = \sum_{k=1}^{n} X_k(Y_s) \otimes X_k(Y_s)\,ds.$$

□

Corolário 53. *Suponha que B é uma $\mathbb{R}^N$-semimartingale e Y_s é solução de*

$$\delta Y = P(Y)\,\delta B$$

com $Y_0 = o \in M$. Então,

1. Se B é uma martingale, então Y é uma martingale.

2. Se B é um movimento Browniano então Y é um movimento Browniano.

Demonstração. Para mostrar 1. temos que se Y é solução da equação $\delta Y = P(Y)\,\delta B$ com $Y_0 = 0 \in M$ é equivalente a ser solução da equação de Stratonovich $\delta Y_s = \sum_{i=1}^{N} X_i(Y_s)\,\delta B_s^i$ com $X_i(m) = P(m)\,e_i$ para todo $i = 1, 2, ..., N$. Calculemos

$$\nabla_{X_i} X_j = \nabla_{Pe_i} Pe_j = PdP(Pe_i)\,e_j = dP(Pe_i)\,Q_{e_j}$$

logo pelo lema 49 temos $\sum_{i,j=1}^{N} (\nabla_{X_i} X_j)(Y_r)\,dB_r^i dB_r^j = 0$. E portanto,

$$b_s = \int_0^s //_r^{-1}(Y) mathrm X(Y_r)\,dB_r$$

assim, b_s é uma semimartingale, ou seja, que Y é uma martingale.

Para mostrar 2. basta considerar a variação quadrática de Y e escolhemos uma base ortogonal tal que

$$dY_s \otimes dY_s = \sum_{k=1}^{N} P(Y_s)\,e_i \otimes P(Y_s)\,e_j ds = \mathcal{I}(M)\,ds,$$

logo B é um movimento Browniano pelo critério de Lévy.

□

O seguinte teorema nos mostra que a integral de Stratonovich pode ser substituida pela integral de Itô.

Teorema 54. *Seja B uma $\mathbb{R}^N$-semimartingale, X é solução de $\delta X = P(X)\,\delta B$ onde temos $X_0 = o \in M$, sejam*

$$b := \int_0^{\cdot} u^{-1}\delta X = \int_0^{\cdot} u^{-1} P(X)\,\delta B$$

é o anti-desenvolvimento de X e o processo normal β é definido por

$$\beta := \int_0^{\cdot} u^{-1} Q(X)\,dB = Q(o)\int_0^{\cdot} u^{-1} dB$$

então

$$b = \int_0^{\cdot} u^{-1} P\left(X\right) dB = P\left(o\right) \int_0^{\cdot} u^{-1} dB \tag{3.7}$$

e se B é o movimento Browniano canônico do $\mathbb{R}^N$ então (b, β) também é um movimento Browniano canônico do $\mathbb{R}^N$ e os processos b_s e X_s são todos independentes de β.

Demonstração. Sejam $p = P\left(X\right)$ e u o transporte paralelo em $M \times \mathbb{R}^N$. Ou seja, $\delta u + \Gamma\left(\delta X\right) u = 0$ com $u_0 = I \in O\left(N\right)$. Então,

$$\begin{aligned}
d\left(u^{-1} P\left(X\right)\right).dB &= u^{-1}\Gamma\left(\delta X\right) P\left(X\right) dB + u^{-1} dP\left(\delta X\right) dB \\
&= u^{-1}(dQ\left(\delta X\right) P\left(X\right) + \\
&\quad u^{-1} dP\left(\delta X\right) Q\left(X\right)) P\left(X\right) dB + u^{-1} dP\left(\delta X\right) dB \\
&= u^{-1}\left[dQ\left(\delta X\right) P\left(X\right) dB + dP\left(\delta X\right) dB\right], \; PQ = 0 \\
&= -u^{-1} dQ\left(\delta X\right) Q\left(X\right) dB, \; P - I = -Q \\
&= -u^{-1} dQ\left(P\left(X\right) dB\right) Q\left(X\right) dB \\
&= 0
\end{aligned}$$

onde da segunda para a terceira iqualdade usamos que

$$\Gamma\left(\delta X\right) = dQ\left(\delta X\right) P\left(X\right) + dP\left(\delta X\right) Q\left(X\right).$$

Logo, demonstramos (3.7).

Suponha que B é um Movimento Browniano. Como $(b, \beta) = \int_0^{\cdot} u^{-1} dB$ e u é um processo e u é um processo ortogonal, temos do critério de Lévy que (b, β) é um Movimento Browniano canônico e, em particular, temos que β é independente de b. Como (X, u) satisfaz as equações diferenciais estocásticas

$$dX = u\delta b \text{ e } du + \Gamma\left(u\delta b\right) u = 0$$

com $X_0 = o$ e $u_0 = I \in End\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Segue-se que o processo (X, u) é um funcional de b e portanto independe de β. $\square$

3.5 Fluxos estocásticos e a Equação de Stratonovich

Neste momento denotaremos por B_s um movimento Browniano em $\mathbb{R}^n$ e para cada $m \in M$ seja $T_s(m) = Y_s$ a solução da equação de Stratonovich

$$\delta Y_s = \mathrm{X}(Y_s)\,\delta B_s + X_0(Y_s)\,ds := \sum_{i=1}^{n} X_i(Y_s)\,\delta B_s^i + X_0(Y_s)\,ds \text{ com } X_0 = m$$

onde $\{X_i\}_{i=0}^n \subset \Gamma(TM)$ são campos de vetores em M tais que $\mathrm{X}(m)\,a := \sum_{i=1}^n a_i X_i(m)$ e Y_s é uma M-semimartingale. Portanto, ver H. Kunita [10], existe um $T_s(m)$ contínuo em s e diferenciável em m solução da equação de Stratonovich, e além disso, a derivada de $T_s(m)$ relativa a m é solução da equação diferencial estocástica encontrada derivando-se a equação descrita acima.

Teorema 55. *Sejam*

$$Z_s := T_s \text{ e } z_s := /\!/_s^{-1} Z_s \in End(T_o M) \tag{3.8}$$

onde $/\!/_s$ é o transporte paralelo estocástico ao longo de $Y_s := T_s(o)$. Então, para todo $v \in T_o M$

$$\delta_s^\nabla Z_s v = (\nabla_{Z_s v} X)\,\delta B_s + (\nabla_{Z_s v} X_0)\,ds \tag{3.9}$$

com $Z_0 v = v$. Ou seja, pela proposição 58 a equação acima é equivalente a

$$dz_s v = /\!/_s^{-1}(\nabla_{/\!/_s z_s v}\mathrm{X})\,\delta B_s + /\!/_s^{-1}(\nabla_{/\!/_s z_s v} X_0)\,ds. \tag{3.10}$$

Demonstração. Para mostrar a equação (3.9) iremos derivar a equação de Stratonovich em m na direção $v \in T_0 M$. Logo

$$\delta_s Z_s v = \sum_{i=1}^{n} (DX_i(Y_s)\,Z_s v) \circ \delta B_s^i + DX_0(Y_s)\,Z_s v ds$$

com $Z_0 v = v$. Assim,

$$\begin{aligned}
\delta_s^\nabla Z_s v &= P(Y_s)\,\delta_s Z_s v \\
&= P(Y_s)\sum_{i=1}^{n} (DX_i(Y_s)\,Z_s v) \circ \delta B_s^i + P(Y_s)\,DX_0(Y_s)\,Z_s v ds \\
&= (\nabla_{Z_s v}\mathrm{X})\,\delta B_s + (\nabla_{Z_s v} X_0)\,ds
\end{aligned}$$

como queríamos. □

O pull back, $Ric_{//_s}$, do tensor de Ricci pelo transporte paralelo é definido por

$$Ric_{//_s} := //_s^{-1} Ric_{Y_s} //_s$$

Teorema 56. *A forma de Itô da equação (3.10) é*

$$dz_s v = //_s^{-1} \left(\nabla_{//_s} \mathrm{X}\right) dB_s + \alpha_s ds \tag{3.11}$$

onde

$$\alpha_s := //_s^{-1} \left[\nabla_{//_s z_s v} \left(\sum_{i=1}^{n} \nabla_{X_i} X_i + X_0 \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} R^{\nabla} \left(//_s z_s v, X_i \left(Y_s\right)\right) X_i \left(Y_s\right) \right] ds.$$

Demonstração. Aqui iremos seguir o mesmo método de cálculos para encontrar a forma de Itô que já tivemos contato anteriormente, pela proposição 51

$$\begin{aligned} d\left[//_s^{-1} \left(\nabla_{//_s} z_s v \mathrm{X}\right)\right] dB_s &= //_s^{-1} \left[\nabla^2_{\mathrm{X}(Y_s) dB_s \otimes //_s z_s v} \mathrm{X} + \nabla_{//_s d z_s v} \mathrm{X} \right] dB_s \\ &= //_s^{-1} \left[\nabla^2_{\mathrm{X}(Y_s) dB_s \otimes //_s z_s v} \mathrm{X} + \nabla_{\left(\nabla_{//_s} z_s v \mathrm{X}\right) dB_s} \mathrm{X} \right] dB_s \\ &= //_s^{-1} \left[\sum_{i=1}^{n} \nabla^2_{X_i(Y_i) \otimes //_s z_s v} X_i + \nabla_{\left(\nabla_{//_s} z_s v X_i\right)} X_i \right] ds. \end{aligned}$$

Agora pela proposição 2, é fácil verificar que

$$\begin{aligned} \nabla^2_{X_i(Y_i) \otimes //_s z_s v} X_i &= \nabla^2_{//_s z_s v \otimes X_i(Y_s)} X_i ds + R^{\nabla} \left(X_i \left(Y_s\right), //_s z_s v \right) X_i \left(Y_s\right) \\ &= \nabla^2_{//_s z_s v \otimes X_i(Y_s)} X_i ds + R^{\nabla} \left(//_s z_s v, X_i \left(Y_s\right) \right) X_i \left(Y_s\right) \\ &= \left[\nabla_{//_s z_s v} \nabla_{X_i} X_i - \nabla_{\nabla_{//_s z_s v} X_i} X_i \right] \\ &\quad - R^{\nabla} \left(//_s z_s v, X_i \left(Y_s\right) \right) X_i \left(Y_s\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$d\left[//_s^{-1} \left(\nabla_{//_s} z_s v \mathrm{X}\right)\right] dB_s = \sum_{i=1}^{n} //_s^{-1} \left[\nabla_{//_s z_s v} \nabla_{X_i} X_i - R^{\nabla} \left(//_s z_s v, X_i \left(Y_s\right) \right) X_i \left(Y_s\right) \right] ds.$$

Portanto, da equação acima e da equação (4.10) temos a equação (4.11). □

Proposição 57. *Se $n = N$ e $X_i(m) = P(m) e_i$, ou seja, a equação de Stratonovich*

$$\delta Y_s = \mathrm{X}\left(Y_s\right) \delta B_s + X_0 \left(Y_s\right) ds$$

é equivalente a equação

$$\delta Y = P(Y)\,\delta B$$

com B um $\mathbb{R}^n$-semimartingale. Então,

$$\alpha_s := -\frac{1}{2} Ric_{//_s} z_s v ds.$$

ou seja, a equação (4.3) é equivalente a equação

$$dz_s v = //_s^{-1} P(Y_s)\, dP(//_s z_s v)\, dB_s + \left[//_s^{-1} \nabla_{//_s z_s v} X_0 - \frac{1}{2} Ric_{//_s} z_s v \right] ds.$$

Demonstração. Como $X_i(m) = P_i(m)$ e $X_0(m) = 0$. Então,

$$(\nabla_{//_s} z_s v \mathrm{X})\, dB_s = //_s^{-1} P(Y_s)\, dP(//_s z_s v)\, dB_s. \tag{3.12}$$

Pela definição do tensor de Ricci e sabendo que

$$\sum_{i=1}^{N} X_i(m) \otimes X_i(m) = \sum_{i=1}^{d} u_i \otimes u_i$$

temos

$$R^{\nabla}(//_s z_s v, X_i(Y_s)\, X_i(Y_s)) = Ric_{//_s} //_s z_s v \tag{3.13}$$

Assim, combinando as equações (3.12) e (3.13) com a equação (4.10) e a definição de α_s temos a equação procurada. □

Agora, estamos interessados no seguinte espaço de caminho

$$W(T_o M) := \{\omega \in C([0,1]) \to T_o M \mid \omega(0) = 0_o \in T_o M\}$$

chamado de Espaço de Wiener. A medida neste espaço, que chamaremos de medida de Wiener e denotaremos por μ, é uma medida induzida através da continuidade dos caminhos de um processo de Wiener (ou movimento Browniano).

Assim, o próximo resultado foge do enfoque de nossos estudos, mas o enunciaremos para tratar do teorema a seguir.

(Representação de uma Martingale) Seja $F \in L^2(\mu)$ .Então existe um processo previsível, a_s, tal que $E\left(\int_0^1 \mid a_s \mid^2 ds < \infty\right)$ e

$$F = \mathbb{E}(F) + \int_0^1 \langle a, db \rangle.$$

Teorema 58. *(Filtrando ruído redundante) Utilizando as mesmas hipóteses dos dois últimos teoremas com B um $\mathbb{R}^n$-semimartingale e $X_i(m) = P_i(m)e_i$. E, ainda, seja $\mathcal{M}$ a σ-álgebra gerada pela solução $Y = \{Y_s : s \geq 0\}$. Então existe uma versão $\bar{z}_s$de $\mathbb{E}[z_s \mid \mathcal{M}]$ tal que $s \to \bar{z}_s$é contínua e $\bar{z}$ satisfaz,*

$$\bar{z}_s v = v + \int_0^s \left[//_r^{-1} \left(\nabla_{//_r \bar{z}_r v} X_0 \right) - \frac{1}{2} Ric_{//_r} \bar{z}_r v \right] dr.$$

Em particular, se $X_0 = 0$ então

$$\frac{d}{ds} \bar{z}_s = -\frac{1}{2} Ric_{//_s} \bar{z}_s \text{com } \bar{z}_0 = id.$$

Demonstração. Seja b_s a parte do mapa de anti-desenvolvimento, $\Psi_s(Y)$, que é uma martingale,

$$b_s := \int_0^s //_r^{-1} P(Y_r)\, \delta B_r = \int_0^s //_r^{-1} P(Y_r)\, dB_r$$

como (Y_s, u_s) é solução da equação estocástica,

$$\delta Y_s = u_s \delta b_s + X_0(Y_s) \text{ com } Y_0 = 0$$

$$\delta u = -\Gamma(\delta Y)\, u = -\Gamma(u \delta b)\, u \text{ com } u_0 = I \in O(N).$$

Segue-se que (Y, u) pode ser escrito como uma função do movimento Browniano b. Pelo resultado acima, qualquer função mensurável $f(Y)$ pode ser escrita como

$$f(Y) = f_0 + \int_0^1 \langle a_r, db_r \rangle = f_0 + \int_0^1 \langle a_r, //_s^{-1} [P(Y_r)\, dB_r].$$

Assim, usando que $PdQ = dPQ$ a equação acima e a propriedade da isometria da integral de Itô temos,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\{ \int_0^s [P(Y_s)\, dP(//_r z_r v)\, dB_r]\, f(Y) \} \\
= \; & \mathbb{E}\{ \int_0^s [P(Y_s)\, dP(//_r z_r v)\, dB_r] \int_0^1 \langle P(Y_r) //_r a_r, dB_r \rangle \} \\
= \; & \mathbb{E}\{ \int_0^s [dP(//_r z_r v)\, Q(Y_r)\, P(Y_r) //_r a_r]\, dr \} = 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^s P(Y_r)\, dP(//_r z_r v)\, dB_r \mid \mathcal{M} \right] = 0$$

□

BIBLIOGRAFIA

[1] Bishop, R. L. e Crittenden, R, J.; Geometry of Manifolds, AMS Chelsa Publishing, Province, RI, 2001, Reprint of the 1964 original.

[2] Brzezniak, Z. e Tomasz, Z.; Basic stochastic processes: a course through exercises, London-New York, Springer, 1999.

[3] Catuogno, P. J.; A Geometric Itô Formula. Matemática contemporânea (SBM) Vol. 33, 2007, pp. 85-99.

[4] Catuogno,P.J.; Stelmastchuk, S. Martingale on frame bundle, Potencial Analysis, 2008, pp. 61-69.

[5] do Carmo, M. P.; Geometria Riemanniana, quarta edição, IMPA, Projeto Euclides, 2008.

[6] Driver, B. K. A Cameron-Martin type quasi-invariance theorem for Brownian motion on a compact Riemannian manifold, J. Functional Analysis 110, 1992, no.2, 272-376.

[7] Elworthy, K. D.; Stochastic differential equations on manifolds, London Mathematical Socity Lecture Notes Series, vol. 70, Cambridge University Press, Cambrigde, 1982.

[8] Emery, M.; Stochastic Calculus in Manifolds, Springer-Verlag,1989.

[9] Hsu, E.P.; Stochastic analysis on manifolds. Graduate Studies in Mathematics, 38. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[10] Kunita, H.; Stochastic flows and stochastic differential equations, Cambrigde studies in Advanced Mathematics, vol. 24, Cambrigde University Press, Cambrigde, 1990.

[11] Meyer, P.A.; Géométrie stochastique sans larmes. Séminaire de Probabilités, XV (Université de Strasbourg, Strasbourg, 1979/1980) pp. 44-102, Lecture Notes in Mathematics, 850, Springer, Berlin-New York, 1981.

[12] Protter, P.; Stochastic Integration and Differential Equations, A new Approach, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[13] Ruffino, P. R. C.; Uma Iniciação aos Sistemas Dinâmicos Estocásticos, segunda edição, 27o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2009.